

Г. В. Бадалян

О производной квази-полинома С. Н. Бериштейна

Рассмотрим последовательность чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty \quad (1)$$

и функций

$$b_{p,k}(x) = \frac{\prod_{n=1}^p \gamma_n}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{n=1}^p (\zeta + \gamma_n)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, p, \quad (2)$$

где $\prod_{n=1}^p \gamma_n = 1$, а простой контур C здесь, и впредь в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя подынтегральной функции.

А. О. Гельфондом [1] доказано, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, а

$$B_p(f, x) = \sum_{k=0}^p f(\tau_{p,k}) b_{p,k}(x), \quad (3)$$

где

$$\tau_{p,k} = \prod_{n=k+1}^p \left(\frac{\gamma_n - \gamma_1}{\gamma_n} \right)^{1/\gamma_1}, \quad k=0, 1, 2, \dots, p, \quad \tau_{p,p} = 1, \quad (4)$$

то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} B_p(f, x) = f(x)$$

равномерно на всем сегменте $[0, 1]^*$, притом указана также быстрота приближения.

В работе [2] доказано, что в качестве последовательности $\{\tau_{p,k}\}$ можно брать любую другую последовательность $\{\tau_{p,k}^*\}$, если только

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\tau_{p,k}^* - \tau_{p,k}) = 0$$

равномерно относительно всех $k=0, 1, 2, \dots, p$.

* Представление (2) функций $b_{p,k}(x)$ впервые дано в [2].

В частности можно полагать

$$\tau_{p,k} = \prod_{s=k+1}^p \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1}$$

или же

$$\tau_{p,k} = \prod_{s=k+1}^p \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s},$$

если только в последнем случае $\gamma_1 \geq 1$.

В настоящей статье исследуется вопрос приближения $B_p(f, x)$ к $f'(x)$ при предположении непрерывности последней на $[0, 1]$.

Естественно считать, что $\gamma_1 = 1$, так как в противном случае, вообще говоря,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} B_p(f, x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } \gamma_1 > 1, \\ \infty, & \text{когда } \gamma_1 < 1. \end{cases}$$

Это значит, что следует брать $\gamma_1 = 1$ и

$$\tau_{p,k} = \prod_{s=k+1}^p \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad \tau_{p,p} = 1. \quad (5)$$

Сперва докажем нужные для изложения основного вопроса предложения.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^p (x - \tau_{p,k}) \iota_{p,k}(x) = 1. \quad (6)$$

Доказательство. Действительно, заметим, что

$$\sum_{k=0}^p \iota_{p,k}(x) = 1 \quad (7)$$

(см. [1], [2]). Значит

$$\sum_{k=0}^p \iota_{p,k}(x) = 0, \quad (7')$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \tau_{p,k} \iota_{p,k}(x) &= \sum_{k=0}^p \frac{\prod_{s=k+1}^p (\gamma_s - 1)}{2\pi i} \int_C \frac{-z x^{z-1} dz}{\prod_{s=0}^p (\gamma_s + \gamma_s)} \\ &= -x^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^p \frac{\prod_{s=k+1}^p (\gamma_s - 1) x^z}{\prod_{s=0}^p (\gamma_s + \gamma_s)} z dz = \end{aligned}$$

$$= -\frac{x^{-1}}{2\pi i} \int_C \left[1 - \prod_{v=0}^p \frac{\gamma_v - 1}{\zeta + \gamma_v} \right] \frac{\zeta x^{-1} d\zeta}{\zeta - 1} = -\frac{x^{-1}}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta x^{-1} d\zeta}{\zeta - 1} = -1,$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^p \tau_{p,k} l_{p,k}(x) = -1. \quad (8)$$

В силу (7) и (8) лемма доказана.

Лемма 2. Справедливы равенства

$$x l_{p,k}(x) = \gamma_k l_{p,k}(x) - \gamma_{k+1} l_{p,k+1}(x), \quad (9)$$

когда

$$k = 1, 2, \dots, p-1,$$

а

$$x l_{p,0}(x) = -\gamma_1 l_{p,1}(x), \quad (10)$$

$$x l_{p,p}(x) = \gamma_p l_{p,p}(x). \quad (11)$$

Доказательство. Действительно, пусть сперва $1 \leq k \leq p$, тогда

$$\begin{aligned} x l_{p,k}(x) &= x \frac{\prod_{v=k+1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{-\zeta x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=k}^p (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= -\frac{\prod_{v=k+1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=k}^p (\zeta + \gamma_v)} = -\frac{\prod_{v=k+1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta + \gamma_k - \gamma_k) x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=k}^p (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= -\frac{\prod_{v=k+1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=k+1}^p (\zeta + \gamma_v)} + \gamma_k \frac{\prod_{v=k+1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=k}^p (\zeta + \gamma_v)} \end{aligned}$$

или

$$x l_{p,k}(x) = \gamma_k l_{p,k}(x) - \gamma_{k+1} l_{p,k+1}(x).$$

Пусть теперь $k = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} x l_{p,0}(x) &= \frac{\prod_{v=1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{-\zeta x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=0}^p (\zeta + \gamma_v)} = -\frac{\prod_{v=1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-1} d\zeta}{\prod_{v=1}^p (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= -\gamma_1 l_{p,1}(x). \end{aligned}$$

Наконец

$$X_{p,p}^{\gamma}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{-x^{\gamma} d^{\gamma}}{z^{\gamma} + \gamma_p} = \gamma_p x^{\gamma_p} = \gamma_p^{\gamma_p, p}(x).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь последовательности чисел

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha_v} = \infty,$$

$$\tau_{p,k}(\alpha) = \prod_{v=k+1}^p \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1}, \quad k=1, 2, \dots, p-1, \quad \tau_{p,p}(\alpha) = 1 \quad (12)$$

и функций

$$X_{p,k}(X; \alpha) = \frac{\prod_{v=k+1}^p \alpha_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\gamma} d^{\gamma}}{\prod_{v=k}^p (z^{\gamma} + \alpha_v)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, p. \quad (13)$$

Введем еще обозначения

$$\mu_{p,k} = \prod_{v=k+1}^p \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} - \prod_{v=k+1}^p \frac{\alpha_v - 1}{\alpha_v}, \quad (14)$$

$$\mu'_{p,k} = \prod_{v=k+1}^p \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} \right)^2 - \prod_{v=k+1}^p \frac{\alpha_v - 2}{\alpha_v}. \quad (14')$$

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{p,k} = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu'_{p,k} = 0 \quad (14'')$$

равномерно для всех $k=1, 2, \dots, p$.

Замечание. При $k \leq n_0$, где $n_0 > 0$ — некоторое число, утверждение леммы очевидно.

Пусть $k > n_0$. Тогда

$$\mu_{p,k} = \prod_{v=k+1}^p \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} \left[1 - \prod_{v=k+1}^p \left(1 - \frac{1}{\alpha_v^2} \right) \right].$$

Нетрудно заметить, что в силу $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = \infty$

$$1 > \prod_{v=k+1}^p \left(1 - \frac{1}{\alpha_v^2} \right) > 1 - \sum_{v=k+1}^p \frac{1}{\alpha_v^2}$$

или

$$0 < \mu_{p,k} < \prod_{v=k+1}^p \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} \cdot \sum_{v=k+1}^p \frac{1}{\alpha_v^2} < \frac{\exp\left((\varepsilon - 1) \sum_{k+1}^p \frac{1}{\alpha_v}\right)}{\alpha_{k+1}} \sum_{k+1}^p \frac{1}{\alpha_v}.$$

где при достаточно большом p , $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ — число сколь угодно малое.

Это значит, что

$$0 < \mu_{p,k} < \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{v=k+1}^p \frac{1}{x_v}\right)}{x_{k+1}}. \quad (15)$$

Оценим теперь $|\mu'_{p,k}|$, где опять достаточно рассматривать случай, когда $k \geq n_0 > 0$, так как при малых k равномерное стремление $\mu'_{p,k}$ к нулю, когда $p \rightarrow +\infty$, очевидно.

Имеем

$$\begin{aligned} \mu'_{p,k} &= \prod_{v=k+1}^p \left(\frac{x_v}{x_v+1}\right)^2 \left[1 - \prod_{v=k+1}^p \left(1 + \frac{1}{x_v}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{x_v}\right)\right] - \\ &= \prod_{v=k+1}^p \left(\frac{x_v}{x_v+1}\right)^2 \left[1 - \prod_{v=k+1}^p \left(1 - \frac{3}{x_v^2} - \frac{2}{x_v^3}\right)\right] < \\ &< \prod_{v=k+1}^p \left(\frac{x_v}{x_v+1}\right)^2 \left[1 - \prod_{v=k+1}^p \left(1 - \frac{4}{x_v^2}\right)\right] < \prod_{v=k+1}^p \left(\frac{x_v}{x_v+1}\right)^2 \cdot 4 \sum_{v=k+1}^p \frac{1}{x_v^2}, \end{aligned}$$

так как при достаточно больших $n_0 > 0$ и $k > n_0$, $x_k > 4$.

Это значит, что при достаточно большом $n_0 > 0$ и $k > n_0 > 0$

$$0 < \mu'_{p,k} < \frac{4}{x_{k+1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k+1}^p \frac{1}{x_v}\right). \quad (16)$$

Следовательно, согласно замечанию к лемме, $\mu_{p,k}$ и $\mu'_{p,k}$ стремятся к нулю, когда $p \rightarrow \infty$ равномерно для всех k .

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$0 \leq \sum_{k=1}^p |\tau_{p,k}(x) - x|^2 \mu_{p,k}(x, x) < C \mu_p^*, \quad (17)$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная,

$$\mu_p^* = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k+1}^p \frac{1}{x_v}\right)}{x_{k+1}}, \exp\left(-\sum_{v=1}^p \frac{1}{x_v}\right) \right\}. \quad (18)$$

Доказательство. Действительно, прежде всего нетрудно заметить, что

$$\sum_{k=1}^p \mu_{p,k}(x, x) = 1,$$

так как

$$\sum_{k=1}^p i_{p,k}(X, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{k=1}^p \prod_{s=k+1}^p z_s x^{-z} d^s z}{\prod_{s=k}^p (z + z_s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(1 - \prod_{s=1}^p \frac{z_s}{z + z_s}\right) \frac{x^{-z} d^s z}{z}.$$

Но $z_1 = 0$, значит

$$\sum_{k=1}^p i_{p,k}(X, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} d^s z}{z} = 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \tau_{p,k}(z) i_{p,k}(X, z) &= \sum_{k=1}^p \mu_{p,k} i_{p,k}(X, z) \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{\prod_{s=k+1}^p (z_s - 1)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} d^s z}{\prod_{s=k}^p (z + z_s)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \tau_{p,k}(z) i_{p,k}(X, z) &= \sum_{k=1}^p \mu_{p,k} i_{p,k}(X, z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(1 - \prod_{s=1}^p \frac{z_s - 1}{z + z_s}\right) \frac{x^{-z} d^s z}{z + 1} = \\ &= \sum_{k=1}^p \mu_{p,k} i_{p,k}(X, z) + X - \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{s=1}^p \frac{z_s - 1}{z + z_s} \frac{x^{-z} d^s z}{z + 1}. \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^p \tau_{p,k}(z) i_{p,k}(X, z) = X + \sum_{k=1}^p \mu_{p,k} i_{p,k}(X, z) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{s=1}^p \frac{z_s - 1}{z + z_s} \frac{x^{-z} d^s z}{z + 1}, \quad (19)$$

Составим, наконец,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \tau_{p,k}^2(z) i_{p,k}(X, z) &= \\ &= \sum_{k=1}^p \mu_{p,k} i_{p,k}(X, z) - \sum_{k=1}^p \frac{\prod_{s=k+1}^p (z_s - 2)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} d^s z}{\prod_{s=k}^p (z + z_s)}. \end{aligned}$$

Зная, что

$$\sum_{k=1}^p \frac{\prod_{s=k+1}^p (z_s - 2)}{\prod_{s=k}^p (z + z_s)} = 1 - \prod_{s=1}^p \frac{z_s - 2}{z + z_s},$$

получаем

$$\sum_{k=1}^p \tau_{p,k}^2(z) i_{p,k}(x, z) = x^2 - \sum_{k=1}^p u_{p,k} i_{p,k}(x, z) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{v=1}^p \frac{z_v - 2}{z_v + z} \frac{x^{-z} dz}{z_v + 2}. \quad (20)$$

Помножив (19), (20) и (21) соответственно на x^2 , $-2x$, 1 и сложив, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p |z_{p,k}(z) - x|^2 i_{p,k}(x, z) = \\ & = \sum_{k=1}^p (u_{p,k} - u_{p,k}^*) i_{p,k}(x, z) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{v=1}^p \frac{z_v - 1}{z_v + z} \frac{x^{-z} dz}{z_v + 1} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{v=1}^p \frac{z_v - 2}{z_v + z} \frac{x^{-z} dz}{z_v + 2}. \end{aligned} \quad (21)$$

С другой стороны нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{v=1}^p \frac{z_v - 1}{z_v + z} \frac{x^{-z} dz}{z_v + 1} \right| & < C \prod_{v=1}^p \left| \frac{z_v - 1}{z_v} \right| < C \exp\left(-\sum_{v=1}^p \frac{1}{z_v}\right), \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{v=1}^p \frac{z_v - 2}{z_v + z} \frac{x^{-z} dz}{z_v + 2} \right| & < C \exp\left(-\sum_{v=1}^p \frac{1}{z_v}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где C — абсолютная постоянная, $\exp\left(-\sum_{v=1}^p \frac{1}{z_v}\right)$ при больших p — число сколь угодно малое.

В силу (15), (16) и (22) из (21) получаем

$$\begin{aligned} 0 & \leq \sum_{k=1}^p |z_{p,k}(z) - x|^2 i_{p,k}(x, z) < \\ < C \left[\max_k \frac{1}{z_{k-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{v=1}^p \frac{1}{z_v}\right) + \exp\left(-\sum_{v=1}^p \frac{1}{z_v}\right) \right]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Для всякого δ , $0 < \delta < 1$, $x \in [0, 1]$ и $|z_{p,k}(z) - x| > \delta$ справедливо неравенство

$$0 < \sum_k i_{p,k}(x, z) \leq \frac{C}{\delta^2} u_p^*, \quad (23)$$

где $\sum_k$ распространено на те k , для которых $|z_{p,k}(z) - x| > \delta$, а u_p^* определено в (18).

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_k' \lambda_{p,k}(x, \alpha) &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_k' [\tau_{p,k}(x) - x]^2 \lambda_{p,k}(x, \alpha) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^p [\tau_{p,k}(x) - x]^2 \lambda_{p,k}(x, \alpha). \end{aligned}$$

В силу леммы 4 имеем

$$0 < \sum_k' \lambda_{p,k}(x, \alpha) < \frac{C}{\delta^2} n_p^* \quad (24)$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. Для всякой функции $f(x)$, имеющей на $[0, 1]$ непрерывную производную, справедливо равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} B_p(f, x) = f'(x)$$

равномерно на всем сегменте $[0, 1]$, где $B_p(f, x)$ — квази-полиномы С. Н. Бернштейна, определенные для последовательности

$$0 = \tau_{i_0}, \tau_{i_1} = 1 < \tau_{i_2} < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_{i_i}} = \infty,$$

а

$$\tau_{p,k} = \prod_{i=k+1}^p \frac{\tau_{i_i} - 1}{\tau_{i_i}}, \quad k=0, 1, 2, \dots, p-1, \quad \tau_{p,p} = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$f(\tau_{p,k}) = f(x) + [f'(x) + \theta(\tau_{p,k}, x)](\tau_{p,k} - x), \quad (25)$$

где $\theta(\tau_{p,k}, x) \rightarrow 0$, когда $\tau_{p,k} \rightarrow x$.

Подставив значение $f(\tau_{p,k})$ из (25) в

$$B_p(f, x) = \sum_{k=0}^p f(\tau_{p,k}) \lambda_{p,k}(x)$$

в силу (6) и (7') получаем

$$B_p(f, x) = f'(x) + \sum_{k=0}^p \theta(\tau_{p,k}, x) (\tau_{p,k} - x) \lambda_{p,k}(x). \quad (26)$$

Для краткости обозначим

$$\tau_k \theta(\tau_{p,k}, x) (\tau_{p,k} - x) = a_k, \quad (27)$$

$$\tau_{k+1} \theta(\tau_{p,k}, x) (\tau_{p,k} - x) = b_k, \quad (28)$$

тогда в силу леммы 2 равенство (26) запишется в виде

$$B_p(f, x) = f'(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{p-1} [a_k \lambda_{p,k}(x) - b_k \lambda_{p,k+1}(x)] -$$

$$-\frac{b_0}{x} \iota_{p,1}(x) + \frac{a_p}{x} \iota_{p,p}(x). \quad (26')$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} [a_k \iota_{p,k}(x) - b_k \iota_{p,k+1}(x)] &= a_1 \iota_{p,1}(x) - \\ &+ \sum_{k=1}^{p-2} (a_{k+1} - b_k) \iota_{p,k+1}(x) - b_{p-1} \iota_{p,p}(x). \end{aligned} \quad (29)$$

В силу (29) равенство (26') запишется в виде

$$\begin{aligned} B_p(f, x) &= f'(x) + \frac{1}{x} \left\{ a_1 \iota_{p,1}(x) - \sum_{k=1}^{p-2} (a_{k+1} - b_k) \iota_{p,k+1}(x) - \right. \\ &\quad \left. - b_{p-1} \iota_{p,p}(x) - b_0 \iota_{p,1}(x) + a_p \iota_{p,p}(x) \right\} = \\ &= f'(x) + \frac{1}{x} \left\{ (a_1 - b_0) \iota_{p,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-2} (a_{k+1} - b_k) \iota_{p,k+1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + (a_p - b_{p-1}) \iota_{p,p}(x) \right\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$B_p(f, x) = f'(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - b_k) \iota_{p,k+1}(x)$$

или

$$B_p(f, x) = f'(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^p (a_k - b_{k-1}) \iota_{p,k}(x). \quad (26'')$$

Согласно обозначениям (27) и (27') имеем

$$\begin{aligned} a_k - b_{k-1} &= \gamma_k^0(\tau_{p,k}, x) (\tau_{p,k} - x) - \gamma_{k-1}^1(\tau_{p,k-1}, x) (\tau_{p,k-1} - x) = \\ &= \gamma_k^0[\theta(\tau_{p,k}, x) (\tau_{p,k} - x) - \theta(\tau_{p,k-1}, x) (\tau_{p,k} - x)] = \gamma_k^0 \varphi(k, x). \end{aligned} \quad (30)$$

Выразим теперь $\varphi(k, x)$ через $f(x)$ и $f'(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(\tau_{p,k}) &= f(x) + [f'(x) + \theta(\tau_{p,k}, x)] (\tau_{p,k} - x), \\ f(\tau_{p,k-1}) &= f(x) + [f'(x) - \theta(\tau_{p,k-1}, x)] (\tau_{p,k} - x). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\varphi(k, x) = f(\tau_{p,k}) - f(\tau_{p,k-1}) + f'(x) [\tau_{p,k} - x - (\tau_{p,k-1} - x)]. \quad (31)$$

Если обозначить

$$\Delta \tau_{p,k-1} = \tau_{p,k} - \tau_{p,k-1} = \frac{1}{\gamma_{k-1}} \prod_{v=k+1}^p \frac{\gamma_v - 1}{\gamma_v}$$

$$\Delta f(\tau_{p,k-1}) = f(\tau_{p,k}) - f(\tau_{p,k-1}),$$

тогда

$$\varphi(k, x) = \Delta f(\tau_{p,k-1}) - f'(x) \Delta \tau_{p,k-1} = [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(x)] \cdot \frac{1}{\tau_{k+1}} \prod_{v=k+1}^p \frac{\tau_v - 1}{\tau_v}, \quad (31')$$

где

$$\tau_{p,k-1} < \xi_{p,k-1} < \tau_{p,k}.$$

Подставив значение $\varphi(k, x)$ из (31') в (26''), получим

$$B_p(f, x) = f'(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^p [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(x)] \prod_{k+1}^p \frac{\tau_v - 1}{\tau_v} \lambda_{p,k}(x). \quad (26''')$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \prod_{v=k+1}^p \frac{\tau_v - 1}{\tau_v} \lambda_{p,k}(x) &= \frac{\prod_{v=k+1}^p (\tau_v - 1)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z-1} dz}{\prod_{v=k}^p (\zeta + \tau_v)} = \\ &= \frac{\prod_{v=k+1}^p (\tau_v - 1)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=k}^p (\zeta - \tau_v - 1)} = \frac{\prod_{v=k+1}^p \tau_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=k}^p (\zeta + \alpha_v)} \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{1}{x} \prod_{k+1}^p \frac{\tau_v - 1}{\tau_v} \lambda_{p,k}(x) = \lambda_{p,k}(x, \alpha). \quad (32)$$

Из (26''') в силу (32) получаем

$$\begin{aligned} B_p(f, x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^p [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(x)] \lambda_{p,k}(x, \alpha) = \\ &= f'(x) + \sum_{k=1}^p [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(\tau_{p,k}^*)] \lambda_{p,k}(x, \alpha) + \\ &+ \sum_{k=1}^p [f'(\tau_{p,k}^*) - f'(x)] \lambda_{p,k}(x, \alpha), \end{aligned} \quad (26''')$$

где

$$\tau_{p,k}^* = \prod_{k+1}^p \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} = \prod_{k+1}^p \frac{\tau_v - 1}{\tau_v} = \tau_{p,k}.$$

Для оценки сверху

$$|f'(\xi_{p,k-1}) - f'(\tau_{p,k}^*)|$$

заметим, что

$$\begin{aligned} |\xi_{p,k-1} - \tau_{p,k}^*| &< |\tau_{p,k-1} - \tau_{p,k}^*| = \\ &= \tau_{p,k} - \tau_{p,k-1} = \frac{1}{\tau_k} \prod_{i=k+1}^p \frac{\tau_i - 1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_k} \tau_{p,k}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить еще, что в силу условия теоремы для всякого $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ и достаточно большое p , такие, что

$$|f'(\xi_{p,k-1}) - f'(\tau_{p,k}^*)| < \varepsilon \quad (33)$$

если только $\tau_{p,k-1} < \xi_{p,k-1} < \tau_{p,k}$, а

$$\frac{1}{\tau_k} \tau_{p,k} < \delta_0$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots, p$.

С другой стороны, согласно лемме 4, разбивая сумму

$$\sum_{k=1}^p [f'(\tau_{p,k}^*) - f'(x)] \lambda_{p,k}(x, \varepsilon)$$

на два слагаемые $\sum_k^I$ и $\sum_k^{II}$, распространенные на те k , для которых соответственно

$$|x - \tau_{p,k}^*| = |x - \tau_{p,k}| < \delta_0 \text{ и } |x - \tau_{p,k}| > \delta_0,$$

будем иметь

$$\left| \sum_k^I \right| < \varepsilon,$$

а

$$\left| \sum_k^{II} \right| < 2M \sum_k^{II} \lambda_{p,k}(x, \varepsilon).$$

Согласно лемме 5 имеем

$$\left| \sum_k^{II} \right| < \frac{2MC}{\delta_0^2} \eta_{p,\delta_0}^*.$$

где

$$M = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|,$$

а C и η_{p,δ_0}^* определены в (18).

В силу последних неравенств из (26''') получаем

$$|f_{(x)}' B_p'(f, x)| < C_1(\varepsilon + \eta_{p,\delta_0}^*) = \eta_{p,\delta_0}^{**},$$

где, как нетрудно заметить,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \eta_{p,\delta_0}^{**} = 0.$$

Этим теорема доказана.

Հ. Վ. Քաղալյան

Ս. Ն. ԲԵՐՆՇՏԵՅՆԻ ՔՎԱԶԻ ՊՈԼԻՆՈՄԻ
ԱՄԱՆՑՅԱԼԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են թվերի և ֆունկցիաների հետևյալ հաջորդականությունները՝

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$$

և

$$v_{p,k}(x) = \frac{\prod_{v=k+1}^p \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=k}^p (z + \gamma_v)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, p,$$

որտեղ $p=0, 1, 2, \dots$, $\prod_{v=p+1}^p \gamma_v = 1$, իսկ պարզ կոստուր $\mathbb{C}$ -ն ընդգրկում է ընդհանուր ֆունկցիայի բևեռները:

Տված $f(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցված

$$B_p(f, x) = \sum_{k=0}^p f(\tau_{p,k}) v_{p,k}(x)$$

ֆունկցիան, որտեղ $f(x)$ որոշված է $[0, 1]$ հատվածում,

$$\tau_{p,k} = \prod_{v=k+1}^p \left(\frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} \right)^{1/\gamma_v}, \quad k=0, 1, 2, \dots, p-1, \quad \tau_{p,p} = 1,$$

անվանենք $f(x)$ ֆունկցիայի Ս. Ն. Բերնշտեյնի քվազի պոլինոմ:

Ապացուցված է

Թե որ եւ՝ երբ $f(x)$ ֆունկցիան $[0, 1]$ հատվածում ունի անընդհատ անցյալ, ապա այդ ֆունկցիայի Ս. Ն. Բերնշտեյնի քվազի պոլինոմի անցյալը ձգտում է $f(x)$ ֆունկցիայի անցյալին ամբողջ $[0, 1]$ սկզբնական հավասարաչափ, երբ միայն

$$0 = \gamma_0, \gamma_1 = 1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гельфонд А. О. К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна. Известия АН СССР, серия математическая, 14, 1950.
2. Бадалян Г. В. Обобщение Хаусдорфского метода суммирования рядов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 6, 1959.

МАТЕМАТИКА

А. А. Китбалян

Разложение по биортогональным системам,
 образованным функциями Вольтерра

В работе М. М. Джрбашяна [1] построена теория прямых и обратных интегральных преобразований в классе L_2 с ядрами Фурье e^{itx} и Вольтерра

$$v(z; \mu) = \int_0^{\infty} \frac{z^{u+t}}{\Gamma(1+\mu+t)} dt. \quad (A)$$

Отметим, что функция $v(z; \mu)$ является аналитической на бесконечнолистной римановой поверхности G_{∞} : $-\infty < \arg z < +\infty$, $0 < |z| < +\infty$, при фиксированном значении параметра μ .

В настоящей работе приводятся результаты, являющиеся фактически дискретным аналогом результатов работы [1].

В § 1 общий метод построения биортогональных систем целых функций на конечном отрезке, изложенный в работе [2], распространяется на функции типа Вольтерра.

С этой целью исследуется существование и асимптотика A_0 — точек некоторой функции $w(\lambda)$, образованной из функций типа Вольтерра.

В § 2 доказывается теорема о разложении класса функций ограниченной вариации по системам из функций Вольтерра.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему руководителю профессору М. М. Джрбашяну, предложившему настоящую задачу, и А. Б. Нерсисяну, сделавшему ряд ценных замечаний.

§ 1. Биортогональные системы функций типа Вольтерра

1. Известно (см. [1]), что для функции Вольтерра $v(z; \mu)$ имеет место следующее интегральное представление

$$v(z; \mu) = - \int_0^z \frac{z^{u-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \frac{z^{u-z}}{2\pi i} \int_{\gamma(z; \mu)} \frac{e^u u^{z-\mu-1}}{\log u - \log z} du, \quad (1.1)$$

при $z \in D_+(z)$



$$v(z; \mu) = e^z - \int_0^z \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \frac{z^{\mu-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha; z)} \frac{e^u u^{\mu-1}}{\log u - \log z} du, \quad (1.1')$$

где $-\infty < \alpha < \infty$, $z > 0$; $D_1(z)$ — область $|\arg z| < \alpha$, $|z| > z$, лежащая на нулевом листе поверхности G ; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, наконец, $\gamma(\alpha; z)$ — контур этой области.

Заметив теперь, что при любом $p > 1$ имеет место формула

$$\frac{1}{\log \frac{z}{u}} = -\frac{1}{\log z} \left[1 + \frac{\log u}{\log z} + \frac{\log^2 u}{\log^2 z} + \dots + \frac{\log^p u}{\log^p z} \right] + O\left(\frac{\log^{p+1} u}{\log^{p+1} z}\right),$$

из (1.1) и (1.1') приходим к следующей лемме*.

Лемма 1. Для любого числа β из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ справедливы следующие асимптотические формулы

а) при $|\arg z| < \beta$, $|z| \rightarrow \infty$,

$$v(z; \mu) = e^z + \sum_{k=1}^p \frac{A_k(\mu) z^k}{\log^k z} + O\left(\frac{z^k}{\log^{p+1} z}\right), \quad (1.2)$$

б) при $\beta < |\arg z| < +\infty$, $|z| \rightarrow \infty$,

$$v(z; \mu) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k(\mu) z^k}{\log^k z} + O\left(\frac{z^k}{\log^{p+1} z}\right). \quad (1.3)$$

В этих формулах $p > 1$ — произвольное целое число, порядок дополнительных членов равномерен относительно соответствующих углов, а числа $A_k(\mu)$ ($k=1, 2, \dots$) имеют следующие значения

$$A_k(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha; z)} e^u u^{-\mu} \log^k u du = (-1)^k \frac{d^k}{d\mu^k} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu)} \right]. \quad (1.4)$$

Приступим теперь к построению биортогональной системы из функций Вольтерра.

Пусть a_j, b_j ($j=1, 2$) — произвольные вещественные параметры, удовлетворяющие условию

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1. \quad (1.5)$$

Введем в рассмотрение функции

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-1/2} J_{\nu_j}(\bar{x}\lambda; \mu_j), \quad (1.6)$$

* По этому поводу смотри также лемму 3 работы [1].

$$z(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\tau_j} v((l-x)\lambda; \tau_j) \quad (0 \leq l < \infty), \quad (1.7)$$

где параметры μ_j и τ_j подчинены пока условиям

$$\mu_j > -1, \quad \tau_j > -1, \quad (j=1, 2). \quad (1.8)$$

Заметим, что эти ограничения необходимы вследствие того, что интеграл

$$\int_0^l v(x; a) dx$$

сходится абсолютно при $a > -1$.

В самом деле, представим функцию $v(x; a)$ в виде

$$v(x; a) = \int_0^a \frac{x^{t+a}}{\Gamma(t+a+1)} dt + \int_a^\infty \frac{x^{t+a}}{\Gamma(t+a+1)} dt = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (a > 0)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\int_0^l |\varphi_2(x)| dx < \text{const},$$

в то время как $\varphi_1(x) = O(x^2)$ и $\int_0^l \varphi_1(x) dx$ абсолютно сходится при $a > -1$.

В дальнейшем на параметры μ_j, τ_j будут наложены более жесткие ограничения.

Составим функцию

$$w(\lambda) = \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{-(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} v(l\lambda; \mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1). \quad (1.9)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если параметры μ и τ удовлетворяют условию (1.8), то при любых λ и λ_1 ($\lambda \neq \lambda_1$) справедливы формулы

$$\begin{aligned} & \int_0^l \lambda^{-\mu} v(\lambda x; \mu) \lambda_1^{-\tau} v((l-x)\lambda_1; \tau) dx = \\ & = \frac{\lambda^{-(\mu+\tau+1)} v(l\lambda; \mu + \tau + 1) - \lambda_1^{-(\mu+\tau+1)} v(l\lambda_1; \mu + \tau + 1)}{\log \lambda - \log \lambda_1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

и

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \lambda_1) dx = \frac{w(\lambda) - w(\lambda_1)}{\log \lambda - \log \lambda_1}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Формула (1.11) непосредственно будет следовать из формулы (1.10) ввиду обозначений, введенных в формулах (1.6), (1.7) и (1.9). Докажем поэтому формулу (1.10).

Учитывая представление (4) функции $v(x; \rho)$, для любых λ и λ_1 ($\lambda \neq \lambda_1$) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \lambda^{-\rho} v(x; \rho) \lambda_1^{-\tau} v((1-x)\lambda_1; \tau) dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^u \lambda_1^v du dv}{\Gamma(1+\rho+u) \Gamma(1+\tau+v)} \int_0^1 x^{u+\rho} (1-x)^{v+\tau} dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^u \lambda_1^v du dv}{\Gamma(1+\rho+u) \Gamma(1+\tau+v)} t^{u+\rho+u+v+1} \int_0^1 t^{u+\rho} (1-t)^{v+\tau} dt. \end{aligned}$$

Выполнив ряд несложных преобразований, приходим к формуле (1.10).

Заметим, что перемена порядка интегрирования повсюду возможна в силу (1.8).

Таким образом, лемма 2 доказана.

Для произвольного комплексного числа A_0 рассмотрим теперь систему нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$. Ниже будет доказано, что эта функция имеет счетное множество нулей, а также будут изучены их асимптотика и особенности их расположения на бесконечнолистной римановой поверхности G_∞ . Но до этого, предполагая существование счетной системы нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ функции $\omega(\lambda) - A_0$, пронумерованных в порядке неубывания их модулей, приступим к построению биортогональной системы из функций $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$.

Итак, пусть $\{\lambda_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) — последовательность всех нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$, пронумерованных как указано выше, причем каждый нуль считается лишь один раз, независимо от его кратности.

Сопоставим нулю λ_n кратности $p_n \geq 1$ две системы функций

$$\left. \frac{\partial^j y(x, \lambda)}{\partial (\log \lambda)^j} \right|_{\lambda=\lambda_n} \quad (j=0, 1, \dots, p_n-1) \quad (1.12)$$

и

$$\sum_{k=0}^{p_n-j-1} \frac{b_n^{(k)}}{k! j!} \left. \frac{\partial^k z(x, \lambda)}{\partial (\log \lambda)^k} \right|_{\lambda=\lambda_n} \quad (j=0, 1, \dots, p_n-1), \quad (1.13)$$

где

$$b_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial (\log \lambda)^k} \left\{ \frac{(\log \lambda - \log \lambda_n)^{p_n}}{\omega(\lambda) - A_0} \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \quad (k=0, 1, \dots, p_n-1). \quad (1.14)$$

Пронумеруем образовавшиеся системы функций в порядке неубывания модулей чисел λ_n ($n=1, 2, \dots$) так, чтобы j -тые функции, соответствующие некоторому нулю λ_n в каждой из групп функций (1.12)

и (1.13) получили бы одинаковые номера. В итоге получим две счетные системы функций

$$\{Y_k(x)\} \text{ и } \{Z_k(x)\} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

После замены переменной $\lambda = e^w$ мы будем находиться в условиях теоремы 1 работы [2]. Отсюда непосредственно следует, что системы функций (1.15) биортогональны на отрезке $[0, l]$ в смысле

$$\int_0^l Y_p(x) Z_q(x) dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases} \quad (p, q = 1, 2, \dots). \quad (1.16)$$

2°. Изучим свойства нулей функции $\omega(\lambda) = A_0$. Для этого приведем асимптотику функций $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$, которая неоднократно будет использоваться нами и при дальнейшем изложении.

