

**БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-СИСТЕМ В $H^1(\mathbb{T})$:
НЕОБХОДИМОСТЬ**

Л. АКОПЯН

*Ереванский государственный университет
Университет Южной Калифорнии, Лос-Анджелес, Калифорния
E-mail: levonhakobyan.5@edu.usu.am*

Аннотация. Дана геометрическая характеристика последовательностей узлов (s_n) , которая является необходимым условием того, чтобы соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система произвольного порядка k , $k \in \mathbb{N}$ была безусловным базисом в атомном пространстве Харди $H^1(\mathbb{T})$.

MSC2020 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: ортонормированная сплайн-система; периодическая сплайн-система; безусловный базис.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы исследуем периодические ортонормированные сплайн-системы произвольного порядка k с произвольными разбиениями. Рассматриваем такие плотные последовательности точек на торе $\mathbb{T}$, где каждая точка встречается не более k раз. Такие последовательности точек называются *k допустимыми на торе $\mathbb{T}$* .

Дана характеристика последовательностей узлов, которая является необходимым условием того, чтобы соответствующая периодическая ортонормированная сплайн-система порядка k была безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Главное внимание в настоящей статье уделяется периодической версии необходимости основного результата [1]. Объединив наш результат с основной теоремой, доказанной в [2], мы получаем необходимое и достаточное условие, при котором периодическая ортонормированная сплайн-система является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Приведем некоторые важные результаты, связанные с этими вопросами.

Знаменитый результат А. Шадрина [3] утверждает, что оператор ортогонального проектирования на пространства $\mathcal{S}_n$ ограничен на $L^\infty[0, 1]$ постоянной, зависящей только от порядка сплайна k . Как следствие, непериодическая ортонормированная сплайн-система $(f_n)_n$ является базисом Шаудера в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ и в пространстве непрерывных функции $C[0, 1]$. Существуют различные результаты о безусловной базисности систем сплайнов, ограничивающих либо порядок сплайна k , либо разбиение $(t_n)_{n \geq 0}$.

Первый результат в этом направлении встречается в [4], где доказано, что классическая система Франклина—ортонормированная система сплайнов порядка 2, соответствующая последовательности диадических узлов является безусловным базисом в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Этот результат был обобщен в [5] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка, но соответствующие только диадическими узлами. Далее, значительные усилия были приложены, чтобы получить аналогичные результаты для последовательностей удовлетворяющим некоторым ограничениям. Эти ограничения были постепенно сняты и были получены результаты для общих систем Франклина в серии статей [6] – [8]. Для случая $k = 2$ был получен следующий окончательный результат - для каждой допустимой последовательности точек $(t_n)_{n \geq 0}$ соответствующая общая система Франклина образует безусловный базис в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Сочетая методы используемые в [7, 8] с некоторыми новыми неравенствами из [9], в [10] было доказано, что непериодические ортонормированные сплайн-системы являются безусловными базисами в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, для сплайн-систем любого порядка k и для любой допустимой последовательности точек (t_n) .

Периодический аналог теоремы Шадрина доказан в [11]. В случае диадических узлов в работе Дж. Домста [12] получены экспоненциальные оценки для обратной матрицы Грама периодических В-сплайнов, которые были использованы для доказательства безусловной базисности периодических ортонормированных сплайн-систем с диадическими узлами в L^p для $1 < p < \infty$. В работе [13] было доказано, что для любой допустимой последовательности точек, соответствующая периодическая система Франклина (т.е. случай $k = 2$) образует безусловный базис в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. К. Керян и М. Пассенбруннер [14] получили важную оценку для функций общих периодических ортонормированных сплайн-систем.

Объединив эту оценку с методами, разработанными в [8], авторы смогли доказать безусловную базисность периодических ортонормированных сплайн-систем в $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Г. Г. Геворкян и А. Камонт в [15] получили простые геометрические характеристики всех последовательностей узлов, для которых соответствующая общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0, 1]$. После этого, используя следствия результата Шадрина, полученного З. Чисельским [16], Г. Г. Геворкян и А. Камонт [17] обобщили свой результат из [15] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка и получили характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормированная сплайн-система порядка k является базисом в $H^1[0, 1]$.

Другой важный вклад в изучение периодических ортонормированных систем сплайнов был сделан М. П. Погосяном и К. А. Керяном в [18]. Простая геометрическая характеристика последовательностей узлов была дана в упомянутой статье [18]. Для этих типов последовательностей узлов соответствующие общие периодические системы Франклина являются базисом или безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. В недавней статье [19] авторы настоящей статьи предоставили необходимое и достаточное условие, при котором периодическая ортонормированная сплайн-система является базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Структура данной работы следующая. В разделе 2 мы даем необходимые определения и формулировку основного результата статьи: Теорема 2.4. В разделах 3 и 4 мы напоминаем несколько важных фактов. В частности, в разделе 4 представляем понятие характеристических интервалов как для периодических, так и для непериодических ортонормированных сплайн-систем с произвольными узлами, а также важные оценки для ортонормированных сплайн-систем. Доказательство теоремы 2.4 приведено в разделе 5.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Непериодический случай. Предположим, что $k \geq 2$ — целое число. Пусть $\mathcal{T} = (t_n)_{n=2}^\infty$ — всюду плотная последовательность точек на единичном интервале такая, что каждая точка встречается не более k раз. Кроме того, определим $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$. Такие последовательности точек называются k -допустимыми. Для n из интервала $-k+2 \leq n \leq 1$ пусть $\mathcal{S}_n^{(k)}$ — пространство полиномов порядка $n+k-1$ (или степени $n+k-2$) на интервале $[0, 1]$ и $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^1$ — набор

ортонормированных многочленов из $L^2 \equiv L^2[0, 1]$, для которых степень $f_n^{(k)}$ равна $n + k - 2$. Для $n \geq 2$ пусть $\mathcal{T}_n$ — упорядоченная последовательность точек, состоящая из точек сетки $(t_j)_{j=0}^{n+1}$ с учетом кратностей, где узлы 0 и 1 имеют кратность k , т. е. $\mathcal{T}_n$ имеет вид

$$\mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \dots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \dots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \dots = \tau_{n,n+k-1} = 1).$$

В этом случае мы определяем $\mathcal{S}_n^{(k)}$ как пространство полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $\mathcal{T}_n$. Для каждого $n \geq 2$ пространство $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ имеет коразмерность 1 в $\mathcal{S}_n^{(k)}$ и, следовательно, существует функция $f_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$, ортонормированная пространству $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$. Заметим, что эта функция $f_n^{(k)}$ единственная с точностью до знака.

Определение 2.1. Система функций $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^\infty$ называется ортонормальная сплайн-система порядка k , соответствующая последовательности $(t_n)_{n=0}^\infty$.

Часто мы будем пропускать параметр k и писать f_n и $\mathcal{S}_n$ вместо $f_n^{(k)}$ и $\mathcal{S}_n^{(k)}$, соответственно.

Под $H^1 = H^1[0, 1]$ мы подразумеваем атомное пространство Харди на $[0, 1]$ (см. [20]). Теперь введем определение регулярности последовательности $\mathcal{T}$.

Для $n \geq 2$, $\ell \leq k$ и i из интервала $-\ell \leq i \leq n-1$ определим $D_{n,i}^{(\ell)}$ как интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+\ell}]$.

Определение 2.2. Пусть $\ell \leq k$ и $(t_n)_{n=0}^\infty$ — ℓ -допустимая последовательность точек. Тогда, эта последовательность называется ℓ -регулярной с параметром $\gamma \geq 1$, если

$$\frac{|D_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |D_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |D_{n,i}^{(\ell)}|, \quad n \geq 2, \quad -\ell \leq i \leq n-2.$$

Другими словами, (t_n) ℓ -регулярна, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех n соотношения длин соседних носителей В-сплайн-функций (см. раздел 3.1) порядка ℓ с узлами из $\mathcal{T}_n$ ограничены γ -ой.

