ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С ЗАДЕРЖКОЙ ПЕРЕМЕННЫХ НА $\mathbb{R}^n$

С. ВАНГ, К. МА

Университет Лундонг, Цинъян, Китай*
Северо-Западный педагогический университет, Ланьчжоу, Китай
E-mails: *shwangsp@163.com*; *maqzh@nwnu.edu.cn*

Аннотация. Динамика решений уравнения пластины без эффектов задержки исследовалась многими авторами. Но работ по уравнению пластины с запаздывающими переменными в неограниченной области мало. Поэтому мы рассматриваем существование аттрактора обратного хода для уравнения пластины с переменной задержкой на $\mathbb{R}^n$ с использованием теории многозначных динамических систем.

MSC2020 numbers: 35B40; 35B41; 37B55.

Ключевые слова: уравнение пластины; обратный аттрактор; неограниченная область; многозначная динамическая система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в частных производных с запаздыванием всегда играют важную роль в моделировании самых разнообразных явлений, таких как вязкоупругость, взаимодействие биологических видов, нейронные сети и многие другие области. С точки зрения математики мы в основном фокусируемся на корректности и динамическом поведении решений функционально-дифференциальных уравнений в частных производных, см., например, [1-5] и ссылки там. Авторы в [3,4] исследовали модели, в которых форсирующий член содержит некоторые наследственные особенности. Такие ситуации могут возникнуть, например, когда мы хотим управлять системой посредством применения силы, которая учитывает не только нынешнее состояние, но и историческое состояние системы. В последние годы теория многозначных динамических систем исследовалась в [6-12]. Марьин-Рубио и Реаль [7] использовали теорию многозначных динамических систем для получения существования аттракторов для двумерных уравнений Навье-Стокса с задержками, когда вынуждающий член, содержащий задержку, является только непрерывным и сублинейным.

*Работа частично поддержана NSFC (11961059,12161071), Фондом естественных наук провинции Ганьсу (22JR11RM165), Инновационным фондом высшего образования провинции Ганьсу (2021B-270).). Финансирование докторских исследований Университета Лундонг (XYVYZK2112,XYVYZK2113).

Уравнение пластины происходит из теории уравнения упругих колебаний, установленной Войновским Кригером и Бергером [13,14] и т. д., а динамику уравнения пластины без задержек можно найти в [15-19]. Например в [15], Ян и Чжун получили существование глобального аттрактора для уравнения автономной пластины с нелинейным затуханием. Они также исследовали существование однородного аттрактора для уравнения неавтономной пластины с локализованным затуханием в [16]. В случае неограниченной области асимптотическое поведение уравнения пластины без задержек изучалось Ханмамедовым [17,18] и Сяо [19]. Недавно Монсеф Ауади в [20] рассмотрел глобальные и экспоненциальные аттракторы для растяжимой термоупругой пластины с зависящей от времени задержкой внутренней обратной связи, используя оценки неравенства устойчивости. Однако имеется мало работ об уравнении пластины с запаздыванием в неограниченной области и без единственности решения. Поэтому мы стремимся обратиться к следующему неавтономному уравнению пластины с запаздывающими переменными на $\mathbb{R}^n$, которое до сих пор еще не рассматривалось.

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u + \alpha\partial_tu + \Delta^2u + \lambda u = f(x, u(t - \rho(t))) + g(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (\tau, +\infty), \\ u(x, t) = \varphi(x, t - \tau), & x \in \mathbb{R}^n, t \in [\tau - h, \tau], \\ \partial_tu(x, t) = \partial_t\varphi(x, t - \tau), & x \in \mathbb{R}^n, t \in [\tau - h, \tau], \end{cases}$$

где $\alpha > 0, \lambda > 0, h > 0, \tau$ — начальное время, φ — начальная база данных на интервале $[\tau - h, \tau]$. Исходный член f , содержащий некоторую наследственную характеристику и удовлетворяющий следующим условиям:

(I) существует функция $k_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), k_2 > 0$ такая, что $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\rho \in C^1(\mathbb{R}; [0, h])$ и

$$|f(x, \nu)|^2 \leq |k_1(x)|^2 + k_2^2|\nu|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{R},$$

$$|\rho'(t)| \leq \rho^* < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(II) $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ и

$$\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta s} \|g(x, s)\|^2 dx ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \delta > 0,$$

что подразумевает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \int_{|x| \geq k} e^{\delta s} \|g(x, s)\|^2 dx ds = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \delta > 0.$$

Обозначим C_X банахово пространство $C^0([-h, 0]; X)$, снабженное суп-нормой. Для элемента $\varphi \in C_X$, его норма запишется как $\|\varphi\|_{C_X} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|_X$.

Пусть $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — два банаховых пространства с непрерывным компактным вложением. $X \hookrightarrow Y, C_{X,Y}$ обозначает банахово пространство $C_X \cap$

$C^1([-h, 0]; Y)$. Для элемента $\varphi \in C_{X,Y}$ его норма запишется как

$$\|\varphi\|_{C_{X,Y}}^2 = \|\varphi\|_{C_X}^2 + \|\varphi'\|_{C_Y}^2, \quad \forall \varphi \in C_{X,Y}.$$

Не ограничивая общности, обозначим $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, наделённую скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$ соответственно. Для $0 \leq s \leq 2$ мы определяем иерархию вложенных гильбертовых пространств.

$$H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = D(A^{\frac{s}{4}}), \quad (u, v)_s = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v), \quad \|u\|_s^2 = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}u).$$

где $A = \Delta^2$. Также мы будем использовать пробелы $C_{\mathcal{H}}$ и $C_{\mathcal{W}}$ в нашем анализе, где $\mathcal{H} = H \times H^2$, $\mathcal{W} = H^1 \times H^3$. Дано $T \geq \tau$ и $u : [\tau - h, T] \rightarrow H$, для каждого $t \in [\tau, T]$, обозначим через u_t функция, определенная на $[-h, 0]$ формулой отношение $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

По сравнению с динамикой уравнения пластины без эффектов задержки, новая проблема, возникшая в этой статье, заключается в том, что мы выбираем фазовые пространства $C_{\mathcal{H}}$ и $C_{\mathcal{W}}$, которые не являются ни гильбертовыми пространствами, ни равномерными выпуклыми банаховыми пространствами. Таким образом, метод доказательства динамики уравнения пластины с запаздыванием неприменим. В то же время, если пространственная область неограничена, вложения $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$ больше нет. Сначала мы используем технику декомпозиции и даем равномерные оценки как для хвостов, так и для ограниченных усечений решений, затем показываем, что процесс $\{U(t, \tau)\}$ является $\mathcal{D}$ -поглощающим асимптотически сверху. -полукомпактный, наконец, установлено существование обратного аттрактора для уравнения пластины с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$ с помощью теории многозначной динамической системы.

