ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. Л. Лунц

Применение рядов Тейлора-Дирихле к оценке роста целых функций

§ 1. Теорема Крамера для рядов Тейлора-Дирихле

Пусть $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция первого порядка и типа σ. Тогда, как известно, функция

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{z^{n+1}}$$

аналитична вне круга $|z|=\sigma$ и

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{zu}\Phi(u)\,du, \tag{1.1}$$

где Γ — окружность $|u|=\sigma+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Пусть, далее,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1.2}$$

где m_n — натуральные числа или нули, $\lambda_{n+1}>\lambda_n$, $\lambda_n \uparrow \infty$, G — область абсолютной сходимости ряда (2), состоящая, возможно, из нескольких связных компонент (см. [1]). Обозначим через G_σ множество, которое мы получим, выбросив из G область, заметаемую кругом радиуса σ, центр которого описывает границу области G. Если $z \in G_\sigma$ и ε достаточно мало, то, когда точка u движется по окружности Γ: $|u|=\sigma+\varepsilon$, точка $z-u$ описывает окружность радиуса $\sigma+\varepsilon$ с центром в точке z, причем эта окружность лежит внутри G и поэтому при фиксированном z ряд

$$f(z-u)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-u)^{m_n} e^{-\lambda_n (z-u)}$$

сходится на Γ равномерно и функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z-u)\,\Phi(u)\,du = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-u)^{m_n} e^{-\lambda_n (z-u)}\,\Phi(u)\,du \tag{1.3}$$

аналитична в точке z, а в правой части (1.3) можно произвести почленное интегрирование.

Но

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-u)^{m_n} e^{-\lambda_n (z-u)}\,\Phi(u)\,du =$$

$$= e^{-\lambda_n z} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[z^{m_n} - \binom{m_n}{1} z^{m_n-1} u + \cdots + (-1)^{m_n} u^{m_n}\right] e^{\lambda_n u}\,\Phi(u)\,du,$$

а так как из (1.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda_n u}\,\Phi(u)\,du = \varphi(\lambda_n),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma u^k e^{\lambda_n u}\,\Phi(u)\,du = \varphi^{(k)}(\lambda_n) \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

то

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[z^{m_n} \varphi(\lambda_n) - \binom{m_n}{1} z^{m_n-1} \varphi'(\lambda_n) + \cdots + (-1)^{m_n} \varphi^{(m_n)}(\lambda_n)\right] e^{-\lambda_n z}, \tag{1.4}$$

если $z \in G_\sigma$, причем функция $F(z)$ регулярна в G_σ (в каждой ее связной компоненте).

Если $f(z)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую область D ($G \subset D$ или одна из компонент G принадлежит D), то с помощью (1.3) функцию $F(z)$ можно продолжить из соответствующей компоненты множества G_σ в область D_σ, которую можно получить, если выбросить из D область, заметаемую кругом радиуса σ, когда центр круга описывает границу области D, и из полученного множества выделить область, содержащую соответствующую компоненту G_σ. Это утверждение является обобщением известной теоремы Крамера для рядов Дирихле (см. [2]). Легко видеть, что теорема остается справедливой при замене окружности радиуса σ сопряженной диаграммой функции $\varphi(z)$.

§. 2. **Оценка роста целой функции на последовательности нулей ее производной.**

Если функция $\varphi(z)$ такова, что

$$\varphi'(\lambda_n) = \varphi''(\lambda_n) = \cdots = \varphi^{(m_n)}(\lambda_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то (1.4) принимает вид

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi(\lambda_n)z^{m_n}e^{-\lambda_n z}. \tag{2.1}$$

Ряд (2.1) сходится во всяком случае, если $z\in G_z$. Предположим теперь, что $\ln n = o(\lambda_n)$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}=\rho$. Взяв произвольное действительное число k, подберем такую последовательность $|a_n|$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=k$. Тогда (см. [1]) ряд (1.2) будет сходиться абсолютно в области G, определяемой неравенством $|z|<e^{\rho(x-k)}$ и расходиться вне этой области. Ряд (2.1) будет сходиться абсолютно в области $G^{(\alpha)}$, определяемой неравенством $|z|<e^{\rho(x-k-\alpha)}$, где

$$\alpha=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(\lambda_n)|}{\lambda_n}$$