В этом разделе мы представим две теоремы, которые являются источниками вопросов, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 2.1 ([17]). Пусть $k \geq 1$ и (t_n) k -допустимая последовательность узлов в $[0, 1]$ с соответствующей ортонормированной сплайн-системой $(f_n^{(k)})$

порядка k . В таком случае $(f_n^{(k)})$ является базисом в $H^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда (t_n) k -регулярна с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

Теорема 2.2 ([1]). Пусть (t_n) — k -допустимая последовательность точек. Соответствующая ортонормированная сплайн система $(f_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1[0, 1]$, тогда и только тогда, когда (t_n) удовлетворяет условию $(k - 1)$ -регулярности с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

2.2. Периодический случай. Пусть $k \geq 2$ — целое число и $(s_n)_{n=1}^\infty$ — k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, т.е. всюду плотная последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ такая, что каждая точка встречается не более k раз.

Для $n \geq k$ определим $\hat{S}_n$ как пространство периодических полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $(s_j)_{j=1}^n \in \mathbb{T}$. Для каждого $n \geq k + 1$ пространство $\hat{S}_{n-1}$ имеет коразмерность 1 в $\hat{S}_n$ и, следовательно, существует функция $\hat{f}_n \in \hat{S}_n$ такая, что $\|\hat{f}_n\|_2 = 1$ и ортогональна пространству $\hat{S}_{n-1}$. Заметим, что эта функция $\hat{f}_n$ единственна с точностью до знака. Кроме того, пусть $(\hat{f}_n)_{n=1}^k$ — ортонормированный базис для $\hat{S}_k$. Система функций $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ называется *периодической ортонормированной сплайн-системой* порядка k , соответствующая последовательности $(s_n)_{n=1}^\infty$.

Теперь определим атомное пространство Харди на $\mathbb{T}$.

Определение 2.3. $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ называется периодическим атомом, если либо $a \equiv 1$, либо существует интервал $\Gamma \subset \mathbb{T}$ такой, что выполняются следующие условия:

- (1) $\text{supp } a \subset \Gamma$,
- (2) $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq |\Gamma|^{-1}$,
- (3) $\int_{\mathbb{T}} a(x) dx = \int_{\Gamma} a(x) dx = 0$.

Определение 2.4. $H^1(\mathbb{T})$ является семейством всех функций f , которые имеют представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$$

для некоторых периодических атомов $(a_n)_{n=1}^\infty$ и действительных скаляров $(c_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$.

Пространство $H^1(\mathbb{T})$ становится банаховым при норме

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T})} := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

где $\inf$ берется по всем (периодическим) атомным представлениям $\sum c_n a_n$ функции f . Теперь введем условия регулярности на торе $\mathbb{T}$ для последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Предположим, что $n \geq k+1$ и пусть $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ — упорядоченная последовательность узловых точек, состоящая из $(s_j)_{j=1}^n$ на $\mathbb{T}$, канонически отождествленных с $[0, 1)$:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = (0 \leq \sigma_{n,0} \leq \sigma_{n,1} \leq \dots \leq \sigma_{n,n-2} \leq \sigma_{n,n-1} < 1).$$

Для целых $\ell \leq k$ и $i \in \mathbb{N}_0$ определим интервал $T_{n,i}^{(\ell)} := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+\ell}] \subset \mathbb{T}$. Здесь мы считаем индекс i периодическим, т.е. используем обозначение периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и $r \in \mathbb{Z}$, а подиндексами В-сплайн функций возьмем индексы по модулю n .

Определение 2.5. Пусть $\ell \leq k$ и $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — ℓ -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$. Тогда эта последовательность называется ℓ -регулярной на торе $\mathbb{T}$ с параметром $\gamma \geq 1$, если

$$\frac{|T_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |T_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |T_{n,i}^{(\ell)}|, \quad n \geq \ell + 1, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Другими словами, (s_n) является ℓ -регулярным на торе $\mathbb{T}$, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех $n \geq \ell$ соотношения длин соседних носителей периодических В-сплайнов (см. раздел 3.1) порядка ℓ с узлами $\hat{\mathcal{T}}_n$ ограничены γ -ой.

Следующая теорема является основным результатом данной работы и характеризует системы $(\hat{f}_n^{(k)})$, которые являются базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2.3 ([19]). Пусть $k \geq 1$ и (s_n) k -допустимая последовательность узлов в $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн системой $(\hat{f}_n^{(k)})$ порядка k . В таком случае $(\hat{f}_n^{(k)})$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда (s_n) k -регулярна на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

В этой статье мы представляем необходимое условие, при котором $(\hat{f}_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2.4. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Если соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$, то (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

С другой стороны, основной результат из [2] дает достаточное условие, при котором $(\hat{f}_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2.5 ([2]). Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Если (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$, то соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Таким образом, объединяя эти две теоремы, получаем следующее следствие.

Следствие 2.1. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Тогда соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$, тогда и только тогда, когда (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Параметр $k \geq 2$ всегда будет использоваться для определения порядка базовых полиномов или сплайнов. Обозначение $A(t) \sim B(t)$ будет использоваться при существовании двух констант $c_1, c_2 > 0$, таких что $c_1 B(t) \leq A(t) \leq c_2 B(t)$ для всех t , где t представляет собой все явные и неявные зависимости, которые могут иметь выражения A и B . Если константы c_1, c_2 зависят от дополнительного параметра p , мы будем писать $A(t) \sim_p B(t)$. Соответственно, будем использовать символы $\lesssim, \gtrsim, \lesssim_p, \gtrsim_p$. Кроме этого, будем использовать символы $\curvearrowright$ и $\curvearrowleft$ для обозначения направлений против и по часовой стрелке, соответственно. Направление против часовой стрелки будем считать положительным направлением. Для подмножества E вещественной прямой через $|E|$ обозначим меру Лебега E , а $\mathbb{1}_E$ — характеристическую функцию E . Если $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция, а λ — вещественный параметр, то множество всех точек, в которых f больше λ , обозначим $[f > \lambda] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \lambda\}$.

3.1. Свойства функций В-сплайн. Определим функции $(N_{n,i}^{(k)})_{i=-k}^{n-1}$ — совокупность В-сплайнов порядка k , соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Эти функции нормированы таким образом, что они образуют разбиение единицы, т. е. $\sum_{i=-k}^{n-1} N_{n,i}^{(k)}(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. С этим базисом связан биортогональный базис $\mathcal{S}_n$, который мы обозначим через $(N_{n,i}^{(k)*})_{i=-k}^{n-1}$. Если значения параметров k и n ясны из контекста, то мы будем использовать также эти обозначения $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ и $(N_i^*)_{i=-k}^{n-1}$ соответственно.

Теперь представим важный результат для В-сплайнов (N_i) и двойственных им функций (N_i^*) .

Предложение 3.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $g = \sum_{j=-k}^{n-1} a_j N_j$, где набор $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ — В-сплайны порядка k , соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Тогда,

$$(3.1) \quad |a_j| \lesssim_k |I_j|^{-1/p} \|g\|_{L^p(I_j)}, \quad -k \leq j \leq n-1,$$

где I_j — подынтервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ интервала $[\tau_{n,j}, \tau_{n,j+k}]$ максимальной длины.

Кроме того,

$$(3.2) \quad \|g\|_p \sim_k \left(\sum_{j=-k}^{n-1} |a_j|^p |D_{n,j}^{(k)}| \right)^{1/p} = \|(a_j |D_{n,j}^{(k)}|^{1/p})_{j=-k}^{n-1}\|_{\ell^p}.$$

Более того, если $h = \sum_{j=-k}^{n-1} b_j N_j^*$, то

$$(3.3) \quad \|h\|_p \sim_k \left(\sum_{j=-k}^{n-1} |b_j|^p |D_{n,j}^{(k)}|^{1-p} \right)^{1/p} = \|(b_j |D_{n,j}^{(k)}|^{1/p-1})_{j=-k}^{n-1}\|_{\ell^p}.$$

Неравенства (3.1) и (3.2) являются соответственно леммой 4.1 и 4.2 в [21, Глава 5], а неравенство (3.3) является следствием теоремы Шадрина [3] о том, что оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{S}_n^{(k)}$ ограничен в L^∞ независимо от n и $\mathcal{T}_n$. Вывод нижней оценки для (3.3) можно найти в [16, Свойство Р.7], а доказательство верхней оценки (3.3) приведено в [14, Предложение 2.4]

Следующее, что нужно рассмотреть, это оценки для матрицы $(a_{ij})_{i,j=-k}^{n-1}$, являющиеся обратной матрицей Грама $(\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-k}^{n-1}$. Позже нам понадобится одно особое свойство этой матрицы, которое заключается в том, что

$$(3.4) \quad (-1)^{i+j} a_{ij} \geq 0 \quad \text{для всех } i, j.$$

Это простое следствие полной положительности матрицы Грама $(\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-k}^{n-1}$, см. [22, 23]. Кроме того, нам понадобится следующая оценка для $a_{i,i}$:

$$(3.5) \quad |D_{n,i}^{(k)}|^{-1} \lesssim_k a_{i,i}.$$

Эта оценка является следствием полной положительности B -сплайновой матрицы Грама, L^2 -устойчивости B -сплайнов и следующей леммы 3.1.

