

**БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-СИСТЕМ В $H^1(\mathbb{T})$:
ДОСТАТОЧНОСТЬ**

Л. АКОПЯН, К. КЕРЯН

*Институт математики НАН РА, Армения
Ереванский Государственный Университет¹
Университет Южной Калифорнии, Лос-Анджелес, Калифорния
E-mails: levonhakobyan7@gmail.com; karenkeryan@usu.am*

Аннотация. Дана геометрическая характеристика последовательностей узлов (s_n) , которая является достаточным условием для того, чтобы соответствующая периодическая ортонормированная сплайн-система произвольного порядка k , $k \in \mathbb{N}$ была безусловным базисом в атомном пространстве Харди на торе $H^1(\mathbb{T})$.

MSC2020 number: 42C10, 46E30.

Ключевые слова: ортонормированная сплайн-система; периодическая сплайн-система; безусловный базис; H^1 .

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы исследуем периодические ортонормированные сплайн-системы произвольного порядка k , с произвольными разбиениями. Рассматриваем такие плотные последовательности точек на торе $\mathbb{T}$, где каждая точка встречается не более k раз. Такие последовательности точек называются *k допустимо на торе $\mathbb{T}$* .

Основная цель данной работы — дать характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая периодическая ортонормированная система сплайнов порядка k является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Наш результат является периодической версией основного результата из [14]. Сделаем несколько комментариев по истории этого результата.

Знаменитый результат А. Шадрина [23] утверждает, что оператор ортогонального проектирования на эти пространства $\mathcal{S}_n$ ограничен на $L^\infty[0, 1]$ константой,

¹Второй автор был поддержан Комитетом науки Республики Армения в рамках исследовательского проекта №23RL-1A027.

зависящей только от порядка сплайна k . Как следствие, непериодическая ортонормированная сплайн-система $(f_n)_n$ является базисом Шаудера в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ и в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. Существуют различные результаты о безусловности систем сплайнов, ограничивающих либо порядок сплайна k , либо разбиение $(t_n)_{n \geq 0}$. Первый результат в этом направлении встречается в [1], где доказано, что классическая система Франклина — ортонормированные системы сплайнов порядка 2, соответствующие последовательности диадических узлов $(1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, \dots)$ — является безусловным базисом в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Этот результат был обобщен в [4] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка, но соответствующие только диадическими узлами. Далее, значительные усилия были предприняты, чтобы ослабить ограничение на последовательности диадических узлов. Это ограничение было постепенно снято для общих систем Франклина в серии статей [10, 15, 11]. Окончательный результат показал, что для каждой допустимой последовательности точек $(t_n)_{n \geq 0}$ с параметром $k = 2$, соответствующая общая система Франклина образует безусловный базис в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Сочетание методов, используемых в [15, 11] с некоторыми новыми неравенствами из [21], в [19] было доказано, что непериодические ортонормированные сплайн-системы являются безусловными базисами в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, для сплайн систем любого порядка k и для любой допустимой последовательности точек (t_n) .

Периодический аналог теоремы Шадрина представлен в [20]. В случае диадических узлов, в работе Дж. Домста [8] получены экспоненциальные оценки для обратной матрицы Грама периодических В-сплайнов, которые были использованы для доказательства безусловности периодических ортонормированных сплайн-систем с диадическими узлами в L^p для $1 < p < \infty$. В работе [17] было доказано, что для любой допустимой последовательности точек, соответствующая периодическая система Франклина (т.е. случай $k = 2$) образует безусловный базис в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. К. Керян и М. Пассенбруннер [18] получили важную оценку для функций общих периодических ортонормированных сплайн систем. Объединив эту оценку с методами, разработанными в [11], авторы смогли доказать безусловную базисность периодических ортонормированных сплайн-систем в $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Простая геометрическая характеристика последовательностей узлов была дана Г.Г. Геворкяном и А. Камонтом в [12]. Они доказали, что соответствующая

общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0, 1]$. После этого, используя следствия результата Шадрина, полученного З. Чисельским [5], Г.Г. Геворкян и А. Камонт [13] обобщили часть своего результата из [12] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка и получили характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормированная сплайн-система порядка k является базисом в $H^1[0, 1]$. В дальнейшем были проведены исследования с целью найти характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормированная сплайн-система порядка k является безусловным базисом в $H^1[0, 1]$. Решение этой проблемы было представлено в [14]. Дано условие регулярности последовательностей узлов.

Другой важный вклад в изучение периодических ортонормированных систем сплайнов был сделан М.П. Погосяном и К.А. Керяном в [22]. Простая геометрическая характеристика последовательностей узлов была дана в упомянутой статье [22]. Для этих типов последовательностей узлов соответствующие общие периодические системы Франклина являются базисом или безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. В недавней статье [16] авторы настоящей статьи предоставили необходимое и достаточное условие, при котором периодическая ортонормированная сплайн-система является базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Схема доказательства результатов в основном соответствует [14]. Некоторые оценки и свойства периодических сплайнов взяты из [18].

Структура настоящей статьи следующая: В разделе 2 мы даем необходимые определения и даем формулировку основного результата статьи — теорему 2.4. В разделах 3 и 4 мы упоминаем или доказываем несколько фактов, необходимых для наших результатов. В частности, в разделе 4 мы представляем понятие связанных характеристических интервалов как для периодических, так и для непериодических ортонормированных систем сплайнов с произвольными узлами, а также упоминаем или получаем важные оценки для ортонормированных сплайн-систем. Некоторые комбинаторные факты для характеристических интервалов приведены в разделе 5. Затем, в разделе 6 представлены некоторые важные результаты, а в разделе 7 дано доказательство теоремы 2.4.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Непериодический случай. Предположим, что $k \geq 2$ — целое число. Пусть $\mathcal{T} = (t_n)_{n=2}^\infty$ — всюду плотная последовательность точек на единичном интервале такая, что каждая точка встречается не более k раз. Кроме того, определим $t_0 := 0$ и $t_1 := 1$. Такие последовательности точек называются *k-допустимыми*. Для n из интервала $-k+2 \leq n \leq 1$ пусть $\mathcal{S}_n^{(k)}$ — пространство полиномов порядка $n+k-1$ (или степени $n+k-2$) на интервале $[0, 1]$ и $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^1$ — набор ортонормированных многочленов из $L^2 \equiv L^2[0, 1]$, для которых степень $f_n^{(k)}$ равна $n+k-2$. Для $n \geq 2$ пусть $\mathcal{T}_n$ — упорядоченная последовательность точек, состоящая из точек сетки $(t_j)_{j=0}^{n+1}$ с учетом кратностей, где узлы 0 и 1 имеют кратность k , т. е. $\mathcal{T}_n$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \dots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \\ \leq \dots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \dots = \tau_{n,n+k-1} = 1). \end{aligned}$$

В этом случае мы определяем $\mathcal{S}_n^{(k)}$ как пространство полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $\mathcal{T}_n$. Для каждого $n \geq 2$ пространство $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ имеет коразмерность 1 в $\mathcal{S}_n^{(k)}$ и, следовательно, существует функция $f_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$, ортонормированная пространству $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$. Заметим, что эта функция $f_n^{(k)}$ единственная с точностью до знака.

Определение 2.1. Система функций $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^\infty$ называется *ортонормальная сплайн-система порядка k , соответствующая последовательности $(t_n)_{n=0}^\infty$* .

Часто мы будем пропускать параметр k и писать f_n и $\mathcal{S}_n$ вместо $f_n^{(k)}$ и $\mathcal{S}_n^{(k)}$, соответственно.

Под $H^1 = H^1[0, 1]$ мы подразумеваем атомное пространство Харди на $[0, 1]$ (см. [6]). Теперь введем условия регулярности последовательности $\mathcal{T}$.

Для $n \geq 2$, $\ell \leq k$ и i из интервала $-\ell \leq i \leq n-1$ определим $D_{n,i}^{(\ell)}$ как интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+\ell}]$.

Определение 2.2. Пусть $\ell \leq k$ и $(t_n)_{n=0}^\infty$ — ℓ -допустимая последовательность точек. Тогда эта последовательность называется *ℓ -регулярной с параметром $\gamma \geq 1$* , если

$$\frac{|D_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |D_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |D_{n,i}^{(\ell)}|, \quad n \geq 2, \quad -\ell \leq i \leq n-2.$$

Итак, другими словами, (t_n) ℓ -регулярна, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех n соотношения длин соседних носителей В-сплайн-функций (см. раздел 3.2) порядка ℓ с узлами из $\mathcal{T}_n$ ограничены γ -ой.

В этом разделе мы представим две теоремы, которые являются источниками вопросов, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 2.1 ([13]). *Пусть $k \geq 1$ и (t_n) k -допустимая последовательность узлов в $[0, 1]$ с соответствующей ортонормированной сплайн-системой $(f_n^{(k)})$ порядка k . В таком случае $(f_n^{(k)})$ является базисом в $H^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда (t_n) k -регулярна с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

Теорема 2.2 ([14]). *Пусть (t_n) — k -допустимая последовательность точек. Соответствующая ортонормированная сплайн-система $(f_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1[0, 1]$, тогда и только тогда, когда (t_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

2.2. Периодический случай. Пусть $k \geq 2$ — целое число и $(s_n)_{n=1}^\infty$ — k допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, т.е. всюду плотная последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ такая, что каждая точка встречается не более k раз.

Для $n \geq k$ определим $\hat{S}_n$ как пространство полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $(s_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$. Для каждого $n \geq k+1$ пространство $\hat{S}_{n-1}$ имеет коразмерность 1 в $\hat{S}_n$ и, следовательно, существует функция $\hat{f}_n \in \hat{S}_n$ такая, что $\|\hat{f}_n\|_2 = 1$ и ортогональная пространству $\hat{S}_{n-1}$. Заметим, что эта функция $\hat{f}_n$ единственна с точностью до знака. Кроме того, пусть $(\hat{f}_n)_{n=1}^k$ — ортонормированный базис для $\hat{S}_k$. Система функций $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ называется *периодической* ортонормированной сплайн системой порядка k , соответствующая последовательности $(s_n)_{n=1}^\infty$.

Теперь определим атомное пространство Харди на $\mathbb{T}$.

Определение 2.3. $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *периодическим атомом*, если либо $a \equiv 1$, либо существует интервал $\Gamma \subset \mathbb{T}$ такой, что выполняются следующие условия:

- (i) $\text{supp } a \subset \Gamma$,
- (ii) $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq |\Gamma|^{-1}$,
- (iii) $\int_{\mathbb{T}} a(x) dx = \int_{\Gamma} a(x) dx = 0$.

Определение 2.4. $H^1(\mathbb{T})$ является семейством всех тех функций f , которые имеют представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$$

для некоторых периодических атомов $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и действительных скаляров $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

Пространство $H^1(\mathbb{T})$ становится банаховым при норме

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T})} := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

где $\inf$ берется по всем (периодическим) атомным представлениям $\sum c_n a_n$ функции f . Теперь введем условия регулярности на торе $\mathbb{T}$ для последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Предположим, что $n \geq k+1$ и пусть $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ — упорядоченная последовательность узловых точек, состоящая из $(s_j)_{j=1}^n$ на $\mathbb{T}$, канонически отождествленных с $[0, 1)$:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = (0 \leq \sigma_{n,0} \leq \sigma_{n,1} \leq \dots \leq \sigma_{n,n-2} \leq \sigma_{n,n-1} < 1).$$

Для целых $\ell \leq k$ и $i \in \mathbb{N}_0$ определим интервал $T_{n,i}^{(\ell)} := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+\ell}] \subset \mathbb{T}$. Здесь мы считаем индекс i периодическим, т.е. используем обозначение периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и $r \in \mathbb{Z}$, а подиндексами В-сплайн функций возьмем индексы по модулю n .