Структура этой статьи следующая. В разделе 2 мы повторяем некоторые абстрактные результаты о многозначных процессах. В разделе 3 установлено существование решения системы (1.1). Наконец, мы доказываем обратные аттракторы в $C_{\mathcal{H}}$, используя теорию многозначных динамических систем для уравнения пластины с переменным запаздыванием на $\mathbb{R}^n$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе мы повторим некоторые полезные леммы и абстрактные результаты (см. [6-8,10-12]).

Пусть X — полное метрическое пространство с метрикой $d_X(\cdot, \cdot)$, обозначим через $H_X^*(\cdot, \cdot)$ хаусдорфовое расстояние на полурасстоянии между двумя непустыми подмножествами X , , определяемыми формулой

$$H_X^*(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}_X(a, B)$$

где $dist_X(a, B) = \inf_{b \in B} d_X(a, b)$, и обозначим $\mathcal{N}(A, r)$ открытую окрестность $\{y \in X | dist_X(y, A) < r\}$ радиуса $r > 0$ подмножества A множества X .

Пусть $\mathcal{D}$ — непустой класс параметризованных множеств $\widehat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$, и $\mathcal{P}(X)$ — класс непустых замкнутых подмножеств X .

Определение 2.1. Семейство отображений $U(t, \tau) : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, называется многозначным процессом, если он удовлетворяет:

- (1) $U(\tau, \tau)x = \{x\}$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $x \in X$;
- (2) $U(t, s)U(s, \tau)x = U(t, \tau)x$, $\forall t \geq s \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Определение 2.2. Совокупность $\mathcal{D}$ некоторых семейств непустых замкнутых подмножеств X называется окрестностно замкнутой, если для каждого $\widehat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ существует $\varepsilon > 0$, зависящий от $\widehat{D}$, такой, что семейство $\{B(t) : B(t) — непустое замкнутое подмножество $\mathcal{N}(D(t), \varepsilon)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ также принадлежат $\mathcal{D}$.$

Обратите внимание, что из замкнутого подмножества окрестности $\mathcal{D}$ следует для каждого $\widehat{D} \in \mathcal{D}$, $\{\bar{D}(t) : \bar{D}(t) — непустое замкнутое подмножество $D(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$, а также набор $\mathcal{D}$ называется замкнутым по включению.$

Определение 2.3. Пусть $\{U(t, \tau)\}$ — многозначный процесс на X .

(1) $\mathcal{Q} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ называется $\mathcal{D}$ -множеством обратного поглощения для $\{U(t, \tau)\}$, если для любого $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ и для каждого $t \in \mathbb{R}$, существует $t_0 = t_0(\mathcal{B}, t) \in \mathbb{R}^+$ такой, что

$$U(t, t-s)B(t-s) \subset Q(t), \quad \forall s \geq t_0.$$

(2) $\{U(t, \tau)\}$ называется $\mathcal{D}$ -образом, асимптотически полукompактным сверху в X относительно $\mathcal{B}$, если для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, любая последовательность $y_n \in S(t, t-s_n)x_n$ имеет сходящуюся подпоследовательность в X всякий раз, когда $s_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), $x_n \in B(t-s_n)$ с $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$.

Определение 2.4. Семейство непустого компактного подмножества $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ называется $\mathcal{D}$ -обратным аттрактором для многозначного процесса $\{U(t, \tau)\}$, если он удовлетворяет следующим условиям

- (1) $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ инвариант, т. е.

$$U(t, \tau)A(\tau) = A(t), \quad \forall t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R};$$

(2) $\mathcal{A}$ притягивает каждый член $\mathcal{D}$, то есть для каждого $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ и любые фиксированные $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} H_X^*(U(t, t-s)B(t-s), A(t)) = 0$$

Теорема 2.1. Пусть $\{U(t, \tau)\}$ — многозначный процесс в банаховом пространстве X , и пусть $\mathcal{Q} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — $\mathcal{D}$ -поглощающее множество для $\{U(t, \tau)\}$ в $\mathcal{D}$. Предположим что U можно записать как

$$U(t, \tau) = U_1(t, \tau) + U_2(t, \tau), \quad \forall t \geq \tau,$$

и для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, (1) $\lim_{s \rightarrow \infty} \|U_2(t, t-s)Q(t-s)\|_X = 0$;

(2) для любого фиксированного $s > 0$ каждая последовательность $y_n \in U_1(t, t-s)Q(t-s)$ является последовательностью Коши в X .

Тогда $\{U(t, \tau)\}$ является $\mathcal{D}$ -поглощающим асимптотически полукомпактным сверху в X .

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутая по включению совокупность некоторых семейств непустых замкнутых подмножеств X и $\{U(t, \tau)\}$ — многозначный процесс на X . Также U имеет замкнутые значения и пусть $U(t, \tau)x$ полунепрерывен сверху по x при фиксированном $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\{U(t, \tau)\}$ равно $\mathcal{D}$ -поглощающим асимптотически полукомпактным сверху в X , $\{U(t, \tau)\}$ имеет $\mathcal{D}$ -поглощающее множество $\mathcal{Q} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $\mathcal{D}$ и $Q(t)$ замкнуто для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{D}$ -обратный аттрактор $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ равен уникален и задается

$$A(t) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq T} U(t, t-s)Q(t-s)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. КОРРЕКТНОСТЬ

Теорема 3.1. Предположим, что (I)-(II) верны. Тогда для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ и любого $\varphi \in C_{\mathcal{H}}$ существует решение $u(t)$ задачи (1.1) и $u(t)$ удовлетворяет

$$u \in C([\tau - h, T]; H^2) \cap C^1([\tau - h, T]; H), \quad \forall T > \tau.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим следующую задачу в ограниченной области

$$\begin{cases} \partial_{tt}u + \alpha \partial_t u + Au + \lambda u = f(x, u(t - \rho(t))) + g(x, t), & x \in \Omega_{2k}, t > \tau, \\ u(x, t)|_{\partial\Omega_{2k}} = 0, & t > \tau, \\ u(x, t) = \varphi_{2k}(x, t - \tau), \partial_t u(x, t) = \partial_t \varphi(x, t - \tau), & x \in \Omega_{2k}, t \in [\tau - h, \tau], \end{cases}$$

где $k > 0$, $\Omega_{2k} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2k\}$, $\varphi_{2k}(x, t) = \varphi(x, t)\eta(\frac{|x|^2}{k^2})$, для каждого $t \in [-h, 0]$ и η — обрезающая функция в теореме 4.1, $H_{2k} = L^2(\Omega_{2k})$ и $V_{2k} = H^2(\Omega_{2k})$.