Используя уточненную асимптотику функции Вольтерры (1.2) и (1.3), а также определение функций $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$ [формулы (1.6), (1.7) и (1.9)], получаем следующую лемму.

Лемма 3.

а) При $|\arg \lambda| < \beta$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $0 < z < l$, равномерно относительно $x \in [z, l]$ имеем

$$y(x, \lambda) = \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-\mu_j} \right\} e^{x\lambda} + O\left(\frac{1}{\log \lambda}\right), \quad (1.17)$$

равномерно относительно $x \in [0, l-z]$ имеем

$$z(x, \lambda) = \left\{ \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\tau_j} \right\} e^{(l-x)\lambda} + O\left(\frac{1}{\log \lambda}\right), \quad (1.18)$$

наконец,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \lambda^{-1} \left(\sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-\mu_j} \right) \left(\sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\tau_j} \right) e^{l\lambda} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^*}{\log^k l_k} + O\left(\frac{1}{\log^{p+1} l_k}\right) = \\ &= \left\{ \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{-(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \right\} e^{l\lambda} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^*}{\log^k l_k} + O\left(\frac{1}{\log^{p+1} l_k}\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$A_k^* = \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} l^{(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} (-1)^k \frac{d^k}{d(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)^k} \left(\frac{1}{\Gamma(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \right). \quad (1.20)$$

б) При $\beta < |\arg \lambda| < +\infty$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $0 < z < l$, равномерно относительно $x \in [z, l]$ имеем

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \frac{a_j x^{\mu_j} A_1(\mu_j)}{\log x \lambda} + O\left(\frac{1}{\log^2 \lambda}\right), \quad (1.21)$$

равномерно относительно $x \in [0, l-z]$ имеем

$$z(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \frac{b_j (l-x)^{\tau_j} A_j(\tau_j)}{\log(l-x)\lambda} + O\left(\frac{1}{\log^2 \lambda}\right), \quad (1.22)$$

наконец,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)}{\log^k l \lambda} \right\} + \\ &+ O\left(\frac{1}{\log^{n+1} l \lambda}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k^*}{\log^k l \lambda} + O\left(\frac{1}{\log^{n+1} l \lambda}\right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Докажем, наконец, лемму о свойствах нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$.

Лемма 4. Пусть функция $\omega(\lambda)$ определена по (1.9). Тогда $\omega(\lambda) - A_0$ имеет счетное множество нулей; все они, начиная с некоторого, довольно большого по модулю, — простые; лежат внутри угловых областей

$$\begin{aligned} D_1(\delta): \quad \frac{\pi}{2} < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{и} \quad D_2(\delta): \quad -\frac{\pi}{2} - \delta < \arg \lambda < -\frac{\pi}{2}, \quad (1.24) \\ \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

асимптотика этих нулей, пронумерованных в порядке неубывания их модулей, имеет вид

$$i_k^{(\pm)} = -\frac{2\pi k}{l} i \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right], \quad (1.25)$$

где обозначение $i_k^{(\pm)}$ означает нуль, лежащий соответственно в верхней или нижней полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

Первый случай: $A_0 \neq 0$.

Введем обозначение

$$\gamma = \min_{j_1, j_2=1,2} (\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1). \quad (1.26)$$

Наложим на параметры μ_j и τ_j помимо (1.8) новое ограничение

$$-1 < \mu_j, \tau_j < -\frac{1}{2} \quad (j=1, 2). \quad (1.27)$$

В дальнейшем мы убедимся в естественности ограничения (1.27). Отсюда следует, что

$$-1 < \gamma < 0. \quad (1.27')$$

Относительно параметров же a_j и b_j в течение всей работы будем предполагать, что они удовлетворяют следующему условию: произведение $a_{j_1} b_{j_2}$ не равно нулю для тех значений индексов j_1 и j_2 , при которых достигается минимум в выражении (1.26) (обозначим их j_1^0 и j_2^0 или просто j_0).

Итак,

$$M = a_{j_1} b_{j_2} \neq 0.$$

После всего вышесказанного, асимптотическую формулу (1.19) можем переписать в виде

$$\omega(\lambda) = M\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi(\lambda)] e^{L\lambda} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^*}{\log^k \lambda} + O\left(\frac{1}{\log^{p-1} \lambda}\right) \quad (p > 1), \quad (1.19')$$

где

$$\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}), \quad (1.28)$$

$\alpha > 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Из асимптотической формулы (1.19') следует, что все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda) - A_0^*$ могут лежать лишь в областях (1.24).

Перейдем к доказательству формулы (1.25). Введем вспомогательную функцию

$$\omega_0(\lambda) = \lambda^{-\gamma} [1 + \varphi(\lambda)] e^{L\lambda} - A_0^*, \quad (1.29)$$

где

$$A_0^* = \frac{A_0}{M}. \quad (1.30)$$

Из формулы (1.19') следует, что

$$\omega(\lambda) - A_0^* = M \left[\omega_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\log \lambda}\right) \right]. \quad (1.31)$$

Все достаточно большие по модулю корни функции $\omega_0(\lambda)$ должны лежать на бесконечной кривой L_0

$$|\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi(\lambda) e^{L\lambda}]| = |A_0^*|. \quad (1.32)$$

Если положить $\lambda = r e^{i\varphi}$, то уравнение кривой L_0 запишется так

$$Lr \cos \varphi = \gamma \log r - \log |1 + \varphi(r e^{i\varphi})| + \log |A_0^*|. \quad (1.32')$$

Предположим, что $\lambda_k^* = k$ -тая точка на L_0 , где $\omega_0(\lambda)$ обращается в нуль. Тогда если $\lambda_k^* = r_k^* e^{i\varphi_k^*}$, то

$$-\gamma \log r_k^* + \log |1 + \varphi(\lambda_k^*)| + Lr_k^* - \log A_0^* = 2k\pi i, \quad (1.33)$$

откуда следует

$$-\gamma \log r_k^* + \log |1 + \varphi(\lambda_k^*)| + Lr_k^* \cos \varphi_k^* - \log |A_0^*| = 0, \quad (1.34)$$

$$-\gamma \varphi_k^* + \arg |1 + \varphi(\lambda_k^*)| + Lr_k^* \sin \varphi_k^* - \arg A_0^* = 2k\pi, \quad (1.34')$$

Заметим, что при переходе точки λ по кривой L_0 от одного нуля λ_k^* функции $\omega_0(\lambda)$ к другому λ_{k+1}^* , величина $\arg \lambda^{-\gamma} e^{L\lambda}$ увеличивается на 2π и найдется промежуточная точка μ_k ($|\lambda_k^*| < |\mu_k| < |\lambda_{k+1}^*|$), где $\mu_k^{-\gamma} [1 + \varphi(\mu_k)] e^{L\mu_k} = -A_0^*$, то-есть

$$\omega_0(\mu_k) = -2A_0^* \quad (1.35)$$

Введем в рассмотрение кривые $L_0^{(\pm)}$

$$lr \cos \varphi = \gamma \log r - \log |1 + \varphi(re^{i\varphi})| + \log |A_0^*| \pm 1. \quad (1.36)$$

Рассмотрим дуги l_k и l_{k+1} окружностей $|\lambda| = |\mu_k|$ и $|\lambda| = |\mu_{k+1}|$, лежащие между кривыми $L_0^{(\pm)}$. Обозначим части кривых $L_0^{(\pm)}$, лежащие между дугами l_k и l_{k+1} , соответственно через s_k и s_{k+1} и составим замкнутый контур Δ_k

$$\Delta_k = l_k + s_k + l_{k+1} + s_{k+1}. \quad (1.37)$$

Оценим функцию $\omega_0(\lambda)$ на этом контуре. Обозначим начало и конец дуги l_k соответственно через $\mu_k' = |\mu_k| e^{i\varphi_k'}$ и $\mu_k'' = |\mu_k| e^{i\varphi_k''}$.

При $\lambda \in l_k$ имеем

$$\lambda = |\mu_k| e^{i\varphi}, \quad \text{где } \varphi_k' \leq \varphi \leq \varphi_k''.$$

Тогда

$$|\mu_k| \cos \varphi_k' = \frac{1}{l} (\gamma \log |\mu_k| - \log |1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k'})| + \log |A_0^*| + 1), \quad (1.38)$$

$$|\mu_k| \cos \varphi_k'' = \frac{1}{l} (\gamma \log |\mu_k| - \log |1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k''})| + \log |A_0^*| - 1).$$

Следовательно,

$$2|\mu_k| \sin \frac{\varphi_k' + \varphi_k''}{2} \sin \frac{\varphi_k'' - \varphi_k'}{2} = \frac{1}{l} \left[\log \left| \frac{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k''})}{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k'})} \right| + 2 \right]. \quad (1.39)$$

Учитывая тот факт, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k' = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k'' = \frac{\pi}{2}, \quad (1.40)$$

получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k| \sin \frac{\varphi_k'' - \varphi_k'}{2} = \frac{1}{l}. \quad (1.41)$$

С учетом формулы (1.35), при $\lambda = |\mu_k| e^{i\varphi} \in l_k$ имеем

$$\omega_0(\lambda) = -A_0^* \left[1 - \frac{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi})}{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k'})} e^{l|\mu_k| (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k'})} e^{-l\gamma (\varphi - \varphi_k')} \right]. \quad (1.42)$$

Из формулы

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k'} &= -2 \sin \frac{\varphi + \varphi_k'}{2} \sin \frac{\varphi - \varphi_k'}{2} + \\ &+ 2i \cos \frac{\varphi + \varphi_k'}{2} \cos \frac{\varphi - \varphi_k'}{2} \end{aligned} \quad (1.43)$$

с учетом (1.41) будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |p_k| \operatorname{Re}(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}) < \frac{2}{l}. \quad (1.44)$$

Отсюда имеем, что при $\lambda \in I_k$, $k > k_0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\omega_0(\lambda)| > |A_0^*| |1 + e^2| > |A_0^*|, \quad (1.45)$$

то-есть при $\lambda \in I_k$, $k > k_0$,

$$|\omega_0(\lambda)| > |A_0^*|. \quad (1.45')$$

На кривых же $L_0^{(1)}$

$$\begin{aligned} |\omega_0(\lambda)| &> \left| |p_k|^{-1} |1 + \varphi(|p_k| e^{i\varphi})| e^{\operatorname{Re} |p_k| e^{i\varphi}} - |A_0^*| \right| = \\ &= |A_0^*| |e^{\operatorname{Re} |p_k| e^{i\varphi}} - 1|. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Из оценок (1.45') и (1.46) следует, что при $\lambda \in \Delta_k$, $k > k_1$,

$$|\omega_0(\lambda)| > C_1 |A_0^*| \quad (C_1 > 0)^*, \quad (1.47)$$

Но

$$(\omega(\lambda) - A_0) - M\omega_0(\lambda) = O\left(\frac{1}{\log l\lambda}\right), \quad (1.48)$$

поэтому из оценки (1.47) и из выражения (1.48) по теореме Руше следует, что функция $\omega(\lambda) - A_0$ имеет точно один нуль $\lambda_k^{(+)}$ внутри контура Δ_k , при этом

$$\lambda_k^{(+)} = \lambda_k^* + z_k, \quad \text{где } z_k = O(d_k) \quad (1.49)$$

(d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k).

Так как λ_k^* является нулем функции $\omega_0(\lambda)$, то из формул (1.34) и (1.34)' получим

$$\cos \varphi_k^* = \frac{\gamma \log r_k^* + \log |A_0^*| - \log |1 + \varphi(\lambda_k^*)|}{lr_k^*}, \quad (1.50)$$

значит,

$$\varphi_k^* = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma \log r_k^*}{lr_k^*} - \frac{\log |A_0^*|}{lr_k^*} + \frac{\log |1 + \varphi(\lambda_k^*)|}{lr_k^*} + O\left(\frac{\log^2 r_k^*}{r_k^*}\right), \quad (1.51)$$

Но из (1.34')

$$r_k^* = \frac{2\pi k + \arg A_0^* + \gamma \varphi_k^* - \arg |1 + \varphi(\lambda_k^*)|}{l \sin \varphi_k^*}. \quad (1.52)$$

С учетом формулы (1.51), из (1.52) следует

$$r_k^* = \frac{2\pi k}{l} - \frac{\pi \gamma}{2l} + \frac{\arg A_0^*}{l} + O\left(\frac{\log^2 r_k^*}{r_k^*}\right). \quad (1.53)$$

Отсюда вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

* В дальнейшем постоянные величины, не зависящие от параметров, будем обозначать через C_i ($i = 1, 2, \dots$).

$$r_k^* \sim \frac{2\pi k}{l}, \quad \log r_k^* \sim \log k$$

или

$$r_k^* = \frac{2\pi k}{l} \left[1 + O\left(\frac{\log^2 k}{k^2}\right) \right] \quad (1.54)$$

и

$$\tau_k^* = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\log k}{k}\right). \quad (1.55)$$

Это означает, что

$$i_k^* = \frac{2\pi k}{l} i \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right]. \quad (1.56)$$

Вычислим теперь порядок диаметра d_k . При больших k он совпадает с порядком периметра контура Δ_k . Из формулы (1.41) следует, что

$$|u_k| |e^{i\tau_k^*} - e^{i\tau_{k-1}^*}| \leq C, \quad (1.57)$$

откуда будем иметь

$$\begin{aligned} |i_{k-1}^* - i_k^*| &= \left| \frac{2\pi(k+1)}{l} \left[1 + O\left(\frac{\log(k+1)}{k+1}\right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi k}{l} \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right] \right| = O(\log k). \end{aligned}$$

Итак,

$$d_k = O(\log k), \quad (1.58)$$

поэтому окончательно получим

$$i_k^{(+)} = i_k^* + d_k = \frac{2\pi k}{l} i \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right], \quad (1.25')$$

а это означает утверждение (1.25) леммы.

Второй случай: $A_0 = 0$.

Этот случай отличается от предыдущего тем, что в качестве вспомогательной функции следует рассмотреть функцию

$$w_0^*(z) = z^{-1} [1 + \varphi(z)] e^{i\tau} + \frac{A_1^*}{M \log k}. \quad (1.29')$$

Однако, в этом случае, т. е. когда $A_0 = 0$, на параметры a_j, b_j ($j = 1, 2$) нам придется наложить ограничение

$$A_1^* = - \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} i^{\alpha_{j_1} + \tau_{j_2} - 1} \frac{d}{d(\alpha_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \right) \neq 0.$$

Заметим, что при $A_0 = 0$ и $A_1^* = 0$ возникает исключительный случай, характерный тем, что к системе функций (1.15) становится возмож-

ным добавить еще одну пару функций, биортогональных с функциями системы. Этот случай мы рассматривать не будем.

Из формулы (1.29') следует, что

$$\omega(\lambda) - A_0 = \omega(\lambda) = M \left| \omega_0^*(\lambda) - O\left(\frac{1}{\log^2 l\lambda}\right) \right| \quad (1.31')$$

и, рассматривая кривую L_0^*

$$|\lambda^{-1} \log l\lambda e^{i\lambda} [1 + \varphi(\lambda)]| = \left| \frac{A_1^*}{M} \right|, \quad (1.32')$$

мы аналогичным образом приходим к формуле (1.25).

Лемма полностью доказана.

Докажем теперь, что утверждение леммы 4 о расположении нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$ можно усилить.

С этой целью, наряду с кривыми (1.32) и (1.32'), введенными выше, рассмотрим также следующие семейства кривых:

при $A_0 \neq 0$

$$L(x) = |\lambda^{-1} [1 + \varphi(\lambda)] e^{i\lambda}| = e^x |A_0^*|, \quad (1.59)$$

при $A_0 = 0$

$$L^*(x) = |\lambda^{-1} \log l\lambda e^{i\lambda} [1 + \varphi(\lambda)]| = e^x \left| \frac{A_1^*}{M} \right|. \quad (1.59')$$

Параметр x изменяется в следующих пределах

$$|x| \leq \log 3 = x. \quad (1.60)$$

Очевидно, что

$$L(0) = L_0 \quad \text{и} \quad L^*(0) = L_0^*. \quad (1.61)$$

Если положить $\lambda = re^{i\theta}$, то уравнение кривой (1.59) можно записать в виде

$$-\gamma \log r + l r \cos \theta + \log |1 + \varphi(\lambda)| - \log |A_0^*| - x = 0. \quad (1.62)$$

Введем обозначение

$$\Phi(r, \theta) = -\gamma \log r + l r \cos \theta + \log |1 + \varphi(\lambda)| - \log |A_0^*| - x. \quad (1.63)$$

Из формулы (1.28) нетрудно вывести, что для функции $\Phi(r, \theta)$ налицо все условия известной теоремы о неявных функциях. Вследствие этого, из уравнения $\Phi(r, \theta) = 0$ при $r > r_1$, по вышеупомянутой теореме, θ определится как однозначная неявная функция, причем ее значения принадлежат отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta \right]$ для всех $|x| \leq \log 3 = x$.

Кроме того, эта функция

$$\theta = \theta(r, x) \quad (1.64)$$

является убывающей как функция от x и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r, x) = \frac{\pi}{2}. \quad (1.65)$$

Теперь уже семейства кривых (1.32), (1.32'), (1.59) и (1.59') можно записать явными функциями так

$$\begin{aligned} L: \quad \theta = \theta(r); \quad L(x): \quad \theta = \theta(r, x) \quad (r > r_1, |x| \leq x) \\ L_0^*: \quad \theta = \theta^*(r); \quad L^*(x): \quad \theta = \theta^*(r, x) \end{aligned} \quad (1.66)$$

и ясно, что $\theta(r) = \theta(r, 0)$, $\theta^*(r) = \theta^*(r, 0)$.

Из того, что функция $\theta(r, x)$ убывает, следует

$$\text{при } r > r_1 \text{ и } -x = -\log 3 < x_1 < 0 < x_2 < \log 3 = x$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta(r, x) < \theta(r, x_2) < \theta(r) < \theta(r, x_1) < \theta(r, -x) < \frac{\pi}{2} + \delta. \quad (1.67)$$

Введем в рассмотрение следующие области:

при $A_0 \neq 0$

$$\tilde{D}_1: \quad |\theta(r, x) \leq \theta \leq \theta(r, -x)| \quad (r > r_1), \quad (1.68)$$

при $A_0 = 0$

$$\tilde{D}_1^*: \quad |\theta^*(r, x) < \theta < \theta^*(r, -x)| \quad (r > r_1). \quad (1.68')$$

Области, симметричные относительно вещественной оси соответственно областям $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_1^*$, обозначим через $\tilde{D}_2$ и $\tilde{D}_2^*$.

Докажем, что нули $\{\lambda_n\}$ функции $\omega(\lambda) - A_0$ в случае $A_0 \neq 0$ лежат в областях $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$, а при $A_0 = 0$ — в областях $\tilde{D}_1^*$ и $\tilde{D}_2^*$.

Семейство кривых $L(x)$ при $A_0 \neq 0$ и $|x| \leq \log 3 = x$ покрывает область $\tilde{D}_1$. Поэтому из определения функции $\omega_0(\lambda)$ и кривой $L(x)$ следует, что

$$\frac{1}{3} |A_0^*| \leq |\omega_0(\lambda) - A_0^*| \leq 3 |A_0^*| \quad \text{при } \lambda \in \tilde{D}_1, \quad (1.69)$$

причем

$$|\omega_0(\lambda) - A_0^*| = 3 |A_0^*| \quad \text{при } \lambda \in L(-x) \quad (1.70)$$

и

$$|\omega_0(\lambda) - A_0^*| = \frac{1}{3} |A_0^*| \quad \text{при } \lambda \in L(x). \quad (1.70')$$

Из формулы (1.29) при $\lambda = re^{i\theta}$ имеем

$$|\omega_0(\lambda) - A_0^*| = r^{-1} |1 + \varphi(re^{i\theta})| e^{i\cos\theta}. \quad (1.71)$$

Функция $\cos\theta$ монотонно убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$.

а $\varphi(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$ ($x > 0$).

Поэтому из формул (1.70), (1.71) и из асимптотической формулы

$$\omega_0(\lambda) + A_0^* = \lambda^{-1} [1 + O(\lambda^{-2})] e^{i\lambda} \quad (1.29')$$

следует, что при $\lambda = re^{i\theta}$, $r > r_2$,

$$|\omega_0(\lambda) + A_0^*| \geq 2|A_0^*| \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \theta(r, \varepsilon) \quad (1.72)$$

и

$$|\omega_0(\lambda) + A_0^*| \leq \frac{1}{2}|A_0^*| \quad \text{при} \quad \theta(r, -\varepsilon) < \theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon. \quad (1.72')$$

Отсюда получаем, что

$$|\omega_0(\lambda)| \geq |A_0^*| \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \theta(r, \varepsilon) \quad (1.73)$$

и

$$|\omega_0(\lambda)| \geq \frac{1}{2}|A_0^*| \quad \text{при} \quad \theta(r, -\varepsilon) < \theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon. \quad (1.73')$$

Наконец, если заметим, что асимптотическая формула (1.31) верна в областях $D_1(\delta) - \tilde{D}_1$ и $D_2(\delta) - \tilde{D}_2$, то последние две оценки означают, что

при $\lambda \in D_1(\delta) - \tilde{D}_1$ или при $\lambda \in D_2(\delta) - \tilde{D}_2$

$$|\omega(\lambda) - A_0| > \frac{M}{3}|A_0^*|, \quad r > r_2. \quad (1.74)$$

А это и означает, что все нули функции $\omega(\lambda) - A_0$, начиная с некоторого, могут лежать лишь в областях $\tilde{D}_1(\delta)$ и $\tilde{D}_2(\delta)$. В случае же $A_0 = 0$ (когда согласно предположению $A_1^* \neq 0$) аналогичным образом приходим к оценке

$$|\omega(\lambda) - A_0| = |\omega(\lambda)| \geq \frac{|A_1^*|}{3 \log |\lambda|}, \quad r > r_1 \quad (1.74')$$

при $\lambda \in D_1(\delta) - \tilde{D}_1^*$ или $\lambda \in D_2(\delta) - \tilde{D}_2^*$.

Полученный результат окончательно сформулируем так.

Лемма 4'. Все нули функции $\omega(\lambda) - A_0$, начиная с некоторого, довольно большого по номеру, лежат в областях $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ при $A_0 \neq 0$ и в областях $\tilde{D}_1^*$ и $\tilde{D}_2^*$ при $A_0 = 0$.

§ 2. Теорема разложения

1°. Для доказательства теоремы о разложении по биортогональным системам, построенным выше из функций Вольтерра, нам необходимо найти оценку снизу для функции $\omega(\lambda) - A_0$ на специально подобранной последовательности окружностей.

С этой целью определим последовательность чисел $\{R_n\}$, для которой

$$0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty,$$

следующим образом:

при $A_0 \neq 0$

$$R_n = \frac{1}{l} \left[\pi(2n+1) + \frac{\pi \gamma}{2} + \arg A_0^* \right], \quad (2.1)$$

при $A_0 = 0$ (и следовательно $A_1^* \neq 0$)

$$R_n = \frac{1}{l} \left[\pi(2n+1) + \frac{\pi(\gamma+1)}{2} + \arg A_1^* \right]. \quad (2.2)$$

Обозначим также

$$\theta_n = \begin{cases} \theta(R_n, z) & \text{при } A_0 \neq 0 \\ \theta^*(R_n, z) & \text{при } A_0 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Очевидно, что $\theta_n > \frac{\pi}{2}$.

Докажем следующее предложение:

Лемма 5. При $|\lambda| = R_n$ ($n > n_1$) справедливы оценки:

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq K_1 \left(|A_0^*| + \frac{|A_1^*|}{|M|} \right) |\lambda|^{-1} e^{\operatorname{Re} \lambda} \geq K_2 \left(|A_0^*| + \frac{|A_1^*|}{|M \log l|} \right), \quad (2.4)$$

когда $|\arg \lambda| < \theta_n$,

и

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq K_3 \left(|A_0^*| + \frac{|A_1^*|}{|M \log l|} \right), \quad (2.5)$$

когда $\theta_n \leq |\arg \lambda| < +\infty$.

где K_j ($j=1, 2$) — положительные постоянные.

Доказательство. Предположим сначала, что $A_0 \neq 0$. Формула (2.4) вытекает непосредственно из вышеприведенных выкладок. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} |\omega_0(\lambda)| &\geq |\omega_0(\lambda) + A_0^* - A_0^*| = \\ &= \left| \frac{1}{2} |\omega_0(\lambda) + A_0^*| + \frac{1}{2} |\omega_0(\lambda) + A_0^*| - |A_0^*| \right|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$. Тогда при $|\lambda| = r \geq r_5$ по формуле (1.29')

$$\frac{1}{2} |\omega_0(\lambda) + A_0^*| = \frac{1}{2} |\lambda|^{-1} |1 + O(\lambda^{-1})| e^{\operatorname{Re} \lambda} \geq |A_0^*|, \quad (2.7)$$

Поэтому из формулы (2.6) следует, что при $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$, $|\lambda| =$

$= r \geq r_5$,

$$|\omega_0(\lambda)| \geq |A_0^*|. \quad (2.8)$$

Пусть теперь $\frac{\pi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \theta(r, z)$. Тогда формула (1.73) непосредственно дает

$$|\omega_0(\lambda)| \geq |A_0^*|.$$

Отсюда, учитывая асимптотическую формулу (1.31), при $|\arg \lambda| \leq \theta(R_n, z) = \theta_n$ получаем утверждение (2.4) леммы.

Докажем теперь справедливость оценки (2.5).

Из асимптотики функции $\omega(\lambda) - A_0$ с учетом неравенства (1.74) нетрудно усмотреть, что эта оценка верна при $|\lambda| = r \geq r_0$, но лишь для значений

$$\theta(r, -z) \leq |\arg \lambda| < +\infty.$$

Остается показать, что это неравенство имеет место также при $|\lambda| = R_n$ ($n \geq n_1$) для значений

$$\theta(R_n, z) \leq |\arg \lambda| \leq \theta(R_n, -z).$$

Обозначим точку пересечения окружности $|\lambda| = R_k$ с кривой $L(x)$ ($|x| \leq \log 3 = z$) через $\mu_k(x) = R_k e^{i\theta_k(x)}$. Покажем, что при $k \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$iR_k \sin \theta_k(x) = iR_k + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right) \quad (2.9)$$

равномерно относительно $|x| \leq z$.

Точка $\mu_k(x) \in L(x)$, поэтому

$$iR_k \cos \theta_k(x) - i \log R_k + \log |1 + \varphi(\lambda)| - \log |A_0^*| e^x = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда вытекает, что

$$\cos \theta_k(x) = O\left(\frac{\log R_k}{R_k}\right) \quad (2.11)$$

и

$$\sin \theta_k(x) = 1 + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k^2}\right) \quad (2.12)$$

равномерно относительно $|x| \leq z$. Следовательно, формула (2.9) доказана.

Относительно аргумента $\theta_k(x)$ точки $\mu_k(x)$ можем кроме того утверждать, что при $|x| \leq z$ равномерно

$$\theta(R_k, z) \leq \theta_k(x) \leq \theta(R_k, -z)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k(x) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

причем по (2.11)

$$\theta_k(x) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\log R_k}{R_k}\right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Поэтому

$$p_k(x) = R_k e^{i\frac{\pi}{2}} \left[1 + O\left(\frac{\log R_k}{R_k}\right) \right]. \quad (2.15)$$

Но при $\lambda = p_k(x)$, $|x| \leq z$, $k \rightarrow \infty$, из (1.29), (2.9) и (2.14)

$$\begin{aligned} \arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*] &= -\gamma \theta_k(x) + IR_k \sin \theta_k(x) + \arg [1 + \varphi(\lambda)] = \\ &= IR_k - \frac{\pi \gamma}{2} + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда, согласно выбору чисел R_k , при $\lambda = p_k(x)$, $|x| \leq z$, $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\cos [\arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*]] = O(1) \cos \arg A_0^*, \quad (2.17)$$

$$\sin [\arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*]] = O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right) \sin \arg A_0^*. \quad (2.18)$$

Значит, для функции

$$\omega_0(\lambda) + A_0^* = |\lambda|^{-1} [1 + \varphi(\lambda)] e^{i\gamma} e^{i \arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*]}, \quad (2.19)$$

с учетом (2.15) и (2.16), имеем

$$\omega_0(p_k(x)) + A_0^* = -A_0^* e^x \left(1 + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right) \right), \quad (2.20)$$

так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_0(p_k(x)) = -A_0^* (1 + e^x) \quad (2.21)$$

равномерно относительно $|x| \leq \log 3 = z$.

Отсюда следует, что при $k > k_0$

$$|\omega_0(p_k(x))| \geq C_3 |A_0^*|, \quad |x| \leq z, \quad (2.22)$$

а это с учетом формулы (1.31) означает утверждение леммы (2.5) для $|\lambda| = R_n$ в случае

$$\theta(R_n, z) \leq |\arg \lambda| \leq \theta(R_n, -z) \quad (n > n_1).$$

Таким образом, лемма 5 для случая $A_0 \neq 0$ доказана.

Доказательство леммы для случая $A_0 = 0$ в основном ничем не отличается от вышеприведенного доказательства. Нужно лишь в соответствующих местах использовать формулы (1.29'), (1.31'), (1.32') и (1.59').

2°. Сформулируем, наконец, основной результат настоящей статьи — теорему о разложении.

Теорема. Если функция $f(x)$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, l]$, то равномерно относительно $x \in [\varepsilon, l - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$) справедливы следующие разложения

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^l f(t) Z_k(t) dt \right) Y_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^l f(t) Y_k(t) dt \right) Z_k(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где функции $Y_k(x)$ и $Z_k(x)$ определены выше.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < R < +\infty$ и $\varphi > \pi$. Обозначим через $\Gamma(\varepsilon, R, \varphi)$ пробегаемый в положительном направлении замкнутый контур, лежащий на римановой поверхности $-\infty < \arg \lambda < +\infty$, $0 < |\lambda| < +\infty$, и состоящий из дуг $|\lambda| = R$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$, и $|\lambda| = \varepsilon$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$, и из отрезков $\varepsilon \leq |\lambda| \leq R$ лучей $\arg \lambda = \pm \varphi$. Имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varepsilon, R, \varphi)} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = \sum_{k=1}^{q_n} Y_k(x) Z_k(t), \quad (2.24)$$

где $q_n = \sum_{j=1}^n p_j$, p_j — кратность нуля λ_j функции $\omega(\lambda) - A_0$.

Эта формула доказывается несложными вычислениями логарифмического вычета функции $\frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0}$ с учетом формул (1.12), (1.13), (1.14) и определения функций $Y_k(x)$ и $Z_k(x)$.

Из формул (1.17) и (1.18) при $|\arg \lambda| \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, и (1.21), (1.22) при $\beta \leq |\arg \lambda| < +\infty$ нетрудно заметить, что в формуле (2.24) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, обозначив $\Gamma_n(\varphi) = \Gamma(0, R_n, \varphi)$, получим

$$J(\varphi, n) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(\varphi)} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = \sum_{k=1}^{q_n} Y_k(x) Z_k(t), \quad (2.25)$$

причем в левой части имеем абсолютно сходящийся интеграл.

Итак, чтобы доказать теорему, займемся исследованием интеграла $J(\varphi, n)$ ($\varphi > \pi$).