Лемма 3.1 ([10]). Пусть $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметричная и положительно определенная матрица. Тогда для $(d_{ij})_{i,j=1}^n = C^{-1}$ имеем

$$c_{ii}^{-1} \leq d_{ii}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Из теоремы Шадрина ([3]) следует, что элементы обратной матрицы B -сплайна Грама удовлетворяют следующему неравенству.

Теорема 3.1 ([9]). Пусть $(a_{i,j})_{i,j=-k}^{n-1}$ — обратная матрица Грама $(\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-k}^{n-1}$ B -сплайн-функций, где N_i соответствует разбиению $\mathcal{T}_n$. Тогда,

$$|a_{i,j}| \lesssim_k \frac{q^{|i-j|}}{|\text{conv}(\text{supp } N_i \cup \text{supp } N_j)|} =: \frac{q^{|i-j|}}{h_{i,j}}, \quad -k \leq i, j \leq n-1,$$

где постоянная $q \in (0, 1)$ зависит только от порядка сплайна k , а для $U \subset [0, 1]$ через $\text{conv}(U)$ обозначен наименьший подынтервал $[0, 1]$ содержащий U .

Теперь мы рассмотрим периодические B -сплайны и их свойства.

Пусть $n \geq k$ и $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ периодические B -сплайн функции порядка k соответствующие произвольной k -допустимой последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ на торе $\mathbb{T}$, канонически отождествляемой с $[0, 1)$:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{n-2} \leq \sigma_{n-1} < 1).$$

Пусть $(\hat{N}_{n,i}^{(k)*})_{i=0}^{n-1}$ — двойственный базис к $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ и $\hat{\mathcal{S}}_{\hat{\mathcal{T}}_n}$ — линейная оболочка $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$. Отметим, что вместо обозначений $\hat{N}_{n,i}^{(k)}$ и $\hat{N}_{n,i}^{(k)*}$ мы можем использовать $\hat{N}_i$ и $\hat{N}_i^*$ соответственно. Определим матрицу $(\hat{a}_{ij})_{i,j=0}^{n-1} = (\langle \hat{N}_i^*, \hat{N}_j \rangle)_{i,j=0}^{n-1}$.

Нам понадобится следующая известная формула для производной линейной комбинации периодических B -сплайн функций: если $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \hat{N}_{n,j}^{(k)}$, то

$$(3.6) \quad g' = (k-1) \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) \frac{\hat{N}_{n,j}^{(k-1)}}{|T_{n,j}^{(k-1)}|}.$$

Здесь мы использовали обозначение периодического расширения последовательности коэффициентов $(a_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $a_{rn+j} = a_j$ для $j = 0, \dots, n-1$ и $r \in \mathbb{Z}$.

4. СВОЙСТВА НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛОВ

4.1. Непериодический случай. В этом разделе мы рассмотрим ортонормированные сплайн-функции $f_n = f_n^{(k)}$, где $k \in \mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим сетку $\mathcal{T}_n$:

$$\mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \dots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \dots \leq \tau_{n,i_0} \leq \dots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \dots = \tau_{n,n+k-1} = 1).$$

Для простоты мы будем часто опускать индекс n . Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ получается из $\mathcal{T}_n$, удалением выделенного τ_{i_0} из сетки. Рассмотрим функции $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$, т.е. совокупность В-сплайн-функций порядка k , соответствующих сетке $\mathcal{T}_n$ и через $(\tilde{N}_i : -k \leq i \leq n-2)$ обозначим совокупность В-сплайн-функций, соответствующих $\widetilde{\mathcal{T}}_n$. Формула Бёма [24] дает нам следующую связь между N_i и $\tilde{N}_i$:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tilde{N}_i(t) = N_i(t) & \text{если } -k \leq i \leq i_0 - k - 1, \\ \tilde{N}_i(t) = \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} N_i(t) + \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} N_{i+1}(t) & \text{если } -k \leq i \leq i_0 - 1, \\ \tilde{N}_i(t) = N_{i+1}(t) & \text{если } i_0 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Чтобы вычислить ортонормированную сплайн-функцию, соответствующую разбиениям $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ и $\mathcal{T}_n$, сначала определим функцию $g_n \in \text{span}\{N_i : -k \leq i \leq n-1\}$ такую, что $g_n \perp \tilde{N}_j$ для всех $-k \leq j \leq n-2$. Функция g_n имеет вид (с точностью до постоянного множителя)

$$(4.2) \quad g_n = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j N_j^* = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \sum_{l=-k}^{n-1} \alpha_j a_{jl} N_l = \sum_{l=-k}^{n-1} w_l N_l,$$

где $(a_{jl})_{j,l=-k}^{n-1}$ — обратная матрица Грама $(\langle N_j, N_l \rangle)_{j,l=-k}^{n-1}$ и

$$(4.3) \quad w_l := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j a_{jl}, \quad -k \leq l \leq n-1.$$

Коэффициенты α_j имеют вид

$$(4.4) \quad \alpha_j = (-1)^{j-i_0+k} \left(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\tau_{i_0} - \tau_\ell}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \right) \left(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\tau_{\ell+k} - \tau_{i_0}}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \right), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0.$$

Кроме того, коэффициенты α_j можно описать соотношением

$$(4.5) \quad \alpha_{i+1} \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} + \alpha_i \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} = 0.$$

Заметим также, что последовательность (α_j) знакопеременная, а поскольку знаки элементов матрицы $(a_{j\ell})_{j,\ell=-k}^{n-1}$ совпадает с $(-1)^{i+j}$, то коэффициенты В-сплайна g_n удовлетворяют соотношению

$$(4.6) \quad \left| \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j a_{j\ell} \right| = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} |\alpha_j a_{j\ell}|, \quad -k \leq j \leq n-1.$$

Чтобы дать оценки для g_n и нормированной функции $f_n = g_n / \|g_n\|_2$, сопоставим каждой функции g_n характеристический интервал, который представляет собой интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ с концами из сетки и лежит вблизи вновь вставленной точки τ_{n,i_0} .

Отметим, что мы опускаем индекс n в следующем определении:

Определение 4.1 (Характеристический интервал для непериодических последовательностей). Пусть $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}}$ такие разбиения, как указано выше, а τ_{i_0} — новая точка в $\mathcal{T}$, которой нет в $\tilde{\mathcal{T}}$. Определим характеристический интервал J , соответствующий τ_{i_0} следующим образом:

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \leq j \leq i_0 : |[\tau_j, \tau_{j+k}]| \leq 2 \min_{i_0-k \leq \ell \leq i_0} |[\tau_\ell, \tau_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j , для которых соответствующий носитель В-сплайн-функции N_j приближенно минимален. Заметим, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\alpha_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\alpha_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $J^{(0)} := [\tau_{j^{(0)}}, \tau_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $J^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$J^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\tau_{j^{(0)}+\ell}, \tau_{j^{(0)}+\ell+1}] \quad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим характеристический интервал $J_n = J = J(\tau_{i_0})$ как один из выше указанных k интервалов, имеющий максимальную длину.

Используя это определение, напомним следующие оценки для $g = g_n$:

Лемма 4.1 ([10]). Пусть $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}}$ такие, как указано выше и пусть

$$g = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j N_j^* = \sum_{j=-k}^{n-1} w_j N_j$$

функция из (4.2), где коэффициенты (w_j) определяются уравнением (4.3). Кроме того, пусть $f = g/\|g\|_2$ — L^2 -нормированная ортогональная сплайн функция, соответствующая точке сетки τ_{i_0} .

