

**Գ. Բ. Պետրոսյան**

**ՄԻՒԱՅԻԼ ՎԱՍԻԼԵՎԻԶ ԼՈՍՈՆՈՍՈՎԻ ԿՅԱՆՔԻ ՈՒ ԳՈՐԾՈՒՆԵՈՒԹՅԱՆ Մ Ա Ս Ի Ն<sup>1</sup>**

Անվանի գիտնականների շարքում, որոնք խոշոր հայտնագործություններ են կատարել գիտության բազմապիսի բնագավառներում, Լոմոնոսովը գրավում է հատուկ տեղ: Նա խոշոր հանճար էր, նրա խորախափանց միտքն ընդգրկեց



բնական և հասարակական գիտությունների տարրեր բնագավառներ, լուծեց բազմապիսի գիտական խնդիրներ, որոնք վաղուց մտել են համաշխարհային գիտության դանձարանը:

Խաղաղության համաշխարհային խորհուրդի հանձնարարության մեջ աչք տարի նույնիսկ, աշխարհի ժողովուրդները նշում են ուսա ժողովրդի ղավակ, հանճարեղ գիտնական Մ. Վ. Լոմոնոսովի ծննդյան 250-ամյակը:

Այդ տարեդարձը մեծ հպարտությամբ են նշում կապիտալիստական կապանքներից ազտաազդված ուսա մեծ ժողովուրդը, Սովետական Միության բազմազգ ժողովուրդները, այդ իմում նաև հայ ժողովուրդը:

<sup>1</sup> Զեկուցված է Երևանում, Միջազգային Վասիլևեի Լոմոնոսովի ծննդյան 250-ամյակին նվիրված՝ Հայկական ՍՍՐ Գիտությունների ակադեմիայի Ընդհանուր ժողովի հանդիսավոր սեսիայում, 1961 թ. նոյեմբերի 17-ին:

Այս տարեգարձը կուժեղացնի տարրեր երկրների գիտնականների համագործակցությունը, կուժեղացնի գիտական հասարակացության պայքարը խաղաղության համար, նա ավելի կխթանի սովետական առաջավոր գիտության այն հոյակապ զարգացմանը, որպիսին նախատեսվում է ՍՍԿՊ XXII համադոմարի կողմից հաստատված՝ պարտիայի նոր Մրազրով:

Նախքան Մ. Վ. Լոմոնոսովի կյանքին ու գործունեությանը անցնելը, համառոտակի կանգ առնենք նրա ապրած դարաշրջանի մի քանի բնորոշ կողմերի վրա:

Բնագիտության զարգացումը XVIII դարում ընթանում էր այնպիսի պայմաններում, երբ մի կողմից՝ աճում էր մանուֆակտուրային արտադրությունը, մյուս կողմից՝ առաջավոր հասարակական-փիլիսոփայական մտքի ամբիստական ուղղությունը: Գիտական աշխատանքը այդ շրջանում, նախորդ շրջանի համեմատությամբ, տարվում է ավելի խորը՝ բնական երևույթների սխեմատիկ պատման, գիտական եզրակացությունների էքսպլիցիտնետայ հիմնավորումով, մասնատիկական գիտական մեթոդների մշակմամբ ու կիրառմամբ: Նման գիտությունը պահանջում էր նոր գիտական կենտրոններ: Այդպիսի կենտրոններ դարձան Եվրոպայի մի շարք քաղաքներում XVII—XVIII դարերում կազմակերպված գիտությունների ակադեմիաները և գիտական ընկերությունները: Պետերբուրգի Գիտությունների ակադեմիան, որ կազմակերպվեց 1725 թվականին, հանդիսացավ նոր բնագիտության կենտրոնը Ռուսաստանում:

Արդյունաբերության զարգացումը Ռուսաստանում XVIII դարում հիմնականում ընթանում էր այն ուղղությամբ, որպեսզի լայն շափերով օգտագործվեն երկրի բնական հարստությունները: Անտառները, արժեքավոր հանքերը, հողը հանդիսանում էին արդյունաբերության և գյուղատնտեսության յուրացման առարկան:

Արդյունաբերության զարգացման նման բնույթը պահանջում էր այդ ժամանակվա գիտությունից մանրամասն կերպով ուսումնասիրել երկրի բնական հարստությունները: Համանման պահանջներ դրվում էին ծավալվող առևտրի կողմից, որը Ռուսաստանի հսկայական տարածությունները իրար հետ կապում էր, որպես տնտեսական մեկ ամբողջ միավոր: Բնագիտության զարգացումը Ռուսաստանում սերտորեն կապված է Պետրոս I-ի գործունեության հետ, նրա Թաղալիքության վերջին շրջանում Ռուսաստանում արդեն հաշվվում էին ավելի քան երկու հարյուր արդյունաբերական ձեռնարկություններ, որոնցից մի քանիսը բավականին խոշոր էին: Այդ ժամանակ ռուսական գործարանները ձուլում էին 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub> միլիոն փուֆ շուգուն: Պետրոս I-ը կազմակերպում էր բազմաթիվ էքսպեդիցիաներ, որոնք հետապնդում էին տարրեր նպատակներ: Գրանցից մի քանիսը դեպի Հնդկաստան տանող ջրային ու ցամաքային ճանապարհ էին որոնում, կատարում էին նկարագրություն և պատրաստում քարտեզներ: Ուրիշները պարզում էին, թե Ասիան և Ամերիկան արդյո՞ք միանում են, եթե այո՞, ապա որտեղ:

Հրետանային գործի, ծովային նավատորմի ստեղծման, մանուֆակտուրայի զարգացման համար անհրաժեշտ էին մարզիկ, որոնք գիտենային մեխանիկա, մասնեմատիկա, աստղագիտություն, ֆիզիկա և այլ գիտություններ:

Պետրոս I-ը պարզ կերպով հասկանում էր, որ հողեր ակադեմիաները չեն կարող հանդիսանալ բնական գիտությունների զարգացման ու տարածման կենտրոններ: Նա իր նախաձեռնությունները ու ղեկավարությունները Պետերբուրգում

հիմնադրում է Գիտությունների ակադեմիա, որտեղ սկզբնական շրջանում արտասահմանից հրավիրվում են խոշոր քնազետ գիտնականներ:

Պետերբուրգի ակադեմիան հանդիսանում էր բարձրագույն գիտական ընկերություն և ուսումնական հաստատություն: Վերջինիս մեջ մտնում էին դիմնազիան և համալսարանը: Ակադեմիկոսները կոչվում էին պրոֆեսորներ և պետք է, բացի գիտական աշխատանքից, Համալսարանում կարդային նաև դասախոսություններ:

Բնագիտության զարգացման վերը նշված ժամանակաշրջանումն է, որ հրապարակ է գալիս Միխայիլ Վասիլևիչ Լոմոնոսովը և իր բաղձարովանդակ հետազոտություններով ու աշխատանքներով ստակում իր անունը բոլոր ժամանակների համար:



Լոմոնոսովը ծնվել է 1711 թվականի նոյեմբերի 19-ին, ունեւոր ձկնորս Վասիլի Գորոֆնևիչ Լոմոնոսովի ընտանիքում, Միշանինսկ գյուղում, որը գտնվում է Արխանգելսկ քաղաքից 80 կիլոմետր հեռավորության վրա:

Տասը տարեկանից Միխայիլը ուղևկցում է իր հորը հեռավոր վտանգավոր ճանապարհորդությունների ժամանակ, Սպիտակ ծովում, Հյուսիսային սառուցյալ օվկիանոսում: Այդ ճանապարհորդությունների ժամանակ նա շատ բան է տեսնում և ծանոթանում գանազան արտադրությունների: Նրա վրա մեծ տպավորություն է թողնում հյուսիսում մարդու ձեռքով ստեղծվող ռազմական ու առևտրական նավերը, և հյուսիսափայլը:

Այդ բոլորը պատանու մեջ առաջացնում է ծարավ դեպի գիտելիքները: 1725 թվականին Լոմոնոսովը մեծ դժվարությամբ ձևեր է բերում աշխարհիկ գրքեր ու կլանվում դրանցով: Նրա առաջ նոր գիտելիքների աշխարհ է բացում Մադնիցկու թվարանության դասադրքի ուսումնասիրությունը: Այդ գիրքը նման չէր ժամանակակից թվարանության ձեռնարկներին: Այդտեղ շարադրված էին ոչ միայն պարզ թվարանական գործողությունները, այլև մատչելի ձևով շարադրված էին պարզ տեղեկություններ ֆիզիկայից, երկրաշափությունից, աստղագիտությունից և այլ գիտություններից:

Անհաղթահարելի ձգտումը դեպի գիտությունը, որը հնարավոր չէր ձևեր բերել իր ծննդավայրում և մտալի քաղաքներում, ստիպեց Լոմոնոսովին մեկնելու Մոսկվա և 1731 թվականին ընդունվելու Մոսկվայի Սլավոնա-հունարարական ակադեմիան: Հոգևոր ակադեմիան ուներ 8 դասարան, առաջին շրջա դասարաններում դասավանդվում էր լատիներեն, սլավոնական լեզու, պատմություն և թվարանություն. միջին դասարաններում՝ պոեզիա, պերճախոսություն, բարձր դասարաններում՝ փիլիսոփայություն և աստվածաբանություն:

Շատ ժանր էին Լոմոնոսովի ուսումնասիրության առաջին տարիները, նա այդ մասին գրում է.

«...Մյուս կողմից՝ հայրս, կրթեք, բացի ինձնից, երեխաներ չունենալով, ասում էր, որ ես միակը լինելով, թողել եմ նրան, ձեռք եմ քաշել այն ամբողջ ունեցվածքից, որ նա արյուն-ցրտինքով վաստակել է ինձ համար և որը նրա մահից հետո կհասփռակեն ուրիշները: Մյուս կողմից՝ անասելի չբավորություն— ունենալով օրական մեկ ալտին (3 կոպեկ) ուճիկ, չէր կարելի օրական հացի համար ունենալ ալիլի, քան կես կոպեկ և կվասի համար՝ կես կոպեկ իսկ մնացածը՝ թղթի, ոսկամանի և այլ կարիքների համար...»:

Մյուս կողմից՝ դպրոցական մտքը տղաները բղավում և մասնորոշում ցույց են տալիս, իրր թե մի տե՛ս՝ ի՞նչ հիմարի պոլիս է եկել քսան տարեկան հասակում լատիներեն սովորելու...»:

Չնայած այդ դժվարություններին, կոմսոստոլը զբաղվում է ակադեմիական բարձր առաջադիմություն: Առաջին տարում նա անցնում է առաջին երկու դասարանների ծրագիրը և փոխադրվում է 3-րդ դասարանը: Կոմսոստոլի կողմից առաջին դասարաններում լատիներեն լեզվին կատարելապես տիրապետելը հետագայում շատ օգտակար եղավ նրա համար, որովհետև այդ ժամանակ համարյա բոլոր գիտական պարբերականները ու գրքերը հիմնականում ապադրվում էին լատիներեն լեզվով:

Ակադեմիայում կոմսոստոլը առաջին անգամ ծանոթանում է նոր փիլիսոփայության որոշ գաղափարների: Չնայած դասավանդման հիմքում ընկած էր սխոլաստիկան, սակայն փիլիսոփա Փ. Լոպատինսկու դասադրքում գրված էր՝ փիլիսոփան օցանկանալով իմանալ զուտ ճշմարտությունը, չի հենվում և ոչ մեկի խոսքերի վրա, փիլիսոփային հատուկ է ավելի շատ վստահել բանականությունը, քան հեղինակությունը... ճշմարտությունը բաց է բոլորի համար և դեռ սպառված չէ: Նրանից շատ բան է մնացել նաև ապագա սերունդների համար...»:

Բայց նման մտքերը բնորոշ չէին Ակադեմիայի դասավանդմանը:

1735 թվականին կոմսոստոլը արդեն սովորում էր վերջին դասարանում, նա խիստ մտահոգված էր, որ դաման պայմաններում սովորելով, չկարողացավ ուսումնասիրել իր սիրած գիտությունները՝ բնական գիտությունները, և շատացավ ֆիզիկայի ու քիմիայի բնագավառներին վերաբերող շատ հարցերի պատասխանը:

1735 թվականի դարնան վերջին կոմսոստոլին կանչում են Ակադեմիայի սեկտորի մոտ: Մի ամբողջ գիշեր նա մտածմունքի մեջ էր, կարծում էր, որ իրեն կուղարկեն հեռավոր շրջաններից մեկը, որպես հոգևորականի (տերտեր) կամ նորից քննության նյութի կղանա իր կողմից արված այն սխալ տեղեկությունը, որ ինքը հոգևորականի որդի է:

Կոմսոստոլի սուրխությունը շափ չկար, երբ նրան հայտնի դարձավ, որ ինքը այլ աշակերտների հետ միասին ուղարկվում է Պետերբուրգ՝ սովորելու Գիտությունների ակադեմիայի համալսարանում: Այդպիսով իրականացավ նրա ցանկությունը, որ առաջացել էր դեռ իր ծննդավայրում եղած տարիներին:

Պետերբուրգում կոմսոստոլը, շնորհիվ իր խոշոր ընդունակությունների և աշխատասիրության, շատ կարճ ժամանակում արժանանում է պրոֆեսորների ուշադրությանը և, որպես համապատասխան թեկնածու, 1736 թվականին երկու այլ ուսանողների հետ միասին գործուղվում է Գերմանիա՝ կատարելագործվելու գիտությունների մեջ:

Միխայիլը, հաղթահարելով յուրջ դժվարություններ և փորձություններ, ձեռք բերելով խորը գիտելիքներ, արտասահմանյան գործուղումից վերադառնում է հայրենիք 1741 թվականի հունիսին:

Ինչպիսի՞ գիտելիքներ ձեռք բերեց կոմսոստոլը այդ տարիներին:

Շնախ և առաջ, — գրում է ռուս հայտնի քիմիկոս Բ. Ն. Մենշտովինը, — նա կատարելապես դիտեր, բացի սուտերեն և եկեղեցա-սլավոներեն լեզուներից, նաև լատիներեն, գերմաներեն ու ֆրանսերեն, որոնցով ազատ գրում էր, ինչպիսի նաև կարողանում էր գրքեր կարդալ մի բանի այլ լեզուներով... Մարբուրգում նա չուրացրեց անհրաժեշտ մասնատարիկական գիտելիքներ, փիլիսոփայություն և տրամաբանություն, առանձնապես ֆիզիկա և քիմիա, ինչպես նաև բնական գի-

տալիսններ, ինչպես՝ հանքաբանություն, հանքային հանածոներ, հալիանդրեն, նաև բուսաբանություն ու կենդանաբանություն: Այնուհետև նա ծանոթացավ մի շարք կիրառական գիտությունների՝ տնցավ մեխանիկայի գանազան էյուղերը, իսկ Ֆրայերըով՝ մետալուրգիան, բառի ամենալայն իմաստով, սկսած հանքային գործից և վերջացրած մետաղների մշակմամբ ու մետաղափորձարկման գործով... նա գիտեր ապակեգործություն, կերամիկայի և ճենապակու արտադրությունը, աղագործություն, ծովագնացություն, աստղագիտություն, աշխարհագրություն: Չենք խոսում նրա գիտելիքների մյուս էյուղերի՝ ճարտասանության (հետադրություն), քերականության, պատմության, քաղաքատնտեսության մասին և այլն՝ կարելի է ասել որ ուսումնասության տարիները Լոմոնոսովին դարձրին բազմակողմանի զիանական ու սրբակալիկ, որ պատրաստ էր ձեռք գարկելու ամեն մի գործի: Արտասահմանյան գործուղումից վերադառնալուց Լոմոնոսովը անմիջապես չի նշանակվում որոշակի պաշտոնի: Որոշ ժամանակ անց՝ հատուկ դիմում ներկայացնելուց հետո, որակի հիշեցվում էր գործուղումից առաջ տրված խոստումը, նա 1742 թվականին նշանակվում է Գիտությունների ակադեմիայի աղյուսկա, տարեկան 360 ռուբլի ոսճիկով: Այդ զուամարով այն ժամանակ նա կարող էր առանց դժվարության հոգալ իր կարիքները, սակայն Ակադեմիայում տիրող անտնտեսվարության և դումարների ոչ նպատակային ծախսումների պատճառով, Լոմոնոսովը, ինչպես նաև ուրիշները, ամիսներով, մինչև անգամ ամբողջ տարով ոսճիկ չէին ստանում:

1743 թվականի հուլիսին Լոմոնոսովը չէր ստացել 1742 թվականի ոսճիկի  $\frac{1}{3}$ -ը: Նա հատուկ դիմումով խնդրում էր վճարել թեկուզ երկու ամսվա ոսճիկը:

Ակադեմիայի գրասենյակում, որի խորհրդականը հանդիսանում էր Շուստերը, մակագրություն է արվում՝ միջոցներ չունենալու պատճառով բաց թողնել 10 ռուբլի: 1743 թ. օգոստոսին Լոմոնոսովը դիմում է Ակադեմիային:

«Իրեթև մի ամբողջ տարի, — ես, նվաստագույնս, Ակադեմիայից ոսճիկ չէի ստանում, դրա համար էլ ծայրահեղ աղքատության մեջ ընկա: Իսկ այժմ հիվանդ եմ և ոչ միայն դեղորայք, այլև օրվա ասրուսա ձեռք բերելու որևէ միջոց չունեմ և փոխարինարար փող ձարել չեմ կարող»:

Այդ դիմումի պատասխանը լինում է հետևյալը. Դրամարկղում փող չունենալու պատճառով Լոմոնոսովին բաց թողնել հինգ ռուբլի:

Ակադեմիայում աշխատանքի անցնելու օրից մինչև իր մահը տաքարյուն և շիտակ բնավորություն ունեցող Լոմոնոսովը անհաշա պայքար է մղում ուսական գիտության ինքնուրույն զարգացման համար, Ակադեմիայում տիրող կամայականությունների դեմ: Նա փաստորեն զլխավորում էր ուս գիտնականների կատաղի պայքարը օտարերկրացիների բռնացման դեմ: Դրա համար էլ մինչև անգամ նա վեց ամիս բանտարկվում է:

Այդ շրջանում զգալի կերպով զարգանում է Լոմոնոսովի պոետիկական ձիրքը, և նրա կողմից գրված մի շարք օղաներ բարձրացնում են նրա հեղինակությունը հասարակության մեջ, հատկապես արքունի պալատում, որպիսի հանգամանքը զգալի կերպով փոխում է Ակադեմիայի սրբօրհասների վերաբերմունքը դեպի Լոմոնոսովը և դեպի նրա գիտական աշխատությունները:

1745 թ. հուլիսի 25-ին Լոմոնոսովը նշանակվում է քիմիական ամբիոնի սրբօրհաս: Պրոֆեսոր նշանակվելուց հետո Լոմոնոսովը ավելի լայն թափ է հաղորդում իր աշխատանքներին: Նա շատ ուսանելի առաջարկում հրատարակեց իր ուսուցիչ և, Վոլֆի էքսպերիմենտալ ֆիզիկան, որը մեծ նշանակություն ունեցավ Ռուսաստանում բնական գիտելիքների տարածման գործում: Նա ձեռ-

նարկեց և ինքը անձամբ հրատարակային դատաստություններ կարգաց ֆիզիկայից և, որ ամենակարևորն է, դրական վախճանի հասցրեց քիմիական լաբորատորիայի կառուցումը:

Քիմիական լաբորատորիայի կառուցման պատմությունն ուսանելի է այն տեսակետից, թե կոմոնոսովը ինչպիսի կրթությունը և հետևողականությունը է աշխատել իր առջև դրված խնդիրները լուծելու համար:

Առաջին անգամ քիմիական լաբորատորիայի կազմակերպման հարցը կոմոնոսովը գրել է 1742 թվականին, սակայն նրա դիմումը մնացել է առանց պատասխանի: Երկրորդ անգամ դիմում է 1743 թվականին, նշելով, որ անհրաժեշտ է կատարել քիմիական փորձեր և օդատկար լինել մեր հայրենիքին: Դիմումի պատասխանը՝ մերժել փող չունենալու պատճառով:

Երրորդ անգամ կոմոնոսովը դիմումը ներկայացնում է 1745 թվականին, այս անգամ լաբորատորիայի կառուցման անհրաժեշտությունը կապելով զարգացող արդյունաբերության պահանջների հետ: Այս անգամ նույնպես հարցը լուծվում է բացասական իմաստով:

Նույն թվականին նա անմիջապես դիմում է սենատին: Հարցը լուծվում է դրական իմաստով, բայց Ակադեմիայում տիրող անբարյացակամ վերաբերմունքը՝ հատկապես Շումախերի կողմից դեպի կոմոնոսովը և քաղաքակրթ. բերում է նրան, որ լաբորատորիայի կառուցումն սկսվում է 1748 թվականին, բայց շուտով ավարտվում է:

Կոմոնոսովի գիտական գործունեությունը հիմնականում կարելի է բաժանել երեք շրջանի:

Առաջին շրջանն սկսվում է ուսումնասիրության տարիները ավարտելուց մինչև քիմիական լաբորատորիայի կազմակերպումը, այսինքն մինչև 1748 թ.:

Այս շրջանում նա հիմնականում կատարում է ուսումնասիրություններ, որոնք վերաբերում են ֆիզիկայի տեսական հարցերին:

Երկրորդ շրջանն սկսվում է քիմիական լաբորատորիայի կառուցումից և տևում է մինչև 1757 թ.: Այդ տարիներին կոմոնոսովը հիմնականում զբաղվում է քիմիայի տեսական և էքսպերիմենտալ հարցերով:

Երրորդ շրջանն ընդգրկում է 1757 թվականից մինչև նրա կյանքի վերջը: կոմոնոսովը, այս շրջանում շարունակելով հին հարցերի ուսումնասիրությունը, շատ փաժանակ է հատկացնում կիրառական գիտություններին և վարչական գործունեությանը:

Խոշոր նշանակություն ունեն կոմոնոսովի աշխատանքները ֆիզիկայի բնագավառում: Նա ինքն էլ շատ մեծ նշանակություն էր տալիս և ասում էր՝

«Ուսանավորներ գրելը իմ հաճույքն է, ֆիզիկան՝ իմ մարդանքները»:

Առաջին շրջանում Միխայիլը տվեց սկզբունքային նշանակություն ունեցող մի շարք աշխատություններ: Գրանցից մենք այստեղ կանգ կառնենք մի քանիսի վրա: կոմոնոսովից շատ դաբեր առաջ հին Հունաստանում առաջացավ այն տեսակետը, որ բոլոր մարմինները բաղկացած են շատ փոքր անտեսանելի մասնիկներից:

Կատարյալ ձևով այդ միտքը ձևակերպեց հույն մեծ գիտնական Գեմկլիտը: «Սովորաբար մենք խոսում ենք քաղցրի ու դառնի մասին, տաքի ու ցրտի մասին, դույնի ու հոտի մասին, մինչդեռ իրականում գոյություն ունեն ստոմեներ և դատարկ տարածություն»:

Դեմոկրիտի կողմից մշակված ատոմիստական պատկերացումները հնարավորություն տվեցին բացատրելու շատ երևույթներ, որոնք ծանոթ են սովորական կյանքում:

Դեմոկրիտի հայացքները հին դարերում մեծ տարածում ունեին, բայց հետագայում դրությունը փոխվում է:

Միջին դարերում հսկայական իշխանություն ստացած քրիստոնեական եկեղեցին ձգտում էր մարդկային միտքը հեռացնել ողջ բանականից և նյութականից: Եկեղեցին չէր կարողանում հաշտվել այն մտքի հետ, որ աշխարհը, վերջին հաշիվով, կազմված է լուի նյութական մասնիկներից՝ Դեմոկրիտի ատոմներից: Դեմոկրիտի հայացքները հայտարարվում են հեթանոսական: Ատոմային ուսմունքի դեմ ուղղված պայքարում եկեղեցուն օգնում են աշխարհիկ իշխանությունները: 1626 թվականի սեպտեմբերի 4-ին Փարիզի պապամհնար հատուկ ղեկընտույլ արգելեց ատոմային գաղափարների տարածումը՝ դանցառուներին սպառնում էր մահապատիժ:

Սակայն գիտության զարգացումը հնարավոր չէ կանգնեցնել թղթի ղեկընտույլ, որքան էլ դրանք ահարկու լինեն»:

Որոշ ժամանակ անցնելուց հետո Փարիզում նորից հանդես են գալիս ատոմիստական տեսության կողմնակիցներ և դրա կրողը համոզիսանում է ֆրանսիացի փիլիսոփա Պլեյր Գասենդին, նրան կողմնակից էր անգլիացի ֆիզիկոս Ռոբերտ Բոյլը (1627—1691):

Կլասիկ ֆիզիկայի հիմնադիրներից մեկը՝ մեծ Ի. Նյուտոնը, գտնում էր, որ բոլոր մարմինները բաղկացած են «գանգված ունեցող, ամուր, անթափանցիկ, շարժվող մասնիկներից»: Այս շրջանում ատոմիստական պատկերացումների հետ միաժամանակ ընդունում էին ոչ նյութական «մատերիաներ»: Կայնորեն տարածված էր այն տեսակետը, որ նյութն անսահմանորեն բաժանելի է, որ գոյություն չունեն ատոմներ և մոլեկուլներ: Այս տեսակետին էին այնպիսի խոշոր գիտնականներ, ինչպիսիք են Ռ. Գեկարտը, Գ. Լեյբնիցը և Խ. Վոլֆը:

Լոմոնոսովը, հակառակ իր ուսուցիչ Խ. Վոլֆի տեսակետին, իր «Մասնատիկական քիմիայի էլեմենտները» և «Ոչ պաշտոն ֆիզիկական մասնիկների մասին» աշխատությունների մեջ ավելի խորը մշակեց ատոմիստական ուսմունքը, զարձնելով այն հզոր զենք գիտական հետազոտությունների համար:

Լոմոնոսովը ատոմիստական ուսմունքի մասին իր աշխատությունը ամբողջությամբ չի տպագրում: Տպագրության է հանձնում այդ աշխատության կատարյալ կերպով մշակված առանձին դրուխներ:

Այստեղ մենք համատարակի կնշենք նրա կողմից մշակված ուսմունքը ջերմության մասին: Զինված լինելով նյութի կառուցվածքի մասնատիկորեն մշակված տեսությամբ, Լոմոնոսովը գրոհեց, այսպես կոչված, «նուրբ մատերիաների» վրա, այդ թվում՝ «չերմային մատերիայի» վրա:

1745 թվականին Ակադեմիայի երկու նիստերում նա զեկուցում է «Բատոլություններ ջերմության և ցրտության պատճառների մասին» թեմայով:

«Շատ լավ հայտնի է, — սկսում է նա իր գիտերտացիան, — որ ջերմությունը հարուցվում է շարժումով՝ փոխադարձ շփումից ձեռքերը տաքանում են, փայտը բոցավառվում է, կայծքաբլր հրահանին հարվածելիս կայծեր են առաջանում, երկաթը հաճախակի և ուժեղ հարվածներով կոնկրետ շիկանում, կառ-կարմիր է դառնում, իսկ եթե այդ հարվածները դադարեցնում ենք, ապա ջերմությունը նվազում է և առաջացած կրակը մարում է»:

Բայց «մարմինները կարող են շարժվել երկակի շարժումով՝ ընդհանուր, որի ժամանակ ամբողջ մարմինը անընդհատ փոխում է իր տեղը, մինչդեռ մասնիկները միմյանց նկատմամբ զանվում են հանգիստ վիճակում, և ներքին, որը մատերիալի ոչ զգալուն մասնիկների տեղափոխումն է մի տեղից մյուսը»:

«Ջերմությունը նյութի ներքին շարժման մեջ է»:

1753 թվականից սկսած, Լոմոնոսովի փորձերը խոշոր նշանակություն ունեցան ամբողջ բնագիտության համար: Նա տեսականորեն և փորձի հիման վրա ձևակերպեց նյութի ու շարժման պահպանության օրենքը:

Լոմոնոսովը դեռ 1748 թվականին էլյերին գրած իր նամակում հայտնում է հետևյալը.

«Բնության մեջ տեղի ունեցող բոլոր փոփոխությունների ժամանակ ստեղծվում է այնպիսի վիճակ, որ ինչքան մի մարմնից հանվում է, այնքան այլիսանում է մյուսին: Այսպես, եթե մի տեղ պահատում է մի քանի մատերիալ, ապա բազմապատկվում է մի այլ տեղ. քանի ժամ մեկը հատկացնի արթուն մնալու, այնքան ժամ կարում է քնից: Սույն համընդհանուր բնական օրենքը տարածվում է նաև շարժման բուն կանոնների վրա՝ որովհետև մի մարմին, որը իր ուժով շարժում է մյուսը, իրենից նայնքան ուժ է կորցնում, որքան հաղորդում է մյուսին, որը նրանից շարժում է ստանում»:

Այս եզրակացությունը Լոմոնոսովը հասել էր դեռ 1744 թվականին:

«Երբ որևէ մարմին արագացնում է մյուսի շարժումը, ապա իր շարժման մի մասը հաղորդում է նրան. բայց այդ անում է լուկ ինքը կորցնելով իր շարժման նույնպիսի մի մաս: Այդ պատճառով ջրի մասնիկները, արագացնելով աղի մասնիկների պտտական շարժումը (լուծվելու ժամանակ), կորցնում են իրենց պտտական շարժման մի մասը: Բայց քանի որ վերջինը ջերմության պատճառն է, ապա բնավ էլ զարմանալի չէ, որ ջուրը ցրտում է աղը լուծվելիս»:

Հետագայում Լոմոնոսովը, մոտիկից ժանոթանալով Ռուբերտ Բոյլի աշխատանքներին, ինքը փորձերի միջոցով ապացուցում է Բոյլի սխալ բացատրությունները:

1756 թվականին Լոմոնոսովը Ակադեմիայի կոնֆերանսում կարգացած գեկուցման մեջ ասում է՝

«Փորձերը կատարել եմ ամուր փակված անոթներում, որպեսզի ուսումնասիրեմ, թե մետաղների կշիռը ավելանո՞ւմ է արդյոք զուտ ջերմությունից: Այդ փորձերից պարզվեց, որ պանծալի Ռուբերտ Բոյլի կարծիքը ճիշտ չէ, որովհետև առանց արտաքին օդը ներս թողնելու, կիզված մետաղի կշիռը մնում է նույնը»:

Լոմոնոսովի փորձերից 17 տարի հետո համանման փորձեր կատարում է ֆրանսիացի հայտնի քիմիկոս Լավուազիեն:

Լոմոնոսովի աշխատանքների մասին գրախոսականում էլյերը գրում է՝

«Այս բոլոր դիսերտացիաները ոչ միայն լավն են, այլև հույժ դերազանց, որովհետև նա գրում է ֆիզիկական ու քիմիական շատ կարևոր հարցերի (մատերիաների) մասին, որպիսիք մինչև այժմ շփոթեցնել և մեկնարանել չէին կարող ամենասարամիտ մարդիկ... Այդ գեպցում պարոն Լոմոնոսովին պետք է հատուցել արդարացին, որ նա օժտված է ֆիզիկական ու քիմիական երևույթները պարզաբանելու զերազանց ձիրքերով: Պետք է ցանկանալ, որ մյուս Ազգակեմիաները նույնպես ի վիճակի լինեն կատարելու այնպիսի հայտնաբերումներ, որպիսիք ցույց տվեց պարոն Լոմոնոսովը»:

Մենք նշեցինք Լոմոնոսովի կողմից կատարված ֆիզիկա-քիմիական աշխատանքների մի մասը: Նա խոշոր աշխատանքներ է կատարել մթնոլոր-

տալին էլիկտորականության, օպտիկայի, աստղագիտության, երկրաբանության, աշխարհագրության բնագավառներում. նա հանդիսանում է ֆիզիկական քիմիայի հիմնադիրը, ուսաց լեզվի բարենորոգիչը, նրա դրչին են պատկանում մի շարք պատմական ուսումնասիրություններ, նա եղել է ժամանակի մեծ պոետն ու հեատորը:

Լոմոնոսովի կողմից մշակված նախագծով 1755 թվականին հիմնադրվեց Մոսկվայի Համալսարանը: Մոսկվայի Համալսարանում, հատկապես Հոկտեմբերյան սեպտեմբրիայից հետո, սովորել ու սովորում են Սովետական Միության բազմազգ ժողովուրդների պավակները, այդ թվում նաև հայ ժողովրդի զավակները:

1760 թվականին Լոմոնոսովը ընտրվում է Շվեդական ակադեմիայի պատվավոր անդամ, 1763 թվականին՝ Արվեստների ակադեմիայի պատվավոր անդամ, 1764 թվականին ընտրվում է Բոլոնիայի ակադեմիայի անդամ:

1765 թվականի մարտին, ծանր հիվանդությունից հետո, Լոմոնոսովը մահանում է:

Լոմոնոսովի գիտական աշխատությունները հիմք դրեցին մատերիալիստական բնագիտությանը Ռուսաստանում: Իր բոլոր աշխատություններում նա ղեկավարվում էր այն մտքով, որ փորձը և տեսությունը անխզելիորեն կապված են իրար հետ: «Բնական քիմիկոսը, — գրում էր նա իր առաջին աշխատություններից մեկում, — պետք է լինի նաև փիլիսոփա»:

Որքա՞ն համահնչյուն են այդ մտքերը ուսման գիտնական՝ Իվան Պետրովիչ Պավլովի գաղափարներին. դիմելով երիտասարդությանը, Պավլովը ասում էր. «Ուսումնասիրելով, փորձարկելով, դիտելով՝ աշխատեցե՛ք շմնալ փաստերի մակերեսին»:

Մի՞ դարձե՞ք փաստերի արխիվարիտ: Փորձեցե՛ք թափանցել նրանց ծագման գաղտնիքի մեջ: Համառորեն որոնեցե՛ք այն օրինքները, որոնք ղեկավարում են այդ փաստերը»:

Լոմոնոսովը մարտնչող մատերիալիստ էր. նա աշխարհի մասին իր հայացքները բարոզում էր ոչ միայն գիտական աշխատությունների և հրապարակային ելույթների, այլև բազմաթիվ բանաստեղծությունների միջոցով:

Լոմոնոսովին բարձր է գնահատել Հ. Գ. Բեյլինսկին.

«Սառուցյալ ծովի ափերին, — գրում էր նա, — հյուսիսափայլի նման ցուլաց Լոմոնոսովը: Շչացուցիչ և սքանչելի էր այդ երևույթը: Դա ապացուցեց, որ մարդը մարդ է ամեն մի վիճակում և ամեն մի կլիմայում, որ հանճարը ի վիճակի է հաղթանակ տանելու այն բոլոր արգելքների նկատմամբ, որ թշնամական ճակատագիրը հակադրում է նրան, որ, վերջապես, ուսումնական է ամեն մի վեհության ու գեղեցկության»:

Մ. Վ. Լոմոնոսովի տրադիցիաները շարունակել են նրա աշակերտները՝ Ս. Յ. Ռուժոյսկին, Ս. Կ. Կոտելնիկովը, Ս. Պ. Պրոտասովը:

Լոմոնոսովի տրադիցիաները մենք զանում ենք XIX դարի վախճանական և հետագա տարիների գիտնականների, ինչպես, օրինակ, Լորաչեսկու, Զինինի, Բուայարովի, Բուակինի, Մենդելեևի և ուրիշների աշխատություններում:

Վերջիններիս աշխատությունների միջոցով Լոմոնոսովը ամուր կերպով կապվում է մեր օրերի հետ:

«Նրբ Սովետական Միությունում կառավարության և պարտիայի կողով, — գրում էր ակադեմիկոս Ս. Բ. Վավրյովը, — սկսեցին բուռն կերպով աճել գիտությունն ու տեխնիկան, այդ ծիցին Լոմոնոսովյան ցանքերը: Անուր պատերազ-

մը, պայքարը մեր իսկ գոյութեան համար՝ պահանջեցին է՛լ ավելի մորթիլդացնել մեր գիտութիւնը՝ ֆիզիկան, քիմիան և երկրաբանութիւնը: Եթէ ուշադրութեամբ հտնայենք, ապա պարզ կդատնա, որ մեր գիտութեան հաջողութիւններն անկյունաքարերը դրվել են անցյալում, դեռևս կոմունստիկ կողմից»:

Այս հանդիսավոր օրը ցանկանանք ուսա մեծ ժողովրդին, սովետական բազմազգ ժողովուրդներին, որոնց գիտնականներին նորանոր հաջողութիւններ գիտութեան զարգացման բնագավառում, որին առանց մնացորդի նվիրեց իր ամբողջ կյանքը ուսա ակնավոր գիտնական Միխայիլ Վասիլևիչ կոմունստիկը:

Հայկական ՍՍՏ ԳԱ Բնագիտութեան  
և տեխնիկայի պատմութեան խորհուրդ

Ստացված է 23 XI 1961

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Стеклов В. А.* Михайло Васильевич Ломоносов. Издательство З. И. Гребина. Берлин—Петербург—Москва, 1922.
2. *Меншуткин Б. Н.* Жизнеописание Михайло Васильевича Ломоносова, изд. 3, Академия наук СССР, 1947.
3. *Вавилов С. И.* Ломоносов и русская наука. Воениздат, 1947.
4. *Кудрявцев Б. Б., Ломоносов М. В.* Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР. М., 1955.
5. История естествознания в России, том 1, часть 1. Издательство АН СССР, М., 1957.

