Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 4, 2024, стр. 41 – 57.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДУАЛЬНЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ СВЕРХТОЖДЕСТВ В ДЕЛИМЫХ АЛГЕБРАХ

Ю. М. МОВСИСЯН, С. С. ДАВИДОВ

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *movsisyan@ysu.am; davidov@ysu.am*

Аннотация. В работе дана классификация нетривиальных дуальных сверхтождеств левой и правой дистрибутивности выполняющихся в функционально-нетривиальных делимых алгебрах. Если в функционально-нетривиальной делимой алгебре выполняются нетривиальные дуальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, тогда сврхтождество левой дистрибутивности будет ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

а сверхтождество правой дистрибутивности – сверхтождество ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

О классификации нетривиальных сверхтождеств левой и правой дистрибутивности выполняющихся в функционально-нетривиальных q-алгебрах см. [1]-[4]

MSC2020 number: 20N05.

Ключевые слова: квазигруппа; обратимая алгебра; делимая алгебра; d-алгебра; формула второго порядка (ступени); сверхтождество.

1. Введение

Сверхтождеством [1]-[4] называется формула 2-ой ступени [5] со специализированными кванторами:

$$\forall X_1 ... \forall X_k \forall x_1 ... \forall x_n (w_1 = w_2),$$

где $X_1, ..., X_k$ – все функциональные переменные, а $x_1, ..., x_n$ – все предметные переменные в словах w_1, w_2. Число k называется рангом сверхтождества. Однако, сверхтождество (как и обычное тождество) для простоты записывается без кванторной приставки, понимая его выполнимость в алгебре $(Q; \Sigma)$, как выполнимость соответствующей формулы 2-ой ступени со специализированными

[1]Исследование первого автора частично финансировано коммитетом по науке Республики Армения, гранты: 10-3/1-41, 21T-1A213.

кванторами $\forall X_1, ..., \forall X_k$. Специализация здесь заключается в том, что каждая функциональная переменная X_i принимает любое значение из Σ соответствующей арности.

Сверхтождество $w_1 = w_2$ называется нетривиальным, если в нем участвуют хотя бы две различные функциональные переменные, т.е. когда ранг сверхтождества больше 1. Тривиальными называются сверхтождества ранга 1.

Множество всех предметных (функциональных) переменных слова w обозначим через $[w]$ (соответственно, через $]w[$). Функциональная переменная X называется сингулярной в сверхтовдестве, если в нем встречается всего один раз и справедливо хотя бы одно из следующих условий [1]:

1) в подслове $w = X(w_1, w_2)$ существуют предметные переменные $x \in [w_1]$ и $y \in [w_2]$ такие, что каждая из них в подслове w встречается лишь один раз;

2) подслово $w = X(w_1, w_2)$ имеет вид $X(w_1, x)$ или $X(x, w_2)$ и существует предметная переменная $y \in [w]$, отличная от x и встречающаяся в подслове w всего один раз.

Алгебра с бинарными операциями называется бинарной алгеброй. Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется функционально-нетривиальной, если $|\Sigma| > 1$.

Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется:

1) дистрибутивной, если она удовлетворяет следующим сверхтождествам дистрибутивности:

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)), \qquad X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z));$$

2) идемпотентной, если она удовлетворяет сверхтождеству идемпотентности:

$$X(x, x) = x;$$

3) коммутативной, если она удовлетворяет сверхтождеству коммутативности:

$$X(x, y) = X(y, x);$$

4) сверхассоциативной, если она удовлетворяет следующему сверхтождеству ассоциативности:

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), z)).$$

Пусть$a \in Q$, $X \in \Sigma$, определим следующие отображения: $L_{a,X}(x) = X(a, x)$, $R_{a,X}(x) = X(x, a)$ для всех $x \in Q$. Скажем, что $(Q; \Sigma)$ лево (право)- сократимая (делимая, обратимая) алгебра, если отображения $L_{a,X}$ $(R_{a,X})$ - инъекции (сюръекции, биекции) для всех $X \in \Sigma$ и $a \in Q$. Алгебра называется сократимой (делимой, обратимой), если она лево - и право-сократимая (делимая, обратимая) алгебра.

Алгебра $(Q;\Sigma)$ называется лево-регулярной, если из равенства $X(c,a) = X(c,b)$, где $a,b,c \in Q$, $X \in \Sigma$, следует равенство $X(x,a) = X(x,b)$ для любого $x \in Q$. Двойственным образом определяется право регулярная алгебра: из равенства $X(a,c) = X(b,c)$, где $a,b,c \in Q$, $X \in \Sigma$, следует равенство $X(a,x) = X(b,x)$ для любого $x \in Q$. Алгебра называется регулярной, если она одновременно лево - и право-регулярна.

