Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 3, 2024, стр. 72 – 84.

МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФЕРМА

К. ЖУ, К. КИ

Университет Цзинань, Китай[1]
E-mails: *2579612796@qq.com; xiaoguang.202@163.com; xiaogqi@mail.sdu.edu.cn*

Аннотация. В статье изучаентся существование мероморфных решений гипер порядка меньше 1 дифференциально-разностных уравнений типа Ферма. Улучшаются ранее известные результаты подобных исследований.

MSC2020 nubers: 39B32; 30D35.

Ключевые слова: мероморфные функции; уравнение типа Ферма; теорема Кантана; дифференциально-разностное уравнение.

1. Введение

Слудующее функциональное уравнение типа Ферма

$$f^n(z) + g^m(z) = 1, \tag{1.1}$$

можно считать функциональным аналогом диофантового уравнения Ферма $x^n + y^n = 1$. Монтель [15] доказал, что (1.1) не имеет трансцендентального целого решения при $n = m \geq 3$. Потом Гросс [6] доказал, что (1.1) не имеет трансцендентального мероморфного решения при $n = m \geq 4$. Далее, Гросс [6, 7] и Бейкер [1] получили вид мероморфных решений (целых решений при $n = m = 2$) уравнения (1.1) при $n = m = 2$ и при $n = m = 3$, соответственно.

В дальнейшем уравнение (1.1) интенсивно изучалось. Соответствующие результаты можно найти в [3].

С широким применением теории Неванлины в области разностных уравнений в комплексных областях во многих исследования были рассмотрены уравнение (1.1) при $g = f(z + c)(c \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Изучались существование и вид решений уравнений $f^n(z) + f^m(z + c) = 1$ и $f^n(z) + f^m(z + c) = e^{Az+B}$, где A и B константы. Соответствующие результаты можно найти в [5, 8, 9, 10, 12, 13] и т.д.

[1]Работа выполнена при поддержке NNSF of China (No. 12061042) и NSF of Shandong Province (ZR2022MA071).

С другой стороны, Янг и Лайне [23] изучили существование решений разностного уравнения

$$f^2(z) + P(z)f(z+1) = Q(z), \tag{1.2}$$

что можно рассмотреть как обобщение разностного уравнения типа Ферма. Они доказали, что уравнение (1.2) не имеет трансцедентальных целых решений конечного порядка, если $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы. После них Ки и Янг [17] доказали, что уравнение

$$f^n(z) + P(z)f^m(z+c) = Q(z)$$

не имеет трансцедентальных целых решений конечного порядка, если $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы, а n и m положительные целые числа с $n \neq m$. Подробности можно найти в [8, 11, 16, 18, 21] и т.д.

Недавно, многие исследователи начали применять теорию Неванлинны для изучения комплексных дифференциально-разностных уравнений. В частности, Лиу и др. [10, 11] рассмотрели существование дифференциально-разностных уравнений типа Ферма.

Теорема A [10]**.** *Уравнение*

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = 1 \tag{1.3}$$

не имеет трансцедентальных целых решений конечного порядка, при условии $m \neq n$, где n, m – положительные целые числа.

Потом, Ки и Янг рассмотрели обобщение уравнения:

Теорема B [19]**.** *Пусть $p(z)$ – полином, а n и m– положительные целые числа с условием $n \neq m$. Тогда уравнение*

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)$$

не имеет трансцедентальных целых решений конечного порядка.

Теорема C [19]**.** *Пусть $p(z)$, $q(z)$ и $r(z)$ – ненулевые полиномы, а $n > m+1$ – положительные целые числа. Тогда уравнение*

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)$$

не имеет трансцедентальных целых решений конечного порядка.

Теорема D [20]**.** *Пусть $p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые полиномы, а $r(z)$, $s(z)$ – непостоянные полиномы. Если $n > m+2$ – положительные целые числа, и*

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{r(z)}{s(z)}\right| \neq (\frac{m}{n})^{\pm 1},$$

тогда уравнение

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)e^{s(z)}$$

не имеет трансцедентальных целых решений конечного порядка.

В настоящей статье рассматриваются следующие вопросы

1. Что будет, если условие "$p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые полиномы," заменить на "$p(z)$ и $q(z)$ - ненулевые целые функции порядка меньше, чем $\max\{\deg r(z), \deg s(z)\}$"?

2. Можно ли в Теореме D улучшить ограничение на степень $f(z)$?

В настоящей статье мы даем ответы на эти вопросы.