С. А. Акопян

**Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра**

В работах [1]—[3] М. М. Джрбашьяном была развита  $L_2$ -теория интегральных преобразований в комплексной области при помощи ядер, являющихся различными специальными функциями. В работах [1], [3] при помощи асимптотических формул для функций типа Миттаг-Лефлера и Вольтерра при больших значениях аргумента удается получить явные выражения для их преобразования Меллина и установить, что эти преобразования удовлетворяют важному функциональному соотношению, играющему основную роль при построении соответствующих интегральных преобразований в комплексной области. В работе же [2] были рассмотрены интегральные преобразования, связанные с функцией

$$\Phi_{\mu_1, \mu_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1)\Gamma(k\rho_2^{-1} + \mu_2)},$$

являющейся, очевидно, обобщением как функция Миттаг-Лефлера, так и функции Бесселя. Не имея, однако, асимптотических формул, позволяющих судить о поведении этой функции в замкнутой плоскости  $z$  при больших значениях аргумента, в этой работе выражение соответствующего преобразования Меллина устанавливается при помощи теоремы о вычетах и некоторых оценок контурных интегралов.

В настоящей статье приводится построение  $L_2$ -теории интегральных преобразований с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями вида

$${}_pF_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^k \quad (1)$$

и обобщенными функциями типа Вольтерра

$${}_pV_q(z) = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(t\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(t\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(t\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(t\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^t dt. \quad (2)$$

Обобщенные гипергеометрические функции в связи с их асимптотическими разложениями были изучены Фоксом [4] и Райтом [5], но полученные ими асимптотические формулы не пригодны для замкнутой  $z$  плоскости, ввиду чего не могут быть использованы для вычисления соответствующих преобразований Меллина. Поэтому в настоящей статье вид преобразования Меллина для функции (1) или (2) мы устанавливаем также опираясь на теорему о вычетах и оценки некоторых контурных интегралов. Отметим, что интегральному преобразованию, связанному с обыкновенной обобщенной гипергеометрической функцией вида

$${}_pF_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \nu_1) \cdots \Gamma(k + \nu_p)}{\Gamma(k + \mu_1) \cdots \Gamma(k + \mu_q)} \cdot \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}$$

была посвящена работа Фокса [6], доказавшего лишь теорему типа Дирихле.

Автор выражает благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и за руководство.

### § 1. Преобразования с ядрами вида ${}_pF_q(z)$

1°. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется как сумма ряда (см. [4], [5], [7], где рассмотрен специальный случай, когда  $\mu_{q+1} = \rho_{q+1} = 1$ )

$$\begin{aligned} {}_pF_q \left\{ \begin{array}{l} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{array} ; z \right\} &\equiv {}_pF_q(z) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^k, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где параметры  $\delta_1, \dots, \delta_p; \rho_1, \dots, \rho_{q+1}$  — положительные вещественные числа, а параметры  $\nu_1, \dots, \nu_p; \mu_1, \dots, \mu_{q+1}$ , вообще говоря, произвольные комплексные числа, но с тем ограничением, что ни одно из чисел  $k\delta_1^{-1} + \nu_1, \dots, k\delta_p^{-1} + \nu_p$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) не равняется нулю или отрицательному целому числу. Функция  ${}_pF_q(z)$  — целая при указанных значениях параметров  $\nu_1, \dots, \nu_p, \mu_1, \dots, \mu_{q+1}$ , если только

$$\frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \dots - \frac{1}{\delta_p} > 0. \quad (1.2)$$

Используя известные формулы определения порядка и типа целой функции, находим, что функция  ${}_pF_q(z)$ , при соблюдении условия (1.2), имеет порядок

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \dots - \frac{1}{\delta_p}} \quad (1.3)$$

и тип

$$\sigma = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}} \cdots \left(\frac{\rho_{q+1}}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_{q+1}}} \left(\frac{\delta_1}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_1}} \cdots \left(\frac{\delta_p}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_p}} \quad (1.4)$$

При некоторых частных значениях параметров, функция  ${}_pF_q(z)$  совпадает с хорошо известными функциями. Например, при  $\delta_1 = \cdots = \delta_p = \rho_1 = \cdots = \rho_{q+1} = \mu_{q+1} = 1$  мы получим обычную обобщенную гипергеометрическую функцию.

Приведем некоторые интегральные формулы для  ${}_pF_q(z)$ . Почленным интегрированием ряда (1.1) получим, что при  $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} {}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; \lambda t^{\frac{1}{\beta}} \right\} t^{\gamma-1} dt = \\ = z^{\alpha+\gamma-1} {}_{p+1}F_{q+1} \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p, \beta; \nu_1, \dots, \nu_p, \gamma \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}, \beta; \mu_1, \dots, \mu_{q+1}, \gamma + \alpha \end{matrix} ; \lambda z^{\frac{1}{\beta}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Установим теперь, что справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} {}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z t^{\frac{1}{\alpha}} \right\} t^{\beta-1} e^{-\zeta t} dt = \\ = \zeta^{-\beta} {}_{p+1}F_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p, \alpha; \nu_1, \dots, \nu_p, \beta \\ \rho_1, \dots, \rho_q, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_q, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z \zeta^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad (\alpha \geq \rho, \beta > 0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $z$  — любое комплексное число, комплексный параметр  $\zeta$  подчинен условию

$$\begin{aligned} \text{при} \quad & \rho < \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0 \\ \text{при} \quad & \rho = \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta > \sigma |z|^{\rho}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

а  $\rho$  и  $\sigma$  определяются из (1.3) и (1.4).

При  $z=0$  формула (1.6) справедлива при любом  $\beta > 0$ ,  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ , поэтому рассмотрим случай  $z \neq 0$ . Если  $\zeta$  удовлетворяет условию (1.7), то число  $\varepsilon > 0$  можно выбрать так, что

$$\begin{aligned} \text{при} \quad & \rho < \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq \varepsilon \\ \text{при} \quad & \rho = \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq (\sigma + \varepsilon) |z|^{\rho}. \end{aligned} \quad (1.7')$$

Из определения типа функции  ${}_pF_q(z)$  следует

$$\left| \frac{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})}{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)} \right| \geq A_1 \left[ \left( \sigma + \frac{\varepsilon}{4} \right) \rho e \right]^{-\frac{k}{\rho}} k^{\frac{k}{\rho}}, \quad (1.8)$$

где  $A_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $k > 0$ .

Далее, имея в виду, что

$$\max_{0 < t < \infty} t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\gamma t} = \left(\frac{k}{\alpha \gamma}\right)^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\frac{k}{\alpha}},$$

из (1.8) получим

при  $\rho < \alpha$

$$\begin{aligned} & \max_{0 < t < \infty} \left| \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^{\frac{k}{\alpha}} t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\frac{t}{2}} \right| < \\ & < \left(\frac{e}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha}\right)} \left| \frac{\left[\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{4}\right)\rho\right]^{\frac{1}{\rho}} |z|}{\left(\frac{\sigma + \varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^k < \frac{A_2(\varepsilon; |z|)}{2^k}, \quad (k > 0) \quad (1.9) \end{aligned}$$

где  $A_2(\varepsilon; |z|)$  не зависит от  $k$ ;

при  $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned} & \max_{0 < t < \infty} \left| \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^{\frac{k}{\alpha}} t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-(\sigma + \frac{\varepsilon}{2})|z|^{\rho} t} \right| < \\ & < \left(\frac{\sigma + \frac{\varepsilon}{4}}{\sigma + \frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{k}{\alpha}}. \quad (1.10) \end{aligned}$$

Из оценок (1.9) и (1.10) вытекает, что при  $\rho < \alpha$  и  $\rho = \alpha$  соответственно на полуоси  $0 \leq t < \infty$  равномерно сходятся ряды

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{t}{2}} {}_p F_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z t^{\frac{1}{\alpha}} \right\} t^{\beta-1} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^{\frac{k}{\alpha}} t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1} e^{-\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & e^{-(\sigma + \frac{\varepsilon}{2})|z|^{\rho} t} {}_p F_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z t^{\frac{1}{\alpha}} \right\} t^{\beta-1} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^{\frac{k}{\alpha}} t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1} e^{-(\sigma + \frac{\varepsilon}{2})|z|^{\rho} t} \end{aligned}$$

Ввиду (1.7') отсюда следует, что разложение

$$e^{-zt} {}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; zt^{\frac{1}{\alpha}} \right\} t^{\beta-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \dots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \dots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^k t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1} e^{-zt}$$

допускает почленное интегрирование по  $t$  на полуоси  $[0, +\infty)$ . Если заметить, что при  $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1} dt = \frac{\Gamma(k\alpha^{-1} + \beta)}{\zeta^{k\alpha^{-1} + \beta}}, \quad (k \geq 0)$$

то, выполнив интегрирование, получим формулу (1.6).

Наконец, используя интегральное представление Ханкеля для гамма-функции

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} u^{-s} e^u du,$$

где  $C$  — контур, начинающийся в  $-\infty$ , обходящий начало в положительном направлении и кончающийся в  $-\infty$ , получаем, что при  $\rho \leq \rho_i$  ( $1 \leq i \leq q+1$ ) справедлива формула

$${}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z \right\} = \frac{1}{2\pi i} \times$$

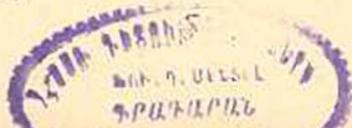
$$\times \int_{\zeta} {}_pF_{q-1} \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; zu^{-\frac{1}{\rho_i}} \right\} \times$$

$$\times e^u u^{-\mu_i} du. \quad (1.11)$$

2°. Для построения интегральных преобразований с ядрами  ${}_pF_q(z)$  в классе  $L_2(0, \infty)$  необходимо установить вид преобразования Меллина для функции  ${}_pF_q(z)$ . С этой целью введем в рассмотрение следующие функции, мероморфные на всей плоскости комплексного переменного  $s$  ( $s = r + it$ )

$$K_p \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; s; \mu; \alpha \right\} \equiv K_p(s; \mu; \alpha) =$$

$$= \frac{\pi^p e^{i\pi(s+\mu-1)(p-\alpha)}}{\sin \pi p (s + \mu - 1)} \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{\rho}{\delta_1} (s + \mu - 1)\right) \dots \Gamma\left(\nu_p - \frac{\rho}{\delta_p} (s + \mu - 1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} (s + \mu - 1)\right) \dots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{\rho}{\rho_{q+1}} (s + \mu - 1)\right)} \quad (1.12)$$



и

$$H_p^{(\pm)} \left( \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; s; \mu \right) \equiv H_p^{(\pm)}(s; \mu) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} s} \frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1}(s - \mu)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s - \mu)\right)}{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{\rho}{\delta_1}(s - \mu)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p + \frac{\rho}{\delta_p}(s - \mu)\right)}. \quad (1.13)$$

На входящие в эти функции параметры  $\delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p; \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1}; \rho, \mu$  и  $\alpha$  с самого начала наложим следующие ограничения

$$а) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \dots - \frac{1}{\delta_p}; \quad \rho > \frac{1}{2} \quad (1.14)$$

$$б) \quad \mu = \mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \dots - \nu_p + \frac{\rho - q}{2} \quad (1.15)$$

$$в) \text{ для данного } \rho > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}. \quad (1.16)$$

В дальнейшем относительно параметров  $\rho_i, \mu_i, \delta_j, \nu_j$  ( $i=1, 2, \dots, q+1; j=1, 2, \dots, p$ ) будем различать два случая:

А) параметры  $\rho_i$  и  $\mu_i$  не равны одновременно единице ни при одном значении  $i=1, 2, \dots, q+1$ ;

Б) при некотором значении  $k$  ( $1 \leq k \leq q+1$ )  $\rho_k = \mu_k = 1$ , но ни при одном значении  $j=1, 2, \dots, p$  параметры  $\delta_j$  и  $\nu_j$  не равны одновременно единице.

Очевидно, что при одновременном равенстве  $\rho_{k_1} = \mu_{k_1} = 1, \nu_{k_2} = \delta_{k_2} = 1$  при некоторых значениях  $k_1$  и  $k_2$  индексы  $p$  и  $q$  функции  ${}_pF_q$  понижаются на единицу.

Лемма 1. Пусть все  $\mu_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, q+1$ )

$$\nu_j > 0 \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

Тогда:

1) если параметр  $\mu$  удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min_{1 \leq j < p} (1, \nu_j \delta_j) \quad (1.17)$$

в случае А) и условию

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min_{1 \leq j < p} (\nu_j \delta_j) \quad (1.17')$$

в случае Б), то

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| K_p \left( \frac{1}{2} + it; \mu; \alpha \right) \right| < \infty; \quad (1.18)$$

2) если параметр  $\mu$  удовлетворяет условию

$$\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min_{1 \leq i < q+1} (\mu_i \rho_i) \quad (1.19)$$

в случае А) и условию

$$\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < q+1} (1, \mu_i \rho_i) \quad (1.19')$$

в случае Б), то

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| H_p^{(\pm)} \left( \frac{1}{2} + it; \mu \right) \right| < \infty. \quad (1.20)$$

Доказательство. 1) При выполнении условия (1.17) или (1.17') функция  $K_p(s; \mu; \alpha)$  не имеет полюсов на линии  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ . Поэтому достаточно лишь убедиться в том, что при  $|t| \rightarrow \infty$  функция  $K_p\left(\frac{1}{2} + it; \mu; \alpha\right)$  остается ограниченной. С этой целью воспользуемся формулой

$$|\Gamma(r + it)| = O\left(|t|^{r - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right) \quad |t| \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

которая следует из асимптотического разложения гамма-функции [8].

Ввиду (1.21) при  $|t| \rightarrow \infty$  будем иметь

$$\left| K_p \left( \frac{1}{2} + it; \mu; \alpha \right) \right| = O \left( e^{-\rho(\pi - \alpha)t + \pi \left( \frac{1}{2} - \rho \right) |t|} \right),$$

откуда, в силу условия (1.16), следует ограниченность функции  $K_p\left(\frac{1}{2} + it; \mu; \alpha\right)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ , т. е. утверждение (1.18) леммы.

2) При выполнении условия (1.19) или (1.19') функции  $H_p^{(\pm)}(s; \mu)$  не имеют полюсов на линии  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ , а при  $|t| \rightarrow \infty$  имеем

$$\left| H_p^{(\pm)} \left( \frac{1}{2} + it; \mu \right) \right| = O \left( e^{\mp \frac{\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} |t|} \right) = O(1), \quad |t| \rightarrow \infty$$

откуда и следует утверждение (1.20).

В дальнейшем вместо  $K_p\left(s; \mu; \frac{\pi}{2\rho}\right)$  и  $K_p\left(s; \mu; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$  будем писать соответственно  $K_p^{(\pm)}(s; \mu)$ .

Лемма 2. На всей плоскости комплексного переменного  $s$  справедливы тождества:

$$a) \quad e^{-i \frac{\pi}{2} (1-\mu)} K^{(+)}(s; \mu) H_p^{(-)}(1-s; \mu) +$$

$$+ e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K_{\rho}^{(-)}(s; \mu) H_{\rho}^{(+)}(1-s; \mu) = 2\pi\rho; \quad (1.22)$$

б) если  $\rho \geq 1$ , то для всех значений параметра  $\omega$  из отрезка  $\left[0, 2\pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\right]$

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K_{\rho}\left(s; \mu; \frac{\pi}{2\rho} + \omega\right) H_{\rho}^{(+)}(1-s; \mu) + \\ + e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K_{\rho}\left(s; \mu; \frac{3\pi}{2\rho} + \omega\right) H_{\rho}^{(-)}(1-s; \mu) = 0. \quad (1.23)$$

Доказательство. а) Из (1.12) и (1.13) имеем

$$K_{\rho}^{(+)}(s; \mu) H_{\rho}^{(-)}(1-s; \mu) = -i\pi\rho \frac{e^{i\pi\rho(s+\mu-1)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}, \\ K_{\rho}^{(-)}(s; \mu) H_{\rho}^{(+)}(1-s; \mu) = i\pi\rho \frac{e^{-i\pi\rho(s+\mu-1)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)},$$

откуда и вытекает тождество (1.22).

б) Из (1.12) и (1.13) имеем

$$K_{\rho}(s; \mu; \alpha) H_{\rho}^{(+)}(1-s; \mu) = \frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}, \\ K_{\rho}\left(s; \mu; \alpha + \frac{\pi}{\rho}\right) H_{\rho}^{(-)}(1-s; \mu) = -\frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha) - i\pi(\mu-1)}.$$

Заменив в этих равенствах  $\alpha$  через  $\frac{\pi}{2\rho} + \omega$ , приходим к требуемому тождеству (1.23). Если  $0 \leq \omega \leq 2\pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ , то значения  $\frac{\pi}{2\rho} + \omega$ ,  $\frac{3\pi}{2\rho} + \omega$  не выходят из промежутка  $\left[\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right]$ .

В частном случае, когда  $\rho = \frac{1}{2}$ , параметр  $\alpha$  имеет единственное значение  $\alpha = \pi$ , тогда тождество (1.22) принимает простой вид

$$K_{\frac{1}{2}}(s; \mu; \pi) H(1-s; \mu) = \pi$$

где

$$H(s) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} H_{\frac{1}{2}}^{(-)}(s; \mu) + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} H_{\frac{1}{2}}^{(+)}(s; \mu).$$

Из результата леммы 1 следует, что при условии

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min \{1; \mu_1 \rho_1, \dots, \mu_{q+1} \rho_{q+1}; \nu_1 \delta_1, \dots, \nu_p \delta_p\}$$

одновременно будем иметь

$$\frac{K_p\left(\frac{1}{2} + it; \mu; \alpha\right)}{\frac{1}{2} - it} \text{ и } \frac{H_p^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it; \mu\right)}{\frac{1}{2} - it} \in L_2(-\infty, \infty).$$

Отсюда по теореме Меллина [9] заключаем, что существуют пределы в среднем

$$\frac{k_p(x; \mu; \alpha)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l. i. m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{K_p(s; \mu; \alpha)}{1-s} x^{-s} ds \in L_2(0, \infty), \quad (1.24')$$

$$\frac{h_p(x; \mu)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l. i. m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{H_p^{(\pm)}(s; \mu)}{1-s} x^{-s} ds \in L_2(0, \infty). \quad (1.24'')$$

Лемма 3. При выполнении условия (1.17) или (1.17')

$$k_p(x; \mu; \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} \frac{(e^{i\alpha} x^{\rho})^k}{k\rho^{-1} + \mu} x^{\mu} =$$

$$= \int_0^x {}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; e^{i\alpha} t^{\rho} \right\} t^{\mu-1} dt \quad (1.25)$$

для всех

$$\alpha \in \left[ \frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right].$$

Доказательство. Мероморфная функция

$$K_p(1-s; \mu; \alpha) =$$

$$= \frac{\pi^{\rho} e^{i\rho(\mu-s)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho(\mu-s)} \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{\rho}{\delta_1}(s-\mu)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p + \frac{\rho}{\delta_p}(s-\mu)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1}(s-\mu)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s-\mu)\right)}$$

в силу условия (1.17) или (1.17') не имеет полюсов на прямой  $\text{Res} = \frac{1}{2}$ , а полюсы, лежащие в полуплоскости  $\text{Res} > \frac{1}{2}$ , простые и совпадают с точками последовательности

$$s_k = k\rho^{-1} + \mu \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{s=s_k} \frac{K_p(1-s; \mu; a)}{s} x^{s-1} = \\ & = -\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} \frac{(e^{ia} x^{\frac{1}{\rho}})^k}{k\rho^{-1} + \mu} x^{s-1} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Пусть  $R_n = \mu + \left(n + \frac{1}{2}\right)\rho^{-1}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), а  $L_n$  означает контур области  $D_n$ , являющийся пересечением круга  $|s| < R_n$  с полуплоскостью  $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ . Функция

$$\frac{K_p(1-s; \mu; a)}{s} x^{s-1}$$

голоморфна в области  $D_n$ , кроме точек  $s_k = k\rho^{-1} + \mu$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ), где она имеет простые полюсы с вычетами, которые задаются формулами (1.26). Поэтому для  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{K_p(1-s; \mu; a)}{s} x^{s-1} ds = \\ & = -\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} \frac{(e^{ia} x^{\frac{1}{\rho}})^k}{k\rho^{-1} + \mu} x^{s-1} = \\ & = -\frac{1}{x} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} (e^{ia} t^{\frac{1}{\rho}})^k \right\} t^{\mu-1} dt. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Пусть  $\frac{1}{2} \pm iR_n^*$  — точки пересечения окружности  $|s| = R_n$  с прямой  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ ; так как  $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^* = +\infty$ . Напишем формулу (1.27) в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{K_p(1-s; \mu; a)}{s} x^{s-1} ds = \\ & = \frac{1}{x} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} (e^{ia} t^{\frac{1}{\rho}})^k \right\} t^{\mu-1} dt + Y_n(x), \end{aligned} \quad (1.27')$$

где

$$Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|s|=R_n \\ \text{Re } s > \frac{1}{2}}} \frac{K_p(1-s; \mu; \alpha)}{s} x^{s-1} ds, \quad x \in (0, \infty). \quad (1.28)$$

Займемся теперь оценкой функции  $Y_n(x)$ . Из асимптотической формулы для гамма-функции [8] следует, что при любом  $a \in (-\infty, \infty)$ , когда  $R \rightarrow \infty$

$$|\Gamma(a + Re^{i\varphi})| = O(R^{R \cos \varphi + a - \frac{1}{2}} e^{-R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)}), \quad (1.29)$$

$|\varphi| \leq \pi - \delta$  ( $\delta > 0$ ), при этом порядок правой части равномерен относительно всех значений  $|\varphi| \leq \pi - \delta$ . Далее, справедлива следующая оценка [1]

при

$$s = R_n e^{i\varphi}, \quad n \geq n_0$$

$$\left| \frac{e^{i\rho(\mu-s)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho(\mu-s)} \right| \leq$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \exp\{\rho R_n [(\pi-\alpha) \sin \varphi - \pi |\sin \varphi|]\}, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \\ \exp\{\rho R_n (\pi-\alpha) \sin \varphi\}, & \text{если } |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Предположим, что все  $\rho_i$  ( $\delta_j$ ) отличны от  $\infty$  или же при некотором  $i(j)$   $\rho_i = \infty$  ( $\delta_j = \infty$ ), но соответствующее  $\mu_i = \frac{1}{2}$  ( $\nu_j = \frac{1}{2}$ ). Тогда из (1.29) ввиду (1.14), (1.15) следует, что при  $s = R_n e^{i\varphi}$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{\rho}{\delta_1}(s-\mu)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p + \frac{\rho}{\delta_p}(s-\mu)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1}(s-\mu)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s-\mu)\right)} \right| =$$

$$= O(R_n^{-R_n \cos \varphi + \frac{1}{2}} e^{R_n (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)} e^{R_n \cos \varphi}). \quad (1.31)$$

Из (1.30) и (1.31) вытекает, что при  $s = R_n e^{i\varphi}$

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad n \geq n_0$$

$$|K_p(1-s; \mu; \alpha)| \leq c_1 R_n \left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi} e^{-R_n \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi},$$

а при

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq -\frac{\pi}{4}$$

$$|K_p(1-s; \mu; \alpha)| \leq c_2 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi} e^{-R_n \left[ \rho(2\pi - \pi) - \frac{\pi}{2} \right] |\sin \varphi|}$$

где  $c_1, c_2, \dots$  — постоянные, не зависящие от  $n \geq n_0$ . Но ввиду того, что  $\frac{\pi}{2\rho} \leq \alpha \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ , из этих оценок следует, что при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad n \geq n_0$$

$$|K_p(1-s; \mu; \alpha)| \leq c_3 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi} \quad (1.32)$$

Из оценок (1.31) и из второй оценки (1.30) при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq |\varphi| < \frac{\pi}{4}$ ,  $n \geq n_0$  получим

$$|K_p(1-s; \mu; \alpha)| \leq c_4 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c_5 e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi} \quad (1.32')$$

Выберем  $n \geq n_1 \geq n_0$  настолько большим, чтобы при фиксированном  $x > 0$  имели

$$\max \left\{ \frac{\sigma e x}{R_n}, \frac{c_5 e x}{R_n} \right\} < e^{-1},$$

тогда из (1.32) и (1.32') получим

$$|K_p(1-s; \mu; \alpha) x^s| \leq c_6 R_n^{\frac{1}{2}} e^{-R_n \cos \varphi} \quad (1.33)$$

при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,  $n \geq n_1$ ,  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ .

Наконец, из (1.28) и (1.33) получим

$$|Y_n(x)| \leq c_7 R_n^{\frac{1}{2}} x^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n \cos \varphi} d\varphi < \frac{c_8}{x P_n^{\frac{1}{2}}} \quad (n \geq n_1)$$

откуда следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty). \quad (1.34)$$

В тождестве (1.27') переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , ввиду (1.34) будем иметь

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{K_p(s; \mu; a)}{1-s} x^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x {}_pF_q(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{p}}) t^{\mu-1} dt, \quad x \in (0, \infty). \quad (1.35)$$

Но равенство (1.35) сохранится и в том случае, если в его левой части числа  $R_n^*$  заменить любыми числами  $a_n$ , удовлетворяющими условию

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty. \quad (1.36)$$

Действительно, пусть последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет условию (1.36), а числа  $k_n$  определим так, чтобы

$$R_{k_n}^* \leq a_n \leq R_{k_n+1}^*, \quad n \geq 1.$$

Обозначим

$$V(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{K_p(s; \mu; a)}{1-s} x^{-s} ds,$$

по лемме 1 имеем

$$|V(a) - V(R_{k_n}^*)| \leq \frac{c_p}{Vx} \int_{a_n}^{R_{k_n+1}^*} \frac{dt}{\left|\frac{1}{2} - it\right|} \leq \frac{c_p}{Vx} \frac{R_{k_n+1}^* - R_{k_n}^*}{a_n}. \quad (1.37)$$

Но  $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$  и  $R_n = \mu + \left(n + \frac{1}{2}\right)\rho^{-1}$ , поэтому  $R_{n+1}^* - R_n^* = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Ввиду этого, переходя к пределу в (1.37) при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{K_p(s; \mu; a)}{1-s} x^{-s} ds = \frac{1}{x} \int_0^x {}_pF_q(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{p}}) t^{\mu-1} dt.$$

Из этого и (1.24) и следует (1.25).

Таким образом в лемме 3 было установлено явное выражение для функции  $k_p(x; \mu; a)$  [в дальнейшем вместо  $k_p\left(x; \mu; \frac{\pi}{2\rho}\right)$  и:

$k_p \left( x; \mu; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right)$  будем писать соответственно  $k_p^{(\pm)}(x; \mu)$ . Установление аналогичных явных представлений для функции  $h_p^{(\pm)}(x; \mu)$  сопряжено с определенным затруднением в применении теоремы о вычетах к правой части (1.24') (см., напр., [2], где рассмотрен специальный случай соответствующей функции  ${}_0F_1$ ). Поэтому на этом мы здесь останавливаться не будем.

3°. Опираясь на основные тождества (1.22), (1.23) леммы 2, можно установить следующие предложения, доказательство которых мы не приводим, так как они не отличаются от доказательств соответствующих теорем работ [1], [2].

**Теорема 1.** Пусть параметры  $\delta_1, \dots, \delta_p; \nu_1, \dots, \nu_p; \rho_1, \dots, \rho_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1}$  удовлетворяют следующим условиям

- 1) 
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \dots - \frac{1}{\delta_p} \leq 2$$
- 2) 
$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \dots - \nu_p + \frac{p-q}{2} < < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min \{1; \mu_1 \rho_1, \dots, \mu_{q+1} \rho_{q+1}; \nu_1 \delta_1, \dots, \nu_p \delta_p\}.$$

параметры  $\mu_i$  и  $\nu_j$  ( $i=1, 2, \dots, q+1; j=1, 2, \dots, p$ ) положительны, причем при  $\rho_i = \infty$  примем  $\mu_i = \frac{1}{2}$  и при  $\delta_j = \infty$  примем  $\nu_j = \frac{1}{2}$ .

Тогда

а) Для любой функции  $g(y) \in L_2(0, \infty)$  формула

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k_p^{(\pm)}(xy; \mu)}{y} g(y) dy$$

определяет почти всюду функции  $f^{(+)}(x)$  и  $f^{(-)}(x)$ , принадлежащие классу  $L_2(0, \infty)$ . Двойственная формула

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{h_p^{(+)}(xy; \mu)}{x} f^{(-)}(x) dx + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{h_p^{(-)}(xy; \mu)}{x} f^{(+)}(x) dx$$

также имеет место почти всюду на  $(0, \infty)$ . Существуют постоянные  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$ , не зависящие от функции, такие что

$$\int_0^{\infty} |f^{(\pm)}(x)|^2 dx \leq M_1 \int_0^{\infty} |g(y)|^2 dy \quad (1.38)$$

и

$$\int_0^{\infty} |g(y)|^2 dy \leq M_1 \left\{ \int_0^{\infty} |f^{(+)}(x)|^2 dx + \int_0^{\infty} |f^{(-)}(x)|^2 dx \right\}.$$

б) Обратно, для любой функции  $f(x) \in L_2(0, \infty)$  формула

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{h_{\rho}^{(\pm)}(xy; \mu)}{x} f(x) dx$$

определяет почти всюду на  $(0, \infty)$  функции  $g^{(\pm)}(y) \in L_2(0, \infty)$ .  
Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k_{\rho}^{(-)}(xy; \mu)}{y} g^{(+)}(y) dy + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k_{\rho}^{(+)}(xy; \mu)}{y} g^{(-)}(y) dy$$

также имеет место почти всюду на  $(0, +\infty)$ . Существуют постоянные  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$ , не зависящие от функции и такие, что

$$\int_0^{\infty} |g^{(\pm)}(y)|^2 dy \leq K_1 \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

и

(1.39)

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 x dx \leq K_2 \left\{ \int_0^{\infty} |g^{(+)}(y)|^2 dy + \int_0^{\infty} |g^{(-)}(y)|^2 dy \right\}.$$

Теорема 2. Если  $g_1(y)$  произвольная функция из класса

$$\int_0^{\infty} |g_1(y)|^2 y^{2\mu\rho-1} dy < +\infty,$$

то функции

$$f^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_{\rho}^{(\pm)}(xy^{\rho})}{y^{\rho}} g_1(y) y^{\mu\rho-1} dy$$

принадлежат классу  $L_2(0, \infty)$ . Целые функции порядка  $\leq \rho$  и конечного типа, определяемые по формуле

$$G_{\rho}(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^{\infty} {}_pF_q(zx^{\frac{\rho}{2}} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx +$$

$$+ e^{\frac{i\pi}{2}(1-p)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^{\sigma} {}_pF_q(zx^{\frac{1}{\rho}} e^{-\frac{i\pi}{2\rho}}) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx \quad (\sigma > 0)$$

сходятся в среднем к  $g_1(y)$ , когда  $\sigma \rightarrow +\infty$  в смысле

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^{\sigma} |g_1(y) - G_{\sigma}(y)| y^{2\mu\rho-p-1} dy = 0.$$

В случае, когда  $\rho > 1$ , справедливо также равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma} |G_{\sigma}(ye^{i\varphi})|^2 y^{2\mu\rho-p-1} dy = 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}.$$

## § 2. Преобразование с ядром ${}_p\nu_q(z)$

Введем в рассмотрение следующую функцию

$${}_p\nu_q \left\{ \begin{matrix} \beta_1, \dots, \beta_p; \nu_1, \dots, \nu_p \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z \right\} = {}_p\nu_q(z) =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(t\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(t\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(t\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(t\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^t dt \quad (2.1)$$

где параметры  $\beta_1, \dots, \beta_p; \nu_1, \dots, \nu_p; \alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_{q+1}$  — положительные числа, и

$$\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \dots - \frac{1}{\beta_p} = \frac{1}{r} > 0. \quad (2.2)$$

В силу условия (2.2) интеграл (2.1) представляет голоморфную на бесконечной римановой поверхности  $-\infty < \arg z < \infty$ ,  $0 < |z| < \infty$  функцию, при этом для подынтегральной функции выбирается та ее ветвь, которая принимает значения  $\exp\{t \log |z|\}$  на полуоси  $\arg z = 0$ . Заметим, что функцию  ${}_p\nu_q(z)$  можно рассматривать как предел функции  ${}_pF_q(z)$  при  $\rho \rightarrow \infty$ , если  $r=1$ . Действительно, если при  $\rho_i \rightarrow \infty$ ,  $\delta_j \rightarrow \infty$  ( $i=1, 2, \dots, q+1$ ;  $j=1, 2, \dots, p$ )

$$\frac{\rho_i}{\rho} \rightarrow \alpha_i; \quad \frac{\delta_j}{\rho} \rightarrow \beta_j$$

то имеем

$${}_p\nu_q(z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} {}_pF_q(z^{\frac{1}{\rho}})$$

где

$$\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \dots - \frac{1}{\beta_p} = 1.$$

Функцию (2.1) естественно назвать обобщенной функцией типа Вольтерра, так как в частном случае при  $p=0$ ,  $q=0$ . Эта функция впервые была рассмотрена в работах Вольтерра. Как отмечалось выше, в работе [3] были изучены свойства этой функции и построена  $L_2$ -теория интегральных преобразований с ядром Вольтерра. В на-

стоящем параграфе строится  $L_2$ -теория интегральных преобразований, ядрами которых служит обобщенная функция типа Вольтерра.

1°. Приведем некоторые интегральные формулы, связанные с функцией  $\rho^{\nu_q}(z)$ . Из (2.1) легко следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \rho^{\nu_q}(\lambda t^{\frac{1}{\beta}}) t^{\gamma-1} dt = \\ & = z^{\alpha+\gamma-1} \rho^{\nu_{q+1}} \left\{ \begin{array}{l} \beta_1, \dots, \beta_p, \beta; \nu_1, \dots, \nu_p, \gamma \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}, \beta; \mu_1, \dots, \mu_{q+1}, \gamma + \alpha \end{array} ; \lambda z^{-\frac{1}{\beta}} \right\} \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Установим теперь формулу

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \rho^{\nu_q}(z t^{\frac{1}{\alpha}}) t^{\beta-1} e^{-\zeta t} dt = \\ & = \zeta^{-\beta} \rho^{\nu_{q+1}} \left\{ \begin{array}{l} \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha; \nu_1, \dots, \nu_p, \beta \\ \alpha_1, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}; \mu_1, \dots, \mu_q, \mu_{q+1} \end{array} ; z \zeta^{-\frac{1}{\alpha}} \right\} \quad (r < \alpha, \beta > 0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $z$ —любое комплексное число, а комплексный параметр  $\zeta$  подчинен условиям:

$$\text{при} \quad r < \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0, \quad (2.5)$$

$$\text{при} \quad r = \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta > s |z|^f.$$

Здесь

$$s = \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^{\frac{r}{\alpha_1}} \dots \left(\frac{\alpha_{q+1}}{r}\right)^{\frac{r}{\alpha_{q+1}}} \left(\frac{\beta_1}{r}\right)^{-\frac{r}{\beta_1}} \dots \left(\frac{\beta_p}{r}\right)^{-\frac{r}{\beta_p}}. \quad (2.6)$$

Если  $\zeta$  удовлетворяет условию (2.5), то число  $\varepsilon > 0$  можно выбрать так, чтобы

$$\text{при} \quad r < \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq \varepsilon, \quad (2.5')$$

$$\text{при} \quad r = \alpha, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq (s + \varepsilon) |z|^f.$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\left| \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \dots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \dots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} \right| = O\left(u^{-\frac{u}{r} - p + \frac{1}{2}} (sr e)^{\frac{u}{r}}\right), \quad u \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

где

$$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \dots - \nu_p + \frac{p-q}{2}. \quad (2.8)$$

Поэтому можно указать такую постоянную  $B_1$ , не зависящую от  $u$ , чтобы

$$\left| \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \dots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \dots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} \right| \leq B_1 \left[ \left(s + \frac{\varepsilon}{4}\right) re \right]^{\frac{u}{r}} u^{-\frac{u}{r}}, \quad u > 0. \quad (2.7')$$

Далее, имея в виду, что

$$\max_{0 < t < \infty} t^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\gamma t} = \left( \frac{u}{\alpha \gamma} \right)^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\frac{u}{\alpha}},$$

из (2.7') получим  
при  $r < \alpha$

$$\begin{aligned} \max_{0 < t < \infty} \left| \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}t} \right| &\ll \\ &\ll \left( \frac{e}{u} \right)^u \frac{\left( \left[ \left( s + \frac{\varepsilon}{4} \right) r \right]^{\frac{1}{r}} |z| \right)^u}{\left( \alpha \frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \ll B_2(\varepsilon; |z|) e^{-u}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

при  $r = \alpha$

$$\begin{aligned} \max_{0 < t < \infty} \left| \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\left(s + \frac{1}{2}\right)z|^{r,t}} \right| &\ll \\ &\ll \left( \frac{s + \frac{\varepsilon}{4}}{s + \frac{\varepsilon}{2}} \right)^{\frac{u}{r}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из оценок (2.9), (2.10) вытекает, что при  $r < \alpha$  и  $r = \alpha$  соответственно на полюсы  $0 < t < \infty$  равномерно сходятся интегралы

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}t} {}_p\psi_q(zt^{\frac{1}{\alpha}}) t^{\beta-1} &= \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha} + \beta - 1} e^{-\frac{1}{2}t} du \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} e^{-\left(s + \frac{1}{2}\right)z|^{r,t}} {}_p\psi_q(zt^{\frac{1}{\alpha}}) t^{\beta-1} &= \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha} + \beta - 1} e^{-\left(s + \frac{1}{2}\right)z|^{r,t}} du. \end{aligned}$$

Ввиду (2.5') при интегрировании по  $0 \leq t < +\infty$  выражения

$$e^{-\frac{1}{2}t} {}_p\psi_q(zt^{\frac{1}{\alpha}}) t^{\beta-1} = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(u\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha} + \beta - 1} e^{-t} du$$

допустима замена порядка интегрирования. Если заметить, что при  $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta t} t^{\frac{\alpha}{\beta} + \beta - 1} dt = \frac{\Gamma(u\alpha^{-1} + \beta)}{\zeta^{\alpha^{-1} + \beta}}, \quad (u > 0)$$

то, выполнив интегрирование, получим формулу (2.4).