Алгебра $(Q;\Sigma)$ называется лево-точной (или точной слева), если из равенства $R_{a,X} = R_{b,X}$, где $a,b \in Q$, $X \in \Sigma$, следует, что $a = b$, т.е. из равенств $X(x,a) = X(x,b)$ для всех $x \in Q$ следует, что $a = b$. Двойственным образом определяется право-точная алгебра: из равенства $L_{a,X} = L_{b,X}$, где $a,b \in Q$, $X \in \Sigma$, следует, что $a = b$. Алгебра называется точной, если она одновременно лево - и право-точная.

Очевидно, что алгебра лево (право) - сократима тогда и только тогда, когда она лево (право) - точна и лево (право) - регулярна. Легко видеть, сто справедлива

Лемма 1.1. (i) *Класс лево (право) - точных алгебр замкнут относительно декартовых произведений;*

(ii) *Класс лево (право) - регулярных алгебр замкнут относительно декартовых произведений.*

Пусть $(Q;\Sigma)$ – бинарная алгебра. Непустое подмножество $I \subseteq Q$ называется правым (левым) идеалом алгебры $(Q;\Sigma)$, если для любой операции $A \in \Sigma$ и для любых $x \in Q$, $a \in I$ справедливы включения: $A(a,x) \in I$ $(A(x,a) \in I)$. Двусторонним идеалом или просто идеалом называется подмножество $I \subseteq Q$, являющееся и левым, и правым идеалом.

Пусть $(Q;\Sigma)$ бинарная алгебра. Введем следующиеие обозначения:

$Id(Q) = \{x \in Q | \forall X \in \Sigma, X(x,x) = x\},)$ $\qquad Id^{\exists}(Q) = \{x \in Q | \exists X \in \Sigma, X(x,x) = x\}.$

Предложение 1.1. *Пусть $(Q;\Sigma)$ – дистрибутивная алгебра. Тогда:*

(1) Если $Id(Q)$ не пусто, то $Id(Q)$ является идеалом алгебры $(Q;\Sigma)$;

(2) $Id^{\exists}(Q) \neq \emptyset$ и является идеалом алгебры $(Q;\Sigma)$;

(3) $X(x, Y(y,z)), X(Y(x,y),z) \in Id^{\exists}(Q)$ *для всех* $X, Y \in \Sigma$, $x, y, z \in Q$.

Доказательство. (1) Пусть $x \in Id(Q)$ и $a \in Q$, тогда для любых операций $X, Y \in \Sigma$ имеем:

$$X(a,x) = X(a, Y(x,x)) = Y(X(a,x), X(a,x)),$$

т.е. $X(a,x) \in Id(Q)$.

(2) Для любого $X \in \Sigma$ и для любого $x \in Q$ имеем $X(x, X(x,x)), X(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$, поскольку

$$X(x, X(x,x)) = X(X(x,x), X(x,x)) = X(X(x, X(x,x)), X(x, X(x,x)).$$

следовательно, $Id^{\exists}Q$ не пусто. Аналогично устанавливается, что $X(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$.

Для произвольных элементов $x \in Id^{\exists}Q$ и $a \in Q$ покажем, что $X(a,x), X(x,a) \in Id^{\exists}Q$ для всех операций $X \in \Sigma$. Поскольку $x \in Id^{\exists}Q$ то существует операция $Y \in \Sigma$ такая, что $Y(x,x) = x$ и, следовательно,

$$Y(X(a,x), X(a,x)) = X(a, Y(x,x)) = X(a,x).$$

Точно также показывается, что $X(x,a) \in Id^{\exists}Q$. Таким образом, $Id^{\exists}Q$ – идеал алгебры $(Q;\Sigma)$.

(3) В начале покажем, что $Y(x, X(x,x)), Y(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$ для всех $X, Y \in \Sigma$ и любого $x \in Q$.

$$\begin{aligned} Y(x, X(x,x)) &= X(Y(x,x), X(x,x)) = Y(X(x, Y(x,x)), X(x, Y(x,x))) \\ &= X(Y(X(x, Y(x,x)), x), Y(X(x, Y(x,x)), Y(x,x))) = \\ &= X(X(Y(x,x), Y(Y(x,x),x)), Y(X(x, Y(x,x)), Y(x,x))), \end{aligned}$$

учитывая, что $Y(Y(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$ и $Id^{\exists}Q$ идеал, получим включение $Y(x, X(x,x)) \in Id^{\exists}Q$. Аналогично доказывается, что $Y(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$.

Теперь покажем, что $X(x, Y(y,z)) \in Id^{\exists}(Q)$ для всех $X, Y \in \Sigma$, $x, y, z \in Q$. Действительно,

$$\begin{aligned} Y(x, X(y,z)) &= X(Y(x,y), Y(x,z)) = Y(X(Y(x,y),x), X(Y(x,y),z)) = \\ &= Y(Y(X(x,x), X(y,x)), X(Y(x,y),z)) = \\ &= Y(X(Y(X(x,x),y), Y(X(x,x),x)), X(Y(x,y),z)), \end{aligned}$$

и учитывая, что $Y(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$, получим включение $Y(x,X(y,z)) \in Id^{\exists}Q$. Аналогично доказывается, что $Y(X(x,y),z) \in Id^{\exists}Q$ для любых $X,Y \in \Sigma$ и $x,y,z \in Q$. $\square$

Поскольку делимый группоид не имеет собственных идеалов, то получаем следующее следствие.

