

О МНОЖИТЕЛЯХ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ОБЩИХ СИСТЕМ ХААРА И ФРАНКЛИНА

Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. В работе сравниваются сходимость (абсолютная сходимость) почти всюду (п.в.) рядов по общим системам Хаара и Франклина, соответствующим слабо регулярному разбиению отрезка $[0, 1]$. Доказано, что если ряд по общей системе Хаара расходится (абсолютно расходится) на множестве E , ряд по общей системе Франклина с теми же коэффициентами п.в. расходится (абсолютно расходится) на E . Как следствие получено, что если последовательность ω_n не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Хаара, то она не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Франклина.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: общая система Хаара; общая система Франклина; множитель Вейля; безусловная сходимость; сходимость почти всюду.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье ω_n -неубывающая последовательность положительных чисел. Последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множителем Вейля для сходимости почти всюду (п. в.) рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, если условие

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$$

гарантирует сходимость п. в. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$. Последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнение (1.1) гарантирует безусловную сходимость п. в. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$.

П.Л. Ульянов доказал (см. [1], [2]), что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе Хаара,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант № 21T-1A055).

тогда и только тогда, когда выполняется

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} < \infty.$$

В работе [3] автором доказано, что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе Франклина тогда и только тогда, когда выполняется (1.2).

Теорему Орлича о множителях Вейля для безусловной сходимости почти всюду (см. напр. [4]) П.Л. Ульянов в эквивалентной, но в более простой форме, сформулировал и доказал в работе [2]: если последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n n \ln n} < \infty,$$

то последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по любой ортонормированной системе.

В настоящей работе исследуются множители Вейля для общих систем Хаара и Франклина (определения этих систем даны в следующем разделе). В частности, доказано, что для любой неограниченной последовательности ω_n существуют общие системы Хаара и Франклина для которых ω_n является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по этим системам.

В связи с этим отметим один результат П. Л. Ульянова [5] и А. М. Олевского [6]. Они независимо доказали, что для любой полной и ортонормированной в $L^2[0, 1]$ системы существует функция из $L^2[0, 1]$, ряд Фурье которой по этой системе п. в. расходится после некоторой перестановки. Следовательно, ограниченная последовательность ω_n не может быть множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по полной ортонормированной системе.

Договоримся о некоторых обозначениях.

- $\text{mes}(A)$ -мера Лебега множества A ,
- $|\Delta|$ -длина (мера) интервала Δ ,
- $\chi_A(x)$ -характеристическая функция множества A ,
- $c_1, c_2, \dots, c_\gamma, c_p, \dots$ -положительные постоянные зависящие только от своих индексов,
- $a \sim_\gamma b$ - существуют такие положительные постоянные $c_{\gamma,1}$ и $c_{\gamma,2}$, что $c_{\gamma,1}b \leq a \leq c_{\gamma,2}b$,
- $\|f\|_p$ -норма функции f в $L^p(0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$,

- $\|f\|_{p,A}$ -норма функции f в $L^p(A)$, $1 \leq p \leq \infty$,

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩИХ СИСТЕМ ХААРА И ФРАНКЛИНА И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ

Следуя работе [7] определим общую систему Франклина.

Определение 2.1. Последовательность точек $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ назовем допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0, 1)$ для любого $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0, 1]$ и каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 1$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_{n,i} : \tau_{n,i} \leq \tau_{n,i+1}, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через $\mathbf{S}_n$ обозначим пространство функций, определенных на $[0, 1]$, непрерывных слева, линейных на $(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1})$ и непрерывных в $\tau_{n,i}$, если $\tau_{n,i-1} < \tau_{n,i} < \tau_{n,i+1}$, для любого $i = 0, 1, \dots, n$. Ясно, что $\dim \mathbf{S}_n = n + 1$ и $\mathbf{S}_{n-1} \subset \mathbf{S}_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in \mathbf{S}_n$, которая ортогональна $\mathbf{S}_{n-1}$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n -ной функцией Франклина, соответствующей разбиению (последовательности) $\mathcal{T}$.

Определение 2.2. Общая система Франклина $\{f_n : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = \sqrt{3}(2t - 1),$$

и для $n \geq 2$, f_n есть n -ная функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

Назовем разбиение простым, если каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз. В дальнейшем мы будем исследовать только случай простых разбиений.

Отметим, что когда $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, 2^k$, получается классическая система Франклина, эквивалентным образом определенной в [8].