Тогда,

$$\|g\|_{L^p(J)} \sim_k \|g\|_p \sim_k |J|^{1/p-1}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

и, следовательно,

$$\|f\|_{L^p(J)} \sim_k \|f\|_p \sim_k |J|^{1/p-1/2}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где J — характеристический интервал, связанный с точкой τ_{i_0} , заданной в определении 4.1.

Кроме того, если $d_{\mathcal{T}}(x)$ обозначает количество узлов из $\mathcal{T}$, лежащих между J и x , включая x и конечные точки J , то существует $q \in (0, 1)$, зависящий только от k , такой, что

$$(4.7) \quad |w_j| \lesssim_k \frac{q^{d_{\mathcal{T}}(\tau_j)}}{|J| + \text{dist}(\text{supp } N_j, J) + |D_{n,j}^{(k)}|} \quad \text{для всех } -k \leq j \leq n-1.$$

4.2. Периодический случай. Здесь мы даем оценки для периодических ортонормированных сплайн-функций $(\hat{f}_n)$, аналогичные тем, которые приведены в лемме 4.1. Некоторые из них доказаны в [14]. Докажем другие оценки, отсутствующие в предыдущей статье.

Имеем ту же ситуацию, что и в непериодическом случае: Пусть

$$\hat{\mathcal{T}}_n = \hat{\mathcal{T}} = (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{i_0} \leq \dots \leq \sigma_{n-2} \leq \sigma_{n-1} < 1)$$

— разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1)$, а $\tilde{\mathcal{T}}$ — то же самое разбиение, но с удаленной σ_{i_0} . Напомним обозначения периодических В-сплайн-функций порядка k относительно $\hat{\mathcal{T}}$, т.е. $(\hat{N}_j)_{j=0}^{n-1}$ и через $(\tilde{N}_j)_{j=0}^{n-2}$ обозначим периодические В-сплайн функции порядка k относительно $\tilde{\mathcal{T}}$. Здесь мы напомним обозначения периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $r \in \mathbb{Z}$ и индексы В-сплайн функций возьмем по модулю n .

Чтобы вычислить периодические ортонормированные сплайн-функции, соответствующие приведенным выше сеткам определим функцию $\hat{g}_n := \hat{g} \in \text{span}\{\hat{N}_i :$

$0 \leq i \leq n-1$ такую, что $\hat{g} \perp \tilde{N}_j$ для всех $0 \leq j \leq n-2$. То есть предполагаем, что $\hat{g}$ имеет вид

$$\hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \hat{N}_j^*,$$

где $\hat{\alpha}_j = \langle \hat{g}, \hat{N}_j \rangle$. Чтобы $\hat{g}$ была ортогональна $\tilde{N}_j$ для $0 \leq j \leq n-2$ она должна удовлетворять тождествам

$$0 = \langle \hat{g}, \tilde{N}_i \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \langle \hat{N}_j^*, \tilde{N}_i \rangle, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Здесь мы можем рассматривать индексы j как периодические, что означает $\hat{\alpha}_j \neq 0$ только для $j \in \{i_0 - k, \dots, i_0\}$. Важно отметить, что формула (4.1) имеет место в периодическом случае, что влечет за собой следующее отношение для коэффициентов $(\hat{\alpha}_j)$:

$$(4.8) \quad \hat{\alpha}_{i+1} \frac{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i+1}} + \hat{\alpha}_i \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_i}{\sigma_{i+k} - \sigma_i} = 0, \quad i_0 - k \leq i \leq i_0 - 1.$$

С начальным значением

$$\hat{\alpha}_{i_0-k} = \prod_{\ell=i_0-k+1}^{i_0-1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{\ell}},$$

мы получаем явную формулу

$$(4.9) \quad \hat{\alpha}_j = (-1)^{j-i_0+k} \left(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_{\ell}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{\ell}} \right) \cdot \left(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{\ell}} \right), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0.$$

Теперь, аналогично определению 4.1, представим характеристические интервалы для периодических сеток.

Определение 4.2 (Характеристический интервал для периодических последовательностей). Пусть $\hat{T}, \tilde{T}$ такие разбиения, как указано выше и σ_{i_0} — новая точка в $\hat{T}$, которой нет в $\tilde{T}$. При ограничении $n \geq 2k$ определим (периодический) характеристический интервал $\hat{J}$, соответствующий σ_{i_0} , следующим образом:

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \leq j \leq i_0 : |[\sigma_j, \sigma_{j+k}]| \leq 2 \min_{i_0-k \leq \ell \leq i_0} |[\sigma_{\ell}, \sigma_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j в окрестности индекса i_0 для которого соответствующий носитель периодической В-сплайн-функции $\hat{N}_j$ приближенно минимален. Понятно, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\hat{\alpha}_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\hat{\alpha}_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $\hat{J}^{(0)} := [\sigma_{j^{(0)}}, \sigma_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $\hat{J}^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$\hat{J}^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\sigma_{j^{(0)}+\ell}, \sigma_{j^{(0)}+\ell+1}] \quad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим (периодический) характеристический интервал $\hat{J} = \hat{J}(\sigma_{i_0})$ как один из выше указанных k интервалов с максимальной длиной.

Лемма 4.2 ([14]). Пусть $n \geq 2k + 2$. Если $\hat{g} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{w}_i \hat{N}_i$, то для коэффициентов $\hat{w}_i := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \hat{\alpha}_j \hat{a}_{ij}$ верна следующая оценка:

$$|\hat{w}_i| \lesssim q^{\hat{d}(i, i_0)} \max_{i_0-k \leq j \leq i_0} \frac{1}{\max(|\text{supp } \hat{N}_i|, |\text{supp } \hat{N}_j|)}$$

где мы принимаем индекс j - модуль n , а $\hat{d}$ - периодическая функция расстояния на $\{0, \dots, n-1\}$.

Имеем следующие оценки для L^p -нормы $\hat{g}$, которые являются предложениями 3.6 и 3.8 в [14].

Предложение 4.1 ([14]). Если $n \geq 2k + 2$, то

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\mathbb{T})} \sim_k |\hat{J}|^{1/p-1}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Более того, существует число $N(k)$, зависящее только от порядка k такое, что для всех разбиений $\hat{\mathcal{T}}$, когда $n \geq N(k) \geq 3k - 1$, имеем

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\hat{J})} \gtrsim_k |\hat{J}|^{1/p-1}.$$

Метод максимального разбиения, представленный в [14], дал нам важную оценку для $\hat{g}$.

Предложение 4.2 ([14]). Пусть $x \in [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]$. Тогда существует интервал $C := C(x) = C([\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]) \subset \mathbb{T}$, который является минимальным по отношению следующего включения

$$\hat{J} \cup [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}] \subset C$$

такой, что если $K(C)$ — количество точек сетки $\hat{T}$, содержащийся в C , то

$$|\hat{g}(x)| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C)}}{|C|},$$

где $\hat{q} \in (0, 1)$ зависит только от k .

В [2] мы использовали предложение 4.2, чтобы получить периодическую версию неравенства (4.7).

Лемма 4.3 ([2]). Пусть $n \geq 3k - 1$. Если $\hat{g}_n = \hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\omega}_j \hat{N}_j$, то имеем следующую оценку для коэффициента $\hat{\omega}_j$:

$$(4.10) \quad |\hat{\omega}_j| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|},$$

где $C(\cdot)$ и $K(C(\cdot))$ определены выше, а $\hat{I}_j := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+1}]$ — подынтервал $T_{n,j}^{(k)}$, который имеет максимальную длину.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Для доказательства теоремы 2.4 будем использовать следующие предложения.

Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн-системой $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$. Для последовательности коэффициентов $(a_n)_{n \geq 1}$ пусть

$$S := \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то через Sf обозначим функцию S , соответствующую последовательности коэффициентов $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$. Следующее предложение является следствием неравенства Хинчина.