Определение 2.5. Пусть $\ell \leq k$ и $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — ℓ -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$. Тогда эта последовательность называется ℓ -регулярной на торе $\mathbb{T}$ с параметром $\gamma \geq 1$, если

$$\frac{|T_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |T_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |T_{n,i}^{(\ell)}|, \quad n \geq \ell + 1, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Другими словами, (s_n) является ℓ -регулярным на торе $\mathbb{T}$, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех $n \geq \ell$ соотношения длин соседних носителей периодических В-сплайнов (см. раздел 3.2) порядка ℓ с узлами $\hat{\mathcal{T}}_n$ ограничены γ -ой.

Следующая теорема является основным результатом [16] и характеризует системы $(\hat{f}_n^{(k)})$, которые являются базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2.3 ([16]). Пусть $k \geq 1$ и (s_n) k -допустимая последовательность узлов в $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн системой $(\hat{f}_n^{(k)})$ порядка k . В таком случае $(\hat{f}_n^{(k)})$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда (s_n) k -регулярна на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

В этой статье мы находим достаточное условие при котором $(\hat{f}_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2.4. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Если (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$, то соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Параметр $k \geq 2$ всегда будет использоваться для определения порядка базовых полиномов или сплайнов. Обозначение $A(t) \sim B(t)$ будет использоваться при существовании двух констант $c_1, c_2 > 0$, таких что $c_1 B(t) \leq A(t) \leq c_2 B(t)$ для всех t , где t представляет собой все явные и неявные зависимости, которые могут иметь выражения A и B . Если константы c_1, c_2 зависят от дополнительного параметра p , мы напомним это $A(t) \sim_p B(t)$. Соответственно, будем использовать символы $\lesssim, \gtrsim, \lesssim_p, \gtrsim_p$. Кроме этого, будем использовать символы $\curvearrowright$ и $\curvearrowleft$ для обозначения направлений против и по часовой стрелке, соответственно. Направление против часовой стрелки будем считать положительным направлением. Для подмножества E вещественной прямой через $|E|$ обозначим меру Лебега E , а $\mathbb{1}_E$ — характеристическую функцию E . Если $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция, а λ — вещественный параметр, то множество всех точек, в которых f больше, чем λ , обозначим $[f > \lambda] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \lambda\}$.

Определение 3.1. Пусть $V \subset \mathbb{T}$ — интервал. Назовем один из двух концов V конечной точкой по часовой стрелке, если можно двигаться от этого конца по часовой стрелке вдоль тора через V и в конечном итоге встретить другой конец интервала V . Конец интервала, который не является таковым, называется конечная точка против часовой стрелки.

3.1. Свойства регулярной последовательности точек на $[0, 1]$ и $\mathbb{T}$. Сначала мы рассмотрим непериодический случай. Следующая лемма описывает геометрическое разложение интервалов в регулярные последовательности (напомним обозначение $D_{n,i}^{(\ell)} = [\tau_{n,i}, \tau_{n,i+\ell}] \subset [0, 1]$).

Лемма 3.1. *Пусть (t_n) k -допустимая последовательность точек, удовлетворяющая условию ℓ -регулярности для некоторого $1 \leq \ell \leq k$ с параметром γ , и пусть $D_{n_1,i_1}^{(\ell)} \supset \dots \supset D_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}$ — строго убывающая последовательность множеств, определенных выше. Тогда,*

$$|D_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}| \leq \frac{\gamma^\ell}{1 + \gamma^\ell} |D_{n_1,i_1}^{(\ell)}|.$$

Доказательство. Обозначим $V_j := D_{n_j,i_j}^{(\ell)}$ для $1 \leq j \leq 2\ell$. Тогда по определению, V_1 содержит $\ell + 1$ точек сетки из $\mathcal{T}_{n_1}$ и содержит не менее 3ℓ точек сетки $\mathcal{T}_{n_{2\ell}}$. Следовательно, существует интервал $D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)}$ для некоторого индекса m , удовлетворяющего условию

$$\text{int}(D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)} \cap V_{2\ell}) = \emptyset, \quad D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)} \subset V_1, \quad \text{dist}(D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)}, V_{2\ell}) = 0.$$

Теперь, из ℓ -регулярности (t_n) следует

$$|V_{2\ell}| \leq \gamma^\ell |D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)}| \leq \gamma^\ell (|V_1| - |V_{2\ell}|),$$

т. е. $|V_{2\ell}| \leq \frac{\gamma^\ell}{1 + \gamma^\ell} |V_1|$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Если последовательность узлов (s_n) удовлетворяет условию регулярности на торе $\mathbb{T}$, то мы имеем такое же геометрическое разложение интервалов на торе $\mathbb{T}$.

Лемма 3.2. *Пусть (s_n) k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию ℓ -регулярности для некоторого $1 \leq \ell \leq k$ с параметром γ и пусть $T_{n_1,i_1}^{(\ell)} \supset \dots \supset T_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}$ — строго убывающая последовательность интервалов на торе $\mathbb{T}$. Тогда,*

$$|T_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}| \leq \frac{\gamma^\ell}{1 + \gamma^\ell} |T_{n_1,i_1}^{(\ell)}|.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1.

3.2. Свойства функций В-сплайн. Определим функции $(N_{n,i}^{(k)})_{i=-k}^{n-1}$ — совокупность В-сплайнов порядка k , соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Эти функции нормализованы таким образом, что они образуют разбиение единицы, т. е. $\sum_{i=-k}^{n-1} N_{n,i}^{(k)}(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. С этим базисом связан биортогональный базис

$\mathcal{S}_n$, который мы обозначим через $(N_{n,i}^{(k)*})_{i=-k}^{n-1}$. Если значения параметров k и n ясны из контекста, то мы будем использовать также эти обозначения $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ и $(N_i^*)_{i=-k}^{n-1}$ соответственно.

Напомним теперь элементарное свойство многочленов.

Предложение 3.1 (Ремез). *Пусть $0 < \rho < 1$ и I — интервал, а $A \subset I$ такое подмножество I , что $|A| \geq \rho|I|$. Тогда для любого многочлена Q порядка k на интервале I имеем*

$$\max_{t \in I} |Q(t)| \lesssim_{\rho,k} \sup_{t \in A} |Q(t)| \quad \text{и} \quad \int_I |Q(t)| dt \lesssim_{\rho,k} \int_A |Q(t)| dt.$$

Теперь представим важный результат для В-сплайнов (N_i) . Это лемма 4.1 в [7, Глава 5].

Предложение 3.2. *Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $g = \sum_{j=-k}^{n-1} a_j N_j$, где набор $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ — В-сплайны порядка k , соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Тогда,*

$$(3.1) \quad |a_j| \lesssim_k |I_j|^{-1/p} \|g\|_{L^p(I_j)}, \quad -k \leq j \leq n-1,$$

где I_j — подинтервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ интервала $[\tau_{n,j}, \tau_{n,j+k}]$ максимальной длины.

Сейчас рассмотрим периодические В-сплайны и их свойства.

Пусть $n \geq k$ и $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ — периодические В-сплайн-функции порядка k соответствующие произвольной k допустимой последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ на торе $\mathbb{T}$, канонически отождествляемой с $[0, 1)$:

$$\mathcal{T}_n = (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{n-2} \leq \sigma_{n-1} < 1).$$

Пусть $(\hat{N}_{n,i}^{(k)*})_{i=0}^{n-1}$ — двойственный базис к $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ и $\hat{\mathcal{S}}_{\mathcal{T}_n}$ — линейная оболочка $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$. Отметим, что вместо обозначений $\hat{N}_{n,i}^{(k)}$ и $\hat{N}_{n,i}^{(k)*}$ мы можем использовать $\hat{N}_i$ и $\hat{N}_i^*$ соответственно. Определим матрицу $(\hat{a}_{ij})_{i,j=0}^{n-1} = (\langle \hat{N}_i^*, \hat{N}_j \rangle)_{i,j=0}^{n-1}$.

Теперь нам понадобится следующая известная формула для производной линейной комбинации периодических В-сплайн-функций: если $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \hat{N}_{n,j}^{(k)}$, то

$$(3.2) \quad g' = (k-1) \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) \frac{\hat{N}_{n,j}^{(k-1)}}{|T_{n,j}^{(k-1)}|}.$$

Здесь мы использовали обозначение периодического расширения последовательности коэффициентов $(a_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $a_{rn+j} = a_j$ для $j = 0, \dots, n-1$ и $r \in \mathbb{Z}$

Не сложно убедиться, что свойство устойчивости В-сплайна имеет место и в периодическом случае.

Предложение 3.3. Пусть $n \geq 2k$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \hat{N}_j$ имеем

$$(3.3) \quad \|g\|_p \sim_k \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^p |\operatorname{supp} \hat{N}_j| \right)^{1/p} = \|(a_j \cdot |\operatorname{supp} \hat{N}_j|^{1/p})_{j=0}^{n-1}\|_{\ell^p}.$$

Более того, если $n \geq 3k - 1$, то для коэффициентов имеет место следующее неравенство

$$(3.4) \quad |a_j| \lesssim_k |\hat{I}_j|^{-1/p} \|g\|_{L^p(\hat{I}_j)}, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Здесь $\hat{I}_j$ — подинтервал $[\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+1}]$ интервала $T_{n,j}^{(k)}$, который имеет максимальную длину.

По поводу первого свойства мы отсылаем к [18], а доказательство второго свойства будет представлено ниже.

Доказательство. Пусть j — произвольное целое число с $0 \leq j \leq n-1$. Поскольку $n \geq 3k-1$, мы можем отождествить $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ так, чтобы между начальной точкой 0 и носителем $\hat{N}_j$ было не менее $k-1$ точек как по часовой стрелке, так и по направлению против часовой стрелки. Далее, используя (3.1) из утверждения 3.2, мы получим желаемый результат. $\square$

Ниже приводим периодическую версию теоремы Шадрина (см. теорему 1.4 в [20]).

Теорема 3.1 ([20]). Пусть $\hat{P}$ — оператор ортогонального проектирования на $\hat{\mathcal{S}}_{\hat{\mathcal{T}}}$ относительно канонического скалярного произведения в $L^2(\mathbb{T})$. Тогда существует постоянная C_k , зависящая только от порядка сплайна k , такая, что

$$\|\hat{P} : L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{T})\| \leq C_k.$$

С помощью последнего результата доказана почти всюду сходимость рядов Фурье по периодическим ортонормированным сплайн системам (Теорема 1.3 в [20]).

Теорема 3.2 ([20]). Пусть $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ — периодическая ортонормированная сплайн система порядка k , соответствующая произвольной k -допустимой последовательности точек $(s_n)_{n=1}^\infty$ на торе $\mathbb{T}$. Тогда, для произвольного $f \in L^1(\mathbb{T})$, ряд $\sum_{n=1}^\infty \langle f, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n$ сходится к f почти всюду на торе $\mathbb{T}$.