Теорема 1.1. *Пусть $r(z)$, $s(z)$ – ненулевые полиномы, $p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше, чем $\max\{\deg r(z), \deg s(z)\}$. Если $n > m+2$, и*

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{r(z)}{s(z)}\right| \neq (\frac{m}{n})^{\pm 1},$$

тогда уравнение

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)e^{s(z)} \tag{1.4}$$

не имеет трансцедентальных целых решений гиперпорядка меньше 1.

На самом деле, при условии теоремы 1.1, если $\deg r(z) = \deg s(z) = k > 0$, $r(z) = a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_0$ и $s(z) = b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_0$, где a_j, b_j – постоянные и $a_k b_k \neq 0$, $(j = 0, 1, \ldots, k)$, тогда уравнение (1.4) можно заменить на

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = P_1(z)e^{A_1 z^k} + Q_1(z)e^{B_1 z^k}, \tag{1.5}$$

при $a_k \neq b_k$, где $A_1 = a_k, B_1 = b_k$, а $P_1(z)$, $Q_1(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k, и

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = P_2(z)e^{A_2 z^k}, \tag{1.6}$$

при $a_k = b_k$, где $A_2 = a_k = b_k$, а $P_2(z)$ – ненулевая целая функция порядка меньше k,

Когда $\deg r(z) \neq \deg s(z)$, без ограничения общности, можем считать, что $k = \deg r(z) > \deg s(z)$, тогда уравнение (1.4) трансформируется в

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = P_3(z)e^{A_3 z^k} + Q_3(z), \tag{1.7}$$

где $P_3(z)$, $Q_3(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k, и A_3 – отлчная от нуля константа.

Поэтому в дальнейшем мы изучим существование решений уравнений (1.5)-(1.7).

Теорема 1.2. *Пусть $P_1(z)$, $Q_1(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k, а A_1, B_1 – разные отлчные от нуля константы, и пусть n, m – натуральные числа с $n > m + 2$. Если уравнение (1.5) имеет мероморфное решение $f(z)$ гипепорядка строго меньше 1, и $N(r, f) = S(r, f)$, тогда возможны следующие два случая:*

(1) $f(z) = r(z)e^{\frac{A_1 z^k}{n}}$ *и* $\frac{A_1}{B_1} = \frac{n}{m}$, *где* $r^n(z) = P_1(z)$.
(2) $f(z) = s(z)e^{\frac{B_1 z^k}{n}}$ *и* $\frac{A_1}{B_1} = \frac{m}{n}$, *где* $s^n(z) = Q_1(z)$.

Пример. Легло видеть, что уравнение

$$f^4(z) + f'(z+1) = e^{4z}e^{4z^2} + (2z+3)e^{3z+2}e^{z^2}$$

имеет решение $f(z) = e^z e^{z^2}$. Здесь, $P_1(z) = e^{4z}$, $A_1 = 4$ и $Q_1(z) = (2z+3)e^{3z+2}$, $B_1 = 1$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{4}{1} = \frac{n}{m}$. Конечно, можно также сказать, что $P_1(z) = (2z+3)e^{3z+2}$, $A_1 = 1$ и $Q_1(z) = e^{4z}$, $B_1 = 4$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{4} = \frac{m}{n}$. Этот пример показывает, что при условий теоремы 1.2, вид решений уравнения (1.5) соответствует нашим результатам.

Следствие 1.3. *Пусть $P_1(z)$, $Q_1(z)$ — ненулевые целые функции порядка меньше k, а A_1, B_1 — различные ненулевые константы. Если $n > m + 2$ — два натуральных числа и $\frac{A_1}{B_1} \neq (\frac{m}{n})^{\pm 1}$, тогда уравнение (1.5) не имеет целых трансцендентных решений гипепорядка строго меньше 1.*

Теорема 1.4. *Пусть $P_2(z)$ — целая функция порядка меньше k, а A_2 — ненулевая константа, и пусть $n > m + 1$ — два натуральных числа. Тогда уравнение (1.6) не имеет целых трансцендентных решений гипепорядка строго меньше 1.*

Теорема 1.5. *Пусть $P_3(z)$, $Q_3(z)$ — ненулевые целые функции порядка меньше k, A_3 — ненулевая константа, и пусть $n > m + 2$ — два целых положительных числа. Тогда уравнение (1.7) не имеет целых трансцендентных решений гипепорядка строго меньше 1.*

Фактически, из теоремы 1.5 мы можем получить улучшение теоремы C.