2°. Введем в рассмотрение следующие функции

$$M^{(+)}(s) = \begin{cases} 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{2}s} \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{1}{\alpha_{q+1}}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)}, & \operatorname{Im} s < 0 \\ 0, & \operatorname{Im} s > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$M^{(-)}(s) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} s < 0 \\ -2\pi i e^{i\frac{\pi}{2}s} \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)}, & \operatorname{Im} s > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

и

$$H^{(\pm)}(s) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}s} \frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{1}{\alpha_1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{1}{\alpha_{q+1}}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{1}{\beta_1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p + \frac{1}{\beta_p}\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)}. \quad (2.13)$$

Нетрудно проверить, что на всей плоскости комплексного переменного  $s$  справедливо тождество

$$M^{(+)}(s) H^{(-)}(1-s) + M^{(-)}(s) H^{(+)}(1-s) = 2\pi. \quad (2.14)$$

Используя асимптотическую формулу (1.21) для гамма-функции, убедимся, что при  $s = \frac{1}{2} + it$  ( $-\infty < t < \infty$ )

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| M^{(+)}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < +\infty, \quad (2.15)$$

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| H^{(+)}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < \infty, \quad (2.16)$$

если только удовлетворены условия

$$\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \dots - \frac{1}{\beta_p} = 1, \quad (2.17)$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \frac{q+1}{2} = \nu_1 + \dots + \nu_p - \frac{p}{2} \quad (\text{т. е. } \mu = \frac{1}{2}). \quad (2.18)$$

Из (2.15) и (2.16) следует, что

$$\frac{M^{(\pm)}(s)}{1-s}, \quad \frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Отсюда по теореме Меллина [9] заключаем, что существуют пределы в среднем

$$\frac{m^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l. i. m.} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{M^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s} ds \in L_2(0, \infty) \quad (2.19)$$

и

$$\frac{h^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l. i. m.} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s} ds \in L_2(0, \infty). \quad (2.20)$$

В дальнейшем через  ${}_{\rho}\nu_q(z; \mu)$  обозначим следующую функцию

$${}_{\rho}\nu_q(z; \mu) = z^{\mu-1} {}_{\rho}\nu_q(z).$$

**Лемма 4.** При выполнении условий (2.17) и (2.18)

$$\frac{1}{2\pi i} \text{l. i. m.} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{M^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s} ds = \frac{1}{x} \int_0^x {}_{\rho}\nu_q\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}} t; \frac{1}{2}\right) dt. \quad (2.21)$$

**Доказательство.** Пусть  $L_a$  — есть контур области  $D_a^+ \left( |s| < a, 0 \leq \arg s \leq \frac{\pi}{2} \right)$ . Так как функция

$$f(s) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(s-\frac{1}{2})}}{s + \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(s\alpha_p^{-1} + \mu_p)}{\Gamma(s\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} x^{-s-\frac{1}{2}} \quad (0 < x < \infty)$$

голоморфна в  $D_a^+$ , то по теореме Коши

$$\int_{L_a} f(s) ds = \int_0^a f(z) dz + \int_{C_a} f(s) ds - i \int_0^a f(it) dt = 0, \quad (2.22)$$

где  $C_a$  — есть дуга  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  окружности  $s = ae^{i\varphi}$ .

Оценим интеграл

$$J_a = \int_{C_a} f(s) ds. \quad (2.23)$$

Имеем

$$|J_a| \leq a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(ae^{i\varphi} - \frac{1}{2})} \Gamma\left(\frac{a}{\beta_1} e^{i\varphi} + \nu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\beta_p} e^{i\varphi} + \nu_p\right)}{ae^{i\varphi} + \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_1} e^{i\varphi} + \mu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_{q+1}} e^{i\varphi} + \mu_{q+1}\right)} \right| x^{a \cos \varphi - \frac{1}{2}} d\varphi \leq \frac{c_{10}}{\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} a \sin \varphi} x^{a \cos \varphi} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\beta_1} e^{i\varphi} + \nu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\beta_p} e^{i\varphi} + \nu_p\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha_1} e^{i\varphi} + \mu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_{q+1}} e^{i\varphi} + \mu_{q+1}\right)} \right| d\varphi. \quad (2.24)$$

Предположим, что все  $\alpha_j$  ( $\beta_j$ ) отличны от  $\infty$  или же при некотором  $j$  ( $j = \alpha_1 = \infty$  ( $\beta_j = \infty$ ), но соответствующее  $\mu_j = \frac{1}{2}$  ( $\nu_j = \frac{1}{2}$ ). Тогда из (1.29) ввиду (2.17), (2.18) следует, что

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\beta_1} e^{i\varphi} + \nu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\beta_p} e^{i\varphi} + \nu_p\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha_1} e^{i\varphi} + \mu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_{q+1}} e^{i\varphi} + \mu_{q+1}\right)} \right| = O(a^{-a \cos \varphi} e^{a(\cos \varphi - \nu \sin \varphi)} s_1^{-a \cos \varphi}), \quad (2.25)$$

где

$$s_1 = \alpha_1^{-\frac{1}{\beta_1}} \cdots \alpha_{q+1}^{-\frac{1}{\beta_{q+1}}} \beta_1^{-\frac{1}{\alpha_1}} \cdots \beta_p^{-\frac{1}{\alpha_p}}.$$

Из (2.24) и (2.25) получим

$$|J_a| \leq \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{x e}{a s_1} \right)^{a \cos \varphi} e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) a \sin \varphi} d\varphi. \quad (2.26)$$

Выберем  $a$  настолько большим, чтобы при фиксированном  $x > 0$  имели

$$\frac{xe}{as_1} < e^{-1},$$

тогда из (2.26) имеем

$$\begin{aligned} |J_a| &\leq \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos \varphi} d\tau = \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} a \varphi} d\varphi < \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\pi}{2a} \end{aligned}$$

т. е.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} J_a = O. \quad (2.27)$$

Подставляя значение  $f(s)$  в (2.22) получим

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\tau - \frac{1}{2})}}{\tau + \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\tau\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(\tau\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(\tau\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(\tau\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} x^{\tau - \frac{1}{2}} d\tau + \\ &+ J_a - i \int_0^a \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(it - \frac{1}{2})}}{it + \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(it\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(it\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(it\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(it\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} x^{it - \frac{1}{2}} dt = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} \int_0^x \left\{ \int_0^a \frac{\Gamma(\tau\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(\tau\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(\tau\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(\tau\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} (e^{i\frac{\pi}{2}} x)^{\tau - \frac{1}{2}} d\tau \right\} dx + \\ &+ J_a - \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{M^{(+)}(s)}{1-s} x^{-s} ds = O. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Переходя в тождестве (2.28) к пределу при  $a \rightarrow \infty$ , ввиду (2.27) получим

$$\begin{aligned} &l. i. m. \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{M^{(+)}(s)}{1-s} x^{-s} ds = \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(\tau\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(\tau\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(\tau\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(\tau\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} (e^{i\frac{\pi}{2}} x)^{\tau - \frac{1}{2}} d\tau \right\} dx, \end{aligned}$$

т. е. (2.21) в случае верхнего знака  $+$ .

Аналогично мы убедимся и в справедливости той же формулы в случае нижнего знака, если в качестве контура  $L_a$  взять границу области  $D_a: |s| \leq a, -\frac{\pi}{2} \leq \arg s \leq 0$ .

Что касается функций  $h^{(\pm)}(x)$ , то установление явных формул для их представления сопряжено с теми же затруднениями, что и в случае функции  $h_p^{(\pm)}(x; \mu)$ .

3°. Пользуясь основным тождеством (2.14), а также определениями (2.19), (2.20)  $m^{(\pm)}(x)$  и  $h^{(\pm)}(x)$ , можно установить следующие предложения, доказательство которых мы также не приводим, так как оно сходно с доказательствами предыдущих теорем.

**Теорема 3.** Пусть положительные параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{q+1}; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$  удовлетворяют условиям

$$1) \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} - \dots - \frac{1}{\beta_p} = 1,$$

$$2) \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{q+1} - \frac{q+1}{2} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p - \frac{p}{2},$$

причем  $\mu_i = \frac{1}{2}$  при  $\alpha_i = \infty$  и  $\nu_j = \frac{1}{2}$  при  $\beta_j = \infty$  ( $i = 1, 2, \dots, q+1$ ;  $j = 1, 2, \dots, p$ ).

а) Тогда для любой функции  $g(y) \in L_2(0, \infty)$  формула

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{m^{(\pm)}(xy)}{y} g(y) dy$$

определяет почти всюду функции  $f^{(\pm)}(x)$ , принадлежащие классу  $L_2(0, \infty)$ .

Двойственная формула

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(+)}(xy)}{x} f^{(-)}(x) dx + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(-)}(xy)}{x} f^{(+)}(x) dx$$

также имеет место почти всюду на  $(0, \infty)$ .

б) Обратное, для любой функции  $f(x) \in L_2(0, \infty)$  формула

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy)}{x} f(x) dx$$

определяет почти всюду на  $(0, \infty)$  функции  $g^{(\pm)}(y) \in L_2(0, \infty)$ .

Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{m^{(-)}(xy)}{y} g^{(+)}(y) dy + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{m^{(+)}(xy)}{y} g^{(-)}(y) dy$$

также имеет место всюду на  $(0, \infty)$ .

И в этом случае равенство Парсевала заменяется неравенствами аналогично (1.38), (1.39).

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 29 IX 1961

### Մ. Ս. Հակոբյան

## ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈՒՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ, ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԻՊԵՐԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ՎՈՒՏԵՐՐԱՅԻ ՏԻՊԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ՀԱՆԴԻՍԱՑՈՂ ԿՈՐԻՋՆԵՐՈՎ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատությունում կառուցված է ինտեգրալ ձևափոխությունների  $L_2$ -տեսությունը, որոնց համար կորիզներ են հանդիսանում (1)—ընդհանրացված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաները և (2)—Վոլտերրայի տիպի ընդհանրացված ֆունկցիաները: Աշխատությունում օգտագործված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [1]—[3] աշխատություններում զարգացված կոմպլեքս տիրույթում ինտեգրալ ձևափոխությունների  $L_2$ -տեսությունը:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применение в теории целых функций. Известия АН СССР, серия матем., 19, 1955, 133—190.
2. Джрбашян М. М. Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Лефлера. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XIII, № 3, 1960, 21—63.
3. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра. Известия АН СССР, серия матем., 24, 1960, 387—420.
4. Fox C. The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions. Proc. of the Lond. Math. Soc., vol. 27 (1928) 389—400.
5. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. The Journ. of the Lond. Math. Soc., vol. X, 1935, 286—293.
6. Fox C. A generalization of the Fourier-Bessel integral transform. Proc. Lond. Math. Soc., 1929, 401—452.
7. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi G. Higher transcendental functions, vol. 1, 1955, New York.
8. Уиттекер Е., Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, т. II. ГТТИ, 1934, М.—Л.
9. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ, Гостехиздат, 1946, М.—Л.

В. П. Громов

## О росте функций на последовательности точек луча

### Введение

В 1950 г. А. Ф. Леонтьевым в работе [1] доказано, в частности, следующее утверждение.

Пусть  $F(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^{\nu_n}$  — целая функция порядка  $\rho$  типа  $\sigma > 0$ , а  $\nu_n$  — целые числа, такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{1}{2\rho}$ . Пусть, далее,  $\{\lambda_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau > 0,$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad \mu_n = \lambda_n^\rho, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Если  $F(\lambda_n) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то  $\sigma > \frac{\pi\tau}{\sin \pi\rho\alpha}$ .

В 1958 г. Гайер (D. Gaier) [3] доказал следующую теорему.

Пусть целая функция  $F(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^{\nu_n}$  в полуплоскости  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  растет не быстрее целой функции экспоненциального типа  $\sigma$ , причем целые числа  $\nu_n$  удовлетворяют условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ . Пусть далее  $\sigma < \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ .

Тогда

1°. если  $F(n) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то  $F(z) \equiv 0$ ;

2°. если  $\{F(n)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — ограничена, то  $F(x)$ , ( $x \geq 0$ ) ограничена,

если  $F(n) \rightarrow s$  ( $n \rightarrow \infty$ ), то  $F(x) \rightarrow s$  ( $x \rightarrow \infty$ );

3°. если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(n)|}{n} \leq 0$ , то  $h(0) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(n)|}{n}$ .

В настоящей работе результаты аналогичного характера устанавливаются для более широкого класса функций.

Пусть  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$  — последовательность положительных, различных между собой, чисел с конечной плотностью  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n}$ . Функции, о которых пойдет речь, определены в некотором угле

$$|\arg z| < \mu, \quad \mu > \pi\alpha \quad (1)$$

следующим образом

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z), \quad (2)$$

где  $P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{\nu_j}$  — конечные линейные комбинации функций из системы  $\{z^{\nu_j}\}$ .

Предполагается, что последовательность  $\{P_n(z)\}$  в любой ограниченной замкнутой части угла (1) сходится равномерно. Заметим, что из равномерной сходимости последовательности  $\{P_n(z)\}$  внутри угла (1) следует (см. [2]) ее равномерная сходимость внутри области

$$-\infty < \arg z < \infty. \quad (3)$$

Поэтому предельная функция  $F(z)$  этой последовательности регулярна в области (3).

Частным случаем функций (2) являются функции, представленные в области (3) рядами

$$F(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^{\nu_n}, \quad \nu_n > 0$$

(при нашем условии  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} < \infty$  ряды сходятся абсолютно).

Пусть  $S_\beta$  — угол с вершиной в начале координат раствора  $2\beta$  и  $M_1(r) = \max |F(z)|, |z| = r, z \in S_\beta$ . Величину

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_1(r)}{\ln r}$$

принято называть порядком функции  $F(z)$  в угле  $S_\beta$ , а величину

$$\sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_1(r)}{r^\sigma}$$

— типом функции  $F(z)$  в угле  $S_\beta$ .

Определенные выше функции (2) рассматривались в ряде работ А. Ф. Леонтьева. В работе [4], в частности, показано, что каков бы ни был угол  $S_\mu$  с вершиной в начале раствора  $\mu > 2\pi\alpha$ , порядок в нем функции (2) один и тот же. Далее там же показано, что если порядок  $\rho$  в угле  $S_\mu$  функции (2) удовлетворяет условию

$$0 < \rho < \frac{1}{2\alpha}, \quad (4)$$

то ни на каком луче при больших  $|z|$  не может выполняться неравенство

$$|F(z)| < e^{|z|^{\rho_1}}, \quad \rho_1 < \rho.$$

Мы будем изучать поведение функции (2) с условием  $\rho < \frac{1}{2\alpha}$  в зависимости от ее поведения на некоторой последовательности точек с предельной точкой на бесконечности.

### § 1. О росте функций на последовательности точек одного луча

В этом параграфе установим следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть  $F(z)$  — предельная функция равномерно сходящейся в угле  $S_\mu: |\arg z| < \mu$  последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{P_n} a_{nj} z^j, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$ ,  $\mu > \pi\alpha$ .

Пусть функция  $F(z)$  в угле  $S_\mu$  имеет порядок  $\rho$  и тип  $\sigma$ , причем порядок  $\rho$  удовлетворяет условию

$$0 < \rho < \frac{1}{2\alpha}.$$

Если последовательность  $\{\lambda_n\}$  различных положительных чисел такова, что выполняются условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\sigma} = \tau > \frac{\sigma \sin \pi \rho \alpha}{\pi}, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^\sigma, \quad L(z) = \prod_1^\infty \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right)$$

(величина  $\delta = 0$ , в частности, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$ ), то справедливы соотношения

$$\sigma \cos \pi \rho \alpha \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\sigma} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\tau e^{i\varphi})|}{\tau^\sigma} = h(\varphi) \leq \sigma, \quad |\varphi| < \mu.$$

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [1].

**Лемма.** Пусть последовательность положительных различных чисел  $\{\mu_n\}$  удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right)$$

и пусть функция  $F(z) \neq 0$  регулярна и экспоненциального типа в некотором угле  $|\arg z| < \mu$  с вершиной в начале координат. Если для некоторого  $\varphi$

$$g = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\mu_n e^{i\varphi})|}{\mu_n} < h(\varphi),$$

где  $h(\varphi)$  — индикатриса функции  $F(z)$ , то на опорной прямой  $x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) = h(\varphi)$  у функции  $\gamma(z)$ , ассоциированной по Борелю с функцией  $F(z)$ , имеются по крайней мере две особые точки, расстояние между которыми не меньше  $2\pi$ .

Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем для случая  $\varphi = 0$ . Это не будет снижать общности теоремы, так как посредством соответствующей замены переменной всегда можно перейти к этому случаю.

Как мы уже отмечали, из сходимости последовательности (1.1) в угле  $S_\mu$ ,  $\mu > \pi\alpha$ , следует, что эта последовательность сходится в области  $-\infty < \arg z < \infty$ .

Введем функцию  $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\sigma}})$ . Она является аналитической в любом угле с вершиной в начале и растет в этом угле не быстрее целой функции экспоненциального типа  $\sigma$ .

Положим

$$\gamma(z) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-zt} dt. \quad (1.2)$$

Как известно, интеграл (1.2) сходится и представляет собой аналитическую функцию  $\gamma(z)$  в полуплоскости

$$x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) > h(\varphi). \quad (1.3)$$

На опорной прямой

$$x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) = h(\varphi) \quad (1.4)$$

функция  $\gamma(z)$  имеет хотя бы одну особую точку.

Когда  $\varphi$  будет пробегать некоторый угол  $S_\mu$  с вершиной в начале, то полуплоскость (1.3) опишет некоторую область  $G$ . В этой области  $G$  функция  $\gamma(z)$  регулярна. Очевидно, что область  $G$  содержит область  $|z| > \sigma$ ,  $z \in S_\mu$ , так как  $h(\varphi) \leq \sigma$ . Можно показать, что для некоторого луча из угла  $S_\mu$  индикатриса  $h(\varphi)$  функции  $\Phi(t)$  принимает значение равно  $\sigma$  [ $\sigma$  — тип функции  $\Phi(t)$ ]. Отсюда следует, что функция  $\gamma(z)$  на дуге  $|z| = \sigma$ ,  $z \in S_\mu$ , имеет хотя бы одну особую точку.

Функция  $\Phi(t)$  является предельной функцией для равномерно сходящейся в угле  $|\arg t| < \mu$ ,  $\mu > \pi\rho\alpha$  последовательности

$$P_n(t) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} t^{\frac{\nu_j}{\rho}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

причем в этом угле имеет место оценка

$$|\Phi(t)| < A e^{(\sigma+\varepsilon)|t|}.$$

В этих условиях всегда существует (см. [4]) последовательность

$$P_n^*(t) = \sum_{j=1}^{p_n} b_{nj} t^{\frac{\nu_j}{\rho}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

которая сходится к функции  $\Phi(t)$  внутри области  $-\infty < \arg t < \infty$  и которая в любом угле  $D: |\arg t| < q$ , с вершиной в начале, удовлетворит условию

$$|P_n^*(t)| < A_1 e^{\alpha_1 |t|}, \quad (1.5)$$

где  $\alpha_1$  — постоянная  $\geq \sigma$  (постоянные  $A_1$  и  $\alpha_1$  возможно зависят от угла  $D$ ).

Из равномерной сходимости  $\{P_n^*(t)\}$  в любой конечной части плоскости и оценки (1.5) следует, что последовательность

$$\begin{aligned} \gamma_n(u) &= \int_0^{\infty} P_n^*(t) e^{-ut} dt = \sum_{j=1}^{p_n} b_{nj} \int_0^{\infty} t^{\frac{\nu_j}{\rho}} e^{-ut} dt = \\ &= \sum_{j=1}^{p_n} b_{nj} \Gamma\left(\frac{\nu_j}{\rho} + 1\right) u^{-\left(\frac{\nu_j}{\rho} + 1\right)} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

сходится равномерно внутри области  $|u| > \alpha_1$ ,  $|\arg u| < q$  к функции

$$\gamma(u) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-ut} dt.$$

Показатели  $\left\{\frac{\nu_j}{\rho} + 1\right\}$  имеют плотность  $\alpha \cdot \rho$ . Отсюда, вспомнив, что на кривой  $|u| = \sigma$  функция  $\gamma(u)$  имеет особые точки, а в области  $|u| > \sigma$  она регулярна, заключаем (см. [3], стр. 169), что на любой замкнутой дуге окружности (расположенной на римановой поверхности) радиуса  $\sigma$  и раствора  $2\pi\rho\alpha$  функция  $\gamma(u)$  имеет хотя бы одну особую точку.

Это заключение и условие  $\rho < \frac{1}{2\alpha}$  (при этом условии  $\pi\rho\alpha < \frac{\pi}{2}$ )

позволяют сделать вывод, что индикатриса  $h(\varphi)$  функции  $\Phi(t)$  удовлетворяет условию

$$h(\varphi) \geq \sigma \cos \pi \rho \alpha. \quad (1.6)$$

В самом деле, если бы мы имели  $h(\varphi) < \sigma \cos \pi \rho \alpha$ , то тогда опорная прямая (1.4) отсекала бы на окружности  $|z| = \sigma$  дугу раствора больше  $2\pi \rho \alpha$ , на которой, исключая, быть может, концы, не было бы особых точек функции  $\gamma(u)$ , что невозможно. Итак неравенство (1.6) действительно имеет место.

Дальше доказательство теоремы поведем следующим образом. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\mu_n)|}{\mu_n} < h(0).$$

Отсюда, по лемме заключаем, что на опорной прямой  $x = h(0)$  функция  $\gamma(u)$  имеет по крайней мере две особые точки, расстояние между которыми не меньше  $2\pi\tau$ . Но это совместимо с тем, что на любой дуге окружности  $|z| = \sigma$  раствора  $2\pi\rho\alpha$  имеются особые точки  $\gamma(u)$  только тогда, когда

$$\tau < \frac{\sigma \sin \pi \rho \alpha}{\pi}.$$

В самом деле, из того, что на прямой  $x = h(0)$  имеются особые точки, расстояние между которыми не меньше  $2\pi\tau$ , а справа от этой прямой особых точек нет, следует, что прямая  $x = h(0)$  отсекает на окружности  $|z| = \sigma$  дугу, которая свободна от особых точек и которую стягивает хорда длины не меньше  $2\pi\tau$ . Эта дуга не должна содержать в себе дугу раствора  $2\pi\rho\alpha$ , ибо на такой дуге есть особые точки функции  $\gamma(u)$ . Так как дуга раствора  $2\pi\rho\alpha$  стягивается хордой длины  $2\sigma \sin \pi \rho \alpha$ , то должно иметь место соотношение

$$2\pi\tau \leq 2\sigma \sin \pi \rho \alpha.$$

Но это противоречит условию теоремы  $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \pi \rho \alpha$ . Значит предположение, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} < h(0)$$

неверно.

Следовательно, имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} = h(0),$$

что и надо было доказать.

Как следствие теоремы 1 отметим следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $F(z)$  — предельная функция для равномерно сходящейся в угле  $S_\mu: |\arg z| < \mu$  последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha$ ,  $\mu > \pi\alpha$ . Предположим, что  $F(z)$  в угле  $S_\mu$  имеет порядок  $\rho$  и тип  $\tau$ , причем порядок  $\rho$  удовлетворяет условию

$$0 < \rho < \frac{1}{2\alpha}.$$

Пусть далее  $\{\lambda_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^p} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^p, \quad L(z) = \prod_1^\infty \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Если при некотором  $\varphi$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^p} < h(\varphi),$$

то

$$\tau \geq \frac{\pi\tau}{\sin \pi\rho\alpha}.$$

Этот результат содержит в себе упомянутый во введении результат А. Ф. Леонтьева.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 3. Пусть функция  $F(z)$  — предельная для равномерно сходящейся в угле  $S_\mu: |\arg z| < \mu$  последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha, \quad \mu > \pi\alpha,$$

и пусть эта функция  $F(z)$  в угле  $S_\mu$  растет не быстрее целой функции порядка  $\rho$  типа  $\tau$ , причем  $\rho < \frac{1}{2\alpha}$ .

Тогда если  $F(\lambda_n) = 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ), где

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^p} > \frac{\sigma}{\pi} \sin \pi\rho\alpha,$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad \mu_n = \lambda_n^p, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right),$$

то

$$F(z) \equiv 0.$$

Отметим, что указанные выше теоремы справедливы и для функции, представляемой рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu_n}, \quad \nu_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha < \infty,$$

сходящимся на всей комплексной плоскости

Рассмотрим, например, целую функцию

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{nm}, \quad \alpha = \frac{1}{m},$$

где  $\{\lambda_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^p} = \tau,$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad \mu_n = \lambda_n^p, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right),$$

а  $m$  — целое число большее  $2p$ .

Как известно, функция  $F(z)$  имеет порядок  $\rho$  и ее тип

$$\sigma \leq \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}.$$

Так как  $F(\lambda_n) = 0$  и  $F(z) \not\equiv 0$ , то получаем, что тип функции

$F(z)$  есть  $\sigma \geq \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}$  и, следовательно,  $\sigma = \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}$ . Отсюда видно,

что в условии  $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \pi\rho\alpha$  теоремы 1 знак неравенства нельзя заменить знаком равенства.

Отметим теперь следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть  $F(z)$  — предельная функция последовательности

$$P_n(z) = \sum_{l=1}^{p_n} a_{nl} z^{\nu_l} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

равномерно сходящейся в угле  $|\arg z| < \mu$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$  и  $\mu > \pi\alpha$ .

Пусть эта функция в угле  $|\arg z| < \mu$  растет не быстрее целой

функции порядка  $\rho$  типа  $\sigma$ , причем  $\rho < \frac{1}{2\alpha}$ . Пусть, далее,  $\{\lambda_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho > 2h > 0 \text{ и } |n - \lambda_n^\rho| \leq L \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если  $\sigma < \frac{\pi}{\sin \pi \rho \alpha}$ , то из ограниченности  $|F(\lambda_n)|$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

следует, что  $F(z) \equiv 0$ .

Доказательство. Последовательность  $\{\lambda_n\}$  имеет плотность  $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = 1$  и величину  $\delta = 0$ . Поэтому, если предположить, что

$F(z)$  порядка  $\rho$  и типа  $\sigma$ ,  $0 < \sigma < \frac{\pi}{\sin \pi \rho \alpha}$ , то по теореме 1 должно быть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} = h(0) \geq \sigma \cos \pi \rho \alpha > 0,$$

что невозможно, так как  $|F(\lambda_n)|$  ограничена.

Пусть теперь  $F(z) \in [\rho, 0]$ . В этом случае к функции  $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\rho}})$  применима следующая теорема Дюффона—Шеффера ([5], стр. 191).

Пусть функция  $\Phi(t)$  в области  $|\arg t| < \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) регулярна, экспоненциального типа и  $h(\theta) \leq a|\cos \theta| + b|\sin \theta|$ , причем  $b < \pi$ . Пусть, далее,  $\{\mu_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию  $\mu_{n+1} - \mu_n > 2h > 0$  и  $|n - \mu_n| \leq L$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда из ограниченности  $\{\Phi(\mu_n)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) следует ограниченность  $\Phi(x)$  ( $x \geq 0$ ) и из  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = 0$  следует, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0$ .

В силу этой теоремы функция  $\Phi(t)$  ограничена на луче  $x \geq 0$ , следовательно, на этом луче ограничена и функция  $F(z)$ . Но так как  $\rho < \frac{1}{2\alpha}$ , то по теореме А. Ф. Леонтьева [4] функция  $F(z)$  ( $\rho < \frac{1}{2\alpha}$ ), ограниченная на луче, тождественно равна нулю.

Отметим, что теорема Гайера, о которой упоминалось во введении, является частным случаем теоремы 4. Причем пункты 2° и 3° этой теоремы теперь будут формулироваться точнее. Именно, мы имеем:

2°. из ограниченности  $\{F(n)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) следует, что  $F(z) \equiv 0$ ,

3°. 
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(n)|}{n} = h(0) \geq \sigma \cos(\delta \cdot \alpha).$$

## § 2. О росте функций на последовательности точек двух лучей

В этом параграфе изучается рост функций (2) в зависимости от роста этих функций на последовательности точек, расположенных на двух лучах. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $F(z)$  — предельная функция равномерно сходящейся в угле  $S_\mu: |\arg z| < \mu$  последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{\nu_j} \quad (n=1, 2, \dots).$$

причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$ ,  $\mu > \pi\alpha$ .

Пусть функция  $F(z)$  в угле  $S_\mu$  имеет порядок  $\rho$  и тип  $\sigma$ , причем вместо условия  $\alpha < \frac{1}{2\rho}$  теоремы 1 пусть выполняется условие

$$\alpha < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}, \quad \omega > \rho.$$

Предположим, далее, что  $\{\lambda_n\}$  — последовательность чисел, удовлетворяющих условию  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\sigma} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^\sigma, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Тогда, если  $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta$ ,

$$\text{где} \quad \beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\},$$

то хотя бы на одном из лучей  $\varphi = \varphi_0$  или  $\varphi = \varphi_1$ , угол между которыми равен  $\frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$ , имеет место соотношение

$$\sigma \cos \beta \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\sigma} = h(\varphi) \leq \sigma.$$

Доказательство во многом аналогично с доказательством теоремы 1.

Именно, рассмотрим функцию  $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\sigma}})$ . Как видели выше, ассоциированная с ней по Борелю функция  $\gamma(z)$ , определяемая формулой (1.2), представляет регулярную функцию в области  $|z| > \sigma$ , причем на любой дуге окружности  $|z| = \sigma$  раствора  $2\pi\omega$  функция  $\gamma(z)$  имеет хотя бы одну особую точку.

В качестве лучей  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = \varphi_1$  возьмем лучи  $\varphi = \frac{\pi}{2\omega}$  и  $\varphi = -\frac{\pi}{2\omega}$  (это, очевидно, не будет снижать общности теоремы). При замене  $z = t^{\frac{1}{\rho}}$  (здесь положительным значениям  $t$  соответствуют положительные значения  $z$ ) эти лучи перейдут в лучи:  $\arg t = \frac{\pi\rho}{2\omega}$  и  $\arg t = -\frac{\pi\rho}{2\omega}$ . Обозначим последние лучи через  $\theta^+$  и  $\theta^-$ .

На окружности  $|z| = \sigma$  возьмем дугу раствора  $2\pi\rho\alpha$ , симметричную относительно луча  $\arg t = 0$ . На этой дуге есть хотя бы одна особая точка функции  $\gamma(z)$ . Следовательно, на одной из ее половин (а может и на обеих) имеются особые точки. Возьмем ту из этих половин, на которой имеются особые точки функции  $\gamma(z)$  и обозначим эту дугу через  $l$ . Пусть дуга  $l$  и, например, луч  $\theta^+$  находятся по одну сторону от луча  $\arg t = 0$ . Рассмотрим на окружности  $|z| = \sigma$  дугу раствора  $2\beta$ , где

$$\beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\} < \frac{\pi}{2}, \quad \left( \pi\rho\alpha < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\rho}{2\omega} \right),$$

симметричную относительно луча  $\theta^+$ . В дальнейшем эту дугу будем обозначать  $l_{\beta}$ .

Заметим, что дуга  $l_{\beta}$  содержит в себе дугу  $l$ .

Так как на дуге  $l$  имеются особые точки функции  $\gamma(z)$ , то индикатриса  $\bar{h}(\theta)$  функции  $\Phi(t)$  должна для луча  $\theta^+$  удовлетворять условию

$$\bar{h}(\theta) \geq \sigma \cos \beta.$$

Дальше доказательство теоремы поведем так. Предположим, что для  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\omega}$  ( $\theta = \pm \frac{\pi\rho}{2\omega}$ ) имеют место неравенства

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^{\rho}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\mu_n e^{i\theta})|}{\mu_n} < \bar{h}(\theta). \quad (2.1)$$

Тогда по лемме заключаем, что на опорной прямой, соответствующей лучу  $\theta^+$ , имеются по крайней мере две особые точки, расстояние между которыми не меньше  $2\pi\tau$ . Это можно совместить с тем, что на дуге  $l$  есть особые точки  $\gamma(z)$ , только тогда, когда  $\tau \leq \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta$ .

В самом деле, из того, что на опорной прямой есть особые точки, расстояние между которыми не меньше  $2\pi\tau$ , а справа от этой прямой особых точек нет, следует, что опорная прямая от окруж-

ности  $|z| = \sigma$  отсекает дугу, свободную от особых точек, которая стягивается хордой длины не меньше  $2\pi\tau$ .

Отсекаемая дуга не должна содержать внутри себя дугу  $l_{2\beta}$  (так как дуга  $l_{2\beta}$  содержит особые точки). Поэтому (так как дуга  $l_{2\beta}$  стягивается хордой длины  $2\sigma \sin \beta$  и  $\beta < \frac{\pi}{2}$ ) должно иметь место неравенство

$$2\sigma \sin \beta \geq 2\pi\tau,$$

или

$$\tau \leq \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta.$$

Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение о том, что по обоим рассматриваемым направлениям  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\omega}$  имеет место неравенство (2.1), неверно.

Таким образом, хотя бы по одному из рассматриваемых направлений имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\rho} = h(\varphi).$$

Этим самым теорема доказана полностью.

Следует заметить, что хотя теорема 5 верна при любых  $x < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}$ ,  $\omega > \rho$ , но она представляет интерес лишь для случая, когда

$$\frac{1}{2\omega} < x < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}.$$

При  $x < \frac{1}{2\omega} < \frac{1}{2\rho}$  теорема 1 дает более точный результат.

Из теоремы 5 выводятся следствия, аналогичные тем, которые выведены из теоремы 1. Отметим эти следствия.

Теорема 6. Если выполнены все условия теоремы 5 кроме последнего  $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta$  и на двух лучах  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = \varphi_1$ , угол между которыми равен  $\frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$ , справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\rho} < h(\varphi), \quad \varphi = \varphi_0, \varphi_1,$$

то

$$\sigma \geq \frac{\pi\tau}{\sin \beta},$$

где

$$\beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\}.$$

Из теоремы 5 вытекает следующая теорема единственности.

**Теорема 7.** Пусть  $F(z)$  — предельная функция равномерно сходящейся в угле  $S_\mu: |\arg z| < \mu$  последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha$ ,  $\mu > \pi\alpha$ .

Пусть функция  $F(z)$  в угле  $S_\mu$  растет не быстрее целой функции порядка  $\rho$  типа  $\sigma$  и

$$\alpha < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}, \quad \omega > \rho.$$

Пусть далее  $\{\lambda_n\}$  — последовательность, удовлетворяет условиям  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^\rho, \quad L(z) = \prod_1^\infty \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Если

$$\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta,$$

где

$$\beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\}$$

и функция  $F(z)$  обращается в нуль в точках  $\{\lambda_n e^{i\varphi_0}\}$ ,  $\{\lambda_n e^{i\varphi_1}\}$ , расположенных на двух лучах  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = \varphi_1$  угол между которыми равен  $\frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$ , то  $F(z) \equiv 0$ .

Комбинируя теорему 5 с теоремой Дюффона—Шеффера [5] можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 8.** Пусть  $F(z)$  — предельная функция последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

равномерно сходящейся в угле  $|\arg z| < \mu$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha$ ,  $\mu > \pi\alpha$ .

Пусть эта функция  $F(z)$  в этом угле растет не быстрее целой функции порядка  $\rho$  типа  $\sigma$ .

Пусть далее  $\{\lambda_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lambda_{n+1}^2 - \lambda_n^2 \geq 2h > 0, \quad |\lambda_n - n| \leq L, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда, если  $\alpha < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}$ ,  $\omega > \rho$  и  $\sigma < \frac{\pi}{\sin \beta}$ , где  $\beta = \max \left\{ \pi\rho - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\}$ , то из ограниченности функции  $F(z)$  в точках  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\lambda_n e^{i\varphi}\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), где  $|\varphi| = \frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$ , следует, что  $F(z) \equiv 0$ .

Доказательство. Для доказательства заметим, что плотности последовательности  $\{\lambda_n\}$   $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^2} = 1$  и величина  $\delta = 0$ . Докажем, что предположение  $F(z) \neq 0$  нас приводит к противоречию.

Если  $F(z)$  — порядка  $\rho$  и типа  $\sigma$ , такого, что  $0 < \sigma < \frac{\pi}{\sin \beta}$ , тогда по теореме 5 справедливо по крайней мере одно из соотношений

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^2} = h(0) \geq \sigma \cos \beta > 0$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^2} = h(\varphi) \geq \sigma \cos \beta > 0.$$

Но это невозможно, так как последовательности  $|F(\lambda_n)|$  и  $|F(\lambda_n e^{i\varphi})|$  ограничены.

Если  $F(z)$  принадлежит к классу  $[p, 0]$  мы воспользуемся теоремой Дюффона—Шеффера (эта теорема сформулирована при доказательстве теоремы 4) применительно к функции  $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\rho}})$ . Применяя эту теорему к лучам  $\arg t = 0$  и  $\arg t = \varphi\rho$ , получим, что функция  $\Phi(t)$  ограничена на этих лучах. Тогда функция  $F(z)$  будет ограничена на лучах  $\arg z = 0$  и  $\arg z = \varphi$ ,  $|\varphi| = \frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$ . В силу теоремы А. Ф. Леонтьева [4], отсюда следует, что  $F(z) \equiv 0$ . Что и требовалось доказать.

Заметим, что аналогичным образом можно было бы рассмотреть случай нескольких лучей (больше 2-х). При этом нетрудно установить каким условиям будет удовлетворять величина  $\alpha$ .

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Ф. Леонтьеву за руководство работой.