Следующий результат принадлежит Керяну и Пассенбруннеру. С доказательством можно ознакомиться в [18] (см. Теорему 3.13).

Теорема 3.3 ([18]). Пусть $\hat{P}$ — ортогональная проекция на $\hat{\mathcal{S}}_{\hat{T}}$. Тогда,

$$|\hat{P}h(t)| \lesssim \hat{M}h(t), \quad h \in L^1(\mathbb{T}),$$

где $\hat{M}h(t) = \sup_{I \ni t} |I|^{-1} \int_I |h(y)| dy$ — периодический оператор максимальной функции Харди-Литтлвуда и $\sup$ берется по всем интервалам $I \subset \mathbb{T}$ содержащим точку t .

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ИНТЕРВАЛЫ И СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

4.1. Непериодический случай. В этом разделе мы рассмотрим ортонормированные сплайн-функции $f_n = f_n^{(k)}$, где $k \in \mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим сетку $\mathcal{T}_n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \dots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \dots \leq \tau_{n,i_0} \\ \leq \dots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \dots = \tau_{n,n+k-1} = 1). \end{aligned}$$

Для простоты мы будем часто опускать индекс n .

Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ получается из $\mathcal{T}_n$, удалением выделенного τ_{i_0} из сетки. Рассмотрим функции $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$, т.е. совокупность В-сплайн-функций порядка k , соответствующих сетке $\mathcal{T}_n$ и через $(\tilde{N}_i : -k \leq i \leq n-2)$ обозначим совокупность В-сплайн-функций, соответствующих $\widetilde{\mathcal{T}}_n$. Формула Бома [2] дает нам следующую связь между N_i и $\tilde{N}_i$:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tilde{N}_i(t) = N_i(t) & \text{если } -k \leq i \leq i_0 - k - 1, \\ \tilde{N}_i(t) = \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} N_i(t) + \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} N_{i+1}(t) & \text{если } i_0 - k \leq i \leq i_0 - 1, \\ \tilde{N}_i(t) = N_{i+1}(t) & \text{если } i_0 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Чтобы вычислить ортонормированную сплайн-функцию, соответствующую разбиениям $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ и $\mathcal{T}_n$, сначала определим функцию $g_n \in \text{span}\{N_i : -k \leq i \leq n-1\}$ такую, что $g_n \perp \tilde{N}_j$ для всех $-k \leq j \leq n-2$. Функция g_n имеет вид (с точностью до постоянного множителя)

$$(4.2) \quad g_n = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j N_j^* = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \sum_{l=-k}^{n-1} \alpha_j a_{jl} N_l = \sum_{l=-k}^{n-1} w_l N_l,$$

где $(a_{jl})_{j,l=-k}^{n-1}$ — обратная матрица Грама $(\langle N_j, N_l \rangle)_{j,l=-k}^{n-1}$ и

$$(4.3) \quad w_l := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j a_{jl}, \quad -k \leq l \leq n-1.$$

Коэффициенты α_j имеют вид

$$(4.4) \quad \alpha_j = (-1)^{j-i_0+k} \left(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\tau_{i_0} - \tau_\ell}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \right) \left(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\tau_{\ell+k} - \tau_{i_0}}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \right), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0.$$

Кроме того, коэффициенты α_j можно описать соотношением

$$(4.5) \quad \alpha_{i+1} \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} + \alpha_i \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} = 0.$$

Чтобы дать оценки для g_n и нормированной функции $f_n = g_n / \|g_n\|_2$, сопоставим каждой функции g_n характеристический интервал, который представляет собой интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ с концами из сетки и лежит вблизи вставленной точки τ_{n,i_0} .

Определение 4.1 (Характеристический интервал для непериодических последовательностей). Пусть $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}}$ такие разбиения, как указано выше, а τ_{i_0} — новая точка в $\mathcal{T}$, которой нет в $\tilde{\mathcal{T}}$. Определим *характеристический интервал* J , соответствующий τ_{i_0} следующим образом.

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \leq j \leq i_0 : |[\tau_j, \tau_{j+k}]| \leq 2 \min_{i_0-k \leq \ell \leq i_0} |[\tau_\ell, \tau_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j , для которых соответствующий носитель В-сплайн-функции N_j приближенно минимален. Заметим, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\alpha_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\alpha_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $J^{(0)} := [\tau_{j^{(0)}}, \tau_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $J^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$J^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\tau_{j^{(0)}+\ell}, \tau_{j^{(0)}+\ell+1}] \quad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим *характеристический интервал* $J_n = J = J(\tau_{i_0})$ как один из выше указанных k интервалов, имеющий максимальную длину.

4.2. Периодический случай. Здесь мы даем оценки для периодических ортонормированных сплайн-функций $(\hat{f}_n)$. Некоторые из них доказаны в [18]. Докажем другие оценки, отсутствующие в предыдущей статье. Эти оценки необходимы для доказательства основной теоремы этой статьи.

Имеем ту же ситуацию, что и в непериодическом случае: Пусть

$$\hat{\mathcal{T}}_n = \hat{\mathcal{T}} = (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{i_0} \leq \dots \leq \sigma_{n-2} \leq \sigma_{n-1} < 1)$$

— разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1)$, а $\tilde{\mathcal{T}}$ — то же самое разбиение, но с удаленной σ_{i_0} . Напомним обозначения периодических В-сплайн-функций порядка k относительно $\hat{\mathcal{T}}$, т.е. $(\hat{N}_j)_{j=0}^{n-1}$ и через $(\tilde{N}_j)_{j=0}^{n-2}$ обозначим периодические В-сплайн-функции порядка k относительно $\tilde{\mathcal{T}}$. Здесь мы напомним обозначения периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $r \in \mathbb{Z}$ и индексы В-сплайн-функций возьмем по модулю n .

Чтобы вычислить периодические ортонормированные сплайн-функции, соответствующие по приведенным выше сеткам определим функцию $\hat{g}_n := \hat{g} \in \text{span}\{\hat{N}_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ такую, что $\hat{g} \perp \tilde{N}_j$ для всех $0 \leq j \leq n-2$. То есть предполагаем, что $\hat{g}$ имеет вид

$$\hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \hat{N}_j^*,$$

где $\hat{\alpha}_j = \langle \hat{g}, \hat{N}_j \rangle$. Чтобы $\hat{g}$ была ортогональна $\tilde{N}_j$ для $0 \leq j \leq n-2$ она должна удовлетворять тождествам

$$0 = \langle \hat{g}, \tilde{N}_i \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \langle \hat{N}_j^*, \tilde{N}_i \rangle, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Здесь мы можем рассматривать индексы j как периодически, что означает $\hat{\alpha}_j \neq 0$ только для $j \in \{i_0 - k, \dots, i_0\}$. Важно отметить, что формула (4.1) распространяется на периодическую настройку, что влечет за собой следующее отношение для коэффициентов $(\hat{\alpha}_j)$:

$$(4.6) \quad \hat{\alpha}_{i+1} \frac{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i+1}} + \hat{\alpha}_i \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_i}{\sigma_{i+k} - \sigma_i} = 0, \quad i_0 - k \leq i \leq i_0 - 1.$$

С начальным значением

$$\hat{\alpha}_{i_0-k} = \prod_{\ell=i_0-k+1}^{i_0-1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{\ell}},$$

мы получаем явную формулу

(4.7)

$$\hat{\alpha}_j = (-1)^{j-i_0+k} \left(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_\ell}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell} \right) \cdot \left(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell} \right), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0.$$

Теперь, аналогично определению 4.1, представим характеристические интервалы для периодических сеток.

Определение 4.2 (Характеристический интервал для периодических последовательностей). Пусть $\hat{\mathcal{J}}, \tilde{\mathcal{J}}$ такие разбиения, как указано выше и σ_{i_0} — новая точка в $\hat{\mathcal{J}}$, которой нет в $\tilde{\mathcal{J}}$. При ограничении $n \geq 2k$ определим (*периодический*) *характеристический интервал* $\hat{J}$, соответствующий σ_{i_0} , следующим образом.

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \leq j \leq i_0 : |[\sigma_j, \sigma_{j+k}]| \leq 2 \min_{i_0-k \leq \ell \leq i_0} |[\sigma_\ell, \sigma_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j в окрестности индекса i_0 для которого соответствующий носитель периодической В-сплайн-функции $\hat{N}_j$ приближенно минимален. Понятно, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\hat{\alpha}_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\hat{\alpha}_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $\hat{J}^{(0)} := [\sigma_{j^{(0)}}, \sigma_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $\hat{J}^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$\hat{J}^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\sigma_{j^{(0)}+\ell}, \sigma_{j^{(0)}+\ell+1}] \quad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим (*периодический*) *характеристический интервал* $\hat{J} = \hat{J}(\sigma_{i_0})$ как один из выше указанных k интервалов с максимальной длиной.

Имеем следующую оценку для L^p -нормы $\hat{g}$.

Предложение 4.1 ([18]). Если $n \geq 2k + 2$, то

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\mathbb{T})} \sim_k |\hat{J}|^{1/p-1}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Более того, существует число $N(k)$, зависящее только от порядка k такое, что для всех разбиений $\hat{\mathcal{J}}$, когда $n \geq N(k) \geq 3k - 1$, имеем

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\hat{J})} \gtrsim_k |\hat{J}|^{1/p-1}.$$

Первым шагом доказательства предложения 4.1 – отождествление $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ таким образом, чтобы индекс вновь вставленной точки σ_{i_0} был равен $[n/2]$. Затем для получения некоторых оценок использовалась разница между $\hat{f}_n$ и её непериодическим аналогом f_n , полученная упомянутым выше разделением. Полное доказательство приведено в предложениях 3.6 и 3.8 в статье [18].

Для получения дополнительных оценок $\hat{g}$ перспектива была изменена. В работе [18] было представлено максимальное разделение. Сначала делаем сдвиг последовательности $\hat{\mathcal{T}}_n = (\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ таким образом, чтобы разделить ее по середине наибольшего узла сетки интервала:

$$\sigma_0 = 1 - \sigma_{n-1} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq j \leq n-1} (\sigma_j - \sigma_{j-1}),$$

а затем выбираем $\mathcal{T}_n = (\tau_j)_{j=-k}^{n+k-1}$ так, что $\tau_j = \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и имеем

$$\tau_0 - \tau_{-1} = \tau_n - \tau_{n-1} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq j \leq n-1} (\sigma_j - \sigma_{j-1}).$$

Мы называем этот выбор $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$ *максимальным разделением* $\hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}}_n$.

Этот способ разделения позволил получить важную оценку для $\hat{g}$.

Предложение 4.2 ([18]). *Пусть $x \in [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]$. Тогда существует интервал $C := C(x) = C([\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]) \subset \mathbb{T}$, который является минимальным по отношению следующего включения*

$$\hat{J} \cup [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}] \subset C$$

такой, что если $K(C)$ – количество точек сетки $\hat{\mathcal{T}}$, содержащийся в C , то

$$|\hat{g}(x)| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C)}}{|C|},$$

где $\hat{q} \in (0, 1)$ зависит только от k .

Приведенный выше результат – это предложение 3.11 в [18]. Теперь мы используем предложение 4.2, чтобы получить следующий результат.