Известно, что эта система безусловный базис в $L^p([0, 1])$, $1 < p < \infty$, при любом разбиении (см.[9]), базис в $L([0, 1])$ и базис в $C[0, 1]$, если разбиение простое (см.[10]).

В разных работах об общей системе Франклина рассмотрены последовательности $\mathcal{T}$, удовлетворяющие разным условиям регулярности. Здесь мы рассматриваем простые разбиения, удовлетворяющие условию слабой регулярности.

Обозначим $\Delta_0 = \Delta_1 = [0, 1]$, а для $n \geq 2$ обозначим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} t_n^- &:= \max\{t_i : t_i < t_n, i < n\}, \quad t_n^+ := \min\{t_i : t_i > t_n, i < n\}, \\ \Delta_n &:= [t_n^-, t_n^+], \quad \Delta_n^+ := [t_n^-, t_n], \quad \Delta_n^- := [t_n, t_n^+], \\ \Delta_i^n &:= [\tau_{n,i-1}, \tau_{n,i}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Определение 2.3. Последовательность (разбиение) $\mathcal{T}$ назовем слабо регулярной с параметром $\gamma > 1$, если

$$\gamma^{-1} \leq \frac{|\Delta_n^-|}{|\Delta_n^+|} \leq \gamma \quad \text{для всех } n.$$

Определение 2.4. Последовательность (разбиение) $\mathcal{T}$ назовем сильно регулярной с параметром $\gamma > 1$, если

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\tau_{n,i} - \tau_{n,i-1}}{\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}} \leq \gamma \quad \text{для всех } n, i.$$

Для слабо регулярной последовательности $\mathcal{T}$ с параметром γ в работе [7] доказаны, что

$$(2.2) \quad \|f_n\|_p \sim_{\gamma,p} \|f_n\|_{\Delta_n} \sim_{\gamma,p} |\Delta_n|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

и

$$(2.3) \quad \|f_n\|_\infty \sim_\gamma |f_n(t_n)|.$$

Система Хаара $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, соответствующая простому разбиению $\mathcal{T}$, определяется следующим образом: $h_1(x) = 1$, когда $x \in [0, 1]$, а для $n \geq 2$ определяется формулой

$$h_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|\Delta_n^-|}{|\Delta_n^+|}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}, & \text{когда } x \in \Delta_n^+, \\ -\sqrt{\frac{|\Delta_n^+|}{|\Delta_n^-|}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}, & \text{когда } x \in \Delta_n^-, \\ 0, & \text{когда } x \notin \Delta_n. \end{cases}$$

Для функций Хаара, соответствующим слабо регулярному разбиению $\mathcal{T}$ с параметром γ выполняются следующие соотношения

$$(2.4) \quad \|h_n\|_p = \|h_n\|_{\Delta_n} \sim_{\gamma,p} |\Delta_n|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Кроме того, из слабой регулярности $\mathcal{T}$ следует, что

$$(2.5) \quad \|h_n\|_\infty \sim_\gamma \|h_n\|_{\infty, \Delta_n^+} \sim_\gamma \|h_n\|_{\infty, \Delta_n^-}.$$

Когда $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, 2^k$, то общая система Хаара совпадает с классической системой Хаара, определенной в [11].

Верны следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина, соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Тогда, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = +\infty, \quad \text{когда } x \in E,$$

то

$$(2.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = +\infty, \quad \text{п.в. на } E.$$

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина, соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n h_n(x)$ при некоторой перестановке расходится на множестве E , то существует перестановка ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x)$, которая почти всюду расходится на E .

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Если последовательность ω_n не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Хаара, то она не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Франклина.

Теорема 2.4. Для любой неубывающей и неограниченной последовательности ω_n существует такое сильно регулярное разбиение $\mathcal{T}$, что для соответствующей общей системы Франклина (Хаара) ω_n является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Франклина (Хаара).

Теорема 2.5. Если ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n h_n(x)$ по классической системе Хаара расходится на множестве E , то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x)$ по классической системе Франклина расходится п.в. на E .

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0, 1]$ с параметром γ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Верна следующая лемма.