Վ. Պ. Գրուսով

ՃԱՌԱԳԱՅՅՔԻ ԿԵՏԵՐԻ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՃՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են  $F(z)$  ֆունկցիաները, որոնք ապրոք-աբմացիայի են ենթարկվում  $\{z^n\}$  սխտեմի միջոցով ( $\gamma$ -ն դրական թվեր են  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\gamma_n}$  վերջավոր խտությունը): Նշվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում ֆունկցիայի աճը ցանկացած  $\arg z = \varphi$  ճառագայթի վրայով որոշվում է նրա աճով այդ ճառագայթի  $\{\lambda_n e^{i\varphi}\}$  կետերի հաջորդականության վրայով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Леонтьев А. Ф. О полноте одной системы аналитических функций. Матем. сб., 31, (73), 1952, 381—413.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. Труды мат. ин-та АН СССР, 39, 1951.
3. Güler D. Über ganze Funktionen vom Exponential typ. mit Lückenreihen Math. Zeitschrift, 68, 5, 1958, 488—497.
4. Леонтьев А. Ф. Распространение свойств целых функций порядка меньше половины на некоторые другие функции. Труды мат. ин-та АН СССР, LXIV, 1961, 126—147.
5. Boas R. P. Entire Functions. New York, 1954.

С. Е. Карапетян

## Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства

### Введение

Как известно, теория линейчатой геометрии трехмерного проективного пространства сводится к теории подмногообразий плюккеровой гиперквадрики  $\Omega(1, 3)$  пятимерного проективного пространства  $P_5$  (см., например, [1]). При этом каждая прямая ( $xy$ ) пространства  $P_3$  отображается в точку гиперквадрики  $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$  пространства  $P_5$ , где  $p_{ij} = -p_{ji} = x^i y^j - x^j y^i$ . В этом отображении (которое называется плюккеровым) линейным образам линейчатой геометрии  $P_3$  соответствуют плоскости различных измерений в  $P_5$ . Если эти плоскости касаются гиперквадрики, то их пересечения с  $\Omega(1, 3)$  являются отображениями особых линейных образов пространства  $P_3$ . Косые линейчатые поверхности этого пространства классифицируются по признаку принадлежности ее отображения к плоскостям различных измерений в  $P_5$ . Развертывающиеся поверхности представляются линиями, касательные к которым совпадают с образующими гиперквадрики  $\Omega(1, 3)$ .

В настоящей работе изучается аналогичное отображение для прямых и плоскостей пространства  $P_4$ . Каждая прямая этого пространства отображается в точку грассманова многообразия  $\Omega(1, 4)$  проективного девятимерного пространства  $P_9$  и каждая плоскость пространства  $P_4$  отображается в точку дуального грассманова многообразия  $\Omega(2, 4)$  пространства  $P_9$  [2]. Таким образом, теория многообразий прямых и плоскостей сводится к теории подмногообразий грассмановых многообразий  $\Omega(1, 4)$  и  $\Omega(2, 4)$  проективных пространств  $P_9$  и  $P_9'$ .

Такой подход представляется очень естественным и обладает двумя преимуществами: во-первых, все рассматриваемые задачи находятся в тесной связи с алгебраической геометрией, во-вторых, рассматривая подмногообразия грассманова многообразия  $\Omega(m, n)$ , мы фактически имеем дело с многомерными поверхностями, погруженными в  $(C_{n+1}^{m+1} - 1)$ -мерные пространства, следовательно имеем возможность пользоваться богатыми результатами, полученными в этом направлении.

В первом параграфе изучаются некоторые свойства грассманоидного многообразия  $\Omega(1, 4)$  в  $P_4$ . Во втором параграфе рассматривается линейное пятимерное многообразие прямых  $L_3$  и его особое многообразие. Нуль-система, порожденная этим многообразием, представляет корреляцию вообще с одной особой точкой. В § 3 рассматривается линейное четырехмерное многообразие  $L_4$  и его особые многообразия. Порожденная нуль-система, вообще, имеет особую кривую второго порядка. В § 4 изучается линейное трехмерное многообразие прямых  $L_2$  и его особые многообразия. Порожденная нуль-система имеет особую двумерную поверхность.

Линейное двумерное многообразие прямых  $L_2$  тесно связывается с конфигурацией Власова и геометрическое место этих прямых является гиперповерхностью третьего порядка, названной нами поверхностью Власова. В параграфах 5 и 6 изучаются многообразия  $L_2$  и рассматриваются некоторые свойства конфигурации и поверхности Власова. В § 9 указываются поверхность и конфигурация двойственные с поверхностью и конфигурацией Власова. В § 7 изучается линейное многообразие прямых  $L_1$ . Эти прямые образуют некоторую поверхность, которая сама себе двойственна. В § 9 эти результаты автоматически повторяются для линейных многообразий плоскостей пространства  $P_4$ .

Все полученные здесь результаты находятся в тесной связи с линейной геометрией окружностей нашего трехмерного пространства, т. е. с задачей, поставленной еще Феликсом Клейном (см. [4], стр. 125—126).

### § I. Грассманоидное многообразие

Пусть прямая в  $P_4$  определяется точками  $x(x^i)$ ,  $y(y^i)$ . Грассманоидное произведение этих точек имеет 10 компонентов, которые являются минорами второго порядка матрицы, составленной из координат точек  $x$  и  $y$

$$(xy) = ik\bar{i}\bar{k}, \quad i < k \quad (\text{суммировать по } i, k = 1, 2, \dots, 5), \quad (1)$$

где  $ik = x^i y^k - x^k y^i$  — грассманоиды (или плюккеровы) координаты прямой  $xy$ , а  $\bar{i}\bar{k} = (A_i, A_k)$  — грассманоиды произведения вершин координатного репера  $A_i$ . Десять координат  $ik$  прямой  $p$  удовлетворяют пяти квадратичным соотношениям

$$\varphi_1(pp) \equiv \underline{12\ 34} - \underline{13\ 24} + \underline{14\ 23} = 0,$$

$$\varphi_2(pp) \equiv \underline{12\ 35} - \underline{13\ 25} + \underline{15\ 23} = 0,$$

$$\varphi_3(pp) \equiv \underline{12\ 45} - \underline{14\ 25} + \underline{15\ 24} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi_4(pp) \equiv \underline{23\ 45} - \underline{24\ 35} + \underline{25\ 34} = 0,$$

$$\varphi_5(pp) \equiv \underline{13\ 45} - \underline{14\ 35} + \underline{15\ 34} = 0,$$

из которых независимы только три соотношения и, наоборот, если 10 чисел удовлетворяют соотношениям (2), то они являются грассманоидными

выми координатами прямой в  $P_4$ . Таким образом, если числа  $ik$  рассматривать как однородные координаты точки в  $P_9$ , то прямые  $P_4$  представляются точками грассманова многообразия (2) девятимерного пространства  $P_9$ . Размерность грассманова многообразия (2) равна шести, так как прямая в  $P_4$  определяется шестью параметрами, а порядок равен пяти (см. [2], т. II, стр. 404), т. е. общая трехмерная плоскость пересекается с поверхностью (2) ровно в пяти точках.

Рассмотрим некоторые элементарные свойства отображения прямых из  $P_4$  в  $P_9$ . 1) Две прямые  $p$  и  $q$  четырехмерного пространства  $P_4$  пересекаются тогда и только тогда, когда их отображения лежат на одной образующей прямой поверхности (2). Действительно, пересечение прямых  $p$  и  $q$  равносильно требованию, чтобы две пары точек, определяющих эти прямые, лежали на одной плоскости, т. е. все миноры 4-го порядка матрицы этих точек должны равняться нулю, что приводит их к обращению в нуль полярных форм  $\varphi_i$  для этих двух прямых

$$\varphi_i(pq) = 0. \quad (3)$$

В силу этих соотношений мы будем иметь  $\varphi_i(p + \lambda q, p + \lambda q) = 0$  для любого  $\lambda$ . 2) Здесь мы одновременно доказали, что точки образующей прямой поверхности (2) представляют все прямые одного пучка.

Для краткости изложения введем следующую терминологию: пучок прямых назовем *пучком одного измерения*, все прямые 3-пространства, проходящие через данную точку, — *пучком двух измерений*, все прямые 4-пространства, проходящие через одну точку, — *пучком трех измерений*. Однопараметрическое и двухпараметрическое семейства прямых, лежащих на одной 2-плоскости, назовем соответственно одномерным и двумерным плоским полем. 3) Так как каждые две прямые двумерного плоского поля пересекаются, то двумерное поле прямых представляется всеми точками образующей 2-плоскости поверхности (2) и, следовательно, одномерное плоское поле представляется некоторой кривой на этой 2-плоскости. 4) Двумерные и трехмерные пучки прямых представляются, соответственно, образующими 2- и 3-плоскостями поверхности (2). Таким образом, все образующие 2-плоскости поверхности (2) по их происхождению делятся на две серии. Две серии плоскостей, представляющие соответственно двумерные плоские поля прямых и двумерные пучки прямых, назовем образующими *первой и второй серии*. 5) Прямые пучка трех измерений представляются всеми точками некоторой образующей 3-плоскости поверхности (2). 6) Прямые трехмерного пространства представляются всеми точками некоторого квадратичного многообразия  $\Omega(1, 3)$  четырех измерений, принадлежащего поверхности (2). 7) Через две не принадлежащей к одной образующей точки поверхности (2) проходит единственное квадратичное многообразие  $\Omega(1, 3)$ . Последнее вытекает из того, что две непересекающиеся прямые в  $P_4$  определяют одно 3-пространство. 8) Через каждую образующую пря-

мую поверхности (2) проходит единственная образующая плоскость первой серии,  $\infty^1$  образующих плоскостей второй серии и единственная образующая 3-плоскость, ибо каждая образующая прямая поверхности (2) отображает пучок прямых из  $P_4$ . 9) Три точки общего положения поверхности (2) определяют единственную четвертую точку той же поверхности, находящуюся на одной образующей с каждой из данных трех точек. Последнее вытекает из того, что в  $P_4$  существует единственная прямая, пересекающаяся одновременно с тремя данными в общем положении прямыми. 10) Все прямые, пересекающиеся с фиксированной прямой  $p$  пространства  $P_4$ , отображаются в точки поверхности (2), принадлежащие некоторому четырехмерному конусу  $K_4^3$  с вершиной в точке  $p$ . Касательная 6-плоскость поверхности (2) в точке  $p$  пересекается с этой поверхностью по конусу  $K_4^3$ .

## § 2. Линейные пятимерные многообразия прямых в $P_4$

Начиная с этого параграфа, мы будем рассматривать плоскости различных измерений в пространстве  $P_5$  и выясним, по каким подмногообразиям они пересекаются с поверхностью (2). В  $P_4$  каждому такому подмногообразию будет соответствовать некоторая совокупность прямых, которая называется линейным образом данной размерности.

Прежде всего рассмотрим гиперплоскость в  $P_5$

$$a_{ik}ik = 0, \quad i < k, \quad i, k = 1, 2, \dots, 5. \quad (4)$$

Эта плоскость пересекается с поверхностью (2) в точках, координаты  $ik$  которых удовлетворяют системе (2), т. е. размерность линейного образа (4) равна пяти. В силу (1) из (4) получим билинейное соответствие между точками  $x$  и  $y$ . Каждой точке  $x$  соответствуют все точки  $y$  некоторой, проходящей через  $x$ , гиперплоскости  $u$

$$u_i = a_{ik}x^k, \quad a_{ik} = -a_{ki}, \quad (5)$$

но так как матрица  $[a_{ik}]$  кососимметрична и имеет нечетный порядок (он равен пяти), то система  $a_{ik}x^k = 0$  имеет ненулевое решение и следовательно, в общем случае для каждой гиперплоскости (4) существует единственная точка  $x_0$ , которой не соответствуют никакие 3-плоскости. Соотношение (5) принято называть нуль-системой для линейного образа (4), а точку  $x_0$  — особой точкой этой нуль-системы.

Таким образом, линейное пятимерное многообразие прямых ( $L_5$ ) устанавливает нуль-систему с одной особой точкой  $x_0$ . Через каждую точку  $x \neq x_0$  пространства проходит двумерный пучок прямых этого многообразия, причем носители (3-пространства) всех этих пучков проходят через особую точку  $x_0$ .

В силу  $a_{ik}x_0^k = 0$  всем точкам  $x + \lambda x_0$  соответствует только одна 3-плоскость, и наоборот. Таким образом, нуль-система (5) устанавливает

дает взаимно-однозначное соответствие между прямыми трехмерного пучка с центром  $x_0$  и 3-плоскостями, проходящими через эту точку.

Точно так же можно доказать, что нуль-система (5) каждой не принадлежащей к пучку  $x_0$  прямой  $p$  ставит в соответствие некоторую проходящую через  $x_0$  плоскость  $\pi$ . Эта плоскость не пересекается с данной прямой, если последняя не принадлежит многообразию  $L_5$ . Если прямая  $p$  принадлежит к линейному многообразию  $L_5$ , то она инцидентна с соответствующей плоскостью  $\pi$ , и наоборот. Всем прямым, принадлежащим плоскости  $(px_0)$ , соответствует единственная плоскость  $\pi$ . Если прямая  $p$  принадлежит многообразию  $L_5$ , то все прямые плоскости  $(px_0)$  также принадлежат к многообразию  $L_5$ , следовательно, такая плоскость принадлежит к числу тех плоскостей, которые соответствуют сами себе (самосопряженные) в нуль-системе (5). Таким образом, все плоскости с общей точкой  $x_0$  разбиваются на два класса — самосопряженные и не самосопряженные. Причем все прямые, лежащие на самосопряженных плоскостях, принадлежат к многообразию  $L_5$ , и наоборот, если на плоскости лежит одна не проходящая через  $x_0$  прямая многообразия  $L_5$ , то все прямые этой плоскости принадлежат к  $L_5$  и плоскость самосопряженна относительно нуль-системы (5). На каждой не самосопряженной плоскости лежит только один пучок прямых с центром  $x_0$ , принадлежащих многообразию  $L_5$ .

Плоскость, определяемая тремя точками  $x, y, z$  в нуль-системе, сопряжена с проходящей через  $x_0$  прямой  $u_i = a_{ik}x^k, v_i = a_{ik}y^k, w_i = a_{ik}z^k$ . Эта прямая одновременно сопряжена с трехмерным подпространством  $(x_0xyz)$ , следовательно, она пересекается со своей сопряженной плоскостью. На произвольной (не проходящей через  $x_0$ ) плоскости лежит единственный пучок прямых, принадлежащих многообразию  $L_5$ . Действительно, через каждую точку  $x$  этой плоскости проходит единственная лежащая в этой плоскости прямая  $p$ , принадлежащая к  $L_5$  (ибо сопряженная с  $x$  3-плоскость пересекается с этой 2-плоскостью, вообще, по одной прямой). Точно так же через точку  $y$  этой плоскости проходит прямая  $q$  из  $L_5$ . Прямые  $p$  и  $q$  пересекаются в точке  $z$ . Трехмерное подпространство, сопряженное точке  $z$ , пересекается с этой плоскостью по двум прямым  $p$  и  $q$ , следовательно, содержит эту плоскость, т. е. прямые пучка  $z$  принадлежат к многообразию  $L_5$ . Существование других прямых, принадлежащих  $L_5$ , означает, что эта плоскость проходит через  $x_0$ , что исключается. Очевидно, что центр, принадлежащих к  $L_5$ , пучка прямых плоскости находится одновременно на сопряженной с этой плоскостью (относительно нуль-системы) прямой.

Линейное пятимерное многообразие прямых  $L_5$  будем называть особым, если число его особых точек больше одного. Для этого необходимо и достаточно, чтобы система  $a_{jk}x^k = 0$  имела больше одного решения, т. е. ранг матрицы  $\|a_{jk}\|$  должен быть ниже четырех. Но

так как ранг кососимметричной матрицы всегда является четным числом, то в нашем случае он равен двум и, следовательно, особые точки образуют некоторую особую плоскость  $a$ . Так как носитель каждого двумерного пучка должен проходить через все особые точки, то все прямые этих пучков и, следовательно, все прямые нашего многообразия пересекаются с фиксированной плоскостью  $a$ . Иное *особое пятимерное линейное многообразие  $L_5$  является геометрическим местом всех прямых, пересекающих данную плоскость.*

Двойственный результат формулируется так: *особое пятимерное линейное многообразие плоскостей является геометрическим местом всех плоскостей, пересекающих данную прямую.*

Теперь нетрудно заметить, что коэффициенты уравнения (4) являются грассмановыми дуальными координатами плоскости  $a$ . Действительно, так как ранг матрицы  $[a_{ik}]$  равен двум, то все миноры четвертого порядка этой матрицы обращаются в нуль, и это приводит к пяти равенствам  $\varphi_i(aa) = 0$ . Но при наличии таких условий  $a_{ik}$  становятся координатами 2-плоскости и соотношение (4) показывает, что плоскость  $a$  и прямая  $p$  с координатами  $\underline{ik}$  пересекаются ([2], гл. I, стр. 322).

Вернувшись к неособому линейному пятимерному многообразию прямых (4), заметим, что все прямые пространства  $P_4$ , проходящие через особую точку  $x_0$ , принадлежат этому многообразию (и это единственный трехмерный пучок, принадлежащий многообразию), и последнее означает, что *каждая гиперплоскость девятимерного пространства содержит одну образующую 2-плоскость грассманова многообразия (2)*. Если она содержит больше одной такой плоскости, то их количество будет  $\infty^2$  и, как мы видели, гиперповерхность (4) представит особое пятимерное линейное многообразие прямых. Особая плоскость этого многообразия содержит  $\infty^2$  прямых и все прямые пространства  $P_4$ , пересекающие каждую из этих прямых, принадлежат многообразию. Следовательно, в  $P_9$  гиперплоскости (4) принадлежат  $\infty^2$  касательных шестимерных подпространств поверхности (2), касающихся во всех точках некоторой образующей 2-плоскости первой серии (отображения особой плоскости  $a$ ).

Таким образом, *гиперплоскость в  $P_9$  либо не содержит ни одной касательной шестимерной плоскости поверхности (2), либо содержит  $\infty^2$  таких плоскостей. Точки касания этих плоскостей принадлежат к некоторой образующей 2-плоскости первой серии.*

### § 3. Линейное четырехмерное многообразие прямых

Семимерное подпространство в  $P_9$

$$a_{ik}\underline{ik} = 0, \quad b_{ik}\underline{ik} = 0, \quad i < k \quad (6)$$

пересекается с поверхностью (2) по некоторому четырехмерному многообразию  $L_4$ , представляющему *линейное четырехмерное мно-*

образе прямых четырехмерного проективного пространства. Все прямые  $p$  с грассмановыми координатами  $ik$ , удовлетворяющие системе (6), удовлетворяют также уравнению вида

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik}) ik = 0, \quad (7)$$

для любого значения  $\lambda$ . Каждая гиперплоскость (7) представляет, вообще, неособое линейное пятимерное многообразие прямых четырехмерного пространства и устанавливает нуль-систему

$$u_i = (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k. \quad (8)$$

Особая точка  $x$  соответствия (8) зависит от  $\lambda$  и в  $P_4$  описывает некоторую особую кривую многообразия  $L_4$ . Докажем, что особая кривая многообразия  $L_4$  в общем случае есть линия второго порядка. Действительно, пусть  $x_0$  и  $y_0$  являются особыми точками соответствия (8) для  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ . Тогда из  $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k = 0$  получим

$$a_{ik} y_0^i x^k = 0, \quad b_{ik} x_0^i x^k = 0, \quad (8.1)$$

которые и являются уравнениями плоскости в  $P_4$ . Следовательно, все особые точки лежат на одной плоскости (8.1). Так как из пяти уравнений  $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k = 0$  всего четыре независимых, то при наличии (8.1) получатся только два уравнения, из которых, исключив  $\lambda$ , получим

$$(a_{i_1 k} b_{i_2 l} - a_{i_2 k} b_{i_1 l}) x^k x^l = 0, \quad i_1 \neq i_2, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, 5. \quad (8.2)$$

Уравнения (8.1) и (8.2) представляют кривую второго порядка. Теперь мы имеем возможность доказать следующую теорему. *Через каждую точку  $x$  проходит пучок прямых многообразия  $L_4$ , исключение составляют только те точки, которые принадлежат особой кривой. Прямые многообразия (6), принадлежащие этим точкам, образуют двумерный пучок.*

Действительно, через каждую точку  $x$  пространства  $P_4$  проходят две 3-плоскости, соответствующие этой точке в двух нуль-системах (6). Эти две плоскости пересекаются по плоскости, на которой лежит пучок прямых многообразия (6). Если  $x$  принадлежит к особой кривой, то  $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k = 0$  и 3-плоскости  $u_i^0 = a_{ik} x^k$  и  $v_i^0 = b_{ik} x^k$  совпадают, ибо  $u_i^0 + \lambda v_i^0 = 0$ .

Возвращаясь к системе (8.1) заметим, что при выполнении равенства

$$a_{ik} y_0^i = \mu b_{ik} x_0^i \quad (8.3)$$

две гиперплоскости совпадают, следовательно, теперь все особые точки лежат в одной гиперплоскости. В силу (8.3) все точки прямой  $x_0 y_0$  являются особыми точками. Действительно,  $(a_{ik} + \lambda b_{ik})(\mu x_0^k - \lambda y_0^k) = 0$  выполняется для любого  $\lambda$ , и, наоборот, если все точки прямой  $x_0 y_0$  особые, то выполняется (8.3). В силу соотношения (8.3)

одно из многообразий (7) становится особым многообразием\*. Следовательно, в случае (8.3) все прямые многообразия  $L_4$  пересекают некоторую фиксированную плоскость.

Допустим, что для  $\lambda = \lambda_0$  получается особое многообразие следовательно,  $a_{ik} + \lambda_0 b_{ik}$  являются дуальными грассмановыми координатами некоторой плоскости. Особая линия в этом случае, как видели, вырождается в одну прямую  $x_0 y_0$ . На этой прямой находятся все особые точки за исключением точек плоскости. Плоскость  $a_{ik} + \lambda_0 b_{ik}$  и прямая  $x_0 y_0$  пересекаются, ибо все особые точки многообразия  $L_4$  в этом случае принадлежат к одной гиперплоскости.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнения (8.1) обращаются в тождества, т. е. когда

$$a_{ik} y_0^i = 0, \quad b_{ik} x_0^i = 0. \quad (8)$$

В этом случае числа  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  являются грассмановыми дуальными координатами некоторых плоскостей  $a$  и  $b$ , ибо в силу (8.4) каждая из систем  $a_{ik} x^k = 0$  и  $b_{ik} x^k = 0$  имеет по меньшей мере две особые точки  $x_0$  и  $y_0$ . Эти две плоскости имеют в общем случае одну общую точку  $\bar{x}$ . Нетрудно заметить, что все остальные особые точки совпадают с  $\bar{x}$ , т. е. особая кривая сжимается в одну точку. Действительно, так как  $\bar{x}$  лежит на плоскостях  $a$  и  $b$ , то  $a_{ik} \bar{x}^k = 0$ ,  $b_{ik} \bar{x}^k = 0$  или  $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) \bar{x}^k = 0$  для любого значения  $\lambda$ . Наоборот, если особые точки для любого значения  $\lambda$  (кроме  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ ) совпадают, то, совмещая эту точку с  $A_1$ , непосредственно получим  $a_{i1} = 0$ ,  $b_{i1} = 0$ , в силу чего уравнения  $\varphi_i(a + \lambda b, a + \lambda b) = 0$  имеют два корня относительно

Наконец, рассмотрим случай, когда плоскости  $a$  и  $b$  пересекаются по прямой  $\bar{x} y$ . В этом случае числа  $a_{ik} + \lambda b_{ik}$  для любого  $\lambda$  являются грассмановыми координатами плоскостей. Таким образом, в последних двух случаях многообразие  $L_4$  является геометрическим местом прямых, пересекающих две данные плоскости. В первом случае эти плоскости пересекаются в одной точке, следовательно, все прямые, проходящие через эту точку, также принадлежат  $L_4$ . Во втором случае эти плоскости пересекаются по прямой, следовательно, многообразие  $L_4$  образовано из всех прямых трехмерного подпространства (образованного этими плоскостями) из всех прямых, пересекающих общую прямую этих двух плоскостей.

Теперь будем искать касательные четырехмерные линейные многообразия  $L_4$ , т. е. такие многообразия, для которых семимерная плоскость (6) в  $P_6$  пересекается с касательной 6-плоскостью грассманова многообразия (2) по подпространству размерностью больше четырех. Сначала рассмотрим случай, когда размерность этого по

\* Полагая  $x_0 = A_1(10000)$  и  $y_0 = A_2(01000)$ , нетрудно заметить, что для  $\lambda = -\varphi_i(aa) : \varphi_i(ab)$  выражения  $\varphi_i(a + \lambda b, a + \lambda b)$  обращаются в нуль.

пространства равна пяти. Пусть прямая  $\bar{12}$  принадлежит к плоскости (6), т. е. эта прямая принадлежит к четырехмерному многообразию. Тогда  $a_{12} = b_{12} = 0$ . Касательная 6-плоскость поверхности (2) в точке  $\bar{12}$  определяется уравнениями

$$\underline{34} = 0, \quad \underline{35} = 0, \quad \underline{45} = 0. \quad (9)$$

Эта плоскость пересекается с (6) по пятимерному подпространству тогда и только тогда, когда матрица пяти уравнений (6) и (9) имеет ранг четыре, а это приводит к равенствам

$$a_{13} : a_{14} : a_{15} : a_{23} : a_{24} : a_{25} = b_{13} : b_{14} : b_{15} : b_{23} : b_{24} : b_{25}. \quad (10)$$

Составляя формы  $\varphi_i(aa)$ ,  $\varphi_i(bb)$ ,  $\varphi_i(ab)$ , мы обнаружим, что равенства (10) равносильны соотношениям

$$\varphi_i(ab) = 2t\varphi_i(aa), \quad \varphi_i(bb) = t^2\varphi_i(aa), \quad (11)$$

где  $1:t$  — коэффициент пропорциональности в (10). В силу (11) уравнения

$$\varphi_i(a + \lambda b, a + \lambda b) = \varphi_i(aa) + \lambda\varphi_i(ab) + \lambda^2\varphi_i(bb) = 0 \quad (12)$$

всегда допускают два совпавших решения относительно  $\lambda$

$$1 + 2t\lambda + \lambda^2 t^2 = 0, \quad (12')$$

а это означает, что в системе (7) содержатся два особых пятимерных многообразия с бесконечно близкими особыми плоскостями, т. е. все прямые нашего четырехмерного линейного многообразия одновременно пересекают две бесконечно близкие плоскости пространства  $P_4$ . Обозначим это многообразие через  $L_4^1$ . Таким образом, *линейное особое многообразие  $L_4^1$  является геометрическим местом всех прямых четырехмерного пространства, пересекающих две бесконечно близкие плоскости и в  $P_6$  это многообразие характеризуется тем, что его соответствующая 7-плоскость пересекается с некоторой касательной 6-плоскостью грассмана многообразия (2) по пятимерному подпространству.*

Нетрудно заметить, что касательное многообразие  $L_4^1$  является предельным положением многообразия  $L_4$  с двумя особыми плоскостями четырехмерного пространства, когда эти плоскости совпадают. В пюккеровом отображении плоскостей пространства  $P_4$  с дуальными координатами, прямая  $a_{ik} + \lambda b_{ik}$  касается грассманова многообразия, но не является для него образующей.

Теперь рассмотрим случай, когда 7-плоскость (6) содержит некоторую касательную 6-плоскость грассмана многообразия. В этом случае ранг матрицы системы (6), (9) должен равняться трем. Это требование приведет к равенствам

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{24} = a_{25} = b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{15} = \\ = b_{23} = b_{24} = b_{25} = 0,$$

которые равносильны соотношениям

$$\varphi_i(aa) = 0, \quad \varphi_i(bb) = 0, \quad \varphi_i(ab) = 0. \quad (13)$$

В силу (13) коэффициенты каждого из уравнений (6) являются грассмановыми координатами плоскости и эти две плоскости пересекаются по прямой, т. е. в этом случае касательное линейное многообразие прямых  $L_4$  (которое мы обозначим через  $L_4^2$ ) представляет все прямые, пересекающие указанные две плоскости трехмерного подпространства. Таким образом, касательное многообразие  $L_4^2$  является геометрическим местом всех прямых, пересекающих две бесконечно близкие плоскости трехмерного подпространства. В  $P_9$   $L_4^2$  характеризуется тем, что его соответствующая 7-плоскость содержит некоторую касательную 6-плоскость грассманова многообразия (2). Фактически  $L_4^2$  образуется из двух четырехмерных многообразий прямых; из всех прямых, пересекающих прямую пересечения двух плоскостей и из всех прямых трехмерного подпространства, определяемого этими двумя плоскостями. Следовательно, если 7-плоскость содержит какую-нибудь касательную 6-плоскость грассманова многообразия, то она пересекается с этим многообразием еще по некоторой квадрике  $\Omega(1, 3)$ .

В дуальном пространстве  $P_9$  прямая  $a_{ik} + \lambda b_{ik}$  в этом случае является образующей для грассманова многообразия.

#### § 4. Линейное трехмерное многообразие прямых

Переходим теперь к рассмотрению линейного трехмерного многообразия прямых  $L_3$ . Многообразие прямых  $L_3$  получается из пересечения шестимерной плоскости

$$a_{ik}ik = 0, \quad b_{ik}ik = 0, \quad c_{ik}ik = 0 \quad (14)$$

с грассмановым многообразием (2). Прямые многообразия  $L_3$  удовлетворяют также уравнению вида  $(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik})ik = 0$  при любых значениях  $\lambda$  и  $\mu$ . Каждое такое уравнение устанавливает нуль-систему, особые точки которой удовлетворяют уравнениям

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik})x^k = 0. \quad (15)$$

Геометрическое место особых точек является одной двумерной поверхностью с уравнениями:

$$\begin{vmatrix} a_{1k}x^k & b_{1k}x^k & c_{1k}x^k \\ a_{2k}x^k & b_{2k}x^k & c_{2k}x^k \\ a_{3k}x^k & b_{3k}x^k & c_{3k}x^k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{1k}x^k & b_{1k}x^k & c_{1k}x^k \\ a_{2k}x^k & b_{2k}x^k & c_{2k}x^k \\ a_{4k}x^k & b_{4k}x^k & c_{4k}x^k \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Через каждую, не принадлежащую особой поверхности (16), точку пространства проходит только одна прямая многообразия  $L_3$ .

Через каждую точку особой поверхности (16) проходит одномерный пучок прямых, принадлежащих многообразию  $L_3$ . Действительно, каждое уравнение (14) устанавливает нуль-систему  $u_i = a_{ik}x^k$ ,  $v_i = b_{ik}x^k$ ,  $w_i = c_{ik}x^k$  и три гиперплоскости  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , вообще пересекающиеся по прямой, проходящей через точку  $x$ . Эти гиперплоскости пересекаются по плоскости только при условии  $u_i + \lambda v_i + \mu w_i = (a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik})x^k = 0$ , а последнее уравнение показывает, что точка  $x$  принадлежит к поверхности (16).

Три точки  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$  в проективном пространстве  $P_3$  определяют некоторую плоскость  $(abc)$ . Она вообще не пересекается с грассмановым многообразием  $\varphi_i = 0$  этого пространства и, следовательно, вообще не существуют такие  $\lambda$  и  $\mu$ , для которых числа  $a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}$  были дуальными грассмановыми координатами некоторой плоскости пространства  $P_3$ . Этот случай соответствует наиболее общему линейному многообразию прямых  $L_3$ . Но плоскость  $(abc)$  может пересекаться с грассмановым многообразием в одной или в нескольких точках в зависимости от количества решений системы  $\varphi_i(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = 0$  относительно неизвестных  $\lambda$  и  $\mu$ . Если эта система имеет конечное число решений, то оно не может быть больше четырех. Плоскость  $(abc)$  может содержать одну или две образующие прямые грассманова многообразия и может сама быть образующей плоскостью для этого многообразия. В последних трех случаях наша система имеет бесконечно много решений.

Касательные многообразия  $L_3$ . Рассмотрим случай, когда шестимерная плоскость (14) пересекается с касательной шестимерной плоскостью грассманова многообразия по подпространству, размерность которого больше трех. Пусть эта размерность равна четырем и точка касания совпадает с точкой  $\bar{12}$ . Касательная плоскость в точке  $\bar{12}$  определяется тремя уравнениями (9). Так как точка  $\bar{12}$  принадлежит всем плоскостям (14), то  $a_{12} = b_{12} = c_{12} = 0$ . Плоскости (9) и (14) будут пересекаться по четырехмерному подпространству тогда и только тогда, когда ранг этих двух систем равен пяти. Это требование равносильно соотношениям

$$c_{ik} = \alpha a_{ik} + \beta b_{ik}, \quad i < k, \quad i = 1, 2, \quad k = 3, 4, 5. \quad (17)$$

Теперь нетрудно заметить, что в силу (17) система  $\varphi_i(\alpha a + \lambda b + \mu c)$ ,  $\alpha a + \lambda b + \mu c = (1 + \alpha\mu)^2 \varphi_i(aa) + (\lambda + \mu\alpha)^2 \varphi_i(bb) + (1 + \alpha\mu)(\lambda + \beta\mu)\varphi_i(ab)$  допускает два совпавших решения  $(1 + \alpha\mu)^2 = 0$ ,  $(\lambda + \beta\mu)^2 = 0$ , следовательно, если шестимерная плоскость пересекается с некоторой касательной к грассмановому многообразию 6-плоскостью по четырехмерному подпространству, то ее соответствующее многообразие  $L_3$  образовано из тех прямых  $P_3$ , которые пересекают две бесконечно близкие плоскости. Это многообразие является предельным случаем многообразия  $L_3$ , для которого плоскость  $(abc)$

в дуальном пространстве  $P_9$  пересекается с грасмановым многообразием в двух точках.

Рассмотрим случай, когда шестимерная плоскость (14) пересекается с касательной 6-плоскостью по пятимерному подпространству. В этом случае ранг систем (9) и (14) должен равняться четырем, что приводит к соотношениям

$$c_{ik} = \mu a_{ik}, \quad b_{ik} = \nu a_{ik}; \quad i < k; \quad i = 1, 2; \quad k = 3, 4, 5. \quad (18)$$

Нетрудно заметить, что в силу (18) имеем  $\varphi_i(a + \lambda b + \mu c, a + \lambda b + \mu c) = \varphi_i(aa)(1 + \lambda\nu + \mu\mu)^2$  и эти выражения обращаются в нуль для тех значений  $\lambda$  и  $\mu$ , которые удовлетворяют одному уравнению  $1 + \lambda\nu + \mu\mu = 0$ . Следовательно, любая точка прямой  $(va - b, \nu c - \mu b)$  в дуальном пространстве  $P_9$  принадлежит грасмановому многообразию.

Таким образом, рассматриваемый случай характеризуется тем, что плоскость  $(abc)$  пересекается с грасмановым многообразием по одной прямой и, следовательно, все прямые нашего многообразия пересекают пучок плоскостей некоторого трехмерного подпространства.

Если ранг систем (9), (14) равен трем, т. е. если шестимерная плоскость (14) одновременно является касательной в точке 12 плоскости грасманова многообразия, то нетрудно заметить, что плоскость  $(abc)$  уже становится образующей плоскостью для грасманова многообразия дуального пространства  $P_9$ . Следовательно, наше многообразие в этом случае образовано из прямых, пересекающихся все плоскости одного двумерного пучка плоскостей (двумерный пучок плоскостей — это все плоскости  $P_4$ , проходящие через данную прямую).

## § 5. Многообразие прямых $L_2$

Линейное двухпараметрическое многообразие прямых пространства  $P_4$  в  $P_9$  задается четырьмя линейными уравнениями

$$a_{ik}\bar{ik} = 0, \quad b_{ik}\bar{ik} = 0, \quad c_{ik}\bar{ik} = 0, \quad d_{ik}\bar{ik} = 0. \quad (19)$$

Четыре точки  $a, b, c$  и  $d$  в дуальном проективном пространстве  $P_9$  определяют одну трехмерную плоскость, которая в общем случае пересекается с грасмановым многообразием в пяти точках. Пусть четыре из этих пяти точек совпадают с точками  $a, b, c, d$ , тогда каждая из них представляет плоскость четырехмерного пространства и, следовательно, линейное двухпараметрическое семейство прямых  $L_2$  является геометрическим местом всех прямых, пересекающих четыре плоскости (в общем положении) пространства  $P_4$ .

Так как трехмерное подпространство  $(abcd)$  пересекается с грассмановым многообразием еще в пятой точке, то с каждой четверкой плоскостей четырехмерного пространства ассоциируется пятая плоскость  $u$ , следовательно, прямые многообразия  $L_2$  пересекают все пять ассоциированных плоскостей одновременно.

В своей докторской диссертации „Полярные системы высших порядков в формах первой степени“ (1910 г.) А. К. Власов указал интересную конфигурацию, представляемую ассоциируемой пятеркой плоскостей четырехмерного пространства (см. [3]).

Возьмем четыре плоскости в общем расположении  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$  и  $\alpha^4$ . Подходящим образом выбирая координатный репер  $A_i$  и учитывая, что каждые две плоскости в  $P_4$  имеют общую точку, можно их совместить с плоскостями

$$\alpha^1 = (A_1 A_2 A_3), \quad \alpha^2 = (A_1 A_4 M), \quad \alpha^3 = (A_2 A_4 A_5), \quad \alpha^4 = (A_3 M A_5), \quad (20)$$

где  $M = a^i A_i$  некоторая фиксированная точка пространства. Каждая тройка плоскостей из четверки (20) имеет единственную секущую плоскость, пересекающую каждую плоскость тройки по прямой. Таких плоскостей будет четыре

$$\beta^1 = (A_4 A_5 M), \quad \beta^2 = (A_2 A_5 A_3), \quad \beta^3 = (A_1 M A_3), \quad \beta^4 = (A_1 A_4 A_2). \quad (21)$$

Две плоскости  $\alpha^i$  и  $\beta^j$  противоположны, т. е. одна содержит три из шести точек, другая содержит остальные три. Эти противоположные плоскости пересекаются в одной точке  $Q^i$ . Таким образом, мы получаем четыре точки  $Q^1, Q^2, Q^3, Q^4$ . Власов доказывает, что эти четыре точки лежат в одной плоскости. Тем самым утверждается, что с каждой четверкой плоскостей (20) ассоциируется единственная плоскость

$$\gamma = (Q_1 Q_2 Q_3 Q_4). \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что плоскость (22) одновременно ассоциируется и со второй четверкой, ибо системы (20) и (21) обладают свойством взаимности.