Следствие 1.1. *Дистрибутивный делимый группоид – идемпотентен.*

Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$ называется d-алгеброй, если в Σ существует делимая операция, т. е. $Q(A)$ делимый группоид для некоторого $A \in \Sigma$.

Лемма 1.2. *Пусть $(Q;\Sigma)$ – d-алгебра, тогда $(Q;\Sigma)$ не имеет собственных левых и правых идеалов.*

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma$ – делимая операция и I – идеал алгебры $(Q;\Sigma)$. Пусть $a \in Q$ и $x \in I$, так как A – делимая операция, то существует $y \in Q$ такой, что $a = A(x,y)$. Так как I – идеал, то $a \in I$, т.е. $I = Q$. $\square$

2. Вспомогательные результаты

Определим некоторые вспомогательные множества и отношения. Пусть $x \in Q$, $X \in \Sigma$, тогда

$$(u,v) \in \sigma_x^X \quad \longleftrightarrow \quad L_{x,X}(u) = L_{x,X}(v) \quad \longleftrightarrow \quad X(x,u) = X(x,v),$$

где $u,v \in Q$. Аналогично,

$$(u,v) \in \tau_x^X \quad \longleftrightarrow \quad R_{x,X}(u) = R_{x,X}(v) \quad \longleftrightarrow \quad X(u,x) = X(v,x),$$

где $u,v \in Q$.

Очевидно, что $\sigma_x^X \neq 1$ ($\tau_x^X \neq 1$) тогда и только тогда, когда $L_{x,X}$ ($R_{x,X}$) не является инъекцией. Введем следующие обозначения:

$$I^X(u,v) = \{x | (u,v) \in \tau_x^X\} = \{x | R_{x,X}(u) = R_{x,X}(v)\} = \{x | X(u,x) = X(v,x)\},$$

$$K^X(u,v) = \{x | (u,v) \in \sigma_x^X\} = \{x | L_{x,X}(u) = L_{x,X}(v)\} = \{x | X(x,u) = X(x,v)\}.$$

Пусть $\eta^X = \bigcap_{x \in Q} \tau_x^X$ и $\rho^X = \bigcap_{x \in Q} \sigma_x^X$. Далее,

$$(u,v) \in \alpha^X \longleftrightarrow u = X(v,u), \quad \mu^X = s(\alpha^X), \quad \lambda^X = t(\mu^X),$$

где $s(\alpha^X)$ симметричное замыкание отношения α^X, а $t(\mu^X)$ – дистрибутивное замыкание отношения μ^X. Аналогично,

$$(u,v) \in \beta^X \longleftrightarrow u = X(u,v), \quad \nu^X = s(\beta^X), \quad \chi^X = t(\nu^X).$$

Лемма 1.3. *Пусть $(Q;\Sigma)$ дистрибутивная алгебра, $a,b,y \in Q$, $X \in \Sigma$ и $x \in I^X(a,b) \cap K^X(a,b)$. Тогда $X(x,y) \in I^X(a,b)$ и $X(y,x) \in K^X(a,b)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&X(a,X(x,y)) = X(X(a,x),X(a,y)) = X(X(b,x),X(a,y))\\
&= X(X(b,X(a,y)),X(x,X(a,y))) = X(X(b,X(a,y)),X(X(x,a),X(x,y)))\\
&= X(X(b,X(a,y)),X(X(x,b),X(x,y))) = X(X(X(b,a),X(b,y)),X(x,X(b,y)))\\
&= X(X(X(b,a),x),X(b,y)) = X(X(X(b,x),X(a,x)),X(b,y))\\
&= X(X(X(b,x),X(b,x)),X(b,y)) = X(X(X(b,x),X(b,y)),X(X(b,x),X(b,y)))\\
&= X(X(b,X(x,y)),X(b,X(x,y))) = X(b,X(x,y)).
\end{aligned}$$

Последнее равенство получено согласно предложению 1.1. Таким образом, $X(x,y) \in I^X(a,b)$. Второе включение доказывается аналогично. □

В леммах 1.4-1.11 будем предполагать, что $(Q;\Sigma)$ подпрямо-неразложимая дистрибутивная идемпотентная алгебра. Пусть π – ее наименьшая нетривиальная конгруэнзия и $(a,b) \in \pi$, где $a \neq b$.

