

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМАМИ ХААРА И УОЛША В ВЕСОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНД ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Б. И. ГОЛУБОВ, С. С. ВОЛОСИВЕЦ

Московский физико-технический институт, РФ
Саратовский государственный университет, РФ
E-mails: *golubovboris1939@gmail.com; VolosivetsSS@mail.ru*

Аннотация. В настоящей статье мы приводим прямые теоремы приближения полиномами Хаара и Уолша в весовом гранд пространстве Лебега. Также изучается порядок приближения средними Бореля, Эйлера, Зигмунда-Рисса и Нерлунда рядов Фурье-Уолша-Пэли в упомянутом выше пространстве.

MSC2020 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: система Хаара; весовое гранд пространство Лебега; прямая теорема приближения; линейные средние ряда Фурье-Уолша.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является весовой функцией, т.е. интегрируема по Лебегу и п.в. положительна на $[0, 1]$. Обычное весовое пространство Лебега $L_v^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций f , таких что

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p v(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Для $v \equiv 1$ мы будем писать $\|f\|_p$ вместо $\|f\|_{p,1}$.

Для $1 < p < \infty$ и $\theta > 0$ мы обозначим через $L_v^{p,\theta}[0, 1]$ весовое обобщенное гранд пространство Лебега, состоящее из всех действительнозначных измеримых на $[0, 1]$ функций f , таких что

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\theta,v} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon^\theta \int_0^1 |f(x)|^{p-\varepsilon} v(x) dx \right)^{1/(p-\varepsilon)} = \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f\|_{p-\varepsilon,v} < \infty. \end{aligned}$$

Эти пространства введены для $\theta = 1$ и $v(x) \equiv 1$ Т.Иванцом и К.Сбордоне [1] и позже для $\theta > 1$ и $v(x) \equiv 1$ Л.Греко, Т.Иванцом и К.Сбордоне в [2]. Если $\theta = 0$ и $v(x) \equiv 1$, то получается гранд пространство Лебега $L^p[0, 1]$. Легко видеть, что

$L^p[0, 1] \subset L^p[0, 1] \subset L^{p-\varepsilon}[0, 1]$ при $p > 1$ и $0 < \varepsilon < p - 1$. Поскольку $L^p[0, 1]$ не является плотным в $L^p[0, 1]$ (см. [3]) мы будем рассматривать подпространство $\mathcal{L}_v^{p),\theta}[0, 1]$, которое является замыканием $L_v^p[0, 1]$ в $L_v^{p),\theta}[0, 1]$ и снабжено нормой $\|\cdot\|_{p),\theta,v}$. К. Сбордине [4] установил, что $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f\|_{p-\varepsilon,v} = 0.$$

Будем говорить, что весовая функция v принадлежит классу Б.Макенхаупта $A_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I v(x) dx \left(|I|^{-1} \int_I (v(x))^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} = [v]_{A_p[0,1]} < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем интервалам I из отрезка $[0, 1]$ и $|I|$ означает меру Лебега I (см. [5]). Пусть

$$Mf(x) = \sup_{x \in I \subset [0,1]} |I|^{-1} \int_I |f(t)| dt,$$

где I — интервалы, содержащие x . А.Фиоренца, Б.Гупта и П.Джейн [6, теорема 4.1] доказали, что максимальный оператор Mf является ограниченным оператором в $L_v^{p),\theta}[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ и $\theta = 1$ в том и только в том случае, когда $v \in A_p[0, 1]$. Подобный результат был получен В.М.Кокилашвили [7, теорема 3.1] при $\theta > 0$ в более общем виде.

Для $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ мы полагаем $I_j^k = [(j-1)/2^k, j/2^k]$, $j \in [1, 2^k] \cap \mathbb{Z}$. Напомним, что система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ задается следующим образом: $\chi_1(x) \equiv 1$ и, для $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z} \cap [1, 2^k]$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in I_{2j-1}^{k+1}; \\ -2^{k/2}, & x \in I_{2j}^{k+1}; \\ 0, & x \notin I_j^k. \end{cases}$$

Система $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^n$ ортогональна на $[0, 1]$ и полна в $L^1[0, 1]$ (см. [8, гл. 3, раздел 1]). Для $f \in L^1[0, 1]$ и $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определим коэффициенты Фурье-Хаара и частные суммы Фурье-Хаара

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt, \quad Q_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_k(f) \chi_k(x).$$