и расходиться вне $G^{(\alpha)}$. Так как нас будет интересовать оценка величины α сверху, то предположим, что $\alpha\geqslant 0$ и, следовательно, $G^{(\alpha)}\subset G$. В силу доказанного $G_\sigma\subset G^{(\alpha)}$, поэтому всякая точка z_0, принадлежащая границе области $G^{(\alpha)}$, должна находиться на расстоянии, не большем чем σ от границы области G (иначе точка z_0 была бы внутренней точкой для G_σ и в некоторой окрестности точки z_0 ряд (2.1) сходился бы абсолютно). Возьмем на границе области $G^{(\alpha)}$ действительную точку $x_0>0$ (это всегда возможно, если k подобрано так, что $G^{(\alpha)}$ распадается на две связные компоненты), тогда $x_0=e^{\rho(x_0-k-\alpha)}$.

Расстояние точки x_0 от границы области G равно

$$\min_x\sqrt{(x-x_0)^2+e^{2\rho(x-k)}-x^2}.$$

С помощью простых выкладок легко убедиться, что этот минимум достигается при $x=k+\frac{1}{2\rho}\ln\frac{x_0}{\rho}$ и равен

$$\sqrt{x_0\left\{\frac{1}{\rho}\left[1+\ln(x_0\rho)\right]-x_0+2\alpha\right\}}.$$

Решив неравенство $\sqrt{x_0\left\{\frac{1}{\rho}\left[1+\ln(x_0\rho)\right]-x_0+2\alpha\right\}}\leqslant\sigma$ относительно α, получим

$$\alpha\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma^2}{x_0}+x_0-\frac{1}{\rho}\left[1+\ln(x_0\rho)\right]\right\}=Q(x_0). \tag{2.2}$$

Элементарные вычисления показывают, что наименьшее значение функции $Q(x_0)$ достигается при

$$x_0=x_0^*=\frac{1}{2\rho}\left(1+\sqrt{1+4\rho^2\sigma^2}\right). \tag{2.3}$$

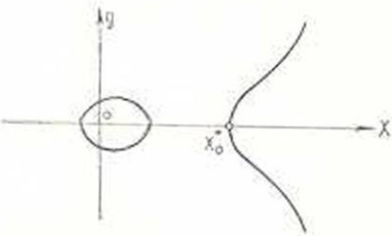
Так как $q = k + \alpha = x_0 - \frac{\ln x_0}{\rho}$, то равенство (2.3) показывает, что оценка (2.2) является наилучшей, если выбрать

$$q = q^* = \frac{1+\sqrt{1+4\rho^2\sigma^2}}{2\rho} - \frac{1}{\rho}\ln\frac{1+\sqrt{1+4\rho^2\sigma^2}}{2\rho}.$$

Нетрудно также проверить (см. [1]), что при $q = q^*$ граница $|z| = e^{\rho(x-q^*)}$ множества $G^{(\alpha)}$ всегда имеет вид, указанный на фиг. 1, а x_0^* — всегда больший положительный корень уравнения $x_0 = e^{\rho(x_0 - q^*)}$.

Подставив (2.3) в правую часть (2.2), после упрощений получим

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2\rho}\left[\sqrt{1+4\rho^2\sigma^2} - \ln\left(1+\sqrt{1+4\rho^2\sigma^2}\right) + \ln 2 - 1\right]. \qquad (2.4)$$



Фиг. 1.

Легко показать, что правая часть (2.4) при увеличении ρ от 0 до ∞ возрастает монотонно от 0 до σ и при любом, отличном от нуля, конечном ρ правая часть (2.4) строго меньше чем σ и, следовательно, оценка (2.4) не является тривиальной.

При выводе оценки (2.4) предполагалось существование предела $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}$. Если этот предел не существует, но

$$\bar{\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n} < \infty,$$

то определим следующим образом последовательность $\{m_n'\}$:

если $\frac{\lambda_n}{m_n} < \bar{\rho}$, то есть $m_n > \frac{\lambda_n}{\bar{\rho}}$, то положим $m_n' = \left[\frac{\lambda_n}{\bar{\rho}} + 1\right]$;

если же $\frac{\lambda_n}{m_n} \geqslant \bar{\rho}$, то выберем $m_n' = m_n$.