Мы предполагаем, что существует семейство собственных функций χ_i оператора A , которое является ортогональным базисом H_{2k} . Мы рассматриваем подпространство V_{2km} V_{2k} и $V_m = \text{span}\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m\}$. Для каждого m согласно основам теории обыкновенных дифференциальных уравнений существует

приближенное решение u_m вида

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m u_{mi} \chi_i$$

и это удовлетворяет

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_m}{dt^2} + \alpha \frac{du_m}{dt} + P_m A u_m + \lambda u_m = P_m f(x, u_m(t - \rho(t))) + P_m g(t), \\ u_m(t) = P_m \varphi_{2k}(t - \tau), \quad t \in [\tau - h, \tau], \\ \frac{du_m(t)}{dt} = \frac{dP_m \varphi_{2k}(t - \tau)}{dt}, \quad t \in [\tau - h, \tau], \end{cases}$$

где $P_m : H_{2k} \rightarrow V_{2km}$ — ортогональный проектор в V_{2km} .

Скалярное произведение (3.1) в H с $v_m = \partial_t u_m + \beta u_m$, где $0 < \beta < 1, \alpha - \beta > 0$ и $2\beta(\alpha - \beta) < \lambda$, имеем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|v_m\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2) \\ & + (\alpha - \beta) \|v_m\|^2 + \beta(1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + \beta(\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2 + \|\Delta v_m\|^2 \\ & = (f(x, u_m(t - \rho(t))), v_m) + (g(t), v_m). \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга и (I), мы получаем

$$(3.3) \quad |(f(x, u_m(t - \rho(t))), v_m)| \leq \frac{\alpha - \beta}{4} \|v_m\|^2 + \frac{k_2^2}{\alpha - \beta} \|u_m(t - \rho(t))\|^2 + \frac{|k_1|^2}{\alpha - \beta};$$

$$(3.4) \quad |g(t), v)| \leq \frac{\alpha - \beta}{4} \|v_m\|^2 + \frac{1}{\alpha - \beta} \|g(t)\|^2.$$

Подставляя (3.3) – (3.4) в (3.2), имеем

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|v_m\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2) \\ & + (\alpha - \beta) \|v_m\|^2 + 2\beta(1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + 2\beta(\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2 + 2\|\Delta v_m\|^2 \\ & \leq \frac{2k_2^2}{\alpha - \beta} \|u_m(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \beta} + \frac{2}{\alpha - \beta} \|g(t)\|^2. \end{aligned}$$

Интегрируя (3.5) от τ до t , получаем

$$\begin{aligned} & (\|v_m(t)\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m(t)\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m(t)\|^2) + (\alpha - \beta) \int_{\tau}^t \|v_m(r)\|^2 dr \\ & + 2\beta(1 - \beta) \int_{\tau}^t \|\Delta u_m(r)\|^2 dr + 2\beta(\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \int_{\tau}^t \|u_m(r)\|^2 dr + 2 \int_{\tau}^t \|\Delta v_m(r)\|^2 dr \\ & \leq (\|v_m(\tau)\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m(\tau)\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m(\tau)\|^2) \\ & + \frac{2k_2^2}{\alpha - \beta} \int_{\tau}^t \|u_m(s - \rho(s))\|^2 ds + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \beta} (t - \tau) + \frac{2}{\alpha - \beta} \int_{\tau}^t \|g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Берем $s' = s - \rho(s)$. Замечая, что $\rho(s) \in [0, h]$ и $\frac{1}{1-\rho(s)} \leq \frac{1}{1-\rho^*}, \forall s \in \mathbb{R}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t \|u_m(s - \rho(s))\|^2 ds &\leq \int_{\tau-h}^t \|u_m(s')\|^2 ds' \\ &= \frac{1}{1-\rho^*} \left(\int_{\tau-h}^{\tau} \|u_m(s')\|^2 ds' + \int_{\tau}^t \|u_m(s')\|^2 ds' \right). \end{aligned}$$

Пусть $E_m(t) = \|v_m\|^2 + (1-\beta)\|\Delta u_m\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta))\|u_m\|^2$. Итак, у нас есть

$$\begin{aligned} E_m(t) &\leq E_m(\tau) + \frac{2k_2^2}{(\alpha - \beta)(1 - \rho^*)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \beta} (t - \tau) \\ &\quad + \frac{2k_2^2}{(\alpha - \beta)(1 - \rho^*)} \int_{\tau}^t \|E_m(r)\|^2 dr + \frac{2}{\alpha - \beta} \int_{\tau}^t \|g(r)\|^2 dr. \end{aligned}$$

По лемме Гронуолла мы можем сделать вывод, что

$$(3.6) \quad \|v_m\|^2 + \|\Delta u_m\|^2 + \|u_m\|^2 \leq (\|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + (t - \tau) + \int_{\tau}^t \|g(r)\|^2 dr) e^{C(t-\tau)},$$

из (3.6) следует, что $\{u_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\frac{du_m(t)}{dt}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничены в пространствах $L^{\infty}(\tau - h, T; V_{2k})$ и $L^{\infty}(\tau - h, T; H_{2k}) \cap L^2(\tau, T; V_{2k})$, соответственно, при $n \rightarrow \infty$. Аналогично доказательству теоремы 4.1 в [21, раздел IV.4.4] стандартным рассуждением получаем существование слабых решений в $u \in C([\tau - h, T]; V_{2k}) \cap C^1([\tau - h, T]; H_{2k})$.

Поскольку $\{\Omega_{2k}\}$ — последовательность ограниченных подобластей $\mathbb{R}^n$ и $\Omega_{2k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $k \rightarrow \infty$. Существование слабых решений $u \in C([\tau - h, T]; H^2) \cap C^1([\tau - h, T]; H)$, ассоциированных с системой (1.1) получается. Мы также можем обратиться к [9,10].

Благодаря теореме 3.1 мы можем определить семейство многозначных процессов

$$U(t, \tau) : C_{\mathcal{H}} \rightarrow C_{\mathcal{H}}$$

и $U(t, \tau)\varphi = \{u_t(\cdot; \tau, \varphi) | u(\cdot)\}$ является решением (1.1) и $\varphi \in C_{\mathcal{H}}$, где u_t определяется для $\theta \in [-h, 0]$ как $u_t(\theta) = u(t + \theta)$.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБРАТНОГО АТТРАКТОРА

4.1 Априорная оценка. Через $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ будем обозначать все семейства непустых подмножеств $\mathcal{D} = \{D(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(C_{\mathcal{H}})$ таких, что

$$(4.1) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{\delta t} \sup_{u \in D(t)} \|u\|_{C_{\mathcal{H}}}^2) = 0,$$

где $\delta > 0$ будет определено позже.