Лемма 1.4. *Если $L_{a,X}$ – инъекция, то $\nu^X = \chi^X = 1$.*

Доказательство. Допустим $\chi^X \neq 1$, тогда $\pi \subseteq \chi^X$ и следовательно $(a,b) \in \chi^X$. Таким образом существует последовательность элементов $a_1, a_2, ..., a_n \in Q$ таких, что

$$(a,a_1) \in \nu^X, (a_1,a_2) \in \nu^X, \cdots, (a_n,b) \in \nu^X.$$

Поэтому $a = X(a,a_1) = X(a,a)$, и так как $L_{a,X}$ инъекция, то $a = a_1$. Продолжая таким образом получим $a = b$, противоречие. Таким образом $\nu^X = 1$ и следовательно $\chi^X = 1$. □

Лемма 1.5. *Если $R_{b,X}$ – инъекция, то $\mu^X = \lambda^X = 1$.*

Доказательство. Двойственно лемме 1.4. □

Лемма 1.6. *Для любых $x, y \in Q$ и любого $X \in \Sigma$ множество $I^X(x, y)$ пусто или явлвется левым идеалом группоида $(Q; X)$.*

Доказательство. Пусть $z \in I^X(x, y)$, где $x, y \in Q$. Поэтому имеем $X(x, z) = X(y, z)$. Тогда

$$\begin{aligned} X(x, X(x, z)) &= X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)) = X(X(x, y), X(y, z)) \\ &= X(X(x, X(y, z)), X(y, X(y, z))) = X(X(x, X(x, z)), X(y, X(y, z))), \end{aligned}$$

таким образом:

$$(X(x, X(x, z)), X(y, X(y, z)) \in \rho^X.$$

Аналогично получим, что

$$(X(y, X(y, z)), X(x, X(x, z)) \in \rho^X.$$

Следовательно, $(X(y, X(y, z)), X(x, X(x, z))) \in \nu^X$. Согласно лемме 1.4 имеем $\nu^X = 1$, поэтому

$$X(x, X(x, z)) = X(y, X(y, z)),$$

следовательно, $X(x, z) \in I^X(x, y)$ (так как $X(x, z) = X(y, z)$). Возьмем произвольный элемент $u \in Q$, тогда с учетом последнего включения имеем:

$$\begin{aligned} X(x, X(u, z)) &= X(X(x, u), X(x, z)) = X(X(x, X(x, z)), X(u, X(x, z))) \\ &= X(X(y, X(y, z)), X(u, X(x, z))) = X(X(y, u), X(y, z)) = X(y, X(u, z)). \end{aligned}$$

Таким образом, $X(u, z) \in I^X(x, y)$. Поэтому $I^X(x, y)$ будет левым идеалом группоида $(Q; X)$. □

Лемма 1.7. *Для любых $x, y \in Q$ и любого $X \in \Sigma$ множество $K^X(x, y)$ пусто или явлвется правым идеалом группоида $(Q; X)$.*

Доказательство. Двойственно лемме 1.6. □

Лемма 1.8. *Для любой операции $X \in \Sigma$ либо $L_{a,X}$, либо $R_{b,X}$ являются инъекциями.*

Доказательство. Допустим $L_{a,X}$ и $R_{b,X}$ не являются инъекциями, тогда, согласно леммам 1.4 и 1.5, будем иметь $\sigma_a^X \neq 1$ и $\tau_b^X \neq 1$. Таким образом, $X(a, a) = X(a, b)$ и $X(a, b) = X(b, b)$, или $X(a, a) = X(b, b)$, т. е. $a = b$, противоречие. □

Лемма 1.9. *Если в алгебре $(Q;\Sigma)$ для любой операции $X\in\Sigma$ группоид $(Q;X)$ не имеет собственных левых идеалов и отображение $L_{a,X}$ инъекция, то алгебра $(Q;\Sigma)$ будет право-регулярной. Более того, для любой операции $X\in\Sigma$ группоид $(Q;X)$ будет либо лево-, либо право-сократимым.*

Доказательство. Пусть $x\in Q$ и $(c,d)\in\tau_x^X$ для некоторых $c,d\in Q$ и $X\in\Sigma$, т. е. $X(c,x)=X(d,x)$ или $x\in I^X(c,d)$, поэтому согласно лемме 1.8 $I^X(c,d)$ будет левым идеалом группоида $(Q;X)$, следовательно, согласно условию имеем: $I^X(c,d)=Q$. Таким образом $X(c,z)=X(d,z)$ для любого элемента $z\in Q$, а это означает, что группоид $(Q;X)$ будет право регулярным. Поскольку операция X была произвольной, то алгебра $(Q;\Sigma)$ – право регулярна.