Из [9, гл. 10, теорема 10.2.7] вытекает, что $Q_n(f)(x)$ имеет n интервалов постоянства $\{\Delta_{n,m}\}_{m=1}^n$ и удовлетворяет равенству

$$(1.1) \quad Q_n(f)(x) = |\Delta_{n,m}|^{-1} \int_{\Delta_{n,m}} f(t) dt, \quad x \in \Delta_{n,m}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Наилучшее приближение полиномами по системе Хаара для $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0,1]$ определяется равенством

$$E_n(f)_{p,\theta,v} = \inf \left\{ \left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \chi_k \right\|_{p,\theta,v} : a_k \in \mathbb{R} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим теперь систему Уолша-Пэли. Пусть $r_0(x) = 1$ для $x \in [0, 1/2)$, $r_0(x) = -1$ для $x \in [1/2, 1)$ и $r_0(x)$ продолжается на $\mathbb{R}_+$ 1-периодически. Тогда $r_n(x) = r_0(2^n x)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ с двоичным разложением $n = \sum_{i=0}^{k(n)} \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, мы полагаем $w_n(x) = \prod_{i=0}^{k(n)} (r_i(x))^{\varepsilon_i}$. Система Уолша-Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является ортонормированной и полной в $L^1[0, 1]$ (см. [9, гл. 1,2]). Для $f \in L^1[0, 1]$ зададим коэффициенты Фурье-Уолша-Пэли и частичные суммы Фурье-Уолша-Пэли следующим образом:

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t) w_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) w_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим наилучшее приближение полиномами Уолша-Пэли

$$E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} = \inf \left\{ \left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k \right\|_{p,\theta,v} : a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$.

Для $f \in L^1[0, 1)$, продолженной на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 1-периодически, мы рассмотрим средние Стеклова $s_h(f)(x) = h^{-1} \int_0^h f(x+t) dt$, $h > 0$. С помощью леммы 2.8 ниже мы получаем равномерную ограниченность s_h , $h > 0$, в $L_v^{p,\theta}[0, 1]$ для $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$. Таким образом, в этом случае мы можем определить модуль непрерывности в $\mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$:

$$\Omega(f, \delta)_{p,\theta,v} = \sup\{\|f - s_h(f)\|_{p,\theta,v} : 0 \leq h \leq \delta\}, \quad \delta \in [0, 1].$$

Будем писать $f \in W^1 L_v^{p,\theta}[0, 1]$, если f абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, 1-периодична и $f' \in L_v^{p,\theta}[0, 1]$. Определим следующий K -функционал

$$\begin{aligned} K_{p,\theta,v}(f, t) &= K(f, t, \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1], W^1 L_v^{p,\theta}[0, 1]) := \\ &:= \inf\{\|f - g\|_{p,\theta,v} + t\|g'\|_{p,\theta,v} : g \in W^1 L_v^{p,\theta}[0, 1]\}. \end{aligned}$$

Мы можем определить $\Omega(f, \delta)_{p,v}$ и $E_n(f)_{p,v}$ как выше, заменив норму $\|\cdot\|_{p,\theta,v}$ на норму $\|\cdot\|_{p,v}$. Используя некоторые идеи И. И. Шарпудинова [10], второй из авторов статьи [11] доказал прямую теорему приближения полиномами Хаара в весовых симметричных (или перестановочно-инвариантных) пространствах. Из

этого результата мы выделим утверждение, касающееся весовых пространств $L_v^p[0, 1]$.

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in L_v^p[0, 1]$. Тогда

$$E_n(f)_{p,v} \leq \|f - Q_n(f)\|_{p,v} \leq C\Omega(f, 1/n)_{p,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первой целью работы является получение аналога теоремы А для функций из $\mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$. Отметим, что приближения тригонометрическими полиномами в подобных пространствах изучалось Н. Данелия и В. М. Кокилашвили в [12], а затем В. М. Кокилашвили и А. Н. Месхи в [13]. Также мы напомним, что прямая теорема приближения полиномами Хаара в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, была доказана П. Л. Ульяновым (см. [9, гл. 10, теорема 10.2.3], тогда как соответствующая обратная теорема была получена первым из авторов настоящей статьи [9, гл. 10, теорема 10.2.8]. В работе М. Г. Григоряна [14] получены интересные результаты о сходимости жадных алгоритмов по системе Уолша.

Теперь мы определим некоторые линейные средние рядов Фурье-Уолша-Пэли, такие как средние Бореля

$$B_r(f)(x) = e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} S_{k+1}(f)(x), \quad r \geq 1,$$

средние Эйлера

$$e_n^q(f)(x) = (1+q)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} S_{k+1}(f)(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

средние Зигмунда-Рисса

$$\sigma_n^{(r)}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k^r/n^r) \widehat{f}(k) w_k(x), \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и средние Нерлунда

$$N_n(f)(x) = P_n^{-1} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} S_k(f)(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел и $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Также мы рассмотрим общие линейные средние

$$\tau_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f)(x), \quad a_{nk} \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $A_{n,m} = m^{-1} \sum_{k=1}^m a_{nk}$ и $a_{nk} = 0$ при $k \geq n+1$. Матрица $A = \{a_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $AMIMS$ (почти монотонно возрастающие в среднем последовательности) или классу $AMDMS$ (почти монотонно убывающие в среднем

последовательности), если существует $K > 0$, такое что для любых $n \in \mathbb{N}$ и натуральных m, l , удовлетворяющих неравенству $1 \leq m \leq l \leq n$, мы имеем

$$A_{nm} \leq K A_{nl} \quad \text{или} \quad A_{nm} \geq K A_{nl}$$

соответственно. Определения классов $AMIMS$ и $AMDMS$ были предложены Р. Н. Мохapatрой и Б. Жалем [15].