При таком определении последовательности $\{m_n'\}$ всегда $m_n' \leqslant m_n$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n'} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n} = \bar{\rho}.$$

Так как в точках λ_n производная функции $\varphi(z)$ имеет нули порядков не ниже m_n', то оценка (2.4) остается справедливой в рассматриваемом случае при замене ρ на $\bar{\rho}$.

Неравенство (2.4) дает оценку сверху для роста $\varphi(z)$ на последовательности $\{\lambda_n\}$. Однако, для некоторых классов функций оценка (2.4) справедлива и при замене α на $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{\ln|\varphi(x)|}{x}$.

Это имеет, например, место, если

$$\varphi(z) = \int\limits_{l}^{z} e^{az}\Psi(z)\,dz,$$

где $a>0$, $\Psi(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\Psi(x)>0$ при $x>0$ и $\Psi(\lambda_n)=\Psi'(\lambda_n)=\cdots=\Psi^{(m_n-1)}(\lambda_n)=0$.

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 30 V 1961

Գ. Լ. Լունց

ԹԵՅԼՈՐ-ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՃՈՒՄԸ ԳՆԱՀԱՏԵԼԻՍ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թեյլոր-Դիրիխլեի

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} \qquad (1)$$

շարքի համար ապացուցվում է Կրամերի թեորեմի տիպի մի թեորեմ, որը $f(z)$-ի եզակիությունների դասավորությունը և (1) շարքի զուգամիտության տիրույթը կապում է

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big[e^{m_n}\varphi(\lambda_n)-\binom{m_n}{1} z^{m_n-1}\varphi'(\lambda_n)+\cdots+$$

$$+(-1)^{m_n}\varphi^{(m_n)}(\lambda_n)\Big] e^{-\lambda_n z} \qquad (2)$$

ֆունկցիայի եզակիությունների դասավորության և (2) շարքի զուգամիտության տիրույթի հետ, որտեղ $\varphi(z)$-ը առաջին կարգի ամբողջ ֆունկցիա է։

Այս թեորեմը թույլ է տալիս ապացուցելու հետևյալ պնդումը։

Եթե $\varphi(z)$ էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիայի ածանցյալը $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_n>0$, $\lambda_n\uparrow\infty$) հաջորդականության կետերում ունի m_n կարգերի զերոներ, ընդ որում

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n}=\rho<\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}=\infty,$$

ապա

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(\lambda_n)|}{\lambda_n}<\Psi(\rho,\pi),$$

որտեղ σ-ն $\varphi(z)$ ֆունկցիայի տիպն է և

$$\Psi(\bar{\rho}, \sigma) = \frac{1}{2\bar{\rho}} \left[\sqrt{1 + 4\bar{\rho}^2\sigma^2} - \ln(1 + \sqrt{1 + 4\bar{\rho}^2\sigma^2}) + \ln 2 - 1\right].$$

Այս գնահատականը տրիվիալ չէ, քանի որ $0 < \bar{\rho} < \infty$*-ի դեպքում* $\Psi(\bar{\rho}, \sigma)$*-ն միշտ խստորեն փոքր է, քան* σ*-ն։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лунц Г. Л.* О рядах типа Тейлора-Дирихле. Известия АН АрмССР, **14**, 2, 1961, стр. 7—16.
2. *Bernstein V.* Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре некоторых несамосопряженных операторов

В основе настоящей заметки лежит следующая простая идея. Предположим, что резольвента R_λ самосопряженного A, определенного на многообразии D_A, плотном в гильбертовом пространстве $L_2(E)$, где E — неограниченная область n-мерного евклидова пространства E_n, является интегральным оператором

$$R_\lambda f(M) = \int_E H(M, Q; \lambda) f(Q)\, dQ. \tag{1}$$

Пусть, далее, λ и $u(Q)$ являются соответственно собственным значением и собственной функцией возмущенного оператора

$$Tu = Au + cu,$$

где комплексная функция $c(Q)$ ограничена.