Далее, если группоид $(Q;X)$ не является право сократимым, то он не будет также право точным и, следовательно, $(a,b)\in\eta^X$ (так как $\eta^X\neq 1$), т. е. $I^X(a,b)=Q$, поэтому для любого элемента $x\in Q$ имеем

$$X(a,x)=X(b,x). \tag{1.1}$$

Теперь, если группоид $(Q;X)$не является лево сократимым, то существует элемент $y\in Q$ такой, что отображение $L_{y,X}$ не является инъекцией. Другими словами, сущетвуют $c,d\in Q$ $(c\neq d)$ такие, что $L_{y,X}(c)=L_{y,X}(d)$ или $X(y,c)=X(y,d)$. Следовательно, $\sigma_y^X\neq 1$, поэтому $\pi\subseteq\sigma_y^X$ и $(a,b)\in\sigma_y^X$ или $X(y,a)=X(y,b)$, т. е. $y\in K^X(a,b)$. С учетом (1.1) имеем $y\in K^X(a,b)\cap I^X(a,b)$. Из леммы 1.3 следует, что $K^X(a,b)$ левый идеал группоида $(Q;X)$, поэтому $K^X(a,b)=Q$, т.е. $(a,b)\in\rho^X$, противоречие с леммой 1.4. □

Лемма 1.10. *Если в алгебре $(Q;\Sigma)$ для любой операции $X\in\Sigma$ группоид $(Q;X)$ не имеет собственных правых идеалов и отображение $R_{b,X}$ инъекция, то алгебра $(Q;\Sigma)$ будет лево регулярной. Более того, для любой операции $X\in\Sigma$ группоид $(Q;X)$ будет либо лево, либо право сократимым.*

Доказательство. Двойственно лемме 1.9. □

Лемма 1.11. *Если алгебра $(Q;\Sigma)$ не имеет собственных левых и правых идеалов, то $(Q;\Sigma)$ будет регулярной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $X \in \Sigma$. Согласно лемме 1.8 либо $L_{a,X}$, либо $R_{b,X}$ являются инъекциями. Предположим $L_{a,X}$ – инъекция (другой случай рассматривается аналогично). Согласно лемме 1.9 алгебра $(Q;\Sigma)$ – право-регулярна. Далее, если для операции $X \in \Sigma$ группоид $(Q;X)$ – лево-сократим, то очевидно он будет лево-регулярным. Если $(Q;X)$ – право-сократим, то $R_{b,X}$ будет инъекцией и, согласно лемме 1.10, алгебра $(Q;\Sigma)$ будет лево-регулярной. $\square$

Предложение 1.2. *Каждая дистрибутивная делимая алгебра – регулярна.*

Доказательство. Следует из лемм 1.2, 1.4 и 1.11. $\square$

Следствие 1.2. [6] *Дистрибутивный делимый группоид – регулярен.*

Предложение 1.3. *Дистрибутивная d-алгебра – идемпотентна.*

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma$ делимая операция, тогда она будет идемпотентной (следствие 1.1) и регулярной (следствие 1.2). Пусть X произвольная операция из Σ и $x \in Q$, тогда

$$\begin{aligned}
A(x, X(x,x)) &= A(A(x,x), X(x,x)) = X(A(A(x,x),x), A(A(x,x),x)) \\
&= X(A(A(x,x), A(x,x)), A(A(x,x), A(x,x))) \\
&= A(X(A(A(x,x), A(x,x)), A(x,x)), X(A(A(x,x), A(x,x)), A(x,x))) \\
&= A(X(x,x), X(x,x)).
\end{aligned}$$

По регулярности операции A для любого $y \in Q$ будем иметь

$$A(x,y) = A(x(x,x),y) = X(A(x,y), A(x,y)),$$

т. е. элемент $A(x,y)$ идемпотентен, поэтому $Id(Q) \neq \emptyset$ и, согласно лемме 1.2, $Id(Q) = Q$. $\square$

3. Основные результаты

Сверхтождество левой дистрибутивности

$$X(x, Y(y,z)) = Z(U(x,y), V(x,z)),$$

и следующее сверхтождество правой дистрибутивности

$$X(Y(z,y), x) = Z(V(z,x), U(y,x))$$

будем называть дуальными.

Определение 1.1. *Бинарная операция A определенная на множестве Q называется гомотопной бинарной операции B определенной на множестве Q', или гомотопом B, если существуют отображения α, β, γ множества Q в Q' такие, что*

$$\gamma A(x, y) = B(\alpha x, \beta y)$$

для любых $x, y \in Q$ [7]-[8].

Упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется гомотопией, а отображение γ – главной компонентой гомотопии T. Если главная компонента $\gamma = 1$, то гомотопия называется главной. Если все отображения α, β, γ являются биекциями (сюръекциями) множества Q в Q',то гомотопия называется изотопией (эпитопией).

Лемма 1.12. *(*[9]*, Lemma.1.1) Каждый делимый и регулярный группоид $Q(\cdot)$ главно-эпитопен некоторой лупе $Q(\circ)$.*

Согласно определению d-алгебры существует такая операция $A \in \Sigma$, что $Q(A)$ – делимый группоид, который будет дистрибутивным, т. е. в нем выполняются тождества:

$$A(x, A(y, z)) = A(A(x, y), A(x, z)), \qquad A(A(x, y), z) = A(A(x, z), A(y, z)).$$

Согласно предложению 1.2 группоид $Q(A)$ будет регулярным, а согласно предложению 1.3 – идемпотентным.