Следствие 1.6. *Пусть $r(z)$ – непостоянный полином, $p(z)$ и $q(z)$ – две ненулевые целые функции порядка меньше $\deg r(z)$. Если $n > m + 2$ — два целых положительных числа, тогда*

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)$$

не имеет целых трансцендентных решений гипепорядка строго меньше 1.

Замечания (1) В условиях теоремы 1.4 и теоремы 1.5 мы видим, что уравнение (1.6) и уравнение (1.7) не имеют трансцендентных мероморфных решений гиперпорядка строго меньше 1, удовлетворяющих $N(r,f) = S(r,f)$.

(2) Требуемый результат теоремы 1.1 непосредственно следует из следствия 1.3 и теорем 1.4-1.5.

В дальнейшем мы предполагаем, что читатель знаком со стандартными обозначениями и фундаментальными результатами теории Неванлинны [22].

2. Некоторые леммы

Лемма 2.1. [4, Теорема 5.1] *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция гиперпорядка строго меньше 1. Тогда*

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) + m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+c)}\right) = S(r,f).$$

Замечание. В этой статье мы будем обозначать через $S(r,f)$ любую величину, удовлетворяющую $S(r,f) = o(T(r,f))$, при $r \to \infty$ вне возможного исключительного множества E конечной логарифмической меры. При этом через $S_1(r,f)$ мы обозначаем любую величину, удовлетворяющую $S_1(r,f) = o(T(r,f))$ для всех r вне возможного исключительного множества E_1 конечной линейной меры. E и E_1 не обязательно должны быть одинаковыми в каждом случае.

Из леммы 2.1 и леммы 8.3 в [4] мы получаем следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция гиперпорядка строго меньше 1, тогда имеем*

$$N(r, f(z+c)) = N(r,f) + S(r,f),$$
$$N\left(r, \frac{1}{f(z+c)}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f),$$

и

$$T(r, f(z+c)) = T(r,f) + S(r,f).$$

Замечание. Из леммы 2.1 и леммы 2.2 видим, что если $f(z)$ — мероморфная функция гиперпорядка строго меньше 1, то

$$m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f}\right) \le m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f(z+c)}\right) + m\left(r, \frac{f(z+c)}{f}\right) + O(1) \le S(r,f). \tag{2.1}$$

Более того,

$$\begin{aligned} T(r, f'(z+c)) &\le N(r, f'(z+c)) + m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f}\right) + m(r,f) + O(1) \\ &\le 2N(r, f(z+c)) + m(r,f) + S(r,f) \le 2T(r,f) + S(r,f). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Лемма 2.3. [22, Theorem 1.49] *Предположим, что* $f_1(z), f_2(z), \dots f_n(z)$ *— линейно независимые мероморфные функции, удовлетворяющие* $\sum_{j=1}^{n} f_j \equiv 1$. *А если*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{N}(r, f_j) = o(\max_{1 \le j \le n}\{T(r, f_j)\}),$$

тогда

$$\max_{1 \le j \le n}\{T(r, f_j)\} \le \sum_{j=1}^{n} N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + o(\max_{1 \le j \le n}\{T(r, f_j)\}),$$

при $r \to \infty, r \notin E_1$, *где* D *— определитель Вронского* $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Лемма 2.4. [2] *Пусть* $f_1(z)$, $f_2(z), \dots, f_p(z)$ *— линейно независимые целые функции, где* $p \ge 2$. *Предположим, что для каждого комплексного числа* z,

$$\max\{|f_1(z)|, |f_2(z)|, \dots, |f_p(z)|\} > 0.$$

Для $r > 0:$

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta - u(0), \quad u(z) = \sup_{1 \le j \le p} \log|f_j(z)|.$$

Положим $f_{p+1} = f_1 + f_2 + \dots + f_p$. *Тогда*

$$T(r) \le \sum_{j=1}^{p+1} N_{p-1}\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + S(r) \le (p-1)\sum_{j=1}^{p+1} \overline{N}_{p-1}\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + S(r),$$