Лемма 4.1. *Предположим, что (I)-(II) выполнены. Тогда многозначный процесс $\{U(t, \tau)\}$, соответствующий (1.1), обладает $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ — множеством, поглощающее обратный возврат, в $C_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1.1) в H с $v = \partial_t u + \delta u$, где $0 < \delta < 1$, $\alpha - \delta > 0$ и $2\delta(\alpha - \delta) < \lambda$, имеем

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) + (\alpha - \delta) \|v\|^2 + \delta(1 - \delta) \|\Delta u\|^2 + \delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|u\|^2 + \|\Delta v\|^2 \\ & = (f(x, u(t - \rho(t))), v) + (g(t), v), \end{aligned}$$

где $E(t) = \|v\|^2 + (1 - \delta) \|\Delta u\|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|u\|^2$. Применив неравенство (I), получим

$$(4.3) \quad |(f(x, u(t - \rho(t))), v)| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|v\|^2 + \frac{k_2^2}{\alpha - \delta} \|u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{|k_1|^2}{\alpha - \delta};$$

$$(4.4) \quad |g(t), v| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|v\|^2 + \frac{1}{\alpha - \delta} \|g(t)\|^2.$$

Подставив (4.3), (4.4) в (4.2), получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E(t) + (\alpha - \delta) \|v\|^2 + 2\delta(1 - \delta) \|\Delta u\|^2 + 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|u\|^2 + 2\|\Delta v\|^2 \\ & \leq \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \|u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} + \frac{2}{\alpha - \delta} \|g(t)\|^2. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma = \min\{\alpha - \delta, 2\delta(1 - \delta), 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta))\}$, тогда

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt} E(t) + \sigma E(t) \leq \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \|u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} + \frac{2}{\alpha - \delta} \|g(t)\|^2.$$

Умножив (4.5) на $e^{\sigma t}$, и проинтегрировав от τ до t , находим

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(t) & \leq e^{\sigma \tau} E(\tau) + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|u(s - \rho(s))\|^2 ds + \\ & + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|g(s)\|^2 ds + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} ds. \end{aligned}$$

Возьмем $r = s - \rho(s)$. Заметив, что $\rho(s) \in [0, h]$ и

$$\frac{1}{1 - \rho(s)} \leq \frac{1}{1 - \rho^*}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|u(s - \rho(s))\|^2 ds & \leq \int_{\tau-h}^t \frac{e^{\sigma r} e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \|u(r)\|^2 dr \\ & = \frac{e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \left(\int_{\tau-h}^{\tau} e^{\sigma r} \|u(r)\|^2 dr + \int_{\tau}^t e^{\sigma r} \|u(r)\|^2 dr \right) \\ & \leq \frac{h e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} e^{\sigma \tau} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \int_{\tau}^t e^{\sigma r} \|u(r)\|^2 dr. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(t) & \leq e^{\sigma \tau} E(\tau) + \frac{2k_2^2 e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \int_{\tau}^t e^{\sigma r} \|E(r)\| dr + \frac{2hk_2^2 e^{\sigma h}}{(\alpha - \delta)(1 - \rho^*)} e^{\sigma \tau} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ & + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|g(s)\|^2 ds + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} ds. \end{aligned}$$

Для $C_1 = \frac{2k_2^2 e^{\sigma h}}{1-\rho^*}$, $C_2 = \frac{2hk_2^2 e^{\sigma h}}{(\alpha-\delta)(1-\rho^*)}$, $C_3 = \frac{2}{\alpha-\delta}$, $C_4 = \frac{2|k_1|^2}{\alpha-\delta}$, по лемме Гронвалля имеем, что

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(t) &\leq e^{\sigma \tau} e^{C_1(t-\tau)} E(\tau) + C_2 e^{\sigma \tau} e^{C_1(t-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + C_3 e^{C_1(t-\tau)} \int_{\tau}^t \|g(s)\|^2 ds + C_4 e^{C_1(t-\tau)} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} ds, \quad \forall t \geq \tau. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma' = \sigma - C_1 > 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 &\leq (\|\partial_t u(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|) e^{-\sigma'(t-\tau)} \\ &\quad + C_2 e^{-\sigma'(t-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{C_4}{\sigma'} + C_3 e^{-\sigma' t} \int_{\tau}^t e^{\sigma' t} \|g(s)\|^2 ds, \quad \forall t \geq \tau. \end{aligned}$$

Подставив $t + \theta$ вместо t (где $\theta \in [-h, 0]$), получим

$$\begin{aligned} (4.6) \quad \|\partial_t u(t + \theta)\|^2 + \|\Delta u(t + \theta)\|^2 + \|u(t + \theta)\|^2 &\leq (\|\partial_t u(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 \\ &\quad + \|u(\tau)\|) e^{-\sigma'(t+\theta-\tau)} + C_2 e^{-\sigma'(t+\theta-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{C_4}{\sigma'} + C_3 e^{-\sigma'(t+\theta)} \int_{\tau}^{t+\theta} e^{\sigma' t} \|g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Согласно (II) и (4.6),

$$\begin{aligned} (4.7) \quad \|u_t\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 &= \|\Delta u_t\|_{C_{\mathcal{H}^2}}^2 + \|u'_t\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\Delta u(t + \theta)\|^2 + \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|u'(t + \theta)\|^2 \\ &\leq C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} (\|v(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|^2) + C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + C + C e^{-\sigma'(t-h)} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' t} \|g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$R_1^2(t) = 2C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + C + C e^{-\sigma'(t-h)} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' t} \|g(s)\|^2,$$

и рассмотрим семейство замкнутых ограниченных шаров $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $C_{\mathcal{H}}$, где

$$Q(t) = \{\psi \in C_{\mathcal{H}} : \|\psi\|_{C_{\mathcal{H}}} \leq R_1(t)\}$$

и $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}} \in \mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$. Теперь, согласно (4.1) и (4.7), семейство $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}}$ является $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ -абсорбирующим для многозначного процесса $\{U(t, \tau)\}$ в $C_{\mathcal{H}}$.

Замечание 4.1. Обратите внимание, что положительные константы h и k_2 достаточно малы, поскольку небольшие эффекты задержки могут обеспечить существование аттрактора.

Кроме того, что касается члена задержки, чтобы получить результат в неограниченной области, нам нужно предположить, что

(III) $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ и существует $L > 0$ такой, что

$$|f'_v(t, v)| \leq L, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Лемма 4.2. При условиях (I)-(III) и $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$, имеет место

$$\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta s} \|g(x, s)\|_1^2 dx ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0,$$

что подразумевает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \int_{|x| \geq k} e^{\delta s} \|g(x, s)\|_1^2 dx ds = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0.$$

Тогда имеет место следующая оценка

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \|u_t\|_{C_W}^2 &= \|A^{\frac{3}{4}} u_t\|_{C_{H^3}}^2 + \|A^{\frac{1}{4}} u'_t\|_{C_{H^1}}^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|A^{\frac{3}{4}} u(t + \theta)\|^2 \\ &+ \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|A^{\frac{1}{4}} u'(t + \theta)\|^2 \\ &\leq C e^{-\sigma' t} e^{\sigma' \tau} (\|v(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|^2) \\ &+ C e^{-\sigma' t} e^{\sigma' \tau} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + C e^{-\sigma' t} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds + C e^{-\sigma' t} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|A^{\frac{1}{4}} g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Доказательство. Для скалярного произведения в H для (1.1) с $A^{\frac{1}{2}} v = A^{\frac{1}{2}} \partial_t u + \delta A^{\frac{1}{2}} u$, где $0 < \delta < 1$, $\alpha - \delta > 0$ and $2\delta(\alpha - \delta) < \lambda$, имеем