Согласно лемме 1.12, операция A эпитопна лупе $Q(\circ)$ и эта эпитопия имеет вид

$$x \circ y = A(h(x), k(y)),$$

где h, k отображения множества Q в себя такие, что $R_j h = id_Q$, $L_j k = id_Q$, а $R_j(x) = A(x, j)$, $L_j(x) = A(j, x)$ и j – некоторый фиксированный элемент множества Q. Единичным элементом лупы $Q(\circ)$ будет $j = A(j, j)$. Имеем

$$A(x, y) = R_j(x) \circ L_j(y), \tag{1.2}$$

где R_j и L_j эпиморфизмы лупы $Q(\circ)$. Действительно:

$$R_j(x \circ y) = R_j A(h(x), k(y)) = A(A(h(x), k(y)), j) = A(A(hx, j), A(ky, j))$$
$$= A(R_j h(x), R_j k(y)) = R_j R_j h(x) \circ L_j R_j k(y) = R_j(x) \circ R_j L_j k(y) = R_j(x) \circ R_j(y),$$

так как $R_j L_j = L_j R_j$, поскольку:

$$\begin{aligned} R_j L_j(x) &= R_j(A(j,x)) = A(A(j,x),j) = A(A(j,j),A(x,j)) \\ &= A(j,A(x,j)) = L_j A(x,j) = L_j R_j(x). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что L_j – эпиморфизм лупы $Q(\circ)$.

Обозначая $R_j = \varphi$, $L_j = \psi$, приходим к равенству:

$$A(x,y) = \varphi(x) \circ \psi(y), \quad \varphi, \psi \in EndQ(\circ), \tag{1.3}$$

где $A \in \Sigma$ и $Q(A)$ – делимый и регулярный группоид.

Лемма 1.13. *В функционально-нетривиальной d-алгебре с дуальными сверхтождествами левой и правой дистрибутивности, сверхтождество левой или правой дистрибутивности не имеет сингулярной функциональной переменной.*

Доказательство. Обозначим через A делимую операцию алгебры $(Q;\Sigma)$ и представим ее в виде (1.3). Рассмотрим все возможные случаи.

1) В сверхтождестве левой дистрибутивности сингулярная операция X находится на первом месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$X(x, A(y,z)) = A(A(x,y), A(x,z)).$$

Взяв в последнем равенстве $y = z$ и учитывая идемпотентность операции A, получим $X(x,y) = A(x,y)$, т.е. алгебра $(Q;\Sigma)$ будет функционально-тривиальной. Противоречие!

2) Сингулярная операция X находится на втором месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$A(x, X(y,z)) = A(A(x,y), A(x,z)).$$

Придавая операции X два различных значения получим равенство:

$$A(x, X(y,z)) = A(x, Y(y,z)),$$

где X, Y произвольные операции из Σ, поэтому

$$\varphi x \circ \psi X(y,z) = \varphi y \circ \psi Y(y,z),$$

или $\psi X(y,z) = \psi Y(y,z)$. Аналогично, поступая в дуальном правом сверхтождестве дистрибутивности, для всех $X, Y \in \Sigma$, получим равенство $A(X(x,y),z) =$

$A(Y(x,y),z)$, или $\varphi X(x,y)=\varphi Y(x,y)$. Поэтому, используя идемпотентность операции A, получим:

$$X(x,y)=A(X(x,y),X(x,y))=\varphi X(x,y)\circ\psi X(x,y)=$$

$$=\varphi Y(x,y)\circ\psi Y(x,y)=Y(x,y).$$

Противоречие!

3) Сингулярная операция X находится на третьем месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$A(x,A(y,z))=X(A(x,y),A(x,z)).$$

Так как операция X произвольна, то

$$X(A(x,y),A(x,z))=Y(A(x,y),A(x,z)),$$

для всех $X,Y\in\Sigma$. Далее,

$$X(\varphi x\circ\psi y,\varphi x\circ\psi z)=Y(\varphi x\circ\psi y,\varphi x\circ\psi z),$$

или, с учетом сюръективности отображений φ,ψ,

$$X(x\circ y,x\circ z)=Y(x\circ y,x\circ z).$$

Возьмем в последнем равенстве $x=j$ получим: $X(y,z)=Y(y,z)$.

4) Сингулярная операция X находится на четвертом месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$A(x,A(y,z))=A(X(x,y),A(x,z)),$$

или

$$A(X(x,y),A(x,z))=A(Y(x,y),A(x,z)),$$

где операции $X,Y\in\Sigma$ произвольны. Следовательно,

$$\varphi X(x,y)\circ\psi(\varphi x\circ\psi z)=\varphi Y(x,y)\circ\psi(\varphi x\circ\psi z),$$

поэтому

$$\varphi X(x,y)=\varphi Y(x,y) \tag{1.4}$$

для любых операций $X,Y\in\Sigma$.

Аналогично поступим в дуальном сверхтождестве правой дистрибутивности, получим следующее равенство:

$$A(A(x,y),z) = A(A(x,z),X(y,z)),$$

откуда следует, что

$$\psi X(x,y) = \psi Y(x,y). \tag{1.5}$$

для любых операций $X, Y \in \Sigma$.