Предложение 5.1. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн-системой $(\hat{f}_n)$, а (a_n) — последовательность коэффициентов. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{f}_n$ безусловно сходится в $L^1(\mathbb{T})$, то $S \in L^1(\mathbb{T})$. Более того,

$$\|S\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim \sup_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Предложение 5.2. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию k -регулярности на торе $\mathbb{T}$ с параметром γ , но не

удовлетворяющая никакому условию $(k-1)$ -регулярности. Тогда,

$$\sup \| \sup_n |a_n(\phi) \hat{f}_n| \|_{L^1(\mathbb{T})} = \infty,$$

где $\sup$ берется по всем периодическим атомам ϕ , а $a_n(\phi) := \langle \phi, \hat{f}_n \rangle$.

Для доказательства предложения 5.2 нам понадобится следующая техническая лемма 5.1.

Лемма 5.1. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию k -регулярности на торе $\mathbb{T}$ с параметром $\gamma \geq 1$, но не удовлетворяющая никакому условию $(k-1)$ -регулярности, а ℓ — произвольное целое положительное число. Тогда для всех $A \geq 2$ существует конечная возрастающая последовательность $(n_j)_{j=0}^{\ell-1}$ длины ℓ такая, что если σ_{n_j, i_j} новая точка в $\hat{T}_{n_j}$, которой нет в $\hat{T}_{n_{j-1}}$ и

$$\Lambda_j := [\sigma_{n_j, i_j - k}, \sigma_{n_j, i_j - 1}), \quad L_j := [\sigma_{n_j, i_j - 1}, \sigma_{n_j, i_j}), \quad R_j := [\sigma_{n_j, i_j}, \sigma_{n_j, i_j + 1}),$$

то для всех индексов i, j в интервале $0 \leq i < j \leq \ell - 1$ имеем

- (1) $R_i \cap R_j = \emptyset$,
- (2) $\Lambda_i = \Lambda_j$,
- (3) $(2\gamma - 1)|L_j| \geq |[\sigma_{n_j, i_j - k - 1}, \sigma_{n_j, i_j - k}]| \geq \frac{|L_j|}{2\gamma}$,
- (4) $|R_j| \leq (2\gamma - 1)|L_j|$,
- (5) $|L_j| \leq 2(\gamma + 1)k \cdot |R_j|$,
- (6) $\min(|L_j|, |R_j|) \geq A|\Lambda_j|$.

Доказательство этой леммы похоже на доказательство леммы 6.2 из [1], поэтому мы не будем приводить. Однако важно отметить, что мы отождествляем тор $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ таким образом, что начальная точка 0 не находится в $\Lambda_0 \cup L_0 \cup R_0 \cup [\sigma_{n_0, i_0 - k - 1}, \sigma_{n_0, i_0 - k}]$. Используя эту индексацию и следуя той же методологии доказательства, что и в лемме 6.2 из [1], мы получаем желаемый результат.

Теперь, используя лемму 5.1, мы приступим к доказательству предложения 5.2.

Доказательство предложения 5.2. Пусть ℓ — произвольное целое положительное число и $\ell' := \ell + N(k, \gamma)$, где $N(k, \gamma)$ — натуральное число, которое будет уточняться впоследствии. Пусть $A \geq 2$ — число, которое также будет выбрано позже. Тогда лемма 5.1 дает нам последовательность $(n_j^*)_{j=0}^{\ell'-1}$ такую, что все условия леммы 5.1 удовлетворены. После этого из набора $(n_j^*)_{j=0}^{\ell'-1}$ возьмем $(n_j^*)_{j=N(k, \gamma)}^{\ell'-1}$ и

определим $n_i := n_{i+N(k,\gamma)}^*$, для $i = 0, \dots, \ell - 1$. Предположим, что $|\Lambda_0| > 0$. Мы можем построить периодическую последовательность точек $(\sigma_i)_{i=0}^{n_0-1}$ так, чтобы индекс вновь вставленной точки i_0 был $[n_0/2]$. Пусть $\sigma := \sigma_{n_0, i_0-1}$, $x := \sigma - 2|\Lambda_0|$ и $y := \sigma + 2|\Lambda_0|$. Тогда мы определим периодический атом ϕ как

$$\phi \equiv \frac{1}{4|\Lambda_0|} (\mathbb{1}_{[x,\sigma]} - \mathbb{1}_{[\sigma,y]}).$$

Пусть j — произвольное целое число из промежутка $0 \leq j \leq \ell - 1$. Методом интегрирования по частям выражение $a_{n_j}(\phi) = \langle \phi, \hat{f}_{n_j} \rangle$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} 4|\Lambda_0|a_{n_j}(\phi) &= \int_x^\sigma \hat{f}_{n_j}(t) dt - \int_\sigma^y \hat{f}_{n_j}(t) dt \\ &= \int_x^\sigma (\hat{f}_{n_j}(t) - \hat{f}_{n_j}(\sigma)) dt - \int_\sigma^y (\hat{f}_{n_j}(t) - \hat{f}_{n_j}(\sigma)) dt \\ &= \int_x^\sigma (x-t)\hat{f}'_{n_j}(t) dt - \int_\sigma^y (y-t)\hat{f}'_{n_j}(t) dt. \end{aligned}$$

Во-первых, пусть $I_1 := \int_x^\sigma (x-t)\hat{f}'_{n_j}(t) dt$ и $I_2 := \int_\sigma^y (y-t)\hat{f}'_{n_j}(t) dt$. Чтобы оценить $|a_{n_j}(\phi)|$ снизу, оценим абсолютное значение I_2 сверху.

Рассмотрим функцию $\hat{g}_{n_j}$, связанную с $\hat{f}_{n_j}$ через $\hat{f}_{n_j} = \hat{g}_{n_j}/\|\hat{g}_{n_j}\|_{L^2(\mathbb{T})}$ и $\|g_{n_j}\|_{L^2(\mathbb{T})} \sim_k |\hat{J}_{n_j}|^{-1/2}$ (см. Предложение 4.1). В обозначениях леммы 5.1, $\hat{g}_{n_j}$ получается при вставке точки $\sigma_{n_j, i_j} = s_{n_j}$ в $\hat{\mathcal{T}}_{n_j-1}$, а это общий конец интервалов L_j и R_j . Согласно построению характеристического интервала $\hat{J}_{n_j}$, свойств 4–6 леммы 5.1 и k -регулярности последовательности точек (s_n) на торе $\mathbb{T}$, мы имеем

$$(5.1) \quad |\hat{J}_{n_j}| \sim_{k,\gamma} |L_j| \sim_{k,\gamma} |R_j|.$$

По свойству 6 леммы 5.1 имеем $[\sigma, y] \subset L_j$, и, следовательно, производная функции $\hat{g}_{n_j}$ на $[\sigma, y]$ имеет представление (см. (3.6))

$$\hat{g}'_{n_j}(u) = (k-1) \sum_{i=i_j-k+1}^{i_j-1} \xi_i \hat{N}_{n_j, i}^{(k-1)}(u), \quad u \in [\sigma, y],$$

где $\xi_i = (\hat{w}_i - \hat{w}_{i-1})/|T_{n_j, i}^{(k-1)}|$, а коэффициенты $\hat{w}_i$ удовлетворяют (4.10), соответствующие разбиению $\hat{\mathcal{T}}_{n_j}$. Для $i = i_j - k + 1, \dots, i_j - 1$ имеем $L_j \subset T_{n_j, i}^{(k-1)}$, что в сочетании с k -регулярностью последовательности точек (s_n) на торе $\mathbb{T}$ и свойством 6 из леммы 5.1 означает, что

$$(5.2) \quad |\hat{J}_{n_j}| \sim_{k,\gamma} |L_j| \sim_{k,\gamma} |T_{n_j, i}^{(k-1)}|, \quad i = i_j - k + 1, \dots, i_j - 1.$$

Более того, по лемме 4.3 получаем:

$$|\hat{w}_i| \lesssim_k \frac{1}{|\hat{J}_{n_j}|}, \quad 0 \leq i \leq n_j - 1.$$

Следовательно,

$$|\hat{f}'_{n_j}(t)| \sim_k |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} |\hat{g}'_{n_j}(t)| \lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{-3/2} \quad t \in [\sigma, y].$$

В результате, суммируя вышеперечисленные факты, получим

$$(5.3) \quad |I_2| \lesssim_{k,\gamma} |\Lambda_0|^2 \cdot |L_j|^{-3/2}.$$

Теперь оценим I_1 . Предположим, что индекс вновь вставленной точки $i_j = [n_j/2]$ и рассмотрим разницу между периодической функции $\hat{f}_{n_j}$ и непериодической функции f_{n_j} , соответствующей разбиению $\mathcal{T}_{n_j} = (\tau_{n_j,i})_{i=-k}^{n_j+k-1}$ с $\tau_i = \sigma_i$ для $i \in \{0, \dots, n_j - 1\}$, $\tau_{n_j,-k} = \dots = \tau_{n_j,-1} = 0$ и $\tau_{n_j,n_j} = \dots = \tau_{n_j,n_j+k-1} = 1$.