Разобьем интеграл $J(\varphi, n)$ на следующие интегралы

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ -\varphi < \arg \lambda < \varphi}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{R_n \\ (\arg \lambda = -\varphi)}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda + \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{R_n \\ (\arg \lambda = \varphi)}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Интеграл J_1 в свою очередь разобьем на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ \frac{\pi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \varphi}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = J_4 + J_5.
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Для рассмотрения интеграла J_4 выясним асимптотику функции

$$K(x, t, \lambda) = \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} \quad \text{при} \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из формул (1.17) и (1.18) леммы 3 следует, что при $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 y(x, \lambda) z(t, \lambda) &= \left\{ \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{-(\mu_{j_1} + \nu_{j_2})} \right\} e^{(x+t-t)x} + \\
 &+ \frac{C_3 e^{(t-t)x}}{\log \lambda} \left\{ \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\nu_j} \right\} + \frac{C_3 e^{t x}}{\log \lambda} \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-\mu_j} \right\} + O\left(\frac{1}{\log^2 \lambda}\right).
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Или, согласно обозначениям (1.26) и (1.28),

$$\begin{aligned}
 \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda} &= M \lambda^{-\tau} e^{(x+t-t)x} [1 + \varphi_1(\lambda)] + \\
 &+ \frac{C_3 e^{(t-t)x}}{\lambda^{\frac{\nu_{j_2}+1}{2}} \log \lambda} + \frac{C_3 e^{t x}}{\lambda^{\frac{\mu_{j_1}+1}{2}} \log \lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda \log^2 \lambda}\right) =
 \end{aligned}$$

$$= e^{(x-t)\lambda} \{ M\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi_1(\lambda)] e^{t\lambda} - A_0 \} + A_0 e^{(x-t)\lambda} + \frac{C_0 e^{(t-t)\lambda} [1 + \varphi_2(\lambda)]}{\lambda^{\gamma_{j_0} + 1} \log \lambda} + \\ + \frac{C_3 e^{t\lambda} [1 + \varphi_3(\lambda)]}{\lambda^{\mu_{j_0} + 1} \log \lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda \log^2 \lambda}\right), \quad (2.29)$$

где функции $\varphi_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi_i(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}) \quad (\alpha > 0). \quad (2.30)$$

Заметим теперь, что при $|\lambda| = R_n$, $n \geq n_4$,

$$|\omega(\lambda) - A_0|^{-1} = \left[\left\{ \sum_{j_0, j_1=1}^n a_{j_0} b_{j_1} \lambda^{-(\mu_{j_0} + \gamma_{j_1} + 1)} \right\} e^{t\lambda} - A_0 \right]^{-1} + \\ + O\left(\frac{|\lambda|^{\gamma_1} e^{-2\operatorname{Re} \lambda}}{\log \lambda}\right) = [M\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi_1(\lambda)] e^{t\lambda} - A_0]^{-1} + \\ + O\left(\frac{|\lambda|^{\gamma_1} e^{-2\operatorname{Re} \lambda}}{\log \lambda}\right). \quad (2.31)$$

Из формул (2.29) и (2.30) имеем

при $|\lambda| = R_n$ ($n \geq n_4$), $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} = e^{(x-t)\lambda} + \frac{A_0 e^{(x-t)\lambda}}{\lambda^{-\gamma} \Phi(\lambda)} + \frac{C_0 e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma+\gamma_{j_0}} \log \lambda \Phi(\lambda)} + \\ + \frac{C_3 e^{(x-t)\lambda}}{\lambda^{1-\gamma+\mu_{j_0}} \log \lambda \Phi(\lambda)} + O\left(\frac{e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma} \log^2 \lambda}\right) = \\ = \sum_{k=1}^4 \Phi_k(x, t, \lambda) + O\left(\frac{e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma} \log^2 \lambda}\right), \quad (2.32)$$

где

$$\Phi(\lambda) = M - A_0 \lambda^{-\gamma} e^{-t\lambda} [1 + \varphi_1(\lambda)]^{-1}, \quad (2.33)$$

откуда ясно, что при $|\lambda| = R_n$, $n \geq n_5$,

$$|\Phi(\lambda)| \geq C_{10} > 0. \quad (2.34)$$

Из формулы (2.32) следует, что

$$J_4 = \int_{|\lambda|=R_n} K(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^4 \int_{|\lambda|=R_n} \Phi_k(x, t, \lambda) d\lambda + \\ + \int_{|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}} \dots \int_{|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$+ O \left(\frac{1}{R_n^{1-\gamma}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-iR_n \cos \varphi}}{(\log R_n + i\varphi)} d\varphi \right). \quad (2.35)$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}}} \Phi_1(x, t, \lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x-t)R_n e^{i\varphi}} iR_n e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{(x-t)R_n e^{i\varphi}}}{x-t} d(R_n e^{i\varphi}(x-t)) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{(x-t)R_n e^{i\varphi}} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{x-t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{(x-t)R_n i} - e^{-(x-t)R_n i}}{x-t} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x-t)R_n}{x-t}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

Предположим теперь, что $x \in [z, t-z]$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), $t \in [0, l]$. Тогда, ввиду того, что $\gamma < 0$,

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} \\ |\lambda| = R_n}} \Phi_\varepsilon(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} \\ |\lambda| = R_n}} \frac{A_0 e^{(x-t-l)\lambda}}{\lambda^{-1}\Phi(\lambda)} d\lambda, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon| &\leq C_{11} R_n^{\gamma+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x-t-l)R_n \cos \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq C_{11} R_n^{\gamma+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\varepsilon R_n \cos \varphi} d\varphi = O(R_n^\gamma) = o(1). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Аналогично, с учетом асимптотики функций $\Phi_k(x, t, \lambda)$ ($k=3, 4$), показывается, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} \Phi_k(x, t, \lambda) d\lambda = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (k=3, 4) \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} O\left(\frac{e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma} \log^2 \lambda}\right) d\lambda = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.40)$$

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$$

В итоге из формул (2.36), (2.38), (2.39) и (2.40) заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} K(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \frac{\sin R_n(x-t)}{x-t} + o(1), \quad (2.41)$$

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$$

Введем теперь в рассмотрение следующую функцию

$$u_n(x, \delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \left\{ \int_{t-R_n^{-\delta}}^t f(t) z(t, \lambda) dt \right\} d\lambda, \quad (2.42)$$

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$$

где $f(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, l]$, а число δ определяется согласно условию

$$1 - \delta(\tau_j + 1) < 0. \quad (2.43)$$

Заметим, что условие (2.43) можно подробнее записать так

$$\delta > \frac{1}{1 + \tau_j} > \frac{-\beta_j}{1 + \tau_j} > 1 - \gamma \geq 1. \quad (2.43')$$

Этим видом записи мы будем пользоваться в дальнейшем.

Докажем, что равномерно относительно $x \in [z, l-z]$ ($0 < z < \frac{l}{2}$) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, \delta) = 0. \quad (2.44)$$

Пусть $\lambda = R_n e^{i\varphi}$ ($n \geq n_0$), где $|\varphi| < \varphi_0$ ($\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$), тогда из определения (1.7) функции $z(t, \lambda)$ следует, что при $0 \leq t \leq l$, $|\lambda| > 0$,

$$|z(t, \lambda)| \leq C_{12} R_n^{-\tau_j} |1 + \varphi(R_n e^{i\varphi})| e^{(l-t)R_n \cos \varphi} + \frac{C_{13}(l-t)^{\tau_j}}{1 + |\log(l-t)R_n e^{i\varphi}|}. \quad (2.45)$$

Из этой оценки можем написать, что при $\lambda = R_n e^{i\psi}$ ($n \geq n_0$), $|\psi| \leq \alpha_0$, $(\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{l-R_n^{-\delta}}^l f(t) z(t, \lambda) dt \right| &\leq C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}} \int_{l-R_n^{-\delta}}^l e^{(l-t) R_n \cos \psi} dt + \\ &+ C_{15} \int_{l-R_n^{-\delta}}^l \frac{(l-t)^{\tau_{j_0}} dt}{1 + |\log R_n + \log(l-t) + i\psi|} \leq \\ &\leq C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}-\delta} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + C_{15} \int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{x^{\tau_{j_0}} dx}{1 + |\log R_n + i\psi + \log x|} \leq \\ &\leq C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}-\delta} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + C_{15} R_n^{-\delta} (\tau_{j_0} + 1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

В процессе вывода этого неравенства мы использовали оценку

$$\begin{aligned} \max \{e^{(l-t) R_n \cos \psi}\} &\leq \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} \\ \text{при } |\psi| &\leq \alpha_0, \quad t \in [l - R_n^{-\delta}, l]. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что по асимптотической формуле (1.17) имеем

$$\text{при } \lambda = R_n e^{i\psi} \quad (n \geq n_1), \quad |\psi| \leq \alpha_0 \quad \text{и} \quad x \in [z, l],$$

$$|y(x, \lambda)| \leq C_{16}(z) R_n^{-\mu_{j_0}} e^{x R_n \cos \psi} + \frac{C_{17}(z)}{|\log R_n + i\psi|}, \quad (1.17')$$

причем постоянные $C_{16}(z)$ и $C_{17}(z)$ не зависят от α_0 .

Введем обозначение

$$R(x, \lambda) = \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \int_{l-R_n^{-\delta}}^l f(t) z(t, \lambda) dt, \quad (2.47)$$

из оценок (2.4), (2.46) и (1.17') будем иметь, что при

$$\lambda = R_n e^{i\psi} \quad (n \geq n_1), \quad |\psi| \leq \alpha_0 \quad \text{и} \quad x \in [z, l - z]$$

$$\begin{aligned} |R(x, \lambda)| &\leq [C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}-\delta} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + C_{15} R_n^{-\delta} (\tau_{j_0} + 1)] \times \\ &\times \left[C_{16}(z) R_n^{-\mu_{j_0}} e^{x R_n \cos \psi} + \frac{C_{17}(z)}{|\log R_n + i\psi|} \right] R_n^{\tau_{j_0}} e^{-i R_n \cos \psi} \leq \\ &\leq C_{15}(z) R_n^{-\delta-\tau_{j_0}-\mu_{j_0}+\tau_{j_0}} e^{(x-l) R_n \cos \psi} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + \\ &+ C_{19}(z) R_n^{-\mu_{j_0}-\delta} (\tau_{j_0} + 1) + e^{(x-l) R_n \cos \psi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{20}(\varepsilon) R_n^{-\delta-\tau_{j_k}+\gamma} e^{-iR_n \cos \psi} \frac{\max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\}}{|\log R_n + i\psi|} + \\
& + C_{21}(\varepsilon) R_n^{-\delta(\tau_{j_k}+1)+\gamma} \frac{e^{-iR_n \cos \psi}}{|\log R_n + i\psi|}.
\end{aligned} \quad (2.48)$$

Докажем теперь, что равномерно относительно $x \in [z, l-z]$ имеет место формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda|=R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} R(x, \lambda) d\lambda = 0. \quad (2.49)$$

Для этой цели воспользуемся очевидным неравенством

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-kR_n \cos \psi} d\psi \leq \frac{C_{22}}{kR_n} \quad (k > 0) \quad (2.50)$$

и оценкой (2.48). Тогда при $x \in [z, l-z]$ будем иметь

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda|=R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} R(x, \lambda) d\lambda \right| \leq C_{23}(\varepsilon) \left[R_n^{-\delta-\tau_{j_k}-\mu_{j_k}+\gamma} + \right. \\
& \left. + R_n^{-\mu_{j_k}-\delta(\tau_{j_k}+1)+\gamma} + \frac{R_n^{-\delta-\tau_{j_k}+\gamma}}{\log R_n} + \frac{R_n^{-\delta(\tau_{j_k}+1)+\gamma}}{\log R_n} \right].
\end{aligned} \quad (2.51)$$

Из условий (1.27) и (2.43'), учитывая, что по (1.26)

$$\gamma = \tau_{j_k} + \mu_{j_k} + 1, \quad (1.26')$$

получим

$$\begin{aligned}
& -\delta - \tau_{j_k} - \mu_{j_k} + \gamma = 1 - \delta < 0, \\
& -\mu_{j_k} - \delta\tau_{j_k} - \delta + \gamma = \tau_{j_k} + 1 - \delta\tau_{j_k} - \delta = (1-\delta)(1+\tau_{j_k}) < 0, \\
& -\delta - \tau_{j_k} + \gamma = \mu_{j_k} + 1 - \delta < 0, \\
& -\delta(\tau_{j_k}+1) + \gamma < 0.
\end{aligned} \quad (2.52)$$

Отсюда следует, что утверждение (2.49) справедливо.

Далее, пусть аргумент ψ числа λ изменяется в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до θ_n , $x \in [z, l-z]$. Заметим, что по формуле (2.14)

$$\left| \vartheta_n - \frac{\pi}{2} \right| < C_{24} \frac{\log R_n}{R_n}, \quad (2.53)$$

откуда получим

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\vartheta_n} e^{-kR_n \cos \psi} d\psi &\leq \left(\vartheta_n - \frac{\pi}{2} \right) e^{-kR_n \cos \vartheta_n} \leq \\ &\leq C_{24} \frac{e^{-kR_n \cos \vartheta_n}}{R_n} \log R_n \quad (k > 0). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Кроме того, из оценки (2.4) следует, что

$$e^{iR_n \cos \psi} \geq C_{25} R_n^{\gamma} (|A_0^*| + |A_1^*| |\log iR_n e^{i\psi}|^{-1}).$$

Поэтому неравенство (2.54) даст

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\vartheta_n} e^{-kR_n \cos \psi} d\psi \leq C_{26} R_n^{\frac{k}{l} \gamma - 1} \log R_n (|A_0^*| + |A_1^*| |\log iR_n e^{i\psi}|^{-1})^{-\frac{k}{l}}. \quad (2.55)$$

Наконец, из оценки (2.48) и из (2.55) вытекает, что при $x \in [z, l - \varepsilon]$ справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda \right| &\leq C_{27}(\varepsilon) [R_n^{-\delta - \tau_{j_0} - \mu_{j_0} + \frac{\varepsilon}{l} \gamma} + \\ &+ R_n^{-\mu_{j_0} - \delta(\tau_{j_0} + 1) + \frac{\varepsilon}{l} \gamma} + \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_0}}}{\log R_n} + \\ &+ \frac{R_n^{-\delta(\tau_{j_0} + 1)}}{\log R_n}]. \end{aligned}$$

Вновь, учитывая условие (2.43') и формулу (1.26'), получим

$$\begin{aligned} -\delta - \tau_{j_0} - \mu_{j_0} &= -\delta + 1 - \gamma < 0, \\ -\mu_{j_0} - \delta(\tau_{j_0} + 1) &< 0, \\ -\delta - \tau_{j_0} &< 0, \\ -\delta(\tau_{j_0} + 1) &< 0. \end{aligned} \quad (2.52')$$

Из (2.52') вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda = 0, \quad (2.49')$$

$$\frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| < \theta_n$$

Пусть теперь $|\lambda| = R_n$, $\theta_n \leq |\arg \lambda| < \alpha_0$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$.

Для этого случая, если учесть формулу (2.5), оценку (2.48) сможем переписать так

$$|R(x, \lambda)| \leq C_{28}(\varepsilon) [R_n^{-\delta - \mu_{j_0} - \tau_{j_0}} e^{x R_n \cos \psi} + R_n^{-\mu_{j_0} - \delta (\tau_{j_0} + 1)} e^{x R_n \cos \psi} +$$

$$+ \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_0}}}{\log R_n} + \frac{R_n^{-\delta (\tau_{j_0} + 1)}}{\log R_n}] . \quad (2.48')$$

Далее, из неравенства

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} e^{x R_n \cos \psi} d\psi \leq \frac{C_{29}(\varepsilon)}{R_n}$$

будем иметь

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} e^{x R_n \cos \psi} d\psi \leq \frac{C_{30}(\varepsilon)}{R_n}, \quad x \in [\varepsilon, l],$$

поэтому

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda \right| \leq C_{31}(\varepsilon) \left[R_n^{-\delta - \tau_{j_0} - \mu_{j_0}} + \right.$$

$$\left. + R_n^{-\mu_{j_0} - \delta (\tau_{j_0} + 1)} + \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_0} + 1}}{\log R_n} + \frac{R_n^{-\delta (\tau_{j_0} + 1) + 1}}{\log R_n} \right] .$$

Как и выше, с учетом условия (2.43') получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda = 0, \quad (2.49'')$$

$$\theta_n \leq |\arg \lambda| < \alpha_0$$

Наконец, осталось разобрать случай, когда $|\lambda| = R_n$, $\alpha_0 \leq |\arg \lambda| < \varphi$.

Здесь из асимптотических формул (1.21), (1.22) и оценки (2.5) нетрудно заметить, что

$$\int_{l-R_n^{-\delta}}^l f(t) z(t, \lambda) dt = O(R_n^{-\delta (\tau_{j_0} + 1)}), \quad (2.56)$$

и

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda \right| = O \left(R_n^{-2(\alpha_n + 1) + 1} \right), \quad (2.56')$$

$$\alpha_n < |\arg \lambda| < \pi$$

откуда вновь в силу условия (2.43) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda = 0. \quad (2.49'')$$

$$\alpha_n < |\arg \lambda| < \pi$$

Наконец, из формул (2.49), (2.49'), (2.49'') и (2.49''') следует справедливость утверждения (2.44).

Приступим к исследованию интеграла J_5 . Причем для получения более тонких оценок займемся рассмотрением интеграла

$$J_5 = \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) J_5 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda =$$

$$\frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| < \pi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda +$$

$$\frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| < \alpha_n$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = J_1 + J_6,$$

$$\alpha_n < |\arg \lambda| < \pi$$

где α_0 — произвольное фиксированное число, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$$

Прежде всего, используя то обстоятельство, что $f(t)$ — функция ограниченной вариации, оценим интеграл

$$J_9 = \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} f(t) z(t, \lambda) dt.$$

Из асимптотической формулы (1.18) и формулы

$$\nu(z, \mu) = \frac{d}{dz} \nu(z; \mu + 1)$$

будет следовать

$$\begin{aligned} J_9 &= C_{32} \lambda^{-\tau_{j_n}} [1 + \varphi_3(\lambda)] \frac{1}{\lambda} \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} f(t) d\nu((I-t)\lambda; \tau_{j_n} + 1) = \\ &= C_{32} \lambda^{-\tau_{j_n}-1} [1 + \varphi_3(\lambda)] \left\{ f(I-R_n^{-\varepsilon}) \nu(R_n^{-\varepsilon} \lambda; \tau_{j_n} + 1) - f(0) \nu(I\lambda; \tau_{j_n} + 1) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} \left[e^{(I-t)\lambda} + O\left(\frac{1}{\log(I-t)\lambda}\right) \right] df(t) \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где функция $\varphi_3(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.30).

При $\lambda = R_n e^{i\psi}$

$$\begin{aligned} |J_9| &\leq C_{33} R_n^{-\tau_{j_n}-1} \left[C_{34} e^{R_n^{1-\varepsilon} \cos \psi} + C_{35} e^{IR_n \cos \psi} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} e^{(I-t) R_n \cos \psi} d|f(t)| + O\left(\frac{1}{\log R_n}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Используя эту оценку, а также формулы (1.17) и (2.5), для интеграла J_7 получим

$$\begin{aligned} |J_7| &\leq C_{36} \int \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ \frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| \leq \sigma_0}} \left[R_n^{-\nu_{j_n}} e^{x R_n \cos \psi} + O\left(\frac{1}{\log R_n}\right) \right] R_n^{-\tau_{j_n}-2} \times \\ &\times \left[C_{34} e^{R_n^{1-\varepsilon} \cos \psi} + C_{35} e^{IR_n \cos \psi} + \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} e^{(I-t) R_n \cos \psi} d|f(t)| + \right. \end{aligned}$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log R_n}\right) \Big| |d\lambda|. \quad (2.59)$$

Покажем, что интеграл J_7 стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Действительно, если обозначим

$$J_{10} = R_n^{-\mu_0 - \tau_0 - 2} \int_0^{l - R_n^{-6}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi_0} e^{(x+t-t)R_n \cos \psi} R_n d\psi dt,$$

то из оценки (2.53) при $x \in [z, l - z]$ будем иметь, что

$$J_{10} = R_n^{-\gamma-1} C_{37}(z). \quad (2.60)$$

Поэтому из (1.27') следует, что $J_{10} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично можно показать, что и другие слагаемые интеграла J_7 стремятся к нулю. Таким образом, $J_7 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. (2.61)

Займемся теперь асимптотикой интеграла J_8 . При $z_0 < |\arg \lambda| \leq \varphi$, $|\lambda| = R_n$, асимптотика функций $y(x, \lambda)$, $z(t, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$ задается формулами (1.21), (1.22) и (1.23).

Из этих формул следует, что при $x \in [z, l]$ и $t \in [0, l - R_n^{-6}]$

$$y(x, \lambda) z(t, \lambda) = \frac{C_{33}(x, t)}{\log \lambda} + \frac{C_{33}(x, t)}{\log^2 \lambda} + \dots \quad (2.62)$$

Но по формуле (2.5)

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq C_{10},$$

поэтому

$$\left| \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \right| \leq \frac{|C_{31}(x, t)|}{|\log^2 \lambda|} + \frac{|C_{32}(x, t)|}{|\log^3 \lambda|} + \dots, \quad (2.63)$$

где все $|C_k(x, t)| \leq C_{43}$ равномерно по x и t в отрезках $x \in [z, l]$ и $t \in [0, l - R_n^{-6}]$.

Значит для интеграла J_8 при $\lambda = R_n e^{i\varphi}$, $z_0 < \varphi < \pi$, можем написать

$$\begin{aligned} |J_8| &\leq \int_0^{l - R_n^{-6}} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi_0} \frac{|C_{31}(x, t)|}{\log^2 R_n + \psi^2} d\psi \right] dt + \\ &+ O\left(\int_0^{l - R_n^{-6}} |f(t)| \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi_0} \frac{|C_{32}(x, t)|}{(\log^2 R_n + \psi^2)^2} d\psi \right] dt \right) = \\ &= O\left(\frac{1}{\log^2 R_n} \right) + O\left(\frac{1}{\log^3 R_n} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Переходя к пределу в формуле (2.64) при $n \rightarrow \infty$, получим, что

$$J_8 = o(1). \quad (2.65)$$

Из формул (2.61) и (2.65) следует, что и для интеграла J_6 имеет место формула

$$J_6 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

Нам осталось рассмотреть интегралы J_2 и J_3 .

Оценим интеграл

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{R_n} \frac{y(x, Re^{-i\varphi}) z(t, Re^{-i\varphi})}{Re^{-i\varphi} [\omega(Re^{-i\varphi}) - A_0]} d(Re^{-i\varphi}). \quad (2.67)$$

Согласно формуле (2.62)

$$\begin{aligned} J_2 &= C_{43}(x, t) \int_0^{R_n} \frac{dR}{R \log^2(Re^{-i\varphi})} + O\left(\int_0^{R_n} \frac{dR}{R \log^3(Re^{-i\varphi})}\right) = \\ &= C_{43}(x, t) \int_0^{R_n} \frac{d \log R}{(\log R - i\varphi)^2} + O\left(\int_0^{R_n} \frac{d \log R}{(\log R - i\varphi)^3}\right) = \\ &= C_{44}(x, t) \frac{1}{\log R - i\varphi} \Big|_0^{R_n} + O\left(\frac{1}{(\log R - i\varphi)^2} \Big|_0^{R_n}\right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Из (2.68) очевидно, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_2 \rightarrow 0. \quad (2.69)$$

В случае интеграла J_3 дело обстоит аналогично.

Заметим теперь, что из формулы (2.25) следует

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(\varphi)} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{I-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = \\ &= \sum_{k=1}^{q_n} \left(\int_0^{I-R_n^{-1}} f(t) Z_k(t) dt \right) Y_k(x), \end{aligned} \quad (2.70)$$

где $q_n = \sum_{j=1}^n p_j$, а $[p_j]$ — кратность нулей $[\lambda_j]$ функции $\omega(\lambda) - A_0$. Так как нули этой функции, начиная с некоторого, простые, то $q_n = n + N_1$, $n \geq N$, N_1 — фиксированное число.

Учитывая, далее, выбор чисел $[R_n]$, нетрудно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l f(t) \frac{\sin R_n(x-t) - \sin \frac{\pi n}{l}(x-t)}{x-t} dt = 0 \quad (2.71)$$

равномерно по $x \in [z, l - \varepsilon]$.

Наконец, переходя в формуле (2.70) к пределу при $n \rightarrow \infty$, с учетом оценок всех интегралов и формул (2.44) и (2.71), получим требуемое равенство (2.23) теоремы.

В заключение отметим, что вышесформулированную теорему можно распространить также на некоторые другие классы функций. Например, для функций, удовлетворяющих условию

$$\frac{f(t)}{l-t} \in L_1(0, l),$$

можно доказать теорему о равносходимости биортогональных разложений по системам (1.15) с обычными рядами Фурье.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 18 IX 1961

Ա. Ա. ԿԻՏԲԱԿՅԱՆ

ՎԵՐԱԾՈՒՄՆԵՐ ՎՈՒՏԵՐԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐՈՎ

Ա. Ա. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մ. Մ. Զբոսառության [1] աշխատության մեջ կառուցված է L_2 դասում
Ֆուրիեի $e^{i\lambda x}$ և վոլանդերի

$$\gamma(z; \mu) = \int_0^\infty \frac{z^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)} dt$$

կորիզներով իրականացվող աղիղ և հակադարձ ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունը:

Ներկա աշխատության մեջ ստացված արդյունքները հանդիսանում են [1] աշխատության արդյունքների զիսկրեա անալոգները վերջավոր հատվածում:

§ 1-ում վոլանդերի ֆունկցիաներից $[0, l]$ վերջավոր հատվածում կառուցված են բիօրթոգոնալ սիստեմներ:

§ 2-ում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Եթե $f(x)$ -ը սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիա է $[0, l]$ հատվածում, ապա հավասարաչափ $x \in [z, l - \varepsilon]$ -ի նկատմամբ տեղի ունեննում են վրա վերածումները՝

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f(t) Z_k(t) dt \right) Y_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f(t) Y_k(t) dt \right) Z_k(x),$$

որտեղ $Y_k(x)$ -ը և $Z_k(x)$ -ը վնդակերպի ֆունկցիաներից կազմված ֆունկցիաներ են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра. Известия АН СССР, серия математическая, **24**, 1960, 387—420.
2. Джрбашян М. М. и Нерсисян А. Б. О построении некоторых специальных биортогональных систем. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 5, 1959, 17—41.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблян и В. С. Тоноян

Некоторые задачи кручения валов переменного сечения со смешанными граничными условиями

Задача кручения тела вращения, когда на части поверхности тела заданы перемещения, а на остальной части — касательные напряжения, рассматривалась в работах Я. С. Уфлянда [1], Д. В. Грилицкого [2], Ч. Даса [3, 4] и других [5].

В первой работе рассмотрено кручение неограниченного упругого слоя, скручиваемого посредством поворота сцепленного с ним жесткого штампа. В работе [2] рассмотрена задача кручения двухслойной упругой среды, которая скручивается вследствие поворота жесткого кругового штампа, связанного с упругой средой с помощью сцепления. В работах Ч. Даса [3, 4] рассмотрены задачи кручения конического составного вала с закрепленными торцами, скручиваемого под действием касательных напряжений, приложенных на конической поверхности.

В настоящей работе рассмотрены некоторые задачи кручения валов переменного сечения, когда скручивание осуществляется жестким круглым штампом или жесткой обоймой, запрессованной на части поверхности вала. Решения этих задач представляются рядами по бесселевым и тригонометрическим функциям [8, 9], коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией вполне регулярных систем линейных уравнений [10] и оценить неизвестные коэффициенты сверху и снизу с любой точностью, вследствие чего предлагаемые решения этих задач можно считать точными.

§ 1. Постановка задачи

Задачу о кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой будем решать при помощи функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет дифференциальному уравнению [6]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.1)$$

На границе области осевого сечения должны быть заданы: либо нормальные производные функции перемещения, либо сама функция перемещения, либо на некоторых частях поверхности вала — нормальные производные $\Psi(r, z)$, а на остальных частях — функция перемещения.

Касательные напряжения и перемещение v определяются через функцию перемещения $\Psi(r, z)$ формулами

$$\tau_r = Gr \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \tau_z = Gr \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v = r \Psi(r, z), \quad (1.2)$$

где G — модуль сдвига.

Решив уравнение (1.1) методом разделения переменных, для функции $\Psi(r, z)$ получим следующую фундаментальную систему [6]

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \frac{1}{r} [A I_1(\lambda r) + B K_1(\lambda r)] [C \sin \lambda z + D \cos \lambda z], \\ \frac{1}{r} [A \sinh \mu z + B \cosh \mu z] [C J_1(\mu r) + D Y_1(\mu r)], \end{cases} \quad (1.3)$$

где λ и μ — произвольные действительные параметры. Здесь $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — функции Бесселя n -го порядка от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода, а $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода с действительным аргументом [8, 9].

Отметим, что функции

$$1, \quad z, \quad \frac{1}{r^2}, \quad \frac{z}{r^2}, \quad r^2 - 4z^2 \quad (1.4)$$

также являются решениями уравнения (1.1).

§ 2. Кручение цилиндра, закрепленного одним торцом, когда на участке боковой поверхности заданы перемещения

Рассмотрим задачу кручения цилиндра радиуса R и длины l , когда скручивание осуществляется поворотом жесткой обоймы, запрессованной на цилиндрической поверхности около одного торца цилиндра, а другой торец считается закрепленным (фиг. 1). Остальные

части поверхности цилиндра свободны от внешних усилий.

При этом граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} v(r, 0) &= 0, & \tau_z(r, l) &= 0, \\ \tau_r(R, z) &= 0 & \text{в обл. } (0 \leq z \leq s), \\ v(R, z) &= d & \text{в обл. } (s \leq z \leq l). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функцию $\Psi(r, z)$ ищем в виде

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \Psi_1(r, z) & \text{в области I } (0 \leq z \leq s; 0 \leq r \leq R), \\ \Psi_2(r, z) & \text{в области II } (s \leq z \leq l; 0 \leq r \leq R), \end{cases} \quad (2.2)$$



Фиг. 1.

где $(l-s)$ — ширина обоймы, а функции $\Psi_i(r, z)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1).

Из (2.1) и (2.2) следует, что функции $\Psi_i(r, z)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям

$$\Psi_1(r, 0) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0, \quad R\Psi_2(R, z) = d \quad (2.3)$$

и условиям сопряжения

$$\Psi_1(r, s) = \Psi_2(r, s), \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \Big|_{z=s} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \Big|_{z=s}, \quad (2.4)$$

где $\frac{d}{R}$ — угол поворота обоймы.

В силу (1.3) функции Ψ_1 и Ψ_2 представим в виде рядов Фурье — Дини [8, 9]

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, z) = & a_0 + a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} \sin \lambda_k z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \mu_k z + B_k \operatorname{ch} \mu_k z) \frac{J_1(\mu_k r)}{r}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, z) = & b_0 + b_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} \frac{I_1(\lambda_k' r)}{r} \sin \lambda_k' (z-s) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{sh} \mu_k (z-s) + B_k \operatorname{ch} \mu_k (z-s)] \frac{J_1(\mu_k r)}{r}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{где} \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{s}, \quad \lambda_k' = \frac{(2k-1)\pi}{2(l-s)}, \quad (2.7)$$

а μ_k — корни уравнения

$$J_1(xR) = 0. \quad (2.8)$$

Удовлетворив граничным условиям (2.3) и условиям сопряжения (2.4), в силу (2.7) и (2.8) получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов, входящих в (2.5) и (2.6). Разрешив эти уравнения и подставив полученные значения неизвестных коэффициентов в (2.5) и (2.6), для функций Ψ_1 и Ψ_2 окончательно получим

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, z) = & \frac{zd}{Rs} + \frac{2R}{s^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} Y_k}{\lambda_k r} \cdot \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} \sin \lambda_k z + \\ & + \frac{2m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\mu_k r} \cdot \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k s} \cdot \frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

в области $(0 < z \leq s; 0 \leq r < R)$,

$$\Psi_2(r, z) = \frac{d}{R} + \frac{2m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \mu_k(l-s)}{\mu_k r \operatorname{ch} \mu_k(l-s)} \cdot \frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \quad (2.10)$$

в области $(s < z < l; 0 \leq r \leq R)$.

Постоянные коэффициенты X_k и Y_k , входящие в выражения (2.9) и (2.10), определяются из бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + Q_p, \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k, \end{aligned} \right\} \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (2.11)$$

где введены обозначения

$$a_{pk} = \frac{2\mu_p \operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p(l-s)}{ms \cdot \operatorname{ch} \mu_p l} \cdot \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2}, \quad (2.12)$$

$$b_{pk} = \frac{2m\lambda_p I_1(\lambda_p R)}{R I_2(\lambda_p R)} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2},$$

$$Q_p = -\frac{d \operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p(l-s)}{m\mu_p R \operatorname{ch} \mu_p l}. \quad (2.13)$$

Покажем, что системы (2.11) вполне регулярны.

Пользуясь выражениями (2.12) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| &= \frac{2\mu_p \operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p(l-s)}{ms \cdot \operatorname{ch} \mu_p l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p(l-s)}{m \operatorname{ch} \mu_p l} \left(\operatorname{cth} \mu_p s - \frac{1}{\mu_p s} \right) \leq \frac{1 + e^{-2\mu_p(l-s)}}{2m}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| &= \frac{2m\lambda_p I_1(\lambda_p R)}{R I_2(\lambda_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} = m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом использованы значения рядов

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} &= \frac{s}{2\mu_p} \left(\operatorname{cth} \mu_p s - \frac{1}{\mu_p s} \right), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} &= \frac{R}{2\lambda_p} \cdot \frac{I_2(\lambda_p R)}{I_1(\lambda_p R)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

и неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} x - \frac{1}{x} &\leq 1, \\ \frac{\operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p(l-s)}{\operatorname{ch} \mu_p l} &\leq \frac{1 + e^{-2\mu_p(l-s)}}{2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Постоянное число m определяем из равенства

$$\frac{1 + e^{-2\mu_1(l-s)}}{2m} = m, \text{ т. е. } m = \sqrt{\frac{1 + e^{-2\mu_1(l-s)}}{2}}. \quad (2.17)$$

Тогда для систем (2.11) будем иметь оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| < m, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| < m < 1.$$

то-есть системы (2.11) вполне регулярны.

Из (2.13) видно, что свободные члены систем (2.11) ограничены сверху и при $p \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{p}\right)$. При $z=l$ системы (2.11) становятся регулярными. Но для этого случая легко получить точное решение поставленной задачи без применения бесконечных систем.

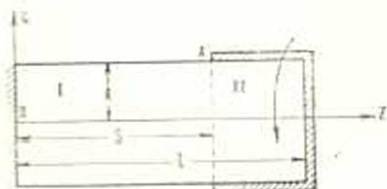
Полученное решение поставленной задачи (2.9), (2.10) можно считать также решением задач кручения цилиндра радиуса R и длиной $2l$, когда кручение осуществляется: а) кольцевой обоймой шириной $2(l-s)$, насаженной на середину цилиндрической поверхности вала, торцы которого закреплены; б) кольцевыми обоймами шириной $(l-s)$, насаженными на края цилиндрической поверхности вала.

§ 3. Кручение цилиндра, закрепленного одним торцом, когда на другом торце и участке боковой поверхности заданы перемещения

Рассмотрим задачу кручения цилиндра, когда скручивание осуществляется с помощью круглого штампа в виде чашки радиуса R и высотой $(l-s)$, насаженного на один конец цилиндра, а другой торец цилиндра считается закрепленным (фиг. 2). Для простоты принимаем, что остальные части поверхности свободны от внешних усилий.

При этом граничными условиями будут

$$\begin{aligned} v(r, 0) &= 0, & v(r, l) &= \frac{dr}{R}, \\ v_r(R, z) &= 0 \text{ в обл. } (0 \leq z \leq s), & (3.1) \\ v(R, z) &= d \text{ в обл. } (s \leq z \leq l). \end{aligned}$$



Фиг. 2.

Функцию $\Psi(r, z)$ ищем в виде (2.2). Тогда, согласно (3.1), для функций $\Psi_i(r, z)$ ($i = 1, 2$) получим следующие граничные условия

$$\Psi_1(r, 0) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad R\Psi_2(R, z) = d, \quad R\Psi_2(r, l) = d \quad (3.2)$$

и условия сопряжения (2.4).