Лемма 3.1. *Существуют такие постоянные $c_{\gamma,1}$, $c_{\gamma,2}$, что если для некоторого полинома по система Хаара $\sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} a_k h_k(x)$ выполняется*

$$(3.1) \quad \sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} |a_k h_k(x)| \geq 1, \quad \text{когда } x \in \Delta_n,$$

то

$$(3.2) \quad \text{mes} \left\{ x \in \Delta_n : \sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,1} \right\} \geq c_{\gamma,2} |\Delta_n|.$$

Доказательство. Обозначим

$$(3.3) \quad \tilde{f}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} |f_k(t)| dt, & \text{когда } x \in \Delta_k, \\ 0, & \text{когда } x \notin \Delta_k. \end{cases}$$

Из (3.3), (2.2), (2.4) и (2.5) следует, что если $x \in \Delta_k$, то

$$(3.4) \quad \tilde{f}_k(x) = \frac{\|f_k\|_{1,\Delta_k}}{|\Delta_k|} \sim_\gamma |\Delta_n|^{-\frac{1}{2}} \sim_\gamma |h_k(x)|.$$

Из (3.4) и (3.1) имеем

$$\sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} |a_k| \tilde{f}_k(x) \geq c_{\gamma,3}, \quad \text{когда } x \in \Delta_n.$$

Из (2.3) и линейности функции $f_k(x)$ на интервалах Δ_k^+ , Δ_k^- следует, что

$$(3.5) \quad |f_k(x)| \leq c_\gamma \tilde{f}_k(x), \quad \text{если } x \in \Delta_k.$$

Пусть

$$I := \{k : \Delta_k \subset \Delta_n, \|a_k h_k\|_\infty \geq 1\}, \quad P_I(x) = \sum_{k \in I} |a_k| \tilde{f}_k(x),$$

$$J := \{k : \Delta_k \subset \Delta_n : \|a_k h_k\|_\infty < 1\}, \quad P_J(x) = \sum_{k \in J} |a_k| \tilde{f}_k(x),$$

и

$$A := \bigcup_{k \in I} \Delta_k, \quad B := \Delta_n \setminus A.$$

Учитывая (2.3) и линейность функции f_n на отрезках Δ_n^+ и Δ_n^- , из (3) получим

$$\text{mes}\{x \in \Delta_k : |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,1}\} > c_{\gamma,2} |\Delta_k|, \quad \text{когда } k \in I.$$

Следовательно

$$(3.6) \quad \text{mes} \left\{ x \in A : \sum_{k \in I} |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,1} \right\} > c_{\gamma,4} \text{mes}(A).$$

Если $\text{mes}(A) \geq \frac{1}{2}|\Delta_n|$, то из (3.6) следует (3.2). А если $\text{mes}(A) < \frac{1}{2}|\Delta_n|$, то $\text{mes}(B) \geq \frac{1}{2}|\Delta_n|$ и

$$\sum_{k \in J} |a_k h_k(x)| \geq 1, \quad \text{когда } x \in B.$$

Пусть

$$\tau(x) := \min \left\{ m : \sum_{k \leq m: k \in J} |a_k h_k(x)| > 1 \right\}.$$

Тогда

$$P_1(x) := \sum_{k \leq \tau(x): k \in J} a_k h_k(x) =: \sum_{k \in Q} a_k h_k(x)$$

является “подполином”-ом полинома $P_J(x)$ и выполняется (см. (2.5))

$$(3.7) \quad 1 \leq \sum_{k \in Q} |a_k h_k(x)| \leq c_{\gamma,5} \quad \text{когда } x \in B.$$

Обозначим

$$(3.8) \quad \bar{f}_n(x) := f_n(x) \chi_{\Delta_n}(x).$$

Тогда из первого неравенства (3.7) следует (см. (3.4))

$$(3.9) \quad \text{mes}(B) \leq \int_B \sum_{k \in Q} |a_k h_k(x)| dx \leq c_{\gamma,6} \int_B \sum_{k \in Q} |a_k| \tilde{f}_k(x) dx \leq c_{\gamma,6} \int_{\Delta_n} \sum_{k \in Q} |a_k \bar{f}_k(x)| dx.$$

А из второго неравенства (3.7) следует (см. (3.4) и (3.5))

$$(3.10) \quad \sum_{k \in Q} |a_k \bar{f}_k(x)| \leq c_{\gamma} \sum_{k \in Q} |a_k \tilde{f}_k(x)| < c_{\gamma,7}.$$

Из (3.9), (3.10) следует существование такого $c_{\gamma,8}$, что

$$(3.11) \quad \text{mes} \left\{ x \in B : \sum_{k \in Q} |a_k \bar{f}_k(x)| > c_{\gamma,8} \right\} > c_{\gamma,9} \text{mes}(B) \geq \frac{c_{\gamma,9}}{2} |\Delta_n|.$$