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} V(t) + (\alpha - \delta) \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + \delta(1 - \delta) \|A^{\frac{3}{4}} u\|^2 + \delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 + \|A^{\frac{3}{4}} v\|^2 \\ = (f(x, u(t - \rho(t))), A^{\frac{1}{2}} v) + (g(t), A^{\frac{1}{2}} v), \end{aligned}$$

где $V(t) = \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + (1 - \delta) \|A^{\frac{3}{4}} u\|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2$. Применив неравенство Гельдера и $|f'_v(t, v)| \leq L$, получим

$$(4.10) \quad \begin{aligned} |(f(x, u(t - \rho(t))), A^{\frac{1}{2}} v)| &\leq L \|u(t - \rho(t))\| \|A^{\frac{1}{4}} v\| \\ &\leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + \frac{L^2}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} u(t - \rho(t))\|^2; \end{aligned}$$

$$(4.11) \quad |g(t), A^{\frac{1}{2}} v| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + \frac{1}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} g(t)\|^2.$$

Подставив (4.10), (4.11) в (4.9), для $\sigma = \min\{\alpha - \delta, 2\delta(1 - \delta), 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta))\}$, будем иметь

$$\frac{d}{dt} V(t) + \sigma V(t) \leq \frac{2L^2}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} g(t)\|^2.$$

Умножив на $e^{\sigma t}$ и проинтегрировав от τ до t , получим

$$e^{\sigma t} V(t) \leq e^{\sigma \tau} V(\tau) + \frac{2L^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|A^{\frac{1}{4}} u(s - \rho(s))\|^2 ds + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|A^{\frac{1}{4}} g(s)\|^2 ds.$$

В силу (4.7),

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} V(t) &\leq e^{\sigma \tau} V(\tau) + C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + C \\ &+ C e^{-\sigma'(t-h)} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds + C \int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|A^{\frac{1}{4}} g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Положив $t + \theta$ вместо t (где $\theta \in [-h, 0]$), будем иметь

$$\begin{aligned} & \|A^{\frac{1}{4}}v(t + \theta)\|^2 + \|A^{\frac{3}{4}}u(t + \theta)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}u(t + \theta)\|^2 \\ & \leq (\|A^{\frac{1}{4}}v(\tau)\|^2 + \|A^{\frac{3}{4}}u(\tau)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}u(\tau)\|^2)e^{-\sigma't}e^{\sigma'(h+\tau)} + Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'(h+\tau)}\|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ & \quad + Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'h} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|g(s)\|^2 ds + Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'h} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|A^{\frac{1}{4}}g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Следовательно (4.8) имеет место. Обозначим через $R_2(t)$ неотрицательное число, определенное для любого $t \in \mathbb{R}$ из

$$R_2^2(t) = 2Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'\tau}\|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + Ce^{-\sigma't} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|g(s)\|^2 ds + Ce^{-\sigma't} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|A^{\frac{1}{4}}g(s)\|^2 ds,$$

и рассмотрим семейство замкнутых шаров $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{W}}} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $C_{\mathcal{W}}$, где

$$Q(t) = \{\vartheta \in Q(t) : \|\vartheta\|_{C_{\mathcal{W}}} \leq R_2(t)\}$$

и $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{W}}} \in \mathcal{D}_{C_{\mathcal{W}}}$.

Теорема 4.1. *Допустим имеют место (I)-(II), тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$, существуют $T = T(\varepsilon, t, B) > 0$ и $k = k(\varepsilon, t, B) > 0$ такие, что любое решение $u_t \in U(t, t - s)B(t - s)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{\Omega_k^c} (|\Delta u(t + \theta)|^2 + |v(t + \theta)|^2 + |u(t + \theta)|^2) dx < C\varepsilon, \quad \forall s \geq T,$$

где $\Omega_k^c = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq k\}$, $C > 0$ – константа.

Доказательство. Выберем гладкую функцию η такую, что $0 \leq \eta(s) \leq 1$ для любого $s \in \mathbb{R}$, и

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |s| \leq 1, \\ 1, & |s| \leq 2. \end{cases}$$

Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$(4.12) \quad \max\{|\eta'(s)|, |\eta''(s)|, |\eta'''(s)|, |\eta''''(s)|\} \leq C_0,$$

для любого $s \in \mathbb{R}$.

Умножив (1.1) на $\eta(\frac{|x|^2}{k^2})v = \eta(\frac{|x|^2}{k^2})(\partial_t u + \delta u)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}^n$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(|v|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u|^2) dx + (\alpha - \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx \\ (4.13) \quad & + \delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\Delta^2 u \cdot v dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u(t - \rho(t)))\eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(t)\eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v dx. \end{aligned}$$

Оценим каждый член этого уравнения.

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \Delta^2 u \cdot v dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u [\eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \Delta v + 2 \nabla \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \nabla v + \Delta \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) v] dx \\
 & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 & \quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \eta'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \frac{2|x|}{k^2} \Delta u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} [\eta''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \frac{4|x|^2}{k^2} + \eta'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \frac{2}{k^2}] \Delta u \cdot v dx \\
 & \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 & \quad - \frac{4\sqrt{2}C_0}{k} \int_{k < |x| < \sqrt{2}k} |\Delta u| \cdot |\nabla v| dx - \frac{(8k^2 + 2)C_0}{k^2} \int_{k < |x| < \sqrt{2}k} |\Delta u| \cdot |v| dx \\
 & \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 & \quad - \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \right] - \frac{(4k^2 + 1)C_0}{k^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 dx \right] \\
 & \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 & \quad - \frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2) - \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v\|^2.
 \end{aligned}$$

Для нелинейного члена, в силу условия (I) и неравенства Юнга, имеем:

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad & \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u(t - \rho(t))) \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) v dx \right| \leq \frac{1}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx + \\
 & + \frac{\alpha - \delta}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |v|^2 dx + \frac{k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |u(t - \rho(t))|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Далее,

$$(4.16) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) v dx \right| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |v|^2 dx + \frac{1}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(t)|^2 dx.$$

Подставив (4.14) – (4.16) в (4.13), получим

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u|^2 + |\Delta u|^2) dx + (\alpha - \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |v|^2 dx \\
 & + 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |u|^2 dx + 2\delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 & \leq \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |u(t - \rho(t))|^2 dx \\
 & + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(t)|^2 dx + \frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2) \\
 & + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v\|^2.
 \end{aligned}$$