Лемма 4.1. *Пусть $n \geq 3k - 1$. Если написать $\hat{g}_n = \hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\omega}_j \hat{N}_j$, то имеем следующую оценку для коэффициента $\hat{w}_i := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \hat{\alpha}_j \hat{a}_{ij}$,*

$$(4.8) \quad |\hat{\omega}_j| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|},$$

где $\hat{I}_j := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+1}]$ – подинтервал $T_{n,j}^{(k)}$, который имеет максимальную длину, а $C(\hat{I}_j)$ – интервал, определенный в предложении 4.2.

Доказательство. Используя (3.4) из предложения 3.3 при $p = \infty$ и предложение 4.2, мы получаем

$$|\hat{\omega}_j| \lesssim_k \|\hat{g}_n\|_{L^\infty(\hat{I}_j)} \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|},$$

что завершает доказательство. $\square$

Прежде чем сформулировать следующую лемму, нам необходимо дать несколько определений.

Пусть $V \subset \mathbb{T}$ — такой интервал, что $V \cap \hat{J}_n = \emptyset$. Обозначим через $d_n^\frown(V)$ функцию, подсчитывающую количество узлов из $(s_j)_{j=1}^n$, находящихся в единственном интервале $V^\frown$, концами которого являются конечная точка V против часовой стрелки и конечная точка $\hat{J}_n$ по часовой стрелке, а внутренняя часть интервала $V^\frown$ не содержит V . Далее, $d_n^\frown(V)$ подсчитывает количество узлов, находящихся в интервале $V^\frown := \mathbb{T} \setminus (V \cup \hat{J}_n \cup V^\frown)$. Кроме того, пусть $C^\frown(V) := \mathbb{T} \setminus V^\frown$ и $C^\frown(V) := \mathbb{T} \setminus V^\frown$. Дополнительно, определим $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ и $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ как меру Лебега интервалов $V^\frown$ и $V^\frown$ соответственно. В случае $V \cap \hat{J}_n \neq \emptyset$ все функции $d_n^\frown(V)$, $d_n^\frown(V)$, $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ и $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ равны 0. $C^\frown(V)$ и $C^\frown(V)$ определяются как множество $\hat{J}_n \cup V$.

Лемма 4.2. Пусть $n \geq 3k - 1$ и $V \subset \mathbb{T}$ — такой интервал, что $V \cap \hat{J}_n = \emptyset$. Тогда

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \hat{q}^{d_n^\frown(V)} + \hat{q}^{d_n^\frown(V)}.$$

Доказательство. Пусть $\hat{\mathcal{J}}_n$ — разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1]$. Напомним, что интервалы $\hat{I}_j$ и $C(\hat{I}_j)$ определены как в лемме 4.1. Определим множества $A^\frown := \{0 \leq i \leq n-1 : T_{n,i}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_i) = C^\frown(\hat{I}_i)\}$ и $A^\frown := \{0 \leq i \leq n-1 : T_{n,i}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_i) = C^\frown(\hat{I}_i)\}$. По (3.3) из предложения 3.3 и лемме 4.1 имеем следующее:

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \|(\hat{\omega}_i |T_{n,i}^{(k)}|)_{i \in A^\frown \cup A^\frown}\|_{\ell^1} \lesssim_k \left\| \left(\frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_i))} |T_{n,i}^{(k)}|}{|C(\hat{I}_i)|} \right)_{i \in A^\frown \cup A^\frown} \right\|_{\ell^1}.$$

Очевидно, что $|\hat{I}_i| \sim_k |T_{n,i}^{(k)}|$ и $|\hat{I}_i| \leq |C(\hat{I}_i)|$, $i \in A^\frown \cup A^\frown$. Следовательно, получаем

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \|(\hat{q}^{K(C(\hat{I}_i))})_{i \in A^\frown}\|_{\ell^1} + \|(\hat{q}^{K(C(\hat{I}_i))})_{i \in A^\frown}\|_{\ell^1}.$$

Далее, поскольку n фиксированно, заключаем, что $K(C(\hat{I}_i))$ может быть равно произвольному натуральному числу большему, чем $\min(d_n^\frown(V), d_n^\frown(V))$, не более

k раз. Следовательно,

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \hat{q}_n^{d_n^\wedge(V)} + \hat{q}_n^{d_n^\vee(V)}.$$

□

5. КОМБИНАТОРИКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛОВ

5.1. Непериодический случай. В этом разделе мы напомним комбинаторный результат о взаимном расположении различных характеристических интервалов:

Лемма 5.1 ([19]). *Пусть V — произвольный подинтервал $[0, 1]$ и $\beta > 0$. Тогда существует постоянная $F_{k,\beta}$, зависящая только от k и β такая, что*

$$\text{card}\{n : J_n \subseteq V, |J_n| \geq \beta|V|\} \leq F_{k,\beta},$$

где $\text{card } E$ обозначает мощность множества E .

Нам также понадобится лемма 4.7 из [14].

Лемма 5.2 ([14]). *Пусть $(t_n)_{n=0}^\infty$ — k -допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию $(k-1)$ -регулярности и $\Delta = D_{m,i}^{(k-1)}$ для некоторых индексов m и i . Для $\ell \geq 0$ обозначим*

$$\begin{aligned} N(\Delta) &:= \{n : \text{card}(\Delta \cap \mathcal{J}_n) = k, J_n \subset \Delta\}, \\ M(\Delta, \ell) &:= \{n : d_n(\Delta) = \ell, \text{card}(\Delta \cap \mathcal{J}_n) \geq k, |J_n \cap \Delta| = 0\}, \end{aligned}$$

где в обоих определениях мы подсчитываем точки в $\Delta \cap \mathcal{J}_n$, включая кратности. Тогда,

$$(5.1) \quad \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in N(\Delta)} |J_n| \lesssim_k 1 \quad \text{и} \quad \sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \lesssim_{k,\gamma} (\ell + 1)^2.$$

Доказательство. Для любого $n \in N(\Delta)$ существуют только $k-1$ возможностей $D_{m,i}^{(1)}, \dots, D_{m,i+k-2}^{(1)}$ для J_n , а по лемме 5.1, каждый интервал $D_{m,j}^{(1)}$, $j = i, \dots, i+k-2$ встречается не более F_k раз как характеристический интервал. Отсюда следует первое неравенство в (5.1).

Теперь мы докажем второе неравенство в (5.1). Предположим, что каждый J_n , $n \in M(\Delta, \ell)$ лежит правее Δ , поскольку другой случай рассматривается аналогичными методами. Аргумент разделяется на две части в зависимости от значения параметра ℓ , начнем с случая $\ell \leq k$. В этом случае, для $n \in M(\Delta, \ell)$ предположим, что $J_n^{1/2}$ — единственный интервал, определяемый условиями

$$\sup J_n^{1/2} = \sup J_n, \quad |J_n^{1/2}| = |J_n|/2.$$

Поскольку $d_n(\Delta) = \ell$ константа, группируем встречающиеся интервалы J_n в пакеты, где все интервалы в одном пакете имеют один и тот же левый конец, а максимальные интервалы из разных пакетов не пересекаются (возможно, кроме одной точки). По лемме 5.1 каждая точка $t \in [0, 1]$ принадлежит не более чем F_k интервалам $J_n^{1/2}$. Теперь, в следствии $(k-1)$ -регулярности и $\ell \leq k$, имеем $|J_n| \lesssim_{k,\gamma} |\Delta|$ и $\text{dist}(\Delta, J_n) \lesssim_{k,\gamma} |\Delta|$ для $n \in M(\Delta, \ell)$ и, таким образом, каждый интервал J_n для $n \in M(\Delta, \ell)$ является подмножеством фиксированного интервала, длина которого сравнима с $|\Delta|$. Итак, сложив все это, получим

$$\sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in M(\Delta, \ell)} |J_n| = \frac{2}{|\Delta|} \sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \int_{J_n^{1/2}} dx \lesssim_{k,\gamma} 1,$$

что доказывает случай $\ell \leq k$.

Далее, предположим $\ell \geq k+1$ и определим $(L_j)_{j=1}^\infty$ как строго убывающую последовательность всех множеств L , удовлетворяющих условиям

$$L = D_{n,i}^{(k-1)} \quad \text{и} \quad \sup L = \sup \Delta$$

для некоторых индексов n и i . Более того, обозначим

$$M_j(\Delta, \ell) := \{n \in M(\Delta, \ell) : \text{card}(L_j \cap \mathcal{T}_n) = k\},$$

т. е. L_j является объединением $k-1$ интервалов узлов сетки $\mathcal{T}_n$. Тогда, поскольку $|\Delta| + \text{dist}(J_n, \Delta) \gtrsim_\gamma |\Delta| + \text{dist}(t, \Delta)$ для $t \in J_n^{1/2}$ по $(k-1)$ -регулярности, то

$$\sum_{n \in M_j(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \lesssim_{k,\gamma} \sum_{n \in M_j(\Delta, \ell)} \int_{J_n^{1/2}} \frac{1}{\text{dist}(t, \Delta) + |\Delta|} dt.$$

Если $n \in M_j(\Delta, \ell)$, то опять же в силу $(k-1)$ -регулярности, имеем

$$\inf J_n^{1/2} \geq \inf J_n \geq \gamma^{-k} |L_j| + \sup \Delta,$$

и

$$\sup J_n^{1/2} \leq \inf J_n + |J_n| \leq C_k \gamma^\ell |L_j| + \sup \Delta$$

для некоторой константы C_k , зависящей только от k . Объединив это с леммой 5.1, из которой следует, что каждая точка t принадлежит не более чем F_k интервалам $J_n^{1/2}$, получим

$$(5.2) \quad \sum_{n \in M_j(\Delta, \ell)} \int_{J_n^{1/2}} \frac{1}{\text{dist}(t, \Delta) + |\Delta|} dt \lesssim \int_{\gamma^{-k} |L_j| + |\Delta|}^{C_k \gamma^\ell |L_j| + |\Delta|} \frac{1}{s} ds.$$

Далее, покажем, что указанные выше интервалы интегрирования могут пересекаться не более чем для примерно ℓ индексов j . Пусть $j_2 \geq j_1$, так что $L_{j_1} \supset L_{j_2}$

и допустим $j_2 = j_1 + 2kr + t$ с $t \leq 2k - 1$. Тогда по лемме 3.1

$$C_k \gamma^\ell |L_{j_2}| \leq C_k \gamma^\ell |L_{j_1+2kr}| \leq C_k \gamma^\ell \eta^r |L_{j_1}|,$$

где $\eta = \gamma^{k-1}/(1 + \gamma^{k-1}) < 1$. Если, теперь $r \geq C_{k,\gamma} \ell$ для некоторой подходящей константы $C_{k,\gamma}$, зависящей только от k и γ , то имеем

$$C_k \gamma^\ell |L_{j_2}| \leq \gamma^{-k} |L_{j_1}|.$$

Таким образом, каждая точка s в интеграле из (5.2), для некоторого j принадлежит не более чем $C_{k,\gamma} \ell$ интервалам $[\gamma^{-k} |L_j| + |\Delta|, C_k \gamma^\ell |L_j| + |\Delta|]$, где j меняется. Итак, суммированием по j , приходим к

$$\sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq C_{k,\gamma} \ell \int_{|\Delta|}^{(1+C_k \gamma^\ell)|\Delta|} \frac{1}{s} ds \leq C_{k,\gamma} \ell^2.$$

На этом случай $\ell \geq k + 1$ завершен, а значит лемма доказана. $\square$

5.2. Периодический случай. Аналогично непериодическому случаю, мы можем проанализировать комбинаторику характеристических интервалов на торе $\mathbb{T}$. Непосредственное следствие из определения последовательности характеристических интервалов $(\hat{J}_n)$ является то, что они образуют вложенную коллекцию множеств, то есть два множества в ней либо не пересекаются, либо одно содержится в другом.