Теперь докажем следующую теорему. Все прямые пространства  $P_4$ , пересекающие четыре плоскости конфигурации Власова, пересекаются одновременно с пятой плоскостью этой же конфигурации. Для доказательства этой теоремы сначала найдем координаты точек  $Q^i$ . Так как  $Q^i$  являются точками пересечения двух плоскостей  $\alpha^i$  и  $\beta^j$ , то аналитические точки  $Q_i$  напишутся в виде

$$\begin{aligned} Q^1 &= a^1 A_1 + a^2 A_2 + a^3 A_3, & Q^2 &= a^2 A_2 + a^3 A_3 + a^5 A_5, \\ Q^3 &= a^2 A_2 + a^4 A_4 + a^5 A_5, & Q^4 &= a^1 A_1 + a^2 A_2 + a^4 A_4. \end{aligned} \quad (23)$$

Если грассмановы координаты прямой  $p$ , пересекающей все плоскости  $\alpha^i$  конфигурации Власова, обозначим через  $ik$  ( $ik$  удовлетворяют соотношениям (2)), то будем иметь

$$a^1 24 - a^1 14 + a^4 12 = 0, \quad 45 = 0, \quad 13 = 0, \quad a^2 35 - a^3 25 + a^5 23 = 0. \quad (24)$$

Текущая точка плоскости  $\gamma$  напишется в виде

$$x = \alpha Q^1 + \beta Q^2 + \gamma Q^3 = \alpha a^1 A_1 + a^2 (\alpha + \beta + \gamma) A_2 + a^3 (\alpha + \beta) A_3 + \\ + \gamma a^4 A_4 + a^5 (\beta + \gamma) A_5.$$

Эта точка будет лежать на прямой  $p$  тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\underline{12a^2}(\alpha + \beta) + \underline{23a^1}\alpha = 0, \quad \underline{24a^1}\alpha + \underline{41a^2}(\alpha + \beta + \gamma) + \underline{12a^4}\gamma = 0, \\ \underline{34a^5}(\beta + \gamma) + \underline{53a^4}\gamma = 0$$

допускает нетривиальное решение относительно неизвестных  $\alpha, \beta, \gamma$ , т. е. когда ранг матрицы этой системы равен двум, а это всегда обеспечивается с силу соотношений (2) и (24). Таким образом теорема доказана.

В силу этой теоремы ассоциированная пятерка плоскостей конфигурации Власова представляется в  $P_5$  пятью точками пересечения трехмерного подпространства с грассмановым многообразием. Но так как это подпространство определяется любой четверкой точек из этой пятерки, то все плоскости в конфигурации Власова равноправны, т. е. любая плоскость из пятерки (20) и (22) ассоциируется с остальными четырьмя плоскостями точно так, как плоскость (22) ассоциируется с плоскостями (20).

Прямые, удовлетворяющие системе (19), удовлетворяют также уравнению

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik} + \nu d_{ik}) \underline{ik} = 0 \quad (25)$$

для произвольных значений  $\lambda, \mu, \nu$ . Уравнение (25) устанавливает нуль-полярную корреляцию по крайней мере с одной особой точкой так как система  $(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik} + \nu d_{ik}) x^k = 0$  всегда имеет по меньшей мере одно решение  $x_0$ . Геометрическое место особых точек (для различных значений  $\lambda, \mu, \nu$ ) есть гиперповерхность, которая здесь называется *поверхностью Власова*. Это название, как мы увидим, оправдывается тем, что указанная поверхность тесно связана с конфигурацией Власова.

Каждое из уравнений (19) устанавливает нуль-полярную корреляцию  $u_i^1 = a_{ik} x^k, u_i^2 = b_{ik} x^k, u_i^3 = c_{ik} x^k, u_i^4 = d_{ik} x^k$ . Плоскости  $u^i$  этой корреляции проходят через точку  $x$  и в общем случае (т. е. для общей точки  $x$ ) они кроме  $x$  другой общей точки не имеют. Исключения составляют только те точки (особые), для которых ранг матрицы  $\|u_i^j\|$  меньше четырех, но в этом случае  $(u^1 u^2 u^3 u^4) = 0$  и, следовательно,  $u_i^1 + \lambda u_i^2 + \mu u_i^3 + \nu u_i^4 = (a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik} + \nu d_{ik}) x^k = 0$ , т. е. точка  $x$  принадлежит поверхности Власова. Таким образом, все прямые линейного двухпараметрического семейства прямых принадлежат поверхности Власова.

## § 6. Дальнейшие свойства поверхности Власова

Найдем точечное уравнение поверхности Власова. Так как координаты  $ik$  прямой  $p$  многообразия  $L_2$  для координатного репера § 4. удовлетворяют системе (24), то, полагая, что  $p = (xy)$ , получим

$$\begin{aligned} x^4y^3 - x^3y^4 = 0, \quad x^1y^3 - x^3y^1 = 0, \quad a^1(x^2y^1 - x^1y^2) - a^2(x^1y^1 - x^1y^1) + \\ + a^4(x^1y^2 - x^2y^1) = 0, \quad a^2(x^3y^5 - x^5y^3) - a^3(x^2y^3 - x^5y^2) + \\ + a^5(x^2y^3 - x^3y^2) = 0. \end{aligned}$$

Согласно предыдущим теоремам, прямые многообразия  $L_2$  пересекаются со всеми плоскостями (20). Следовательно, точку  $u$  можно выбрать на плоскости  $x^1 = (A_1A_2A_3)$ , т. е. полагать  $y^4 = y^5 = 0$ . Таким образом, исключая  $y^1, y^2, y^3$ , из остальных трех уравнений мы получим искомое уравнение поверхности

$$x^1(a^2x^1 - a^1x^2)(a^1x^5 - a^3x^3) - x^3(a^4x^1 - a^1x^1)(a^5x^2 - a^2x^3) = 0. \quad (25)$$

Как мы видим, поверхность Власова есть гиперповерхность 3-го порядка четырехмерного пространства.

Из уравнения (26) непосредственно вытекает ряд следствий.

(I) Через каждую общую точку поверхности Власова проходит единственная образующая, которая принадлежит многообразию прямых  $L_2$ . (II) Все плоскости конфигурации Власова и все плоскости (21) его сопряженной конфигурации являются одновременно образующими плоскостями поверхности Власова. Таким образом, поверхность Власова обладает девятью образующими плоскостями. (III) Поверхность Власова однозначно определяется одноименной конфигурацией, т. е. она является геометрическим местом прямых, пересекающих все плоскости конфигурации. (IV) Поверхность Власова является одновременно носителем и второго (сопряженного с первым) многообразия прямых  $\bar{L}_2$ . Действительно, прямые, пересекающие все плоскости (21), также лежат на поверхности Власова. (V) На поверхности Власова существуют десять точек, через каждую из которых проходит пучок образующих прямых, принадлежащих  $L_2$ . Действительно, каждая пара плоскостей из четверки (2) пересекается в одной точке. Через эту точку проходит пучок прямых, пересекающих остальные две плоскости. Следовательно, этот пучок принадлежит многообразию  $L_2$ . Так как в конфигурации Власова все плоскости (20) и (22) равноправны, то количество этих точек будет  $C_5^2 = 10$ . На каждой плоскости (20) и (22) конфигурации Власова будут находиться четыре точки из этих десяти. Плоскость, на которой лежит этот пучок прямых многообразия  $L_2$ , также содержит три точки из этих десяти. Например, пучок с центром  $A_1$  лежит на плоскости  $(A_1A_5Q^4)$ . Аналогично можно доказать, что существует десять точек на поверхности Власова, через каждую из которых проходит пучок образующих прямых, принадлежащих сопряженному (с  $L_2$ ) многообразию  $\bar{L}_2$ . Но эти точки совпа-

дают и всего на поверхности Власова для обоих сопряженных многообразий  $L_2$  и  $\bar{L}_2$  будем иметь 10 таких точек. Плоскости, на которых лежат пучки многообразий  $L_2$  и  $\bar{L}_2$ , также совпадают, но пучки не совпадают. Например, для  $L_2$  плоскость носит пучок прямых с центром  $A_1$ , а для  $\bar{L}_2$  та же самая плоскость носит пучок с центром  $A_5$ . Следовательно, прямая  $A_1A_5$  принадлежит к многообразиям  $L_2$  и  $\bar{L}_2$  одновременно.

Частные случаи поверхности Власова. Как мы видели, плоскость  $(abcd)$  в общем случае пересекается с грассмановым многообразием в пяти точках, представляющих пять ассоциированных плоскостей конфигурации Власова в  $P_4$ , и прямые, пересекающие эти плоскости, образуют поверхность Власова. Мы здесь только перечислим естественно возникающие частные случаи, когда подпространство  $(abcd)$  пересекается с грассмановым многообразием по прямой, по плоскости и, наконец, само это подпространство является образующей 3-плоскостью грассманова многообразия.

Во всех этих случаях получаются частные случаи поверхности Власова, подробное рассмотрение которых мы здесь опускаем.

### § 7. Многообразие прямых $L_1$

Четырехмерное подпространство, определяемое уравнениями

$$a_{ik}ik = 0, b_{ik}ik = 0, c_{ik}ik = 0, d_{ik}ik = 0, l_{ik}ik = 0 \quad (27)$$

в девятимерном пространстве, пересекается с грассмановым многообразием по некоторой кривой, представляющей линейное однопараметрическое семейство прямых  $L_1$  четырехмерного пространства. Подпространство  $(abcde)$  в дуальном  $P_5$  пересекается с грассмановым многообразием этого пространства также по некоторой кривой. Следовательно, подпространство  $(abcde)$  содержит  $\infty^1$  точек, представляющих плоскости пространства  $P_4$ , и, не изменяя подпространство (27), мы можем точки  $a, b, c, d, e$  выбрать так, чтобы их координаты стали грассмановыми дуальными координатами пяти плоскостей пространства  $P_4$ . Но тогда из (27) будем иметь, что *линейное однопараметрическое семейство прямых  $L_1$  пространства  $P_4$  образовано из всех прямых, пересекающих одновременно пять фиксированных в общем положении плоскостей*. Так как подпространство  $(abcde)$  пересекается с грассмановым многообразием по кривой, то с каждой пятеркой плоскостей пространства  $P_4$  однозначно связывается  $\infty^1$  плоскостей и, следовательно, *лучи многообразия  $L_1$ , пересекая эти пять плоскостей, пересекают и все  $\infty^1$  плоскостей, с ними связанных*.

Таким образом, с многообразием прямых  $L_1$  ассоциируется однопараметрическое семейство плоскостей и, следовательно, полученная конфигурация сама себе двойственна.

§ 8. Многообразие прямых  $L_0$ 

Трехмерное подпространство имеет пять общих точек с грассмановым многообразием девятимерного пространства. Следовательно, многообразие прямых  $L_0$  в общем случае образовано из пяти прямых. Но так как трехмерное подпространство в  $P_9$  определяется четырьмя точками, то, взяв эти точки на грассмановом многообразии, мы можем сказать, что с каждой четверкой прямых четырехмерного пространства ассоциируется пятая прямая. Пять ассоциированных прямых образуют конфигурацию, двойственную конфигурации Власова.

Коэффициенты уравнений трехмерного подпространства  $P_3$  образуют шесть точек в дуальном пространстве  $P_6$ , которыми определяется пятимерное подпространство. Это подпространство пересекается с грассмановым многообразием по двумерному подмногообразию, представляющему двухпараметрическое семейство плоскостей пространства  $P_4$ . Все плоскости этого семейства пересекаются с пятью прямыми двойственной конфигурации Власова. Следовательно, эти плоскости образуют двойственную „поверхность“ Власова. Двойственная поверхность Власова является поверхностью третьего „класса“ в том смысле, что через каждую плоскость пространства  $P_4$  проходят три ее „касательных“ гиперплоскости.

Очевидно, мы можем рассматривать также двухмерное, одномерное и нульмерное подпространства в  $P_9$ , но результаты, как и в предыдущем случае, будут двойственны результатам, полученным соответственно для многообразий  $L_3$ ,  $L_4$  и  $L_5$ .

## § 9. Двойственность

Резюмируя основные результаты, полученные для линейных многообразий прямых четырехмерного проективного пространства, и имея в виду принцип двойственности в этом пространстве (точка -- трехмерное подпространство, прямая -- плоскость), можно составить следующую таблицу.

 $L_5$  $P_5$ 

1) Каждой точке пространства  $P_4$  инцидентен двухмерный пучок прямых многообразия  $L_5$ . Трехмерные подпространства этих пучков инцидентны неподвижной особой точке многообразия.

2) Особое многообразие  $L_5$  образуется из всех прямых, пересекающих данную плоскость.

1) Каждой гиперплоскости пространства  $P_4$  инцидентен двухмерный пучок плоскостей многообразия  $P_5$ . Точки этих пучков инцидентны неподвижной особой гиперплоскости многообразия.

2) Особое многообразие  $P_5$  образуется из всех плоскостей, пересекающих данную прямую.

$L_4$ 

1) Каждой общей точке пространства инцидентен пучок прямых многообразия  $L_4$ . Общее многообразие  $L_4$  имеет особую кривую второго порядка. Каждой точке этой кривой инцидентен двумерный пучок прямых многообразия  $L_4$ .

2) Особое многообразие  $L_4$  образовано из всех прямых, пересекающих две неподвижные плоскости трехмерного или четырехмерного пространства.

 $L_3$ 

1) Каждой общей точке пространства  $P_4$  инцидентна только одна прямая многообразия  $L_3$ . Многообразие  $L_3$  имеет особую двумерную поверхность. Каждой точке этой поверхности инцидентен пучок прямых многообразия  $L_3$ .

 $L_2$ 

1) Многообразие прямых  $L_2$  является геометрическим местом всех прямых, пересекающих четыре неподвижные плоскости.

2) С каждой четверкой плоскостей (в общем положении) ассоциируется пятая плоскость, которая характеризуется тем, что она пересекает все прямые многообразия  $L_2$ , определяемого четырьмя данными плоскостями.

 $P_4$ 

1) Каждой общей гиперплоскости пространства инцидентен пучок плоскостей многообразия  $P_4$ . Общее многообразие  $P_4$  имеет особый конус (однопараметрическое семейство гиперплоскостей, инцидентных неподвижной прямой) второго класса (через каждую точку пространства проходят две гиперплоскости этого семейства). Каждой гиперплоскости этого конуса инцидентен двумерный пучок плоскостей многообразия  $P_4$ .

2) Особое многообразие  $P_4$  образовано из всех плоскостей, пересекающих две неподвижные прямые двумерного или трехмерного пространства.

 $P_3$ 

1) Каждой общей гиперплоскости пространства  $P_4$  инцидентна только одна плоскость многообразия  $P_3$ . Многообразие  $P_3$  имеет особую „поверхность“ (двухпараметрическое семейство гиперплоскостей). Каждой гиперплоскости этой „поверхности“ инцидентен пучок плоскостей многообразия  $P_3$ .

 $P_2$ 

1) Многообразие плоскостей  $P_2$  является геометрическим местом всех плоскостей, пересекающих четыре неподвижные прямые.

2) С каждой четверкой прямых (в общем положении) ассоциируется пятая прямая, которая характеризуется тем, что она пересекает все плоскости линейного многообразия плоскостей  $P_2$ , определяемого четырьмя данными прямыми.

3) Многообразие прямых  $L_2$  образует некоторую гиперповерхность 3-го порядка, которая называется поверхностью Власова.

4) Все пять плоскостей конфигурации Власова и их сопряженные плоскости являются образующими плоскостями поверхности Власова.

5) Каждой общей точке поверхности Власова инцидентны две образующие прямые, из которых одна принадлежит многообразию  $L_2$ , другая — сопряженному многообразию  $\bar{L}_2$ .

### $L_1$

1) Многообразие прямых  $L_1$  образовано из всех прямых, пересекающих одновременно пять фиксированных (в общем положении) плоскостей.

2) С каждой пятеркой плоскостей в  $P_4$  связываются  $\infty^1$  плоскостей, характеризующихся тем, что каждая из них пересекается со всеми прямыми многообразия  $L_1$ , определяемого этой пятеркой.

Дальнейшее продолжение этого списка приводит к уже перечисленным (начиная с конца) результатам с переставленными столбцами.

3) Многообразие плоскостей  $\Pi_2$  образует некоторую „гиперповерхность“ (трехпараметрическое семейство гиперповерхностей) третьего класса (через каждую плоскость пространства проходят три гиперплоскости из этого семейства), которая называется двойственной поверхностью Власова.

3) Все пять прямых двойственной конфигурации Власова и их сопряженные прямые являются „образующими“ для поверхности Власова, т. е. многообразие всех гиперплоскостей, проходящих через каждую из этих прямых, является подмногообразием для этого семейства.

5) Каждой общей точке двойственной „поверхности“ Власова инцидентны две образующие плоскости, из которых одна принадлежит многообразию  $\Pi_2$ , другая — сопряженному многообразию  $\bar{\Pi}_2$ .

### $\Pi_1$

1) Многообразие плоскостей образовано из всех плоскостей, пересекающих одновременно пять фиксированных (в общем положении) прямых.

2) С каждой пятеркой прямых в  $P_4$  связываются  $\infty^1$  прямых, характеризующихся тем, что каждая из них пересекается со всеми плоскостями многообразия  $\Pi_1$ , определяемого этой пятеркой.

## Մ. Ե. Կարպեթյան

ՊՐՈՆԵԿՏԻՎ ԲԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒՅՅԱՆ ՈՒՂԻԴՆԵՐԻ ԵՎ  
ՀԱՐՔՈՒՅՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱԶԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում արված է քառաչափ տարածության ուղիղների գծային բոլոր բազմաձևությունների անսուխունը: Այդ խնդիրը լուծված է պրոնեկտիվ իննաչափ տարածության գրասմանյան բազմաձևությունների և վերջիններիս հետ կապված հանրահաշվական մեթոդների օգնությամբ:

Հարվածությունների գծային բազմաձևությունների անսուխունը ստացված է ուղիղների անսուխունից, քառաչափ տարածության երկրաչափական սկզբունքի միջոցով:

Աշխատանքում զույգ է արված նաև ուղիղների երկչափ բազմաձևության և Վլասովի կոնֆիգուրացիայի սերտ կապը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Карпетян С. Е. Сопряженные многообразия и их приложение. ДАН СССР, 133, № 5, 1960.
2. Ходж В. и Лидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. 1. II. ИЛ, М., 1954.
3. Бюшгенс С. С. Конфигурация А. К. Власова и ее обобщение. Мат. сб., 36 (78), № 2, 1955.
4. Клейн Ф. Высшая геометрия. ГОНТИ, М.—Л., 1939.

Г. С. Кочарян

О взвешенно-наилучшем приближении рациональными функциями на всей вещественной оси

Пусть четная функция  $p(x) \geq 0$  определена и непрерывна на всей оси  $-\infty < x < +\infty$ , монотонно возрастает, причем  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ .

Обозначим через  $L_2[p(x)]$  класс функций  $f(x)$ , определенных и измеримых на всей оси  $(-\infty, +\infty)$ , для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(x)} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Известно, что для полноты системы полиномов в классе  $L_2[p(x)]$  (т. е. при взвешенно-средней аппроксимации) необходимо ([1], [2]), а при добавочном условии

$$xp'(x) \uparrow +\infty, \quad x \uparrow +\infty$$

также и достаточно ([3], [4]) выполнение условия

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty.$$

Известно также, что те же условия остаются в силе и при взвешенно-равномерной аппроксимации ([4], [5]).

Пусть  $\{a_k\}$  ( $\text{Im } a_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ ) — произвольная последовательность комплексных чисел и  $\{R_n(z)\}$  — ассоциированная с нею система рациональных функций вида

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{k=0}^n (z + a_k)}, \tag{1}$$

где  $P_n(z)$  — полином степени не выше  $n$ .

Опираясь на известные предложения о единственности функций, аналитических в полуплоскости, методом моментов можно установить следующую теорему\*:

\* Об этом мне сообщил М. М. Джрбашян в устной беседе. Доказательство мы не приводим.

Теорема. Если одновременно имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \alpha_k}{1 + |\alpha_k|^2} = +\infty. \quad (2)$$

то система рациональных функций  $\{R_n(z)\}$  полна в классе  $L_2[p(x)]$ .

Аналогичный результат имеет место и при взвешенно-равномерной аппроксимации.

В связи с этим естественно исследовать вопрос о зависимости между порядком убывания наилучших приближений функциями вида (1) и дифференциальными свойствами приближаемой функции. В настоящей статье приводится решение обратной задачи наилучшего приближения. Пользуясь методом М. М. Джрбашяна [5], получаем оценки для порядка роста  $\{R_n'(x)\}$ , если

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} e^{-p(x)} |R_n(x)| < +\infty.$$

Эти оценки позволяют установить обратные теоремы наилучшего приближения, аналогичные теоремам С. Н. Бернштейна.

Что касается прямой теоремы наилучшего приближения, которая позволила бы судить о точности приводимого нами результата, то для преодоления возникающих здесь затруднений, по-видимому, потребуется привлечение новых методов.

1°. Для упрощения вычислений мы будем рассматривать частное расположение полюсов  $\{\alpha_k\}$ , а именно положим, что  $\alpha_k = i\lambda_k$ , где

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Пусть, как уже было сказано,  $y = p(x)$  непрерывная, неубывающая, четная положительная функция, определенная на всей вещественной оси,  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ . Тогда существует непрерывная, монотонно возрастающая обратная функция  $x = q(y)$ , для которой

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} q(y) = +\infty.$$

Приведем две элементарные леммы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Если рациональная функция

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{k=0}^n (z + i\lambda_k)} \quad (3)$$

удовлетворяет условию

$$|R_n(x)| \leq M \quad \text{для} \quad -R \leq x \leq +R,$$

то при  $|x| \geq R$

$$|R_n(x)| \leq M \prod_{k=0}^n \sqrt{\frac{1 + |\Phi(i\lambda_k)|^2 \Phi^2(x)}{\Phi^2(x) + |\Phi(i\lambda_k)|^2}},$$

где

$$\Phi(x) = \frac{x}{R} + \sqrt{\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 1}.$$

Доказательство. Функция  $w = \Phi(z) = \frac{z}{R} + \sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2 - 1}$  конформно отображает внешнюю часть отрезка  $[-R, +R]$  на область  $|w| > R$ , а обратная функция имеет вид

$$z = \psi(w) = \frac{R}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right).$$

Согласно условию, на  $|w| = 1$  имеем

$$\left| R_n[\psi(w)] \prod_{k=0}^n \frac{w + \Phi(i\lambda_k)}{1 + w \Phi(i\lambda_k)} \right| \leq M,$$

поэтому

$$|R_n(x)| \leq M \prod_{k=0}^n \left| \frac{1 + \Phi(x) \overline{\Phi(i\lambda_k)}}{\Phi(x) + \Phi(i\lambda_k)} \right| \text{ при } |x| > R,$$

откуда и следует наша оценка.

Лемма 2. Для данного  $n$  уравнение

$$y = 4 \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{q(y)}{\lambda_k}}, \quad y > 0 \quad (4)$$

имеет единственный корень  $\rho_n$ , который, монотонно возрастая, стремится к  $+\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Положив  $y = p(x)$ , рассмотрим функциональное уравнение

$$4 \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k + x} = p(x). \quad (4')$$

Так как функция  $y = p(x)$  неубывающая, а в левой части нашего уравнения имеем монотонно убывающую функцию со значением  $4(n+1)$  в точке  $x=0$ , то для данного значения  $n > 0$  уравнение (4') имеет единственный корень  $x = r_n$ .

В силу возрастания функции  $\sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k + x}$  при увеличении  $n$  заключаем, что  $r_n$ , а следовательно и числа  $\rho_n = p(r_n)$ , монотонно возрастают. Далее, из уравнения (4) вытекает, что последовательность чисел  $\{\rho_n\}$  не может быть ограниченной, следовательно  $\rho_n \rightarrow +\infty$ .

Теперь докажем основную теорему.

**Теорема 1.** Пусть рациональная функция (3) удовлетворяет условию

$$|R_n(x)| \leq e^{\rho(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5)$$

Для любых  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta < 1$ ) и  $a$  ( $0 < a < q(\rho_n)$ ), в области  $|y| \leq \vartheta \lambda_0$  имеет место оценка

$$|R_n(x+iy)| < e^{\rho(|x|+a)} e^{|y| Y_n(x)}, \quad (6)$$

где  $Y_n(x)$  четная функция, определяемая из формулы

$$Y_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left\{ \frac{P(x+a)}{a} + \int_{P(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)-x} \right\} + \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} & \text{при } 0 \leq x < q(\rho_n) - a, \\ \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{P(x+a)}{a} + \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} & \text{при } x \geq q(\rho_n) - a. \end{cases} \quad (7)$$

**Доказательство.** Функция  $\log |R_n(x+iy)|$  субгармонична в полуплоскости  $y > 0$ , а функция

$$\log \left| \prod_{k=0}^n \frac{x+iy+i\lambda_k}{x+iy-i\lambda_k} R_n(x+iy) \right|$$

субгармонична в полуплоскости  $y < 0$ , следовательно

$$\log |R_n(x+iy)| \leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi \quad \text{при } y > 0 \quad (8)$$

и

$$\log |R_n(x+iy)| \leq \log \prod_{k=0}^n \left| \frac{x+iy-i\lambda_k}{x+iy+i\lambda_k} \right| + \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi \quad \text{при } y < 0. \quad (9)$$

При  $y < 0$  и  $0 < \vartheta < 1$ , если  $|y| \leq \vartheta \lambda_0$ , имеем (см. [6])

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+iy-i\lambda_k}{x+iy+i\lambda_k} \right|^2 &= 1 - \frac{4\lambda_k}{x^2 + (\lambda_k + y)^2} y = 1 + \frac{4\lambda_k}{x^2 + (\lambda_k - |y|)^2} |y| < \\ &\leq 1 + \frac{4\lambda_k}{(1-\vartheta)^2 \lambda_k^2} |y| = 1 + \frac{4}{(1-\vartheta)^2} \frac{|y|}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\log \prod_{k=1}^n \left| \frac{x+iy-i\lambda_k}{x+iy+i\lambda_k} \right| \leq \frac{2|y|}{(1-\vartheta)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k}, \quad -\vartheta \lambda_0 \leq y < 0. \quad (10)$$

Перейдем к оценке  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi$  при  $y > 0$ .

Пусть  $0 < a < q(\rho_n)$  любое число. Рассмотрим два случая.

*Первый случай.* Пусть  $x \geq q(\rho_n) - a$ , т. е.  $\rho_n \leq p(x + a)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi &= \int_{-\infty}^{-(x+a)} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi + \int_{-(x+a)}^{x+a} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi + \\ &+ \int_{x+a}^{+\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Из условия (5) имеем

$$\log |R_n(\xi)| \leq p(x + a)$$

при  $|\xi| \leq x + a$ , поэтому

$$\begin{aligned} J_2 &\leq p(x + a) \int_{-(x+a)}^{x+a} \frac{d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2} < p(x + a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2} = \\ &= \frac{\pi}{y} p(x + a). \end{aligned} \quad (11)$$

По лемме 1 при  $|\xi| > x + a$  будем иметь

$$|R_n(\xi)| \leq e^{p(x+a)} \prod_{k=0}^n \sqrt{\frac{1 + |\Phi_1(i\lambda_k)|^2 \Phi_1^2(\xi)}{\Phi_1^2(\xi) + |\Phi_1(i\lambda_k)|^2}},$$

где

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\xi}{x+a} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{x+a}\right)^2 - 1}.$$

Учитывая это, получаем

$$J_2 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_{x+a}^{\infty} \log \frac{1 + |\Phi_1(i\lambda_k)|^2 \Phi_1^2(\xi)}{\Phi_1^2(\xi) + |\Phi_1(i\lambda_k)|^2} \frac{d\xi}{(\xi - x)^2}.$$

Интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} J_2 &< \frac{p(x+a)}{a} + \sum_{k=0}^n \int_{x+a}^{\infty} \frac{(|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 - 1) \Phi_1'(\xi) \Phi_1(\xi) (|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 + 1)}{[1 + |\Phi_1(i\lambda_k)|^2 \Phi_1^2(\xi)] [\Phi_1^2(\xi) + |\Phi_1(i\lambda_k)|^2]} \times \\ &\quad \times \frac{d\xi}{\xi - x}. \end{aligned}$$

После замены переменной  $\frac{\xi}{x+a} = \frac{1}{t}$  имеем

$$\Phi_1(\xi) = \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t}, \quad \Phi_1'(\xi) = \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{(x+a)\sqrt{1-t^2}},$$

$$\frac{d\xi}{\xi-x} = -\frac{x+a}{t[a+(1-t)x]} dt,$$

поэтому

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \sum_{k=0}^n (|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 - 1) \times \\ \times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2} |a+(1-t)x| [t^2 + (1 + \sqrt{1-t^2})^2 |\Phi_1(i\lambda_k)|^2]} \times \\ \times \frac{t^2 (\sqrt{1-t^2} + 1)^2 (|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 + 1) dt}{[t^2 |\Phi_1(i\lambda_k)|^2 + (1 + \sqrt{1-t^2})^2]}.$$

После некоторого упрощения получаем

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{1}{a} \sum_{k=0}^n (1 - |\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2}) \int_0^1 \frac{1 + |\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2}}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

или

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{\pi}{a} \sum_{k=0}^n (1 - |\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2}).$$

Наконец, так как

$$|\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2} = 2 \left( \frac{\lambda_k}{x+a} \right)^2 - 2 \frac{\lambda_k}{x+a} \sqrt{\left( \frac{\lambda_k}{x+a} \right)^2 + 1} + 1,$$

то

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + 2 \frac{\pi}{a} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\lambda_k}{x+a} \right)^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{x+a}{\lambda_k} \right)^2} - 1 \right],$$

или, окончательно,

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + 2 \frac{\pi}{a} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{x+a}{\lambda_k}}.$$

Учитывая выбор числа  $\rho_n$  (4) и что в этом случае  $q(\rho_n) \leq x+a$ , приходим к оценке

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{\pi}{2a} \rho_n \leq \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \frac{p(x+a)}{a}.$$

Такую же оценку получим и для  $J_1$ , и, кроме того, эти оценки будут верны и при  $x \geq -[q(\rho_n) - a]$ . Складывая все оценки, получим

$$\log |R_n(x+iy)| \leq p(|x|+a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{p(|x|+a)}{a} y \quad (12)$$

при  $y > 0$  и  $|x| \geq q(\rho_n) - a$ .

*Второй случай.* Пусть теперь  $0 \leq x < q(\rho_n) - a$ . Тогда из (11) имеем

$$J_2 < \frac{\pi}{y} p(x+a).$$

Далее

$$J_2 < \int_{x+a}^{\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{(\xi-x)^2} d\xi = \int_{x+a}^{q(\rho_n)} \frac{\log |R_n(\xi)|}{(\xi-x)^2} d\xi + \\ + \int_{q(\rho_n)}^{\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{(\xi-x)^2} d\xi = J_2^1 + J_2^2.$$

Из (5) при  $|\xi| < q(\rho_n)$  имеем  $|R_n(\xi)| \leq e^{\rho_n}$ , следовательно, по лемме 1

$$|R_n(\xi)| \leq e^{\rho_n} \prod_{k=0}^n \sqrt{\frac{1 + |\Phi_2(i\lambda_k)|^2 \Phi_2^2(\xi)}{\Phi_2^2(\xi) + |\Phi_2(i\lambda_k)|^2}} \quad \text{при } |\xi| \geq q(\rho_n),$$

где

$$\Phi_2(\xi) = \frac{\xi}{q(\rho_n)} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{q(\rho_n)}\right)^2 - 1}.$$

Подставив эту оценку в выражение для  $J_2^1$ , получим

$$J_2^1 < \rho_n \int_{q(\rho_n)}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi-x)^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_{q(\rho_n)}^{\infty} \log \frac{1 + |\Phi_2(i\lambda_k)|^2 \Phi_2^2(\xi)}{\Phi_2^2(\xi) + |\Phi_2(i\lambda_k)|^2} \frac{d\xi}{(\xi-x)^2}.$$

После замены переменной  $\frac{\xi}{q(\rho_n)} = \frac{1}{t}$  и интегрирования по частям, как и при оценке интеграла  $J_2$  в первом случае, придем к оценке

$$J_2^1 < \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} + \frac{\pi}{q(\rho_n) - x} \sum_{k=0}^n (1 - |\Phi_2(i\lambda_k)|^{-2}),$$

или

$$J_2^1 < \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} + \frac{2\pi}{q(\rho_n) - x} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{q(\rho_n)}{\lambda_k}}.$$

Отсюда и из (4) будем иметь

$$J_3^* < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x}.$$

Далее,

$$J_3^* < \int_{x+a}^{q(\rho_n)} \frac{p(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi = - \int_{x+a}^{q(\rho_n)} p(\xi) d \frac{1}{\xi-x} = - \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} + \\ + \frac{p(x+a)}{a} + \int_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x}.$$

В итоге получим оценку

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{\pi}{2} \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} + \int_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x}.$$

Но из уравнения

$$\int_{x+a}^{q(\rho_n)} \frac{p(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} = \frac{p(x+a)}{a} + \int_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x}$$

следует

$$\frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} < \frac{p(x+a)}{a} + \int_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x},$$

откуда и из последней оценки для  $J_3$  будем иметь

$$J_3 < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left\{ \frac{p(x+a)}{a} + \int_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x} \right\}.$$

Такую же оценку получим и для  $J_1$ . Складывая оценки интегралов  $J_1, J_2, J_3$ , получим

$$\log |R_n(x+iy)| < p(x+a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left\{ \frac{p(x+a)}{a} + \int_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x} \right\}$$

при  $0 \leq x < q(\rho_n) - a, y > 0$ .

Такая же оценка имеет место и при  $-|q(\rho_n) - a| < x \leq 0$ , следовательно,

$$\log |R_n(x+iy)| < \\ < p(|x|+a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left\{ \frac{p(|x|+a)}{a} + \int_{p(|x|+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - |x|} \right\} y$$

при  $0 \leq |x| < q(\rho_n) - a, y > 0$ .

Как видно из (8) и (9), в случае  $y < 0$  к оценкам (12) и (13) нужно прибавить правую часть оценки (10). Тогда, при произвольном  $\vartheta$ ,  $0 < \vartheta < 1$ , для значений  $-\vartheta \lambda_0 \leq y < 0$  будем иметь

$$\log |R_n(x+iy)| < p(|x|+a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left\{ \frac{p(|x|+a)}{a} + \right.$$

$$\left. + \int_{\vartheta(|x|+a)}^{\vartheta_n} \frac{dz}{q(z)-|x|} \right\} |y| + \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} |y| \quad \text{при } 0 < |x| < q(\rho_n) - a$$

и

$$\log |R_n(x+iy)| < p(|x|+a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{p(|x|+a)}{a} |y| +$$

$$+ \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} |y| \quad \text{при } |x| > q(\rho_n) - a.$$

Это и доказывает теорему.

Теорема 2. Если хоть одно из значений

$$P = \int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx \quad \text{и} \quad \Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

бесконечно, то при любых  $C$  ( $C > 1$ ),  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta < 1$ ) и  $a$  ( $0 < a < q(\rho_n)$ ) для значений

$$|x| \leq q(\rho_n) - a, \quad |y| \leq \frac{\log C}{Y_n(x)}$$

имеет место оценка

$$|R_n(x+iy)| \leq C e^{p(|x|+a)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \frac{dz}{q(z)}$$

сходятся или расходятся одновременно, при этом, если  $\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\vartheta(x+a)}^{\vartheta_n} \frac{dz}{q(z)-x} : \int_1^{\vartheta_n} \frac{dz}{q(z)} = 1.$$

равномерно относительно  $x$  на любом фиксированном отрезке  $0 \leq x \leq R$ .

В условиях теоремы при фиксированном значении  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta < 1$ ) для достаточно больших значений  $n$  ( $n > N$ ) будем иметь

$$\vartheta \lambda_0 > \frac{\log C}{Y_n(x)}, \quad |x| \leq q(\rho_n) - a,$$

где  $N$  не зависит от  $x$ . Теорема 1 завершает доказательство.

Очевидно, в случае расходимости интеграла  $\int \frac{p(x)}{x^2} dx$  при произвольном  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta < 1$ ) для достаточно больших  $n$  будем иметь

$$\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \int_{\vartheta(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x} < \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \int_1^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} \quad (|x| \leq R).$$

Отсюда и из (7) вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Равномерно при  $n \rightarrow \infty$  в любом конечном отрезке  $[-R, +R]$  имеют место следующие оценки:*

а) если

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_n(x)} \left\{ \int_1^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} \right\} > \frac{(1-\vartheta)^2}{2};$$

в) если

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_n(x)} \int_1^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} \geq \frac{(1-\vartheta)^2}{2};$$

с) если

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_n(x)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} > \frac{(1-\vartheta)^2}{2}.$$

2°. Приведем оценки производных рациональных функций, имеющих функциональную мажоранту на всей вещественной оси. Эти оценки получаются при помощи результатов теоремы 3, при этом можно перейти к пределу при  $\vartheta \rightarrow 0$ , ибо окончательные результаты не зависят от  $\vartheta$ .

Теорема 4. *Равномерно относительно  $x$  в любом конечном отрезке в соответствующих условиях теоремы 3 имеют место следующие соотношения*

$$a) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |R_n^{(r)}(x)| \left\{ \int_1^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} \right\}^{-r} \leq \chi_r e^{p(x)};$$

$$b) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |R_n^{(r)}(x)| \left\{ \int_1^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} \right\}^{-r} \leq \chi_r e^{p(x)};$$

$$c) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |R_n^{(r)}(x)| \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} \right\}^{-r} \leq \chi_r e^{p(x)}.$$

где

$$\chi_r = r! \left( \frac{2e}{r} \right)^r.$$

Приведем еще одну теорему.