Таким образом, получаем:

$$I_1 = \int_x^\sigma (x-t) f'_{n_j}(t) dt + \int_x^\sigma (x-t) (\hat{f}_{n_j}(t) - f_{n_j}(t))' dt =: S_1 + S_2.$$

Рассмотрим S_1 . Согласно свойствам 3 и 6 из леммы 5.1 (с $A \geq 2\gamma$), получим $[x, \sigma] \subset [\tau_{n_j,i_j-k-1}, \tau_{n_j,i_j-1}]$ и, следовательно, в промежутке $[x, \sigma]$ g'_{n_j} имеет представление (см. (3.6))

$$g'_{n_j}(u) = (k-1) \sum_{i=i_j-2k+1}^{i_j-2} \xi_i N_{n_j,i}^{(k-1)}(u), \quad u \in [x, \sigma].$$

Разобьем интеграл S_1 на 2 части, т.е. $S_1 = S_{1,1} + S_{1,2}$, соответствующие индексам $i \neq i_j - k$ и $i = i_j - k$ в приведенном выше представлении g'_{n_j} на $[x, \sigma]$. Заметим, что $[\tau_{n_j,i_j-k-1}, \tau_{n_j,i_j-k}] \subset D_{n_j,i}^{(k-1)}$ для $i_j - 2k + 1 \leq i < i_j - k$ и $L_j \subset D_{n_j,i}^{(k-1)}$ для $i_j - k < i \leq i_j - 2$. Следовательно, согласно свойствам 3 из 6 из леммы 5.1 и k -регулярности последовательности узлов на торе $\mathbb{T}$, имеем

$$|D_{n_j,i}^{(k-1)}| \sim_{k,\gamma} |L_j| \quad i_j - 2k + 1 \leq i \leq i_j - 2, \quad i \neq i_j - k.$$

Ввиду k -регулярности (s_n) на торе $\mathbb{T}$ и определения характеристических интервалов $\hat{f}_{n_j}$ и f_{n_j} имеем:

$$(5.4) \quad |J_{n_j}| \sim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|.$$

Таким образом, используя (5.4), лемму 4.1 и рассуждения, аналогичные доказательству (5.3), получаем

$$(5.5) \quad |S_{1,1}| \sim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (t-x) \sum_{\substack{i=i_j-2k+1 \\ i \neq i_j-k}}^{i_j-2} \xi_i N_{n_j,i}^{(k-1)}(t) dt \right| \lesssim_{k,\gamma} |\Lambda_0|^2 \cdot |L_j|^{-3/2}.$$

Более того, для имеем $i = i_j - k$ $D_{n_j, i_j - k}^{(k-1)} = \Lambda_0$, поэтому получаем

$$\begin{aligned}
 |S_{1,2}| &\sim_k |J_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (t-x) \xi_{i_j-k} N_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}(t) dt \right| \\
 (5.6) \quad &\geq |\xi_{i_j-k}| |J_{n_j}|^{1/2} |\Lambda_0| \int_x^\sigma N_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}(t) dt \\
 &= |\xi_{i_j-k}| |\Lambda_0| |J_{n_j}|^{1/2} \frac{|D_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}|}{k-1} = |\xi_{i_j-k}| |J_{n_j}|^{1/2} \frac{|\Lambda_0|^2}{k-1},
 \end{aligned}$$

благодаря тому, что $t-x \geq |\Lambda_0|$ для $t \in \text{supp } N_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}$. Поскольку последовательность w_j является знакопеременной, см. (4.6), то

$$|\xi_{i_j-k}| = \frac{|w_{i_j-k}| + |w_{i_j-k-1}|}{|D_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}|} \geq \frac{|w_{i_j-k}|}{|D_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}|}.$$

Согласно определению w_{i_j-k} ,

$$|w_{i_j-k}| \geq |\alpha_{i_j-k}| |a_{i_j-k, i_j-k}|,$$

где α_{i_j-k} — множитель из формулы (4.4), а a_{i_j-k, i_j-k} — запись обратной матрицы Грама В-сплайна, оба соответствующие разбиению $\mathcal{T}_{n_j}$. Из формул (4.4) и (5.1) следует, что α_{i_j-k} ограничена снизу положительной постоянной, зависящей только от k и γ .¹ Более того, $|a_{i_j-k, i_j-k}| \geq \|N_{n_j, i_j-k}^{(k)}\|_2^{-2} \gtrsim_k |D_{n_j, i_j-k}^{(k)}|^{-1}$, см. (3.5).

Заметим, что $D_{n_j, i_j-k}^{(k)} = \Lambda_0 \cup L_j$, так что $|D_{n_j, i_j-k}^{(k)}| \sim_{k, \gamma} |L_j|$. Итак, $|\xi_{i_j-k}| \gtrsim_{k, \gamma} |\Lambda_0|^{-1} |L_j|^{-1}$. Вставляя приведенные выше вычисления в (5.6), из (5.4) находим

$$(5.7) \quad |S_{1,2}| \gtrsim_{k, \gamma} |J_{n_j}|^{1/2} \frac{|\Lambda_0|}{|L_j|} \sim_{k, \gamma} |\Lambda_0| |L_j|^{-1/2}.$$

Далее оцениваем абсолютное значение S_2 сверху. Поскольку и g_{n_j} , и $\hat{g}_{n_j}$ содержатся в линейной оболочке функций $(N_{n_j, v}^{(k)*})_{v=-k}^{n_j-1} = (N_v^*)_{v=-k}^{n_j-1}$, имеем следующее представление:

$$u := g_{n_j} - \hat{g}_{n_j} = \sum_{v=-k}^{n_j-1} \beta_v N_v^*,$$

где коэффициенты β_v выбраны так, чтобы это равенство выполнялось. Определив множество граничных индексов B в $\mathcal{T}_{n_j}$ формулой

$$B = \{-k, \dots, -1\} \cup \{n_j - k, \dots, n_j - 1\} \subset \{-k, \dots, n_j - 1\},$$

¹Формула (4.4) применяется для $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n_j}$ и соответствует $\tau_{i_0} = \tau_{n_j, i_j}$. Тогда $[\tau_{i_0-1}, \tau_{i_0}] = L_j$ и $[\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}] = R_j$. Ввиду k -регулярности и $|\Lambda_0 \cup L_j| \sim_{k, \gamma} |L_j|$, каждый знаменатель в (4.4) равен $\sim_{k, \gamma} |L_j|$. Каждый числитель в (4.4) больше, чем L_j или R_j , поэтому в силу (5.1) и k -регулярности он также $\sim_{k, \gamma} |L_j|$.

замечаем, что для $v \in B^c$,

$$\beta_v = \langle u, N_v \rangle = \langle g_{n_j} - \hat{g}_{n_j}, N_v \rangle = \langle g_{n_j}, N_v \rangle - \langle \hat{g}_{n_j}, \hat{N}_v \rangle = \alpha_v - \hat{\alpha}_v = 0,$$

где последнее равенство следует из того, что $\alpha_v = \hat{\alpha}_v$ для всех индексов v в данном определении $\mathcal{T}_{n_j}$ (см. (4.4) и (4.9)).