Умножив (4.17) на $e^{\sigma' t}$, вместе с (4.17) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} [e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) (|v|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u|^2 + |\Delta u|^2) dx] \\
& \leq -(\alpha - \delta) e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |v|^2 dx - 2\delta e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |\Delta u|^2 dx \\
& \quad - 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u|^2 dx + \frac{2}{\alpha - \delta} e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |g(t)|^2 dx \\
& \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |k_1|^2 dx + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(t - \rho(t))|^2 dx \\
& \quad + e^{\sigma' t} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v\|^2 \right].
\end{aligned}$$

Проинтегрировав (4.18) по $[t - s, t']$, находим, что

$$\begin{aligned}
(4.19) \quad & e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) (|v(t')|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t')|^2 + |\Delta u(t')|^2) dx \\
& \leq e^{\sigma'(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) (|v(t-s)|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t-s)|^2 + |\Delta u(t-s)|^2) dx \\
& \quad - (\alpha - \delta) \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |v(r)|^2 dx dr - 2\delta \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |\Delta u(r)|^2 dx dr \\
& \quad - 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r)|^2 dx dr \\
& \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |k_1|^2 dx dr + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r - \rho(r))|^2 dx dr \\
& \quad + \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr \\
& \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |g(r)|^2 dx dr.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
(4.20) \quad & \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r - \rho(r))|^2 dx dr \\
& \leq \frac{e^{\sigma' h}}{1 - \rho^*} \int_{t-s-h}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r)|^2 dx dr \\
& \leq \frac{h e^{\sigma' h} e^{\sigma'(t-s)}}{1 - \rho^*} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{e^{\sigma' h}}{1 - \rho^*} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r)|^2 dx dr.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{2k_2^2 h e^{\sigma' r}}{(\alpha - \delta)(1 - \rho^*)} < \frac{1}{2} \delta(\alpha - \delta),$$

имеем

(4.21)

$$\begin{aligned}
 & e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t')|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t')|^2 + |\Delta u(t')|^2) dx \\
 & \leq e^{\sigma'(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t-s)|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t-s)|^2 + |\Delta u(t-s)|^2) dx \\
 & \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr + \frac{2k_2^2 h e^{\sigma' r} e^{\sigma'(t-s)}}{(\alpha - \delta)(1 - \rho^*)} \|\varphi\|_{C_H}^2 \\
 & \quad + \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr \\
 & \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr.
 \end{aligned}$$

Теперь, подставив $t' + \theta$ вместо t' (где $\theta \in [-h, 0]$), и умножив (4.21) на $e^{-\sigma'(t'+\theta)}$, получим, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t' + \theta)|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t' + \theta)|^2 + |\Delta u(t' + \theta)|^2) dx \\
 & \leq C e^{-\sigma'(t'+\theta)} e^{\sigma'(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t-s)|^2 + |u(t-s)|^2 + |\Delta u(t-s)|^2) dx \\
 & \quad + C e^{-\sigma'(t'+\theta)} \int_{t-s}^{t'+\theta} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr + C e^{-\sigma'(t'+\theta)} e^{\sigma'(t-s)} \|\varphi\|_{C_H}^2 \\
 & \quad + C e^{-\sigma'(t'+\theta)} \int_{t-s}^{t'+\theta} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr \\
 & \quad + e^{-\sigma'(t'+\theta)} \int_{t-s}^{t'+\theta} e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr.
 \end{aligned}$$

Пусть $t' = t$, тогда

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|\Delta u(t + \theta)|^2 + |u'(t + \theta)|^2) dx \\
 & \leq C e^{-\sigma' s} (\|u'(t-s)\|^2 + \|\Delta u(t-s)\|^2) + C e^{-\sigma' s} \|\varphi\|_{C_H}^2 \\
 & \quad + C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr \\
 & \quad + C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr \\
 & \quad + e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr.
 \end{aligned}$$

Так как $\varphi \in B(t-s)$ и $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, получим, что

$$(4.22) \quad \begin{aligned} & \limsup_{s \rightarrow +\infty} C e^{-\sigma' s} (\|u'(t-s)\|^2 + \|\Delta u(t-s)\|^2 + \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2) \\ & \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} C e^{-\sigma' s} \|B(t-s)\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 = 0. \end{aligned}$$

В силу (I) и $k_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, можем выбрать k достаточно большим, чтобы

$$(4.23) \quad C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr < C\varepsilon$$

и

$$(4.24) \quad C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr < C\varepsilon.$$

Вместе с (4.7) и (4.8), выберем k достаточно большим, чтобы

$$(4.25) \quad \begin{aligned} & e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \right. \\ & \left. + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда из (4.22) – (4.25), имеем, что

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{|x| \geq \sqrt{2}k} (|\Delta u(t+\theta)|^2 + |v(t+\theta)|^2 + |u(t+\theta)|^2) dx \\ & \leq \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|\Delta u(t+\theta)|^2 + |v(t+\theta)|^2 + |u(t+\theta)|^2) dx < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 4.2. *При условиях леммы 4.1 многозначный процесс $\{U(t, \tau)\}$ в $C_{\mathcal{H}}$ обладает единственным аттрактором $\{A_{C_{\mathcal{H}}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что многозначный процесс $\{U(t, \tau)\}$ in $C_{\mathcal{H}}$ является $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ -ассимптотически полукompактом. По лемме 4.1 для любого $T \geq t-s$, $U(T, t-s)\varphi = \{u_T(\cdot; t-s, \varphi)|u(\cdot)\}$ является решением (1.1) с $\varphi \in Q(t-s)$, где $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ есть $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ -поглощающее множество в $C_{\mathcal{H}}$.

Пусть $\Omega_{2k} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2k\}$. Положим $\hat{\eta} = 1 - \eta$, и возьмем

$$(4.26) \quad \hat{u} = \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)u(T, x), \quad \forall T \geq t-s-h, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где η – срезающая функция, определенная в теореме 4.1. Умножив (1.1) на $\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)$, вместе с (4.26) получим, что

$$(4.27) \quad \begin{cases} \partial_{tt}\hat{u} + \alpha\partial_t\hat{u} + \Delta^2\hat{u} + \lambda\hat{u} = f(x, u(T-\rho(T)))\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + g(x, T)\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \\ \quad + 4A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)A^{\frac{1}{4}}u + 6A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)A^{\frac{1}{2}}u + 4A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)A^{\frac{3}{4}}u + A\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)u, \\ \hat{u}(x, T) = \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi(x, T-t+s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t-s-h, t-s], \\ \partial_t\hat{u}(x, T) = \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\partial_t\varphi(x, T-t+s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t-s-h, t-s], \\ \hat{u}(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t-s, \infty]. \end{cases}$$

Теперь пусть $\hat{u} = u_1 + u_2$. Разложим (4.27) следующим образом

$$(4.28) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u_1 + \alpha\partial_t u_1 + \Delta^2 u_1 + \lambda u_1 = f(x, u(T - \rho(T)))\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) + g(x, T)\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) \\ \quad + 4A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})A^{\frac{1}{4}}u + 6A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})A^{\frac{1}{2}}u + 4A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})A^{\frac{3}{4}}u + A\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})u, \\ u_1(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ \partial_t u_1(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ u_1(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t - s, \infty], \end{cases}$$