Поступая таким же образом, как и в предыдущей задаче, для функций $\Psi_i(r, z)$ ($i=1, 2$) окончательно получим

$$\Psi_1(r, z) = \frac{zd}{Rs} + \frac{2R}{s^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k r} \cdot \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(\lambda_k R)} \sin \lambda_k z + \\ + \frac{2m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\mu_k r} \cdot \frac{\text{sh } \mu_k z}{\text{sh } \mu_k s} \cdot \frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \quad (3.3)$$

в области ($0 < z < s$; $0 \leq r \leq R$),

$$\Psi_2(r, z) = \frac{d}{R} - \frac{2m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\mu_k r} \cdot \frac{\text{sh } \mu_k (l-z)}{\text{sh } \mu_k (l-s)} \cdot \frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \quad (3.4)$$

в области ($s < z < l$; $0 \leq r \leq R$),

где

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{s}, \quad J_1(\mu_k R) = 0, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.5)$$

Неизвестные коэффициенты X_k и Y_k , входящие в выражения (3.3) и (3.4), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + Q_p, \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k, \end{aligned} \right\} \quad (p=1, 2, \dots), \quad (3.6)$$

где введены обозначения

$$a_{pk} = \frac{2\mu_p \text{sh } \mu_p (l-s) \cdot \text{sh } \mu_p s}{ms \cdot \text{sh } \mu_p l} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2}, \quad (3.7)$$

$$b_{pk} = \frac{2m \epsilon_p I_1(\epsilon_p R)}{R I_2(\lambda_p R)} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2},$$

$$Q_p = - \frac{d \cdot \text{sh } \mu_p (l-s) \cdot \text{sh } \mu_p s}{m \mu_p R \text{sh } \mu_p l}, \quad (3.8)$$

Используя суммы рядов (2.15) и неравенство

$$\frac{\text{sh } \mu_p (l-s) \cdot \text{sh } \mu_p s}{\text{sh } \mu_p l} < \frac{1}{2}, \quad (3.9)$$

для сумм модулей коэффициентов при неизвестных X_k и Y_k получим оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.10)$$

Свободные члены систем (3.6), как видно из (3.8), ограничены сверху и стремятся к нулю.

Полученные решения (3.3), (3.4) могут считаться также решениями задачи кручения цилиндра радиусом R , длиной $2l$, когда цилиндр скручивается с помощью штампов в виде чашек, закрепленных на концах цилиндра.

Такой же вид имеет решение задачи кручения круглого цилиндра, зажатого жесткой обоймой шириной $2(l-s)$ в середине цилиндрической поверхности и скручиваемого жесткими диафрагмами, спрессованными на торцах.

§ 4. Кручение цилиндра, закрепленного одним торцом, когда на некотором участке другого торца заданы перемещения

Рассмотрим кручение цилиндра радиуса R и длиной l , когда цилиндр скручивается жестким штампом радиуса s ($s < R$), закрепленным на середине одного торца цилиндра, при закрепленном втором торце (фиг. 3). Остальные части поверхности цилиндра для простоты считаем свободными от внешних нагрузок. Граничные условия для этой задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_r(R, z) &= 0, & v(r, 0) &= 0, \\ \tau_z(r, l) &= 0 \text{ в обл. } (s < r < R), \\ v(r, l) &= dr \text{ в обл. } (0 \leq r \leq s), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где d — угол поворота штампа.

Разбиваем область осевого сечения цилиндра на две части (I и II) и полагаем, что функция перемещения $\Psi(r, z)$ в этих частях принимает, соответственно, значения $\Psi_1(r, z)$ и $\Psi_2(r, z)$.

Вспомогательные функции $\Psi_i(r, z)$ ($i=1, 2$), согласно (2.2) и (4.1), должны удовлетворять уравнению (1.1), граничным условиям

$$\Psi_1(r, 0) = \Psi_2(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad \Psi_1(r, l) = d$$

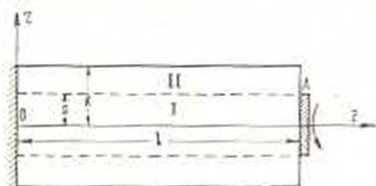
и условиям сопряжения

$$\Psi_1(s, z) = \Psi_2(s, z), \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right|_{r=s} = \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right|_{r=s}. \quad (4.3)$$

Функции $\Psi_i(r, z)$ ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, z) &= a_0 + a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{J_1(\lambda_k r)}{r} \sin \lambda_k z + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{sh} \mu_k z + B_k \operatorname{ch} \mu_k z] \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \end{aligned} \quad (4.4)$$

в области $(0 < r < s; 0 < z < l)$,



Фиг. 3.

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, z) = & b_0 + b_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^{(1)} \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} + D_k^{(1)} \frac{K_1(\lambda_k r)}{r} \right] \sin \lambda_k z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{sh} \delta_k z + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \delta_k z] \frac{W_1(\delta_k r)}{r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

в области $(s < r < R; 0 < z < l)$.

где

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \quad (4.6)$$

числа λ_k и δ_k являются, соответственно, корнями уравнений

$$J_2(xs) = 0, \quad W_2(xs) = 0, \quad (4.7)$$

а функции $W_n(\delta_k r)$ имеют вид

$$W_n(\delta_k r) = \frac{J_n(\delta_k r)}{J_n(\delta_k R)} - \frac{Y_n(\delta_k r)}{Y_n(\delta_k R)}. \quad (4.8)$$

Для функций $J_n(x)$ и $W_n(x)$ в силу (4.7) справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} \int_0^s r J_1(\lambda_k r) J_1(\lambda_p r) dr &= \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \int_0^s r J_2(\lambda_k r) J_2(\lambda_p r) dr = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k, \\ \frac{1}{2} [s J_1(\lambda_k s)]^2 & \text{при } p = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \int_s^R r W_1(\delta_k r) W_1(\delta_p r) dr &= \frac{\delta_k}{\delta_p} \int_s^R r W_2(\delta_k r) W_2(\delta_p r) dr = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k, \\ \frac{1}{2} [R W_1(\delta_k R)]^2 - [s W_1(\delta_k s)]^2 & \text{при } p = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\int_0^s r^2 J_1(\lambda_k r) dr = \int_s^R r^2 W_1(\delta_k r) dr = 0. \quad (4.11)$$

Удовлетворив граничным условиям (4.2) и условиям сопряжения (4.3), для постоянных интегрирования, входящих в выражения (4.4) и (4.5), получим следующие значения

$$a_0 = b_0 = b_1 = 0, \quad A_k^{(1)} = B_k = B_k^{(1)} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{mlX_k}{\mu_k J_1(\mu_k s) \operatorname{ch} \mu_k l}, & C_k &= \frac{(-1)^k s Y_k}{\lambda_k I_2(\lambda_k s)}, \\
 C_k^{(1)} &= \frac{(-1)^{k+1} s Y_k}{\lambda_k} \cdot \frac{K_2(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k s) - I_2(\lambda_k s) K_2(\lambda_k R)}, & (4.12) \\
 D_k^{(1)} &= \frac{(-1)^{k+1} s Y_k}{\lambda_k} \cdot \frac{I_2(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k s) - I_2(\lambda_k s) K_2(\lambda_k R)}.
 \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты X_k и Y_k определяются из бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k + Q_p \end{aligned} \right\} \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (4.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{pk} &= \frac{2\mu_p \operatorname{cth} \mu_p l}{ml} \cdot \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2}, \\ b_{pk} &= \frac{2m\lambda_p \gamma_p}{s} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$Q_p = \frac{2\sigma_1}{\mu_p l} \gamma_p, \quad (4.15)$$

$$\gamma_p = \frac{I_2(\lambda_p s)}{I_2(\lambda_p R)} \cdot \frac{I_2(\lambda_p R) K_2(\lambda_p s) - I_2(\lambda_p s) K_2(\lambda_p R)}{I_1(\lambda_p s) K_2(\lambda_p s) + I_2(\lambda_p s) K_1(\lambda_p s)}. \quad (4.16)$$

При больших λ_p пользуясь асимптотическими разложениями для функций I_n и K_n , легко показать, что

$$\gamma_p \leq \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Для сумм модулей коэффициентов систем (4.13) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| &= \frac{2\mu_p \operatorname{cth} \mu_p l}{ml} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} = \frac{1}{m}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| &= \frac{2m\lambda_p \gamma_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} = m\lambda_p \frac{I_2(\lambda_p s)}{I_2(\lambda_p R)} < \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{2} \quad \text{т. е.} \quad m = 1, 2, \quad (4.19)$$

Тогда из (4.18) и (4.19) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. системы (4.13) оказались вполне регулярными. Из (4.15) и (4.16) видно, что свободные члены систем (4.13) ограничены сверху и стремятся к нулю.

Коэффициент a_1 определяется из уравнения

$$a_1 l = d + \frac{4}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{k^2}. \quad (4.20)$$

Неизвестные коэффициенты Y_k , входящие в соотношение (4.20), определяются из вполне регулярных систем линейных уравнений (4.13) и выражаются через постоянную a_1 .

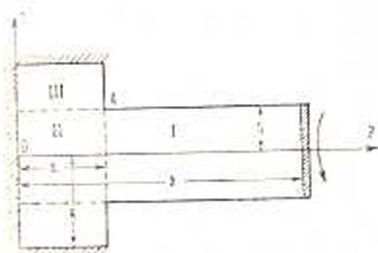
Подставив найденные из (4.13) значения неизвестных Y_k в (4.20) найдем значение a_1 .

Отметим, что решение этой задачи является также и решением задачи кручения цилиндра радиуса R и длиной $2l$, когда цилиндр скручивается двумя круглыми штампами радиуса $s < R$, симметрично закрепленными на участках торцов цилиндра.

Такой же вид будет иметь решение задачи кручения цилиндра радиуса R и длиной $2l$ с кольцевой щелью посередине глубиной $(R - s)$, когда скручивание осуществляется с помощью двух круглых штампов, прикрепленных к обоим торцам.

§ 5. Кручение ступенчатого вала, когда на участках поверхности заданы перемещения

Рассмотрим теперь кручение круглого ступенчатого вала [7], когда вал скручивается диафрагмой, закрепленной на конце тонкой части вала, а другой конец вала закреплен с помощью чашкообразного штампа, надетого на вал (фиг. 4). Для простоты считаем, что остальные части поверхности вала свободны от внешних усилий.



Фиг. 4.

Граничные условия для этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} v(r, b) = dr, \quad v(r, 0) = v(R, z) = 0, \\ \tau_z(r, a) = 0 \text{ в обл. } (s < r < R), \quad (5.1) \\ \tau_r(s, z) = 0 \text{ в обл. } (a \leq z \leq b). \end{aligned}$$

Разбиваем область осевого сечения вала на три части (I, II, III) и полагаем, что функция перемещения $\Psi(r, z)$ в этих частях принимает, соответственно, значения $\Psi_1(r, z)$, $\Psi_2(r, z)$ и $\Psi_3(r, z)$. Эти последние функции должны удовлетворять уравнению (1.1), граничным условиям (5.1), которые примут вид

$$\Psi_1(r, b) = d, \quad \Psi_2(r, 0) = \Psi_3(r, 0) = \Psi_3(R, z) = 0, \quad (5.2)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right|_{z=a} = \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

и условиям сопряжения

$$\Psi_1(r, a) = \Psi_2(r, a), \quad \Psi_2(s, z) = \Psi_3(s, z), \quad (5.3)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right|_{z=a} = \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right|_{z=a}, \quad \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right|_{r=s} = \left. \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} \right|_{r=s}.$$

Функции $\Psi_i(r, z)$ ($i = 1, 2, 3$) ищем в виде рядов Фурье-Дини [8, 9]

$$\Psi_1(r, z) = a_0 + a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} \frac{I_1(\mu_k r)}{r} \cos \mu_k (z-a) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{sh} \mu_k (z-a) + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \mu_k (z-a)] \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \quad (5.4)$$

в области $(0 < r < s; a < z < b)$,

$$\Psi_2(r, z) = b_0 + b_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} \frac{I_1(\mu_k r)}{r} \sin \mu_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_k z + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_k z) \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \quad (5.5)$$

в области $(0 < r < s; 0 < z < a)$,

$$\Psi_3(r, z) = c_0 + c_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^{(3)} \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} + D_k^{(3)} \frac{K_1(\lambda_k r)}{r} \right] \sin \lambda_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(3)} \operatorname{sh} \delta_k z + B_k^{(3)} \operatorname{ch} \delta_k z) \frac{W_1(\delta_k r)}{r} \quad (5.6)$$

в области $(s < r < R; 0 < z < a)$,

где

$$\mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(b-a)}, \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2a}, \quad (5.7)$$

а числа μ_k и δ_k являются, соответственно, корнями уравнений (4.7).
Функции $W_n(\delta_k r)$ совпадают с (4.8).

Удовлетворив граничным условиям (5.2) и условиям сопряжения (5.3), для постоянных интегрирования, входящих в (5.4)–(5.6), получим следующие выражения

$$\begin{aligned}
c_0 &= b_0 = c_1 = 0, \quad a_0 + a_1 b = d, \quad a_1 = b_1, \\
B_k^{(2)} &= B_k^{(4)} - C_k^{(1)} - A_k^{(3)} = 0, \\
A_k^{(1)} &= \frac{a Y_k}{\mu_k J_1(\mu_k s)}, \quad B_k^{(1)} = \frac{a Y_k}{\mu_k J_1(\mu_k s)} \operatorname{th} \mu_k (b-a), \\
A_k^{(2)} &= \frac{a Y_k}{\mu_k J_1(\mu_k s) \operatorname{ch} \mu_k a}, \quad C_k^{(2)} = \frac{(-1)^{k+1} m s X_k}{\mu_k I_2(\mu_k s)}, \\
C_k^{(4)} &= \frac{(-1)^{k+1} m s X_k}{\mu_k} \frac{K_1(\mu_k R)}{I_1(\mu_k R) K_2(\mu_k s) + I_2(\mu_k s) K_1(\mu_k R)}, \\
D_k^{(3)} &= \frac{(-1)^{k+1} m s X_k}{\mu_k} \frac{I_1(\mu_k R)}{I_1(\mu_k R) K_2(\mu_k s) + I_2(\mu_k s) K_1(\mu_k R)}.
\end{aligned} \quad (5.8)$$

Неизвестные коэффициенты X_k и Y_k определяются из бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + Q_p, \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k, \end{aligned} \right\} \quad p=1, 2, \dots \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{2\mu_p \mu_k}{ms} \frac{1}{\mu_k^2 - \mu_p^2}, \\ b_{pk} &= \frac{2m\mu_p \operatorname{ch} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p (b-a)}{a \operatorname{sh} \mu_p b} \frac{1}{\mu_k^2 + \mu_p^2}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$Q_p = -\frac{2b\mu_p}{m\mu_p a}, \quad (5.11)$$

$$\gamma_p = \frac{I_2(\mu_p s)}{I_1(\mu_p R)} \frac{I_1(\mu_p R) K_2(\mu_p s) + I_2(\mu_p s) K_1(\mu_p R)}{I_1(\mu_p s) K_2(\mu_p s) + I_2(\mu_p s) K_1(\mu_p s)}. \quad (5.12)$$

Пользуясь асимптотическими разложениями и рекуррентными формулами для функций $I_\alpha(x)$ и $K_\alpha(x)$, легко показать справедливость неравенства

$$\gamma_p \leq \frac{1 - e^{-2\mu_p(R-s)}}{2}. \quad (5.13)$$

Для сумм модулей коэффициентов при неизвестных X_k и Y_k систем (5.9), в силу (2.16) и (5.13), имеем следующие оценки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| &= \frac{2\mu_p \gamma_p}{ms} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 - \mu_p^2} = \frac{I_1(\mu_p s)}{m I_2(\mu_p s)} \gamma_p \leq \\ &\leq \frac{1 - e^{-2\mu_p(R-s)}}{2m}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2\mu_p \operatorname{ch} \mu_p a \cdot \operatorname{ch} \mu_p (b-a)}{a \operatorname{sh} \mu_p b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} =$$

$$= m \frac{\operatorname{sh} \mu_p a \cdot \operatorname{ch} \mu_p (b-a)}{\operatorname{sh} \mu_p b} \leq m \frac{1 + e^{-2\mu_p (b-a)}}{2} \quad (5.15)$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$\frac{1 + e^{-2\mu_1 (R-s)}}{2m} = m \frac{1 + e^{-2\mu_1 (b-a)}}{2}$$

т. е.

$$m = \sqrt{\frac{1 + e^{-2\mu_1 (R-s)}}{1 + e^{-2\mu_1 (b-a)}}} \quad (5.16)$$

Из (5.14)–(5.16) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| < \theta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| < \theta, \quad (5.17)$$

где

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{|1 + e^{-2\mu_1 (R-s)}| |1 + e^{-2\mu_1 (b-a)}|} < 1 \quad (5.17')$$

т. е. системы (5.9) всегда вполне регулярны. Из (5.11) и (5.12) следует, что свободные члены систем (5.9) ограничены сверху и стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{p}\right)$.

Для определения b_1 получим следующее уравнение

$$d - b_1 b = \frac{4m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\lambda_k^2} \quad (5.18)$$

Коэффициент b_1 определяется из уравнения (5.18) таким же образом, как коэффициент a_1 из уравнения (4.20).

Если в рассмотренных задачах вместо угла поворота штампа или обоймы нам известен крутящий момент M , действующий на них, то, вычислив момент сил, приложенных к штампу или обойме, получим формулу, позволяющую выразить неизвестное значение угла поворота через заданное значение момента.

Эта формула в задаче § 2 имеет вид

$$\frac{Ms}{4\pi GR^2 m} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{th} \mu_k (l-s)}{\mu_k}, \quad (5.19)$$

в задаче § 3—

$$\frac{Ms}{4\pi GR^2 m} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{cth} \mu_k (l-s)}{\mu_k}, \quad (5.20)$$

в задаче § 4 —

$$\frac{2IM}{\pi G s^4} = d - \frac{4}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k^2}, \quad (5.21)$$

в задаче § 5 —

$$\frac{2bM}{\pi G s^4} = d - \frac{4m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\lambda_k^2}. \quad (5.22)$$

В рассмотренных задачах свободные члены вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений имеют порядок $O\left(\frac{1}{p}\right)$. Можно доказать, что неизвестные коэффициенты X_p и Y_p этих систем имеют порядок $O\left(\frac{1}{p^2}\right)$, где $\alpha = 1 - \varepsilon$, а ε — сколь угодно малая положительная величина, не равная нулю.

Перемещение v и напряжения τ_r , τ_z выражаются рядами, члены которых стремятся к нулю, соответственно, как $O\left(\frac{1}{p^{2+1}}\right)$ и $O\left(\frac{1}{p^2}\right)$. Так как эти члены знакопеременные во всех точках осевого сечения вала, кроме точки пересечения поверхности и линии сопряжения A , то ряды, входящие в выражение для перемещения v , сходятся везде, а ряды, входящие в выражения для касательных напряжений τ_r и τ_z , сходятся во всех точках области, кроме точки A , где эти ряды расходятся.

Отметим, что последние ряды в точках поверхности и линии сопряжений участков вала сходятся слабо. Но сходимость этих рядов в точках поверхности можно улучшить, используя соответствующие бесконечные системы.

Сходимость этих рядов в точках линий сопряжений участков вала улучшается, если в формулах (1.2) величины $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ заменить соответственно величинами $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right)$ и $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right)$.

Из сказанного следует, что численные значения перемещения можно вычислить во всех точках области осевого сечения вала, а значения касательных напряжений — везде, кроме малой окрестности точки A .

Подобным же методом можно решить задачи кручения полых круглых валов из изотропного или трансверсально-изотропного материала со смешанными граничными условиями, а также задачи кручения валов, когда материалы областей I, II и III отличаются друг от друга.

Ս. Ա. Բաբլոյան, Վ. Ս. Տոնոյան

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ
ԼԻՍԵՆՆԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հողվածում տրվում են խառր եզրային պլաններում փոփոխական կտրվածքով լիսենների ոլորման մի քանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները: Ենթադրվում է, որ լիսենները ոլորվում են իրենց մակերևութների մի մասին ամրացված շտամպի ազդեցության տակ: Պարզության համար ենթադրվում է, որ լիսենների մակերևութների մնացած մասերի վրա արտաքին ոլորող ուժերը բացակայում են: Խնդիրների լուծումները ներկայացվում են շարքերով ըստ Բեսսելի և Էռանկլոնաչափական ֆունկցիաների: Ինտեգրման հաստատունները որոշվում են զծային անվերջ հավասարումների սխառմաներից: Յուրաքանչյուր դեպքում ցույց է տրվում, որ այդ սխառմաները լիովին սեղանավոր են և ունեն սահմանափակ ու զերոյի ձգտող ազատ անդամներ:

Նման խնդիրների զիտարկվել են Յ. Ս. Ուֆլյանգի [1], Դ. Վ. Գրիլիցկի [2], Զ. Դասի [3, 4], Ն. Ս. Ռոստովցևի [5] և ուրիշների աշխատություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Уфлянд Я. С. Кручение упругого слоя. ДАН СССР, **129**, № 5, 1959, 997—999.
2. Грилицкий Д. В. Кручения двояковогнутого упругого срединного. Прикладна механіка, **7**, в. 1, 1961, 89—95.
3. Das S. Ch. On the stresses in composite truncated cone due to shearing stresses on the curved surface. Indian Journ. Theoret. Phys. **4**, 1956, № 4, 89—92.
4. Das S. Ch. On the stresses in twisted composite spheroids. Canadian Journal of Physics, vol. **35**, № 7, 1957, 811—817.
5. Ростовцев Н. А. К задаче о кручении упругого полупространства. ПММ, **19**, № 1, 1955.
6. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М. О кручении валов переменного сечения. ПММ, **15**, вып. 4, 1951, 451—472.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Госиздат, М., 1949.
9. Грей Э. и Мэттьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиздат, М., 1949.
10. Какторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

П. О. Галфаян

Изгиб швеллера с тонким усиливающим покрытием

В настоящей статье рассматривается приближенное решение задачи об определении касательных напряжений и координат центра изгиба швеллера. Боковая поверхность стержня предполагается покрытой усиливающим слоем постоянной толщины. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работах [6, 7].

Рассматриваемая задача приводится к решению совокупности двух вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Решение рассматриваемой задачи доведено до числовых результатов.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения изгибаемого стержня показаны на фиг. 1. Один конец стержня заделан, а на его свободном конце приложена поперечная изгибающая сила P , направленная параллельно оси x .

Предположим, что коэффициенты Пуассона для основного материала и усиливающего покрытия одинаковы. Тогда при изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0. \quad (1.1)$$

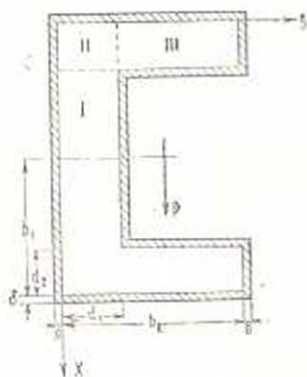
Для осевой деформации ε_z и нормального напряжения σ_z принимаем следующие выражения [1]

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2} (A_0 x + B_0) (l - z), \quad (1.2)$$

$$\sigma_z^i = (A_i x + B_i) (l - z), \quad (1.3)$$

где l — длина стержня, E_2 — модуль упругости материала покрытия, а A_i и B_i ($i=0, 1, 2$) — постоянные, подлежащие определению.

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z=l$ и произвольным сечением $z=\text{const}$, будем иметь



Фиг. 1.

$$\iint_{D_1} \varepsilon_z dx dy = 0, \quad \iint_{D_1} x z \varepsilon_z dx dy = -M, \quad (1.4)$$

где $D_0 = D_1 + D_2$ — поперечное сечение изгибаемого стержня, M — изгибающий момент в сечении стержня $z = \text{const}$.

$$M = P \cdot (l - z), \quad (1.5)$$

Используя закон Гука, из условий (1.2) и (1.3) получим

$$A_0 = A_2, \quad B_0 = B_2 \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{E_2}{E_1} A_1, \quad B_2 = \frac{E_2}{E_1} B_1. \quad (1.6)$$

Из (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) получим

$$A_1 = -\frac{3P}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - 3\lambda_1 b_1^2}, \quad B_1 = -b_1 A_1, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= b_2 d_2 + (b_1 - d_2) d_1 + 2\mu (b_1 + b_2 + 2 - 0,5 \cdot d_1), \\ \lambda_2 &= 4d_1 b_1^3 + d_2 (b_2 - d_1) (6b_1^2 - 3b_1 d_2 + d_2^2) + \\ &+ \mu [2b_1^2 (4b_1 + 6b_2 - 3d_1 - 2d_2) - 3d_2 (b_2 - d_1) (2b_1 - d_2) + \\ &+ 3\delta [b_1 (4b_1 + d_1 - 2d_2) + d_2 (b_2 - d_1)] + \delta^2 (6b_1 + 2b_2 - d_1 + 2\delta)]. \end{aligned}$$

Здесь $\mu = \frac{G_2}{G_1} \delta$, δ — толщина покрытия, G_1 и G_2 — модули сдвига основного материала и материала покрытия.

Перейдем теперь к определению центра изгиба швеллера и касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Функция напряжений $F(x, y)$ при изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, когда линия действия изгибающей силы P проходит через приведенный центр тяжести сечения, удовлетворяет уравнению Пуассона [1]

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1 + \nu} A_1 (y - y_0) \quad (1.8)$$

в области сечения и условию

$$F + \mu \frac{\partial F}{\partial n} = -\int \left(A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x \right) dy + C \quad (1.9)$$

на контуре области.

Здесь ν — коэффициент Пуассона, y_0 — координата центра тяжести сечения, A_1 и B_1 — известные постоянные (1.7), C — постоянная интегрирования, которая для односвязных областей может быть принята равной нулю [1].

Если ось y провести по оси симметрии рассматриваемого профиля и изменить знак x , заметим, что в постановке задачи ничего не изменится. Следовательно функция $F(x, y)$ симметрична относи-

тельно оси симметрии профиля. Вследствие симметрии достаточно ограничиться рассмотрением верхней половины швеллера. Для продолжения решения на нижнюю половину поперечного сечения, достаточно выполнения условия

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=b_1} = 0, \quad (1.10)$$

которое следует из симметрии задачи.

Касательные напряжения в области D_1 определяются формулами

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (1.11)$$

В области D_2 , соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение не меняется вдоль нормали n , направлено параллельно касательной L и определяется формулой [2]

$$\tau_{xz}^* = -\frac{F}{z} + A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x. \quad (1.12)$$

Функцию $F(x, y)$ будем искать в виде

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) & \text{в области I,} \\ F_2(x, y) & \text{в области II,} \\ F_3(x, y) + S(x, y) & \text{в области III,} \end{cases} \quad (1.13)$$

где

$$S(x, y) = \frac{x + \mu}{d_2 + 2\mu} r_0 y, \quad r_0 = \frac{d_2}{2} (2b_1 - d_2) A_1. \quad (1.14)$$

На основании (1.8), (1.9), (1.10) и (1.13), для определения F_1 , F_2 и F_3 получаем следующие условия

$$\Delta F_i = -\frac{\nu}{1-\nu} A_1 (y - y_0) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.15)$$

$$F_1(x, 0) - \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_1(x, d_1) + \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0, \quad (1.16)$$

$$F_2(x, 0) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_2(0, y) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.17)$$

$$F_3(0, y) - \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F_3(d_2, y) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = 0, \quad (1.18)$$

$$F_3(x, b_2) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial y} \Big|_{y=b_2} = -r_0 \frac{b_2 + \mu}{d_2 + 2\mu} (x + \mu), \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=b_1} = 0, \quad (1.19)$$

$$F_2(d_2, y) = F_1(d_2, y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=d_2}, \quad (1.20)$$

$$F_2(x, d_1) = F_1(x, d_1) + S(x, d_1), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} + \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=d_1}. \quad (1.21)$$

Функции F_1 , F_2 и F_3 представим в виде рядов

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.22)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.23)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(y) \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \quad (1.24)$$

где

$$M_k = \sqrt{\mu + \frac{d_1}{2}(1 + \mu^2 \beta_k^2)}, \quad N_k = \sqrt{\mu + \frac{d_2}{2}(1 + \mu^2 \alpha_k^2)}, \quad (1.25)$$

α_k и β_k ($k=0, 1, 2, \dots$) являются корнями трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} 1 - \mu^2 \alpha_k^2 + 2\mu \alpha_k \operatorname{ctg} d_2 \alpha_k &= 0, \\ 1 - \mu^2 \beta_k^2 + 2\mu \beta_k \operatorname{ctg} d_1 \beta_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Системы функций

$$\frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k} \quad (1.27)$$

в интервалах $0 < y < d_1$ и $0 < x < d_2$ являются ортонормированными.

Разложим функции $S(x, y)$ и $x + \mu$ в ряды по функциям (1.27) в интервале $0 < x < d_2$.

$$\begin{aligned} S(x, y) &= r_0 y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \\ x + \mu &= (d_2 + 2\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

2. Подставив (1.22) и (1.24) в (1.15) и используя условие (1.19), найдем функции $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$. Используя полученные значения функций $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$, в силу (1.22) и (1.24), получим

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[B_k \frac{\operatorname{ch}(x - b_1) \beta_k}{\operatorname{ch} b_1 \beta_k} + \frac{g_k}{\beta_k^2} \right] \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (2.1)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_k \frac{\operatorname{sh}(b_2 - y) \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch}(b_2 - y) \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} + \frac{h_k}{\alpha_k^2} (y - y_0) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\alpha_k^2 N_k} \cdot \frac{(b_2 + \mu - y_0) h_k N_k + (-1)^k (b_2 + \mu) r_0 \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} \Big] \times \\
 & \times \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Здесь B_k и E_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (1.20) и (1.21)

$$g_k = - \frac{\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{A_1}{\beta_k M_k} [y_0 + \mu + (-1)^k (y_0 - d_1 - \mu)],$$

$$h_k = \frac{\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k N_k} A_1, \quad y_0 = \frac{1}{2} \left[d_1 + \frac{b_2 d_2 (b_2 - d_1)}{b_1 d_1 + (b_2 - d_1) d_2} \right].$$

Для определения $\varphi_k(x)$ используем метод Г. А. Гринберга [4]. Подставив полученные значения функций $\varphi_k(x)$ в (1.23), получим

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left[C_p \frac{(1 + \mu^2 \beta_p^2) \operatorname{th} d_2 \beta_p + 2\mu \beta_p}{1 + \mu \beta_p \operatorname{th} d_2 \beta_p} + \right. \right. \\
 & + \frac{g_p}{\beta_p^2} \left(1 + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \beta_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_1 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_1 \beta_p} \right) \Big] \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{M_p} + \\
 & + \left[F_k \frac{(1 - \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} (b_2 - d_1) \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} + \right. \\
 & + \frac{(\mu + d_1 - y_0) h_k N_k + (-1)^k (\mu + d_1) r_0 \alpha_k}{\alpha_k^2 N_k} - \\
 & - \frac{(\mu + b_2 - y_0) h_k N_k + (-1)^k (\mu + b_2) r_0 \alpha_k}{\alpha_k^2 N_k} \cdot \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} \Big] \times \\
 & \times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + \mu \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k} \Big\} \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы суммы ряда [6, 7]

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sin d_1 \beta_p + \mu \beta_p \cos d_1 \beta_p) (\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y)}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2} = \\
 & = \mu \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + \mu \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

и граничные условия (1.17). Условия (1.16) и (1.18) удовлетворяются при помощи уравнений (1.26).

Используя условия (1.20) и (1.21) и принимая во внимание (1.28) (2.1), (2.2) и (2.3), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} Y_p + a_k, \quad Y_k = \sum_{p=0}^{\infty} b_{kp} X_p + b_k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

где

$$a_{kp} = \frac{m_k x_p^2}{(x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2}, \quad b_{kp} = \frac{n_k \beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2}, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a_k = & m_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{x_p (x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} [(u + d_1 - y_0) h_p N_p + (-1)^p (u + d_1) r_0 x_p] - \\ & - m_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{x_p (x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} d_1 x_p + u x_p \operatorname{ch} d_1 x_p}{\operatorname{sh} b_2 x_p + u x_p \operatorname{ch} b_2 x_p} [(u + b_2 - y_0) h_p N_p + \\ & + (-1)^p (u + b_2) r_0 x_p] + (-1)^k \frac{g_k M_k}{\beta_k^3} \times \\ & \times \frac{[(1 + u^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2u \beta_k] \operatorname{sh} (b_1 - d_2) \beta_k}{(1 + u^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k (\operatorname{ch} b_1 \beta_k + u \beta_k \operatorname{sh} b_1 \beta_k)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} b_k = & n_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \cdot g_p}{\beta_p (\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p} \left[1 + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \cdot \beta_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_2 \beta_p + u \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right] + \\ & + \frac{n_k}{\alpha_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{(1 + u^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} d_1 \alpha_k + 2u \alpha_k} \left\{ (u \alpha_k + \operatorname{th} d_1 \alpha_k) \left[(-1)^k r_0 + \frac{h_k N_k}{\alpha_k} \right] - \right. \\ & \left. - (1 + u \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k) [(1 - (-1)^k x_k r_0 d_1 + (d_1 - y_0) h_k N_k] \right\} - \\ & - \frac{(-1)^k u}{\alpha_k^2} \cdot \frac{1 - u \alpha_k}{1 - u \alpha_k} \cdot \frac{(u + b_2 - y_0) h_k N_k + (-1)^k (u + b_2) r_0 x_k}{1 + u \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh} (b_2 - d_1) \alpha_k}{\operatorname{sh}^2 b_2 \alpha_k}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$m_k = \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{[1 - u^2 \beta_k^2 \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k] [(1 + u^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2u \beta_k]}{1 + \operatorname{th} d_2 \beta_k \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k + u \beta_k [\operatorname{th} d_2 \beta_k + \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k]}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} n_k = & \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{1 - u \alpha_k}{1 + u \alpha_k} \times \\ & \times \frac{(1 + u \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k) [(1 + u^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} d_1 \alpha_k + 2u \alpha_k]}{1 + \operatorname{th} d_1 \alpha_k \cdot \operatorname{ch} (b_2 - d_1) \alpha_k + u \alpha_k [\operatorname{th} d_1 \alpha_k + \operatorname{ch} (b_2 - d_1) \alpha_k]}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты C_k , E_k и B_k через X_k и Y_k определяются соотношениями

$$\begin{aligned} C_k = & \frac{(-1)^k \beta_k}{M_k} \cdot \frac{1 + u^2 \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + u^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2u \beta_k} \cdot X_k, \\ E_k = & \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \cdot \frac{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + u \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k}{(1 - u^2 \alpha_k^2) \cdot \operatorname{sh} (b_2 - d_1) \alpha_k} \cdot Y_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$B_k = \frac{(-1)^k}{M_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} b_1 \beta_k}{\operatorname{sh} (b_1 - d_2) \beta_k} \left\{ - \frac{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k) \beta_k}{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k^2)} \cdot X_k + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2 \cdot Y_p}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{ch} b_2 \alpha_p} [(\mu + b_2 - y_0) h_p N_p + (-1)^p (\mu + b_2) r_0 \alpha_p] + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} [(\mu + d_1 - y_0) h_p N_p + (-1)^p (\mu + d_1) r_0 \alpha_p] \right\}.$$

Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.5) при условии $\mu > \frac{2,395}{\pi} d_2$ вполне регулярна. Действительно, используя сумму

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k^2)}, \quad (2.12)$$

получаемую из (2.4), рассмотрим отдельно два следующих случая.