Неубывающая и непрерывная на $[0, 1]$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу Φ , если $\omega(0) = 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари-Стечкина BS_α , $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \omega(1/k) = O(n^\alpha \omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Это определение и его эквивалентные формы см. в [16, лемма 3].

Второй целью статьи является получение оценок сверху для приближений в $L_v^{p, \theta}[0, 1]$ средними Бореля, Эйлера, Зигмунда-Рисса и Нерлунда рядов Фурье-Уолша-Пэли. Отметим, что приближение линейными средними тригонометрических рядов Фурье в таких пространствах изучались в [12].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Следующая лемма 2.1 играет ключевую роль в нашей работе. Она доказана В. М. Кокилашвили и А. Н. Месхи [13, теорема 2.1].

Лемма 2.1. Пусть $p_0 \in (1, \infty)$ и $\mathcal{F}[0, 1]$ является классом пар неотрицательных измеримых функций, определенных на $[0, 1]$. Предположим, что для произвольной пары $(f, g) \in \mathcal{F}[0, 1]$ и всех $v \in A_{p_0}[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 g^{p_0}(x) v(x) dx \right)^{1/p_0} \leq C_1 N([v]_{A_{p_0}[0, 1]}) \left(\int_0^1 f^{p_0}(x) v(x) dx \right)^{1/p_0},$$

где $N(x)$ — неотрицательная неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция и C_1 независима от (f, g) и v . Тогда для всех $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $(f, g) \in \mathcal{F}[0, 1]$ и $v \in A_p[0, 1]$ верно неравенство

$$\|g\|_{p, \theta, v} \leq C_2 \|f\|_{p, \theta, v},$$

где C_2 не зависит от (f, g) , но зависит от v .

Лемма 2.2. Пусть $1 < p < \infty$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in L_v^p[0, 1]$ и $Hf(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)|$. Тогда $\|Hf\|_{p, v} \leq C \|f\|_{p, v}$, где C зависит от p и $[v]_{A_p[0, 1]}$.

Лемма 2.2 принадлежит Дж. Госселину [17] и доказана им в более общей ситуации. Более сильный критерий установлен Янг Во-Санг [18].

Лемма 2.3. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p, \theta}[0, 1]$. Тогда

$$(2.1) \quad \|S_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq C_1 \|f\|_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.2) \quad \|f - S_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq (C_1 + 1) E_n^{wp}(f)_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Неравенство (2.1) вытекает из лемм 2.1 и 2.2. Пусть $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k$ такое, что $\|f - t_n\|_{p, \theta, v} = E_n^{wp}(f)_{p, \theta, v}$. Поскольку $S_n(t_n) = t_n$, имеем

$$\|f - S_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq \|f - t_n\|_{p, \theta, v} + \|Q_n(t_n - f)\|_{p, \theta, v} \leq (C_1 + 1) E_n^{wp}(f)_{p, \theta, v}$$

благодаря (2.1). $\square$

Лемма 2.4 вытекает из [9, гл. 10, теорема 10.2.7] и [9, гл. 1, (1.4.13)].

Лемма 2.4. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L^1[0, 1]$. Тогда

$$S_{2^k}(f)(x) = Q_{2^k}(f)(x), \quad x \in [0, 1].$$

Кроме того, если $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, то $Q_n(f)(x) = Q_{2^{k+1}}(f)(x)$ при $x \in [0, i/2^k)$ и $Q_n(f)(x) = Q_{2^k}(f)(x)$ при $x \in [i/2^k, 1)$.

Лемма 2.5. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p, \theta}[0, 1]$. Тогда

$$(2.3) \quad \|Q_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq C_1 \|f\|_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.4) \quad \|f - Q_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq (C_1 + 1) E_n(f)_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.4 мы получаем $|Q_n(f)(x)| \leq Hf(x)$, где Hf определен в лемме 2.2. В силу леммы 2.2 мы выводим (2.3), тогда как (2.4) доказывается аналогично (2.2). $\square$

Лемма 2.6. Если $\alpha > 0$ и $\omega \in BS_\alpha$, то существуют $\beta \in (0, \alpha)$ и $C > 0$, такие что

$$(2.5) \quad \omega(u) \leq C(u/v)^\beta \omega(v), \quad 0 < v \leq u \leq 1.$$

Обратно, из выполнения (2.5) для некоторого $\beta \in (0, \alpha)$ и $\omega \in \Phi$ вытекает, что $\omega \in BS_\alpha$.