и

$$(4.29) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u_2 + \alpha\partial_t u_2 + \Delta^2 u_2 + \lambda u_2 = 0, \\ u_2(x, T) = \hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})\varphi(x, T - t + s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ \partial_t u_2(x, T) = \hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})\partial_t \varphi(x, T - t + s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ u_2(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t - s, \infty]. \end{cases}$$

В силу (4.7) с $f = g = 0$,

$$\|u'_{2t}\|_{C_H}^2 + \|\Delta u_{2t}\|_{C_{H^2}}^2 \leq C e^{-\sigma' s} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2.$$

Согласно теореме 2.1 рассмотрим пару решений u^1 и u^2 системы (1.1), соответствующие φ^1 и φ^2 , соответственно. Пусть $w(T) = u_1^1(T) - u_1^2(T)$, где $u_1^1(T)$ и $u_1^2(T)$ суть решения (4.28). Тогда $w(T)$ удовлетворяет

$$(4.30) \quad \begin{cases} \partial_{tt}w + \alpha\partial_t w + \Delta^2 w + \lambda w = \hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})(f(x, u^1(T - \rho(T))) - f(x, u^2(T - \rho(T)))) \\ \quad + 4(A^{\frac{1}{4}}u^1 - A^{\frac{1}{4}}u^2)A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) + 6(A^{\frac{1}{2}}u^1 - A^{\frac{1}{2}}u^2)A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) \\ \quad + 4(A^{\frac{3}{4}}u^1 - A^{\frac{3}{4}}u^2)A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) + (u^1 - u^2)A\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), \\ w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ \partial_t w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ w(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t - s, \infty]. \end{cases}$$

Беря скалярное произведение H в (4.30) с $w'(T)$, получим

$$(4.31) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|w'(T)\|^2 + \|\Delta w(T)\|^2 + \lambda \|w(T)\|^2) + \|w'(T)\|^2 \\ & = (\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})) ((f(x, u^1(T - \rho(T))) - f(x, u^2(T - \rho(T))))), w'(t)) \\ & \quad + 4((A^{\frac{1}{4}}u^1 - A^{\frac{1}{4}}u^2)A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)) + 6((A^{\frac{1}{2}}u^1 - A^{\frac{1}{2}}u^2)A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)) \\ & \quad + 4((A^{\frac{3}{4}}u^1 - A^{\frac{3}{4}}u^2)A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)) + ((u^1 - u^2)A\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)). \end{aligned}$$

Простые вычисления дают

$$(4.32) \quad A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) = \frac{2|x|}{k^2}\hat{\eta}'(\frac{|x|^2}{k^2}),$$

$$(4.33) \quad A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) = \frac{2}{k^2}\hat{\eta}'(\frac{|x|^2}{k^2}) + \frac{4|x|^2}{k^4}\hat{\eta}''(\frac{|x|^2}{k^2}),$$

$$(4.34) \quad A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) = \frac{12|x|}{k^4}\hat{\eta}''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + \frac{8|x|^3}{k^6}\hat{\eta}'''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right),$$

$$(4.35) \quad A\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) = \frac{12}{k^4}\hat{\eta}''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + \frac{48|x|^2}{k^6}\hat{\eta}'''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + \frac{16|x|^4}{k^8}\hat{\eta}''''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right).$$

Интегрируя (4.31) от $t - s$ до $t + \theta$ (где $\theta \in [-h, 0]$), из (4.12) и (4.32) - (4.35) вытекает, что

$$(4.36) \quad \begin{aligned} & \|w'(t + \theta)\|^2 + \|\Delta w(t + \theta)\|^2 \\ & \leq 2\|\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(f(x, u^1(T - \rho(T))) - f(x, u^2(T - \rho(T))))\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \\ & \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} + \frac{112\sqrt{2}C_0}{k^3}\|A^{\frac{1}{4}}u^1 - A^{\frac{1}{4}}u^2\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \\ & + \frac{60C_0}{k^2}\|A^{\frac{1}{2}}u^1 - A^{\frac{1}{2}}u^2\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \\ & + \frac{8\sqrt{2}C_0}{k}\|A^{\frac{3}{4}}u^1 - A^{\frac{3}{4}}u^2\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \\ & + \frac{172C_0}{k^4}\|u^1 - u^2\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k \times [t-s, t]})}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать асимптотически полукомпактность сверху $\{U(t, \tau)\}$, пусть $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$, $s_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, $u_{nt} \in U(t, t - s_n)B(t - s_n)$ даны, тогда достаточно показать, что $\{u_{nt}\}_{n=1}^{\infty}$ есть предкомпакт в $C_{\mathcal{H}}$. Заметим, что существует $N > 0$ такое, что для всех $n \geq N$, имеем $U(t, t - s_n)B(t - s_n) = U(t, t - T_0)U(t - T_0, t - s_n)B(t - s_n) \subset U(t, t - T_0)Q(t - T_0)$. Следовательно, $u_{nt} \in U(t, t - T_0)Q(t - T_0)$, $n \geq N$. Из лемм 4.1 и 4.3, видим, что

$$(4.37) \quad \{u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t - T_0 - h, t; L^2(\mathbb{R}^n)) \text{ и } L^{\infty}(t - T_0 - h, t; H^2(\mathbb{R}^n)),$$

$$(4.38) \quad \{A^{\frac{1}{4}}u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t - T_0 - h, t; L^2(\mathbb{R}^n)),$$

$$(4.39) \quad \{A^{\frac{1}{2}}u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t - T_0 - h, t; L^2(\mathbb{R}^n)),$$

$$(4.40) \quad \{A^{\frac{3}{4}}u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t - T_0 - h, t; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Следовательно, существует $k_1 > k$, такая, что для всех $n, m \geq N$,

$$(4.41) \quad \begin{aligned} & \frac{112\sqrt{2}C_0}{k_1^3}\|A^{\frac{1}{4}}u_n - A^{\frac{1}{4}}u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})}\|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})} \\ & + \frac{60C_0}{k_1^2}\|A^{\frac{1}{2}}u_n - A^{\frac{1}{2}}u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})}\|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})} \\ & + \frac{8\sqrt{2}C_0}{k_1}\|A^{\frac{3}{4}}u_n - A^{\frac{3}{4}}u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})}\|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})} \\ & + \frac{172C_0}{k_1^4}\|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})}\|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1 \times [t-s, t]})} < \varepsilon. \end{aligned}$$

По теореме Алаоглу, без ограничения общности, из (4.37) – (4.40) находим, что

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо на } L^\infty(t - T_0 - h, t; H^2(\Omega_{2k_1}));$$

$$u'_n \rightarrow u' \text{ слабо на } L^\infty(t - T_0 - h, t; L^2(\Omega_{2k_1})).$$

Следовательно, $u_n \rightarrow u$ в $L^2(t - T_0 - h, t; L^2(\Omega_{2k_1}))$ и $u_n(T, x) \rightarrow u(T, x)$ для почти всех $(T, x) \in [t - T_0 - h, t] \times \Omega_{2k_1}$.