Теорема 5. *Если*

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty,$$

то при любых  $R$  и  $a > 0$  имеет место оценка

$$|R_n^{(r)}(x)| < \chi_r [\delta(R)]^r e^{p(R+a+1)}, \quad |x| \leq R,$$

где

$$\delta(R) = \frac{p(R+a+1)}{a} + \int_{p(R+a+1)}^{\infty} \frac{dz}{q(z) - R - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

для всех  $n$ , для которых  $\rho_n \geq p(R+a+1)$ .

Доказательство. Для данных  $R$  и  $a$  выберем  $n$  так, чтобы  $\rho_n \geq p(R+a+1)$ . В силу возрастания функции  $Y_n(x)$ , если  $|x| \leq R+1$ , будем иметь

$$Y_n(x) < \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \delta(R).$$

Далее, при достаточно большом  $R$  и данном  $\vartheta$  имеем  $\vartheta \lambda_0 > C_1 [\delta(R)]^{-1}$ , где  $C_1 = \frac{(1-\vartheta)^2}{2} \log C$ , следовательно, по теореме 1, в прямоугольнике  $|x| \leq R+1$ ,  $|y| \leq C_1 [\delta(R)]^{-1}$  будем иметь

$$|R_n(x+iy)| < C e^{p(R+a+1)}$$

По формуле Коши

$$R_n^{(r)}(x) = \frac{r!}{2\pi C_1^r} [\delta(R)]^r \int_0^{2\pi} R_n(x + C_1 \delta(R)^{-1} e^{i\varphi}) e^{-ir\varphi} d\varphi,$$

следовательно,

$$|R_n^{(r)}(x)| < \frac{Cr!}{C_1^r} [\delta(R)]^r e^{\rho(R+a+1)} \quad \text{при } |x| \leq R.$$

Отсюда, как в [5], получаем искомую оценку.

3°. Пусть, как всегда,  $y = p(x)$  непрерывная, неубывающая четная функция, определенная на всей вещественной оси  $(-\infty, +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ . Отнесем к классу  $C[p(x)]$  все функции  $f(x)$ , непрерывные на оси  $(-\infty, +\infty)$  и удовлетворяющие условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-p(x)} f(x) = 0.$$

Обозначим

$$E_n[f, p] = \inf_{\{R_n\}} \max_{-\infty < x < +\infty} e^{-p(x)} |f(x) - R_n(x)|,$$

где

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x + \bar{b}_k)} \quad (P_n(x) - \text{полином степени } n).$$

Как уже было отмечено, достаточными условиями полноты системы  $\{R_n(x)\}$  в классе  $C[p(x)]$  являются условия

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty. \quad (14)$$

По методу М. М. Джрбашяна [5] легко установить следующую теорему (при этом применяется оценка теоремы 4).

**Теорема 6.** Пусть функция  $f(x)$  определена и принадлежит классу  $C[p(x)]$  на оси  $(-\infty, +\infty)$ . При условии (14), если

$$E_n[f, p] \leq K \left\{ \int_0^{\bar{b}_n} \frac{dz}{q(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \right\}^{-p-1},$$

где  $K$  — константа, не зависящая от  $n$ ,  $p > 0$  — целое,  $0 < \delta < 1$ , то на всякой конечной части вещественной оси функция  $f(x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $p$  включительно. Кроме того, на всякой конечной части вещественной оси при  $0 < \delta < 1$   $f_{(x)}^{(p)} \in \text{Lip } \delta$ , а при  $\delta = 1$   $f_{(x)}^{(p)}$  имеет модуль непрерывности

$$\omega(h, f_{(x)}^{(p)}) < Mh \log \frac{1}{h} \quad (0 < h < 1).$$

Из оценок (12) и (13) приходим к такому результату.

**Թեորեմ 7.** *Ստիպանքով  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx < +\infty$ , եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n[f, p] = 0$ , ապա  $f(x)$  կլինի սահմանային արժեքներով ֆունկցիոն, անալիտիկական  $z$  վերին կիսաշրջանում:*

Եւրոպայում, ինչպէս ցուցաբերվում է [7], ստանում ենք հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 8.** *Ստիպանքով  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ , եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n[f, p] = 0$ , ապա  $f(x)$  կլինի սահմանային արժեքներով ֆունկցիոն, անալիտիկական  $z$  շրջանում  $-\theta < y < 0$  ( $0 < \theta < 1$  — ցանցային թիվ):*

Այս թեորեմները ցուցաբերում են, որ պայմանները (14) նաեւ անհրաժեշտ են համակարգի լրիւրութեան համար  $\{R_n(x)\}$  բոլոր դասերում  $C[p(x)]$  ընդհանուր մոտարկման համար:

Վերջում արտահայտում եմ իմ անսահման շնորհակալութիւնը ակադեմիկոս Ա. Ն. Արմանսկու ՍՍՀՄ, պրոֆեսոր Մ. Մ. Ժրբաչանու շնորհակալութեամբ խնայող և արժեքաւոր խորհուրդներով:

Երևանի պետական  
ուիւնիււրսիտետ

Ստիպանքով 23 X 1961

**2. Մ. Քոչարյան**

**ԱՄՓՈՓՈՒՄ**

**Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ**

Ստիպանքով  $p(x) > 0$  ընդհանուր ֆունկցիոն  $f(x)$  համար  $-\infty < x < +\infty$  իրական սահմանային արժեքներով ֆունկցիոն  $f(x)$  համար  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = +\infty$ : Նշանակենք  $L_2[p(x)]$  ապա  $f(x)$  ֆունկցիոնների դասը, որոնք ստիպանքով են և չափելի են  $(-\infty, +\infty)$  սահմանային արժեքներով և որոնց համար

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(x)} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Կամայական  $\{\alpha_k\}$  ( $\text{Im } \alpha_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ ) կամայական թվերի համակարգի համար կերտենք

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{k=0}^n (z + \alpha_k)}$$

ստիպանքով ֆունկցիոնների սխեմայով, որտեղ  $P_n(z)$ -ը  $n$ -ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ է:

Նշանակով Մ. Մ. Զրբաչանու ապա արդիւններից, որ

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty \quad \text{և} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \alpha_k}{1 + |\alpha_k|^2} = +\infty$$

պայմանների դեպքում  $|R_n(z)|$  սխտեմը լրիվ է  $L_2[p(x)]$  դասում, ներքև հարվածում ստամնասիրվում է  $|R_n(z)|$  ֆունկցիաներով լավագույն մոտարկումների կարգի նվազման և մոտարկվող ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հասկոթյունների միջև եղած կապը: Այդ նպատակի համար նախ  $U, U, \mathcal{R}$  բաշխանի մեթոդով [5] ստանում ենք  $\{R_n(x)\}$  ֆունկցիաների կարգի դեհատականներ  $\sup_{-\infty < x < +\infty} e^{-p(x)} |R_n(x)| < +\infty$  պայմանի դեպքում:

Այդ դեհատականների միջոցով ապացուցվում են  $U, \mathcal{N}, \mathcal{R}$  երկու շտանի թեորեմների տիպի լավագույն մոտարկումից հակադարձ թեորեմներ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Hall T. Sur l'approximation polynomiale des fonctions continues d'une variable, Congr. des Math. Scand., 1939.
2. Шагинян А. Л. О полноте семейства аналитических функций в комплексной области. Сообщение Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 1, 1947.
3. Isumi S. and Hawata T. Quasi-analytic class and closure of  $\{t^n\}$  in the interval  $(-\infty, +\infty)$ , Tokyo Math. Journ., 43, 1937.
4. Джрбашян М. М. О метрических признаках полноты системы полиномов в неограниченных областях. ДАН АрмССР, 7, № 1, 1947.
5. Джрбашян М. М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сборник, новая серия, 36, (78): 3, 1955.
6. Джрбашян М. М. О двух квази-аналитических классах функций на вещественной оси. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, 8, № 1, 1955.
7. Кочарян Г. С. О приближении рациональными функциями в комплексной области. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 1958.

А. А. Баблоин

### Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях

Плоской задачей теории упругости в полярных координатах занимались многие исследователи [1—6]. В их работах, в основном, рассматривались или частные случаи нагружения [2, 5], или задача для кольца [3, 4, 6]. В тех же работах, где рассматривались случаи более общего нагружения [1], решения даются в приближенном виде.

В настоящей работе дано точное решение плоской задачи теории упругости в напряжениях для кольцевого сектора, ограниченного двумя концентрическими окружностями и двумя радиусами (см. фиг.), когда внешняя нагрузка распределена симметрично относительно оси  $x$ .

При решении задачи для удобства применяются особые виды функций. Доказывается, что система этих функций ортогональна и полна в соответствующей области.

Задача сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что полученные системы регулярны и имеют ограниченные сверху свободные члены.

#### § 1. Постановка задачи

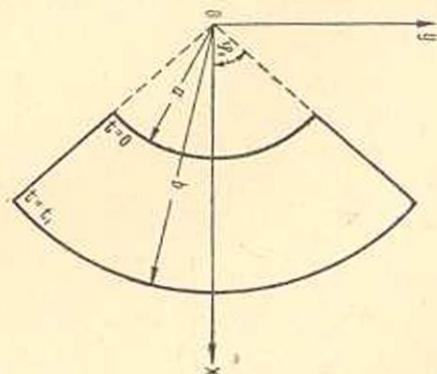
Как известно [2], в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены через функцию Эри  $\Phi(r, \varphi)$  следующими формулами [2, 4]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad (1.1)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

где функция  $\Phi(r, \varphi)$  удовлетворяет уравнению



Фиг. 1.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (1.2)$$

При обозначении  $r = ae^t$ , как это сделано в работах [5, 8], уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} - 4 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - 4 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial \varphi^2} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что функция  $F(t, \varphi) = e^{-t} \Phi(t, \varphi)$  должна удовлетворять уравнению [6]

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3} + 2 \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^3} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0, \quad (1.4)$$

фундаментальными решениями которого являются следующие функции

$$\begin{aligned} & [A \operatorname{sh}(\alpha + 1)t + B \operatorname{ch}(\alpha + 1)t + C \operatorname{sh}(\alpha - 1)t + D \operatorname{ch}(\alpha - 1)t] \times \\ & \quad \times [E \sin \alpha \varphi + F \cos \alpha \varphi], \\ & [A \operatorname{sh} \beta \varphi \cdot \sin \varphi + B \operatorname{sh} \beta \varphi \cdot \cos \varphi + C \operatorname{ch} \beta \varphi \cdot \sin \varphi + D \operatorname{ch} \beta \varphi \cdot \cos \varphi] \times \\ & \quad \times [E \sin \beta t + F \cos \beta t], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные параметры.

Функции, входящие в первую строку (1.5), будут линейно-независимы, если  $\alpha \neq 1$ , а при  $\alpha = 1$  мы имеем следующую фундаментальную систему

$$[A \operatorname{sh} 2t + B \operatorname{ch} 2t + Ct + D] [E \sin \varphi + F \cos \varphi]. \quad (1.5')$$

Легко проверить, что функции

$$\begin{aligned} & [A \operatorname{sh} t + B \operatorname{ch} t + Ct \operatorname{sh} t + D t \operatorname{ch} t] [E \varphi + F], \\ & [A \sin \varphi + B \cos \varphi + C \varphi \sin \varphi + D \varphi \cos \varphi] [Et + F] \end{aligned} \quad (1.5'')$$

также являются решениями уравнения (1.4).

Напряжения (1.1) выражаются через новую функцию [6]  $F(t, \varphi)$  следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right), & \sigma_\varphi &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \\ \tau_{r\varphi} &= - \frac{e^{-t}}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставив эти выражения в уравнения обобщенного закона Гука и проинтегрировав их, для радиальных и тангенциальных перемещений получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 + \sigma}{aE} \left[ (1 - \sigma) \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + (1 - 2\sigma) F - \sigma \frac{\partial F}{\partial t} \right] + f(\varphi), \\ v &= \frac{1 - \sigma^2}{aE} \left[ \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) d\varphi - \iint F dt d\varphi - \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] - f(\varphi) + f_0(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона, а функции  $f_0(t)$  и  $f(\varphi)$  удовлетворяют уравнениям

$$f'(\varphi) + f(\varphi) = 0, \quad f_0'(t) - f_0(t) = 0.$$

Принтегрировав эти уравнения, для функций  $f_0(t)$  и  $f(\varphi)$  получим

$$f(\varphi) = b \cdot \sin \varphi + c \cdot \cos \varphi, \quad f_0(t) = a_0 e^t. \quad (1.8)$$

Легко видеть, что перемещения

$$u = f'(\varphi) = b \cdot \cos \varphi - c \cdot \sin \varphi,$$

$$v = f_0'(t) - f(\varphi) = a_0 e^t - b \cdot \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi$$

представляют собой поступательное движение и вращение твердого тела [1, 3].

Функцию  $F(t, \varphi)$  ищем в виде

$$F(t, \varphi) = a(\varphi) + b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \cos \beta_k t \quad (1.9)$$

в области  $(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq t \leq t_1)$ ,

где

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cdot \sin \varphi + B_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cdot \cos \varphi + C_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi \cdot \sin \varphi + D_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$\Psi_k(t) = E_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \cdot \operatorname{sh} (t_1 - t) + G_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \cdot \operatorname{sh} t +$$

$$+ F_k \operatorname{sh} \alpha_k t \cdot \operatorname{sh} (t_1 - t) + H_k \operatorname{sh} \alpha_k t \cdot \operatorname{sh} t, \quad (1.10)$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}. \quad (1.11)$$

Подставив (1.9) в (1.6) и (1.7), для напряжений и перемещений получим следующие выражения

$$a^2 e^t \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Psi_k'(t) \sin \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k'(\varphi) \sin \beta_k t, \quad (1.12)$$

$$a^2 e^t \sigma_r(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k''(t) - (\alpha_k^2 - 1) \Psi_k'(t)] \cos \alpha_k \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(\varphi) \sin \beta_k t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_k''(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \beta_k t + a''(\varphi) + a(\varphi) + b'(t) + b(t), \quad (1.13)$$

$$a^2 e^t \sigma_{\varphi}(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k''(t) + \Psi_k'(t)] \cos \alpha_k \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(\varphi) \times$$

$$\times (\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t) + b''(t) + b'(t), \quad (1.14)$$

$$v(t, \varphi) = \frac{1 - \sigma^2}{aE} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \Psi_k'(t) + \Psi_k''(t) + \left( \frac{\alpha_k^2}{1 - \sigma} - 1 \right) \Psi_k(t) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha_k^2 - 1) \int W_k(t) dt \left] \frac{\sin \alpha_k \varphi}{\alpha_k} - \right. \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \Phi_k'(\varphi) + (\beta_k^2 + 1) \int \Phi_k(\varphi) d\varphi \right] \frac{\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t}{\beta_k} + \\
& + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \cos \beta_k t + \varphi \left[ b''(t) + b'(t) - b(t) - \int b(t) dt \right] - \\
& - t \left[ a'(\varphi) + \int a(\varphi) d\varphi \right] + \int a(\varphi) d\varphi - \frac{\sigma}{1-\sigma} a'(\varphi) \Big] - f(\varphi) + f_0(t). \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Полагаем, что на кромках кольцевого сектора внешняя нагрузка распределена симметрично относительно оси  $x$  и задана следующим образом

$$\left. \begin{aligned}
a^2 e^{i\sigma_r}(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi), \\
a^2 \sigma_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi), \\
a^2 \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= f_3(\varphi), \\
a^2 e^{i\tau_{r\varphi}}(t, \varphi_1) &= f_4(t), \\
a^2 e^{i\sigma_\varphi}(t, \varphi_1) &= f_5(t),
\end{aligned} \right\} \begin{aligned}
(0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \\
(0 \leq t \leq t_1)
\end{aligned} \quad (1.16)$$

где функции  $f_i$  — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси  $x$  имеем также

$$v(t, 0) = \tau_{r\varphi}(t, 0) = 0. \quad (1.17)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.4) граничными условиями (1.16) и (1.17).

## § 2. О функциях $\varphi_k(t)$

Для удобства введем новые функции  $\varphi_k(t)$ , где

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} e^t & \text{при } k=0 \\ \sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t & \text{при } k=1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

и докажем, что система этих функций  $\{\varphi_k(t)\}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) полная в классе функций, интегрируемых с квадратом, т. е. в классе  $L_2[0, t_1]$ .

Эти функции ортогональны в промежутке  $0 < t < t_1$ , т. е. имеют соотношения

$$\int_0^{t_1} \varphi_k(t) \cdot \varphi_p(t) dt = \begin{cases} \frac{t_1}{2} (\beta_k^2 + 1) & \text{при } k=p \neq 0, \\ \frac{1}{2} (e^{2t_1} - 1) & \text{при } k=p=0, \\ 0 & \text{при } k \neq p. \end{cases} \quad (2.2)$$

Пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \sin \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= -\frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[ \frac{\operatorname{sh}(t_1 - t)}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\sin a(t_1 - t)}{\sin at_1} \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k \sin \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= \frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[ \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\sin at}{\sin at_1} \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2 \cos \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= \frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[ \frac{\operatorname{ch}(t_1 - t)}{\operatorname{sh} t_1} - a \frac{\cos a(t_1 - t)}{\sin at_1} \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k^2 \cos \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= \frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[ \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t_1} - a \frac{\cos at}{\sin at_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

легко доказываются справедливость следующих разложений при любых действительных или мнимых значениях  $a$

$$\begin{aligned} \sin at &= \frac{2(e^{at_1} \sin at_1 - ae^{at_1} \cos at_1 + a)}{(a^2 + 1)(e^{2t_1} - 1)} \varphi_0(t) + \\ &+ \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (a \cos at_1 - \sin at_1) - a}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} \cdot \beta_k \varphi_k(t), \\ \cos at &= \frac{2(e^{at_1} \cos at_1 + ae^{at_1} \sin at_1 - 1)}{(a^2 + 1)(e^{2t_1} - 1)} \varphi_0(t) + \\ &+ \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k (a \sin at_1 + \cos at_1)}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} \cdot \beta_k \varphi_k(t), \\ 1 &= \frac{2(e^{t_1} - 1)}{e^{2t_1} - 1} \varphi_0(t) + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\beta_k(\beta_k^2 + 1)} \varphi_k(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если в этих разложениях примем  $a = \frac{(2p-1)\pi}{2t_1}$ , где  $p=1, 2, \dots$ ,

то системы функций  $\{\sin at\}$  и  $\{1; \cos at\}$  будут полны в классе  $L_2[0, t_1]$ , т. е. любая функция, интегрируемая с квадратом, в промежутке  $[0, t_1]$  разлагается в ряд Фурье по функциям  $\{\sin at\}$  или  $\{1; \cos at\}$ . Но каждая из этих функций выражается через функции  $\{\varphi_k(t)\}$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Отсюда вытекает, что любую функцию  $f(t) \in L_2[0, t_1]$  можно выразить через функции  $\{\varphi_k(t)\}$ , т. е. разложить в ряд по функциям (2.1)

$$f(t) = a_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t), \quad (2.5)$$

где коэффициенты разложения в силу (2.2) определяются формулами

$$a_0 = \frac{2}{e^{2\tau_1} - 1} \int_0^{\tau_1} f(t) \varphi_0(t) dt, \quad (2.5)$$

$$a_k = \frac{2}{t_1(\beta_k^2 + 1)} \int_0^{\tau_1} f(t) \varphi_k(t) dt, \quad (k=1, 2, \dots).$$

Из вышесказанного следует, что система функций (2.1) полна в классе  $L_2[0, t_1]$ , т. е. любая функция  $f(t) \in L_2[0, t_1]$  разлагается в ряд по функциям (2.1) так, что имеет место следующее неравенство при  $n > N(\varepsilon)$

$$\int_0^{\tau_1} \left[ f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right]^2 dt < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Это неравенство можно доказать более строго, если пользоваться неравенствами Бесселя [11] для разложений (2.4).

### § 3. Решение задачи

В силу (1.5<sup>а</sup>) и (1.8) выберем функции  $a(\varphi)$ ,  $b(t)$ ,  $f(\varphi)$  и  $f_0(t)$  следующим образом

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= a_0 \varphi \sin \varphi, & f_0(t) &= c_0 e^t, \\ b(t) &= b_0 e^t + b_1 t e^{-t}, & f(\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а в силу приведенного в § 2 доказательства разложим функции  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) в ряд Фурье. Тогда граничные условия (1.16) и (1.17) примут вид

$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{t_1} \sigma_r(t_1, \varphi) &= d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \alpha_k \varphi, \\ a^2 \sigma_r(0, \varphi) &= d'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k \cos \alpha_k \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$a^2 e^t \sigma_\varphi(t, \varphi_1) = g_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t), \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{t_1} \tau_{rv}(t_1, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin \alpha_k \varphi, \\ a^2 \tau_{rv}(0, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma'_k \sin \alpha_k \varphi, \\ a^2 \tau_{rv}(t, \varphi_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin \beta_k t, \\ v(t, 0) = \tau_{rv}(t, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Удовлетворив условиям (3.4), получим

$$B_k = C_k = 0, \quad c_0 = 0, \\ E_k = \frac{\gamma'_k}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1}, \quad H_k = \frac{\gamma_k}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1}, \quad (3.5)$$

$$(\beta_k D_k + A_k) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 + (\beta_k A_k - D_k) \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 = \frac{\delta_k}{\beta_k}.$$

Подставим значение  $\varepsilon_r$  из (1.13) в (3.2), умножим обе части полученных равенств на 1 и  $\cos \alpha_p \varphi$ . После интегрирования по  $\varphi$  от 0 до  $\varphi_1$  получим

$$\frac{\gamma'_p}{\alpha_p} - (\alpha_p^2 - 1) \Psi_p(t_1) = \\ - \frac{2}{\varphi_1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi d\varphi - \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\alpha_p^2 - 1} + d_p, \quad (3.6) \\ \frac{\gamma'_p}{\alpha_p} - (\alpha_p^2 - 1) \Psi_p(0) = \\ = - \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi d\varphi - \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\alpha_p^2 - 1} + d'_p,$$

$$b'(t_1) + b(t_1) + \frac{2a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} = d_0 - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] d\varphi, \quad (3.7)$$

$$b'(0) + b(0) + \frac{2a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} = d_0 - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] d\varphi.$$

Подставив значение  $\varepsilon_p$  из (1.14) в (3.3), умножив обе части полученного равенства на  $\varphi_p(t)$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ ) и проинтегрировав по  $t$  от 0 до  $t_1$ , получим

при  $p \neq 0$

$$\beta_p (\beta_p^2 + 1) \Phi_p(\varphi_1) = \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{t_1} [\Psi_k^*(t) + \Psi_k(t)] \varphi_p(t) dt - \\ - \frac{4b_1 \beta_p [1 + (-1)^{p+1} e^{-t_1}]}{t_1 (\beta_p^2 + 1)} - g_p (\beta_p^2 + 1), \quad (3.8)$$

при  $p=0$

$$b_0 (e^{2t_1} - 1) - b_1 t_1 = g_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_k e^{t_1} - \gamma'_k}{\alpha_k}. \quad (3.9)$$

Для интегралов, входящих в формулы (3.6)–(3.8), в силу (3.5) имеем

$$\int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi d\varphi = \frac{(-1)^p \beta_k}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} \times \\ \times [\delta_k (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1) - 2(\beta_k^2 + 1)(\alpha_p^2 - 1) [A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \\ + D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1]], \\ \int_0^{t_1} [\Psi_k^*(t) + \Psi_k(t)] \varphi_p(t) dt = \frac{\beta_p \alpha_k}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} \times \\ \times \left\{ 2(\beta_p^2 + 1) [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + (-1)^{p+1} \operatorname{ch} t_1] [G_k + (-1)^{p+1} F_k] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_k (\beta_p^2 + \alpha_k^2 - 3) \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 + 2(\beta_p^2 + 1) [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1 + (-1)^{p+1}]}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} \right. \\ \left. \times [\gamma_k' + (-1)^{p+1} \gamma_k] \right\}. \quad (3.10)$$

Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1) (G_k + F_k) &= (-1)^k \frac{X_k}{\alpha_k}, \\ (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1) (G_k - F_k) &= (-1)^k \frac{Y_k}{\alpha_k}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 = \frac{m_k Z_k}{\beta_k (\beta_k^2 + 1)},$$

где

$$m_k = \frac{\varphi_1}{t_1}.$$

В формулах (3.6) и (3.8) произведя замену неизвестных, после некоторых преобразований получим следующие бесконечные системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} Z_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Y_k + a_p \quad (p = 2, 4, 6, \dots), \\ Z_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} X_k + a_p \quad (p = 1, 3, 5, \dots), \\ Y_p &= \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} b_{kp} Z_k + b_p \\ X_p &= \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} c_{kp} Z_k + c_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где введены обозначения

$$a_{kp} = \frac{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ \times \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2]},$$

$$b_{kp} = \frac{8\alpha_p(\alpha_p^2 - 1)}{t_1} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \frac{1}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]},$$

$$c_{kp} = \frac{8\alpha_p(\alpha_p^2 - 1)}{t_1} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 + \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 - \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \frac{1}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} \quad (3.13)$$

$$a_p = \frac{1}{m} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \left\{ \frac{\delta_p(\beta_p^2 + 1) \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} - \right. \\ \left. - g_p(\beta_p^2 + 1) - \frac{2\beta_p}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \right.$$

$$\times \frac{\alpha_k(\beta_p^2 + \alpha_k^2 - 3) \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 + 2(\beta_p^2 + 1) [\operatorname{ch} \beta_p t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1 - (-1)^{p+1}]}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} \times$$

$$\times \left[ \gamma'_k + (-1)^{p+1} \gamma_k - \frac{4b_1 \beta_p [1 + (-1)^{p+1} e^{-t_1}]}{t_1 (\beta_p^2 + 1)} \right],$$

$$b_p = \alpha_p \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \left\{ \frac{8\alpha_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1 (\alpha_p^2 - 1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{\delta_k \beta_p (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1)}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} + \right.$$

$$\left. + (-1)^p \left[ (d_p + d'_p) - \frac{\gamma_p + \gamma'_p}{\alpha_p} + \frac{\alpha_p \operatorname{ch} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1}{\alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} (\gamma_p - \gamma'_p) \right] \right\}, \quad (3.14)$$

$$c_p = \alpha_p \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 + \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 - \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \left\{ - \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\delta_k \beta_p (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1)}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} + \right.$$

$$\left. + (-1)^p \left[ (d'_p - d_p) + \frac{\gamma_p - \gamma'_p}{\alpha_p} - \frac{\alpha_p \operatorname{ch} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1}{\alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} (\gamma_p + \gamma'_p) \right] \right\}. \quad (3.14')$$

Исключив неизвестные коэффициенты  $X_k$  и  $Y_k$  в бесконечных системах (3.12), для коэффициентов  $Z_k$  получим следующие системы бесконечных линейных уравнений

$$Z_p = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_{np} Z_n + P_p \quad (p=1, 3, 5, \dots), \quad (3.15)$$

$$Z_p = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} v_{np} Z_n + Q_p \quad (p=2, 4, 6, \dots),$$

где

$$u_{np} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} c_{nk}, \quad v_{np} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} b_{nk}, \quad (3.16)$$

$$P_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} c_k + a_p, \quad Q_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} b_k + a_p. \quad (3.17)$$

Отметим, что  $Z_{2k}$  и  $Z_{2k+1}$  удовлетворяют отдельным уравнениям, т. е. значения этих коэффициентов вычисляются независимо друг от друга. Это обстоятельство намного облегчает вычисления при решении конкретных примеров.

Имея значения  $Z_p$ , из последних двух уравнений (3.12) найдем значения  $X_p$  и  $Y_p$ . Из (3.5) и (3.11) найдем следующие значения для коэффициентов  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $G_k$  и  $F_k$ :

$$A_k = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} \left[ \frac{mZ_k}{\beta_k(\beta_k^2 + 1)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \left( \frac{\partial_k}{\beta_k} - \frac{mZ_k}{\beta_k^2 + 1} \right) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \right], \quad (3.18)$$

$$D_k = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} \left[ \frac{mZ_k}{\beta_k(\beta_k^2 + 1)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 - \left( \frac{\partial_k}{\beta_k} - \frac{mZ_k}{\beta_k^2 + 1} \right) \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \right],$$

$$G_k + F_k = \frac{(-1)^k X_k}{\alpha_k (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1)},$$

$$G_k - F_k = \frac{(-1)^k Y_k}{\alpha_k (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1)}. \quad (3.19)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $a_0$ ,  $b_0$  и  $b_1$  из (3.7) и (3.9) в силу (3.10) и (3.1) получим следующие уравнения

$$2b_0(e^{t_1} + 1) + b_1(e^{-t_1} + 1) + \frac{4a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} = (d_0 + d'_0) - \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_k \partial_k}{\beta_k^2 + 1} - \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{mZ_k}{(\beta_k^2 + 1)^2},$$

$$2b_0(e^{t_1} - 1) + b_1(e^{-t_1} - 1) = (d_0 - d'_0) + \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_k \partial_k}{\beta_k^2 + 1} +$$

$$+ \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{mZ_k}{(\beta_k^2 + 1)^2}, \quad (3.20)$$

$$b_0(e^{2t_1} - 1) - b_1 t_1 = g_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_k e^{t_1} - \gamma'_k}{\alpha_k}.$$

Неизвестные коэффициенты  $Z_k$ , входящие в соотношения (3.20), определяются из бесконечных систем линейных уравнений (3.15) и выражаются через постоянные  $a_0$  и  $b_1$ . Подставив определенные из (3.15) значения неизвестных  $Z_k$  в (3.20) и разрешив полученные соотношения относительно  $a_0$ ,  $b_0$  и  $b_1$ , получим их значения. Остальные коэффициенты определяются из (3.5).

#### § 4. Исследование бесконечных систем

Покажем, что полученные бесконечные системы линейных уравнений (3.15) регулярны. В силу (3.13) и (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} |u_{np}| &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} c_{nk} = \\ &= \frac{32 \beta_p (\beta_p^2 + 1)}{t_1 \varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ &\times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k (\alpha_k^2 - 1) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \alpha_k \operatorname{sh} t_1}}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \\ &= \frac{4 \beta_p (\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \\ &= 1 - \frac{2 \beta_p}{\varphi_1 (\beta_p^2 + 1)} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} < 1, \\ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} |v_{np}| &= \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} b_{nk} = \\ &= \frac{32 \beta_p (\beta_p^2 + 1)}{t_1 \varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ &\times \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k (\alpha_k^2 - 1) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{4\alpha_k}{t_1(\alpha_k^2 - 1)} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} < \frac{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \times \\
&\times \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \\
&= 1 - \frac{2\beta_p}{\varphi_1(\beta_p^2 + 1)} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} < 1. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

При этом использованы значения рядов [9]

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{[\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} &= \frac{t_1}{8\alpha_k(\alpha_k^2 - 1)} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1} \\
\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{[\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} &= \frac{t_1}{8\alpha_k(\alpha_k^2 - 1)} \times \\
&\times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1} - \frac{1}{2(\alpha_k^2 - 1)^2}, \quad (4.3) \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} &= \frac{\varphi_1}{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)} \times \\
&\times \frac{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} - \frac{1}{2(\beta_p^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что в бесконечных системах (3.15) сумма модулей коэффициентов при неизвестных меньше единицы, т. е. системы (3.15) регуляры.

Легко видеть из (3.14) и (3.17), что свободные члены этих систем при  $\alpha_p \neq 1$  ограничены. Покажем, что при  $\alpha_p = 1$  эти члены не обращаются в бесконечность. Для этого нужно только показать, что при  $\alpha_p = 1$   $c_p < \infty$ .

Составим уравнение равновесия ( $\Sigma F_x = 0$ ) для рассматриваемого профиля.

В силу симметрии оно будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\varphi_1} \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) \sin \varphi ds + \cos \varphi_1 \int_a^b \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) dr + \int_0^{\varphi_1} \tau_{r\varphi}(0, \varphi) \sin \varphi ds_1 + \\
& + \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(t_1, \varphi) \cos \varphi ds - \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(0, \varphi) \cos \varphi ds_1 - \sin \varphi_1 \int_a^b \sigma_r(t, \varphi_1) dr = 0. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Подставив сюда значения напряжений на контуре из (1.16), получим условие равновесия в следующем виде

$$2 \cos \varphi_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\delta_k}{\beta_k} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma'_k - \gamma_k) \frac{\alpha_k (-1)^{k-1} \sin \varphi_1}{\alpha_k^2 - 1} + \sin \varphi_1 (d_0 - d'_0) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - d'_k) \frac{(-1)^{k+1} \sin \varphi_1}{\alpha_k^2 - 1} - \sin \varphi_1 \int_a^b \sigma_r(t, \varphi_1) dr = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5) переходя к пределу когда  $\alpha_k \rightarrow 1$  (т. е.  $\varphi_1 \rightarrow \pi$  при  $k=1$  или  $\varphi_1 \rightarrow 2\pi$  при  $k=2$ ), получим

$$\frac{4(-1)^p}{p\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\delta_k}{\beta_k} + (\gamma'_p - \gamma_p) + (d_p - d'_p) = 0. \quad (4.6)$$

При этом использованы значения пределов

$$\lim_{\alpha_p \rightarrow 1} \frac{\sin \varphi_1}{\alpha_p^2 - 1} = \frac{(-1)^{p-1} p\pi}{2}, \\ \lim_{\alpha_p \rightarrow 1} \cos \varphi_1 = (-1)^p. \quad (4.7)$$

Из (3.14') видно, что выражение в фигурных скобках при  $\alpha_k \rightarrow 1$  с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (4.6), т. е. обращается в нуль того же порядка, как и  $\alpha_k - 1$ .

Таким образом, при  $\alpha_k = 1$  выражение (3.14') обращается в неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Перейдя к пределу, легко можно вычислить значение  $c_p$  при  $\alpha_k = 1$ .

Из (3.12)–(3.14') следует, что выражение для  $G_k - F_k$  во второй формуле (3.19) не обращается в бесконечность при  $\alpha_k = 1$ , так как в числителе этого выражения содержится множитель  $(\operatorname{ch} \alpha_k t_2 - \operatorname{ch} t_2)$ .

Таким образом, мы доказали, что свободные члены систем (3.15) всегда ограничены сверху. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией регулярных систем линейных уравнений [10] и оценить неизвестные коэффициенты с любой точностью.

Этим же методом можно решить плоскую задачу теории упругости для кольцевого сектора, когда внешняя нагрузка распределена несимметрично относительно оси  $x$ . Эта задача сводится к решению регулярных бесконечных систем линейных уравнений, свободные члены которых ограничены сверху. Изменяя граничные условия, можно решать ряд задач, точные решения которых получаются без применения бесконечных систем. Например, когда граничные условия для кольцевого сектора ( $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ;  $0 \leq t \leq t_1$ ) заданы в виде

$$\begin{aligned}
 a^2 e^{i\tau_r}(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi), & a^2 e^{i\tau_{rc}}(t_1, \varphi) &= f_5(\varphi), \\
 a^2 \sigma_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi), & a^2 \tau_{rc}(0, \varphi) &= f_6(\varphi), \\
 a v(t, \varphi_1) &= f_3(t), & a^2 e^{i\tau_{rc}}(t, \varphi_1) &= f_7(t), \\
 a v(t, 0) &= f_4(t), & a^2 e^{i\tau_{rc}}(t, 0) &= f_8(t),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где  $f_3$  и  $f_4$  непрерывные, а остальные — кусочно-непрерывные функции, тогда выбирая функцию  $F(t, \varphi)$  в виде (1.9) и разлагая функции  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_8$  в ряд по тригонометрическим функциям, а  $f_3$  и  $f_4$  по функциям (2.1), легко можно удовлетворить граничным условиям (4.8) и найти входящие в  $F(t, \varphi)$  неизвестные коэффициенты. Решение этой задачи при  $\varphi_1 = \pi$  или  $2\pi$  получим предельным переходом, используя уравнения равновесия внешних сил.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 2 III 1970

### Ս. Հ. Քարլոյան

## ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՔ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԱԵԿՏՈՐԻ ՀԱՄԱՐ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում արվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի ճշգրիտ լուծումը լարումներով օղակալին սեկտորի տեսք ունեցող մարմինների համար: Ենթադրվում է, որ արտաքին լարումները բաշխված են կամայական, բայց միջին կտրվածքի նկատմամբ սիմետրիկ ձևով:

Խնդրի լուծման ժամանակ մտցվում են նոր ֆունկցիաներ  $e^t$ ,  $\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t$  ( $k=1, 2, \dots$ ), ցույց է արվում, որ այս ֆունկցիաներից կազմված սխառներ օրթոգոնալ են լրիվ սխառնմ է  $L_2[0, t_1]$  դասում, այնուհետև  $\sigma_\varphi$  նորմալ լարումը և  $v$  տանգենցիալ տեղափոխումը կզրում են րկալացվում է ֆուրյեի շարքով ըստ այդ ֆունկցիաների:

Խնդիրը բերվում է դժային անվերջ համասարումների սխառնների լուծմանը, ցույց է արվում, որ այդ սխառնները սեղուկար են, իսկ աղաստ անդամները՝ սահմանափակ:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ-Гостехиздат, М.-Л., 1947.
3. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. I, Изд. АН СССР, М., 1952.
4. Филоменко-Бородич М. М. Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ-ГТТИ, Л., 1934.
6. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, М.-Л., 1955.
7. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд. АН УССР, Киев, 1952.