где $S(r)$ *— величина, удовлетворяющая:*

$$S(r) = O(\log T(r)) + O(\log r), \quad r \to \infty, r \notin E_1.$$

Если хотя бы одно из частных $\frac{f_j}{f_m}$ *является трансцендентной функцией, то*

$$S(r) = o(T(r)), \quad r \to \infty, r \notin E_1,$$

а если все частные $\frac{f_j}{f_m}$ *являются рациональными функциями, то*

$$S(r) \le -\frac{1}{2}p(p-1)\log r + O(1), \quad r \to \infty, r \notin E_1.$$

Здесь $n_p\left(r, \frac{1}{f}\right)$ *обозначает количество нулей* f *в* $\{z : |z| \le r\}$, *рассчитанное следующим образом: ноль* f *кратности* m *считается ровно* k *раз, где* $k = \min\{m, p\}$. *Далее, через* $N_p\left(r, \frac{1}{f}\right)$ *обозначаем соответствующую средную считающую функцию, где* p *— целое положительное число.*

Лемма 2.5. [2] *Предположим, что условия леммы 2.4 выполнены. Тогда для любых* j *и* m, *мы имеем*

$$T\left(r, \frac{f_j}{f_m}\right) = T(r) + O(1), \quad r \to \infty,$$

и для любого j,

$$N\left(\frac{1}{f_j}\right) \le T(r) + O(1), \quad r \to \infty.$$

Лемма 2.6. [14, Лемма 2.5] *Пусть* m, k *— целые положительные числа,* $A_1, \dots, A_m$ *— различные ненулевые комплексные числа, а* $B_0, B_1, \dots, B_m$ *— мероморфные функции порядка меньше* k *такие, что что* $B_j \not\equiv 0 \ (1 \le j \le m)$. *Положим*

$$\varphi(z) = B_0(z) + \sum_{j=1}^{m} B_j e^{A_j z^k}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Существуют два положительных числа* $d_1 < d_2$ *такие, что для достаточно больших* r

$$d_1 r^k \le T(r, \varphi) \le d_2 r^k.$$

(2) *Если* $B_0 \not\equiv 0$, *то* $m\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) = o(r^k), \quad r \to \infty.$

Лемма 2.7. [22, Теорема 1.24] *Пусть* $f(z)$ *— непостоянная мероморфная функция, а* k *— целое положительное число. Затем,*

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \le N\left(r, \frac{1}{f}\right) + k\overline{N}(r, e) + S_1(r, e).$$

3. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $f(z)$ — мероморфное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям теоремы 1.2. Тогда по лемме 2.6 и (2.1) имеем

$$\begin{aligned} d_1 r^k &\le m(r, P_1 e^{A_1 z^k} + Q_1 e^{B_1 z^k}) = T(r, f^n + (f'(z+c))^m) + S(r, f) \\ &= m(r, f^n + (f'(z+c))^m) + S(r, f) \\ &\le m(r, f^n) + m\left(r, \left(\frac{f'(z+c)}{f}\right)^m\right) + m(r, f^m) + S(r, f) \\ &\le (m+n)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \tag{3.1}$$

При этом из леммы 2.6, уравнений (1.5) и (2.1) получаем

$$\begin{aligned} nT(r, f) &= T(r, f^n) = m(r, f^n) + S(r, f) \\ &\le m(r, P_1 e^{A_1 z^k} + Q_1 e^{B_1 z^k}) + m\left(r, \left(\frac{f'(z+c)}{f}\right)^m\right) + m(r, f^m) + S(r, f) \\ &\le d_2 r^k + mT(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

то есть

$$(n-m)T(r, f) \le d_2 r^k + S(r, f). \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) мы знаем, что

$$D_1 r^k \le T(r, f) \le D_2 r^k, \quad r \to \infty, r \notin E, \tag{3.3}$$

где D_1, D_2 — положительные числа. Итак, $\rho(f) = k$, здесь и далее мы обозначаем через $\rho(f)$ порядок $f(z)$. Кроме того, из предположения, что $\rho(P_1) < k, \quad \rho(Q_1) < k$, имеем

$$T(r, P_1) = S(r, f), \quad T(r, Q_1) = S(r, f). \tag{3.4}$$

Более того,

$$S(r, f) = o(r^k), \quad r \to \infty, r \notin E. \tag{3.5}$$

Согласно факторизационной теореме Адамара существует целая функция $H(z)(\not\equiv 0)$ такая, что $f(z)H(z)$ будет целой функцией. И тогда,

$$N\left(r, \frac{1}{H}\right) = N(r, f) = S(r, f). \tag{3.6}$$

Кроме того, из уравнения (1.5) получаем, что $(f'(z+c))^m H^n$ также является целой функцией. Учитывая, что

$$T(r, f^n) \leq T\left(r, \frac{f^n}{(f'(z+c))^m}\right) + T(r, (f'(z+c))^m) + O(1),$$