Тогда $u(Q)$ должна удовлетворять уравнению

$$u(M) = -\int_E H(M, Q; \lambda) c(Q) u(Q)\, dQ.$$

Легко видеть, что в этом случае λ оказывается одновременно собственным значением следующего уравнения

$$\varphi(M) = -\int_E \sqrt{c(M)}\, H(M, Q; \lambda) \sqrt{c(Q)}\, \varphi(Q)\, dQ.$$

Исследовать это уравнение, вообще говоря, проще, чем исходное потому, что, если $c(Q)$, например, финитна, то достаточно знать поведение функции $H(M, Q; \lambda)$ лишь в ограниченной области для получения нужных оценок. Оказывается, такая замена исходного уравнения новым уравнением позволяет вообще высказать общие соображения о спектре возмущенного оператора. Но, быть может, гораздо интереснее то, что иногда можно таким путем выяснить — может ли возмущенный оператор иметь собственные значения, принадлежащие непрерывному спектру невозмущенного оператора? Мы это проиллюстрируем ниже на примере несамосопряженного оператора Шредингера. Для бигармонического оператора это будет сделано в другой заметке.

$$Tu - \lambda_0 u = Au + S^2 u - \lambda_0 u = f, \tag{3}$$

равносильное следующему

$$u + R_{\lambda_0} S^2 u = R_{\lambda_0} f. \tag{4}$$

Введем далее в рассмотрение уравнение

$$\varphi + SR_{\lambda_0} S\varphi = SR_{\lambda_0} f,$$

решение которого представляется в виде

$$\varphi = (E + SR_{\lambda_0} S)^{-1} SR_{\lambda_0} f = SR_{\lambda_0} f - SR_{\lambda_0} S (E + SR_{\lambda_0} S)^{-1} SR_{\lambda_0} f.$$

Положим

$$u = R_{\lambda_0} f - R_{\lambda_0} S (E + SR_{\lambda_0} S)^{-1} SR_{\lambda_0} f.$$

Легко видеть, что $u = R_{\lambda_0} f - R_{\lambda_0} S^2 u$, т. е. u удовлетворяет уравнению (4), а следовательно и уравнению (3), откуда и следует формула (2)

Для доказательства первой части теоремы допустим, что точка λ_0, принадлежащая непрерывному спектру оператора A, является регулярной точкой для оператора T. Очевидно, уравнение

$$Au - \lambda_0 u = Tu - S^2 u - \lambda_0 u = f \tag{5}$$

эквивалентно уравнению

$$u = B_{\lambda_0} f + B_{\lambda_0} S^2 u. \tag{6}$$

С другой стороны, уравнение $u = B_{\lambda_0} S^2 u$ имеет лишь тривиальное решение, а потому, как легко видеть, и уравнение $\varphi = SB_{\lambda_0} S\varphi$ имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение

$$\varphi = SB_{\lambda_0} S\varphi + SB_{\lambda_0} f \tag{7}$$

разрешимо при всех $f \in H$. Положив $u = B_{\lambda_0} S\varphi + B_{\lambda_0} f$, где φ — решение уравнения (7), легко убедиться, что u является решением уравнения (6), а следовательно и уравнения (5), а это противоречит тому, что λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A.

Переходя к доказательству второй части теоремы установим сперва, что если λ не принадлежит спектру оператора A и не является собственным значением оператора T, то λ — регулярная точка для оператора T. В самом деле, по условию уравнение $u + R_\lambda S^2 u = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому, как легко видеть, и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение. Отсюда, как и выше, пользуясь альтернативой Фредгольма, находим, что уравнение $u + R_\lambda S^2 u = R_\lambda f$, следовательно и равносильное ему уравнение $Tu - \lambda u = Au + S^2 u - \lambda u = f$, разрешимы при всех $f \in H$. В силу замкнутости T оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ ограничен.

Покажем, наконец, что собственные значения оператора T, лежащие вне спектра оператора A, не имеют предельных точек вне спектра оператора A. В самом деле, если λ—собственное значение оператора T, то очевидно $u+R_\lambda S^2u=0$, $\|u\|>0$. Но тогда $\varphi=Su$ удовлетворяет уравнению $\varphi+SR_\lambda S\varphi=0$, причем, как легко видеть, $\|\varphi\|>0$. Итак, достаточно доказать, что собственные значения уравнения $\varphi+SR_\lambda S\varphi=0$ не имеют предельных точек вне спектра оператора A. Но это вытекает из леммы 1, так как $\lim\limits_{\tau\to\infty}\|R_{\sigma+i\tau}\|=0$.