Поскольку определение характеристического интервала $\hat{J}_n$ включает в себя только локальные свойства последовательности точек $(s_n)_{n=1}^\infty$ и оно совпадает с определением J_n для любого отождествления $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ со свойством, что между вновь введенной точкой σ_{i_0} и 0 или 1 существует более k точек сетки $\mathcal{T}_n$, то получаем периодическую версию леммы 5.1.

Лемма 5.3. Пусть V - произвольный подинтервал $\mathbb{T}$ и пусть $\beta > 0$. Тогда существует постоянная $F_{k,\beta}$, зависящая только от k и β , такая, что

$$\text{card}\{n \geq 2k : \hat{J}_n \subseteq V, |\hat{J}_n| \geq \beta |V|\} \leq F_{k,\beta}.$$

Прямым следствием этой леммы является следующее:

Следствие 5.1. Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ - k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормальной системой сплайнов $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$. Пусть $(n_s)_{s \geq 1}$ - последовательность неотрицательных целых чисел

такая, что $\hat{J}_{n_{s+1}} \subset \hat{J}_{n_s}$. Тогда,

$$\sum_{s \geq 1} |\hat{J}_{n_s}| \sim_k |\hat{J}_{n_1}|.$$

Следствие 5.2. Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ - k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ и пусть $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ - соответствующая периодическая ортонормальная сплайн-система порядка k . Тогда для любого замкнутого интервала $V \subset \mathbb{T}$,

$$\sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n|^{1/2} \int_{V^c} |\hat{f}_n(t)| dt \lesssim_k |V|.$$

Доказательство. Используя предложение 4.1 и лемму 4.2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n|^{1/2} \int_{V^c} |\hat{f}_n(t)| dt &\lesssim_k \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n| (\hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)} + \hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)}) \\ &= \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n| \hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)} + \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n| \hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)} =: \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Мы приводим только оценку суммы Σ_1 , так как Σ_2 может быть оценена аналогичным образом. Для начала зафиксируем $\ell \geq 0$ и рассмотрим индексы n такие, что $d_n^\wedge(V^c) = \ell$. Соответствующие интервалы $\hat{J}_n$ можно разложить по пакетам так, чтобы интервалы из одного пакета имели общую конечную точку по часовой стрелке и образовали вложенный набор интервалов, а максимальные интервалы из разных пакетов имели непересекающиеся внутренности. Так как все эти интервалы входят в V , то по следствию 5.1 получаем:

$$\Sigma_1 = \sum_{\ell \geq 0} \hat{q}^\ell \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V, d_n^\wedge(V^c) = \ell} |\hat{J}_n| \lesssim_k \sum_{\ell \geq 0} |V| \hat{q}^\ell \lesssim_k |V|.$$

Отсюда следует, что $\Sigma_1, \Sigma_2 \lesssim_k |V|$, что завершает доказательство. $\square$

Следствием леммы 5.2 является ее периодическая версия.

Лемма 5.4. Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ - k -допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию $(k-1)$ -регулярности на торе $\mathbb{T}$, и пусть m и i - некоторые индексы. Допустим, что $\hat{\mathcal{T}}_m = (\sigma_{m,j})_{j=0}^{m-1}$ - разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1)$. Определим $\Delta := T_{m,i}^{(k-1)}$ и для $\ell \geq 0$

$$N(\Delta) := \{n : \text{card}(\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n) = k, \hat{J}_n \subset \Delta\},$$

$$M^\frown(\Delta, \ell) := \{n : d_n^\frown(\Delta) = \ell, \text{ card}(\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n) \geq k, |\hat{J}_n \cap \Delta| = 0\},$$

$$M^\frown(\Delta, \ell) := \{n : d_n^\frown(\Delta) = \ell, \text{ card}(\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n) \geq k, |\hat{J}_n \cap \Delta| = 0\},$$

где в обоих определениях считаем точки в $\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n$, включая кратности.

Тогда,

$$(5.3) \quad \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in N(\Delta)} |\hat{J}_n| \lesssim_k 1,$$

более того,

$$(5.4) \quad \sum_{n \in M^\frown(\Delta, \ell)} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, \Delta) + |\Delta|}, \quad \sum_{n \in M^\frown(\Delta, \ell)} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, \Delta) + |\Delta|} \lesssim_{k, \gamma} (\ell + 1)^2.$$

6. ТРИ УСЛОВИЯ ДЛЯ СПЛАЙН-РЯДОВ И ИХ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн-системой $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$. Пусть $N(k)$ — натуральное число, указанное в предложении 4.1, и пусть $(a_n)_{n \geq N(k)}$ — последовательность коэффициентов. Определим

$$S := \left(\sum_{n=N(k)}^\infty a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad M := \sup_m \left| \sum_{n=N(k)}^m a_n \hat{f}_n \right|.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то через Sf и Mf обозначим функции S и M , соответствующие последовательности коэффициентов $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$ соответственно. Рассмотрим следующие условия:

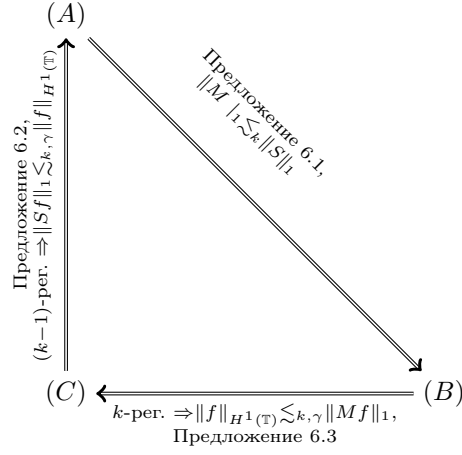
$$(A) \quad S \in L^1(\mathbb{T}),$$

$$(B) \quad M \in L^1(\mathbb{T}),$$

$$(C) \quad \text{Существует функция } f \in H^1(\mathbb{T}) \text{ такая, что } a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle.$$

Мы докажем, что при определенных условиях регулярности последовательности узлов $(s_n)_{n=1}^\infty$ условия (A)-(C) эквивалентны.

В этом разделе мы обсудим связи между этими тремя новыми условиями и докажем следствия, указанные на следующей схеме, где, как упоминалось ранее, некоторые результаты требуют определенных условий регулярности, налагаемых на последовательность узлов $(s_n)_{n=1}^\infty$, которые также указаны на изображении.



Напомним, что в случае непериодических ортонормированных сплайн-систем с диадическими узлами связи, отношения (и эквивалентности) этих условий изучали разные авторы, также в случае $p < 1$, см., например, [24, 3, 9]. Для общих систем Франклина, соответствующих произвольным последовательностям узлов, связь этих условий обсуждалась в [12] (и ранее в [10], также для $p < 1$, но для ограниченного класса точек последовательности). Мы следуем подходу [14] и адаптируем его к случаю периодических сплайн-ортонормированных систем порядка k .

Сначала мы исследуем импликацию $(A) \Rightarrow (B)$.

Используя оценки и комбинаторные результаты подраздела 3.2 и разделов 4 и 5, в частности следствие 5.2, эту импликацию можно доказать аналогично доказательству предложения 4.3 в [12], поэтому мы просто сформулируем результат.

Предложение 6.1 $((A) \Rightarrow (B))$. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ и (a_n) — последовательность коэффициентов такая, что $S \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда $M \in L^1(\mathbb{T})$ и

$$\|M\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_k \|S\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Далее, обсудим $(C) \Rightarrow (A)$.

Предложение 6.2 $((C) \Rightarrow (A))$. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию $(k-1)$ -регулярности на торе

с параметром $\gamma \geq 1$. Тогда существует постоянная $C_{k,\gamma}$, зависящая только от k и γ , такая, что для каждого атома ϕ

$$\|S\phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C_{k,\gamma}.$$

Следовательно, если $f \in H^1(\mathbb{T})$, то

$$\|Sf\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C_{k,\gamma} \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

Доказательство предложения 6.2. Пусть ϕ — периодический атом с $\int_{\mathbb{T}} \phi(u) du = 0$ и $\Gamma \subset \mathbb{T}$ — такой интервал, что $\text{supp } \phi \subset \Gamma$ и $\sup |\phi| \leq |\Gamma|^{-1}$. Определим $n_{\Gamma} := \max\{n : \text{card}(\hat{\mathcal{T}}_n \cap \Gamma) \leq k-1\}$.

Докажем, что

$$\|S_1\phi\|_{L^1(\mathbb{T})}, \|S_2\phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{\gamma,k} 1,$$

где

$$S_1\phi = \left(\sum_{N(k) \leq n \leq n_{\Gamma}} a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad S_2\phi = \left(\sum_{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}} a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2}.$$

Сначала рассмотрим S_1 и докажем более сильное неравенство

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_{\Gamma}} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1,$$

где $a_n = \langle \phi, \hat{f}_n \rangle$. Для каждого параметра $N(k) \leq n \leq n_{\Gamma}$ определим замкнутый интервал Γ_n как единственный интервал $T_{n,j}^{(k-1)}$ такой, что конечная точка этого интервала против часовой стрелки — это первый узел, с которым мы встречаемся при движении от конечной точки Γ против часовой стрелки вдоль тора $\mathbb{T}$ по часовой стрелке.