Лемма 2.6 доказана Н. К. Бари и С. Б. Стечкиным [16, лемма 3].

Лемма 2.7. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$ и $f(x, y)$ неотрицательна и измерима на $[0, 1) \times [0, 1)$. Тогда

$$(2.6) \quad \left\| \int_0^1 f(\cdot, y) dy \right\|_{p, \theta, v} \leq \int_0^1 \|f(\cdot, y)\|_{p, \theta, v} dy.$$

Доказательство. Обобщенное неравенство Минковского верно в L^p норме по отношению к произвольной мере. Таким образом,

$$\varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \left\| \int_0^1 f(\cdot, y) dy \right\|_{p-\varepsilon, v} \leq \int_0^1 \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f(\cdot, y)\|_{p-\varepsilon, v} dy.$$

Взяв точную верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, p-1)$, получаем (2.6). $\square$

Лемма 2.8. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$ и функции $f \in L_v^{p, \theta}[0, 1]$ продолжены на $\mathbb{R}$ 1-периодически. Тогда максимальный оператор M ограничен в $L_v^{p, \theta}[0, 1]$. Как следствие, односторонние операторы Стеклова s_h , $0 < h < 1$, равномерно ограничены в $L_v^{p, \theta}[0, 1]$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано в [6, теорема 4.2] и оно верно также в $L_v^{p, \theta}[-1, 2]$. Таким образом, мы имеем $\|Mg\|_{L_v^{p, \theta}[-1, 2]} \leq C_1 \|g\|_{L_v^{p, \theta}[-1, 2]} \leq C_2 \|f\|_{p, \theta, v}$, где g есть 1-периодическое продолжение f . Также,

$$\left\| h^{-1} \int_0^h f(\cdot + t) dt \right\|_{p, \theta, v} \leq 2 \left\| (2h)^{-1} \int_{-h}^h f(\cdot + t) dt \right\|_{p, \theta, v} \leq 2 \|Mg\|_{L_v^{p, \theta}[-1, 2]}.$$

Эти факты дают второе утверждение леммы 2.8. $\square$

Лемма 2.9. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in W^1 L_v^{p, \theta}[0, 1]$. Тогда

$$\Omega(f, \delta)_{p, \theta, v} \leq C \delta \|f'\|_{p, \theta, v}, \quad \delta \in [0, 1].$$

Доказательство. По определению s_h и условию $f \in W^1 L_v^{p, \theta}[0, 1]$ имеем

$$s_h(f)(x) - f(x) = h^{-1} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt = h^{-1} \int_0^h \int_0^t f'(x+s) ds dt.$$

используя леммы 2.7 и 2.8, получаем

$$\|s_h(f) - f\|_{p, \theta, v} \leq h^{-1} \int_0^h t \left\| t^{-1} \int_0^t f'(x+s) ds \right\|_{p, \theta, v} dt \leq C_1 \frac{h}{2} \|f'\|_{p(\cdot), \theta}.$$

Беря точную верхнюю грань по $0 \leq h \leq \delta$, получаем

$$\Omega(f, \delta)_{p, \theta, v} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|s_h(f) - f\|_{p, \theta, v} \leq \frac{C_1 \delta}{2} \|f'\|_{p, \theta, v}. \quad \square$$

Следуя Шарапудинову [10], рассмотрим оператор

$$\Theta_z(f)(x) = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \int_0^h f(x+t) dt h^{-1} dh, \quad z \in (0, 1].$$

Аналогично [10, теорема 4] доказывается

Лемма 2.10. Пусть функция $f \in L^1[0, 1]$ продолжена 1-периодически на $\mathbb{R}_+$. Тогда

- (i) функция $\Theta_z(f)(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и 1-периодична;
- (ii) производная $\Theta'_z(f)(x)$ равна

$$2z^{-1} \int_{z/2}^z h^{-1}(f(x+h) - f(x)) dh \quad \text{н.в. на } [0, 1].$$

Используя лемму 2.10, мы можем доказать следующую эквивалентность между модулем непрерывности и соответствующим K -функционалом аналогично [11, теорема 2]. Отметим, что близкий результат для пространств с переменным показателем содержится в [10] в неявном виде.

Лемма 2.11. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p), \theta}[0, 1]$. Тогда существуют постоянные $C_2 > C_1 > 0$, такие что

$$C_1 \Omega(f, t)_{p, \theta, v} \leq K_{p, \theta, v}(f, t) \leq C_2 \Omega(f, t)_{p, \theta, v}, \quad t \in [0, 1].$$

Лемма 2.12. Пусть $j \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тогда существует $C = C(j, t)$, независимая от n , такая что

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{t^{n-k}}{(k+1)^j} \leq C \frac{(t+1)^n}{(n+1)^j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.12 доказана в [19].

3. ПРЯМЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Теорема 3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in W^1 L_v^{p), \theta}[0, 1]$. Тогда

$$(3.1) \quad E_n(f)_{p, \theta, v} \leq \|f - Q_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq C n^{-1} \|f'\|_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(3.2) \quad E_n^{wp}(f)_{p, \theta, v} \leq \|f - S_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq C n^{-1} \|f'\|_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Левое неравенство (3.1) очевидно. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$. Если $\Delta_{n, m}$, $1 \leq m \leq n$, являются интервалами постоянства для $Q_n(f)$, то в силу (1.1) для $x \in \Delta_{n, m}$ имеем

$$\begin{aligned} n|Q_n(f)(x) - f(x)| &\leq n|\Delta_{n, m}|^{-1} \int_{\Delta_{n, m}} |f(y) - f(x)| dy = \\ &= n|\Delta_{n, m}|^{-1} \int_{\Delta_{n, m}} \left| \int_x^y f'(t) dt \right| dy \leq n|\Delta_{n, m}|^{-1} \int_{\Delta_{n, m}} \int_{\Delta_{n, m}} |f'(t)| dt dy \leq \\ &\leq n \int_{\Delta_{n, m}} Q_n(|f'|)(y) dy = n|\Delta_{n, m}| Q_n(|f'|)(x) \leq 2Q_n(|f'|)(x) \end{aligned}$$

и в силу (2.3)

$$n\|f - Q_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq 2\|Q_n(|f'|)\|_{p,\theta,v} \leq C_1\|f'\|_{p,\theta,v},$$

так что (3.1) доказано. Используя (3.1) и лемму 2.4, получаем

$$E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - Q_{2^k}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 2^{-k} \|f'\|_{p,\theta,v}.$$

Теперь для $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$, мы находим, что

$$E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \frac{2C_1}{2^{k+1}} \|f'\|_{p,\theta,v} \leq \frac{2C_1}{n} \|f'\|_{p,\theta,v}.$$

Применяя (2.2), доказываем все неравенства из (3.2). $\square$

Теорема 3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$. Тогда

$$(3.3) \quad E_n(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - Q_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(3.4) \quad E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - S_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\Theta_z(f)$ — оператор, рассмотренный в лемме 2.10. В силу пункта (ii) этой леммы мы имеем

$$(3.5) \quad \|\Theta'_z(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 z^{-1} \Omega(f, z)_{p,\theta,v}.$$

Согласно лемме 2.7 мы получаем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \|f - \Theta_z(f)\|_{p,\theta,v} &= \left\| 2z^{-1} \int_{z/2}^z (f(\cdot) - s_h(f)(\cdot)) dh \right\|_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \|f - s_h(f)\|_{p,\theta,v} \leq \Omega(f, z)_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

Из (3.5), (3.6), теоремы 3.1 и (2.6) мы выводим, что

$$\begin{aligned} \|f - Q_n(f)\|_{p,\theta,v} &\leq \|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p,\theta,v} + \|\Theta_{1/n}(f) - Q_n(\Theta_{1/n}(f))\|_{p,\theta,v} + \\ &+ \|Q_n(\Theta_{1/n}(f) - f)\|_{p,\theta,v} \leq C_2 \|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p,\theta,v} + C_3 n^{-1} \|\Theta'_{1/n}(f)\|_{p(\cdot),\theta} \\ &\leq C_3 \Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

и (3.3) доказано.

Для $k \in \mathbb{N}$ по лемме 2.11 мы получаем

$$(3.7) \quad \Omega(f, 2^k t)_{p,\theta,v} \leq C_4 K_{p,\theta,v}(f, 2^k t) \leq 2^k C_4 K_{p,\theta,v}(f, t) \leq C_5 2^k \Omega(f, t)_{p,\theta,v}.$$

В силу леммы 2.4 и (3.3) мы имеем

$$E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - Q_{2^k}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_6 \Omega(f, 1/2^k)_{p,\theta,v}.$$

Наконец, для $2^k \leq n < 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, из (3.7) вытекает

$$\begin{aligned} E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} &\leq E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq C_6 \Omega(f, 1/2^k)_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq 2C_5 C_6 \Omega(f, 1/2^{k+1})_{p,\theta,v} \leq C_7 \Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (2.2) мы выводим (3.4). $\square$

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША-ПЭЛИ

Используя неравенства (2.2) и (2.4), легко оценить приближение линейными средними рядов Фурье-Уолша-Пэли или рядов Фурье-Хаара в терминах соответствующих наилучших приближений. Поэтому нашей целью является получение оценок этих величин в терминах модуля непрерывности функции или его мажоранты.