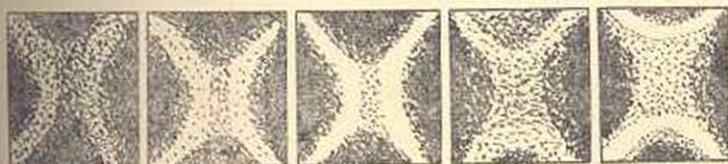
8. *Абрамн Б. Л., Баблюн А. А.* Кручение круглых стержней с продольными выточками. ПММ, 24, 2, 1960.
9. *Гончаров В. Л.* Теория функций комплексного переменного. Учпедгиз, М., 1955.
10. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
11. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ИЛ, М., 1948.
12. *Смоловик И. И., Шепетов А. Н.* Задача о деформации круговой арки. Тезисы докладов Всесоюзного Совещания по применениям методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. Тбилиси. 20—27 февраля, 1961, 62—63.

А. Г. Акритов, П. А. Безиргян

## Отражающая площадь кристалл-анализатора при точечном источнике рентгеновских лучей

В связи с развитием микрофокусной рентгеновской спектроскопии важное значение приобретает определение вида отражающей части кристалл-анализатора рентгеновских лучей при точечном источнике.

В работе [1] экспериментально и теоретически (приближенно) определен вид отражающей части изогнутого кристалл-анализатора при точечном источнике рентгеновских лучей. Экспериментальный вид этой площадки по [1] приведен на фиг. 1.



Фиг. 1.

В настоящей работе теоретически определяются вид и размеры отражающей части изогнутого и плоского кристалл-анализаторов при точечном источнике рентгеновских лучей в самом общем случае размеров действующих частей кристалл-анализаторов.

### § 1. Изогнутый кристалл

Определим вид действующей части изогнутого кристалл-анализатора при точечном источнике рентгеновских лучей. Пусть кристаллическая пластинка изогнута по цилиндру с внутренним радиусом  $R$ , круговым сечением которого является окружность  $DF$  (фиг. 2). Начало координат поместим на оси этого цилиндра, а координатные оси направим так, как показано на фиг. 2. Допустим точечный источник монохроматических рентгеновских лучей помещен на фокальной окружности  $DBO$  в точке  $B(x_0, y_0, 0)$ . Фокальная окружность и круговое сечение кристалла касаются в точке  $D$  плоскости  $XOY$ .

Пусть луч  $BA$  под углом  $\theta$  падает в точку  $A(x, y, z)$  цилиндрической поверхности кристалла, где  $\theta$  — угол Вульфа-Брегга. Найдем геометрическое место точек, в которых лучи, выходящие из точечного источника  $B$ , падают на изогнутую кристаллическую по-

верхность под углом  $\theta$ . Угол между лучом  $BA$  и нормалью точки  $A$  определяется из выражения

$$\sin \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}},$$

где  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2$  и  $Z_2$  — составляющие векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  соответственно.

После некоторых простых преобразований для  $z$  координат точек поверхности изогнутого кристалл-анализатора, удовлетворяющих условию Вульфа-Брега, получим

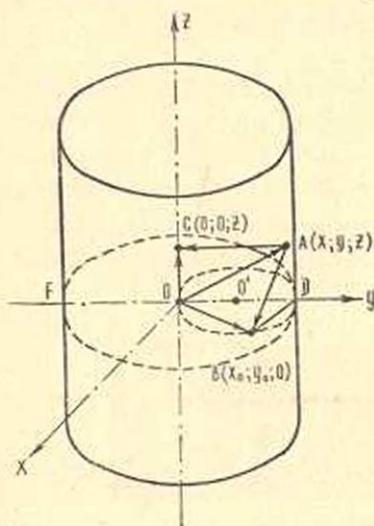
$$z = \pm |a - b \sin(\alpha + \theta)|, \quad (1.1)$$

где

$$a = R \operatorname{ctg} \theta \cos \theta, \quad b = R \operatorname{ctg} \theta,$$

$\alpha$  — угол между осью  $X$  и проекцией вектора  $\vec{OA}$  на плоскость  $XOY$ .

Не трудно убедиться в том, что (1.1) (т. е. геометрическое место точек поверхности изогнутого кристалл-анализатора, участвующих в отражении от точечного источника) представляет собой два изогнутых эллипса с общими вершинами в точках  $D$  и  $C'$ . Действительно из (1.1) видно, что  $z$  принимает нулевые значения при  $\alpha = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$  (в точках



Фиг. 2.

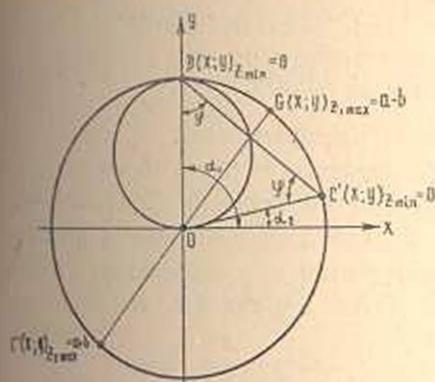
$D$ ) и  $\alpha = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - 2\theta$  (в точке  $C'$ ).

Максимальные значения найдем из (1.1) с помощью условий

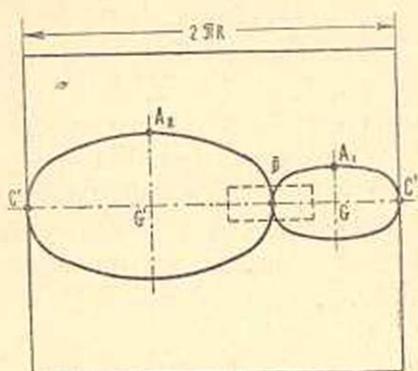
$$\begin{aligned} z_{1\max} &= \pm (a - b) \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= 0, \\ z_{2\max} &= \pm (a + b) \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2} - \theta. \end{aligned}$$

На фигуре 3 показано круговое сечение изогнутого по цилиндру кристалл-анализатора и фокальная окружность. Там же показаны места, где  $z$  принимает нулевые и максимальные значения. На фигуре 4 показано геометрическое место точек изогнутого кристалл-анализатора, участвующих в отражении от точечного источника (на развернутой цилиндрической поверхности). Как видно, геометрическое место этих точек состоит из двух эллипсов с общими вершинами в точках  $D$  и  $C'$ . Размеры этих эллипсов различны. При продвижении источника по фокальной окружности размеры одного из эллипсов (расположенного в сторону движения) уменьшаются, а размеры другого — увеличиваются.

чиваются. Малые полуоси этих эллипсов представляют собой максимальные значения  $z$  т. е.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$z_{1\max} = R \operatorname{ctg} \theta (\cos \theta - 1), \quad z_{2\max} = R \operatorname{ctg} \theta (\cos \theta + 1).$$

Большие полуоси определяются следующим образом. Для малого эллипса, когда  $\alpha$  меняется от  $\frac{\pi}{2} - 2\theta$  до  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ,  $z$  меняется от нуля до  $z_{1\max}$ , следовательно, большая полуось малого эллипса будет  $a_1 = R\theta$ , где  $\theta$  — в радианах. Для большого эллипса, когда  $z$  меняется от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{3}{2}\pi - \theta$ ,  $z$  меняется от нуля до  $z_{2\max}$ , следовательно, большая полуось большого эллипса будет  $a_2 = R(\pi - \theta)$ .

Ясно, что в действительности эти эллипсы целиком не помещаются на поверхности кристалл-анализатора, так как анализаторы обычно имеют размеры порядка двух-трех сантиметров. Следовательно, только незначительные части (окрестность точки  $D$ , фиг. 4) помещаются на поверхности анализатора. Окрестность точки  $D$  имеет форму крестика, поэтому в эксперименте рентгеновские снимки действующих площадей анализаторов получаются в виде снимков, показанных на фиг. 1.

Если иметь в виду и то, что источники рентгеновских лучей в действительности не точечные, а микрофокусные, то будет ясна причина расширения этих крестиков.

## § 2. Плоский кристалл

Теперь определим вид действующей части плоского кристалла при точечном источнике рентгеновских лучей.

Пусть точечный источник рентгеновских монохроматических лучей расположен в точке  $A(x_0, y_0, z_0)$ , а отражающая поверхность плоского кристалл-анализатора совпадает с плоскостью  $XOY$  (фиг. 5). Допустим луч  $AB$  из точечного источника  $A$  под углом  $\theta$  падает в точку  $B(x, y, 0)$  поверхности кристалла.

Для  $\sin \theta$  получим

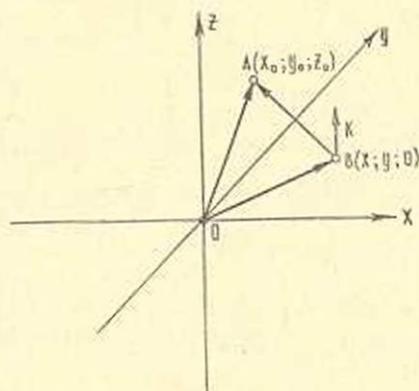
$$\sin \theta = \frac{z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}},$$

откуда

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = z_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta. \quad (2)$$

Угол  $\theta$  должен удовлетворять условию Вульфа-Брегга.

Таким образом, действующая (отражающая) часть плоского кристалл-анализатора при точечном источнике представляет собой окружность с центром в точке  $O'(x_0, y_0, 0)$ , где  $x_0$  и  $y_0$  первые две координаты  $A(x_0, y_0, z_0)$  источника. Радиус этой окружности, как видно из (2.1), равен  $R = z_0 \operatorname{ctg} \theta$ , где  $z_0$  — третья координата точки исто-



Фиг. 5.

ника. В случае реальных плоских кристалл-анализаторов, размеры которых порядка двух-трех сантиметров, на поверхности анализатора помещается только небольшая часть дуги в окрестности точки  $D$ .

### § 3. В ы в о д ы

1. Действующая площадь изогнутого кристалл-анализатора при точечном источнике представляет собой две эллиптические дуги с общей вершиной (см. фиг. 4).

2. В общем случае кривизны этих дуг различны (размеры эллипсов различны) и зависят от угла Вульфа-Брегга и от радиуса изгиба кристалл-анализатора.

3. Действующая площадь плоского кристалл-анализатора при точечном источнике представляет собой дугу окружности.

4. Радиус этой окружности зависит от угла Вульфа-Брегга и от расстояния между точечным источником и плоским кристалл-анализатором.

Ա. Գ. Ակրիսով, Պ. Հ. Բեզդրգանյան

ԲՅՈՒՐԵՂ-ԱՆԱԼԻԶԱՏՈՐԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՆՈՂ ՄԱԿԵՐԵՍԸ  
ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՆԵՐԻ ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻ ԴԵՊՓՈՒՄ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում հետազոտվում է սինտզինյան ճառագայթների բյուրեղային անալիզատորի անդրադարձման վիճակում գտնվող մասը՝ կետային աղբյուրի դեպքում:

Հետազոտությունների հիման վրա արվում են հետևյալ եզրակացությունները.

1. Ճկված բյուրեղ-անալիզատորի գործող մասը կետային աղբյուրի դեպքում իրենից ներկայացնում է ընդհանուր դադաթող կրկու էլիպսական աղեղներ (Ֆիգ. 4):

2. Ընդհանուր դեպքում այդ աղեղների կորությունները տարբեր են (էլիպսների շափերը տարբեր են) և կախված են Վուլֆ-Բրեդի անկյունից և բյուրեղ-անալիզատորի ձևման շառավիղից:

3. Հարթ բյուրեղ-անալիզատորի գործող մասը կետային աղբյուրի դեպքում իրենից ներկայացնում է շրջանազծի աղեղ:

4. Այդ շրջանազծի շառավիղը կախված է Վուլֆ-Բրեդի անկյունից և կետային աղբյուրի ու հարթ բյուրեղ-անալիզատորի միջև եղած հեռավորությունից:

Ստացված արդյունքները շատ լավ բացատրում են փորձերից հայտնի օվյաները:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дадман С. А. Отражение рентгеновского излучения от изогнутого кристалла при микрофокусном источнике. Известия АН СССР, серия физическая, 24, № 4, 1960.

А. Ц. Амагуни

## Переходное излучение периодически следующих друг за другом сгустков заряженных частиц

Связи с возможным использованием переходного излучения для генерации волн нужного диапазона, например, миллиметрового — имеет смысл более детально, чем это делалось до сих пор (Аскарян [1], см. также [2]) рассмотреть переходное излучение от сгустков заряженных частиц.

Поскольку на практике часто реализуются периодически следующие друг за другом сгустки заряженных частиц, естественно рассмотреть также вопросы интерференции излучения от отдельных сгустков.

Такого типа задачи рассматривались ранее в работах Франка [3] и Гинзбурга [4] в применении к другим видам излучения. Полученные ниже результаты качественно схожи с результатами, приведенными в [4], но содержат некоторые конкретные особенности, присущие явлению интерференции переходного излучения.

Пусть вместо точечного заряда величины  $e$ , рассматриваемого в работах по теории переходного излучения [5—11] мы имеем дело с отрезком заряженной нити, расположенной, например, вдоль оси  $z$  и имеющей длину  $a_z$ . Пусть сгусток такой формы имеет линейную плотность заряда  $q$  и движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$  вдоль оси  $z$ , перпендикулярно к поверхности (или системе параллельных поверхностей) раздела сред с различными диэлектрическими и магнитными свойствами.

Плотности заряда и тока, входящие в правые части уравнений Максвелла, в этом случае запишутся в виде

$$\rho = q \delta(x) \delta(y) \sigma(z - vt), \quad \vec{j} = \rho \vec{v},$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0, & |z| > a_z/2, \\ 1, & |z| < a_z/2. \end{cases} \quad (1)$$

Разлагая, как в [6], поля и токи в трехкратные интегралы Фурье, например

$$\rho(\vec{r}, t) = \int \rho_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - i \omega t} d\vec{k}, \quad \vec{k} = (\vec{x}, k_z), \quad \omega = k_z v; \quad (2)$$

и т. д., будем иметь для Фурье-компоненты плотности заряда выражение

$$\rho_{\vec{k}} = \frac{q}{(2\pi)^2} \frac{\sin(k_z a_3/2)}{\pi k_z} \quad (3)$$

При  $a_3 \rightarrow 0$  и  $qa_3 \rightarrow e$  мы приходим к выражению для случая точечного заряда.

Используя (3) нетрудно видеть, что переход от случая точечного заряда к случаю рассматриваемому здесь, сводится к замене  $e/2$  в выражении для полей переходного излучения [6—8, 10, 11] на фактор

$$\frac{q}{k_z} \sin \frac{k_z a_3}{2} \rightarrow \frac{e}{2} \quad (4)$$

Аналогичным образом нетрудно получить правила перехода для полей излучения в случае отрезка нити длины  $a_2$ , расположенного вдоль оси  $y$ , или отрезка нити длины  $a_1$ , расположенного вдоль оси  $x$  (в обоих случаях линейная плотность заряда равна  $q$  и отрезок движется, как целое, вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью  $v$ )

$$\begin{aligned} \frac{q}{x \cos \varphi} \sin \left( \frac{x a_1 \cos \varphi}{2} \right) &\rightarrow \frac{e}{2}, \\ \frac{q}{x \sin \varphi} \sin \left( \frac{x a_2 \sin \varphi}{2} \right) &\rightarrow \frac{e}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5)  $x = |\vec{x}|$ ,  $x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \sin^2 \theta$ ,  $\theta$  — угол излучения в первую (1) или вторую (2) среду (см. [5]),  $\varphi$  — полярный угол в плоскости  $xy$ , отсчитываемый от оси  $x$ .

Если

$$\frac{\omega a_3}{2v} \ll 1, \quad a_3 \ll \frac{2v}{\omega} = \beta \lambda / \pi, \quad (6)$$

то  $qa_3 \rightarrow e$ , и излучение с длиной волны  $\lambda$  (в вакууме) будет генерироваться полным зарядом  $qa_3$  нити, перпендикулярной границе раздела.

В случае нитей, расположенных параллельно плоскости раздела [формула (5)], отметим зависимость излучения от полярного угла. Отрезок нити будет излучать как один заряд величины  $qa_1$  ( $qa_2$ ) при условиях

$$\frac{x a_1 \cos \varphi}{2} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{x a_2 \sin \varphi}{2} \ll 1. \quad (7)$$

Если

$$a_{1,2} \ll \frac{2}{x} = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}} \sin \theta, \quad (8)$$

то условия (7) выполнены для всех углов  $\varphi$ .

Как известно [6, 10], в случае релятивистских частиц переходное излучение (в вакууме) в основном испускается под малыми углами  $\theta \sim \frac{m}{E}$  к траектории частицы. Поэтому протяженный заряд будет излучать как точечный в случае

$$\alpha \ll \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}} \cdot \frac{E}{m}, \quad (8)$$

т. е. на поперечные размеры сгустка в релятивистском случае накладываются относительно слабые ограничения (см. также [2]).

Условия (7) будут выполнены также и при  $\alpha \approx 1$ , если исследовать излучение в области равноудаленной от концов отрезка, т. е. при  $\varphi$  близком к  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$  [первая формула (7)] или при  $\varphi$  близком к  $\pi$  и  $0$  (в случае отрезка нити, параллельного оси  $y$ ). Интервал углов вокруг этих направлений

$$\Delta\varphi \ll \frac{1}{\alpha a} \quad (\Delta\varphi \ll 1) \quad (9)$$

характерен тем, что излучение в этот интервал углов создается всем зарядом нити  $qa$ .

При рассмотрении случаев

$$а) k_i a_i \gg 1, \quad б) \alpha a_i \cos \varphi \gg 1, \quad в) \alpha a_i \sin \varphi \gg 1 \quad (10)$$

обратим внимание на то, что в интенсивность излучения входят квадраты факторов (4), (5) и выделим остающуюся после усреднения по небольшому интервалу частот неосциллирующую часть интенсивности.

Тогда, в спектральном и угловом распределении интенсивности излучения для перехода от точечного заряда к случаю заряженного протяженного отрезка нити нужно произвести [соответственно условиям (10)] замену

$$\frac{e^2}{2} \rightarrow \frac{q^2 v^2}{\omega^2}, \quad \frac{q^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}, \quad \frac{q^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

Кратко результат можно сформулировать следующим образом.

При условиях (6), (7) ( $k_i a_i \ll 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) спектральная интенсивность излучения пропорциональна квадрату полного заряда сгустка  $Q^2$ ; при условиях (10) интенсивность излучения пропорциональна величине  $Q^2 / (k_i a_i)^2 = \frac{e^2 N^2}{(k_i a_i)^2}$ , где  $N$  — полное число электронов в сгустке. Видно, что даже если  $k_i a_i \gg 1$ , можно добиться заметной интенсивности излучения в заданном интервале частот, используя сгустки частиц с большим  $N$ .

Необходимо заметить, что приведенные выше результаты справедливы, если расстояния между отдельными зарядами в сгустке таковы, что допустимо его макроскопическое описание с помощью понятия линейной плотности заряда. Макроскопическое описание возможно в том случае, если расстояния между отдельными зарядами сгустка  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , подчинены условиям

$$x_1 \Delta x \ll 1, \quad x_2 \Delta y \ll 1, \quad k_2 \Delta z \ll 1. \quad (12)$$

Если имеют место неравенства обратные (12), то осуществляется не зависящее излучение  $N$  зарядов, составляющих сгусток (ср. [2]).

Ясно, что к случаю макроскопического сгустка в форме параллелепипеда с ребрами  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , переход от случая точечного заряда будет осуществляться следующей заменой в полях излучения

$$\frac{e}{8} \rightarrow \frac{Q}{(k_1 a_1)(k_2 a_2)(k_3 a_3)} \sin(k_1 a_1) \sin(k_2 a_2) \sin(k_3 a_3),$$

где  $Q$  — полный заряд сгустка.

Рассмотрим теперь случай  $m$  сгустков (каждый протяженности  $a_3$ ), центры которых отстоят друг от друга на расстоянии  $d = a_2 + b$ . Вся совокупность сгустков расположена вдоль оси  $z$  и движется со скоростью  $\vec{v}$  перпендикулярно границе (или границам) раздела сред.

Имея в виду, что поле излучения есть сумма полей излучения от отдельных сгустков и, что фурье-компонента поля излучения  $l$ -сгустка (учитывая сдвиг во времени пролета через границу среды) есть

$$\vec{H}_{1,2}^{(l)} = \vec{H}_{1,2}^{(1)} e^{-i(l-1)k_2 d}, \quad (13)$$

где  $\vec{H}_{1,2}^{(1)}$  — поле излучения первого сгустка, нетрудно получить суммарное поле излучения

$$\vec{H}_{1,2} = \vec{H}_{1,2}^{(1)} \frac{1 - e^{-imk_2 d}}{1 - e^{-ik_2 d}}$$

и общую спектральную интенсивность излучения  $m$ -сгустков

$$dS^{(m)}(\omega, \theta, \varphi) = dS^{(1)}(\omega, \theta, \varphi) \cdot \frac{\sin^2 \frac{m\omega d}{2v}}{\sin^2 \frac{\omega d}{2v}}, \quad (14)$$

где  $dS^{(1)}$  — интенсивность излучения одного сгустка. Отметим близость формулы (14) к формуле теории дифракции на  $m$  щелях (ср. [4]).

Если  $\frac{m\omega d}{2v} \ll 1$ , то  $dS^{(m)}$  будет в  $m^2$  раз превышать излучение одного сгустка. Ясно, однако, что для больших  $m$  этот случай трудно реализовать практически.

Если  $\omega = \frac{2\pi n v}{d}$ , или  $\lambda = \frac{d}{\beta n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то вблизи таких частот будем иметь максимумы излучения пропорциональные  $m^2$  с шириной  $\sim 1/m$ . Относительная величина этих максимумов определится спектральным распределением интенсивности одного сгустка —  $dS^{(1)}$ .

Условие  $\lambda = \frac{d}{n\beta}$  можно рассматривать, как условие на скорость  $\beta = \frac{d}{n\lambda} < 1$ , откуда  $n > d/\lambda\beta$ . В силу (4)  $dS^{(1)} \sim \sin^2\left(\frac{\omega a_3}{2v}\right) / \left(\frac{\omega}{v}\right)^2$ , то есть величина максимума будет убывать в зависимости от его порядка  $n$  как  $n^{-2}$  в полной аналогии с формулами дифракционной решетки. Тем не менее, имея достаточное число электронов в сгустке, можно получить заметную интенсивность и в максимумах высокого порядка.

Нетрудно видеть, что при  $\frac{\omega d}{2v} \gg 1$ , т. е.  $d \gg \frac{\lambda\beta}{\pi}$ , мы будем иметь дело с независимыми излучениями  $m$  сгустков. На практике, по-видимому, будет осуществляться именно этот случай.

Аналогично вышеприведенному, можно рассмотреть и другие случаи распределения сгустков. Например, нетрудно получить выражение для спектральной и угловой интенсивности в случае  $n$ -групп сгустков, причем, каждая группа состоит из  $m$ -сгустков, центры которых отстоят друг от друга на  $d$ , а расстояние между центрами соседних групп есть  $b$

$$dS^{(m, n)} = dS^{(1)} \frac{\sin^2 \frac{m\omega d}{2v}}{\sin^2 \frac{\omega d}{2v}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n\omega b}{2v}}{\sin^2 \frac{\omega b}{2v}} \quad (15)$$

В (15)  $dS^{(1)}$ , как и раньше, есть излучение одного сгустка.

Автор признателен Г. М. Гарибяну и Э. А. Лазиеву за обсуждение.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 12 VII 1961

### Ա. Յ. ԱՄԱՏՈՒՅԻ

## ՊԱՐԲԵՐԱԲԱՐ ՄԻՄՅԱՆՑ ՀԱՋՈՐԴՈՂ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԽՏԻԼՆԵՐԻ ԱՆՑՄԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՅՈՒՄԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում ավելի մանրամասն, քան այդ արված է նախկինում, հետազոտված է լիցքավորված մասնիկների խտիչների անցման հոտադալթումը: Ստացված են կետային լիցքի բանաձևերից տարածական լիցքի դեպքին անցնելու կանոնները:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аскарян Г. А. Импульсная когерентная генерация миллиметровых радиоволн нелинейными электронными сгустками. ЖЭТФ **30**, 584, 1956.
2. Амагуни А. Ц. Переходное излучение дипольных моментов. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, **13**, 1, 1960.
3. Франк И. М. Явление интерференции для радиации Черенкова. ДАН СССР, **3**, 354, 1944.
4. Гинзбург В. Л. Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе. Известия АН СССР, **11**, 165, 1947.
5. Гинзбург В. Л. и Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, **16**, 15, 1948.
6. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения. ЖЭТФ, **33**, 1403, 1957.
7. Гарибян Г. М. и Чаликян Г. А. Излучение заряженной частицы, пролетающей через пластинку. ЖЭТФ, **35**, 1282, 1958. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, **12**, 3, 1959.
8. Гарибян Г. М. Излучение заряженной частицы, пролетающей через слоистую среду. ЖЭТФ, **35**, 1435, 1958.
9. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицами. ЖЭТФ, **37**, 587, 1959.
10. Барсуков К. А. Переходное излучение в волноводе. ЖЭТФ, **37**, 1106, 1959.
11. Барсуков К. А. Переходное излучение в пластинке, помещенной в волновод. ЖЭТФ, **30**, 1337, 1960.

Н. А. Корхмазян

## Поляризация переходного излучения в случае наклонного входа

Имеются несколько работ [1—3] относящихся к расчету переходного излучения при наклонном входе заряженной частицы из одной среды в другую, разделенных плоской границей  $z=0$ . Однако вопрос о поляризации переходного излучения при наклонном входе не исследован.

С другой стороны, переходное излучение можно различить от фона всевозможных побочных эффектов только по характерной для него поляризации. Поэтому с практической точки зрения важно знать поляризационные свойства этого излучения. Как известно [4], при перпендикулярном входе частицы, электрический вектор поля излучения находится в плоскости излучения, т. е. в плоскости, составленной лучом зрения и траекторией частицы. В. Е. Пафомов любезно обратил наше внимание на недочет в работе [3] — при наклонном входе частицы электрический вектор вообще не лежит в плоскости излучения. Он лежит в этой плоскости лишь при совпадении плоскости излучения с плоскостью падения частицы, т. е. при  $\varphi=0, \pi$ , где  $\varphi$  — азимут плоскости излучения, отсчитанный от плоскости падения.

Плоскость падения есть плоскость образованная траекторией частицы и перпендикуляром восстановленным к границе раздела в точке перехода частицы.

В настоящей работе получены общие формулы, дающие угловые и частотные распределения интенсивности переходного излучения для двух взаимно перпендикулярных поляризаций в отдельности. Причем, продольно поляризованными мы называем волны, электрический вектор которых лежит в плоскости излучения, а волны, электрический вектор которых перпендикулярен к плоскости излучения, назовем поперечно поляризованными. Рассмотрены также некоторые частные случаи.

### § 1. Поля излучения

Пусть плоскость  $z=0$  есть граница раздела двух сред, описываемых диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Частица двигаясь со

скоростью  $\vec{v}$  в плоскости  $(x, z)$  из первой среды входит во вторую в момент  $t=0$ , составляя угол  $\psi$  с осью  $z$ . Ось  $z$  направлена из первой среды во вторую. Все величины относящиеся к первой и второй средам снабдим соответственно индексами 1 и 2. Поля излучения для этого случая получены в работе Г. М. Гарибяна [1] и имеют вид

$$\vec{E}_{1,2}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_{1,2}(\vec{k}) \cdot \exp i(\vec{x} \cdot \vec{\rho} + \lambda_{1,2} \cdot z - \omega t) \cdot d\vec{k} \text{ и т. п.,}$$

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v} = k_x \cdot v_x + k_z \cdot v_z, \quad \lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{1,2} - k^2, \quad (1.1)$$

где  $\vec{x}$  и  $\vec{\rho}$  — тангенциальные компоненты векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{r}$ , а  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  при  $\omega > 0$ .

Тогда для Фурье — компонент полей будем иметь

$$\vec{H}_{1,2}(\vec{k}) = \frac{c}{\omega} \cdot \left[ \vec{x} + \vec{n} \lambda_{1,2}, \vec{E}_{1,2}(\vec{k}) \right], \quad (1.2)$$

$$\vec{x} \vec{E}_{1,2,t}(\vec{k}) + \lambda_{1,2} \cdot E_{1,2,n}(\vec{k}) = 0, \quad (1.3)$$

$$\vec{E}_{1,2,t}(\vec{k}) = \vec{x} E_{1,2,x}(\vec{k}) + \vec{v}_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k}), \quad (1.4)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор оси  $z$ , а  $E_{1,2,x}(\vec{k})$  и  $E_{1,2,n}(\vec{k})$  — компоненты тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}_{1,2,t}(\vec{k})$  по  $\vec{x}$  и  $\vec{v}_x$ , имеющие вид\*

$$E_{1,2,x}(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{1,2} \cdot \varepsilon_{2,1} - \lambda_{2,1} \cdot \varepsilon_{1,2}} \cdot \left( \left( \frac{\varepsilon_{2,1} - \frac{v_z}{\omega} \cdot \lambda_{2,1}}{\varepsilon_{1,2} - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{1,2}} + \frac{-1 + \frac{v_z}{\omega} \cdot \lambda_{2,1}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{2,1}} \right) + \frac{k_x v_x (k_z - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,1})}{\omega} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{1,2}} - \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{2,1}} \right) \right), \quad (1.5)$$

$$E_{1,2,z}(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \cdot \frac{\omega (\lambda_{2,1} - k_z)}{c^2 (\lambda_{1,2} - \lambda_{2,1})} \left( \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{1,2}} - \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{2,1}} \right). \quad (1.6)$$

\* В формуле (8) работы [1] имеется опечатка. Вместо  $k_y v_z$  должно быть  $k_y v_x$ .

Для вычисления потока излучений различных поляризаций в отдельности нужно  $\vec{E}_{1,2,t}$  и  $\vec{H}_{1,2,t}$  разложить по двум компонентам, одна из которых лежит в плоскости излучения  $x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi = 0$ , а другая — перпендикулярна к ней.

Все векторы (и их модули), лежащие в плоскости излучения, снабдим значком ( $''$ ), а перпендикулярные к ней — через ( $+$ ). Тогда, воспользовавшись формулами (1.2), (1.3), (1.4) можно получить

$$E_{1,2,t,x}''(\vec{k}) = \cos \varphi \{x E_{1,2,x}(\vec{k}) + \cos \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k})\},$$

$$E_{1,2,t,y}''(\vec{k}) = \sin \varphi \{x E_{1,2,x}(\vec{k}) + \cos \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k})\},$$

$$H_{1,2,t,x}^+(\vec{k}) = -\sin \varphi \cdot \frac{\omega \varepsilon_{1,2}}{c \lambda_{1,2}} \{x E_{1,2,x}(\vec{k}) + \cos \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k})\}, \quad (1.7)$$

$$H_{1,2,t,y}^+(\vec{k}) = \cos \varphi \cdot \frac{\omega \varepsilon_{1,2}}{c \lambda_{1,2}} \{x E_{1,2,x}(\vec{k}) + \cos \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k})\},$$

$$E_{1,2,t,x}^+(\vec{k}) = \sin^2 \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k}),$$

$$E_{1,2,t,y}^+(\vec{k}) = -\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k}), \quad (1.8)$$

$$H_{1,2,t,x}^-(\vec{k}) = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{c \lambda_{1,2}}{\omega} \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k}),$$

$$H_{1,2,t,y}^-(\vec{k}) = \sin^2 \varphi \cdot \frac{c \lambda_{1,2}}{\omega} \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}(\vec{k}).$$

## § 2. Интенсивность излучения

Вычислим поток вектора Пойнтинга через плоскость  $z = \pm a \rightarrow \pm \infty$ . Составим вектор Пойнтинга

$$\vec{S}_{1,2}^{\pm} = \frac{c}{4\pi} \vec{n} \{E_{1,2,t,x}^{\pm}(\vec{r}, t) \cdot H_{1,2,t,y}^{\pm}(\vec{r}, t) - E_{1,2,t,y}^{\pm}(\vec{r}, t) \cdot H_{1,2,t,x}^{\pm}(\vec{r}, t)\}, \quad (2.1)$$

где, например, по формуле (1.1) имеем

$$\begin{aligned} & E_{1,2,t,x}^{\pm}(\vec{r}, t) \cdot H_{1,2,t,y}^{\pm}(\vec{r}, t) = \\ & = \int E_{1,2,t,x}^{\pm}(\vec{k}) \cdot H_{1,2,t,y}^{\pm}(\vec{k}) \cdot e^{i(0_{1,2} + \lambda'_{1,2})z} \cdot e^{i(\vec{x} + \vec{x}') \cdot \vec{k}} \cdot e^{-(\omega + \omega')t} \cdot d\vec{k} d\vec{k}', \end{aligned} \quad (2.2)$$

а потом найдем и поток

$$W_{1,2}^{\pm} = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} S_{1,2}^{\pm} \cdot dx dy dt, \quad (2.3)$$

где знаки  $\mp$  относятся к индексам 1 и 2 соответственно. Интеграл по  $dxdydt$  дают  $(2\pi)^3 \cdot \delta(\vec{x} + \vec{x}') \cdot \delta(\omega + \omega')$ , после чего интеграл по  $d\vec{k}$  берется сразу, если иметь в виду что  $d\vec{k}' = \frac{1}{v_2} \cdot d\vec{x}' d\omega'$ .

В результате получим

$$W_{1,2}'' = \mp \frac{2\pi^2 c}{v_2} \int [E_{1,2,x}^{\rightarrow}(\vec{k}) \cdot H_{1,2,y}^{\rightarrow}(-\vec{k}) - E_{1,2,y}^{\rightarrow}(\vec{k}) \times \\ \times H_{1,2,x}^{\rightarrow}(-\vec{k})] d\vec{k}. \quad (2.4)$$

Формуле (2.4) можно придать следующий вид

$$dW_{1,2}'' = \mp \frac{4\pi^2 c}{v_2^2} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon_{1,2} \cdot \cos \vartheta_{1,2} \times$$

$$\times [E_{1,2,x}^{\rightarrow}(\vec{k}) H_{1,2,y}^{\rightarrow}(-\vec{k}) - E_{1,2,y}^{\rightarrow}(\vec{k}) H_{1,2,x}^{\rightarrow}(-\vec{k})] d\Omega d\omega, \quad (2.5)$$

где  $\vartheta_{1,2}$  — углы между лучами зрения в первой и во второй средах и векторами  $-\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  соответственно.

Воспользовавшись (1.7) и (1.8) формулу (2.5) можно записать в более удобном виде.

$$J_{1,2}'' = \frac{dW_{1,2}''}{d\Omega d\omega} = \pm \frac{4\pi^2 \cdot \omega^3 \cdot \varepsilon_{1,2}^2 \cdot \cos \vartheta_{1,2}}{c^2 \cdot v_2^2 \cdot \lambda_{1,2}} [x E_{1,2,x}^{\rightarrow}(\vec{k}) \pm \cos \varphi \cdot v_x \cdot E_{1,2,x}^{\rightarrow}(\vec{k})]^2, \quad (2.6)$$

$$J_{1,2}'' = \frac{dW_{1,2}''}{d\Omega d\omega} = \pm \frac{4\pi^2 \cdot \omega^3 \cdot \varepsilon_{1,2} \cdot \lambda_{1,2} \cdot \cos \vartheta_{1,2} \cdot v_x^2 \cdot \sin^2 \varphi}{v_2^2} \cdot E_{1,2,x}^2(\vec{k}). \quad (2.7)$$

При  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  эти излучения исчезают.

Формулы (2.6), (2.7) совместно с (1.5), (1.6) дают интенсивности переходных излучений назад и вперед (индексы 1 и 2) для продольных и поперечно поляризованных волн в отдельности. Полная интенсивность равна сумме интенсивностей обеих поляризаций.

### § 3. Частные случаи

1. При перпендикулярном входе частицы ( $v_x = v \cdot \sin \psi = 0$ ), как видно из (2.7), излучение поперечно поляризованных волн исчезает, а формула (2.6) принимает вид

$$J_{1,2}'' = - \frac{4\pi^2 \cdot c \sqrt{\varepsilon_{1,2}} \cdot \sin^2 \vartheta_{1,2}}{v^2} \cdot \varepsilon_{1,2}^2 \cdot \frac{\omega^4}{c^4} \cdot E_{1,2,x}^2(\vec{k}). \quad (3.1)$$

Учитывая, что при вычислении излучения в первой и во второй средах соответственно нужно брать [1]

$$x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \vartheta_1, \quad \lambda_1 = - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \vartheta_1, \quad \lambda_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_1},$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \vartheta_1), \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 = [1 - \beta^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_1)],$$

$$x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin \vartheta_2, \quad \lambda_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2, \quad \lambda_1 = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \vartheta_2},$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \vartheta_2)], \quad (3.2)$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \cdot \cos^2 \vartheta_2),$$

из формулы (3.1) легко получаем формулу Гинзбурга-Франка (излучение назад) и формулу Гарибяна (излучение вперед) [5]

$$J_{1,2}^* = \frac{V \varepsilon_{1,2} \cdot e^2 v^2 \cdot \sin^2 \vartheta_{1,2} \cdot \cos^2 \vartheta_{1,2}}{\pi^2 c^3} \times$$

$$\times \left| \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (1 - \beta^2 \varepsilon_{1,2} \pm \beta \sqrt{\varepsilon_{3,1} - \varepsilon_{1,2} \sin^2 \vartheta_{1,2}})}{(1 - \beta^2 \varepsilon_{1,2} \cos^2 \vartheta_{1,2}) (1 \pm \beta \sqrt{\varepsilon_{2,1} - \varepsilon_{1,2} \sin^2 \vartheta_{1,2}})} \right| \times$$

$$\frac{1}{(\varepsilon_{1,1} \cos \vartheta_{1,2} + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_{1,2} \sin^2 \vartheta_{1,2}})} \quad (3.3)$$

2. Рассмотрим излучение при наклонном входе частицы из вакуума ( $\varepsilon_1 = 1$ ) в идеальный проводник ( $\varepsilon_2 = \infty$ ). Тогда из формул (1.5), (1.6) получаем

$$E_{1,z}(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad E_{1,r}(\vec{k}) = -\frac{ei}{2\pi^2} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\omega}{c},$$

$$E_{2,x}(\vec{k}) = E_{2,z}(\vec{k}) = 0. \quad (3.4)$$

Для продольно и поперечно поляризованных излучений в этом случае по формулам (2.6) и (2.7) соответственно получаем (опускаем индекс 1)

$$J'' = \frac{e^2 v^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\pi^2 c^3} \times$$

$$\times \left| \frac{\sin \vartheta - \beta \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{[1 - \beta(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \cos \vartheta \cdot \cos \varphi)] [1 - \beta(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \cos \vartheta \cdot \cos \varphi)]} \right|^2, \quad (3.5)$$

$$J' = \frac{e^2 v^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\pi^2 c^3} \times$$

$$\times \left| \frac{\beta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi}{[1 - \beta(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \cos \vartheta \cdot \cos \varphi)] [1 - \beta(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \cos \vartheta \cdot \cos \varphi)]} \right|^2. \quad (3.6)$$

Полная интенсивность в этом случае будет суммой выражений (3.5) и (3.6). Этот результат совпадает с соответствующей формулой работы [3]. По формулам (3.5) и (3.6) имеем:

$$\frac{J^{\perp}}{J^{\parallel}} = \left| \frac{\beta \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \vartheta - \beta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi} \right|^2, \quad (3.8)$$

поэтому

а) при нерелятивистских скоростях ( $\beta \ll 1$ ) и не очень малых углах излучение почти полностью продольно поляризовано, независимо от  $\varphi$  и  $\psi$ ;

б) при  $\vartheta \sim 0$  имеем

$$\frac{J^{\perp}}{J^{\parallel}} = \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (3.9)$$

независимо от  $\psi$ ;

в) по направлениям ( $\vartheta, \varphi$ ), связанным условием

$$\sin \vartheta = \beta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi, \quad (3.10)$$

излучение полностью поперечно поляризовано.