Первый случай. Когда

$$|1 - \mu \beta_k^2 \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k| < \mu \beta_k^2 \operatorname{th} (b_2 - d_2) \beta_k \quad (2.13)$$

будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{1}{\mu \beta_k^2} \cdot \frac{1 - \mu \beta_k^2 \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k}{1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + (\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k} < \\ < \frac{(\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k}{1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + (\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k} \leq \frac{1}{1 + y_{\min}}, \quad (2.14)$$

где

$$y = \frac{1 + \varepsilon x_k \operatorname{th} x_k}{\varepsilon x_k + \operatorname{th} x_k}, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu}{d_2}, \quad x_k = d_2 \beta_k > d_2 \beta_0 = 1,312.$$

Функция (2.15) получает свое минимальное значение при $x_k = \sqrt{1 + \varepsilon}$, которое равняется

$$y_{\min} = \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon} \operatorname{th} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon} + \operatorname{th} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| \leq \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon} \cdot \operatorname{th} \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon}}{\varepsilon}}}. \quad (2.16)$$

Второй случай. Когда

$$|1 - \mu \beta_k \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k| < 1 \quad (2.17)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| &< \frac{1}{\mu \beta_k} \cdot \frac{\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k + (\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon x_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{th} \alpha x_k + y_{\min}} = \frac{1}{\varepsilon x_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{th} \alpha \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon} \cdot \operatorname{th} \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon}}{\varepsilon}}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отсюда следует, что первая из систем (2.5) вполне регулярна, если $\varepsilon x_k = \mu \beta_k > 1$. Неравенство $\mu \beta_k > 1$ следует из уравнений (1.26) при условии $\varepsilon = \frac{\mu}{d_2} > \frac{2,395}{\pi}$.

Для второй системы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} |b_{kp}| &= \frac{1}{\mu x_k} \cdot \frac{|1 - \mu x_k|}{1 + \mu x_k} \times \\ &\times \frac{(1 + \mu x_k \operatorname{cth} b_2 x_k) (\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k)}{1 + \mu x_k \operatorname{th} d_1 x_k + (\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k) \operatorname{cth} (b_2 - d_1) x_k} < \\ &< \frac{1 + \mu x_k \cdot \operatorname{cth} b_2 x_k}{1 + \mu x_k} \cdot \frac{\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k}{1 + \mu x_k \operatorname{th} d_1 x_k + (\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k) \operatorname{cth} (b_2 - d_1) x_k} \leq \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon x_k \operatorname{cth} \beta x_k}{1 + \varepsilon x_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{cth} \alpha x_k + y_{\min}} = \frac{1}{1 + y_{\min}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Заметим, что $\beta > \alpha$ и $\operatorname{cth} \beta x_k$, убывая, быстрее стремится к единице, чем $\operatorname{cth} \alpha x_k$.

Таким образом, на основании (2.16), (2.18) и (2.19), совокупность бесконечных систем (2.5) при условии $\mu > \frac{2,395}{\pi} d_i (i=1,2)$ вполне регулярна [5]. Из (2.14) и (2.19) следует, что бесконечные системы (2.5) вообще будут квази-вполне-регулярны при всех значениях параметра μ . Ограниченность свободных членов (2.7) и (2.8) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.5) позволяет определить искомые коэффициенты с любой степенью точности.

Заметим, что решение задачи кручения получено аналогичным образом. Бесконечные системы для задачи кручения отличаются от бесконечных систем (2.5) только свободными членами.

3. В качестве численного примера рассмотрим случай, когда

$$b_1 = b_2 = b = 2d, \quad d_1 = d_2 = d, \quad \delta = 0,1 \cdot d, \quad \frac{G_2}{G_1} = 10. \quad (3.1)$$

Тогда $\mu = d$.

Для рассматриваемого случая бесконечные системы (2.5) вполне регулярны.

Решив трансцендентное уравнение (1.26) методом касательных, для его корней с точностью до 10^{-3} будем иметь: $dx_0 = 1,312$; $dx_1 = 3,670$; $dx_2 = 6,579$; $dx_3 = 9,627$; $dx_4 = 12,72$; $dx_k = k\pi$ ($k=5, 6, 7, \dots$).

Обозначим значения неизвестных X_k и Y_k с избытком через X_k^+ , Y_k^+ , а с недостатком через X_k^- , Y_k^- . Пользуясь теорией вполне регулярных систем [5], для X_k и Y_k получим следующие оценки

$$\begin{aligned} \frac{10^3}{Pd} X_0^- &= 1,74154 \leq \frac{10^3}{Pd} X_0 \leq 1,74208 = \frac{10^3}{Pd} X_0^+, \\ \frac{10^3}{Pd} X_1^- &= 4,70386 \leq \frac{10^3}{Pd} X_1 \leq 4,71149 = \frac{10^3}{Pd} X_1^+, \\ \frac{10^3}{Pd} X_2^- &= 4,42052 \leq \frac{10^3}{Pd} X_2 \leq 4,43777 = \frac{10^3}{Pd} X_2^+, \\ \frac{10^3}{Pd} X_3^- &= 1,79451 \leq \frac{10^3}{Pd} X_3 \leq 1,81947 = \frac{10^3}{Pd} X_3^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_0^- &= -1,29463 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_0 \leq -1,29318 = \frac{10^3}{Pd} Y_0^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_1^- &= -4,99578 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_1 \leq -4,98534 = \frac{10^3}{Pd} Y_1^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_2^- &= -4,30025 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_2 \leq -4,28015 = \frac{10^3}{Pd} Y_2^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_3^- &= -3,69217 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_3 \leq -3,66367 = \frac{10^3}{Pd} Y_3^+. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Координата центра изгиба определяется по формуле

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{P} \int_L F(x, y) (x dy - y dx) - \frac{2}{P} \iint_{D_1} F(x, y) dx dy + \\ &+ \frac{A_1}{2P} \iint_{D_2} (x - 2b) xy dx dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где L — контур сечения, D_0 — область поперечного сечения изгибаемого швеллера.

Из (1.13), (1.14), (2.1) — (2.3), (2.11) и (3.1) определяем функции напряжений $F_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$). Используя найденное значение функции напряжений в формулах (1.11), (1.12) и (3.3), определим напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{xz}^* и координату центра изгиба y_c . Подставив коэффициенты $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ из (3.2) в полученные выражения для τ_{xz} и y_c , определим верхнюю и нижнюю границы напряжения τ_{xz} и координаты центра изгиба швеллера y_c . Для напряжения в усиливающем покрытии получаем

$$\tau_{xz}^*(b, 0) = \frac{G_2}{G_1} \tau_{xz}(b, 0) \quad \text{и} \quad \tau_{xz}^*(b, d) = \frac{G_2}{G_1} \tau_{xz}(b, d). \quad (3.4)$$

В таблице 1 приведены значения напряжения τ_{xz} в трех точках нейтральной оси.

Значения $\frac{d^2}{\rho} \tau_{xz}(x, y)$

Таблица 1

x, y b/d	$b, 0$	$b, \frac{d}{2}$	b, d
2	0,065887	0,066474	0,070441
	0,065886	0,066473	0,070439

Для центра изгиба при $\frac{b}{d} = 2$ получаем

$$y_c^- = 0,113574 \cdot d \leq y_c \leq 0,113596 \cdot d = y_c^+. \quad (3.5)$$

Согласно (3.1) и (3.4), напряжения в усиливающем покрытии будут в 10 раз больше, чем напряжения в соответствующих точках контакта основного материала.

Сопоставляя полученные результаты (3.5) с известными ([3], стр. 614), замечаем, что, благодаря усиливающему покрытию, координата центра изгиба швеллера при $\frac{b}{d} = 2$ уменьшается более чем в 1,4 раза, т. е. при данном отношении размеров поперечного сечения центр изгиба швеллера, оставаясь в основном материале, перемещается влево (фиг. 1).

Պ. Հ. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՇՎԵԼԼԵՐԻ ՁԵՎԻ
ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկվում է շվելլերի ձևի լայնական հատվածք ունեցող պրիզմայաձև ձողի լայնական ուժով ծաման խնդիրը մոտավոր դրվածքով: Ձողի մակերևույթը ծածկապատված է հաստատուն հաստությամբ ուժեղացնող բարակ ծածկույթով: Մոտավորությունը կախնում է նրանում, որ ծածկույթին համապատասխանող D_2 տիրույթում լարումների F ֆունկցիան ըստ ծածկույթի հաստության փոփոխվում է գծային օրենքով, որը ֆիզիկորեն համարվում է այն ընդունելությունը, որ ծածկույթում շոշափող լարումները ըստ ծածկույթի հաստության չեն փոփոխվում: Այդ հարցը լուսարանված է [2] աշխատության մեջ, որտեղ, կենդով ձողի լայնական հատվածքի չափումների նկատմամբ ուժեղացնող բարակ շերտի հաստության փոքրությունից, ցույց է արված, որ որոշակի մոտավորությամբ լարումների $F(x, y)$ ֆունկցիան կարելի է որոշել միայն հիմնական նյութին համապատասխանող D_2 տիրույթում (1.9) խառը կերպին պարմանով:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [6, 7] աշխատություններում առանձնաբերված օրիգինորմալ ֆունկցիաների սխեմայով: Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հաժախությունների երկու անվերջ սխեմաների լրիվ սկզբային համակարգի լուծմանը: Դիտարկվող խնդրի լուծումը հասցված է մինչև թվային արդյունքների: Ծաման կենտրոնի համար ստացված թվային արդյունքը համեմատված է [3] աշխատության մեջ ստացված արդյունքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. ДАН АрмССР, 23, № 3, 1956.
2. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 5, 1957, 59—72.
3. Арутюнян Н. Х. и Гулканян Н. О. О центре изгиба некоторых призматических стержней с полигональным поперечным сечением. ПММ, 18, № 5, 1954, 597—618.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР. М.—Л., 1948.
5. Капторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
6. Чобанян К. С., Галфаян П. О. Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 6, 1959, 89—101.
7. Галфаян П. О. Изгиб полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961, 51—65.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. И. Темнов

Влияние на деформации ползучести размеров
поперечного сечения бетонного призматического образца
и формы эпюры напряжений

Установлено, что размеры поперечного сечения бетонного призматического образца с неизолированной поверхностью влияют на деформации ползучести и усадки. При прочих одинаковых условиях, эти деформации обратно пропорциональны размерам поперечного сечения образца. Кроме того, некоторые факты показывают, что на величину ползучести влияет и эпюра напряжений.

Несмотря на это, при оценке влияния ползучести на напряженное и деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций, нередко не учитываются размеры поперечных сечений элементов, входящих в состав этих конструкций.

Автором настоящей статьи были поставлены следующие задачи.

а) Провести экспериментальные исследования влияния размеров поперечных сечений на величину деформаций ползучести бетонных образцов с неизолированной поверхностью, обобщить имеющиеся результаты таких исследований.

б) на основании опытов выявить возможные отклонения меры ползучести бетона в центрально сжатых образцах от меры ползучести бетонных образцов при внецентренном сжатии и изгибе.

1. Влияние масштабного фактора на деформации ползучести и усадки изучалось в работах А. А. Гвоздева [7], С. Е. Фрайфельда [17], И. И. Улицкого [16], М. С. Боришанского [8], В. С. Булгакова [8], С. В. Александровского [1], К. С. Карапетяна [9], С. Я. Эйделямана [20], И. Е. Прокоповича [14], Девиса [15], Графа [17] и других.

Известно, что если при быстром („мгновенном“) нагружении бетонного образца деформации его растут пропорционально напряжениям, то при относительно медленном нагружении соотношения между деформациями и напряжениями увеличиваются. Нарастание деформаций, с увеличением времени, в течение которого производится нагружение образца, вызывается ползучестью бетона.

Так как даже при обычных машинных испытаниях нагрузка прикладывается не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, то результаты их зависят от скорости приложения нагрузки, предопределяющей степень развития деформаций ползучести. Это при-

водит к тому, что даже при кратковременных испытаниях величины деформаций существенно зависят от размеров поперечных сечений бетонных образцов.

М. С. Борищанским [8] при разных режимах нагружения были испытаны призмы $25 \times 25 \times 100$ и $10 \times 10 \times 40$ см. Результаты опытов показывают, что при равных скоростях нагружения деформации больших образцов систематически оказываются меньше деформаций малых образцов.

В. С. Булгаковым [8], в лаборатории железобетонных конструкций ЦНИПС-а, проведены кратковременные испытания железобетонных образцов на внецентренное сжатие с малым эксцентриситетом. Размеры образцов, при этом, относились друг к другу как

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8},$$

причем самый большой образец имел размеры $1,6 \times 0,8$ м при высоте 3,6 м, а самый маленький — 20×10 см при высоте 45 см.

Если мгновенные деформации большого и малого образцов оказались близкими друг к другу, то деформации ползучести при одинаковом напряжении получились для малого образца в 3 раза больше, чем для большого образца.

В 1943 году А. А. Гвоздевым [7], на основе предложенной им оригинальной теории ползучести бетона, были получены формулы для определения полных относительных деформаций, в которых учитывается влияние абсолютного размера образца. В формулах (38) и (39) [7] время представлено переменной $t = t(a^2/R^2)$, где

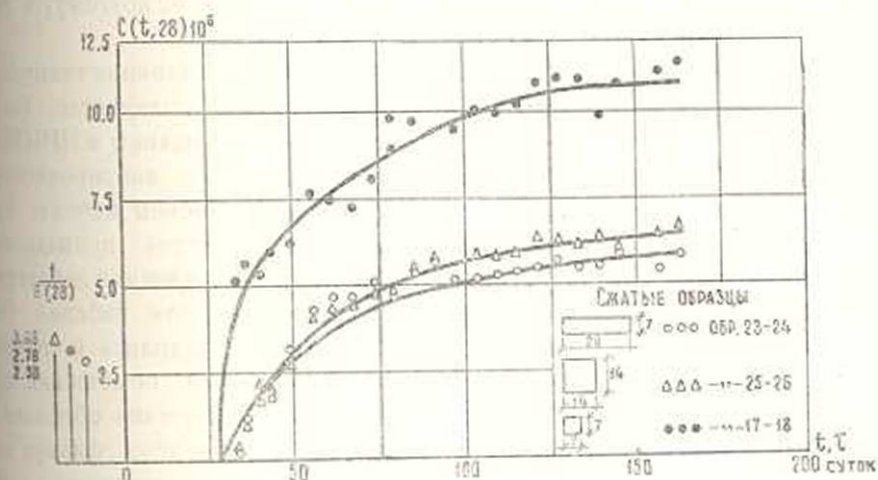
a — постоянная, зависящая от физических свойств материала,

R — радиус цилиндра.

Формулы построены так, что с увеличением радиуса цилиндра, при прочих равных условиях, деформации будут нарастать медленнее. Переменная t содержится, как в слагаемом, учитывающем деформацию возникающую тотчас по приложении нагрузки, так и в слагаемом, учитывающем деформацию развивающуюся во времени. К сожалению, эти теоретические результаты не были подкреплены опытными данными. Экспериментальную проверку влияния размеров образца на ползучесть производил Девис [13]. В его опытах на 500-е сутки испытания цилиндра диаметром 15 см величина ползучести оказалась равной 270 мк/м, цилиндра диаметром 20 см — 245 мк/м и цилиндра диаметром 25 см — 170 мк/м.

К. С. Каралетяном [9] проводились исследования влияния размеров образца на ползучесть легкого бетона на литой пемзе. Цилиндрические образцы с диаметрами равными 14 и 25 см хранились до месячного возраста во влажной камере, затем загружались длительной нагрузкой в помещении с влажностью $50 \pm 10\%$. Длительность действия нагрузки составляла 550 дней. В результате оказалось, что деформации ползучести малых образцов на 20% больше ползучести

больших образцов. На основании проведенных опытов сделан вывод о том, что фактор масштабности не имеет места, если исключить процесс испарения воды. Поэтому меру ползучести бетона, определяемую на малых изолированных образцах, можно считать равной мере ползучести бетона в массиве. Предлагается определять в лабораторных условиях ползучесть на нескольких образцах с различными размерами поперечных сечений без исключения испарения и на образцах одного размера с исключением испарения. Полученная таким образом



Фиг. 1. Кривые ползучести при сжатии образцов с поперечным сечением 7×7 , 14×14 , 7×28 см по опытам И. Е. Прокоповича.

зависимость меры ползучести от размеров поперечного сечения образцов будет охватывать весь диапазон размеров от наименьшего неизолированного до массива.

И. Е. Прокоповичем [14] проводились длительные испытания на сжатие бетонных образцов с размерами 7×7 , 14×14 и 7×28 см при длине 70 см. Образцы были изготовлены из нормального портландцемента из бетона состава 1:1,82:3,7 при $B/C=0,55$ и загружены в возрасте $\tau_1=28$ суток. Результаты испытания приведены на фиг. 1.

В этой же работе приведены отношения деформаций ползучести к упругим деформациям для образцов с различными поперечными сечениями. Эти отношения представлены в таблице 1, где

$\varepsilon_s(160, \tau_1)$ — деформация ползучести при $t=160$ суток от нагрузки, приложенной в момент $\tau_1=28$ суток,

$\varepsilon_p(\tau_1)$ — упруго-мгновенная деформация в момент приложения нагрузки.

Приведенные в этой таблице величины отношений, с известным

Таблица 1

Поперечное сечение образца в см	$\frac{\varepsilon_s(160, \tau_1)}{\varepsilon_p(\tau_1)}$
7×28	2,40
14×14	2,24
7×7	3,89

приближением, характеризуют и влияние размеров поперечных сечений элементов на предельные характеристики ползучести, равные отношению подных деформаций ползучести к соответствующим упруго-мгновенным деформациям. Как видно из таблицы 1, с увеличением поперечного сечения образца предельная характеристика ползучести уменьшается. Различие в предельных характеристиках ползучести образцов разных размеров может вызвать перераспределение, за счет ползучести, внутренних усилий в статически неопределимых конструкциях, состоящих из элементов различных размеров, и, поэтому, в ряде случаев должно учитываться в расчетах [14].

Результаты работы по обобщению исследований влияния геометрических размеров поперечного сечения на величину ползучести, были доложены И. И. Улицким в феврале 1960 г. на совещании в НИИЖБ.

2. В наших опытах образцы изготавливались из вибрированного бетона состава 1:2,48:4,37 по весу, на пуццолановом цементе при $B:C = 0,65$ с осадкой конуса 5—6 см. Укладка бетона проводилась так, чтобы при передаче нагрузок на образцы направление действующих нормальных напряжений было параллельно слоям набивки. Образцы освобождались из форм на пятые сутки и хранились в течение 10 суток во влажном песке, а затем в специальном помещении при температуре 20—25° и влажности 76—83%. Назначение образцов и их размеры указаны в таблице 2. В таблице 3 приведены физико-механические характеристики бетона, полученные одновременно с загрузкой образцов, произведенной в 28 дневном возрасте.

Загружение образцов проводилось тремя ступенями в течение часа с выдержками по 15 минут. Отсчеты по приборам при каждой ступени нагрузки снимались дважды: точно после загрузки и перед приложением новой ступени нагрузки. Такой порядок загрузки и снятия отсчетов позволил отделить упругие деформации от деформаций ползучести. Деформации определялись по стационарным индикаторам с точностью делений: 0,001 мм для определения ползучести, 0,002 мм для усадки при базе 200 мм.

Для создания длительного простого и внецентренного сжатия образцов применялись пружинные приборы, обеспечивающие при помощи шарнира фиксацию положения сжимающих сил. При внецентренном сжатии силы прикладывались на границе упругого ядра сечения (теоретического, см. фиг. 2-а и 2-б).

К изгибаемым образцам с пролетом равным 700 мм нагрузки прикладывались в виде двух сосредоточенных сил, расположенных симметрично относительно середины на расстоянии 400 мм друг от друга (фиг. 2-в). Сосредоточенные силы, вызывающие изгиб образца, создавались при помощи подвешенных грузов. Деформации бетона измерялись между сосредоточенными силами в сжатой и растянутой зонах. Центально и внецентренно сжатые призмы загружались так, чтобы средние напряжения в их поперечных сечениях имели одинаковую величину.

Таблица 2

Количество, размеры и назначение опытных образцов

№ п/п	Вид образца	Размеры образца в см	Количество шт	Условные обозначения	Образцы изготовлены для определения
1	кубики	10×10×10	5	—	кубиковой прочности
2	призмы	10×10×45	5	—	призмной прочности
3	"	10×10×45	3	—	модуля упругости
4	"	7×7×90	5	—	разрушающего момента M_R и предела прочности на растяжение при изгибе R_{pu}
5	"	14×14×90	5	—	
6	"	7×7×75	3	П-1 П-2 П-3	деформаций ползучести при центральном сжатии
7	"	14×14×75	3	П-4 П-5 П-6	деформаций ползучести при центральном сжатии
8	"	7×7×75	3	ПВ-1 ПВ-2 ПВ-3	деформаций ползучести при внецентренном сжатии
9	"	14×14×75	3	ПВ-4 ПВ-5 ПВ-6	деформаций ползучести при внецентренном сжатии
10	"	7×7×90	3	ПИ-1 ПИ-2 ПИ-3	деформаций ползучести при изгибе
11	"	14×14×90	3	ПИ-4 ПИ-5 ПИ-6	деформаций ползучести при изгибе
12	"	7×7×75	3	У-1 У-2 У-3	усадочных деформаций при вертикальном положении образца
13	"	14×14×75	3	У-4 У-5 У-6	усадочных деформаций при вертикальном положении образца
14	"	7×7×90	3	У-7 У-8 У-9	деформаций при горизонтальном положении ненагруженного образца
15	"	14×14×90	3	У-10 У-11 У-12	деформаций при горизонтальном положении ненагруженного образца

Таблица 3

Физико-механические характеристики бетона

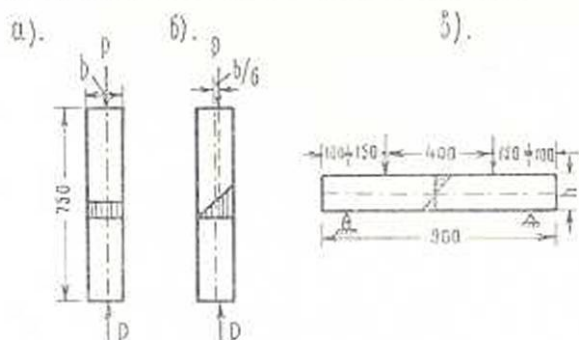
R кг/см ²	$R_{пр}$ кг/см ²	E_b (28) кг/см ²	M_R кгсм (7×7 см)	M_p кгсм (14×14 см)	R_{pu} кг/см ²
123	97	172000	7,8	63	13,7

Примечание: Кубиковая прочность приведена к прочности стандартных образцов размером 20×20×20 см, путем умножения на коэффициент, равный 0,55.

В. И. Костяев, АН, серия физ.-мат. наук, № 6

В соответствии с задачами, поставленными при проведении опытов, величина нагрузки подбиралась так, чтобы между напряжениями и деформациями ползучести существовала линейная зависимость.

На основании ряда экспериментальных данных [5], [16], [6], [10], [11] можно считать, что такая линейная зависимость существует при $\sigma \leq 0.5 R_{пр}$ при центральном сжатии. Опыты [6], [11] показали, что деформации ползучести при центральном растяжении пропорциональны напряжениям почти до предела прочности.



Фиг. 2. Схемы загрузки бетонных образцов.

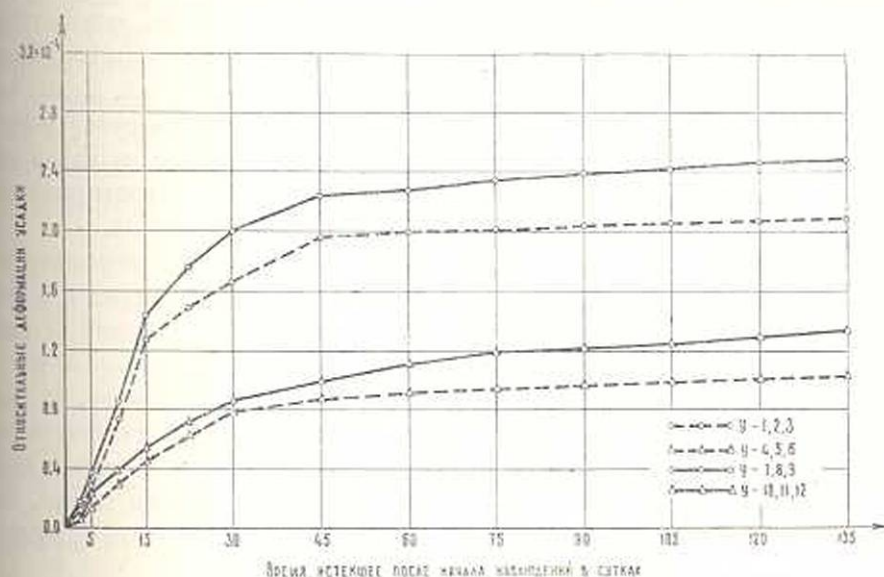
В проведенных нами опытах, максимальные напряжения приблизительно составляли: в центрально сжатых призмах — $0.23 R_{пр}$, внецентренно сжатых — $0.46 R_{пр}$, изгибаемых — $0.4 R_{пр}$.

При проведении опытов под ползучестью понимались деформации нагруженных образцов, развивающиеся во времени, за вычетом соответствующих деформаций ненагруженных образцов. Известно, что существует другая трактовка деформаций ползучести, предложенная С. В. Александровским [1].

3. При высыхании происходит уменьшение объема бетона, называемое обычно усадкой. В основном усадка обусловлена объемными изменениями гелевой структурной составляющей [18], [1] и частично капиллярными явлениями. В последнее время это убедительно доказано в результате обстоятельных опытов, проведенных С. В. Александровским [1], [2], [3].

Установлено, что на величину усадки существенно влияют размеры поперечных сечений образцов, твердеющих в обычных условиях с неизолированной поверхностью. Поэтому деформации ненагруженных образцов, служащие для исключения усадочных деформаций при определении ползучести, должны определяться на образцах, имеющих размеры поперечного сечения равные размерам поперечных сечений нагруженных образцов.

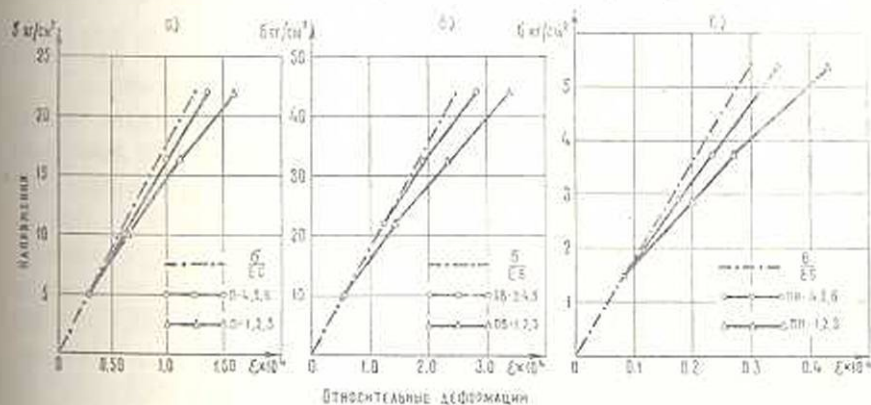
На фиг. 3 приведены относительные деформации усадки исследованного нами бетона в возрасте $28 < t \leq 163$ суток. Две верхние кривые представляют усадку образцов с поперечным сечением 7×7 , а нижние — 14×14 см. Сплошными линиями показаны укорочения верхних кромок образцов, находившихся в горизонтальном положе-



Фиг. 3. Кривые деформаций усадки образцов с поперечным сечением 7×7 и 14×14 см, находившихся в вертикальном и горизонтальном положениях.

ни, пунктирными линиями — образцов, находившихся в вертикальном положении. Деформации усадки, замеренные на нижних гранях образцов, находившихся в горизонтальном положении, оказались на 3–5% меньше усадки на верхних гранях.

Из фиг. 3 видно, что величина усадки в образцах с меньшим поперечным сечением резко превосходит усадку образцов с сечением



Фиг. 4. Кривые упруго-мгновенных и упруго-ползучих (упруго-пластических) деформаций образцов с поперечным сечением для упруго-мгновенных — 10×10 , для упруго-ползучих 7×7 и 14×14 см.

больших размеров. Отношение усадочных деформаций изменяется от 2,7 в 15 суток до 1,9 в 135 суток. Скорости деформаций усадки разных образцов через 135 суток становятся примерно одинаковыми.

4. Результаты кратковременного испытания образцов, полученные при обработке данных наших опытов приведены на фиг. 4. На

фиг. 4 а, б и в пунктирной линией показаны мгновенные деформации, полученные при испытаниях бетонных призм размером $10 \times 10 \times 45$ см. при определении модуля упруго-мгновенных деформаций. Сплошными линиями показаны упруго-ползучие (упруго-пластические) деформации, развивающиеся как при подаче нагрузки, так и за время выдержек в центрально сжатых, внецентренно сжатых и изогнутых образцах, с размерами поперечных сечений 7×7 и 14×14 см.

Как видно из этих фигур, деформации образцов меньшего сечения к моменту окончания приложения нагрузки примерно в 3 раза больше деформаций образцов большего сечения независимо от вида деформированного состояния элемента (см. табл. 4).

5. Известно, что если усадка носит объемный характер, то ползучесть бетона развивается, в основном, в направлении действующего усилия. Однако, ползучесть и усадка бетона находятся в тесной взаимосвязи. Не останавливаясь детально на таковой, укажем только, что к внешним признакам взаимосвязи относится и влияние масштабного фактора.

Таблица 4

	Размеры сечения, см	σ , кг/см ²	$\lg \alpha$ (t)								
			C (28-04,28) 10 ⁻⁶	C (43,28) 10 ⁻⁶	C (118,28) 10 ⁻⁶	33	43	58	88	103	118
Центральное сжатие . . .	7×7	22	1,58	9,1	21,0	1,63	1,30	0,90	0,33	0,20	0,075
Центральное сжатие . . .	14×14	22	0,51	3,2	8,7	0,80	0,35	0,27	0,17	0,10	0,06
Отношение мер ползучести			3,1	2,85	2,42						
Внецентренное сжатие . .	7×7	44	2,05	10,7	22,3	1,3	1,0	0,53	0,30	0,23	0,08
Внецентренное сжатие . .	14×14	44	0,64	4,4	9,1	1,0	0,50	0,20	0,17	0,07	0,04
Отношение мер ползучести			3,21	2,44	2,45						
Сжатие при изгибе . . .	7×7	5,5	2,4	17,5	32,3	3,25	2,19	0,90	0,40	0,167	0,067
Сжатие при изгибе . . .	14×14	5,5	0,80	5,8	13,5	1,25	0,75	0,40	0,20	0,13	0,08
Отношение мер ползучести			3,0	3,02	2,4						

* В табл. 4 t и τ_1 в сутках.

На фиг. 5 представлены результаты опытов на ползучесть, проведенных автором (см. табл. 2 и 3).

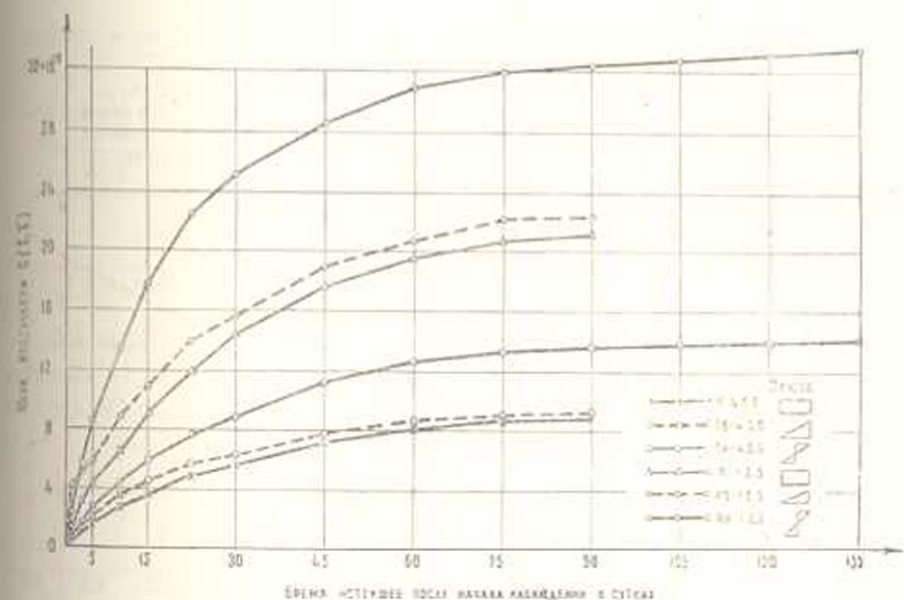
Верхние три кривые относятся к сечениям образцов размером 7×7 , нижние три — 14×14 см. Из фиг. 5 видно, что с увеличением размера поперечного сечения мера ползучести бетонного образца уменьшается.

Отношения мер ползучести образцов с меньшими и большими размерами поперечных сечений изменяется: с 3 в 15 суток до 2,4 в 90 суток для изгибаемых образцов и с 2,8 в 15 суток до 2,4 в 90 суток для центрально и внецентренно сжатых (см. табл. 4).

Отсюда можно сделать вывод, что влияние размеров поперечного сечения на деформации ползучести бетонных образцов мало зави-

сит от вида деформированного состояния. Кроме того, как видно из табл. 4, к трем месяцам после загрузки образцов скорости роста мер ползучести становятся примерно одинаковыми.