Из (3.8) и (3.11) имеем

$$\text{mes} \left\{ x \in \Delta_n : \sum_{k \in Q} |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,8} \right\} \geq \text{mes} \left\{ x \in B : \sum_{k \in Q} |a_k \bar{f}_k(x)| > c_{\gamma,8} \right\} \geq \frac{c_{\gamma,9}}{2} |\Delta_n|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Существуют такие постоянные $c_{\gamma,9}$, $c_{\gamma,10}$, что если для некоторого полинома по система Хаара $\sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} a_k h_k(x)$ выполняется*

$$\sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} a_k^2 h_k^2(x) \geq 1, \quad \text{когда } x \in \Delta_n,$$

то

$$\text{mes} \left\{ x \in \Delta_n : \sum_{k:\Delta_k \subset \Delta_n} a_k^2 f_k^2(x) > c_{\gamma,1} \right\} \geq c_{\gamma,2} |\Delta_n|.$$

Для доказательства этой леммы нужно вместо функций (3.3) рассмотреть функции

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} f_k^2(t) dt, & \text{когда } x \in \Delta_k, \\ 0, & \text{когда } x \notin \Delta_k, \end{cases}$$

и почти дословно повторить рассуждения предыдущей леммы.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\varepsilon_m \downarrow 0$ и

$$(4.1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \infty.$$

Найдем числа $p_m \uparrow \infty$ ($p_0 = 1$) и множества E_m , удовлетворяющие следующим условиям: (см. (2.1))

$$(4.2) \quad E_m = \bigcup_{j \in I_m} \Delta_j^{n_j^m}, \quad \text{где } n_j^m > p_m,$$

$$(4.3) \quad E_m \subset E \quad \text{mes}(E_m) > (1 - \varepsilon_m) \text{mes}(E),$$

и

$$(4.4) \quad \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} |a_n h_n(x)| > 1, \quad \text{когда } x \in E_m.$$

Допустим найдены числа $p_1, \dots, p_m$ и множества $E_1, \dots, E_{m-1}$. Тогда

$$\sum_{n=p_m+1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = \infty \quad \text{когда } x \in E.$$

Заметим, что если

$$\sum_{n=p_m+1}^q |a_n h_n(x)| > 1 \quad \text{и } x \in (\tau_{q,i-1}, \tau_{q,i}) \quad \text{для некоторого } i,$$

то

$$\sum_{n=n_{m-1}+1}^q |a_n h_n(t)| > 1, \text{ для любого } t \in (\tau_{q,i-1}, \tau_{q,i}).$$

Следовательно E с точностью до множества меры нуль является объединением некоторых интервалов вида $(\tau_{n,i-1}, \tau_{n,i})$. Понятно, что при достаточно большом p_{m+1} множество

$$E_m := \left\{ x \in E : \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} |a_n h_n(x)| > 1 \right\}$$

удовлетворяет (4.2), (4.3) и выполняется (4.4).

В силу леммы 3.1 имеем

$$(4.5) \quad \text{mes} \left\{ x \in \Delta_j^{n_j^m} : \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} |a_n f_n(x)| > c_{\gamma,1} \right\} \geq c_{\gamma,2} |\Delta_j^{n_j}| \text{ когда } j \in I_m.$$

Обозначим

$$E_0 := \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{m=q}^{\infty} E_m.$$

Из (4.1) и (4.3) следует, что $\text{mes}(E \setminus E_0) = 0$. Мы должны доказать выполнение (2.6). Допустим обратное

$$\text{mes} \left\{ x \in E_0 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| < \infty \right\} > 0.$$

Тогда для некоторого m_0 выполняется

$$(4.6) \quad \text{mes}(D) > 0, \text{ где } D := \left\{ x \in E_0 : \sum_{n=p_{m_0}}^{\infty} |a_n f_n(x)| < c_{\gamma,1} \right\}.$$

Из $\text{mes}(D) > 0$ следует, что почти все точки множества D являются точками плотности множества D . Пусть x_0 -точка плотности множества D . Тогда существует такое n_0 , что если $n \geq n_0$, то выполняется

$$(4.7) \quad \text{mes}(D \cap \Delta_i^n) > (1 - c_{\gamma,2}/2) |\Delta_i^n|, \text{ если } x_0 \in \Delta_i^n.$$

С другой стороны, если m больше некоторого m_0 , то $x_0 \in \Delta_j^{n_j^m}$ для некоторого j и выполняется (4.5). Но это противоречит (4.6), (4.7). Теорема доказана.