Теорема 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$. Тогда

$$(4.1) \quad \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq C_2 \Omega(f, 1/r)_{p,\theta,v}, \quad r \geq 1,$$

где $[r]$ — целая часть r и C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} = \|f - t_n\|_{p,\theta,v}$, $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k$. Используя (2.1) из леммы 2.3, получаем

$$(4.2) \quad \|B_r(f)\|_{p,\theta,v} \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r} \frac{r^k}{k!} \|S_{k+1}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r} \frac{r^k}{k!} \|f\|_{p,\theta,v} = C_1 \|f\|_{p,\theta,v}.$$

Применяя (4.2), мы имеем

$$\begin{aligned} \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} &\leq \|B_r(f) - B_r(t_n)\|_{p,\theta,v} + \|B_r(t_n) - t_n\|_{p,\theta,v} + \\ &+ \|t_n - f\|_{p,\theta,v} \leq (1 + C_1) E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + \|B_r(t_n) - t_n\|_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

По определению, $S_{k+1}(t_n) = t_n$ для $k \geq n$ и

$$\|B_r(t_n) - t_n\|_{p,\theta,v} = \left\| e^{-r} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} (S_{k+1}(t_n) - t_n) \right\|_{p,\theta,v} \leq C_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(t_n)_{p,\theta,v}.$$

Поскольку для $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} E_{k+1}^{wp}(t_n)_{p,\theta,v} &\leq E_{k+1}^{wp}(t_n - f)_{p,\theta,v} + E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq 2E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} &\leq C_2 \left(E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + \left\| e^{-r} \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} (S_{k+1}(t_n) - t_n) \right\|_{p,\theta,v} \right) \\
 (4.3) \quad &\leq C_2 \left(E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + C_2 e^{-r} \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \right).
 \end{aligned}$$

Докажем, что

$$(4.4) \quad e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} \geq C_4 > 0, \quad r \geq r_0.$$

Пусть $r \geq 1$, $n = [r]$, $m = [n^{1/2}]$,

$$D_1 = \sum_{k=n-m}^n \frac{r^k}{k!}, \quad D_2 = \sum_{k=n}^{n+m} \frac{r^k}{k!}, \quad a_{nk} = \frac{r^{n-k}}{(n-k)!} : \frac{r^{n+k}}{(n+k)!}.$$

Тогда для $k = 1, 2, \dots, m$ мы имеем (считаем $\prod_{i=1}^0 = 1$)

$$\begin{aligned}
 a_{nk} &= \frac{n(n+k)}{r^2} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n^2 - i^2}{r^2} \geq \frac{n^2}{r^2} \frac{n^{2k-2}}{r^{2k-2}} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2} \right) \geq \\
 &\geq \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i^2}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

в силу неравенства Бернулли $\prod_{i=1}^m (1 + h_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^m h_i$, $h_i > -1$. Значит,

$$a_{nk} \geq e^{-2} \left(1 - \frac{(m-1)m(2m-1)}{n^2} \right) \geq e^{-2} \left(1 - \frac{2m^3}{n^2} \right) \geq e^{-2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \geq \frac{1}{3e^2}$$

при $r \geq n \geq 9$ и $k = 1, 2, \dots, m$. Мы заключаем, что $D_1 \geq D_2/(3e^2)$.

Следующим шагом, чтобы получить (4.4), будет оценка

$$\begin{aligned}
 D_3 &:= \sum_{k=n+m+1}^{2n} \frac{r^k}{k!} \leq \frac{r^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{(n+m+1)^j} = \\
 &= \frac{r^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \frac{n+m+1}{n+m-r+1} \leq \frac{r^{n+m}}{(n+m)!} \frac{n+m+1}{m} \leq \\
 &\leq \frac{1}{a_{nm}} \frac{r^{n-m}}{(n-m)!} (m+3+2/m) \leq 3e^2 \frac{11}{9} m \frac{r^{n-m}}{(n-m)!} \leq 4e^2 D_1
 \end{aligned}$$

при $m \geq 3$ (или $r \geq n \geq 9$), поскольку

$$\frac{r^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{r^k}{k!} > 1 \quad \text{для} \quad k = n-m, n-m+1, \dots, n-1.$$

Наконец, мы видим, что

$$D_4 := \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \leq \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{(2n+1)^j} \leq \frac{2}{3} \frac{r^{2n}}{(2n)!} \sum_{j=0}^{\infty} (2/3)^j \leq 2D_3 \leq 8e^2 D_1,$$

поскольку $r/(2n+1) \leq (n+1)/(2n+1) \leq 2/3$ при $r \geq 1$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} \geq e^r - D_2 - D_3 - D_4 \geq e^r - e^2(3D_1 + 4D_1 + 8D_1)$$

и $16e^2 \sum_{k=0}^n r^k/k! \geq e^r$, т.е. (4.4) доказано с постоянной $C_4 = (4e)^{-2}$ и $r_0 = 9$.