получим, что

(3.7)

$$T\left(r, \frac{f^n}{(f'(z+c))^m}\right) \geq nT(r, f) - m(m(r, f'(z+c)) + S(r, f)$$

$$\geq nT(r, f) - m\left(m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f}\right) + m(r, f)\right) + S(r, f) \geq (n-m)T(r, f) + S(r, f).$$

Предположим, $G_1(z)$ — каноническое произведение (или многочлен), образованное общими нулями a_i функций $f^n H^n, (f'(z+c))^m H^n, P_1 e^{A_1 z^k} H^n, Q_1 e^{B_1 z^k} H^n$, причем каждое a_i считается по минимальному числу соответствующих кратностей общих нулей всех четырех функции. Тогда $G_1(z)$ является целой функцией и удовлетворяет условию

$$N\left(r, \frac{1}{G_1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{P_1 H^n}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{P_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{H^n}\right) = S(r, f), \tag{3.8}$$

согласно (3.4) and (3.6). Пусть

$$f_1 = -\frac{(f'(z+c))^m H^n}{G_1}, f_2 = \frac{P_1 e^{A_1 z^k} H^n}{G_1}, f_3 = \frac{Q_1 e^{B_1 z^k} H^n}{G_1}, f_4 = \frac{f^n H^n}{G_1}.$$

Тогда f_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ – целые функции. При этом, функции f_j не имеют общих нулей. Следовательно,

$$\max\{|f_1(z)|, |f_2(z)|, |f_3(z)|, |f_4(z)|\} > 0$$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Более того, из (1.5), имеем, что

$$f_4 = f_1 + f_2 + f_3. \tag{3.9}$$

Случай 1. Если $(f'(z+c))^m$, $P_1(z)e^{A_1z^k}$, $Q_1(z)e^{B_1z^k}$ линейно независимы. тогда f_1, f_2, f_3 линейно независимы, и из (3.3) и (3.7) имеем, что функция $\frac{f_4(z)}{f_1(z)}$ трансцендентна. Следовательно, согласно (3.4), (3.6), (3.8), (3.9), леммам 2.4-2.5 и лемме 2.7 получаем, что

(3.10)

$$\begin{aligned}
&nN\left(r,\frac{1}{f}\right)=N\left(r,\frac{1}{f^n}\right)\le N\left(r,\frac{G_1}{f^nH^n}\right)+N(r,H^n)+N\left(r,\frac{1}{G_1}\right)+S(r,f)\\
&=N\left(r,\frac{1}{f_4}\right)+S(r,f)\le T_1(r)+S(r,f)\le\sum_{j=1}^{4}N_2\left(r,\frac{1}{f_j}\right)+o(T_1(r))+S(r,f)\\
&\le N_2\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{(f'(z+c))^m}\right)+o(T_1(r))+S(r,f)\\
&\le 2N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^m}\right)+o(T_1(r))+S(r,f)\\
&\le 2N\left(r,\frac{1}{f}\right)+mN\left(r,\frac{1}{f}\right)+o(T_1(r))+S(r,f)\\
&\le (m+2)T(r,f)+o(T_1(r))+S(r,f),
\end{aligned}$$

где

$$T_1(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_1(re^{i\theta})d\theta-u_1(0),\quad u_1(z)=\sup_{1\le j\le 3}\log|f_j(z)|.$$

Из уравнения (3.10) следует, что

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=S(r,f), \tag{3.11}$$

при условии $n>m+2$. Кроме того, $o(T_1(r))=S(r,f)$. Перепишем (1.5) в виде

$$\frac{P_1(z)e^{A_1z^k}}{f^n(z)}+\frac{Q_1(z)e^{B_1z^k}}{f^n(z)}-\frac{(f'(z+c))^m}{f^n(z)}=1. \tag{3.12}$$

Положим

$$F_1=\frac{P_1e^{A_1z^k}}{f^n},F_2=\frac{Q_1e^{B_1z^k}}{f^n},F_3=-\frac{(f'(z+c))^m}{f^n}.$$

Тогда, из (3.4), (3.11), из Лемм 2.2, 2.7, и предположения $N(r,f)=S(r,f)$, имеем, что

$$N(r,F_j)=S(r,f),\quad N\left(r,\frac{1}{F_j}\right)=S(r,f),\quad j=1,2,3.$$

Более того, из (2.2) и (3.3)-(3.5) следует, что $T(r,F_j)=O(r^k),\quad r\to\infty,r\notin E$. Тогда, применив лемму 2.3 к (3.12), и из (3.5), получим, что

$$T(r,F_3)\le o\left(\max_{1\le j\le 3}T(r,F_j)\right)+S(r,f)=o(r^k)+S(r,f)=S(r,f),$$

что противоречит (3.7).