Напомним, что для классической системы Хаара безусловная сходимость п.в. ряда $\sum a_n h_n(x)$ на множестве E эквивалентна п.в. абсолютной сходимости этого ряда на E (см. [12]). Дословным повторением доказательства этого утверждения, можно доказать аналогичное утверждение для общей системы Хаара $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогичное утверждение верно также для любой общей системы Франклина (см. [13]).

Доказательство теоремы 2.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ при некоторой перестановке расходится на множестве положительной меры E , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = \infty \text{ п.в. на } E.$$

Тогда в силу теоремы 2.1 выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = \infty \text{ п.в. на } E.$$

Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ можно переставить так, чтобы п.в. на E расходился. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Допустим последовательность ω_n не является множителем Вейля для общей системы Хаара $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, соответствующей слабо регулярному разбиению $\mathcal{T}$. Тогда существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$, который после некоторой перестановки расходится на некотором множестве E положительной меры и выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = \infty$ п.в. на E . В силу теоремы 2.1 выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = \infty \text{ п.в. на } E,$$

из которого следует п.в. расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ на E после некоторой перестановки. Теорема доказана.

Замечание 4.1. В теоремах 2.2, 2.3 не утверждается расходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ при одной и той же перестановке.

Доказательство теоремы 2.4. Допустим ω_n неубывающая и неограниченная последовательность. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел n_k , что

$$(4.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n_k}} < \infty \text{ и } n_{k+1} > 2n_k.$$

Построим такую слабо регулярную последовательность $\mathcal{T}$, чтобы для соответствующей общей системы Франклина (Хаара) ω_n являлась множителем Вейля для безусловной сходимости п.в..

Последовательность $\mathcal{T}$ построим по индукции. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, для $n = 2, 3, \dots, n_1$ положим

$$t_n = \frac{t_{n-1}}{2}.$$

Если уже имеем точки t_n , $n = 1, 2, \dots, n_k$, то точки t_n , $n = n_k + 1, n_k + 2, \dots, n_{k+1}$ построим следующим образом. Точки t_n , $n = n_k + 1, n_k + 2, \dots, n_{k+1}$ расположены в убывающем порядке и между двумя соседними точками t_n , $n = 0, 2, \dots, n_k$ находится одна точка t_n , $n = n_k + 1, n_k + 2, \dots, 2n_k$, которая равна полусумме соседних точек. Далее

$$t_n := \frac{t_{n-1}}{2}, \quad n = 2n_k + 1, \dots, n_{k+1}.$$

Нетрудно убедиться, что таким образом построенная последовательность $\mathcal{T}$ является слабо регулярной с параметром $\gamma = 1$. Очевидно, что

$$(4.9) \quad [0, 1] = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \Delta_n, \quad \text{и} \quad \Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset, \quad \text{если} \quad n_k < m < n \leq n_{k+1}.$$

Пусть последовательность a_n удовлетворяет условию

$$(4.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty.$$

Тогда

$$(4.11) \quad \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|a_n f_n\|_1 \sim \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |a_n| \sqrt{\omega_n} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\omega_n}} \leq \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{|\Delta_n|}{\omega_n} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из (4.9) и (4.11) следует, что

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|a_n f_n\|_1 \leq c_{\gamma,11} \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\omega_{n_k}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (4.8), (4.10) следует

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n f_n\|_1 &\leq c_{\gamma,11} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\omega_{n_k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq c_{\gamma,11} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n_k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \infty. \end{aligned}$$

Из (4.12) следует абсолютная, а следовательно и безусловная сходимость п.в. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$. Поэтому ω_n является множителем Вейля для системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы 2.2 ω_n является множителем Вейля для общей системы Хаара соответствующей последовательности ω_n . Теорема доказана.

Замечание 4.2. Отметим, что обратные к теоремам 2.1-2.3 не верны. Действительно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k} h_{2^k}(x)$$

сходится в каждой точке, кроме, быть может, в точке $x = 1$ при любых коэффициентах. Но если $a_{2^k} = 1/f_{2^k}(1)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k} f_{2^k}(x)$ расходится п.в..