Из (4.3), (4.4) и убывания $E_k(f)_{p,\theta,v}$ выводим первое неравенство в (4.1). Для $0 < t \leq u \leq 1$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$, такое что $2^k \leq u/t < 2^{k+1}$. Используя (3.7), мы получаем

$$(4.5) \quad \Omega(f, u)_{p,\theta,v} \leq C_5 2^{k+1} \Omega(f, t)_{p,\theta,v} \leq 2C_5 \frac{u}{t} \Omega(f, t)_{p,\theta,v}.$$

Применяя доказанное первое неравенство из (4.1), (3.4) и (4.5), имеем

$$\begin{aligned} \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} &\leq C_6 \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} \Omega(f, (k+1)^{-1})_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq C_7 \Omega(f, (r+1)^{-1})_{p,\theta,v} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r+1}{k+1} \frac{r^k e^{-r}}{k!} \leq \\ &\leq C_7 \Omega(f, (r+1)^{-1})_{p,\theta,v} 2e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \leq 2C_7 \Omega(f, r^{-1})_{p,\theta,v}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 4.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$, $t > 0$. Тогда

$$\|f - e_n^t(f)\|_{p,\theta,v} \leq C \Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. По определению средних Эйлера и теореме 3.2 мы имеем

$$\begin{aligned} \|f - e_n^t(f)\|_{p,\theta,v} &= \frac{1}{(1+t)^n} \left\| \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} (f - S_{j+1}(f)) \right\|_{p,\theta,v} \leq \\ (4.6) \quad &\leq \frac{C_1}{(1+t)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} E_{j+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \frac{C_2}{(1+t)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} \Omega(f, (j+1)^{-1})_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

Используя (4.5), получаем

$$(4.7) \quad \Omega(f, (j+1)^{-1})_{p,\theta,v} \leq C_3 \frac{n+1}{j+1} \Omega(f, (n+1)^{-1})_{p,\theta,v}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

Применяя (4.6), (4.7) и лемму 2.12, мы заключаем, что

$$\|f - e_n^t(f)\|_{p(\cdot),\theta} \leq \frac{C_4(n+1)}{(1+t)^n} \Omega(f, (n+1)^{-1})_{p,\theta,v} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{t^{n-j}}{j+1} \leq C_5 \Omega(f, n^{-1})_{p,\theta,v}$$

при $n \in \mathbb{N}$. □

Лемма 4.1. Пусть $A = (a_{nk})_{n=1, k=1}^{\infty, n}$ — треугольная матрица. Если (a) $A \in AMIMS$ или (b) $A \in AMDMS$ и $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого числа $\alpha \in (0, 1)$ существует $C > 0$, такое что неравенство $\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} a_{nk} \leq Cn^{-\alpha}$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.1 доказана Р.Н.Мохapatрой и Б.Жалем [15]. Следующая теорема 4.3 и ее следствия дают оценки приближения средними рядов Фурье-Уолша-Пэли в терминах мажоранты модуля непрерывности.

Теорема 4.3. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p, \theta}[0, 1]$, $\omega \in BS_1$ и $\Omega(f, t)_{p, \theta, v} = O(\omega(t))$, $t \in [0, 1]$. Если выполнено одно из условий

(i) $A \in AMIMS$;

(ii) $A \in AMDMS$ и $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$;

то для $\tau_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f)(x)$ имеем

$$(4.8) \quad \|f - \tau_n(f)\|_{p, \theta, v} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. (i) Пусть $A \in AMIMS$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $m = [n/2]$. По определению $\tau_n(f)$ и теореме 3.2 имеем

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \|\tau_n(f) - f\|_{p, \theta, v} &\leq \left(\sum_{k=1}^m + \sum_{k=m+1}^n \right) a_{nk} \|S_k(f) - f\|_{p, \theta, v} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} \omega(k^{-1}) + \omega(m^{-1}) \sum_{k=m+1}^n a_{nk} \right) =: C_1(I_1 + I_2), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

По лемме 2.6 найдем $\beta \in (0, 1)$, такое что

$$\frac{\omega(u)}{u^\beta} \leq C_2 \frac{\omega(v)}{v^\beta}, \quad 0 < v \leq u \leq 1.$$

Используя последнее неравенство и лемму 4.1. мы получаем

$$(4.10) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{k=1}^m a_{nk} C_2 (m/k)^\beta \omega(1/m) \leq C_2 m^\beta \omega(1/m) \sum_{k=1}^m a_{nk} k^{-\beta} \leq \\ &\leq C_3 \frac{m^\beta}{n^\beta} \omega(1/m) \leq C_4 \omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

поскольку $\omega(2t) \leq C_5 \omega(t)$ в силу (2.5) справедливо неравенство $1/m \leq 2/(n-1)$.