Таким образом, функция $u = g_{n_j} - \hat{g}_{n_j}$ может быть представлена как

$$(5.8) \quad u = \sum_{v \in B} \beta_v N_v^*.$$

Теперь оценим коэффициенты β_v для $v \in B$ по лемме 4.2:

$$\begin{aligned} |\beta_v| &= |\langle g_{n_j} - \hat{g}_{n_j}, N_v \rangle| = |\langle \hat{g}_{n_j}, N_v \rangle| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n_j-1} \hat{w}_i \langle \hat{N}_i, N_v \rangle \right| \lesssim_k \sum_{i=0}^{n_j-1} |\hat{w}_i| \cdot |\text{supp } \hat{N}_i \cap \text{supp } N_v| \\ &\lesssim \sum_{i=0}^{n_j-1} q^{\hat{d}(i, i_j)} \max_{m=i_j-k}^{i_j} \frac{1}{\max(|\text{supp } \hat{N}_i|, |\text{supp } \hat{N}_m|)} \cdot |\text{supp } \hat{N}_i \cap \text{supp } N_v| \\ &\leq \sum_{i: |\text{supp } \hat{N}_i \cap \text{supp } N_v| > 0} q^{\hat{d}(i, i_j)} \end{aligned}$$

и, так как $v \in B = \{-k, \dots, -1\} \cup \{n_j - k, \dots, n_j - 1\}$, то

$$(5.9) \quad |\beta_v| \lesssim_k q^{\hat{d}(0, i_j)} \lesssim_k q^{n_j/2}, \quad v \in B.$$

Теперь, в силу (5.4), получаем:

$$\begin{aligned} S_2 &\sim_{k, \gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (x-t)(\hat{g}_{n_j}(t) - g_{n_j}(t))' dt \right| \\ &= |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (x-t) \left(\sum_{v \in B} \beta_v \sum_{\ell=-k}^{n_j-1} a_{v, \ell} N_{n_j, \ell}^{(k)}(t) \right)' dt \right| \\ &= (k-1) |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (x-t) \sum_{v \in B} \beta_v \sum_{\ell=i_j-2k+1}^{i_j-2} (a_{v, \ell} - a_{v, \ell-1}) \frac{N_{n_j, \ell}^{(k-1)}(t)}{|D_{n_j, \ell}^{(k-1)}|} dt \right|. \end{aligned}$$

Далее, из выше указанного выражения разделив последнее представление $(\hat{g}_{n_j}(t) - g_{n_j}(t))'$ на две части и, используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} S_2 &\lesssim_{k, \gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (x-t) \frac{N_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}(t)}{|\Lambda_0|} \sum_{v \in B} \beta_v (a_{v, i_j-k} - a_{v, i_j-k-1}) dt \right| \\ &\quad + |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \left| \int_x^\sigma (x-t) \sum_{v \in B} \beta_v \sum_{\substack{\ell=i_j-2k+1, \\ \ell \neq i_j-k}}^{i_j-2} (a_{v, \ell} - a_{v, \ell-1}) \frac{N_{n_j, \ell}^{(k-1)}(t)}{|D_{n_j, \ell}^{(k-1)}|} dt \right| \\ &=: V_1 + V_2. \end{aligned}$$

Начнем с оценки первого слагаемого. В силу (5.9) и Теореме 3.1 получаем

$$\begin{aligned} V_1 &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2} \int_x^\sigma |\Lambda_0| q^{n_j/2} \left(\max_{v \in B} \frac{q^{|i_j-k-v|}}{h_{i_j-k,v}} \right) N_{n_j, i_j-k}^{(k-1)}(t) \frac{dt}{|\Lambda_0|} \\ &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2} q^{n_j} |\Lambda_0| \max_{v \in B} \frac{1}{h_{i_j-k,v}}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $h_{i_j-k,v} = |\text{conv}(\text{supp } N_{n_j, i_j-k}^{(k)} \cup \text{supp } N_{n_j, v}^{(k)})|$, имеем $h_{i_j-k,v} \gtrsim_{k,\gamma} |L_j|$ для любого $v \in B$. Поэтому,

$$(5.10) \quad V_1 \lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{-1/2} |\Lambda_0| q^{n_j}.$$

Теперь оценим второе слагаемое сверху. Заметим, что либо $L_j \subset D_{n_j, \ell}^{(k-1)}$, либо $[\sigma_{n_j, i_j-k-1}, \sigma_{n_j, i_j-k}] \subset D_{n_j, \ell}^{(k-1)}$ для всех индексов ℓ , удовлетворяющих $\ell \neq i_j - k$ и $i_j - 2k + 1 \leq \ell \leq i_j - 2$. Следовательно, по свойству 3 из леммы 5.1, для этих индексов ℓ получаем

$$(5.11) \quad |D_{n_j, \ell}^{(k-1)}| \gtrsim_\gamma |L_j|.$$

Таким образом, согласно (5.11), (5.9) и теореме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} V_2 &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2} \int_x^\sigma |\Lambda_0| q^{n_j/2} \left(\max_{v \in B} \max_{\substack{\ell = i_j - 2k, \\ \ell \neq i_j - k}} \frac{q^{|\ell-v|}}{h_{\ell,v}} \right) \frac{1}{|L_j|} \sum_{\substack{\ell = i_j - 2k + 1, \\ \ell \neq i_j - k}}^{i_j - 2} N_{n_j, \ell}^{(k-1)}(t) dt \\ &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{-3/2} |\Lambda_0|^2 q^{n_j}. \end{aligned}$$

Теперь мы зададим условия на постоянную $A \geq 2\gamma$ из начала доказательства и свойство 6 в лемме 5.1. Из (5.7), (5.5), (5.3), (5.10) и оценки для V_2 следует, что существуют $C_{k,\gamma}^{I_2}, C_{k,\gamma}^{S_{1,1}}, C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}, C_{k,\gamma}^{V_1} > 0$ и $C_{k,\gamma}^{V_2} > 0$, зависящие только от k и γ такие, что

$$\begin{aligned} 4|\Lambda_0| |a_{n_j}(\phi)| &\geq |I_1| - |I_2| = |S_1 + S_2| - |I_2| = |(S_{1,1} + S_{1,2}) + S_2| - |I_2| \\ &\geq |S_{1,2}| - |S_{1,1}| - |S_2| - |I_2| \geq C_{k,\gamma}^{S_{1,2}} |\Lambda_0| |L_j|^{-1/2} - C_{k,\gamma}^{S_{1,1}} |\Lambda_0|^2 |L_j|^{-3/2} \\ &\quad - C_{k,\gamma}^{V_1} |\Lambda_0| |L_j|^{-1/2} q^{n_j} - C_{k,\gamma}^{V_2} |\Lambda_0|^2 |L_j|^{-3/2} q^{n_j} - C_{k,\gamma}^{I_2} |\Lambda_0|^2 |L_j|^{-3/2} \end{aligned}$$

а значит,

$$4|\Lambda_0| |a_{n_j}(\phi)| \geq |\Lambda_0| |L_j|^{-1/2} ((C_{k,\gamma}^{S_{1,2}} - C_{k,\gamma}^{V_1} q^{n_j}) - (C_{k,\gamma}^{V_2} q^{n_j} + C_{k,\gamma}^{S_{1,1}} + C_{k,\gamma}^{I_2}) |\Lambda_0| |L_j|^{-1}).$$

Существует индекс $N_1(k, \gamma)$ такой, что для всех $n_j \geq n_0 \geq N_1(k, \gamma)$

$$C_{k,\gamma}^{S_{1,2}} - C_{k,\gamma}^{V_1} q^{n_j} \geq \frac{C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}}{2}.$$

По свойству 6 из леммы 5.1 имеем $|\Lambda_0||L_j|^{-1} \leq 1/A$. Выбирая A достаточно большим, чтобы обеспечить

$$\frac{C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}}{2} - \frac{C_{k,\gamma}^{V_2} q^{n_j} + C_{k,\gamma}^{S_{1,1}} + C_{k,\gamma}^{I_2}}{A} \geq \frac{C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}}{4},$$

мы получаем постоянную $m_{k,\gamma}$, зависящую только от k и γ , такую, что

$$(5.12) \quad m_{k,\gamma}|L_j|^{-1/2} \leq |a_{n_j}(\phi)|, \quad j = 0, \dots, \ell - 1.$$

Далее, оценим $\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)| dt$ снизу. По неравенству треугольника имеем:

$$\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)| dt \geq \int_{R_j} |g_{n_j}(t)| dt - \int_{R_j} |g_{n_j}(t) - \hat{g}_{n_j}(t)| dt =: Q_1 - Q_2.$$