Так как $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, то

$$\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x, u_n(T, x)) \rightarrow \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x, u(T, x)), (T, x) \in [t - T_0 - h, t] \times \Omega_{2k_1}, n \rightarrow \infty.$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(f(x, u_n(T - \rho(T))) - f(x, u_m(T - \rho(T)))) \right\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])} = 0.$$

Заметим, что $\{u'_{1n}(T)\}$ ограничена в $L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])$. Тогда существует $N_1 \geq N$ такое, что для всех $n, m \geq N_1$,

$$(4.42) \quad 2 \left\| \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(f(x, u_n(T - \rho(T))) - f(x, u_m(T - \rho(T)))) \right\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])} \\ \times \|u'_{1n}(T) - u'_{1m}(T)\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])} < \varepsilon.$$

В силу (4.41) – (4.42), из (4.36) следует, что

$$\|u'_{1nt} - u'_{1mt}\|_{C_{L^2(\Omega_{k_1})}}^2 + \|u_{1nt} - u_{1mt}\|_{C_{H^2(\Omega_{k_1})}}^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} (\|u'_{1n}(t + \theta) - u'_{1m}(t + \theta)\|_{L^2(\Omega_{2k_1})}^2 + \|\Delta u_{1n}(t + \theta) - \Delta u_{1m}(t + \theta)\|_{L^2(\Omega_{2k_1})}^2) < C\varepsilon.$$

Тогда для всех $n, m \geq N_1$,

$$\|u_{nt} - u_{mt}\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 = \|u'_{nt} - u'_{mt}\|_{C_{L^2(\mathbb{R}^n)}}^2 + \|u_{nt} - u_{mt}\|_{C_{H^2(\mathbb{R}^n)}}^2 < C\varepsilon.$$

Следовательно, $\{u_{nt}\}_{n=1}^\infty$ – предкомпакт в $C_{\mathcal{H}}$. Наконец, в силу леммы 4.1, для каждого $t \in \mathbb{R}$, $\{\mathcal{A}_{C_{\mathcal{H}}}\}_{t \in \mathbb{R}}$ определенная, как

$$\mathcal{A}_{C_{\mathcal{H}}}(t) = \omega(\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}}, t) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq T} U(t, t - s)Q(t - s)}$$

есть $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ – аттрактор для многозначного процесса $\{U(t, \tau)\}$ in $C_{\mathcal{H}}$. Теорема доказана.

Благодарность. Мы благодарим рецензенту за содержательные комментарии и предложения, которые улучшили презентацию статьи.

Abstract. The dynamics of solutions for the plate equation without delay effects has been investigated by many authors. But there are few works on plate equation with variable delay on unbounded domain. Therefore, we firstly consider the existence of pullback attractor for the plate equation with variable delay on $\mathbb{R}^n$ by using the theory of multi-valued dynamical system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. H. Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, New York, Springer (1996).
- [2] W. M. Ruess, “Existence of solutions to partial differential equations with delay”, Theory and applications of nonlinear operators of accretive monotone type, Lecture Notes Pure Appl. Math., **178**, 259 – 288 (1996).
- [3] T. Caraballo, P. E. Kloeden and J. Real, “Pullback and forward attractors for a damped wave equation with delays”, Stoch. Dyn., **4**, no. 3, 405 – 423 (2004).
- [4] S. P. Wang, Q. Z. Ma, “Existence of pullback attractors for the non-autonomous suspension bridge equation with time delay”, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B., **25**, no. 4, 1299 – 1316 (2020).
- [5] S. P. Wang, Q. Z. Ma, X. K. Shao, “Dynamics of suspension bridge equation with delay”, J. Dynam. Differential Equations, **35**, 3563 – 3588 (2023), <https://doi.org/10.1007/s10884-022-10130-9>.
- [6] T. Caraballo, P. E. Kloeden, “Non-autonomous attractors for integro-differential evolution equations”, Discrete Contin. Dyn. Syst. **2**, 17 – 36 (2009).
- [7] P. Marin-Rubio, J. Real, “Pullback attractors for 2D-Navier-Stokes equation with delay in continuous and sub-linear operators”, Discrete Contin. Dyn. Syst., **26**, 989 – 1006 (2010).
- [8] Y. J. Wang, S. F. Zhou, “Kernal sections and uniform attractors of multi-valued semiprocesses”, J. Differential Equations, **232**, 573 – 622 (2007).
- [9] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, Attractors for Equations of Mathematical Physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence, RI (2002).
- [10] T. Caraballo, M. J. Garrido-Atienza, B. Schmalfuß and J. Valero, “Non-autonomous and random attractors for delay random semilinear equations without uniqueness”, Discrete Contin. Dyn. Syst., **21**, 415 – 443 (2008).
- [11] F. Flandoli and B. Schmalfuß, “Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative noise”, Stoch. Stoch. Rep., **59**, 21 – 45 (1996).
- [12] Y. J. Wang, “Pullback attractors for a damped wave equation with delays”, Stoch. Dyn. **15**, no. 2015, 1550003 (2015).
- [13] S. Woinowsky-Krieger, “The effect of axial force on the vibration of hinged bars”, J. Appl. Mech, **17**, 35 – 36 (1950).
- [14] H. M. Berger, “A new approach to the analysis of large deflection of plates”, J. Appl. Mech, **22**, 465 – 472 (1955).
- [15] L. Yang, C. K. Zhong, “Global attractor for plate equation with nonlinear damping”, Nonlinear Anal. **69**, 3802 – 3810 (2008).
- [16] L. Yang, “Uniform attractor for non-autonomous plate equation with a localized damping and a critical nonlinearity”, J. Math. Anal. Appl. **338**, 1243 – 1254 (2008).
- [17] A. Kh. Khanmamedov, “Existence of a global attractors for the plate equation with a critical exponent in an unbounded domain”, Appl. Math. Letters, **18**, 827 – 832 (2005).
- [18] A. Kh. Khanmamedov, “Global attractors for the plate equation with a localized damping and a critical exponent in an unbounded domain”, J. Differential Equations, **225**, 528 – 548 (2006).
- [19] H. B. Xiao, “Asymptotic dynamics of plate equation with a critical exponent on unbounded domain”, Nonlinear Anal. **70**, 1288 – 1301 (2009).
- [20] M. Aouadi, “Global and exponential attractors for extensible thermoelastic plate with time-varying delay”, J. Differential Equations, **269**, 4079 – 4115 (2020).
- [21] R. Temam, “Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics”, 2nd edn. New York, Springer-Verlag (1997).

Поступила 25 июня 2023

После доработки 05 сентября 2023

Принята к публикации 06 сентября 2023