Случай 2. Если $(f'(z+c))^m, P_1(z)e^{A_1z^k}, Q_1(z)e^{B_1z^k}$ линейно зависимы, тогда

$$(f'(z+c))^m=C_1P_1(z)e^{A_1z^k}+C_2Q_1(z)e^{B_1z^k}, \tag{3.13}$$

где по крайней мере одно из чисел C_1 и C_2 отлично от нуля. Подставив (3.13) в (1.5), находим, что

$$f^n(z) = (1 - C_1)P_1(z)e^{A_1 z^k} + (1 - C_2)Q_1(z)e^{B_1 z^k}. \tag{3.14}$$

Случай 2.1. Если $C_1 \neq 1$ и $C_2 \neq 1$, тогда

$$f^n(z) = e^{A_1 z^k}((1 - C_1)P_1(z) + (1 - C_2)Q_1(z)e^{(B_1 - A_1)z^k}).$$

Применив лемму 2.6 получим:

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \geq d_3 r^k, \quad r \to \infty, \tag{3.15}$$

где d_3 — положительное число. Очевидно, $P_1(z)e^{A_1 z^k}$ и $Q_1(z)e^{B_1 z^k}$ линейно независимы. Более того, из (3.14) мы видим, что $f(z)$ — целая функция. Предположим, $G_2(z)$ — каноническое произведение (или многочлен), образованное общими нулями b_i числа $f^n, (1 - C_1)P_1(z)e^{A_1 z^k}, (1 - C_2)Q_1(z)e^{B_1 z^k}$, а каждая из b_i считается по минимальному числу соответствующих кратностей общих нулей всех трех вышеперечисленных функций. Тогда мы видим, что $G_2(z)$ является целой функцией и удовлетворяет условию

$$N\left(r, \frac{1}{G_2}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{P_1}\right) = S(r, f), \tag{3.16}$$

согласно (3.4). Положим

$$g_1 = \frac{(1 - C_1)P_1 e^{A_1 z^k}}{G_2}, g_2 = \frac{(1 - C_2)Q_1 e^{B_1 z^k}}{G_2}, g_3 = \frac{f^n}{G_2}.$$

Тогда g_j $(j = 1, 2, 3)$ – целые функции. Так как g_j не имеют общих нулей, $\max\{|g_1(z)|, |g_2(z)|, |g_3(z)|\} > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Но из (3.14), имеем:

$$g_3 = g_1 + g_2. \tag{3.17}$$

И функция $\frac{g_2}{g_1} = \frac{(1-C_2)Q_1}{(1-C_1)P_1}e^{(B_1 - A_1)z^k}$ транцендентна. Тогда из (3.4), лемм 2.4-2.5 и (3.16) получим, что

$$\begin{aligned}
&nN\left(r, \frac{1}{f}\right) = N\left(r, \frac{1}{f^n}\right) \leq N\left(r, \frac{G_2}{f^n}\right) + N\left(r, \frac{1}{G_2}\right) + S(r, f) \\
&= N\left(r, \frac{1}{g_3}\right) + S(r, f) \leq T_2(r) + S(r, f) \leq \sum_{j=1}^{3} N_1\left(r, \frac{1}{g_j}\right) + o(T_2(r)) + S(r, f) \\
&\leq N_1\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + o(T_2(r)) + S(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(T_2(r)) + S(r, f) \\
&\leq T(r, f) + o(T_2(r)) + S(r, f),
\end{aligned}$$

где

$$T_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta})d\theta - u_2(0), \quad u_2(z) = \sup_{1 \leq j \leq 2} \log|g_j(z)|.$$

Следовательно, $T_2(r) \leq T(r,f) + o(T_2(r)) + S(r,f)$,

$$(n-1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq o(T_2(r)) + S(r,f).$$

Согласно (3.5),

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r,f) = o(r^k), \quad r \to \infty, r \notin E,$$

что противоречит (3.15).