Теорема 4.1. Пусть ω_n неубывающая и неограниченная последовательность и ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такова, что $\inf_n \|\varphi_n\|_1 = 0$. Тогда системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно переставить так, что ω_n будет множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть ω_n неубывающая и неограниченная последовательность. Тогда существуют натуральные числа $n_k \uparrow \infty$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_{n_k}}} < \infty.$$

С другой стороны существуют такие натуральные числа $m_k \uparrow \infty$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{m_k}\|_1 < \infty.$$

Систему $\{\varphi_n(x)\}$ переставим следующим образом. Функции φ_n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположим под номерами n_k , а функции φ_n , $n \in \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположим под номерами $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Полученную систему обозначим через $\{\psi_n\}$. Тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$, то для некоторого c имеет место

$$\sup_n |a_n| < c, \quad \text{и} \quad |a_{n_k}| < \frac{c}{\sqrt{\omega_{n_k}}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \psi_n\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{n_k} \psi_{n_k}\|_1 + \sum_{n \neq n_k} \|a_n \psi_n\|_1 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| + c \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{m_k}\|_1 \leq c \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{m_k}\|_1 \right) < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \psi_n(x)|$ п.в. сходится. Теорема доказана.

Теоремы 2.4 и 4.1 указывают на то, что в классе ортогональных систем множитель Вейля для безусловной сходимости п.в. может стремиться к бесконечности сколь угодно медленно.

В работе [14] Ф. Г. Арутюняном доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ на множестве положительной меры п.в. сходится, тогда и только тогда, когда на этом множестве п.в. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 h_n^2(x)$. Аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана автором [15].

Доказательство теоремы 2.5. Допустим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ на множестве положительной меры E расходится. Тогда в силу теоремы Ф.Г. Арутюняна [14]

$$(4.13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 h_n^2(x) = \infty \quad \text{п.в. на } E.$$

Вместо леммы 3.1 применяя лемму 3.2, аналогично доказательству теоремы 2.1 можно доказать, что из (4.13) следует

$$(4.14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) = \infty \quad \text{п.в. на } E.$$

В работе [15] доказано, что (4.14) выполняется тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится на E п.в.. Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ на множестве E п.в. расходится. Теорема доказана.

Abstract. In article it is compared the almost everywhere convergence (absolute convergence) of series in the general Haar and Franklin systems corresponding to a weak regular partition of the segment $[0, 1]$. It is proven that if a series in the general Haar system diverges (absolutely diverges) on the set E , a series in the general Franklin system with the same coefficients a.e. diverges (absolutely diverges) on E . As a consequence, it is obtained that if the sequence ω_n is not a Weyl multiplier for unconditional convergence a.e. of series in the general Haar system, then it is not a Weyl multiplier for the unconditional convergence a.e. of series according to Franklin's general system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Л. Ульянов, "О множителях Вейля для безусловной сходимости", Мат. сборник, **60**, по. 1, 39 – 62 (1963).
- [2] П. Л. Ульянов, "Расходящиеся ряды Фурье", Успехи Мат. наук, **16**, по. 3, 61 – 142 (1961).
- [3] Г. Г. Геворкян, "О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **41**, по. 6, 789 – 797 (1987).
- [4] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, Физматгиз, М. (1958).
- [5] П. Л. Ульянов, "Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам", ДАН СССР, **138**, по. 3, 545 – 548 (1961).
- [6] А. М. Олевский, "Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам", ДАН СССР, **138**, по. 3, 556 – 559 (1961).
- [7] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Math. (Rosprawy Mat.), **374**, 59 pp. (1998).

- [8] Ph. Franklin, “A set of continuous orthonormal functions”, Math. Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
- [9] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ ”, Studia Math. **164**, no. 2, 161 – 204 (2004).
- [10] Z. Ciesielski, A. Kamont, “Projections onto piecewise linear functions”, Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).
- [11] A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, Math. Ann., **69**, 331 – 371 (1910).
- [12] Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, “Об абсолютной и безусловной сходимости”, УМНб **22**, no. 3, 240 – 242 (1967).
- [13] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, “Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по общей системе Франклина”, Изв. РАН. Сер. матем., **73**, no. 2, 69 – 90 (2009).
- [14] Ф. Г. Арутюнян, “О рядах по системе Хаара”, Доклады АН Арм. ССР, **42**, no. 3, 134 – 140 (1966).
- [15] Г. Г. Геворкян, “О рядах по системе Франклина”, Analysis Math., **16**, no. 2, 87 – 114 (1990).

Поступила 29 ноября 2023

После доработки 29 ноября 2023

Принята к публикации 13 января 2024