Заметим, что Γ_n удовлетворяет соотношению

$$\Gamma_{n_1} \supseteq \Gamma_{n_2} \quad \text{для } n_1 \leq n_2,$$

и в силу $(k-1)$ -регулярности на торе $\mathbb{T}$

$$|\Gamma_n| \gtrsim_{\gamma,k} |\Gamma|.$$

Пусть $\hat{g}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{w}_j N_{n,j}^{(k)}$ — ненормированная периодическая ортогональная сплайн-функция. Для $\xi \in \Gamma$ имеем (ср. (3.2))

$$(6.1) \quad |\hat{g}'_n(\xi)| \lesssim_k \sum_j \frac{|\hat{w}_j| + |\hat{w}_{j-1}|}{|T_{n,j}^{(k-1)}|},$$

где суммирование берется только по тем индексам j , для которых $\Gamma \cap \text{supp } \hat{N}_{n,j}^{(k-1)} = \Gamma \cap T_{n,j}^{(k-1)} \neq \emptyset$. В силу $(k-1)$ -регулярности на торе $\mathbb{T}$ все длины $|T_{n,j}^{(k-1)}|$ в этой области суммирования сравнимы с $|\Gamma_n|$. Более того, согласно (4.8),

$$(6.2) \quad |\hat{\omega}_j| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|} \lesssim \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\hat{I}_j)}}{|C^\frown(\hat{I}_j)|} + \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\hat{I}_j)}}{|C^\frown(\hat{I}_j)|}.$$

Опять же, по $(k-1)$ -регулярности, для j в области суммирования суммы (6.1), имеем

$$|T_{n,j}^{(k-1)}| \gtrsim_{k,\gamma} |\Gamma_n|,$$

Более того, по определению $C^\frown(\Gamma_n)$ и $C^\frown(\Gamma_n)$ из леммы 4.2 получаем:

$$\begin{aligned} |C^\frown(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k,\gamma} |C^\frown(\Gamma_n)|, \\ |C^\frown(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k,\gamma} |C^\frown(\Gamma_n)|. \end{aligned}$$

Поэтому, комбинируя приведенные выше неравенства, мы оцениваем правую часть в (6.1) и получаем:

$$(6.3) \quad |g'_n(\xi)| \lesssim_{k,\gamma} \frac{1}{|\Gamma_n|} \left(\frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} + \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} \right).$$

Как следствие, для произвольной точки $\tau \in \Gamma$ по предложению 4.1

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_{\Gamma} \phi(t) [\hat{f}_n(t) - \hat{f}_n(\tau)] dt \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{1}{|\Gamma|} \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{f}'_n(\xi)| |t - \tau| dt \\ &\lesssim_k |\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2} \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{g}'_n(\xi)| \lesssim_{k,\gamma} \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma_n|} \left(\frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} + \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} \right). \end{aligned}$$

Далее, пусть

$$\begin{aligned} a_n^\frown &:= \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2} \hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|\Gamma_n| |C^\frown(\Gamma_n)|}, \\ a_n^\frown &:= \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2} \hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|\Gamma_n| |C^\frown(\Gamma_n)|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathbb{T} \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_s$ — совокупность всех различных интервалов, представленных как Γ_n для $N(k) \leq n \leq n_\Gamma$. По лемме 3.2 имеем, что длины Δ_i убывают как геометрическая прогрессия. Теперь зафиксируем Δ_i и $\ell \geq 0$ и рассмотрим индексы $N(k) \leq n \leq n_\Gamma$ такие, что $\Gamma_n = \Delta_i$ и $d_n^\frown(\Gamma_n) = \ell$. Согласно последнему выводу и предложению 4.1,

$$a_n^\frown \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n| \hat{q}^\ell}{|\Delta_i| |C^\frown(\Delta_i)|},$$

и, следовательно, используя лемму 5.4 в направлении против часовой стрелки, мы получаем

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma: \Gamma_n = \Delta_i, d_n^\wedge(\Gamma_n) = \ell} a_n^\wedge \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} (\ell + 1)^2 \hat{q}^\ell \frac{|\Gamma|}{|\Delta_i|}.$$

Теперь, суммируя по ℓ , а затем по i (напомним, что $|\Delta_i|$ убывают как геометрическая прогрессия по лемме 3.2 и $|\Delta_i| \gtrsim_{k,\gamma} |\Gamma|$, так как $n \leq n_\Gamma$) получаем

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma} a_n^\wedge \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Точно также, получаем

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma} a_n^\wedge \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Отсюда следует необходимое неравенство $\|S_1 \phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1$ для первой части $S\phi$.

Далее, рассмотрим $S_2 \phi$ и определим множество V как наименьший интервал на торе $\mathbb{T}$, точки сетки которого лежат в $\hat{\mathcal{J}}_{n_\Gamma+1}$ в качестве конечных точек и содержит Γ .

Кроме того, пусть $\tilde{V}$ определяется как наименьший интервал на торе $\mathbb{T}$ с точками сетки в $\hat{\mathcal{J}}_{n_\Gamma+1}$ в качестве конечных точек, содержащим интервал Γ и такой, что $\tilde{V}$ содержит k точек сетки в $\hat{\mathcal{J}}_{n_\Gamma+1}$ как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки от Γ . Если рассмотрим множество $\tilde{V} \setminus V$ на торе $\mathbb{T}$, то можно увидеть, что $\tilde{V} \setminus V = U_1 \cup U_2$, где U_1 и $U_2 \subset \mathbb{T}$ — непересекающиеся интервалы. Причем, ввиду $(k-1)$ -регулярности и того, что Γ содержит не менее k точек сетки из $\hat{\mathcal{J}}_{n_\Gamma+1}$, имеем

$$(6.4) \quad \begin{aligned} |V| &\sim_{k,\gamma} |\tilde{V}| \sim_{k,\gamma} |\Gamma|, \\ |U_1| &\sim_{k,\gamma} |U_2| \sim_{k,\gamma} |\tilde{V}|. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим интеграл от $S_2 \phi$ по множеству $\tilde{V}$ и согласно неравенству Коши-Шварца, получим

$$\int_{\tilde{V}} S_2 \phi(t) dt \leq \|\mathbb{1}_{\tilde{V}}\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{|\tilde{V}|^{1/2}}{|\Gamma|^{1/2}} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Осталось оценить $\int_{\tilde{V}^c} S_2 \phi(t) dt$. Поскольку для $n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}$ концы $\tilde{V}$ являются точками сетки в $\hat{\mathcal{J}}_n$, то либо $\hat{\mathcal{J}}_n \subset \tilde{V}$, либо $\hat{\mathcal{J}}_n$ находится вне $\tilde{V}$. Начнем

с рассмотрения $\hat{J}_n \subset \tilde{V}$. В этом случае

$$|a_n| = \left| \int_{\Gamma} \phi(t) \hat{f}_n(t) dt \right| \leq \frac{\|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|\Gamma|} \lesssim_k \frac{|\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|},$$

и, следовательно, по следствию 5.2 и (6.4), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n: \hat{J}_n \subset \tilde{V}, n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}} |a_n| \int_{\tilde{V}^c} |\hat{f}_n(t)| dt &\lesssim_k \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{n: \hat{J}_n \subset \tilde{V}, n \geq N(k)} |\hat{J}_n|^{1/2} \int_{\tilde{V}^c} |\hat{f}_n(t)| dt \\ &\lesssim_k \frac{|\tilde{V}|}{|\Gamma|} \lesssim_{k,\gamma} 1. \end{aligned}$$

Теперь, пусть $\hat{J}_n$ находится вне $\tilde{V}$. Тогда с помощью (6.2) и (6.4) получаем

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |\hat{f}_n(t)| dt \leq \frac{1}{|\Gamma|} \int_V |\hat{f}_n(t)| dt \lesssim_k \frac{|\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|} \int_V \left| \sum_{j: T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset} \hat{\omega}_j \hat{N}_{n,j}^{(k)}(t) \right| dt \\ &\leq \frac{|\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|} \int_V \sum_{j: T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset} |\hat{\omega}_j| \hat{N}_{n,j}^{(k)}(t) dt \lesssim_k \\ &\lesssim_k \frac{|V| |\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|} \left(\sum_{j \in A^{\curvearrowright}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)}}{|C^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)|} + \sum_{j \in A^{\curvearrowleft}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)}}{|C^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)|} \right), \end{aligned}$$

где $A^{\curvearrowright} := \{0 \leq j \leq n-1 : T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_j) = C^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)\}$, а $A^{\curvearrowleft} := \{0 \leq j \leq n-1 : T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_j) = C^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)\}$. Более того, в силу $(k-1)$ -регулярности, получаем (см. (6.4)):

$$\begin{aligned} |C^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k,\gamma} |C^{\curvearrowright}(V)|, \\ |C^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k,\gamma} |C^{\curvearrowleft}(V)|. \end{aligned}$$

Вышеизложенные неравенства, оценка коэффициентов a_n и предложение 4.1 позволяют нам вывести

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\lesssim_{k,\gamma} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowright}(V)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^{\curvearrowright}(V, \hat{J}_n) + |V|} \\ &+ \sum_{\substack{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowleft}(V)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^{\curvearrowleft}(V, \hat{J}_n) + |V|} \end{aligned}$$

Отметим, что V может быть объединением $k-1$, k или $k+1$ интервалов из $\hat{\mathcal{T}}_{n_{\Gamma}+1}$. Поэтому пусть V^+ — объединение $k-1$ интервалов сетки из $\hat{\mathcal{T}}_{n_{\Gamma}+1}$, причем конечная точка V^+ против часовой стрелки совпадает с конечной точкой V против часовой стрелки.

Тогда $d_n^\wedge(V) = d_n^\wedge(V^+)$, $\text{dist}^\wedge(V, \hat{J}_n) = \text{dist}^\wedge(V^+, \hat{J}_n)$ и из-за $(k-1)$ -регулярности последовательности точек, $|V| \sim_{k,\gamma} |V^+|$, откуда следует, что

$$\sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}^{d_n^\wedge(V)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V, \hat{J}_n) + |V|} \lesssim_{k,\gamma} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}^{d_n^\wedge(V^+)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V^+, \hat{J}_n) + |V^+|}.$$

Теперь аналогично определим V^- как объединение $k-1$ интервалов сетки из $\hat{\mathcal{J}}_{n_\Gamma+1}$, причем конечная точка V^- по часовой стрелке совпадает с конечной точкой V по часовой стрелке. Далее, даем те же оценки для второй суммы и, наконец, используя лемму 5.4 для обоих направлений, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\lesssim_{k,\gamma} \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{q}^\ell \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ d_n^\wedge(V^+) = \ell, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V^+, \hat{J}_n) + |V^+|} \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{q}^\ell \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ d_n^\wedge(V^-) = \ell, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V^-, \hat{J}_n) + |V^-|} \lesssim_{k,\gamma} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)^2 \hat{q}^\ell \lesssim_k 1. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства, заметим, что если $f \in H^1(\mathbb{T})$ и $f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m$ — атомное разложение f , то $\langle f, \hat{f}_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle \phi_m, \hat{f}_n \rangle$, и $Sf(t) \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| S\phi_m(t)$. $\square$

Наконец, обсудим $(B) \Rightarrow (C)$.

Предложение 6.3 $((B) \Rightarrow (C))$. Пусть (s_n) k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию k -регулярности с параметром γ , и пусть $(a_n)_{n \geq N(k)}$ — последовательность коэффициентов такая, что $M \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует функция $f \in H^1(\mathbb{T})$ такая, что $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$ для каждого $n \geq N(k)$. Более того, имеем неравенство

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \|Mf\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Доказательство. Во-первых, пусть $a_n := 0$ для всех $n < N(k)$. Тогда,

$$M = \sup_m \left| \sum_{n=N(k)}^m a_n \hat{f}_n \right| = \sup_m \left| \sum_{n=1}^m a_n \hat{f}_n \right|.$$

Очевидно, что $M \in L^1(\mathbb{T})$. Следовательно, существует функция $f \in L^1(\mathbb{T})$ такая, что $f = \sum_{n \geq 1} a_n \hat{f}_n$ со сходимостью в $L^1(\mathbb{T})$. Действительно, это является следствием относительной слабой компактности равномерно интегрируемых подмножеств в $L^1(\mathbb{T})$ и свойства базисности $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ в $L^1(\mathbb{T})$ (см. [18]). Таким образом, нам нужно только доказать, что $f \in H^1(\mathbb{T})$, которое делается путем нахождения подходящего атомного разложения f .

Определим $E_0 = B_0 = \mathbb{T}$ и для $r \geq 1$

$$(6.5) \quad E_r = [M > 2^r], \quad B_r = [\hat{M} \mathbb{1}_{E_r} > c_{k,\gamma}],$$

где $\hat{M}$ обозначает периодическую максимальную функцию Харди-Литтлвуда, а $0 < c_{k,\gamma} \leq 1/2$ — малая постоянная, зависящая только от k и γ , которая выбирается с учетом некоторых ограничений, о чем будем говорить в ходе доказательства. Заметим, что

$$\hat{M} \mathbb{1}_{E_r}(t) = \sup_{I \ni t} \frac{|I \cap E_r|}{|I|}, \quad t \in \mathbb{T},$$

где верхняя грань берется по всем интервалам, содержащим точку t .