Теперь воспользуемся предложением 3.1, свойством 6 из леммы 5.1 и k -регулярностью последовательности точек (s_n) на торе $\mathbb{T}$, чтобы получить

$$Q_1 = \int_{R_j} |g_{n_j}(t)| dt \gtrsim_{k,\gamma} |R_j| |w_{i_j}|,$$

где w_{i_j} соответствует разбиению $\mathcal{T}_{n_j}$. По определению w_{i_j} ,

$$\int_{R_j} |g_{n_j}(t)| dt \gtrsim_{k,\gamma} |R_j| |\alpha_{i_j}| |a_{i_j, i_j}|.$$

По аргументам, аналогичным вышеприведенным, $|\alpha_{i_j}|$ ограничена снизу постоянной, зависящей только от k и γ , а $|a_{i_j, i_j}| \gtrsim_k |D_{n_j, i_j}^{(k)}|^{-1}$. В силу k -регулярности на торе получим $|R_j| \sim_{k,\gamma} |D_{n_j, i_j}^{(k)}|$, следовательно

$$(5.13) \quad \int_{R_j} |g_{n_j}(t)| dt \gtrsim_{k,\gamma} 1,$$

Далее оценим Q_2 сверху, используя те же аргументы, что и выше, а также тот факт, что $h_{i,v} \geq |R_j|$ для $v \in B$ и $i \in \{i : R_j \subset \text{supp } N_{n_j, i}^{(k)}\}$

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t) - g_{n_j}(t)| dt &= \int_{R_j} \left| \sum_{v \in B} \beta_v \sum_{i: R_j \subset \text{supp } N_{n_j, i}^{(k)}} a_{v,i} N_{n_j, i}^{(k)}(t) \right| dt \\ &\lesssim_k \int_{R_j} q^{n_j/2} \max_{i: R_j \subset \text{supp } N_{n_j, i}^{(k)}} \max_{v \in B} \frac{q^{|i-v|}}{h_{i,v}} dt \lesssim_k q^{n_j}. \end{aligned}$$

Объединив (5.13) и (5.14), получим

$$(5.15) \quad \int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)| dt \geq C_{k,\gamma} - C_k q^{n_j}.$$

Итак, существует индекс $N_2(k, \gamma)$ такой, что для всех $n_j \geq n_0 \geq N_2(k, \gamma)$

$$\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)| dt \gtrsim_{k,\gamma} 1,$$

что для $\hat{f}_{n_j}$ означает

$$(5.16) \quad \int_{R_j} |\hat{f}_{n_j}(t)| dt \gtrsim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \gtrsim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2}.$$

Теперь выберем $N(k, \gamma) = \max\{N_1(k, \gamma), N_2(k, \gamma), N(k)\}$. Это гарантирует, что с самого начала все оценки будут верными. Объединив (5.16) с (5.12) и свойством 1 из леммы 5.1,

$$\int_0^1 \sup_n |a_n(\phi) \hat{f}_n(t)| dt \geq \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{R_j} |a_{n_j}(\phi) \hat{f}_{n_j}(t)| dt \gtrsim_{k,\gamma} \ell.$$

Эта схема применима к каждому натуральному числу ℓ , доказывая утверждение предложения для $|\Lambda_0| > 0$.

Случай $|\Lambda_0| = 0$ рассматривается аналогично, с той лишь разницей, что периодический атом ϕ определяется как центрированный в точке σ_{n_0, i_0-1} , а длина носителя достаточно мала, в зависимости от ℓ и $|L_0|$. $\square$

Используя предложения 5.1 и 5.2, приведем доказательство теоремы 2.4.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $(\hat{f}_n)$, соответствующая последовательности узлов (s_n) , является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Докажем от противного. Во-первых, если (s_n) не удовлетворяет условию k -регулярности на торе $\mathbb{T}$, то $(\hat{f}_n)$ не является базисом в $H^1(\mathbb{T})$ по теореме 2.3. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда (s_n) удовлетворяет условию k -регулярности на торе $\mathbb{T}$, но не удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности. Тогда, вновь по теореме 2.3 $(\hat{f}_n)$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Значит для $f = \sum a_n \hat{f}_n$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ функция $f_\varepsilon := \sum \varepsilon_n a_n \hat{f}_n$ также принадлежит $H^1(\mathbb{T})$. Поскольку $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{T})}$, ряд $\sum a_n \hat{f}_n$ также сходится безусловно в $L^1(\mathbb{T})$, и, следовательно, из предложения 5.1 (т.е. неравенства Хинчина) имеем

$$\|Sf\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim \sup_{\varepsilon} \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \sup_{\varepsilon} \|f_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{T})},$$

что невозможно в силу предложения 5.2 даже для атомов. $\square$

Abstract. A geometric characterization of sequences of knots (s_n) is given, which is a necessary condition for the corresponding periodic orthonormal spline system of arbitrary order k , $k \in \mathbb{N}$ to be an unconditional basis in the atomic Hardy space $H^1(\mathbb{T})$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Mathematica*, **226**, no. 2, 123 – 154 (2015).
- [2] L. Hakobyan and K. Keryan, “Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in $H^1(\mathbb{T})$: Sufficiency”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **59**, no. 3, 3 – 32 (2024).
- [3] A. Shadrin, “The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: a proof of de Boor’s conjecture”, *Acta Math.*, **187**, no. 1, 59 – 137 (2001).
- [4] S. V. Bočkarëv, “Some inequalities for Franklin series”, *Anal. Math.*, **1**, no. 4, 249 – 257 (1975).
- [5] Z. Ciesielski, Equivalence, unconditionality and convergence a.e. of the spline bases in L_p spaces, In *Approximation theory (Papers, VIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warsaw, 1975)*, volume 4 of *Banach Center Publ.*, 55 – 68, PWN, Warsaw (1979).
- [6] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “On general Franklin systems”, *Dissertationes Math.* **374**, 59 pp. (1998).
- [7] G. G. Gevorkyan and A. A. Sahakyan, Unconditional basis property of general Franklin systems, *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **35**, no. 4, 7 – 25 (2000).
- [8] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *Studia Math.*, **374**, 1 – 59 (1998).
- [9] M. Passenbrunner and A. Shadrin, “On almost everywhere convergence of orthogonal spline projections with arbitrary knots”, *J. Approximation Theory*, **180**, 77 – 89 (2014).
- [10] M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in L^p ”, *Studia Math.*, **222**, no. 1, 51 – 86 (2014).
- [11] M. Passenbrunner, “Orthogonal projectors onto spaces of periodic splines”, *Journal of Complexity*, **42**, 85 – 93 (2017).
- [12] J. Domsta, “A theorem on B-splines. II. The periodic case”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **24**, 1077 – 1084 (1976).
- [13] K. Keryan, “Unconditionality of general periodic spline systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**, (1), 13 – 55 (2005).
- [14] K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in L^p ”, *Studia Mathematica*, **248**, no. 1, 57 – 91 (2019).
- [15] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Math.* **167**, 259 – 292 (2005).
- [16] Z. Ciesielski, “Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots”, *Function spaces (Poznań, 1998)*, **213**, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Dekker, New York, 133 – 140 (2000).
- [17] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Orthonormal spline systems with arbitrary knots as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *East J. Approx.* **14**, 161 – 182 (2008).
- [18] M. P. Poghosyan and K. A. Keryan, “General periodic Franklin system as a basis in $H^1[0, 1]$ ”, *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* **40**, no. 1, 56 – 79 (2005).
- [19] L. Hakobyan and K. Keryan, “Periodic orthonormal spline systems with arbitrary knots as basis in $H^1(\mathbb{T})$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **58**, no. 1, 33 – 42 (2023).
- [20] R. R. Coifman and G. Weiss, “Extension of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83**, 569 – 645 (1977).
- [21] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, *Grundlehren Math. Wiss.* **303**, Springer, Berlin (1993).
- [22] C. de Boor, “On the convergence of odd-degree spline interpolation”, *J. Approx. Theory* **1**, 452 – 463 (1968).
- [23] S. Karlin, *Total Positivity*, **I**, Standlyad Univ. Press, Stanford, CA (1968).
- [24] W. Böhm, “Inserting new knots into B-spline curves”, *Computer-Aided Design*, **12**, no. 4, 199 – 201 (1980).

Поступила 02 февраля 2024

После доработки 28 марта 2024

Принята к публикации 10 апреля 2024