Нами сделана попытка обобщить результаты опытов [9], [14], [15], [12], Бертье [13] и автора. Для этого построен график зависимости отношения мер ползучести от параметра n/ω , равного отношению периметра образца к площади его поперечного сечения (фиг. 6)*.



Фиг. 5. Кривые ползучести бетонных образцов с поперечным сечением 7×7 и 14×14 см при различных эпюрах напряжений.

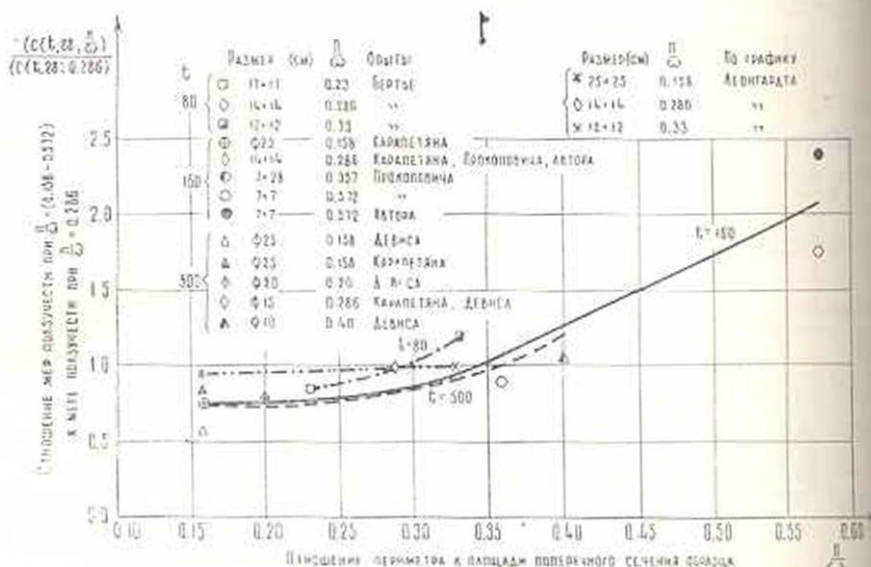
По опытным точкам, полученным при испытании бетонных образцов, загружаемых в возрасте $\tau = 28$ суток, построены три кривых для $t = 80, 160$ и 500 суток. При построении кривой для $t = 500$ суток, ползучесть образца $d = 10$ см определялась по формуле Роша [15], куда входят коэффициенты a и b , взятые из графика, построенного Девисом [15]. Остальные значения получены на основании опытных данных. На фиг. 6 нанесена так же кривая влияния размеров поперечного сечения образца на деформации ползучести, построенная на основании графика, рекомендуемого Ф. Леонгардтом [12].

Результаты фиг. 6 показывают резкое увеличение деформаций ползучести с уменьшением поперечного сечения образца от 14×14 до 7×7 см (в 2,5 раза) и менее заметное — от $d = 25$ до 14×14 см (в 1,15 раза). Из фиг. 6 так же видно, что влияние масштаба на ползучесть уменьшается с увеличением возраста бетона, хотя в пределах $160 \leq t \leq 500$ суток заметного изменения уже не наблюдается.

* На фиг. 6 к $n/\omega = 0,286$ относятся образцы с поперечным сечением 14×14 с небольшим допущением — 15×15 и $d = 15$ см.

Конечно, кривые, приведенные на фиг. 6, должны рассматриваться, как приближенные и подлежащие дальнейшему уточнению.

6. Каких-либо систематизированных результатов по вопросу влияния формы эпюры напряжений на величину меры ползучести, по-видимому, в настоящее время не имеется. Известно только, что при кратковременном действии нагрузки, краевые деформации бетонных призм при внецентренном сжатии превышают деформации таких же центрально сжатых призм [4].



Фиг. 6. Кривые зависимости отношения мер ползучести от параметра P/S , равного отношению периметра образца к площади его поперечного сечения.

В таблице 4 приведены условные меры ползучести $C(28, 0, 28)$, характеризующие ползучесть в бетонных образцах в процессе приложения нагрузки при центральном сжатии, внецентренном сжатии и изгибе. При этом, под условной мерой ползучести понимается отношение деформаций, развившихся за весь период приложения нагрузки (за вычетом упруго-мгновенных деформаций), к величине напряжений после окончания нагружения.

Сравнение условных мер ползучести показывает, что если условную меру ползучести центрально сжатых образцов принять за единицу, то условная мера ползучести внецентренно сжатых образцов составит примерно 1.25, а изгибаемых — примерно 1.55 независимо от размера поперечного сечения образца. Как видно из табл. 4, мера ползучести внецентренно сжатых призм к трем месяцам лишь несколько, на 5—7%, превысила меру ползучести центрально сжатых призм.

Из табл. 5 видно, что отношение меры ползучести бетона в сжатой зоне при чистом изгибе $C_u(t, \tau_1)$ к мере ползучести при центральном сжатии $C(t, \tau_1)$ в любом возрасте рассматриваемого интер-

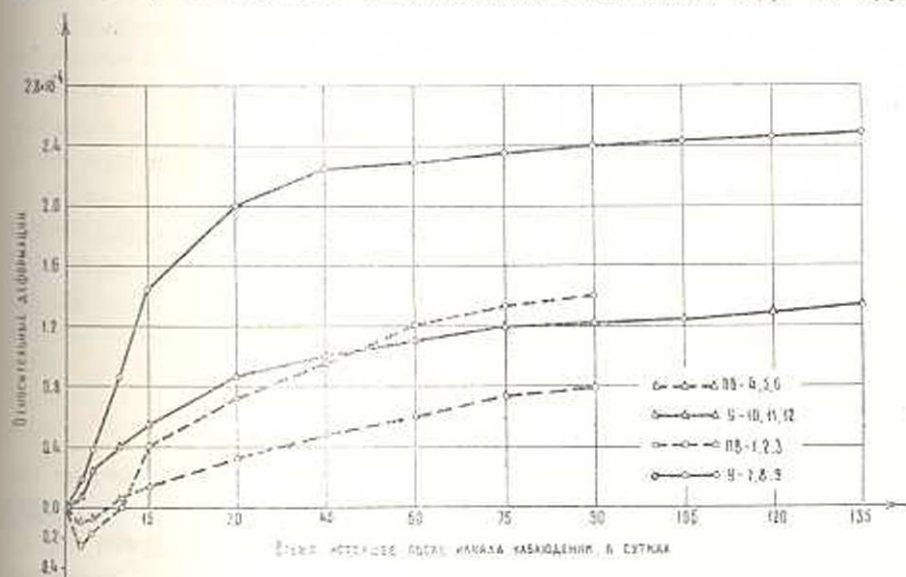
вала времени больше 1,5. При этом, наибольшие величины этого отношения характерны для интервала $29 \leq t \leq 43$, т. е. для интервала наибольшей скорости развития усадочных деформаций ненагруженных образцов. Вероятно и увеличение отношения C_u/C в этом периоде связано с развитием части усадочных деформаций, проявляющихся только при наличии напряжений и выявленных в опытах С. В. Александровского [1].

Таблица 5

Отношение меры ползучести при изгибе к мере ползучести при центральном сжатии

Сечение см	C_u (28.04,28)	C_u (33,28)	C_u (43,28)	C_u (58,28)	C_u (88,28)	C_u (118,28)
	C (28.04,28)	C (33,28)	C (43,28)	C (58,28)	C (88,28)	C (118,28)
7×7	1,52	2	1,91	1,74	1,60	1,54
14×14	1,56	1,87	1,82	1,60	1,58	1,55

Характерно, что отношение C_u/C через час после приложения нагрузки (1,52 и 15,6), т. е. когда влияние усадки было ничтожным, и через 90 суток, т. е. когда процесс усадки в основном закончился (1,54 и 1,55), сравнительно незначительно отличаются друг от друга.



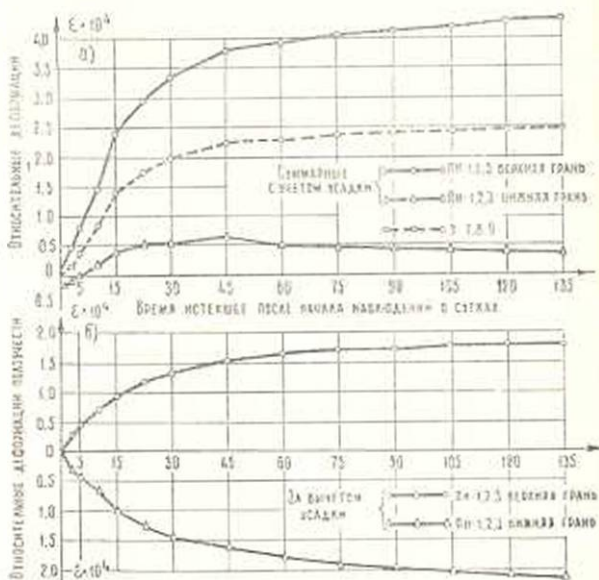
Фиг. 7. Кривые деформаций усадки (см. фиг. 3) и границ внецентренно сжатых призм, теоретические напряжения в которых равны нулю.

На фиг. 7 пунктирными линиями показаны относительные деформации граней внецентренно сжатых призм, напряжения в которых, по формулам сопротивления материалов, равны нулю. В течение первых нескольких дней происходят отрицательные деформации (растяжение) или что тоже-перемещение нейтральной линии к середине по-

перечного сечения. В дальнейшем, отрицательные деформации уменьшаются и после перехода через нуль происходит нарастание деформаций сжатия. Это совпадает с картиной изменения деформаций при внецентренном сжатии, выявленной в опытах А. Н. Кузнецова и описанной А. А. Гвоздевым [7]. Однако, если рассматривать только деформации ползучести, то картина получается иная.

На фиг. 7 представлены так же кривые деформаций усадки. Из того, что деформации на рассматриваемой грани ненагруженного образца больше соответствующих деформаций нагруженного образца, следует, что деформации ползучести здесь отрицательные.

На фиг. 8-а показаны деформации верхних и нижних граней изгибаемых образцов сечением 7×7 см и соответствующие деформации



Фиг. 8. а) Кривые деформаций верхних и нижних граней изгибаемых образцов сечением 7×7 см и деформации усадки, б) деформации за вычетом усадки (деформации ползучести).

ненагруженных образцов. На фиг. 8-б показана разность между этими деформациями, т. е. деформации ползучести.

Из фиг. 8-б видно, что после трех месяцев пребывания под нагрузкой деформации растянутой зоны бетонных образцов превысили деформации сжатой зоны всего лишь на 10%. Это примерно соответствует результатам опытов, проведенных А. Е. Шейкиным и В. Л. Николаевым [19].

7. Как видно из результатов проведенных опытов, представленных в табл. 4, мера ползучести бетонных образцов при внецентренном сжатии и особенно при изгибе больше меры ползучести при центральном сжатии. Скорость деформации ползучести внецентренно сжатых и изгибаемых образцов вначале больше скорости деформаций

ползучести центрально сжатых образцов^{*}. С течением времени имеется тенденция к выравниванию этих скоростей.

Однако еще не ясно изменение скоростей в интервалах времени, превышающих 120 суток с момента приложения нагрузки.

Укажем, что на большую ползучесть бетонных образцов при изгибе, чем при центральном сжатии, на основании своих, ранее проведенных опытов, неоднократно обращал внимание С. В. Александровский.

Подтверждением различия в мерах ползучести при центральном сжатии и изгибе являются результаты, полученные при обработке экспериментальных данных по изгибу железобетонных балок с обычной арматурой при длительной нагрузке [22]. Здесь хорошее соответствие теории опытным данным получилось в случае принятия меры ползучести бетона сжатой зоны балки равной 1,55-меры ползучести соответствующей центрально сжатой бетонной призмы.

Вероятно, причиной различия в мерах ползучести бетонных образцов при центральном сжатии, внецентренном сжатии и изгибе является большая, по сравнению со средней по сечению, ползучесть бетона у наружной поверхности. Последнее связано с более высокой скоростью высыхания наружных слоев и неоднородностью структуры бетона в поперечном сечении образца [21].

Проведенные исследования позволяют сделать выводы о том, что при оценке влияния ползучести на напряженное и деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций необходимо учитывать: а) размеры поперечных сечений элементов, входящих в состав этих конструкций, б) форму эпюры напряжений.

В частности, эти факторы должны учитываться при разработке методов определения потерь от предварительного напряжения, разработке теории расчета балок при длительной нагрузке и т. д.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 10 VI 1961

Ի. Ի. ՏԵՐԳՈՂ

ԲԵՏՈՆԵ ՊՐԻՋՄԱՅԱԶԵՎ ՆՄՈՒՇԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅՑԻ ԶԱՓԵՐԻ ԵՎ
ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԷՊՅՈՒՐԻ ԶԵՎԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՍՈՂԲԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղվածում չարտգրված են չմեկուսացված մակերևույթ ունեցող բետոնե նմուշների սողքի դեֆորմացիաների մեծության վրա լայնական հաստությամբ

^{*} Исключение составляют внецентренно сжатые образцы с поперечным сечением 7×7 см у которых скорость деформации ползучести оказалась меньше соответствующей скорости центрально сжатых образцов.

ների ազդեցութիւնն էրապերիմետալ հետազոտութիւնների արդունքները և արված են մի քանի բնականորոշումներ:

Եւրված են էրապերիմետալ տվյալներ չմեկուսացված մակերեսով ունեցող բետոնն նմուշների սողքի ճափի մեծութիւնն զրա լարումների էպլուրի ձևի ազդեցութիւնն վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Александровский С. В. О влиянии длительного действия внешней нагрузки на режим высыхания и усадку бетона. Сборник „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций“. Труды НИИЖБ, вып. 4, ГИЗ литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, М., 1959.
2. Александровский С. В. О тепло-физических свойствах бетона, связанных с тепло- и влагообменом. Сборник „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций“. Труды НИИЖБ, вып. 4, ГИЗ литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, М., 1959.
3. Александровский С. В. О влажностных деформациях бетона. Инженерно-физический журнал, 3, № 12, 1960.
4. Александровский С. В., Таль К. Э. Основные физико-механические свойства бетона. Справочник проектировщика. Сборник железобетонных конструкций. НИИ бетона и железобетона. ГИЗ литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, М., 1959.
5. Арутюник Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. ГИЗ технико-теоретической литературы, 1952.
6. Васильев П. И. Пластические свойства бетона и их влияние на работу бетонных сооружений. Сборник статей „Теория расчета и конструирования железобетонных конструкций“. ГИЗ литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, М., 1958.
7. Гвоздев А. А. Опыт теории ползучести бетона. Известия АН СССР, ОТН, № 9—10, 1943.
8. Гвоздев А. А. Ползучесть бетона и пути ее исследования. Сборник „Исследования прочности, пластичности и ползучести строительных материалов“ ЦНИПС, 1955.
9. Карапетян К. С. Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, 9, № 1, 1956.
10. Карапетян К. С. Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, 6, № 2, 1953.
11. Катин Н. И. Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях. Сборник „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций“. Труды НИИЖБ, вып. 4, ГИЗ литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, М., 1959.
12. Леонгардт Ф. Напряженно армированный железобетон. ГИЗ литературы по строительству и архитектуре, М., 1957.
13. Лермит Р. Проблемы технологии бетона. Госстройиздат, 1959.
14. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние некоторых сооружений. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Одесский инженерно-строительный институт, 1958.
15. Сатакин А. В. Ползучесть бетона. Сборник „Прочность, упругость и ползучесть бетона“ под редакцией проф. Н. М. Безалева. Стройиздат Наркомстроя, 1941.
16. Улицкий И. И. Ползучесть бетона. Гостехиздат Украинской ССР, 1948.
17. Фрайфельд С. Е. Собственные напряжения в железобетоне. Стройиздат Наркомстроя, 1941.
18. Шейкин А. Е. К вопросу прочности, упругости и пластичности бетона. Строительная механика и мосты. Труды МИИТ, вып. 69, Трансжелдориздат, 1946.

19. Шейкин А. Е., Гиколоаев В. Л. Об упруго-пластических свойствах бетона при растяжении. Бетон и железобетон, № 9, 1959.
20. Эдельман С. Я. Определение характеристик упругости и ползучести бетона в сооружениях. Гидротехническое строительство, 5, 1952.
21. Сообщение „Экспериментально-теоретическое исследование жесткости железобетонных изгибаемых элементов при длительном нагружении“. Академия строительства и архитектуры УССР, НИИ строительных конструкций, Киев, 1961.
22. Промежуточный отчет „Изгиб железобетонных балок при длительном действии нагрузки“. Раздел А. Балки с обычной арматурой. Одесский инженерно-строительный институт, 1960.

В. М. Арутюнян

О поляризации электронов при упругом рассеянии на ядрах

§ 1. Введение

Особенностью рассеяния электронов на ядрах является, так называемая, азимутальная асимметрия в угловом распределении рассеяния. Как показал Мотт, эффект такого рода можно обнаружить при двойном рассеянии электронов.

Хорошо известно, что сечение рассеяния частично поляризованного пучка электронов имеет вид

$$\frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} [1 + \Delta(\theta)(s_y \cos \varphi - s_z \sin \varphi)], \quad (1.1)$$

где $d\sigma_0/d\Omega$ — сечение рассеяния неполяризованного пучка, $\vec{s}$ — вектор спина электрона в собственной системе. С другой стороны, неполяризованный пучок электронов после рассеяния частично поляризуется, причем степень поляризации оказывается равной

$$\vec{s} = \Delta(\theta) \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \frac{[\vec{n}_1, \vec{n}_2]}{\sin \theta}, \quad (1.2)$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — направления падающего и рассеянного пучков. Как показывают формулы (1.1) и (1.2), для описания эффектов поляризации достаточно определить функцию $\Delta(\theta)$. Это было сделано Моттом для легких ядер, и для точечного ядра он получил

$$\Delta^2(\theta) = \frac{2Z}{137} \frac{\beta(1 - \beta^2)^{1/2}}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)} \frac{\sin^2 \theta/2}{\cos \theta/2} \ln \sin \theta/2. \quad (1.3)$$

Чтобы получить удовлетворительные результаты для тяжелых ядер, Шерман [1] вычислил азимутальную асимметрию численным методом. Нужно отметить, что результаты Шермана в принципе мало отличаются от результата Мотта. Экспериментальные данные показывают, что для больших энергий (150—400 кэВ) и углов имеется хорошее согласие с теорией. В области малых энергий и углов наблюдается большое расхождение [2]. В последнем случае заряд ядра сильно экранирован атомными электронами и это обстоятельство необходимо аккуратно учесть [3].

В настоящей работе, при вычислении азимутальной асимметрии, учитываются следующие эффекты: экранирование ядерного заряда атомами электронами; структурные особенности ядра; радиационные поправки к формуле Мотта.

§ 2. Теория рассеяния электронов во втором борновском приближении

Потенциальное рассеяние электронов описывается двумя амплитудами $f(\theta)$ и $g(\theta)$, причем

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = ff^* + gg^*; \quad \Delta(\theta) = i \frac{fg^* - fg^*}{ff^* + gg^*}. \quad (2.1)$$

Известно, что поляризационные эффекты в первом борновском приближении никак не проявляются. Поэтому, для получения конечных результатов, необходимо вычислить амплитуды f и g во втором борновском приближении. Воспользуемся результатами работы [4] и приведем окончательное выражение этих амплитуд

$$\begin{aligned} f(\theta) = & \frac{E}{k} \frac{a + b \cos \theta}{2 \sin \theta/2} \int_0^\infty \sin(2kr \sin \theta/2) V(r) r dr + \\ & + \frac{2E^2}{\pi k} \int_0^\infty \frac{a^2 + ab(\cos \varphi + \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{V[1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi - \cos^2 \theta + 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta]} \times \\ & \times |M(\varphi, \psi) + iL(\varphi)L(\psi)| d\varphi d\psi, \\ g(\theta) = & \frac{E}{k} \frac{b \sin \theta}{2 \sin \theta/2} \int_0^\infty \sin(2kr \sin \theta/2) V(r) r dr - \\ & - \frac{2E^2}{\pi k} \int_0^\infty \frac{ab \sin \theta/2 (\cos \varphi + \cos \psi) + b^2 \sin \theta}{V[1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi - \cos^2 \theta + 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta]} \times \\ & \times |M(\varphi, \psi) + iL(\varphi)L(\psi)| d\varphi d\psi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$a = 1 + m/E, \quad b = 1 - m/E,$$

$$L(\varphi) = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \int_0^\infty \sin(2kr \sin \varphi/2) V(r) r dr,$$

$$\begin{aligned} M(\varphi, \psi) = & \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^\infty \cos\left(2kr \sin \frac{\varphi}{2}\right) V(r) r dr \times \\ & \times \int_0^\infty \sin\left(2kr' \sin \frac{\psi}{2}\right) V(r') r' dr', \end{aligned}$$

а область интегрирования Ω определяется условием

$$1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi - \cos^2 \theta + 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta > 0.$$

С помощью (2.2) и (2.1) легко вычислить поляризацию электронов при рассеянии

$$\Delta(\theta) = \Delta'(\theta) \frac{\sin^2 \theta/2 J_1 - 2J_2}{8\pi F(\theta) \ln \sin \theta/2}, \quad (2.3)$$

где

$$J_k = \int_{\Omega} \frac{\sin \varphi \sin \psi F(\varphi) F(\psi)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi - \cos^2 \theta + 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta}} \times \\ \times \frac{d\varphi d\psi}{\sin^2 \varphi/2 (\sin^2 \psi/2)^{2-k}}.$$

Здесь мы воспользовались общепринятым обозначением для форм-фактора заряда ядра

$$F(\varphi) = \frac{4\pi}{2k \sin \varphi/2} \int_0^{\infty} r \rho(r) \sin(2kr \sin \varphi/2) dr, \quad (2.4)$$

Задавая различные распределения плотности заряда, можно легко вычислить азимутальную асимметрию. Так как при выводе (2.3) мы не конкретизировали потенциал взаимодействия, то (2.3) позволяет учитывать как эффекты экранировки, так и размер ядра.

§ 3. Эффект экранирования

При малых энергиях и углах, экранирование электрического заряда ядра существенным образом искажает картину рассеяния на точечном силовом центре. Мы здесь приведем лишь грубую оценку экранировки. Для простоты рассмотрим взаимодействие типа

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} e^{-r/a},$$

где a — Томас-фермиевский радиус атома. Начиная с энергии падающего электрона 40–50 кэВ

$$ka \gg 1$$

и в этом случае

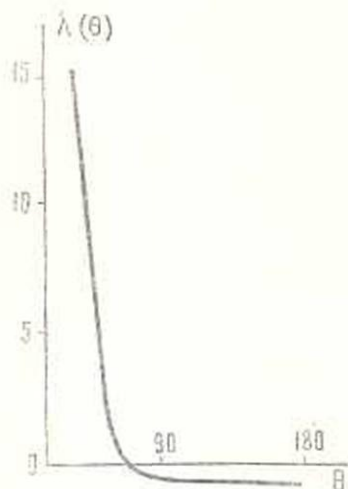
$$\Delta(\theta) = \Delta'(\theta) \left\{ 1 + \frac{1}{4k^2 a^2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} \left(1 + \frac{\cos^2 \theta/2}{\ln \sin \theta/2} \right) \right\} = \\ = \Delta'(\theta) \left\{ 1 + \frac{1}{4k^2 a^2} \lambda(\theta) \right\}. \quad (3.1)$$

$\lambda(\theta)$ — довольно плавная функция от угла θ и очень быстро растет с уменьшением угла и энергии (см. фиг. 1). Такая картина ха-

чественно согласуется с экспериментальными результатами. Более точные результаты, видимо, можно получить, если для атома воспользоваться моделью Томаса-Ферми. Для ртути с экранированным потенциалом

$$V(r) = \frac{80e^2}{r} [0,19e^{-0,257r/a} + 0,56e^{-0,779r/a} + 0,25e^{-3,16r/a}],$$

при средних энергиях (40–60 кэв) и больших углах можно получить 5–6 процентный эффект.

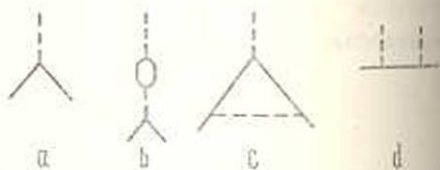


Фиг. 1.

Теоретические и экспериментальные результаты при малых энергиях сильно отличаются ($\approx 50\%$). Теория предсказывает, как правило, большую асимметрию, чем дает эксперимент. Поэтому никак нельзя ожидать, что даже очень точный учет экранирования может объяснить такое большое расхождение между экспериментом и теорией.

§ 4. Радиационные поправки

Поляризационные эффекты возникают лишь во втором борновском приближении. В этом же приближении существенны и радиационные поправки. Диаграммы, изображающие рассеяние во внешнем поле (a, d) и радиационные поправки к нему (b, c), изображены на фиг. 2. Мы не будем приводить здесь конкретных выкладок и укажем только, что в приближении $1/m$ для азимутальной асимметрии $\Delta(\theta)$ радиационные поправки дают нулевой эффект. Основываясь на эти результаты, тем не менее нельзя утверждать, что радиационные поправки вообще не существенны. Видимо, радиационные поправки существенны к высшим борновским приближениям, но теоретическая оценка эффектов такого высокого порядка очень затруднительна (результаты этого параграфа получены совместно с Ю. Вартамяном).



Фиг. 2.

§ 5. Эффекты поляризации для ρ -мезона

Как показывает формула Мотта (1.3), азимутальная асимметрия при двойном рассеянии максимальна при скоростях 0,7–0,8 c. При больших энергиях поляризация практически отсутствует. Для электрона $\beta = 0,7-0,8$ соответствует энергиям в несколько сот кэв и при

таких энергиях распределение заряда ядра для электрона можно считать точечным. Для μ -мезона $\beta = 0.7-0.8$ соответствует энергиям в несколько десятков мэв, и структурные особенности ядра должны быть учтены. Мы не будем конкретизировать распределение заряда ядра и приведем результат для малых энергий

$$\Delta(\theta) = \Delta(0) \left\{ 1 + \frac{2}{3} k^2 \langle r^2 \rangle \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\cos^2 \theta/2}{\ln \sin \theta/2} \right) \right\}. \quad (5.1)$$

Здесь $\langle r^2 \rangle$ — среднеквадратичный радиус ядра.

При больших энергиях, естественно, такого простого результата получить невозможно.

Имеет ли формула (5.1) практическую ценность? Моттовское рассеяние является привлекательным и мощным средством измерения поляризации электрона. Поляризацию же μ -мезона легко и удобно измерять по распаду. Тем не менее, можно поставить самостоятельные эксперименты по рассеянию поляризованного μ -мезона. Они могут служить дополнительным средством выяснения, нет ли у μ -мезона какого-нибудь взаимодействия, отличного от чисто электромагнитного.

§ 6. Обсуждение результатов

Относительно высокое значение асимметрии при Моттовском рассеянии делает этот метод наиболее привлекательным для измерения поляризации электронов. Согласно теории двухкомпонентного нейтрино, электроны, испускаемые при β распаде ядер, должны быть продольно поляризованы. Эксперименты подтверждают расчетное значение поляризации v/c с точностью до 15–20%. Эти отклонения могут быть вызваны систематическими ошибками эксперимента. Некоторые отклонения, видимо, можно приписать неточному теоретическому знанию функции $\Delta(\theta)$. Наблюдаемые в эксперименте большие отклонения от расчетного значения $\Delta(\theta)$ (при малых энергиях), как мы уже показали, нельзя объяснить ни экранированием, ни радиационными поправками. Видимо, в эксперименте имеются большие систематические ошибки, связанные с неупругим рассеянием электронов. Отклонения могут быть связаны с деполяризующим влиянием обменного рассеяния на атомных электронах. Если же полагаться на экспериментальные данные, то не чувствуется, в каком направлении нужно исправить теоретические результаты.

Автор выражает благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждение результатов.

Վ. Մ. Հարությունյան

ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ԲԵՎԵՌԱՑՈՒՄԸ՝ ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ՎՐԱ
ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՑՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածամ հաշված է միջուկների վրա առաձգականորեն ցրված էլեկտրոնների բևեռացումը: Գնահատված են էկրանացմամբ և միջուկի չափերով պայմանավորված էֆեկտները:

Ցույց է տրված, որ $\frac{1}{137}$ մոտավորությամբ սաղիացիոն ուղղումները էական չեն:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sherman N. Coulomb scattering of relativistic by point nuclei. Phys. Rev. 103, 1601, 1956.
2. Ryu N. Polarisation of electrons by scattering. J. Phys. Japan, 7, 125, 130, 1952.
3. Mohr C. B. O. and Tassie L. J. The scattering and polarisation of electrons by gold. Proc. Phys. Soc. A 67, 711, 1954.
4. Арутюнян В. М., Мурадян Р. М. Рассеяние дираковских частиц во втором борновском приближении. ЖЭТФ, 36, 1542, 1959.

Н. А. Безирганян, А. Г. Акритов

Характер увеличения интенсивности волн, отраженных от изогнутых кристаллов

Хорошо известно, что светосила рентгеновских спектрографов с изогнутыми кристаллами на один-два порядка больше светосилы спектрографов с плоскими кристаллами. Это увеличение интенсивности пучка рентгеновских волн, отраженных от изогнутого кристалла, объясняется фокусирующим свойством изогнутого кристалл-анализатора.

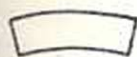
В данной работе рассматриваются следующие два вопроса.

1. Механизм изгиба кристалл-анализатора,
2. Характер фокусировки волн, отраженных от изогнутого кристалла.

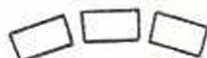
Механизму изгиба посвящены многочисленные экспериментальные работы советских и иностранных исследователей. Полный обзор этих работ дан в [1]. Здесь этот вопрос рассматривается теоретически с помощью исследования интенсивности волн, отраженных от изогнутых кристаллов.

О характере изгиба кристалла можно сделать одно из следующих предположений:

- а) при изгибе кристалла его атомные плоскости искривляются непрерывно (см. фиг. 1), этот изгиб мы назовем идеальным изгибом;
- б) при изгибе кристалла его атомные плоскости не искривляются, но образуются недеформированные кристаллические блоки, которые друг относительно друга поворачиваются на некоторый угол, зависящий от радиуса кривизны изогнутого кристалла (см. фиг. 2);
- в) при изгибе образуются кристаллические блоки и одновременно атомные плоскости этих блоков несколько искривляются (см. фиг. 3).



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Какое из этих предположений имеет место в действительности? На этот вопрос можно ответить, исследуя интенсивность рентгеновских волн, отраженных от плоского и изогнутого кристаллов.

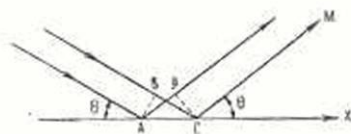
При исследовании интенсивностей мы должны исходить из того, что когда размеры отражающей атомной плоскости много больше, чем размеры первой зоны Френеля, то интенсивность отраженной волны практически становится равной одной четверти интенсивности волны, отраженной от первой зоны Френеля (см. [2]). Следовательно, при сравнении интенсивностей мы должны иметь в виду, что для таких кристаллов интенсивность отраженных волн тем больше, чем больше площадь первой зоны Френеля.

§ 1. Плоский кристалл

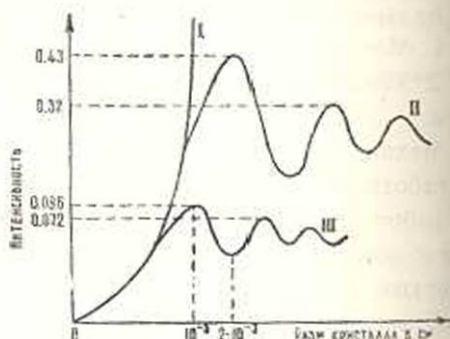
Для сравнения интенсивности волн, отраженных от изогнутого кристалла, с интенсивностью волн, отраженных от плоского кристалла, сначала рассмотрим случай плоского кристалла.

1. Если плоская монохроматическая волна падает на кристалл в точку наблюдения отраженных волн расположена так далеко, что волны, рассеянные различными атомами атомной плоскости в направлении точки наблюдения, можно считать параллельными (кинематическая теория Лауэ, см. фиг. 4), то интенсивность отраженной от атомной плоскости волны пропорциональна величине

$$\frac{\sin^2 M\pi A_1}{\sin^2 \pi A_1} \cdot \frac{\sin^2 N\pi A_2}{\sin^2 \pi A_2} \quad (1.1)$$

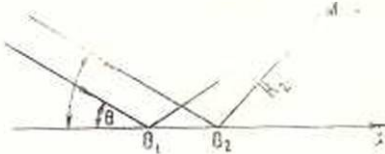


Фиг. 4.



Фиг. 5.

В этом случае размеры первой зоны Френеля бесконечно велики и интенсивность отраженных волн беспрестанно увеличивается с увеличением размеров отражающей плоскости (фиг. 5, кривая I). Бесконечность площади первой зоны Френеля объясняется тем, что разность ходов между волнами, отраженными различными атомами плоскости в направлении точки наблюдения M , равна нулю ($AD - BC = 0$, фиг. 4).



Фиг. 6.

2. В случае плоской монохроматической первичной волны, когда отраженную волну нельзя считать плоской (см. фиг. 6), интенсивность волны, отраженной от атомной плоскости, пропорциональна величине (см. [2])

$$\left\{ \left[\int_0^b \cos \frac{kx^2 \sin^2 \theta}{2R_1} dx \right]^2 + \left[\int_0^b \sin \frac{kx^2 \sin^2 \theta}{2R_1} dx \right]^2 \right\} \times$$

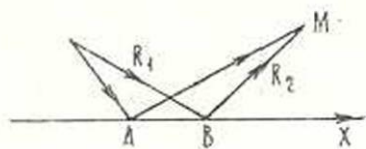
$$\times \left\{ \left| \int_0^1 \cos \frac{ky^2}{2R_1} dy \right|^2 + \left| \int_0^1 \sin \frac{ky^2}{2R_1} dy \right|^2 \right\}, \quad (1.2)$$

где U и V — размеры плоскости в направлениях X и Y соответственно. В этом случае первая зона Френеля имеет форму эллипса, полуоси которого равны (см. [3])

$$a = \frac{\sqrt{\lambda R_1}}{\sin \theta}, \quad b = \sqrt{\lambda R_1}. \quad (1.3)$$

Пока размеры плоскости меньше, чем размеры первой зоны Френеля, интенсивность отраженной волны пропорциональна квадрату числа частиц, облучаемых первичной волной. С дальнейшим увеличением размеров плоскости, нарушается эта пропорциональность и интенсивность отраженной волны не только не увеличивается, но и может уменьшиться. Кривая II на фиг. 5 представляет для данного случая ход интенсивности отраженных волн в зависимости от размеров отражающей плоскости для отражения рентгеновских лучей $M\alpha K\alpha_1$ от кристалла кальцита (плоскости (211)).