Поскольку периодический максимальный оператор Харди-Литтлвуда $\hat{M}$ имеет слабый тип $(1, 1)$, имеем неравенство $|B_r| \lesssim_{k,\gamma} |E_r|$. Ввиду того, что $M \in L^1(\mathbb{T})$, $|E_r| \rightarrow 0$ имеем $|B_r| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Теперь, разложим открытое множество B_r на счетное объединение непересекающихся открытых интервалов.

$$B_r = \bigcup_{\kappa} \Gamma_{r,\kappa},$$

где при фиксированном r никакие два интервала $\Gamma_{r,\kappa}$ не имеют общей конечной точки и приведенное выше равенство справедливо с точностью до множества меры нуль (каждое открытое множество действительных чисел можно разложить в счетное объединение открытых интервалов, но может случиться так, что два интервала имеют одну и ту же конечную точку. В этом случае мы объединяем эти два интервала в один $\Gamma_{r,\kappa}$).

Более того, заметим, что если $\Gamma_{r+1,\xi}$ — один из интервалов разложения B_{r+1} , то существует интервал $\Gamma_{r,\kappa}$ в разложении B_r такой, что $\Gamma_{r+1,\xi} \subset \Gamma_{r,\kappa}$.

На основе этого разложения, для $r \geq 0$ определим следующую функцию:

$$g_r(t) := \begin{cases} f(t), & t \in B_r^c, \\ \frac{1}{|\Gamma_{r,\kappa}|} \int_{\Gamma_{r,\kappa}} f(x) dx, & t \in \Gamma_{r,\kappa}. \end{cases}$$

Заметим, что $f = g_0 + \sum_{r=0}^\infty (g_{r+1} - g_r)$ в $L^1(\mathbb{T})$ и $g_{r+1} - g_r = 0$ на B_r^c . Отсюда

$$(6.6) \quad \int_{\Gamma_{r,\kappa}} g_{r+1}(t) dt = \int_{\Gamma_{r,\kappa} \cap B_{r+1}^c} g_{r+1}(t) dt + \int_{\Gamma_{r,\kappa} \cap B_{r+1}} g_{r+1}(t) dt$$

$$(6.7) \quad = \int_{\Gamma_{r,\kappa} \cap B_{r+1}^c} f(t) dt + \sum_{\xi: \Gamma_{r+1}, \xi \subset \Gamma_{r,\kappa}} \int_{\Gamma_{r+1}, \xi} f(t) dt$$

$$(6.8) \quad = \int_{\Gamma_{r,\kappa}} f(t) dt = \int_{\Gamma_{r,\kappa}} g_r(t) dt.$$

Основной шаг доказательства – показать, что

$$(6.9) \quad |g_r(t)| \leq C_{k,\gamma} 2^r, \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{T}$$

для некоторой константы $C_{k,\gamma}$, зависящей только от k и γ . Как только это неравенство будет доказано, возьмем $\phi_0 \equiv 1$, $\eta_0 = \int_{\mathbb{T}} f(u) du$ и

$$\phi_{r,\kappa} := \frac{(g_{r+1} - g_r) \mathbb{1}_{\Gamma_{r,\kappa}}}{3C_{k,\gamma} 2^r |\Gamma_{r,\kappa}|}, \quad \eta_{r,\kappa} = 3C_{k,\gamma} 2^r |\Gamma_{r,\kappa}|$$

и заметим, что $f = \eta_0 \phi_0 + \sum_{r,\kappa} \eta_{r,\kappa} \phi_{r,\kappa}$ – это искомое атомное разложение f , поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{r,\kappa} \eta_{r,\kappa} &\leq C_{k,\gamma} \sum_{r,\kappa} 2^r |\Gamma_{r,\kappa}| = C_{k,\gamma} \sum_r 2^r |B_r| \\ &\lesssim_{k,\gamma} \sum_r 2^r |E_r| \lesssim \|M\|_{L^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать неравенство (6.9).

Для этого сначала предположим, что $t \in B_r^c$. Кроме того, предположим, что t – такая точка, что ряд $\sum_n a_n \hat{f}_n(t)$ сходится к $f(t)$ и что t не встречается в последовательности точек сетки (s_n) . По теореме 3.2 это справедливо для п.в. точек из $\mathbb{T}$. Зафиксируем индекс m и обозначим V_m максимальный интервал, на котором функция $M_m := \sum_{n \leq m} a_n \hat{f}_n$ является полиномом порядка k , содержащим точку t . Тогда $V_m \not\subset B_r$ и поскольку V_m – интервал, содержащий точку t , то

$$|V_m \cap E_r^c| \geq (1 - c_{k,\gamma}) |V_m| \geq |V_m|/2.$$

Поскольку $|M_m| \leq 2^r$ на E_r^c , то из вышеуказанного неравенства и предложения 3.1 следует, что $|M_m| \lesssim_k 2^r$ на V_m и, в частности, $|M_m(t)| \lesssim_k 2^r$. Теперь $M_m(t) \rightarrow f(t)$ при $m \rightarrow \infty$ согласно предположениям относительно t и, таким образом,

$$|g_r(t)| = |f(t)| \lesssim_k 2^r.$$

На этом доказательство (6.9) в случае $t \in B_r^c$ завершается.

Пусть теперь $\mathbb{T}$ канонически отождествляется с $[0, 1)$. Далее фиксируем индекс κ и рассмотрим g_r на $\Gamma := \Gamma_{r,\kappa}$. Пусть n_Γ – первый индекс для которой существуют $k+1$ точек из $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma}$, содержащихся в Γ , т.е. существует носитель $T_{n_\Gamma, i}^{(k)}$

периодической В-сплайн-функции порядка k в сетке $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma}$, содержащейся в Γ . Дополнительно определим интервалы

$$U_0 := T_{n_\Gamma, i-k}^{(k)}, \quad W_0 := T_{n_\Gamma, i+k}^{(k)}.$$

Ввиду k -регулярности последовательности (s_n) на торе $\mathbb{T}$, имеем $\max(|U_0|, |W_0|) \lesssim_{k,\gamma} |\Gamma|$. Сначала оценим часть $M_\Gamma := \sum_{n \leq n_\Gamma} a_n \hat{f}_n$ и докажем неравенство $|M_\Gamma| \lesssim_{k,\gamma} 2^r$ на Γ . Заметим, что M_Γ можно представить на множестве $\Delta := U_0 \cup \Gamma \cup W_0$ в следующем виде

$$M_\Gamma(t) = h(t) := \sum_{j=i-2k+1}^{i+2k-1} b_j \hat{N}_j(t),$$

для некоторых коэффициентов (b_j) , то есть как линейную комбинацию периодических В-сплайнов $(\hat{N}_j)$ на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma}$.

Пусть $\hat{I}_j$ — максимальный интервал $\text{supp } \hat{N}_j$, для $j = i - 2k + 1, \dots, i + 2k - 1$ и из-за k -регулярности на торе $\mathbb{T}$, заметим, что $|\hat{I}_j| \sim_{k,\gamma} |\Gamma| \sim_{k,\gamma} |\text{supp } h|$.

Если предположить, что $\max_{\hat{I}_j} |M_\Gamma| > C_k 2^r$, где C_k — постоянная из предложения 3.1 с $\rho = 1/2$, то из предложения 3.1 следует, что $|M_\Gamma| > 2^r$ на подмножестве Q_j множества $\hat{I}_j$ с мерой $\geq |\hat{I}_j|/2$. Как следствие, имеем

$$|\text{supp } h \cap E_r| \geq |\hat{I}_j \cap E_r| \geq |\hat{I}_j|/2 \gtrsim_{k,\gamma} |\text{supp } h|.$$

В определении B_r выбираем константу $c_{k,\gamma}$ достаточно малой, чтобы из последнего неравенства следовало $\text{supp } h \subset B_r$. Это противоречит выбору Γ , из которого следует, что наше предположение $\max_{\hat{I}_j} |M_\Gamma| > C_k 2^r$ неверно и, следовательно,

$$\max_{\hat{I}_j} |M_\Gamma| \leq C_k 2^r, \quad j = i - 2k + 1, \dots, i + 2k - 1.$$

В силу локальной устойчивости периодических В-сплайнов, т.е. неравенства (3.4) из предложения 3.3, следует

$$|b_j| \lesssim_k 2^r, \quad j = i - 2k + 1, \dots, i + 2k - 1,$$

и поэтому $|M_\Gamma| \lesssim_k 2^r$ на Δ . Это означает

$$(6.10) \quad \int_\Gamma |M_\Gamma| \lesssim_k 2^r |\Gamma|,$$

что является неравенством (6.9) для части M_Γ .

Чтобы оценить оставшуюся часть, мы индуктивно определим две последовательности $(u_s, U_s)_{s \geq 0}$ и $(w_s, W_s)_{s \geq 0}$, состоящие из целых чисел и интервалов. Положим $u_0 = w_0 = n_\Gamma$ и индуктивно определим u_{s+1} как первый индекс $n > u_s$

такой, что $s_n \in U_s$. Более того, определим U_{s+1} как периодический носитель В-сплайна $T_{u_{s+1},i}^{(k)}$ в сетке $\hat{\mathcal{T}}_{u_{s+1}}$, где индекс i такой, что $\Gamma \cap U_{s+1}$ содержит только один узел из $(s_j)_{j=1}^n$ (без учёта кратностей) и это конечная точка U_{s+1} по часовой стрелке.

Аналогично определим w_{s+1} как первый индекс $n > w_s$ такой, что $s_n \in W_s$ и W_{s+1} - как периодический В-сплайн носитель $T_{w_{s+1},i}^{(k)}$ в сетке $\hat{\mathcal{T}}_{w_{s+1}}$, где индекс i такой, что $\Gamma \cap W_{s+1}$ содержит только один узел из $(s_j)_{j=1}^n$ (без учета кратностей) и является конечной точкой W_{s+1} против часовой стрелки.