Далее, используя идемпотентность операции A и равенства (1.4), (1.5) получим:

$$X(x,y) = A(X(x,y),X(x,y)) = \varphi X(x,y) \circ \psi X(x,y) =$$

$$= \varphi Y(x,y) \circ \psi Y(x,y) = A(Y(x,y),Y(x,y)) = Y(x,y).$$

5) Случай, когда сингулярная операция находится на пятом месте рассматривается аналогично случаю 4).

Аналогично рассматривается правое сверхтождествое дистрибутивности. □

Теорема 1.1. *Если в функционально-нетривиальной делимой алгебре выполняются дуальные нетривиальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, тогда сверхтождество левой дистрибутивности будет ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида*

$$X(x,Y(y,z)) = Y(X(x,y),X(x,z)), \tag{1.6}$$

а сверхтождество правой дистрибутивности – сверхтождество ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида

$$X(Y(x,y),z) = Y(X(x,z),X(y,z)). \tag{1.7}$$

Доказательство. Так как в алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняются тривиальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, то алгебра $(Q;\Sigma)$ будет идемпотентной.

Согласно лемме 1.13 достаточно рассмотреть случаи, когда в сверхтождествах дистрибутивности нет сингулярных операций. Поскольку в сверхтождестве левой (правой) дистрибутивности всего пять мест для функциональных переменных, то функциональный ранг сверхтождества дистрибутивности без сингулярных операций должен быть равен двум. В этом случае одна из функциональных переменных должна повторяться два раза, а другая – три раза. Помимо сверхтождества (1.6) имеется еще девять таких сверхтождеств левой дистрибутивности:

$$X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), Y(x, z)), \tag{1.8}$$

$$X(x, X(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)), \tag{1.9}$$

$$X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)), \tag{1.10}$$

$$X(x, X(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)), \tag{1.11}$$

$$X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)), \tag{1.12}$$

$$X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), X(x, z)), \tag{1.13}$$

$$X(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), Y(x, z)), \tag{1.14}$$

$$X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)), \tag{1.15}$$

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)). \tag{1.16}$$

Требуется доказать, что ни одно из них не может выполняться в какой-либо функционально нетривиальной делимой алгебре с дуальным сверхтождеством правой дистрибутивности.

1) Пусть в функционально нетривиальной делимой алгебре $(Q; \Sigma)$ со сверхтождеством правой дистрибутивности выполняется сверхтождество (1.8).

В сверхтождестве (1.8), полагая $X = A_1$, $Y = A_2$, $y = z$, где $A_1 \neq A_2$ приходим к противоречию:

$$A_1(x, A_1(y, y)) = A_2(A_2(x, y), A_2(x, y)), \qquad A_1(x, y) = A_2(x, y), \qquad A_1 = A_2.$$

2) Пусть в нетривиальной делимой алгебре со сверхтождеством правой дистрибутивности выполняется сверхтождество (1.9).

В сверхтождестве (1.9) возьмем $z = x$, получим

$$X(x, X(y, x)) = Y(X(x, y), Y(x, x)), \qquad X(x, X(y, x)) = Y(X(x, y), x),$$

т. е. в алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$Y(X(x, y), x) = Z(X(x, y), x).$$

В последнем сверхтождестве возьмем $X = A$, получим для любых операций $Y, Z \in \Sigma$ равенство:

$$Y(A(x,y),x) = Z(A(x,y),x).$$

Согласно делимости операции A, для любых $x, z \in Q$ существует $y \in Q$ такой, что $A(x,y) = z$. Поэтому,

$$Y(z,x) = Y(A(x,y),x) = Z(A(x,y),x) = Z(z,y),$$

т. е. $Y = Z$ и алгебра $(Q;\Sigma)$ будет функционально-тривиальной.

3) Пусть в нетривиальной делимой алгебре со сверхтождеством правой дистрибутивности выполняется сверхтождество (1.10).

В сверхтождестве (1.10) возьмем $x = y$ получим:

$$X(x,X(x,z)) = Y(x,X(x,z)), \qquad Y(x,X(x,z)) = Z(x,X(x,z)).$$

Далее поступаем аналогично предыдущему случаю.