В случае точечного источника, когда отраженную волну нельзя считать плоской (см. фиг. 7), интенсивность волны, отраженной от атомной плоскости, пропорциональна величине (см. [4])



Фиг. 7.

$$\left\{ \left| \int_0^U \cos \frac{kx^2 \sin^2 \theta \cdot (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} dx \right|^2 + \left| \int_0^U \sin \frac{kx^2 \sin^2 \theta \cdot (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} dx \right|^2 \right\} \times \left\{ \left| \int_0^V \cos \frac{ky^2 (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} dy \right|^2 + \left| \int_0^V \sin \frac{ky^2 (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} dy \right|^2 \right\}, \quad (1.4)$$

где U и V — размеры кристалла в направлениях X и Y соответственно. В этом случае, как и во втором, первая зона Френеля имеет форму эллипса, полуоси которого равны

$$a = \sqrt{\frac{R_1 R_2 \lambda}{(R_1 + R_2) \sin^2 \theta}}, \quad b = \sqrt{\frac{R_1 R_2 \lambda}{R_1 + R_2}}. \quad (1.5)$$

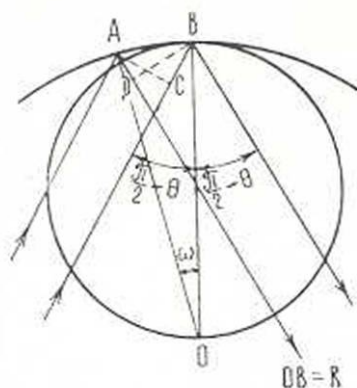
Как видно из последнего, в случае точечного источника полуоси первой зоны Френеля уменьшены в $\sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$ раз по сравнению с падающей плоской волной (второй случай). Так же, как и во втором случае, кривая III на фиг. 5 представляет ход интенсивности отраженных волн в зависимости от размеров отражающей плоскости в случае точечного источника, при отражении рентгеновских лучей $M\alpha K\alpha_1$.

от кристалла кальцита (плоскости (211)). Как видно из фиг. 5, ход интенсивности в зависимости от размеров кристалла тот же самый, что и во втором случае, но в этом случае интенсивность меньше и ее максимумы смещены в сторону меньших размеров кристалла. Этого и надо было ожидать, так как в этом случае размеры первой зоны сокращены.

§ 2. Изогнутый кристалл

Рассмотрим интенсивность волн, отраженных от идеально изогнутого (атомные плоскости непрерывно искривлены) кристалла.

1. Случай, когда плоская монохроматическая волна падает на идеально изогнутый кристалл и точка наблюдения расположена так далеко, что волны, рассеянные различными атомами изогнутого кристалла в направлении точки наблюдения, считаются параллельными. Рассмотрен в работах [5]—[7]. Здесь мы определим размеры первой зоны Френеля. Из фиг. 8 видно, что разность ходов волн, отраженных от точек A и B , равна



Фиг. 8.

$$\Delta = AD - BC = 4R \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin \theta.$$

Если точка A расположена на границе первой зоны Френеля, то

$$4R \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}.$$

Имея в виду, что ω малая величина, из последнего найдем

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{2R \sin \theta}}.$$

Для размера первой зоны в направлении X получим

$$a = \omega R = \sqrt{\frac{R\lambda}{2 \sin \theta}}. \quad (2.1)$$

Нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае первая зона Френеля в направлении Y неограничена, т. е. $b = \infty$. Действительно, разность ходов между волнами, отраженными в точке B и в любой точке оси Y в направлении точки наблюдения (ось Y перпендикулярна к плоскости чертежа и проходит через B) равна нулю, что означает неограниченность первой зоны в направлении Y .

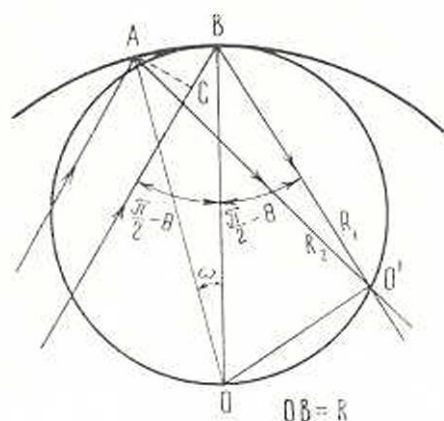
2. В случае, когда плоская монохроматическая волна падает на идеально изогнутый кристалл и отраженную волну нельзя считать плоской (см. фиг. 9), размеры первой зоны Френеля можно определить следующим образом.

Разность ходов Δ между волнами, отраженными от точек A и B , равна (см. фиг. 9)

$$\Delta = BC - (R_1 + R_2).$$

Если точка A расположена на границе первой зоны Френеля, то имеет место соотношение

$$2R \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(\theta - \frac{\omega}{2} \right) + R \sin \theta - \\ - R \sqrt{1 + 2 \cos \theta (\sin \theta \sin \omega - \cos \theta \cos \omega + \cos^2 \theta)} = \frac{\lambda}{2}. \quad (2.2)$$



Фиг. 9.

Имея в виду, что для первой зоны Френеля $\omega \sim 10^{-4}$, для ω из (2.2) с точностью λ^2 получим

$$\omega = \frac{-N_1 \pm \frac{N_0 N_1 - 2(L_0 M_1 + L_1 M_0)}{\sqrt{N_0^2 - 4M_0 L_0}} + N_0 \frac{M_1}{M_0}}{2M_0} \sqrt{N_0^2 - 4M_0 L_0} \cdot \frac{M_1}{M_0} \cdot \lambda, \quad (2.3)$$

где

$$M_0 = 1 - \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{1}{2} (W - F_0 \operatorname{tg} \theta) \frac{1}{\cos \theta}, \quad M_1 = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \theta}{R \cos \theta},$$

$$N_0 = (F_0 - W \operatorname{tg} \theta) \frac{1}{\cos \theta} - 2 \operatorname{tg} \theta, \quad N_1 = -\frac{1}{R \cos \theta},$$

$$L_0 = \operatorname{tg}^2 \theta + (W - F_0 \operatorname{tg} \theta) \frac{1}{\cos \theta} + \frac{G_0}{\cos^2 \theta}, \quad L_1 = \frac{\operatorname{tg} \theta}{R \cos \theta} - \frac{2 \sin \theta}{R},$$

$$F_0 = 4 \sin \theta, \quad G_0 = 2 \sin^2 \theta, \quad W = 2 \cos \theta.$$

Таким образом, для линейных размеров первой зоны Френеля по дуге окружности радиуса R получим

$$\sqrt{A+B \sin \omega - C \cos \omega + z^2} + \sqrt{A-B \sin \omega - C \cos \omega + z^2} - D = \frac{\lambda}{2} \quad (2.6)$$

С точностью λ^2 из (2.6) для ω_0 (ω_0 — значение ω при $z=0$) получим

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{-CD}}{B} = \frac{2C^2D^3 - 4AB^2D + 2B^2D^3}{\sqrt{C^2D^4 - 4AB^2D^2 + B^2D^4 + 4B^4}} \quad (2.7)$$

При выводе (2.7) имели в виду, что ω_0 малая величина, а знак под корнем выбирается так, чтобы для ω_0 получили вещественное значение.

Таким образом, для линейных размеров первой зоны Френеля по дуге получим

$$a = \omega_0 R = \frac{R \sqrt{\lambda} \sqrt{-CD}}{B} = \frac{2C^2D^3 - 4AB^2D + 2B^2D^3}{\sqrt{C^2D^4 - 4AB^2D^2 + B^2D^4 + 4B^4}} \quad (2.8)$$

Найдем размеры первой зоны по образующей. При $\omega = 0$ из (2.6) для $z = z_0 = b$ получим

$$2 \sqrt{A - C + b^2} = \frac{\lambda}{2} + 2 \sqrt{A - C}$$

откуда, с точностью λ^2 , получим

$$b = \sqrt{\frac{\lambda R_0^2}{2}} \quad (2.9)$$

§ 3. Обсуждение результатов

Для удобства обсуждения все полученные нами результаты представим одной таблицей.

Так как в случае атомных плоскостей, размеры которых много больше размеров первой зоны Френеля, интенсивность отраженной волны равна одной четверти интенсивности волны, отраженной первой зоной Френеля, для сравнения между собой интенсивностей отраженных волн в различных случаях достаточно сравнить между собой размеры первой зоны Френеля.

Если кристалл изгибается идеально, т. е. если атомные плоскости искривляются непрерывно (отдельные части отражающей плоскости оптически не независимы), то для расчета интенсивности отраженной волны применим метод зон Френеля. Следовательно, предполагая, что кристалл изгибается идеально, для сравнения между собой интенсивностей волн, отраженных в рассматриваемых нами различных случаях, мы можем пользоваться приведенной таблицей для размеров первой зоны Френеля. Из таблицы можно сделать следующие выводы.

Таблица размеров первой зоны Френеля

Вид волны		Размеры первой зоны Френеля			
падающие волны	отраженные волны	Плоский кристалл		Изогнутый кристалл	
		в направлении X	в направлении, перпендикулярном к X	по дуге кругового сечения цилиндрической поверхности	по образующей цилиндрической поверхности
1	2	3	4	5	6
1 Плоские (фиг. 4, 8)	Плоские (фиг. 4, 8)	∞ (формула 1.1)	∞ (формула 1.1)	$\sqrt{\frac{R_1 l}{2 \sin \theta}}$ (формула 2.1)	∞
2 Плоские (фиг. 5, 9)	Сходящиеся (фиг. 5, 9)	$\sqrt{\frac{R_1 l}{\sin^2 \theta}}$ (формула 1.3)	$\sqrt{\frac{R_1 l}{\sin^2 \theta}}$ (формула 1.3)	∞R (формула 2.4)	$\sqrt{R_1 l}$ (формула 2.5)
3 Сферические (точечный источник) (фиг. 6, 10)	Сходящиеся (фиг. 6, 10)	$\sqrt{\frac{R_1 R_2 l}{(R_1 + R_2) \sin^2 \theta}}$ (формула 1.5)	$\sqrt{\frac{R_1 R_2 l}{R_1 + R_2}}$ (формула 1.5)	$R \sqrt{1 \pm \frac{2C^2 D^2 - 4AB^2 D + 2B^4 D^2}{CD^2 - 4AB^2 D^2 + BD^4 + 4B^4}}$ (формула 2.8)	$\sqrt{\frac{R_1 l}{2}}$ (формула 2.9)

1. В случае, когда падающая волна плоская и точка наблюдения так далека, что отраженную волну можно считать плоской, идеальный плоский кристалл отражает сильнее, чем идеально изогнутый кристалл, ибо первая зона в случае плоского кристалла со всех сторон неограничена, а в случае изогнутого кристалла — неограничена только в направлении оси Y (см. первую строку, 3—6 столбцы таблицы).

2. В случае, когда падающая волна плоская, но отраженную волну нельзя считать плоской, идеальный плоский кристалл отражает слабее, чем идеально изогнутый кристалл. В этом случае размеры первых зон Френеля в направлениях Y (плоский кристалл) и образующей цилиндрической поверхности (изогнутый кристалл) одинаковы (см. 4-ый и 6-ой столбцы второй строки таблицы), однако, большая полуось первой зоны изогнутого кристалла значительно больше, чем большая полуось первой зоны плоского кристалла.

3. В случае, когда падающая волна сферическая (точечный источник), а отраженную волну нельзя считать плоской, идеальный плоский кристалл отражает слабее, чем идеально изогнутый кристалл. В этом случае, как и в предыдущем, размеры малых полуосей, т. е. размеры первых зон в направлениях Y (плоский кристалл) и образующей цилиндрической поверхности (изогнутый кристалл) равны (см. 4 и 6 столбцы 3-ей строки таблицы), но большая полуось первой зоны Френеля изогнутого кристалла больше, чем большая полуось первой зоны плоского кристалла. Для излучения M_0K_0 и кристалла кальцита отношение этих полуосей равно

$$\frac{a_{из}}{a_{пл}} = 1,6. \quad (3.1)$$

4. Как уже указывалось, из экспериментальных данных известно, что при точечном источнике интенсивность отражения изогнутого кристалла на один-два порядка больше интенсивности отражения плоского кристалла и, что увеличением рабочей части (внутри области отражения) изогнутого кристалла интенсивность отражения увеличивается. С другой стороны, как показывают наши расчеты, в случае идеального изгиба

а) увеличение рабочей части кристалл-анализатора вне площади первой зоны не должно привести к увеличению интенсивности отражения, ибо прибавление последних зон не увеличивает интенсивность, а лишь ведет к ее незначительным колебаниям;

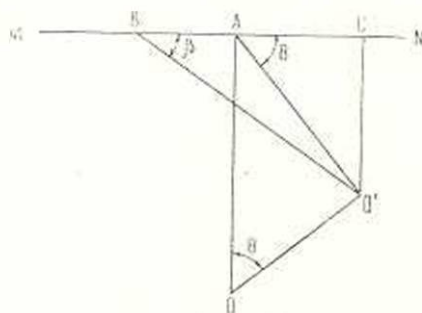
в) увеличение интенсивности отражения объясняется увеличением размеров первой зоны Френеля.

Однако, увеличение размеров первой зоны определяется отношением (3.1), которым нельзя объяснить обнаруженное на эксперименте такое большое увеличение отражения изогнутого кристалла при точечном источнике. Следовательно, из всего вышесказанного можно заключить, что при изгибе кристалл-анализатор разлагается

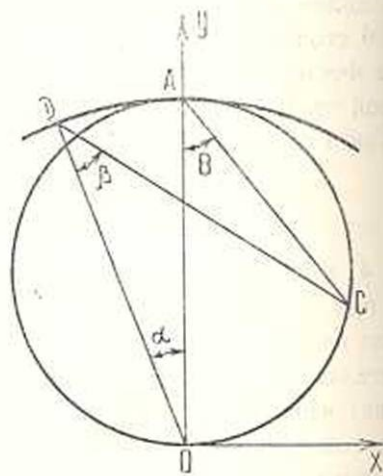
на оптически независимые кристаллические блоки. Действительно, только в случае, когда кристалл состоит из оптически независимых частей, может происходить увеличение (вне области первой зоны) отражения с увеличением рабочей части кристалл-анализатора при точечном источнике, так как в этом случае увеличение площади первой зоны Френеля относительно плоского кристалла небольшое (см. (3.1)).

Таким образом, мы приходим к заключению, что увеличение интенсивности отражения изогнутого кристалла обусловлено не интерференционными явлениями, а простым увеличением той части кристалла, которая находится в отражающем положении. Интенсивность в фокусе рентгеновского спектрографа аддитивно суммируется из интенсивностей отражения отдельных частей действующей поверхности изогнутого кристалл-анализатора. С другой стороны можно доказать, что при точечном источнике размеры части изогнутого кристалла, находящейся в отражающем положении, на один-два порядка больше аналогичной части плоского кристалла, чем и объясняется столь сильное увеличение интенсивности отражения изогнутого кристалла.

Действительно, пусть расходящийся монохроматический пучок рентгеновских лучей из точечного источника O' падает на кристалл MN (фиг. 11, $AO = R$, $O'C \perp MN$), где θ — угол Вульфа-Брегга. Согласно динамической теории интерференции рентгеновских лучей угловая ширина отражения для хо-



Фиг. 11.



Фиг. 12.

роших кристаллов — порядка $10''$ (от $3.5''$ до $10''$ и несколько больше). Если AB — левая половина действующей части кристалла при точечном источнике, т. е. если $\theta = 2 \sim 10''$, то для излучения $M\alpha K\alpha$ и кристалла кальцита (плоскости (211)) получим

$$I_{\text{из}} = AB = \frac{R \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \beta} = R \cdot 0,0000506.$$

Для левой половины действующей части изогнутого кристалла, т. е. для $AD = I_{\text{из}}$ (фиг. 12, $AO = R$),

$$I_{02} = R \arcsin \frac{bc + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - b^2}, \quad (3.2)$$

где $a = \cos^2 \theta (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \beta)$, $b = \sin \theta \cos \theta (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \beta)$, $c = \operatorname{ctg} \beta$. В (3.2) перед корнем знак плюс соответствует левой половине, а знак минус — правой половине действующей части изогнутого кристалла. Из (3.2) для $M_0 K_{\alpha}$ и (211) плоскостей* получим

$$I_{02} = R \cdot 0,003642 \quad \text{при } \theta - \beta = 10^\circ.$$

Следовательно, для отношения действующих частей изогнутого и плоского кристаллов при точечном источнике, получим

$$\frac{I_{02}}{I_{01}} = \frac{\arcsin \left(\frac{bc + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \right)}{\sin \theta \operatorname{ctg} \beta (\sin \theta - \cos \theta \operatorname{tg} \beta)} \approx 72. \quad (3.3)$$

Таким образом, действующая часть изогнутого кристалла почти на два порядка увеличивается. Это хорошо совпадает с известным из эксперимента увеличением интенсивности отражения изогнутого кристалла.

Все вышеприведенные расчеты были произведены в рамках кинематической теории интерференции рентгеновских лучей, однако, нетрудно убедиться в том, что в данном вопросе применение динамической теории ничего нового не дало бы. Действительно, во-первых, согласно динамической теории с увеличением размеров отражающего монокристалла уменьшается интенсивность отраженных рентгеновских лучей и, во-вторых, для кристаллических блоков, на которые разбивается кристалл-анализатор при изгибе, результаты динамической и кинематической теории совпадают [8].

Ереванский Государственный университет
Армянский Сельскохозяйственный институт

Поступила 21 II 1961

Պ. Լ. Բեգրեղանյան, Ս. Գ. Սեփրոսով

ՀԱՎԱԾ ԲՅՈՒՐԵՆԵՐԻՑ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՎԱԾ ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ՍԵՄԱՑՄԱՆ ԲՆՈՒՅԹԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հստակաբան թննարկվում են սինտգենյան ճառագայթների բյուրեղային անալիզատորների ճկման մեխանիզմը և ճկված բյուրեղներից անդրադարձած սինտգենյան ճառագայթների ֆոնտայման բնույթը: Պարզվում է, որ հարթ բյուրեղը սկզբնական հարթ ալիքի դեպքում ավելի ուժեղ է անդրադարձնում, քան ճկված բյուրեղը: Կետային աղբյուրի դեպքում (սկզբնական սֆերիկ

* Несмотря на то, что кальцит не изгибается (ломается), для сравнения с результатами [2] было удобно численные расчеты вести для кальцита.

ալիք) ձևված բյուրեղն ափսի ուժեղ է անդրադարձնում, քան հարթ բյուրեղը: Եթե անդրադարձնող բյուրեղի բոլոր անդրադարձնող մասերը օպտիկական անկախ չեն, ապա անդրադարձման ինտենսիվությունը բնորոշվում է ֆերենիի առաջին դրոտ չափերով:

Հաշվումները ցույց են տալիս, որ ձևված բյուրեղի դեպքում առաջին դրոտն ախրան մեծ չէ հարթ բյուրեղի դեպքի առաջին դրոտը, որով կարելի լինել րոշտարել անդրադարձման ինտենսիվության աչնալիս մեծացումը, որը տեղի ունի ձևված բյուրեղի դեպքում: Այս կողմից՝ հաշվածում ապացուցվում է, որ ձևված բյուրեղի դեպքում բյուրեղի զործող մասը մոտ 2 կարգ մեծ է հարթ բյուրեղի զործող մասից: Արապետով, ստացվում է, որ ձևված բյուրեղի անդրադարձման ինտենսիվության մեծացումը ոչ թե ինտերֆերենցիոն երևույթ է, այլ բյուրեղ-անալիզատորի իրարից օպտիկական անկախ զործող մասերի թվի մեծացման արդյունք: Հետևապես, ձևելիս բյուրեղը փեր է ավելում օպտիկական իրարից անկախ մասերի:

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Э. Е. Светосильная аппаратура для рентгеноспектрального анализа. Издательство АН СССР, М., 1957.
2. Безирганян П. А., Боровский И. Б. Зависимость интенсивности отраженных волн от размеров отражающего кристалла. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 1, 1960.
3. Безирганян П. А., Акритов А. Г. Зависимость интенсивности рентгеновских волн от формы отражающего кристалла (случай поглащающего кристалла). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 5, 1960.
4. Безирганян П. А., Акритов А. Г. Зависимость интенсивности рентгеновских волн от размеров отражающего монокристалла (случай точечного источника). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, в печати.
5. Боровский И. Б., Безирганян П. А. Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. Кинематическая теория — случай на прохождение. ДАН СССР, **88**, № 4, 1953.
6. Боровский И. Б., Безирганян П. А. Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. Кинематическая теория — случай на отражение. ДАН СССР, **88**, № 5, 1953.
7. Боровский И. Б., Безирганян П. А. Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. Интегральная интенсивность отражения для метода на прохождение. ДАН СССР, **92**, № 6, 1953.
8. Жданов Г. С. Основы рентгеноструктурного анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1940.

Э. М. Лазнев, В. А. Туманян

Об одной возможности измерения скоростей заряженных частиц

В настоящей заметке рассматривается возможность измерения скоростей заряженных частиц. Идея метода заключается в использовании релятивистского характера взаимодействия пролетающей частицы с полем электромагнитной волны. Релятивистское изменение расстояния между точками встречи частицы с пиками волны предполагается наблюдать по излучению, вызываемому в этих точках ускоренными электронами ионизации.

Возможность измерения скорости частицы при помощи стоячей электромагнитной волны была рассмотрена в работе [1]. В этом случае расстояние между соседними точками встречи пролетающей частицы с пиками электромагнитной волны выражается следующим образом

$$l = \frac{1}{2} \lambda \beta, \quad (1)$$

где λ — длина волны в резонаторе.

β — отношение скорости частицы к скорости света.

В полости резонатора в объеме нескольких см³ была выполнена камера Вильсона и расстояние l измерялось по модуляции следа.

Существенным ограничением метода является медленное изменение β в релятивистской области энергий (см. кривую 1 на фиг. 1). В связи с этим, при продвижении в область больших энергий возникает необходимость прецизионных измерений l , что приводит к непреодолимым трудностям.

Аскарьяном было показано [2], что в случае бегущей электромагнитной волны зависимость l от β должна резко меняться. Рассмотрим характер изменения расстояния между точками встречи пролетающей частицы с пиками бегущей электромагнитной волны в следующих двух случаях.

1. *Фазовая скорость бегущей волны не равна скорости света ($v_\phi \neq c$).*

Тогда выражение для l принимает вид

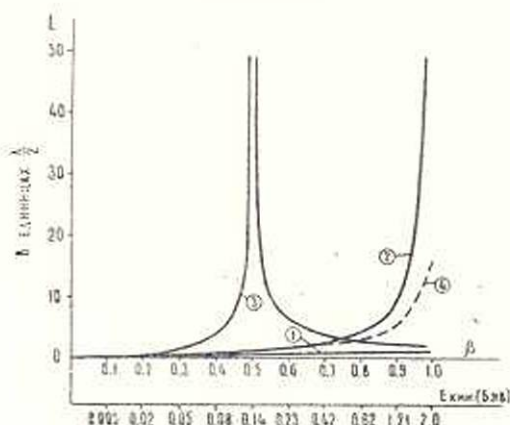
$$l = \frac{\lambda}{2} \frac{v/v_\phi}{|1 - v/v_\phi \cdot \cos \alpha|}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что соответствующим выбором v_ϕ можно добиться максимальной чувствительности I к изменению β в определенных областях энергий частиц (см. кривую 3 на фиг. 1).

2. Фазовая скорость бегущей волны равна скорости света ($v_\phi = c$).

В этом случае для I имеем следующее выражение

$$I = \frac{\lambda}{2} \frac{\beta}{1 - \beta \cos \alpha}. \quad (3)$$



Фиг. 1.

Зависимость I (в единицах $\frac{\lambda}{2}$) от β и $E_{кин}$ для протонов:

1. Согласно (1).
2. Согласно (3) при $\cos \alpha = 1$.
3. Согласно (2) при $\cos \alpha = 1$ и $v_\phi = 0.5c$.
4. Согласно (3) при $\cos \alpha = 1$.

В формулах (2) и (3) α -угол между направлением скорости частицы и волновым вектором.

В частности, при $\cos \alpha = 1$ имеем

$$I = \frac{\lambda}{2} \beta (1 + \beta) \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2, \quad (4)$$

где E — полная энергия частицы,

m_0 — масса покоя частицы.

Как видно из фиг. 1, характер изменения I дает возможность измерения β с необходимой точностью до сколь угодно больших значений. К сожалению, в существенно релятивистской области энергий возрастание I настолько велико (например, в случае $v_\phi = c$ при $\beta = 0,9999$, $I = 9999 \frac{\lambda}{2}$), что для проведения подобных измерений

требуются установки большой протяженности. Ограничения роста l можно добиться соответствующим выбором угла влета и значения фазовой скорости. Однако, любое ограничение на рост l при увеличении β приводит к соответствующему уменьшению точности измерений. Поэтому выбор α и v_ϕ в каждой области скоростей должен производиться с учетом необходимой степени точности их определения.

Поскольку длина участка, на котором ускоренные электроны ионизации приводят к появлению свечения, зависит от β также, как и расстояние l , то это обстоятельство можно использовать для уменьшения габаритов установки. Дальнейшего уменьшения размеров можно добиться при получении сведений о сдвиге фаз $\Delta\varphi$ между частицей и волной за время пролета в установке.

Таким образом, использование эффектов согласно формулам (2), (3) и (4) дает возможность измерения больших скоростей, чем это практически допустимо по (1). Более того, как уже отмечалось, выбор $v_\phi < c$ создает возможность для прецизионных измерений в требуемых диапазонах скоростей. Это также превосходит возможности измерений по (1) в области малых и средних энергий.

Однако, при продвижении в область более высоких энергий с сохранением точности измерений, геометрическая длина установки должна расти $\sim \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2$. Это ограничивает возможности метода, поскольку появляется необходимость сооружения весьма протяженных установок, что, в свою очередь, приводит к соответственному росту потребляемой высокочастотной мощности и уменьшению эффективных телесных углов.

Для преодоления этой трудности рассмотрим следующую возможность. Пусть имеем систему резонаторов, расположенных вдоль прямой и возбуждаемых со сдвигом фаз по некоторому закону $\varphi(l)$. Предположим, что пролетающая частица встречается с максимумом напряженности поля в первом резонаторе. Условие следующей встречи частицы с максимумом в одном из последующих резонаторов, находящегося на некотором расстоянии l от первого, запишется в виде

$$\varphi(l) + l \frac{\omega}{v \cos \alpha} = m\pi, \quad (5)$$

где m следует положить равным единице. При $m = 2, 3, \dots$ получим условие второй, третьей и т. д. встреч. Далее везде считается $m=1$, поскольку желательно иметь минимальные размеры установок. Формула (5) описывает наиболее общий случай встречи пролетающей частицы с электромагнитной волной в заданной фазе.

Например, легко можно убедиться, что формулы (1) и (3) получаются как частные случаи (5) при $\varphi(l) = 0$ и $\varphi(l) = -\frac{2\pi l}{\lambda}$ соответственно.

В рассматриваемой системе резонаторов заложены довольно широкие возможности для измерения скоростей заряженных частиц. Из (5), соответствующим выбором $\varphi(l)$, можно получить любую зависимость l от β , определяемую требованиями эксперимента. Рассмотрим, в частности, два типа зависимости l от β при $\cos \alpha = 1$

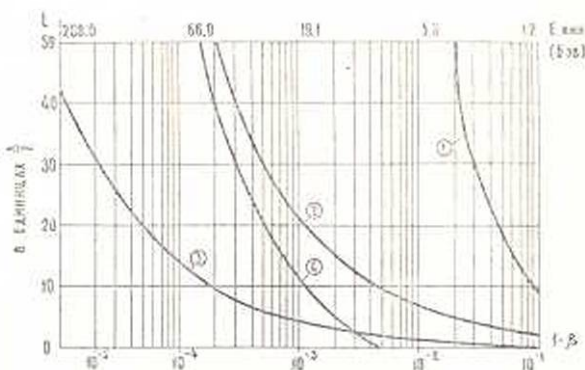
$$a) \quad l = \frac{\lambda}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad б) \quad l = \frac{\lambda}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \varepsilon \right); \quad (6)$$

где n и ε — положительные числа.

В этих случаях для $\varphi(l)$, согласно (5), получаются следующие выражения:

$$a) \quad \varphi(l) = \pi \left[1 - \frac{2l}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{nl} \right)^2}} \right], \quad (7)$$

$$б) \quad \varphi(l) = \pi \left[1 - \frac{2l}{\lambda} \frac{\left(\frac{nl}{\lambda} - \varepsilon \right)}{\sqrt{\left(\frac{nl}{\lambda} - \varepsilon \right)^2 - 1}} \right].$$



Фиг. 2.

Зависимость l (в единицах $\frac{\lambda}{2}$) от β и $E_{\min}$ для протонов:

1. Согласно (3) при $\cos \alpha = 1$.
2. Согласно (6а) при $\cos \alpha = 1$, $n = 2$.
3. Согласно (6а) при $\cos \alpha = 1$, $n = 10$.
4. Согласно (6б) при $\cos \alpha = 1$, $n = 2$, $\varepsilon = 10$.

Значения n и ε выбираются исходя из требований эксперимента и дают возможность при приемлемых размерах установок измерять достаточно высокие энергии (см. фиг. 2). Согласно (6а) l зависит линейно от отношения $\frac{E}{m_0 c^2}$, что дает возможность при неизменных

размерах установок проводить измерения при более высоких значениях энергий частиц, чем по формуле (4). Помимо этого, дальнейшего уменьшения габаритов установки можно добиться увеличением d . При реализации зависимости по (6б) установка будет реагировать только на частицы с энергией, большей некоторой заданной величины ε .

В экспериментальных условиях влет частицы в установку происходит под некоторым углом α , в общем случае отличным от нуля. Вопрос о возможности создания экспериментальных условий, при которых α с заданной степенью малости отличается от нуля, требует отдельного рассмотрения.

При влете частицы в установку под углом α , V фактически определяется проекцией скорости частицы на направление волнового вектора. Поэтому, экспериментально измеряя расстояние между отдельными отметками, определяем величину этой проекции. Разумеется, величину α можно определить, используя обычные гудоскопические системы, но при этом относительная погрешность измерения истинной скорости частицы будет определяться соответствующей ошибкой измерения величины α , необходимой степени малости которой добиться экспериментально довольно трудно. Поэтому, представляется целесообразным иметь установку, в которой не возникала бы необходимость определения угла влета частицы. Таким свойством будет обладать установка из двух полностью идентичных систем резонаторов или волноводов, оси которых расположены под некоторым фиксированным углом θ . При этих условиях измеряются две проекции скорости частицы

$$v_1 = v \cos \alpha, \quad v_2 = v \cos (\theta - \alpha)$$

и истинная величина скорости определится по формуле

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta}{\sin^2 \theta}}. \quad (8)$$

Поскольку θ можно фиксировать с весьма большой степенью точности, то относительная ошибка измерения v будет

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta v_1}{v_1} + \frac{\Delta v_2}{v_2}. \quad (9)$$

Таким образом, можно надеяться, что применение электромагнитных волн создаст новые возможности для измерения скоростей заряженных частиц.

Авторы выражают свою признательность Г. М. Гарибину и А. Е. Каплану за интересные обсуждения.

Է. Մ. Լազիկ, Վ. Հ. Թումանյան

ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՆԻԿՆԵՐԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶԱՓՄԱՆ ՄԵԿ
ՀՆԱՐԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է էլեկտրամագնիսական ալիքների կիրառությունների հնարավորությունը լիցքավորված մասնիկների տրագությունների չափման համար:

Դրա հետ կապված՝ մոնրամասն մերլուծվում են [1] և [2] աշխատություններում վաղորդ առաջադրված մեթոդները, ընդ որում մասնավորապես ցույց է տրված, որ $v \ll c$ ընտրությունը թույլատրում է կատարել ստույգ չափումներ փոքր և միջին էներգիաների սահմանում:

Ցույց է տրված, որ սպտադործկալ սեղմնատորների սխեմա, որոնք գրգռվում են ֆոզերի շեղումով, ըստ որևէ $\varphi(l)$ օրենքի, կարելի է սահմանափակվանին լայն հնարավորություններ β -ի որոշման համար:

$\varphi(l)$ -ի համար համապատասխան արտահայտություններից բխում են [1] և [2] ստացված արդյունքները, որպես մասնավոր դեպքեր:

Դիտարկված է մասնիկների α անկյան տակ ներս թռչելու հարցը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Gabor D., Hampton B. A Wilson cloud chamber with time-marking of particle tracks. Nature, 180, 746, 1957.
2. Аскарьян Г. А. Об определении скорости ионизирующих частиц по маркировке их треков высокочастотным электрическим полем. ЖЭТФ, 34, 1005, 1958.

Г. С. Салкян

Об уравнении состояния при сверхвысоких плотностях материи

§ 1. Асимптотический вид уравнения состояния

При решении космологической задачи, а также при расчете гиперонных конфигураций небесных тел, требуется знание уравнения состояния материи при плотностях энергий, превышающих плотность в атомных ядрах. Вопрос уравнения состояния при таких физических условиях, обсуждался в ряде работ [1]—[4]. В этих работах отмечалась неудовлетворительность приближения идеального газа при расчетах сверхплотных конфигураций небесных тел и делались попытки учитывать эффекты сил притяжения при обычных ядерных плотностях и отталкивания — при сверхядерных плотностях. Однако, в них речь шла лишь о качественной стороне вопроса. По-видимому наши знания в настоящее время еще недостаточны для нахождения точного уравнения состояния при плотностях барионов порядка ядерной и выше. Однако, нам кажется, что при чрезвычайно больших плотностях мы в состоянии сделать правильное заключение об асимптотическом поведении уравнения состояния. Ниже, говоря о частицах, мы имеем в виду барионы (нуклоны и гипероны), т. к. при обсуждаемых физических условиях материя преимущественно состоит из гиперонов и нуклонов [2]. Вклад электронов и μ -мезонов в плотность энергии и давление пренебрежимо мал.