После такого построения интервалов возьмем пару индексов ℓ, m и положим

$$x_\ell := \sum_{\nu=0}^{k-1} \hat{N}_{u_\ell, i+\nu} \mathbb{1}_{U_\ell}, \quad y_m := \sum_{\nu=0}^{k-1} \hat{N}_{w_m, j-\nu} \mathbb{1}_{W_m},$$

где $\hat{N}_{u_\ell, i}$ — периодическая В-сплайн-функция на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{u_\ell}$ с носителем U_ℓ и $\hat{N}_{w_m, j}$ — периодическая В-сплайн-функция на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{w_m}$ с носителем W_m . Функция

$$\phi_{\ell, m} := x_\ell + \mathbb{1}_{\Gamma \setminus (U_\ell \cup W_m)} + y_m$$

равна нулю на $(U_\ell \cup \Gamma \cup W_m)^c$, единице на $\Gamma \setminus (U_\ell \cup W_m)$ и кусочно-полиномиальная функция порядка k между ними. Для $\ell, m \geq 0$ рассмотрим следующие подмножества из $\{n : n > n_\Gamma\}$:

$$L(\ell) := \{n : u_\ell < n \leq u_{\ell+1}\}, \quad R(m) := \{n : w_m < n \leq w_{m+1}\}.$$

Если $n \in L(\ell) \cap R(m)$, мы, очевидно, имеем $\langle \hat{f}_n, \phi_{\ell, m} \rangle = 0$ и, следовательно,

$$(6.11) \quad \int_\Gamma \hat{f}_n(t) dt = \int_\Gamma \hat{f}_n(t) dt - \int_{\mathbb{T}} \hat{f}_n(t) \phi_{\ell, m}(t) dt = A_\ell(\hat{f}_n) + B_m(\hat{f}_n),$$

где

$$(6.12) \quad A_\ell(\hat{f}_n) := \int_{\Gamma \cap U_\ell} \hat{f}_n(t) dt - \int_{U_\ell} \hat{f}_n(t) x_\ell(t) dt,$$

$$(6.13) \quad B_m(\hat{f}_n) := \int_{\Gamma \cap W_m} \hat{f}_n(t) dt - \int_{W_m} \hat{f}_n(t) y_m(t) dt.$$

Из этого следует

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \left| \int_\Gamma \sum_{n=n_\Gamma+1}^\infty a_n \hat{f}_n(t) dt \right| &= \left| \sum_{\ell, m=0}^\infty \sum_{n \in L(\ell) \cap R(m)} a_n (A_\ell(\hat{f}_n) + B_m(\hat{f}_n)) \right| \\ &\leq 2 \sum_{\ell=0}^\infty \int_{U_\ell} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n(t) \right| dt + 2 \sum_{m=0}^\infty \int_{W_m} \left| \sum_{n \in R(m)} a_n \hat{f}_n(t) \right| dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую сумму в правой части. На $U_\ell = T_{u_\ell, i}^{(k)}$ функция $\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n$ может быть представлена в виде линейной комбинации периодических В-сплайнов

$(\hat{N}_j)$ на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{u_\ell}$ следующим образом

$$\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n = h_\ell := \sum_{j=i-k+1}^{i+k-1} b_j \hat{N}_j,$$

для некоторых коэффициентов (b_j) . Пусть $\hat{I}_j$ — максимальный интервал сетки $\text{supp } \hat{N}_j$ для $j = i - k + 1, \dots, i + k - 1$. Заметим, что из-за k -регулярности на торе $\mathbb{T}$, $|\hat{I}_j| \sim_{k,\gamma} |U_\ell| \sim_{k,\gamma} |\text{supp } h_\ell|$. На $\hat{I}_j$ функция $\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n$ является полиномом порядка k . Если мы предположим, что $\max_{\hat{I}_j} |\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| > C_k 2^{r+1}$, где C_k — постоянная из предложения 3.1 с $\rho = 1/2$, то тогда из предложения 3.1 следует, что $|\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| > 2^{r+1}$ на множестве $\hat{I}_j^* \subset \hat{I}_j$ с $|\hat{I}_j^*| = |\hat{I}_j|/2$, но это означает, что $\max(|\sum_{n \leq u_\ell} a_n \hat{f}_n|, |\sum_{n \leq u_{\ell+1}} a_n \hat{f}_n|) > 2^r$ на множестве $\hat{I}_j^*$. Как следствие,

$$|E_r \cap \text{supp } h_\ell| \geq |E_r \cap \hat{I}_j| \geq |\hat{I}_j^*| \geq |\hat{I}_j|/2 \gtrsim_k |\text{supp } h_\ell|.$$

В определении B_r выбираем константу $c_{k,\gamma}$ достаточно малой, чтобы из последнего неравенства следовало $\text{supp } h_\ell \subset B_r$. Это противоречит выбору Γ , из которого следует, что наше предположение $\max_{\hat{I}_j} |\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| > C_k 2^r$ неверно и, следовательно,

$$\max_{\hat{I}_j} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n \right| \leq C_k 2^r, \quad j = i - k + 1, \dots, i + k - 1.$$

В силу локальной устойчивости периодических В-сплайнов, т.е. неравенства (3.4) из предложения 3.3, следует

$$|b_j| \lesssim_k 2^r, \quad j = i - k + 1, \dots, i + k - 1,$$

и поэтому $|\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| \lesssim_k 2^r$ на U_ℓ , что дает

$$\int_{U_\ell} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n \right| \lesssim_k 2^r |U_\ell|.$$

Объединив лемму 3.2, включения $U_{\ell+1} \subset U_\ell$ и неравенство $|U_0| \lesssim_{k,\gamma} |\Gamma|$, получаем, что $\sum_{\ell=0}^\infty |U_\ell| \lesssim_{k,\gamma} |\Gamma|$. Таким образом, имеем

$$\sum_{\ell=0}^\infty \int_{U_\ell} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n \right| \lesssim_{k,\gamma} 2^r |\Gamma|.$$

Вторая сумма в правой части (6.14) оценивается аналогично, что дает

$$\sum_{m=0}^\infty \int_{W_m} \left| \sum_{n \in R(m)} a_n \hat{f}_n \right| \lesssim_{k,\gamma} 2^r |\Gamma|.$$

Объединив эти оценки с (6.14) и (6.10), мы приходим к

$$\left| \int_{\Gamma} f(t) dt \right| = \left| \int_{\Gamma} \sum_n a_n \hat{f}_n(t) dt \right| \lesssim_{k,\gamma} 2^r |\Gamma|,$$

откуда следует (6.9) на Γ и, следовательно, доказательство предложения завершено. $\square$

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Доказательство теоремы 2.4 теперь можно получить по той же цепочке рассуждений, что и доказательство достаточности теоремы 2.4 в [14], но мы приводим его здесь для полноты доказательства.

Доказательство теоремы 2.4. Если (s_n) $(k-1)$ -регулярна на торе $\mathbb{T}$, то нетрудно проверить, что она k -регулярна и на торе $\mathbb{T}$. Как следствие, из теоремы 2.3 имеем, что $(\hat{f}_n)$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Пусть $f \in H^1(\mathbb{T})$ с разложением $f = \sum a_n \hat{f}_n$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Нам нужно доказать сходимость ряда $\sum \varepsilon_n a_n \hat{f}_n$ в $H^1(\mathbb{T})$. Пусть $N(k) \leq m_1 \leq m_2$, тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} &\lesssim_{k,\gamma} \left\| M \left(\sum_{n=m_1}^{m_2} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_k \left\| S \left(\sum_{n=m_1}^{m_2} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &= \left\| S \left(\sum_{n=m_1}^{m_2} a_n \hat{f}_n \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Здесь мы использовали Предложения 6.3, 6.1 и 6.2 соответственно (см. также изображение на странице 24). Итак, поскольку $\sum a_n \hat{f}_n$ сходится в $H^1(\mathbb{T})$, то сходится также $f_\varepsilon := \sum \varepsilon_n a_n \hat{f}_n$. Кроме того, имеем следующую оценку

$$\|f_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

Чтобы получить это, сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{T})} &= \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n + \sum_{n=N(k)}^{\infty} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=N(k)}^{\infty} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\lesssim_{k,\gamma} \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=N(k)}^{\infty} a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство треугольника и аналогичный приведенному выше аргумент, для перехода от второй строки к третьей. Напомним, что $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$, тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n \langle f, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} &\leq \sum_{n=1}^{N(k)-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|\hat{f}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|\hat{f}_n\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f\|_{H^1(\mathbb{T})} \sum_{n=1}^{N(k)-1} \|\hat{f}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|\hat{f}_n\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim_k \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $(\hat{f}_n)$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. $\square$

Abstract. We give a geometric characterization of knot sequences (s_n) , for which the corresponding periodic orthonormal spline system of arbitrary order k , $k \in \mathbb{N}$, is an unconditional basis in the atomic Hardy space on the torus $H^1(\mathbb{T})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Bočkarëv, “Some inequalities for Franklin series”, *Anal. Math.*, **1** no. 4, 249 – 257 (1975).
- [2] W. Böhm, “Inserting new knots into B-spline curves”, *Computer-Aided Design*, **12**, no. 4, 199 – 201 (1980).
- [3] S. - Y. A. Chang and Z. Ciesielski, “Spline characterization of H^1 ”, *Studia Math.* **75**, 183 – 192 (1983).
- [4] Z. Ciesielski, “Equivalence, unconditionality and convergence a.e. of the spline bases in L_p spaces”, In *Approximation theory (Papers, VIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warsaw, 1975)*, Banach Center Publ., **4**, 55 – 68, PWN, Warsaw (1979).
- [5] Z. Ciesielski, “Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots”, *Function spaces (Poznań, 1998)*, Pure and Appl. Math., Lecture Notes, **213**, 133 – 140, Dekker, New York (2000).
- [6] R. R. Coifman and G. Weiss, “Extension of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83**, 569 – 645 (1977).
- [7] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss. **303**, Springer, Berlin (1993).
- [8] J. Domsta, “A theorem on B-splines. II. The periodic case”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **24**, 1077 – 1084 (1976).
- [9] Г. Г. Геворкян, “Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение к пространствам $\text{Re}H^p$ ”, *Труды Математического института имени ВА Стеклова*, **190**, 49 – 74 (1989).
- [10] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, *On General Franklin Systems*, *Dissertationes Math.* **374**, 59 pages (1998).
- [11] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *Studia Math.*, **374**, 1 – 59 (1998).
- [12] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Math.* **167**, 259 – 292 (2005).
- [13] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Orthonormal spline systems with arbitrary knots as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *East J. Approx.* **14**, 161 – 182 (2008).
- [14] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Mathematica*, **226**, no. 2, 123 – 154 (2015).

- [15] G. G. Gevorkyan and A. A. Sahakyan, “Unconditional basis property of general Franklin systems”, *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **35**, no. 4, 7 – 25 (2000).
- [16] L. Hakobyan and K. Keryan, “Periodic orthonormal spline systems with arbitrary knots as basis in $H^1(\mathbb{T})$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **58**, no. 1, 33 – 42 (2023).
- [17] K. Keryan, “Unconditionality of general periodic spline systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**, no. 1, 13 – 55 (2005).
- [18] K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in L^p ”, *Studia Mathematica*, **248**, no. 1, 57 – 91 (2019).
- [19] M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in L^p ”, *Studia Math.*, **222**, no. 1, 51 – 86 (2014).
- [20] M. Passenbrunner, “Orthogonal projectors onto spaces of periodic splines”, *Journal of Complexity*, **42**, 85 – 93 (2017).
- [21] M. Passenbrunner and A. Shadrin, “On almost everywhere convergence of orthogonal spline projections with arbitrary knots”, *J. Approximation Theory*, **180**, 77 – 89 (2014).
- [22] M. P. Poghosyan and K. A. Keryan, “General periodic Franklin system as a basis in $H^1[0, 1]$ ”, *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **40**, 56 – 79 (2005).
- [23] A. Shadrin, “The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: a proof of de Boor’s conjecture”, *Acta Math.*, **187**, no. 1, 59 – 137 (2001).
- [24] P. Sjölin and J. O. Strömberg, “Basis properties of Hardy spaces”, *Ark. Mat.* **21**, 111 – 125 (1983).

Поступила 02 февраля 2024

После доработки 02 февраля 2024

Принята к публикации 12 февраля 2024