Случай 2.2. Если $C_1 \neq 1$ и $C_2 = 1$, тогда по (3.14), имеем, что

$$f^n(z) = (1 - C_1)P_1(z)e^{A_1 z^k}. \tag{3.18}$$

Из равенств (3.4), (3.5) и (3.18) вытекает, что

$$nN\left(r, \frac{1}{f}\right) = N\left(r, \frac{1}{f^n}\right) = N\left(r, \frac{1}{P_1}\right) = S(r,f) = o(r^k), \quad r \to \infty, r \notin E. \tag{3.19}$$

Пусть $C_1 \neq 0$. Применив леммы 2.2, 2.6 и 2.7 к (3.13), находим, что

$$\begin{aligned} mN\left(r, \frac{1}{f}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f^m}\right) \geq N\left(r, \frac{1}{(f'(z+c))^m}\right) \\ &= N\left(r, \frac{1}{C_1 P_1 e^{B_1 z^k} + C_2 Q_1 e^{B_1 z^k}}\right) \geq d_4 r^k, \quad r \to \infty, d_4 > 0, \end{aligned}$$

что противоречит (3.19). Следовательно, $C_1 = 0$, и

$$f^n(z) = P_1(z)e^{A_1 z^k}, \tag{3.20}$$

$$(f'(z+c))^m = Q_1(z)e^{B_1 z^k}. \tag{3.21}$$

Из (3.20), имеем, что $f(z) = r(z)e^{\frac{A_1 z^k}{n}}$, где $r^n(z) = P_1(z)$. Следовательно,

$$f'(z+c) = \left(r'(z+c) + r(z+c)\frac{kA_1(z+c)^{k-1}}{n}\right)e^{\frac{A_1(z+c)^k}{n}}.$$

Отсюда и из (3.21), видим, что $\frac{A_1}{B_1} = \frac{n}{m}$.

Случай 2.3. Если $C_1 = 1$ и $C_2 \neq 1$, тогда, аналогично случаю 2.2, имеем, что $f(z) = s(z)e^{\frac{B_1 z^k}{n}}$ и $\frac{A_1}{B_1} = \frac{m}{n}$, где $s^n(z) = Q_1(z)$.

4. Доказательство теоремы 1.4

Предположим, что уравнение (1.6) имеет трансцендентное целое решение $f(z)$ гиперпорядка строго меньше 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $P_2(z) \equiv 0$, тогда из (1.6) и (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} nT(r,f) &= T(r,f^n) = T(r,(f'(z+c))^m) = m(r,(f'(z+c))^m) + S(r,f) \\ &\leq m\left(r, \frac{(f'(z+c))^m}{f^m}\right) + m(r,f^m) + S(r,f) \leq mT(r,f) + S(r,f), \end{aligned}$$

что противоречит предположению $n > m + 1$.

Случай 2. Если $P_2(z) \not\equiv 0$, тогда, мы получаем противоречие аналогично случаю 1 в теореме 1.2, поскольку $(f'(z+c))^m$, $P_2(z)e^{A_2z^k}$ линейно независимы. Кроме того, когда $(f'(z+c))^m$, $P_2(z)e^{A_2z^k}$ линейно зависимы, получаем, что

$$f^n(z) = (1-C_3)P_2(z)e^{A_2z^k} \tag{4.1}$$

$$(f'(z+c))^m = C_3P_2(z)e^{A_2z^k}, \tag{4.2}$$

где $C_3 \neq 0$ и $C_3 \neq 1$. Из (4.1), имеем, что $f(z) = r_1(z)e^{\frac{A_2z^k}{n}}$, где $r_1^n(z) = (1-C_3)P_1(z)$. Следовательно,

$$f'(z+c) = \left(r_1'(z+c) + r_1(z+c)\frac{kA_2(z+c)^{k-1}}{n}\right)e^{\frac{A_2(z+c)^k}{n}}. \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3), имеем $m = n$, что противоречит предположению $n > m+1$.

5. Proof of Theorem 1.5

Аналогично теореме 1.2 имеем:

$$S(r,f) = o(r^k), \quad r \to \infty, r \notin E. \tag{5.1}$$

Переписав (1.7) в виде

$$\frac{1}{P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z)} + \frac{(f'(z+c))^m}{f^n(z)(P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z))} = \frac{1}{f^n(z)}.$$

и учитывая лемму 2.6 и (5.1), будем иметь, что

$$\begin{aligned} nm\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{1}{P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z)}\right) + m\left(r, \frac{(f'(z+c))^m}{f^m}\right) \\ &+ m\left(r, \frac{1}{f^{n-m}}\right) + m\left(r, \frac{1}{P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z)}\right) + S(r,f) \\ &\leq (n-m)m\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(r^k) + S(r,f), \quad r \to \infty, r \notin E. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r,f).$$

Следовательно,

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f) = T(r,f). \tag{5.2}$$

Аналогично теореме 1.2, получим, что

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r,f), \tag{5.3}$$

где либо $(f'(z+c))^m$, $P_3(z)e^{A_3z^k}$ и $Q_3(z)$ линейно независимы, либо линейно зависимы. Очевидно, (5.2) и (5.3) противоречат друг другу. Теорема доказана.