4) В сверхтождестве (1.11) возьмем $X = A$, $Y = A_i$, получим:

$$A(x,A(y,z)) = A(A_i(x,y),A_i(x,z)),$$

далее, пусть $y = z$, тогда

$$A(x,A(y,y)) = A(A_i(x,y),A_i(x,y)), \quad A(x,y) = A_i(x,y).$$

5) В сверхтождестве (1.12) возьмем $y = z$, получим

$$X(x,Y(y,y)) = X(Y(x,y),Y(x,y)),$$

$$X(x,y) = Y(x,y).$$

6) В сверхтождестве (1.13) возьмем $z = y$ и учитывая идемпотентность алгебры $(Q;\Sigma)$, получим:

$$X(x,Y(y,y)) = X(Y(x,y),X(x,y)),$$

$$X(x,y) = X(Y(x,y),X(x,y)) = X(X(x,y),X(x,y)),$$

в последнем равенстве возьмем $X = A$:

$$A(Y(x,y),X(x,y)) = A(A(x,y),A(x,y)).$$

Согласно регулярности операции A получим:

$$A(Y(x,y),z) = A(A(x,y),z).$$

Таким образом, для любых операций $Y, Z \in \Sigma$, имеем:

$$A(Y(x,y),z) = A(Z(x,y),z) \text{ или } \varphi Y(x,y) \circ \psi z = \varphi Z(x,y) \circ \psi z.$$

Следовательно, $\varphi Y(x,y) = \varphi Z(x,y)$ для всех операций $Y, Z \in \Sigma$. Теперь возьмем в сверхтождестве (1.13) $y = x$, тогда, повторяя предыдущие рассуждения, последовательно получим:

$$X(x, Y(Y(x,z)) = X(x, X(x,z)), \qquad X(x, Z(x,z)) = X(x, X(x,z)),$$

$$A(x, Z(x,z)) = A(x, Y(x,z)), \qquad \varphi x \circ \psi Z(x,z) = \varphi x \circ \psi Y(x,z), \qquad \psi Z(x,z) = \psi Y(x,z),$$

для всех операций $Y, Z \in \Sigma$. Далее,

$$\begin{aligned} X(x,y) &= A(X(x,y), X(x,y)) = \varphi X(x,y) \circ \psi X(x,y) \\ &= \varphi Y(x,y) \circ \psi Y(x,y) = A(Y(x,y), Y(x,y)) = Y(x,y). \end{aligned}$$

7) Для сверхтождества (1.14) доказательство проводится аналогично сверхтождеству (1.13).

8) В сверхтождестве (1.15) возьмем $z = x$ и воспользуемся тривиальным сверхтождеством правой дистрибутивности, получим:

$$X(x, Y(y,x)) = Y(Y(x,y),x) = Y(Y(x,x), Y(y,x)) = Y(x, Y(y,x)).$$

Таким образом,

$$X(x, Y(y,x)) = Y(x, Y(y,x)),$$

или при $Y = A$:

$$X(x, A(y,x)) = A(x, A(y,x)).$$

Согласно делимости операции A, для любых $x, z \in Q$ существует $y \in Q$ такой, что $A(y,x) = z$. Поэтому,

$$X(x,z) = X(x, A(y,x)) = A(x, A(y,x)) = A(x,z),$$

т. е. $X = A$ и алгебра $(Q;\Sigma)$ будет функционально-тривиальной.

9) Для сверхтождества (1.16) доказательство проводится аналогично сверхтождеству (1.15).

Аналогично доказывается случай сверхтождества правой дистрибутивности. $\square$

Abstract. The paper gives a classification of nontrivial dual superidentities of left and right distributivity that hold in functionally nontrivial divisible algebras. If in

a functionally nontrivial divisible algebra nontrivial dual superidentities of left and right distributivity hold, then the superidentity of left distributivity will be of rank two and (equivalent to a superidentity) of the form

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

and a hyperidentity of right distributivity is a hyperidentity of rank two and (equivalent to a hyperidentity) of the form

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

On the classification of nontrivial hyperidentities of left and right distributivity that hold in functionally nontrivial q-algebras, see [1]-[4]

Список литературы

[1] Yu. Movsisyan, Introduction to the Theory of Algebras With Hyperidentities [in Russian], Yerevan State University Press (1986).

[2] Yu. Movsisyan, Hyperidentities and Hypervarieties in Algebras [in Russian], Yerevan State University Press (1990).

[3] Yu. Movsisyan, Hyperidentities: Boolean and De Morgan Structures, World Scientific (2023).

[4] Yu. Movsisyan, “Hyperidentities in algebras and varieties”, Uspekhi Mat. nauk **53**, no. 1, 61 – 114 (1998). (in Russian). [English transl. in Russ. Math. Surv. **53**, no. 1, 57 – 108 (1998)].

[5] A. I. Mal’tsev, “Some questions of the theory of classes of models” [in Russian], Proceedings of the IV-th All-Union Mathematical Congress, **1**, 169 – 198 1963.

[6] T. Kepka, “Distributive division groupoids”, Math. Nachr. **87**, 103 – 107 (1979).

[7] A. A. Albert, “Quasigroups I”, Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 507 – 519 (1943).

[8] A. A. Albert, “Quasigroups II”, Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 401 – 419 (1944).

[9] S. S. Davidov, A. Krapež, Yu. M. Movsisyan, “Functional equations with division and regular operations”, Asian-Eur. J. Math., **11**, no. 1 (2018), 1850033 (14 pages).

Поступила 04 октября 2023

После доработки 26 ноября 2023

Принята к публикации 24 декабря 2023