Первый шаг в этом направлении был сделан Зельдовичем. В своей работе [5] он, предположив осуществление взаимодействия барионов через нейтральное векторное мезонное поле, показал, что асимптотическое уравнение состояния, взамен общепризнанного $P = \epsilon/3$, будет иметь вид

$$P(n) \approx \rho(n) \sim n^2, \quad (1.1)$$

где n — плотность частиц, P — давление, ρ — плотность энергии.

Цель нашей заметки:

1) показать, что при любом виде взаимодействия, если энергия взаимодействия частиц превышает их кинетическую, известный закон $P/\epsilon < 1/3$ нарушается,

2) показать, что уравнение (1.1), найденное Зельдовичем, не связано с частным видом взаимодействия через нейтральное мезонное поле, а вытекает из некоторых общих принципов физики. Говоря об общих принципах физики, здесь мы имеем в виду соотношение неопределенностей и тот факт, что скорость звука не должна превышать скорости света.

Посмотрим, что дает соотношение неопределенностей. Обсудим тот случай, когда частицы не обладают конечными размерами, так как в противном случае при возрастании плотности в конце концов наступает несжимаемость и при некотором конечном значении плотности материи $\partial P / \partial \rho = \infty$, что физически нелепо (скорость звука становится бесконечной). Пусть r — среднее расстояние между частицами. Соответствующая средняя плотность барионов равна

$$n \sim r^{-3}. \quad (1.2)$$

Согласно соотношению неопределенностей, при этой плотности частицы в среднем имеют импульс

$$p \sim \hbar / r \sim \hbar n^{1/3}$$

и кинетическую энергию

$$(m_k^2 c^4 + c^2 \hbar^2 n^{2/3})^{1/2} - m_k c^2,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка деленная на 2π , а индекс k указывает вид частиц. При интересующих нас больших плотностях материи, важную роль играет энергия взаимодействия частиц. Эта энергия при $n \gtrsim 10^{29} \text{ см}^{-3}$, помимо расстояния r зависит также от скоростей, от спина и орбитального момента частиц, по-видимому имеет обменный характер и т. д. В настоящее время мы мало знаем об этой энергии. Однако, имея в виду то обстоятельство, что радиус действия соответствующих полей достаточно мал, несмотря на возможный сложный характер сил, мы можем при вычислении полной энергии микроскопических областей реальную энергию взаимодействия, приходящую на объем V , заменить усредненной энергией $V n u(n)$. Тогда $u(n)$ имеет смысл потенциальной энергии для одной частицы. Следовательно, для полной средней энергии частиц мы можем написать

$$(m_k^2 c^4 + c^2 \hbar^2 n^{2/3})^{1/2} + u(n). \quad (1.3)$$

Здесь предполагается, что потенциальная энергия $u(n)$ для частиц всех видов одинакова, что является естественным при рассмотренном приближении.

Из (1.3) для плотности энергии получаем

$$\rho(n) \approx \sum_k c n_k (m_k^2 c^2 + \hbar^2 n^{2/3})^{1/2} + [n u(n)], \quad (1.4)$$

где n_k — концентрация частиц k -го вида. Суммирование производится по всем видам частиц, $n = \sum_k n_k$. Дальше не имеет смысла различать

массы разных барионов и целесообразно в (1.4) произвести дальнейшее усреднение, написав

$$\rho(n) \approx cn (m^2 c^2 + \hbar^2 n^{1/3})^{1/2} + nu(n), \quad (1.4')$$

где m — некоторая средняя масса барионов.

Теперь вычислим давление

$$P(n) = - \frac{\partial(\rho V)}{\partial V} \approx \frac{ch^2}{3} n^{2/3} (m^2 c^2 + \hbar^2 n^{1/3})^{-1/2} + n^2 u'(n). \quad (1.5)$$

Таким образом, для отношения давления и плотности энергии получаем

$$\frac{P(n)}{\rho(n)} \approx \frac{1}{3} \frac{ch^2 n^{2/3} (m^2 c^2 + \hbar^2 n^{1/3})^{-1/2} + 3n^2 u'(n)}{cn (m^2 c^2 + \hbar^2 n^{1/3})^{1/2} + nu(n)}. \quad (1.6)$$

Предполагая, что потенциальная энергия мала по сравнению с кинетической энергией, а также, что комптоновская длина волны бариона достаточно велика по сравнению со средним расстоянием между частицами ($m^2 c^2 \ll \hbar^2 n^{1/3}$), из (1.6) мы получаем известную асимптотическую формулу $P/\rho \approx 1/3$. Это имеет место для идеального газа, а также в случаях гравитационного, электромагнитного и некоторых типов мезонных полей.

Рассмотрим теперь тот случай, когда энергия взаимодействия превосходит кинетическую энергию частиц

$$u(n) \gg c (m^2 c^2 + \hbar^2 n^{1/3})^{1/2}. \quad (1.7)$$

Обсуждение этой возможности не лишено физического смысла, так как из опытов по изучению рассеяния нуклонов на нуклонах известно, что на расстояниях $r \lesssim 0,5$ ферми между частицами действуют весьма мощные силы отталкивания. Для объяснения результатов этих опытов даже допускается существование твердого ядра у барионов, что, конечно, неверно. При соблюдении условия (1.7), для плотности энергии и давления имеем

$$\begin{aligned} \rho(n) &\approx n \cdot u(n), \\ P(n) &\approx n^2 u'(n). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Имеется возможность определить вид функции $u(n)$, если мы используем известную формулу для скорости звука [6]

$$v = c \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}. \quad (1.9)$$

Имея в виду (1.8), находим

$$v = c \left(\frac{2nu' + n^2 u''}{u + nu'} \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Скорость звука v есть функция от плотности n . С увеличением плотности материи, v монотонно будет расти, стремясь к своему пре-

дельному значению, равному скорости света. При чрезмерно больших плотностях материи, когда скорость звука мало отличается от скорости света $v \approx c$, из (1.10) получаем

$$n^2 u'' + nu' - u(n) = 0. \quad (1.11)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$u(n) \approx an + \frac{b}{n}, \quad (1.12)$$

где a и b — постоянные интегрирования. Отсюда, для плотности энергии и давления получаем

$$\begin{aligned} \rho(n) &\approx b + an^2, \\ P(n) &\approx an^2 - b. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, при достаточно больших плотностях материи, мы получаем результат Зельдовича

$$P \approx \rho \approx a \cdot n^2. \quad (1.14)$$

Посмотрим, как повлияет этот результат на решение космологической задачи. В начальной стадии расширения вселенной, когда время τ мало, в предположении $P \approx \rho/3$ было найдено [7]

$$\rho(\tau) \cdot a^4(\tau) = \text{const}, \quad a = \text{const} \sqrt{\tau}, \quad (1.15)$$

где a — радиус кривизны пространства. В случае уравнения состояния (1.14) получаем

$$\rho \cdot a^6 = \text{const}, \quad a = \text{const} \sqrt[3]{\tau}. \quad (1.16)$$

Как мы видим, введение сил отталкивания увеличивает скорость расширения вселенной, но не устраняет особенности. Дальнейшее обсуждение этого вопроса мы не считаем целесообразным.

§ 2. Распространение звука в сверхплотных средах

С целью установления асимптотического вида уравнения в предыдущем параграфе мы для скорости звука использовали формулу (1.9). Она выведена в предположении, что метрика пространства является евклидовой. Докажем, что эта формула остается в силе и в случае весьма плотных сред, где метрика существенно отклоняется от евклидовой. С этой целью мы должны исходить из уравнений гидродинамики при наличии гравитационного поля [7]

$$\frac{1}{V-g} \frac{\partial}{\partial x^k} (V-g T^k_i) - \frac{1}{2} T^{kl} \cdot \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 0, \quad (2.1)$$

где T_{ik} — тензор энергии импульса. Допустим, что в среде распространяется слабое звуковое возмущение (т. е. продольные упругие волны). Имеем

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho + \varepsilon, & P' &= P + p, \\ g'_{ik} &= g_{ik} + a_{ik}, & T'^{ik} &= T^{ik} + t^{ik}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ρ' , P' и ρ , P — соответственно плотность энергии и давление при наличии и отсутствии звукового возмущения, ε и p — малые возмущения, t^{ik} и a_{ik} — возмущения компонентов тензора энергии — импульса и метрического тензора. Очевидно, компоненты тензора t^{ik} — величины такого же порядка малости, что и ε . Что касается компонентов тензора ρa_{ik} , то они являются величинами более высокого порядка малости. Это более или менее очевидно, так как бесконечно малое возмущение ε не может вызывать такого же порядка относительного изменения в метрике пространства. В справедливости этого утверждения мы можем непосредственно убедиться на примере метрики, обладающей сферической симметрией

$$ds^2 = -g_{ik} dx^i dx^k = e^\nu dx_0^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\lambda dr^2, \quad (2.3)$$

где ν и λ — неизвестные функции от координат x^0 и r . Если теперь по известным формулам вычислить контравариантные и смешанные компоненты тензора возмущения t^{ik} и t_i^k , то окажется, что они будут удовлетворять уравнению $t^{ik} = g^{ik} t_i^k$ лишь в том случае, когда $\rho a_{ik} \ll \rho$.

Итак, в первом приближении уравнения гидродинамики (2.1) принимают следующий вид

$$\frac{1}{V-g} \frac{\partial}{\partial x^k} (V-g t_i^k) - \frac{1}{2} t^{kl} \cdot \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 0. \quad (2.4)$$

Для вывода формулы скорости звука нам достаточно ограничиться рассмотрением случая сферически-симметрического гравитационного поля, описываемого квадратичной формой (2.3). Допустим, что до распространения звукового возмущения поле являлось статическим (т. е. ν и λ зависят лишь от r). Далее, допустим, что возмущение распространяется от центральной области в виде сферической волны так, что прежняя симметрия поля не нарушается (теперь ν и λ функции от r и x_0). Тогда, до распространения возмущения, из компонентов четырехмерной скорости отличны от нуля лишь u^0 , а при распространении возмущения — отличны от нуля u^0 и u^1 (используются обозначения $x^0, x^1, x^2, x^3 \rightarrow ct, r, \theta, \varphi$). Учитывая это, для компонент тензоров t_i^k и t^{ik} получаем

$$\begin{aligned} t_0^0 &= -\varepsilon, & t_0^1 &= -\beta(\rho + P), & t_1^0 &= \beta(\rho + P) e^{\lambda-\nu}, \\ t_1^1 &= t_2^2 = t_3^3 = P, & t^{00} &= \varepsilon e^{-\nu}, & t^{01} &= \beta(\rho + P) e^{-\nu}, \\ t^{11} &= \rho e^{-\lambda}, & t^{22} &= \rho/r^2, & t^{33} &= \rho/(r^2 \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Остальные компоненты равны нулю. Здесь $\beta = dr/dx_0$.

Подставив (2.5) в (2.4), получим следующие два уравнения

$$\frac{dz}{dx^0} + \frac{1}{V-g} \frac{\partial}{\partial r} [V-g \beta (P + \rho)] = 0,$$

$$(P + \rho) e^{\lambda \rightarrow} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^0} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\varepsilon + p}{2} \frac{dv}{dr} = 0, \quad (2.6)$$

Здесь мы можем ε выразить через p

$$\varepsilon = \frac{\partial \rho}{\partial P} p. \quad (2.7)$$

Из (2.6), исключив ε и скорость макроскопического движения β , получаем

$$\frac{1}{V-g} \frac{\partial}{\partial r} \left(V-g g^{11} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(V-g g^{00} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + A(r, t) = 0, \quad (2.8)$$

где введены обозначения

$$w = g_{00} p, \quad v = c \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}.$$

$$A(r, t) = \frac{1}{2 V-g} \frac{\partial}{\partial r} \left[V-g g^{11} p \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} - 1 \right) \right].$$

Уравнение (2.8) описывает процесс распространения сферической звуковой волны с переменной амплитудой и скоростью. Предполагая, что член $A(r, t)$, содержащий производную $\partial g_{00} / \partial r$, достаточно мал по сравнению с другими (это имеет место при достаточно медленно изменяющихся полях, т. е. когда $\partial g_{00} / \partial r \ll |g_{00}|$, причем при $\partial \rho / \partial P = 1$, $A(r, t) = 0$), мы получаем волновое уравнение, записанное в ковариантном виде

$$\frac{1}{V-g} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(V-g g^{ik} \frac{\partial w}{\partial x^i} \right) = 0, \quad (2.9)$$

где введено новое обозначение $x^0 = vt$. При написании (2.9) учтено, что w зависит лишь от x^0 и x^1 , а также то обстоятельство, что в рассмотренном случае тензор g^{ik} имеет лишь диагональные элементы. Величину $v = c (\partial P / \partial \rho)^{1/2}$ можно интерпретировать как скорость звука. Таким образом, формула остается верной и в случае сильных гравитационных полей. $\partial P / \partial \rho$, вообще говоря, является функцией r (за исключением асимптотического случая), поэтому и скорость звука v есть функция координаты r . В случае сверхплотной гиперонной конфигурации, в центре ее $v(0) \approx c$, по мере распространения волны ее скорость уменьшается и на поверхности звезды она спадает до значения обычной скорости звука.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность В. А. Амбарцумяну, Я. Б. Зельдовичу, В. Л. Гинзбургу и Е. Л. Фейнбергу за ценное обсуждение настоящей работы. Я признателен Я. Б. Зель-

довичу также за предоставленную возможность ознакомиться с его работой до появления в печати.

Ереванский государственный
университет
Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 21 VI 1961

Գ. Ս. Սահակյան

ՎԻՃԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ՆՅՈՒԹԻ ԶԱՓԱԶԱՆՑ ՄԵԾ ԽՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՐՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրված է նյութի վիճակի հափառումը այն դեպքում, երբ էներգիայի խտությունը գերազանցում է ստոմի միջուկում եղած խտությունը: Ցույց է տրված, որ չափազանց մեծ խտությունների դեպքում, երբ ձայնի արագությունը իր մեծությամբ քիչ է տարբերվում լույսի արագությունից, նյութի վիճակի հափառումն ընդունում է հետևյալ տեսքը:

$$P(n) \approx p(n) = an^2,$$

որտեղ n -ը մասնիկների խտությունն է, p -ն՝ էներգիայի խտությունը, P -ն՝ ճնշումը և a -ն հաստատուն է:

Այնուհետև ուսումնասիրված է ձայնի ալիքների տարածման պրոցեսը գերխիտ միջավայրերում, որտեղ տարածության մեարիկան էապես տարբերվում է էվկլիդեսյան (ուժեղ դաշտեր): Ձայնի տարածման արագության համար ստացվում է ճիշտ նույն բանաձևը, ինչ որ ստացվել էր էվկլիդեսյան միջավայրերի դեպքում, այսինքն՝ $v = c(\partial P / \partial \rho)^{1/2}$, որտեղ v -ն և c -ն համապատասխանաբար ձայնի և լույսի արագություններն են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Cameron A. G. W. Neutron Models. *Astrophys. J.*, **130**, 884, 1959.
2. Амбарцумян В. А. и Саакян Г. С. О вырожденном сверхплотном газе элементарных частиц. *Астрон. ж.*, **37**, 193, 1960.
3. Амбарцумян В. А. и Саакян Г. С. О равновесных конфигурациях сверхплотных вырожденных газовых масс. *Астрон. ж.* (в печати).
4. Salpeter E. E. Matter at High Densities. *Ann. of Phys.*, **11**, 393, 1960.
5. Зельдович Я. Б. Уравнение состояния при сверхвысокой плотности и релятивистские ограничения. *ЖЭТФ* (в печати).
6. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
7. Ландау Л. и Лифшиц Е. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.

Э. С. Бурунсузян

Помехозащищенность радиотелескопов и порог достоверного обнаружения

В работе [1] сформулировано понятие порога достоверного обнаружения дискретных источников космического радиоизлучения и дана формула, сравнивающая уровень достоверности с аппаратурным порогом чувствительности. При выводе этой формулы предполагалось, что помехи, уменьшающие надежность наблюдений, порождаются приемной аппаратурой и представляют собой, распределенный нормально, так называемый, белый шум.

Наблюдениями, проведенными в последние годы, установлено, что недостаточная разрешающая способность инструментов оказывает существенное влияние на надежность обнаружения. Надежность падает вследствие путаницы, обусловленной, в основном, боковыми лепестками и недостаточной узостью главного лепестка диаграмм антенн. Например, в работе [2] авторы приходят к выводу, что плотность источников, при которой в каталогах появляются ошибки, превышает величину — один источник на 25 диаграмм. Из сообщения [3] известно, что при составлении каталога 3С источники делились на классы А, В и С в порядке достоверности. Оказалось, что один источник класса А приходится на 26 диаграмм, класса В — на 5 диаграмм, а один источник из каталога 2С приходится лишь на 0,5 диаграммы антенны.

Влияние путаницы фактически сводится к повышению порога чувствительности радиотелескопа. Здесь источники выступают в качестве внешних помех. Внешними мы называем всякие помехи извне, воздействующие на антенны радиотелескопа вместе с полезным сигналом. Такие помехи в некоторых конструкциях антенн, минуя фокусирующее зеркало, непосредственно воздействуют на облучатели.

В отличие от аппаратурного порога чувствительности, определяемого внутренними (аппаратурными) помехами (см. [1]), имеет смысл ввести понятие реального порога чувствительности радиотелескопа, определяемого внешними помехами.

Наиболее естественным способом борьбы с внешними помехами является увеличение площади приема антенн, сопровождающееся сужением главного лепестка диаграммы направленности, а также разработка конструкций антенн, в которых ЭДС наводится только за счет приема энергии по направлению главного лепестка. С улучшением антенных систем

влияние внешних помех будет уменьшаться и реальный порог чувствительности будет приближаться к аппаратурному, но это дело будущего. Чувствительность современных радиотелескопов пока еще ограничена внешними помехами (они определяют выходные флуктуации) и следовательно пользование формулой, оценивающей аппаратурный порог чувствительности, лишено смысла. В связи с этим возникает необходимость оценки порога достоверного обнаружения по реальному (а не аппаратурному) порогу чувствительности.

Реальный порог чувствительности можно оценить по распределению внешних помех на записи оконечного индикатора радиотелескопа. Если флуктуации на этих записях распределены по закону близкому к нормальному, то формула, полученная в работе [1], может быть распространена и на случай сравнения порога достоверности с реальным порогом. Сказанное справедливо потому, что вывод этой формулы не зависит от характера помехи, важен лишь ее закон распределения.

Таблица 1

Границы величин амплитуд	Количество амплитуд
0—0,869	1056
0,869—2,197	750
2,197—4,355*	153
4,355—6,505	29
6,505—8,65	8
8,65—10,64	2
10,64—12,67	1
12,67—14,61	1
14,61—20,45	0
> 20,45	6
> 8,65	10

* Амплитуда величиной 4,355 соответствует источнику с потоком

$$S = 10 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \text{ гц},$$

Ниже показана таблица, характеризующая распределение амплитуд части выходных записей, по которым составлен каталог ЗС. Эта таблица приводилась в работе [4].

Воспользуемся, кроме того, данными, приведенными в пояснениях к каталогу ЗС (см. [5]). По этим данным достоверно существующими можно признать (с весьма малой вероятностью ошибки) источники с потоками большими $10 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \text{ гц}$, ибо в основной массе только такие источники надежно подтверждаются другими наблюдениями. Эта цифра представляет собой порог достоверного обнаружения, полученный экспериментально

$$S_{23} \approx 10 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \text{ гц}. \quad (1)$$

Заметим еще для дальнейшего, что количество источников с потоками большими S_{23} (названных достоверно существующими), согласно фиг. 10 того же первоисточника [5], определяется цифрой

$$N_2 \approx 30 \frac{\text{источников}}{\text{стерадиан}}. \quad (2)$$

Знание S_{23} позволяет разделить табл. 1 на две части. 47 амплитуд больших, чем 4,355 единиц, обязаны достоверно существующим источникам, остальные 1959 амплитуд обусловлены внутренними и внешними помехами. Интересуясь только помехами и учитывая равную вероятность положительных и отрицательных амплитуд, по данным табл. 1 получаем табл. 2, в которой вместо количества амплитуд даны проценты от общего их числа 1959.

Таблица 2

Шкала амплитуд, $\mu\text{В}$	-4,36; -2,2	-2,2; -0,87	-0,87; 0	0; 0,87	0,87; 2,2	2,2; 4,36
Процент амплитуд	4	19	27	27	19	4

По данным этой таблицы закон распределения амплитуд помех представляется ломаной, показанной на фигуре. Подсчет среднеквадратичного отклонения такого распределения дает

$$\sigma = \sqrt{x^2} = 1,41. \quad (3)$$

Амплитуда величины 1,41 соответствует потоку $1,41; 4,355 \times 10^{-26} = 3,25 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \text{ гц}$. Эта цифра представляет собой реальный порог чувствительности радиотелескопа.

$$S_p \approx 3,3 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \text{ гц}. \quad (4)$$

тогда как аппаратный порог чувствительности по данным [5] оценивается величиной

$$S_{an} \approx 1 \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \text{ гц}. \quad (5)$$

Полученное значение S_p показывает, что

$$\frac{S_p}{S_{an}} \approx 3,1. \quad (6)$$



$$Q = \frac{S_p}{S_{an}} \approx 3,3. \quad (7)$$

Второе отношение можно назвать коэффициентом помехозащищенности. Этот коэффициент характеризует антенную систему радиотелескопа. Для совершенных антенн он будет близок к единице. Критерий Q удобен для сравнения помехозащищенности различных антенных систем (сосредоточенная площадь приема, интерферометр, крест и др.) Статистические данные записей наблюдений опубликованы не полностью, поэтому подсчет коэффициента Q может быть произведен только самими авторами наблюдений. На наш взгляд такой подсчет представляет значительный интерес. Например, сравнение помехозащищенности систем Райла и Милса могло бы дать рекомендации для будущих разработок антенных систем. Приведенный нами подсчет Q — примитивен, он преследует лишь методическую цель, тем не менее результат (7) позволяет сделать некоторые выводы. Первое, что сразу же привлекает внимание, это неэффективное использование площади приема. Второе более помехозащищенная система могла бы дать такой же результат при втрое меньшей площади приема. В свете сказанного выявление связи Q с конструктивными особенностями антенн представляется весьма интересным и заслуживает всяческого

внимания. Второй, напрашивающийся вывод заключается в том, что при недостаточно помехозащищенных антеннах реализация минимального аппаратурного порога чувствительности не имеет практического смысла.

Обратимся к показанному на фигуре распределению $p(x)$. Если подсчитать площади под кривыми распределения для нормального закона и закона $p(x)$ с одинаковыми $\sigma=1,14$, то нетрудно получить следующие величины, выраженные в процентах.

Таблица 3

x	Площадь под логнормальной	Площадь под кривой Гаусса
$x < -3\sigma$	0,3	0,3
$-3\sigma < x < -2\sigma$	2,8	2,0
$-2\sigma < x < -\sigma$	13,8	13,6
$-\sigma < x < 0$	33,1	34,1
$0 < x < \sigma$	33,1	34,1
$\sigma < x < 2\sigma$	13,8	13,6
$2\sigma < x < 3\sigma$	2,8	2,0
$3\sigma < x$	0,3	0,3

Хорошее совпадение цифр в этой таблице говорит о том, что распределение внешних и внутренних помех практически можно считать нормальным. Это обстоятельство, как уже упоминалось, допускает использование теоретической формулы

$$\frac{S_{\text{ар}}}{S_p} = \left[\frac{2^{2H} - 1}{p(1-p)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

выведенной в работе [1].

Здесь мы приводим точное значение формулы. Величина p представляет собой вероятность попадания источника в диаграмму антенны при направлении их в случайную точку небосвода. Эту вероятность легко определить, если известны количество достоверно существующих источников N_0 и телесный угол диаграммы направленности Ω_A

$$p = N_0 \Omega_A. \quad (9)$$

В рассматриваемом примере согласно (2) $N_0 = 50$ и согласно [3] $\Omega_A = 8 \text{ кв град}$ ($2,4 \cdot 10^{-3}$ стерадиан) и, следовательно,

$$p = 0,12. \quad (10)$$

Величина H , входящая в формулу (8), связана с вероятностью p зависимостью

$$H = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p). \quad (11)$$

Численное ее значение равно

$$H = 0,529. \quad (12)$$

Подставив (10) и (12) в (8), получаем

$$\frac{S_{\text{дт}}}{S_p} \approx 3,1. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с (6), убеждаемся, что

$$S_{\text{дт}} \approx S_{\text{дп}}. \quad (14)$$

Полученный результат является проверкой теоретической формулы и говорит о ее хорошем приближении. Проверка показала, что формула (8), или ее упрощенный вариант

$$\frac{S_{\text{дт}}}{S_p} \approx \sqrt{2 \ln \frac{1}{p}}, \quad (15)$$

справедливый для $p < 10^{-2}$, вполне пригодны для практического использования.

Институт радиопизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 4 VII 1961

Է. Ս. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՌԱԴԻՈԱՍՏՂԱԴԻՏԱԿՆԵՐԻ ՊԱՇՏՊԱՆՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԽԱՆԳԱՐՈՒՄՆԵՐԻՅ ԵՎ ՀԱՎԱՍՏԻ ՀԱՅՏՆԱԲԵՐՄԱՆ ՇԵՄԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ա Ի Մ

Հաղթածում առաջարկում է մի հայտանիշ՝ ռադիոաստղադիտակների տնտեսական օրգանական խանգարումներից պաշտպանված լինելու չափի գնահատության համար և Բենդերի խանգարումների օրինակով ցույց է տրվում նրա էքսպերիմենտալ որոշման հնարավոր եղանակը: Նույն օրինակով ցույց է տրվում, որ խանգարումների բախշման օրենքը մոտ է Գաուս-սյանին: Այդ հանգամանքը հնարավոր է դարձնում ռադիոաստղադիտման աղբյուրների համարի հայտնաբերման շեմի գնահատությունը գաղափարական շեմի հիման վրա: Այնուհետև ցույց է տրվում, որ համարադիտման շեմի գնահատության տեսական բանաձևը լավ համապատասխանություն ունի մեզ է գտնվում դիտումների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бурунсузьян Э. С. Порог достоверного обнаружения и предельная чувствительность радиотелескопов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1, 1960.
2. Хазард К. и Уолш Д. Сравнение обзоров дискретных источников радиоизлучения. Радиоастрономия. Парижский симпозиум, 1958, ИЛ, 1961. Сообщение № 87.
3. Дьюхерст Д. В. Оптическое отождествление источников радиоизлучения. Там же. Сообщение № 92.
4. Арчер С. и др. Исследование источников радиоизлучения на частоте 159 мкзг. Там же. Сообщение № 88.
5. EDGE D. O. and others. A survey of radio sources at a frequency of 159 Mc/s. Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. LXVIII, p. 37, 1959.

А. Г. Багдоев

Определение давления для больших моментов времени

Рассматривается задача определения давления в жидкости, занимающей нижнее полупространство, для больших моментов времени. Задача предполагается осесимметричной.

Возьмем ось Oz в плоскости поверхности жидкости. Oz направим вниз.

Пусть на границе полупространства приложено давление

$$P(r_0, z, t) = \begin{cases} P_1 & r < Vt, \\ 0 & r > Vt, \end{cases} \quad (1)$$

где P_1 и V — постоянны, t — время, P — давление. Если жидкость несжимаемая, для точек полупространства имеем [1]

$$P(r_0, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{Vt} \frac{r dr}{Vr^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2}. \quad (2)$$

Рассмотрим это выражение при больших t и конечных координатах r_0, z . Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= V \frac{1}{2\pi} z \int_0^{2\pi} \frac{Vt d\psi}{(V^2 t^2 + r_0^2 - 2Vtr_0 \cos \psi + z^2)^{3/2}} = \\ &= V \frac{1}{2\pi} z \frac{1}{V^2 t^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\left(1 + \frac{r_0^2 + z^2}{V^2 t^2} - 2r_0 \cos \psi \frac{1}{Vt}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Разложив (3) по обратным степеням t приближенно получим

$$\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{z}{Vt} + \frac{z^3}{V^3 t^3} \frac{1}{2} - \frac{zr_0^2}{V^3 t^3} \frac{3}{4}. \quad (4)$$

Исследуем эту же задачу для случая идеальной сжимаемой жидкости. В этом случае имеем [1]

$$P(r_0, z, t) = J_1 + J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{z r dr d\psi}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2)^{3/2}}.$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 \frac{\partial r_0^2}{\partial z} d\psi}{V r_0^2 + r_0^2 - 2r_0^2 \cos \psi + z^2} \quad (5)$$

причем

$$r_0^2 = \frac{Vt - M^2 r_0 \cos \psi - \sqrt{(Vt - M^2 r_0 \cos \psi)^2 - (1 - M^2)(V^2 t^2 - M^2 r_0^2 - M^2 z^2)}}{1 - M^2}$$

$$\text{и} \quad M = \frac{V}{a} \quad (6)$$

Для больших t и конечных r_0, z имеем

$$\frac{r_0^2}{Vt} = \frac{1}{1 - M^2} - \frac{M^2 r_0 \cos \psi}{1 - M^2} \frac{1}{Vt} - M \frac{1}{V^2 t^2} \frac{r_0^2 + z^2 - r_0^2 \cos^2 \psi}{2} \quad (7)$$

В (5) разлагая J_2 в ряд по $\frac{1}{t}$ получим

$$J_2 = Mz \frac{1}{Vt} + \frac{1}{V^3 t^3} (1 + M)^2 \frac{Mz}{2} \left(z^2 + \frac{3}{2} r_0^2 \right) \quad (8)$$

Поступив аналогично со случаем несжимаемой жидкости, найдем

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0^2} z \frac{\partial r_0^2}{\partial t} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_0^2 + z^2}{r_0^2} + 3r_0 \cos \psi \frac{1}{r_0} + \frac{15}{8} \frac{4r_0^2 \cos^2 \psi}{r_0^2} \right) d\psi \quad (9)$$

С учетом выражения (7) получим

$$J_1 = -z \frac{M+1}{Vt} - \frac{(M+1)^2}{V^3 t^3} z M \frac{\frac{1}{2} r_0^2 + z^2}{6} - \\ - \frac{(M+1)^3}{V^3 t^3} z \frac{-3r_0^2 - 3z^2 + \frac{15}{2} r_0^2}{6} + \frac{(M+1)^3}{V^3 t^3} Mz \frac{r_0^2}{2} + C,$$

причем C определяется условием $p(r_0, 0, t) = p_1$.

Окончательно найдем

$$\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{z}{Vt} + \frac{(M+1)^2}{V^3 t^3} z \frac{z^2 - \frac{3}{2} r_0^2}{2} + \frac{(M+1)^2}{V^3 t^3} Mz \frac{2r_0^2}{3} \quad (10)$$

Полученные выражения (4) и (10) показывают, что сжимаемость и неоднородность сказываются только в степенях $\frac{1}{V^3 t^3}$. Этот факт аналогичен случаю проникания конуса с постоянной скоростью, где также давление на конусе не зависит от M . Аналогично решается

задача для произвольного граничного давления в (1). Для случая упругого полупространства на фронте волны тензор напряжений убывает как $\frac{1}{\sqrt{t}}$ [2].

В случае неоднородной жидкости для закона $a(z)$ с глубиной

$$a(z) = \begin{cases} \psi(z) & z < H \\ a_1 & z > H \end{cases} \quad (11)$$

и произвольного давления $P_1(r, t)$ [3] в моменты $t > \frac{H}{a_1}$ имеем закон затухания в линейном приближении

$$\frac{P}{P_1} = \sqrt{\frac{R(t_0) a(0)}{a_1 \cos \theta}} \left[1 - \frac{R'(t_0) \sin \theta}{R^*(t_0) \cos \theta a(0)} \frac{a(0)}{a_1(t)} \right], \quad (12)$$

где t_0 — фиксированный момент времени, $\cos \theta = \frac{a(0)}{R^*(t)}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 IX 1961

Յ. Գ. Յազգյան

ՀԱՆՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՄԵԾ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է սեղմելի հեղուկի մեջ ճնշման տարածման դժային խնդիրը ժամանակի մեծ արժեքների համար: Հեղինակի կողմից նախկինում առաջված ինտեգրալները վերածվում են շարքերի, որոնց մեջ պահպանվում են առաջին երկու անդամները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоев А. Г. Проникание давления в сжимаемую жидкость. Вестник МГУ, 956, № 2.
2. Багдоев А. Г. Распространение давления в упругом полупространстве. ДАН Арм. ССР, 28, № 2, 1959.
3. Багдоев А. Г. Определение давления в окрестности фронта. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 5, 1960.

Письмо в редакцию

В моей статье [1], опубликованной в Вашем журнале, приводились доказательства ряда теорем об обобщенной Хаусдорфской теории моментов и метода суммирования рядов.

При этом был существенно использован аппарат обобщенных полиномов С. Н. Бернштейна для системы функций Мюнтца по источникам [2] и [3].

В статье [1] цитировалась также работа Хаусдорфа [4], но к сожалению не по первоисточнику.

В последнее время, после ознакомления с оригиналом работы [4], выяснилось, что в ее второй части в основном содержится построение обобщенных полиномов С. Н. Бернштейна, а так же основные результаты обобщенной Хаусдорфской теории моментов и суммирования рядов. Следовательно, приведенные в работе [1] теоремы 4, 6, 9 и вытекающие из них следствия принадлежат Хаусдорфу.

Выражаю свою благодарность М. М. Джрбачяну обратившего мое внимание на вышесказанные факты.

Г. В. БАДАЛЯН

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалян Г. В. Обобщения Хаусдорфского метода суммирования рядов Известия АН АрмССР, серия физ.—мат. наук, 12, № 6, 1959.
2. Гельфонд А. О. К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна. Известия АН СССР, серия математическая, 14, 1950.
3. Widder D. V., Hirschman I. J. Jr. Generalized Bernstein Polynomials, Duke math. Journ. 16, 1949.
4. Hausdorff F. Summationsmethoden und Momentfolgen II. Mathematische Zeitschrift, vol. 9, 1921.