Благодарность. Авторы хотели бы поблагодарить рецензента за полезные предложения и комментарии.

К. ЖУ, К. КИ

Abstract. In this paper, we study the existence of meromorphic solutions of hyper-order strictly less than 1 to the Fermat type differential-difference equations, which improves earlier results of such studies.

Список литературы

[1] I. N. Baker, "On a class of meromorphic functions", Proc. Am. Math. Soc. **17**, 819 – 822 (1966).

[2] H. Cartan, "Sur les záros des combinaisons lineaires de p fonctions holomorphes données", Mathematica Cluj **7**, 5 – 31 (1933).

[3] W. Chen, Q. Han and J. B. Liu, "On Fermat Diophantine functional equations, little Picard theorem and beyond", Aequ. Math. **93**, 425 – 432 (2019).

[4] R. G. Halburd and R. J. Korhonen and K. Tohge, "Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages", Trans. Amer. Math. Soc. **366**, 4267 – 4298 (2014).

[5] Q. Han and F. Lü, "On the equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z+\beta}$", J. Contemp. Math. Anal. **54**, 98 – 102 (2019).

[6] F. Gross, "On the equation $f^n + g^n = 1$", Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 86 – 88 (1966).

[7] F. Gross, "On the equation $f^n + g^n = h^n$", Am. Math. Mon. **73**, 1093 – 1096 (1966).

[8] K. Liu, "Meromorphic functions sharing a set with applications to difference equations", J. Math. Anal. Appl. **359**, 384 – 393 (2009).

[9] K. Liu, "Existence of entire solutions of nonlinear difference equations", Czech. Math. J. **61**, 565 – 576 (2011).

[10] K. Liu, T. B. Cao and H. Z. Cao, "Entire solutions of Fermat type differential-difference equations", Arch. Math. **99**, 147 – 155 (2012).

[11] K. Liu and L. Z. Yang, "On entire solutions of some differential-difference equations", Comput. Methods Funct. Theory **13**, 433 – 447 (2013).

[12] F. Lü and Q. Han, "On the Fermat-type equation $f^3(z) + f^3(z + c) = 1$", Aequ. Math. **91**, 129 – 136 (2017).

[13] F. Lü and H. X. Guo, "On meromorphic solutions of the Fermat-Type functional equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z+\beta}$", Mediterr. J. Math. **19**, paper number 118 (2022).

[14] Z. Q. Mao and H. F. Liu, "On meromorphic solutions of nonlinear delay-differential equations", J. Math. Anal. Appl. **509**, article ID 125886 (2022).

[15] P. Montel, "Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications" [in French], Gauthier-Villars, Paris, 135 – 136 (1927).

[16] C. W. Peng and Z. X. Chen, "On a conjecture concerning some nonlinear difference equations", Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **36**, 221 – 227 (2013).

[17] X. G. Qi, "Value distribution and uniqueness of difference polynomials and entire solutions of difference equations", Ann. Polon. Math. **102**, 129 – 142 (2011).

[18] X. G. Qi and K. Liu, "Uniqueness and value distribution of differences of entire functions", J. Math. Anal. Appl. **379**, 180 – 187 (2011).

[19] X. G. Qi, Y. Liu and L. Z. Yang, "A note on solutions of some differential-difference equations", J. Contemp. Math. Anal. **52**, 128 – 133 (2017).

[20] X. G. Qi and L. Z. Yang, "Entire solutions of some differential-difference equations", Bull. Iranian Math. Soc. **46**, 579 – 591 (2020).

[21] Z. T. Wen, J. Heittokangas and I. Laine, "Exponential polynomials as solutions of certain nonlinear difference equations", Acta Math. Sin. **28**, 1295 – 1306 (2012).

[22] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).

[23] C. C. Yang and I. Laine, "On analogies between nonlinear difference and differential equations", Proc. Japan Acad Ser. A. **86**, 10 – 14 (2010).

[24] J. Zhang and L. W. Liao, "On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations", Taiwan. J. Math. **15**, 2145 – 2157 (2011).

Поступила 01 июня 2023

После доработки 06 ноября 2023

Принята к публикации 27 ноября 2023