При стремлении угла входа частицы  $\psi$  к  $\pi/2$  (или при  $v_z = v \times \cos \psi \rightarrow 0$ ) переходный эффект, конечно, должен исчезнуть. Нетрудно проверить, что формулы (1.5), (1.6) и (2.6), (2.7) в этом предельном случае дают

$$J^{\perp} \sim \cos^4 \psi, \quad J^{\parallel} \sim \cos^2 \psi, \quad (3.11)$$

поэтому полное излучение при  $\psi \rightarrow \pi/2$  исчезает  $\sim \cos^2 \psi$ .

Кроме того, как указал В. Е. Пафомов, для всех реальных сред (т. е. если ни одна из двух сред не является идеальным проводником) излучение под углом  $\vartheta_{1,2} = \frac{\pi}{2}$  должно исчезнуть. Это заключение

экспериментально подтвердил С. Михалык [6]. Для поперечно поляризованных волн это обстоятельство подтверждается просто тем, что по формуле (2.7) излучение  $\sim \cos^2 \vartheta_{1,2}$ . Для продольно поляризованного же излучения это вытекает из формул (1.5), (1.6), (2.6), если иметь в виду, что в таком предельном случае в формулах (3.2) для  $\kappa$  и  $\lambda$  необходимо подставить  $\vartheta_{1,2} = \pi/2$ .

Как известно [7], при релятивистских скоростях переходное излучение в основном испускается вперед и простирается в области частот  $\omega_0 \ll \omega \lesssim \omega_{\text{гр.}} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\beta^2}}$  ( $\omega_0$  — оптические частоты среды). Такое излучение сконцентрировано вокруг траектории частицы в конус с углом раствора  $\sim \sqrt{1-\beta^2}$ .

Из формул (2.6), (2.7) видно, что поперечно поляризованная компонента в излучении по порядку величины в  $(1-\beta^2)$  раз меньше от продольно поляризованной компоненты [вследствии наличия  $\sin^2$

в числителе формулы (2.7)], т. е. такое излучение почти полностью продольно поляризовано.

В заключение приношу благодарность В. Е. Пафомову, Б. М. Болотовскому, А. Ц. Аматауни и А. Д. Газазяну за полезные советы и обсуждения.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 18 XI 1961.

**Ն. Ս. Ղարիբյան**

## ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅՅՄԱՆ ԲԵՎԵՌԱՑՈՒՄԸ ՔԵՔ ԱՆՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրված է մի միջավայրից մյուսին, մասնիկի թեք անցման ժամանակ առաջացած ճառագայթման (անցումային ճառագայթման) բևեռացման հարցը: Ստացված են ընդհանուր բանաձևեր երկայնական և լայնական բևեռացված ճառագայթման ինտենսիվությունների համար: Երկայնական և լայնական բևեռացված համարում ենք այն ճառագայթումները, որոնց էլեկտրական դիպոլորը համապատասխանաբար գտնվում է ճառագայթման հարթության մեջ, կամ ուղղահայաց է այդ հարթությանը: Գնահարված են նաև որոշ մասնավոր դեպքեր:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Գարիբյան Գ. Մ.* К теории переходных эффектов в электродинамике. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **11**, 7, 1958.
2. *Գարիբյան Գ. Մ.* Переходное излучение при наклонном падении заряда. ЖЭТФ, **38**, 1814, 1960.
3. *Կորխմաչյան Ն. Ա.* Переходное излучение при наклонном падении заряда. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **11**, 87, 1958.
4. *Գալեբուրգ Վ. Լ. և Ֆրանկ Ի. Մ.* Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, **16**, 15, 1946.
5. *Դեր-Միքաելյան Մ. Լ.* К теории переходного излучения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, 141, 1959.
6. *Մախալյան Ս.* Кандидатская диссертация, МГУ, 1961.
7. *Գարիբյան Գ. Մ.* К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицы. ЖЭТФ, **37**, 527, 1959.

Г. С. Саакян

## О сверхплотном состоянии материи во вселенной

### § 1. Термодинамические функции

В настоящее время можно считать бесспорным фактом, что статические модели вселенной не соответствуют действительности [1]. Радиус кривизны пространства со временем изменяется. Имеются две основные модели мира: закрытая и открытая. По закрытой модели вселенная то сжимается, то расширяется регулярно возвращаясь в состояние наименьшего объема, а по открытой модели она, начиная с некоторого наименьшего состояния, все время расширяется. Астрономические данные о значении средней плотности материи во вселенной пока что недостаточно точны, чтобы сделать определенный выбор между этими моделями. Но одно можно считать достоверным, что в настоящее время мы живем в эпоху расширения. Для однородной изотропной модели Фридманом было установлено наличие сингулярного решения с нулевым объемом пространства в начале времени. Однако, этот результат подвергался критике, как в прошедшие годы, так и совсем недавно [2—6]. Действительно, с чисто физической точки зрения, трудно представить такое состояние вселенной, при котором объем пространства равняется нулю. По-видимому объем пространства в начале расширения должен иметь некоторое малое, но отличное от нуля, значение.

Ниже мы исследуем некоторые физические свойства материи, предполагая, что в начале расширения плотность энергии во вселенной была порядка ядерной плотности и выше. В работе [7] было показано, что при таких концентрациях энергии материя состоит из газа (или жидкости) элементарных частиц. В упомянутой работе исследовались свойства газа элементарных частиц в предположении, что он образует отдельное небесное тело (Гиперонная звезда), не являющееся вполне замкнутой системой. Поставим перед собой задачу: исследовать свойства газа элементарных частиц, образующего замкнутую систему. Разумеется такой идеальной замкнутой системой является лишь вселенная, взятая в целом. Мы будем исходить из общих принципов термодинамики равновесных систем. Строго говоря, законы термодинамики нельзя применить к описанию состояния материи во вселенной, так как оно со временем изменяется. Предположим, что это изменение состояния материи, обусловленное расширением или сжатием пространства, достаточно медленное—настолько медленное, что

если не во всем пространстве, то хотя бы в отдельных его областях успевает установиться квазиравновесное состояние. При этом нужно иметь в виду, что в рассматриваемых физических условиях (большие плотности, всевозможные возмущения распространяются со скоростью, близкой к скорости света). Это обстоятельство облегчит быстрое восстановление состояния равновесия, нарушенного расширением (сжатием) вселенной. Таким образом, предполагается, что время существенных изменений радиуса кривизны пространства достаточно мало по сравнению с временем релаксационных процессов.

Итак, допустим, что плотности энергии настолько высоки ( $\rho > 10^3 \text{ эрг см}^{-3}$ ), что вещество состоит из газа элементарных частиц. Для установления общих термодинамических соотношений, конкретное значение списка элементарных частиц пока что не требуется. Важно лишь то, что в рассматриваемом газе представлены все группы элементарных частиц: барионы, лептоны и бозоны. Далее, мы считаем, что при любых плотностях газ является идеальным. Конечно, это предположение связано с определенными ошибками\*, но наши знания в настоящее время позволяют корректно учитывать энергию взаимодействия частиц при достаточно больших (выше ядерной) плотностях.

Начнем с рассмотрения термодинамических функций. Термодинамический потенциал для фермионов определяется формулой ([8], стр. 176)

$$\Omega_k = - \frac{V \chi T}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \ln \left[ 1 + e^{(\mu_k - E_k) / \chi T} \right] p^2 dp, \quad (1.1)$$

где  $k$  отмечает сорт частиц,  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ,  $\chi$  — постоянная Больцмана,  $E_k = c(m_k^2 c^2 + p^2)^{1/2}$  — энергия частиц,  $\mu_k$  — химический потенциал и  $V$  — объем некоторой части пространства. Интегрируя (1.1) по частям, находим

$$\Omega_k = - \frac{V (\chi T)^4}{3\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_{z_k}^\infty \frac{(z^2 - z_k^2)^{3/2} dz}{e^{z - \mu_k / \chi T} + 1} = - VT^4 f(z_k, x_k), \quad (1.2)$$

где  $z_k = m_k c^2 / \chi T$  и  $x_k = \mu_k / T$ .

Энтродпия равна

$$S_k = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu_k} = V (4T^3 f - T^2 \mu_k f'_k - T^3 z_k f_k), \quad (1.3)$$

где  $f_k \equiv f(z_k, x_k)$ , точка означает дифференцирование по  $z_k$ , а штрих — дифференцирование по  $x_k$ .

Число частиц равно

\* Если все виды барионов между собой взаимодействуют одинаковым образом, то в рассматриваемых здесь вопросах допущение об идеальности газа не влечет за собой ошибок. Ошибки возникают лишь тогда, когда взаимодействие разное.

$$n_k = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_k} \right)_{V, T} = VT^3 f'_k. \quad (1.4)$$

Нам нужно определить также энергию. Она равна

$$E_k = \frac{V}{\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{E_k(p) p^2 dp}{e^{(E_k - \mu_k)/kT} + 1} = VT^4 (3f_k - z_k f'_k). \quad (1.5)$$

Приведенные формулы относятся как к барионам, так и к лептонам. Однако, чтобы четко отличить эти частицы друг от друга и облегчить запись дальнейших формул, мы используем обозначение  $f_k$  для барионов. Соответствующую функцию для лептонов обозначим через  $\psi(z_k, x_k) \equiv \psi_k$ . Ясно, что  $f_k$  и  $\psi_k$  — одни и те же функции и отличаются лишь своими аргументами  $z_k$  и  $x_k$ .

Для частиц, принадлежащих к группе бозонов, термодинамический потенциал равен

$$\Omega_k = - \frac{V (kT)^4}{3\pi^2 c^3 h^3} \int_{z_k}^\infty \frac{(z^2 - z_k^2)^{3/2} \cdot dz}{e^{z - \mu_k/kT} - 1} = -VT^4 \cdot \varphi_k, \quad (1.6)$$

где  $\varphi_k \equiv \varphi(z_k, x_k)$ , а  $z_k$  и  $x_k$  имеют прежний смысл. Мы не будем выписывать формулы для энтропии, числа частиц и энергии бозонов. Формально эти формулы те же самые, что и в случае фермионов и вопрос сводится лишь к замене  $f_k$  функцией бозонов  $\varphi_k$ . В случае фотонов  $z_1 = 0$ ,  $E_1 = -3\Omega_1$ , а функция  $\varphi_1$  является постоянным числом, конечно, если заранее считать что  $\mu_1 = 0$ .

Термодинамические функции для античастиц выражаются теми же функциями (1.1)–(1.6), только в них под  $\mu_k$  нужно понимать химический потенциал античастиц, который иногда мы обозначаем через  $\bar{\mu}_k$ . При необходимости это обозначение с тильдой над буквами мы будем употреблять и для других величин, принадлежащих античастицам.  $\gamma$ -кванты и  $\pi^0$ -мезоны не имеют античастиц, точнее в этом случае понятия частиц и античастиц совпадают. Далее, частицами считаются электрон,  $\mu^-$  и  $\pi^-$ -мезоны. Соответственно позитрон,  $\mu^+$  и  $\pi^+$ -мезоны являются античастицами.

## § 2. Вариационный принцип

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выяснить, в каком состоянии находится материя при заданной плотности энергии (или эквивалентной ей плотности массы). Это значит мы должны выяснить, какие частицы имеются в среде, какие значения имеют их концентрации и температура при заданном значении объема и массы замкнутой системы, если состояние ее близко к термодинамически равновесному? Такая постановка

вопроса вполне законна. Действительно, в каждый данный момент времени во вселенной должно существовать вполне определенное распределение энергии по ее разновидностям. Значение же температуры среды однозначно определяется энергией бозонов. Очевидно, в разные периоды жизни вселенной это распределение энергии по ее разновидностям будет разным. В этой статье нас интересует состояние материи во вселенной в тот период ее жизни, когда плотность энергии достаточно высока. А именно, мы предполагаем такие плотности масс, при которых материя существует в виде газа из элементарных частиц. Для решения этой задачи мы исходим из следующих общих принципов.

1. Разность чисел барионов и антибарионов во вселенной сохраняется (закон сохранения числа барионов). Учитывая (1.4) для этого числа получаем

$$n_b = VT^3 \sum_k b_k f'_k, \quad (2.1)$$

где  $V$  — объем вселенной или некоторой ее части (напомним, что за основу принимается однородная изотропная модель вселенной),  $b_k$  — барионный заряд  $k$ -ой частицы. Для всех барионов  $b_k = 1$ , а для всех антибарионов  $b_k = -1$ . Суммирование подразумевается по всем барионам и антибарионам.

2. Разность чисел лептонов и антилептонов во вселенной является постоянным числом (закон сохранения лептонов). Для разности чисел лептонов и антилептонов из (1.4) имеем

$$n_l = VT^3 \sum_k l_k \psi'_k, \quad (2.2)$$

где  $l_k$  — лептонный заряд  $k$ -ой частицы. Для всех лептонов значение  $l_k$  равняется плюс единице, а для всех антилептонов — минус единице.

3. Электрический заряд вселенной (а также ее отдельных областей) равняется нулю (закон сохранения заряда). Это условие можно записать в виде

$$e = VT^3 \left( \sum_k e_k f'_k + \sum_k e_k \psi'_k + \sum_k e_k \varphi'_k \right) = 0, \quad (2.3)$$

где  $e_k$  — заряд  $k$ -ой частицы. Для барионов, лептонов и бозонов  $e_k$  может иметь значения  $-1, 0, +1$ . Заряды частицы и соответствующей античастицы имеют противоположные знаки  $\bar{e}_k = -e_k$ .

4. В данный момент времени, когда объем  $V$  (или, в случае однородной изотропной модели, радиус кривизны пространства) можно считать заданным, перераспределение энергии по своим возможным разновидностям (не считая энергии гравитационного поля) происходит с сохранением собственной энергии материи. Под собственной энергией подразумевается энергия материи (без гравитационного поля), измеренная в собственной системе отсчета.

Нужно иметь в виду, что сохранение собственной энергии имеет место лишь для заданного объема (заданного времени) вселенной. С течением времени радиус кривизны пространства изменяется, вследствие чего собственная энергия материи уже не сохраняется. Однако, в этом случае остается постоянной сумма энергий материи и гравитационного поля.

Учитывая (1.5), для собственной энергии системы получаем

$$E = VT^3 \left[ \sum_k (3f_k - z_k \dot{f}_k) + \sum_k (3\psi_k - z_k \dot{\psi}_k) + \sum_k (3\varphi_k - z_k \dot{\varphi}_k) \right]. \quad (2.4)$$

Последний закон, который мы хотим теперь сформулировать, касается поведения энтропии.

5. Мы считаем, что состояние материи во вселенной близко к равновесному, поэтому полная энтропия системы должна иметь максимальное значение. Согласно (1.3) энтропия системы равна

$$S = V \left\{ \sum_k (4T^3 f_k - T^2 \mu_k f'_k - T^3 z_k \dot{f}_k) + \sum_k (4T^3 \psi_k - T^2 \mu_k \psi'_k - T^3 z_k \dot{\psi}_k) + \sum_k (4T^3 \varphi_k - T^2 \mu_k \varphi'_k - T^3 z_k \dot{\varphi}_k) \right\}. \quad (2.5)$$

Итак, нам предстоит определить относительный максимум функции (2.5) при дополнительных условиях (2.1) — (2.4). Как известно, в этом случае задача сводится к нахождению экстремума следующей функции

$$\begin{aligned} \Phi = V \left\{ \sum_k (4T^3 f_k - T^2 \mu_k f'_k - T^3 z_k \dot{f}_k) + \sum_l (4T^3 \psi_l - T^2 \mu_l \psi'_l - T^3 z_l \dot{\psi}_l) + \right. \\ \left. \sum_j (4T^3 \varphi_j - T^2 \mu_j \varphi'_j - T^3 z_j \dot{\varphi}_j) + \lambda_1 T^3 \sum_k b_k f'_k + \lambda_2 T^3 \sum_l l_l \psi'_l + \right. \\ \left. + \lambda_3 T^3 \left( \sum_k e_k f'_k + \sum_l e_l \psi'_l + \sum_j e_j \varphi'_j \right) + \lambda_4 T^4 \left[ \sum_k (3f_k - z_k \dot{f}_k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_l (3\psi_l - z_l \dot{\psi}_l) + \sum_j (3\varphi_j - z_j \dot{\varphi}_j) \right] \right\}, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  — неопределенные множители Лагранжа. Эти постоянные могут зависеть от тех значений концентраций частиц и температуры, которые присущи состоянию термодинамического равновесия. При этом нужно иметь в виду, что для заданного равновесного состояния концентрация частиц и температура являются вполне определенными величинами.

Объем пространства мы считаем фиксированным, поэтому переменными, по которым нужно варьировать функцию  $\Phi$ , являются концентрация частиц  $N_k$ , концентрация античастиц  $\bar{N}_k$  и, может быть, еще температура  $T$ .

## § 3. Условия термодинамического равновесия

Для нахождения условного максимума энтропии мы должны приравнять нулю частные производные функции  $\Phi$  по концентрациям частиц  $N_k$ . При вычислении производных нужно иметь в виду, что химический потенциал  $\mu_k$ , помимо постоянных (масса, спин), характеризующих данный вид частиц, зависит также от  $N_k$  и температуры. Итак, дифференцируя (2.6) по  $N_k$  при постоянном объеме, температуре и концентрации остальных частиц, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_k} = VT \frac{\partial \mu_k}{\partial N_k} \left\{ T(1 + \lambda_4 T)(3f'_k - z_k f'_k) + [-\mu_k + T(\lambda_1 b_k + \lambda_3 e_k)] f'_k \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_l} = VT \frac{\partial \mu_l}{\partial N_l} \left\{ T(1 + T\lambda_4)(3\psi'_l - z_l \psi'_l) + [-\mu_l + T(\lambda_2 l_l + \lambda_3 e_l)] \psi'_l \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_j} = VT \frac{\partial \mu_j}{\partial N_j} \left\{ T(1 + T\lambda_4)(3\varphi'_j - z_j \varphi'_j) + (-\mu_j + \lambda_3 e_j) \varphi'_j \right\} = 0,$$

соответственно для барнонов, лептонов и бозонов. Эти уравнения должны удовлетворяться тождественно при любых  $T$  и  $N_k$ , а это будет иметь место, если

$$\begin{aligned} \mu_k - T(\lambda_1 b_k + \lambda_3 e_k) &= 0, \\ \mu_l - T(\lambda_2 l_l + \lambda_3 e_l) &= 0, \\ \mu_j + \lambda_3 e_j T &= 0, \\ 1 + \lambda_4 T &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти уравнения вместе с (2.1)–(2.4) определяют множители  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  и все необходимые условия термодинамического равновесия между различными компонентами в заданной точке пространства.

Имея в виду, что барнонный, лептонный и электрический заряды для частиц и античастиц имеют противоположные знаки  $\bar{b}_k = -b_k$ ,  $\bar{l}_k = -l_k$ ,  $\bar{e}_k = -e_k$ , из первых трех уравнений (3.1) получаем

$$\bar{\mu}_k = -\mu_k. \tag{3.2}$$

Таким образом, при статистическом равновесии химические потенциалы частиц и античастиц равны друг другу с обратным знаком. Это положение давно известно в статистической физике. Соотношение (3.2) непосредственно следует из условия термодинамического равновесия в отношении реакции аннигиляции пары  $\gamma$ -кванты и обратной реакции рождения пары  $\gamma$ -квантом, если иметь в виду, что химический потенциал последнего равняется нулю ( $\mu_\gamma = 0$ ).

Исключив из (3.1) постоянные  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  получим следующую систему уравнений

$$\mu_k = \mu_n \quad (3.3)$$

для нейтральных барионов (т. е. для  $\Lambda$ ,  $\Sigma^0$  и  $\Xi^0$  — гиперонов),

$$\mu_k + \mu_e = \mu_p + \mu_\nu \quad (3.4)$$

для положительно заряженных барионов (для протонов,  $\Sigma^+$  — гиперонов),

$$\mu_k + \mu_\nu = \mu_p + \mu_e \quad (3.5)$$

для отрицательно заряженных барионов (например, для  $\Sigma^-$  и  $\Xi^-$  — гиперонов),

$$\mu_k = \mu_e \quad (3.6)$$

для лептонов и, наконец,

$$\mu_k = \mu_j = 0 \quad \text{и} \quad \mu_k = \mu_{e^-} = \mu_e - \mu_\nu \quad (3.7)$$

соответственно для нейтральных и отрицательно заряженных бозонов. В написанных соотношениях индексы  $n$ ,  $e$  и  $\mu$  соответственно означают нейтрон, электрон и  $\mu^-$  — мезон. Если бы мы имели несколько различных видов лептонов, то взамен (3.6) должны были написать  $\mu_k = \mu_e$  для нейтральных и  $\mu_k = \mu_e - \mu_\nu$  для отрицательно заряженных лептонов.

Соотношения (3.2) — (3.7) выражают условия статистического равновесия между различными компонентами вещества. Эти формулы можно было получить и из требования термодинамического равновесия между прямыми и обратными реакциями взаимного превращения компонентов вещества друг в друга. Однако, этот способ не лучше рассмотренного нами, так как для него требуется знание конкретного вида частиц, имеющих в рассматриваемых физических условиях, а также знание возможных элементарных реакций взаимного превращения частиц. При получении же соотношений (3.2) — (3.7) требовался лишь факт наличия элементарных частиц, и больше ничего. Из физических соображений очевидно, что полученные соотношения являются не только необходимыми, но и достаточными условиями максимума (именно максимума, а не экстремума вообще) энтропии.

Соотношения между химическими потенциалами (3.2) — (3.7) вместе с уравнениями (2.1) — (2.4) полностью определяют концентрацию всех частиц и античастиц при термодинамическом равновесии. При этом нужно иметь в виду, что для каждой частицы имеется свое пороговое значение плотности материи [7]. Лишь при плотностях выше пороговой, соответствующая частица будет присутствовать в среде. Соответственно с этим уравнения (3.2) — (3.7) и (2.1) — (2.4) при плотностях материи ниже пороговой, для данной частицы дадут физически нелепый результат.

Теперь выясним вопрос о независимых параметрах, знание которых необходимо и достаточно для адекватного описания состояния замкнутой системы.

Химический потенциал данной частицы является функцией температуры и концентрации этой частицы. Учитывая это обстоятельство, мы легко можем выяснить число независимых переменных, описывающих состояние системы. Так, из (3.2) следует, что при заданном  $T$  концентрация античастицы однозначно определяется концентрацией соответствующей частицы. Далее, из (3.3) — (3.7) следует, что концентрации всех барионов, обладающих одинаковым электрическим зарядом, определяются концентрацией одного из них. Согласно (3.6) и (3.7) то же самое можно утверждать в отношении лептонов, а также бозонов. Согласно (3.7), плотность нейтральных бозонов определяется температурой, а плотность отрицательных бозонов — температурой и концентрацией лептонов. Наконец, следует учесть соотношения (3.4) и (3.5), из которых следует, что между тремя концентрациями положительных и нейтральных бозонов существуют две связи. Что же касается нейтральных и отрицательных лептонов, то между ними нет другой связи, кроме второго уравнения (3.7), которое мы уже учли.

Резюмируя вышесказанное, мы приходим к заключению, что условия термодинамического равновесия (3.2) — (3.7) позволяют выразить концентрации всех частиц через температуру среды и концентрации трех из них. В качестве последних удобно брать концентрации нейтронов, электронов и нейтрино. К этим параметрам следует добавить объем пространства. Таким образом, в нашем распоряжении остаются пять независимых параметров. Однако, на самом деле не все эти параметры являются независимыми. Между ними имеются четыре связи. Эти связи нам дают законы сохранения полной энергии (включая энергию гравитационного поля), электрического заряда, барионного заряда (числа барионов) и лептонного заряда (числа лептонов) вселенной. Итак, в конечном счете остается одна независимая переменная, а именно, объем пространства. Таким образом, знание одного лишь объема или радиуса кривизны (в случае однородной изотропной модели) вполне достаточно для исчерпывающего описания состояния материи во вселенной, если она в каждый данный момент находится в состоянии термодинамического равновесия. Последнее предположение эквивалентно допущению, что изменение состояния материи происходит адиабатическим и обратимым образом.

Таким образом, электрический, барионный и лептонный заряды, а также масса являются теми основными параметрами, которыми характеризуется вселенная со всеми своими свойствами. Состояние же ее в отдельные моменты времени полностью определяется объемом. Уилером было высказано сомнение относительно строгого соблюдения закона сохранения числа барионов. Разумеется, нарушение этого закона неизбежно влечет за собою и нарушение закона сохранения числа лептонов. Не исключена возможность, что именно при чрезмерно больших плотностях материи, когда трудно представить индивидуальное существование отдельных элементарных частиц, произойдет такое нарушение этих законов. Однако, в настоящее время мы не имеем никакого экспериментального и теоретического основания для того, чтобы поверить такому утверждению.

Из статистической физики известно, что химический потенциал бозонов  $\mu_k - m_k c^2$  обязательно должен быть отрицательным [8]. Сопоставление этого факта с (3.2) дает

$$\begin{aligned} -m_k c^2 < \mu_k < m_k c^2, \\ -m_k c^2 < \tilde{\mu}_k < m_k c^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\mu_k$  — химический потенциал заряженных бозонов. Таким образом, химический потенциал бозонов в данном случае может иметь значения, находящиеся лишь в интервале  $(-m_k c^2, m_k c^2)$ .

Функция (2.6) была дифференцирована по всем переменным за исключением температуры. Можно показать, что варьирование по  $T$  не даст ничего нового. Частная производная  $\Phi$  по  $T$  тождественно равняется нулю, если учесть соотношения (3.1). Причина этого состоит в том, что число нейтральных бозонов и температура являются эквивалентными переменными — задание одной из этих переменных однозначно определяет другую.

#### § 4. Концентрации частиц

В предыдущем параграфе мы видели, что при термодинамическом равновесии состояние материи во вселенной можно считать известным, если задан объем пространства. Это значит, что состав материи и концентрации ее компонентов однозначно определяются одним лишь объемом. При этом предполагается, что число барионов, число лептонов и масса во вселенной являются известными постоянными числами. Однако, когда мы пытаемся определить значения концентраций различных частиц при больших плотностях, наталкиваемся на определенные трудности. Эти трудности обусловлены тем, что в настоящее время не имеется достоверных данных о числах барионов, лептонов и величине массы во вселенной. По-видимому современные астрономические данные о распределении веществ во вселенной позволяют приблизительно оценить число барионов и полную массу вселенной. Однако, положение с лептонами труднее. Для определения числа лептонов необходимо знать не только число электронов, но и число нейтрино и антинейтрино (число других, известных нам, лептонов в настоящее время во вселенной мало). Эту задачу можно считать совсем нерешенной. Имеются лишь оценки общей плотности энергии, связанной с нейтрино и антинейтрино [9, 10]. Ниже мы попытаемся обсудить некоторые возможности, которые может быть и не реализуются в природе.

Пусть температура среды настолько высока, что нейтринный и электронный газы вырождены и, кроме того, средняя тепловая энергия частиц больше собственной энергии электронов

$$\chi T > (3\pi^2)^{1/3} \cdot c \cdot h \cdot N_k^{1/3} > m_e c^2,$$

где  $N_k$  — плотность этих частиц. Тогда в среде будет присутствовать большое число электронных и нейтринных пар, так что числа частиц

и античастиц мало отличаются друг от друга ( $\tilde{N}_k \approx N_k$ ,  $k = e, \nu$ ). Из условия приближенного равенства чисел частиц и античастиц следует, что  $\tilde{\mu}_k \approx \mu_k$  ( $k = e, \nu$ ), откуда, учитывая формулу (3.2), получаем

$$\tilde{\mu}_k \approx \mu_k \approx 0; \quad k = e, \nu. \quad (4.1)$$

(4.1) означает, что числа электронов и нейтрино, а также их античастиц определяются лишь температурой. Для концентрации частиц находим (см. [8], стр. 335)

$$\tilde{N}_k \approx N_k \approx 0,183 \left( \frac{\chi T}{ch} \right)^3, \quad k = e, \nu. \quad (4.2)$$

Из (3.6) и (4.1) следует, что  $\tilde{\mu}_\mu \approx \mu_\mu = 0$ . Следовательно, концентрации положительных и отрицательных  $\mu$ -мезонов также определяются одной лишь температурой. Но для них зависимость от температуры не будет иметь такой простой вид, как в (4.2), если, конечно,  $\chi T$  не выше  $m_\mu c^2$ . То же самое утверждение относится также ко всем бозонам, поскольку в силу соотношения (4.1) химический потенциал  $\pi^-$ -мезонов равняется нулю.

Условия термодинамического равновесия между барионами для обсуждаемого случая ( $\mu_e = \mu_\nu = 0$ ) принимают весьма простой вид

$$\mu_k = \mu_n. \quad (4.3)$$

Таким образом, в рассмотренном варианте, число всех барионов определяется температурой и числом нейтронов. При плотностях материи, когда средние импульсы частиц порядка  $m_k c$ , концентрации всех барионов мало отличаются друг от друга.

Кратко обсудим другую возможность, которая может иметь место в мире. Может оказаться, что по мере сжатия вселенной, при достаточно высоких плотностях, температура среды окажется ниже температуры вырождения всех частиц

$$\chi T \ll (3\pi^2)^{1/3} \cdot ch N_k^{1/3}. \quad (4.4)$$

Это значит, что вся энергия гравитационного поля, выделенная при сжатии вселенной, и энергия электромагнитного излучения израсходуются на образование гиперонов и последующее заполнение уровней вырожденного газа элементарных частиц. Число античастиц в этом случае достаточно мало по сравнению с числом частиц.

Допустим, что для элементарных частиц верна модель Сакаги [11]. По этой модели основными (элементарными) частицами в группе барионов являются протон, нейтрон и  $\Lambda$ -гиперон, а остальные барионы,  $K$  и  $\pi$ -мезоны—вторичные образования от них. Тогда при достаточно больших плотностях энергии, сложные частицы распадутся и вещество будет состоять из смеси газов нейтронов, протонов,  $\Lambda$ -ги-

перонов, электронов,  $\mu^-$ -мезонов и нейтрино. По-видимому, такой „химический“ состав установится при  $p_k > m_k c$ , где  $p_k$  — граничный импульс Ферми. В этом случае уравнения (2.1)–(2.3) и (3.3)–(3.6) можно переписать в виде

$$p_A \approx p_n \approx p_p + p_e - p_\nu, \quad (4.5)$$

$$p_\mu \approx p_e, \quad (4.6)$$

$$p_p^3 = p_n^3 + p_e^3, \quad (4.7)$$

$$p_n^3 + p_p^3 + p_A^3 = 3\pi^2 h^3 N_b, \quad (4.8)$$

$$p_n^3 + p_p^3 + p_e^3 = 3\pi^2 h^3 N_l. \quad (4.9)$$

Из (4.6), (4.7) и (4.5) следует, что  $N_n \approx N_l \approx 0,5 N_p$ , а  $N_A \approx N_n$ . Поэтому, взамен (4.5)–(4.9) мы получаем

$$N_n^{1/3} = 2,26 N_e^{1/3} - N_\nu^{1/3},$$

$$N_n + N_e \approx 0,5 N_b, \quad (4.10)$$

$$2N_e + N_\nu \approx N_l.$$

Эти уравнения позволяют определить концентрации всех частиц как функции от плотностей лептонов  $N_l$  и  $N_b$ .

Наконец, мыслима и такая возможность, при которой количества материи и антиматерии во вселенной равны. Тогда в наисжатом состоянии мира эти разновидности материи не будут пространственно разделены. Вследствие непосредственного контакта и сильного взаимодействия, между ними быстро устанавливается статистическое равновесие. В этом случае  $\tilde{N}_k = N_k$  и, следовательно,

$$\tilde{\mu}_k = \mu_k = 0.$$

Отсюда следует, что число всех частиц определяется одной лишь температурой, причем для релятивистских компонент газа имеет место формула (4.2).

*Выводы.* Резюмируя вышесказанное, мы приходим к следующему заключению.

Если предположить, что распределение материи во вселенной является однородным и изотропным, то физические свойства ее характеризуются четырьмя основными параметрами: электрическим, лептонным и барионным зарядами, а также полной энергией вещества и гравитационного поля (масса вселенной). Эти параметры со временем не изменяются. Поэтому, если величины их известны (относительно электрического заряда мы знаем, что он равняется нулю), то состояние материи в мире определяется одним лишь объемом или радиусом кривизны пространства.

Строго говоря, сделанное утверждение относится не только к сверхплотному состоянию материи, но и к другим (разреженным) состояниям, которые не обсуждаются в работе.

Следует оговориться, что наши утверждения справедливы, если только состояние материи в любой момент достаточно близко к термодинами-

чески равновесному. Следовательно, делается предположение об адиабатичности ( $ds = 0$ ) изменения состояния вселенной.

В заключение автор выражает благодарность академику В. А. Амбарцумяну, И. И. Гольдману и А. Ц. Аматауни за интерес, проявленный к работе.

Ереванский Государственный  
университет

Поступила 29 XI 1961

#### Գ. Ս. Մահակյան

### ՄԱՏԵՐԻԱՅԻ ԳԵՐԻՒՑ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ ՏԻԵԶԵՐՔՈՒՄ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ըստ ժամանակակից կոսմոլոգիական մոդելների տիեզերքի վիճակը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է (փակ և բաց մոդելներ): Ենթադրվում է, որ անցյալում, ինչ-որ ժամանակ, տիեզերքի կորուսված շառավիղը եղել է շատ փոքր և հետևաբար նյութի խտությունը չափազանց մեծ: Չի բացառվում այդ գերխիտ վիճակի կրկնությունը հետագայում (փակ մոդել):

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է նյութի այդ գերխիտ վիճակը տիեզերքում: Ելնելով էլեկտրական, բարիոնային և լեպտոնային լիցքերի պահպանության, էներգիայի պահպանության և էներգիայի մաքսիմալիզացիայի (ենթադրվում է, որ լուրջ քանակությամբ տրված մոմենտում նյութի վիճակը տիեզերքում քիչ է տարբերվում թերմոդինամիկ հավասարակշռ վիճակից) սկզբունքներից, դուրս են բերված այն անհրաժեշտ հավասարումները, որոնցով որոշվում է նյութի «քիմիական» բաղադրությունը: Այդ հավասարումները որոշում են էներգիայի բաշխումը ըստ իր զանազան տարածությունների և էլեմենտար մասնիկների կոնցենտրացիաները ստատիստիկական հավասարակշռության վիճակում:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Tolman R. C. Relativity thermodynamics and cosmology. Глава X, Oxford, 1949.
2. Зельманов А. Л. К релятивистской теории акизотропной неоднородной вселенной. Труды VI совещания по вопросам космологии, изд. АН СССР, М., 1959.
3. Зельманов А. Л. К вопросу о деформации сопутствующего пространства и теория тяготения Эйнштейна на ДАН СССР, 135, 1367, 1960.
4. Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Об особенностях космологических решений уравнения гравитации I. ЖЭТФ, 39, 149, 1960.
5. Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Об особенностях космологических решений уравнений гравитации II. ЖЭТФ, 39, 800, 1960.
6. Лифшиц Е. М., Судаков В. В., Халатников И. М. Об особенностях космологических решений уравнения гравитации III. ЖЭТФ, 40, 1847, 1961.
7. Амбарцумян В. А. и Саакян Г. С. О вырожденном сверхплотном газе элементарных частиц. Астрон. ж., 37, 193, 1960.
8. Лондау Л. и Лифшиц Е. Статистическая физика. ГИТТЛ, М., 1951.
9. Зельдович Я. Б. и Смородинский Я. А. О верхнем пределе плотности нейтрино, гравитонов и баронов во вселенной. ЖЭТФ, 41, 907, 1961.
10. Понтекорво Б. и Смородинский Я. Нейтрино и плотность материи во вселенной. ЖЭТФ, 41, 239, 1961.
11. Sakata S. Об одной составной модели для новых частиц. Progress. theor. Phys., 16, 686, 1956.