Применяя равенство $\sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$, имеем

$$(4.11) \quad I_2 = \omega(1/m) \sum_{k=m+1}^n a_{nk} \leq C_5 \omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сопоставление неравенств (4.9), (4.10) и (4.11) дает (4.8).

(ii) Пусть $A \in AMDMS$, $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае снова имеем (4.9) и (4.11). Используя пункт (b) леммы 4.1, получаем (4.10) и (4.8) доказано. $\square$

Следствие 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$, $\omega \in BS_1$, $r \geq 1$ и $\Omega(f, t)_{p,\theta,v} = O(\omega(t))$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\|f - \sigma_n^{(r)}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Используя преобразование Абеля, мы видим, что

$$\sigma_n^{(r)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^r - (k-1)^r}{n^r} S_k(f) =: \sum_{k=1}^n b_{nk} S_k(f).$$

Если $r \geq 1$, то функция $y = x^r$ выпукла на $[0, +\infty)$ и $(k+1)^r + (k-1)^r \geq 2k^r$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\{b_{nk}\}_{k=1}^n$ не убывает по k и можно применить пункт (i) теоремы 4.3, чтобы получить результат следствия. $\square$

Следствие 4.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$, $\omega \in BS_1$, $\Omega(f, t)_{p,\theta,v} = O(\omega(t))$, $t \in [0, 1]$, $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонно неубывающая последовательность положительных чисел, такая что $np_n = O(P_n)$, $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Тогда

$$\|f - N_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим $a_{nk} = p_{n-k+1}/P_n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Тогда a_{nk} является невозрастающей по k и $na_{n1} = np_n/P_n = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Применяя часть (ii) теоремы 4.3, мы получаем результат следствия 4.2. $\square$

Abstract. In the paper we give direct theorems on approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue space. Also the degree of approximation by Borel, Euler, Riesz-Zygmund and Nörlund linear means of Walsh-Paley-Fourier series are treated in the above cited space.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Iwaniec and C. Sbordone, "On integrability of the Jacobian under minimal hypotheses," Arch. Ration. Mech. Anal., **119** (2), 129–143, 1992.
- [2] L. Greco, T. Iwaniec and C. Sbordone, "Inverting the p -harmonic operator," Manuscr. Math., **92** (2), 249–258, 1997.
- [3] L. D'Onofrio, C. Sbordone and R. Schiattarella, "Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs," J. Fixed Point Theory Appl., **13** (2), 309–340, 2013.
- [4] C. Sbordone, "New estimates for div-curl products and very weak solutions of PDEs," Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **25** (3-4), 739–756, 1997.
- [5] B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function," Trans. Amer. Math. Soc., **165**, 207–226, 1972.

- [6] A. Fiorenza, B. Gupta and P. Jain, "The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces," *Studia Math.*, **188** (2), 123–133, 2008.
- [7] V. Kokilashvili, "Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces," *J. Math. Sci.*, **170** (1), 20–33, 2010.
- [8] Б. С. Кашин, А. А. Саакян. *Ортогональные ряды*. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
- [9] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, М.: Наука, 1987.
- [10] И. И. Шарапудинов, "Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье-Хаара," *Матем. сб.*, **205** (2), 145–160, 2014.
- [11] С. С. Волосивец, "Приближение полиномами по системе Хаара в весовых симметричных пространствах," *Матем. заметки*, **99** (5), 649–657, 2016.
- [12] N. Danelia and V. Kokilashvili, "Approximation by trigonometric polynomials in subspace of weighted grand Lebesgue spaces," *Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.*, **7** (1), 11–15, 2013.
- [13] В. М. Кокилашвили, А. Н. Месхи, "Весовая экстраполяция в пространствах Иванец-Сбордоне. Приложения к интегральным операторам и теории приближений," *Труды МИ-АН*, **293**, 167–192, 2016.
- [14] M. Grigoryan, "Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system," *Studia Math.*, **198** (2), 197–206, 2010.
- [15] R. N. Mohapatra and B. Szal, "On trigonometric approximation of functions in the L^q -norm," *Demonstr. Math.*, **51** (1), 17–26, 2018.
- [16] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, "Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций," *Труды Москов. матем. об-ва*, **5**, 483–522 (1956).
- [17] J. A. Gosselin, "A weighted norm inequality for Fourier-Vilenkin series," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49** (2), 349–353, 1975.
- [18] W. S. Young, "Weighted norm inequalities for Vilenkin-Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340** (1), 273–291, 1993.
- [19] S. S. Volosivets and A. A. Tyuleneva, "Approximation of functions and their conjugates in L^p and uniform metric by Euler means," *Demonstr. Math.*, **51** (1), 141–150, 2018.

Поступила 26 мая 2023

После доработки 30 августа 2023

Принята к публикации 15 сентября 2023