Отметим одно следствие доказанной теоремы. Для этого предположим, что область определения D_A самосопряженного оператора A плотна в пространстве $L_2(E)$, где E — неограниченная область n-мерного евклидова пространства E_n и что резольвента R_λ этого оператора допускает представление (1), причем для любых ограниченных областей $G_1, G_2\subset E$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{G_1}\left(\int\limits_{G_2}|H(M,Q;\lambda)|^2dQ\right)dM<\infty. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть ограниченная измеримая комплекснозначная функция $c(Q)$ стремится к нулю на бесконечности, а самосопряженный оператор A удовлетворяет условиям (1) и (8) и пусть $Tu=Au+cu$ $(D_T=D_A)$. Тогда все точки непрерывного спектра оператора A принадлежат спектру оператора T, причем точками спектра оператора T, лежащими вне спектра оператора A, могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что семейство функций $\sqrt{c}R_\lambda\sqrt{c}f$ $(\|f\|\leq 1)$ компактно в $L_2(E)$. Обозначив через χ_R характеристическую функцию шара K_R радиуса R с центром в начале координат, установим сперва компактность в $L_2(E)$ семейства функций вида $\sqrt{c}R_\lambda\sqrt{c}\chi_Rf$ $(\|f\|\leq 1)$ при любом конечном $R>0$. Предполагая, что $|c(Q)|\leq N$ и $\|f\|\leq 1$ при заданном $\varepsilon>0$ найдем такое $R_1>0$, чтобы

$$\|(1-\chi_{R_1})\sqrt{c}R_\lambda\sqrt{c}\chi_Rf\|\leq\sqrt{N}\|R_\lambda\|\cdot\sup_{r_M\geq R_1}\sqrt{|c(M)|}<\varepsilon,\quad \|f\|\leq 1. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу (8), семейство функций вида

$$\chi_{R_1}\sqrt{c}R_\lambda\sqrt{c}\chi_Rf\quad (\|f\|\leq 1)$$

компактно в пространстве $L_2(E\cap K_{R_1})$. Если φ_k $(k=1,\dots,r)$ — конечная ε-сеть для этого семейства в $L_2(E\cap K_{R_1})$, то функции $\tilde{\varphi}_k$, совпадающие с φ_k в $E\cap K_{R_1}$ и равные нулю в $E\setminus E\cap K_{R_1}$, образуют, в силу (9), 2ε-сеть для семейства $\sqrt{c}R_\lambda\sqrt{c}\chi_Rf$ $(\|f\|\leq 1)$, и поэтому это семейство компактно в $L_2(E)$. Аналогично доказывается компактность семейства $\sqrt{c}R_\lambda\sqrt{c}f$ $(\|f\|\leq 1)$.

Отметим один частный случай доказанной теоремы. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассмотрим симметрический оператор эллиптического типа B, определенный на совокупности D_B всех финитных, дважды дифференцируемых функций равенством

$$Bu = -\sum_{i,\,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + c(x_1, x_2, x_3)\,u, \quad (a_{ik}=a_{ki}), \qquad (10)$$

где a_{ik} — четырежды дифференцируемые функции, а $c(x_1, x_2, x_3)$ — вещественная непрерывная функция в E_3. Как показал М. Ш. Флексер [2], резольвента $R_\lambda(\lambda \neq \bar{\lambda})$ любого самосопряженного расширения оператора B является интегральным оператором с ядром типа Карлемана. Поэтому из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть измеримая, ограниченная, комплекснозначная функция $p(Q)$ стремится к нулю на бесконечности, A — любое самосопряженное расширение оператора B, определенного равенством (10). Тогда все точки непрерывного спектра оператора A принадлежат спектру возмущенного оператора $Tu = Au + pu$, причем точками спектра оператора T, лежащими вне спектра оператора A, могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A.*

Покажем теперь на примере оператора Шредингера, каким путем можно получить более полные сведения о точках спектра возмущенного оператора, лежащих на непрерывном спектре невозмущенного оператора. Для этого обозначим через Ω_n область определения самосопряженного оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ функций, суммируемых с квадратом во всем евклидовом пространстве E_n. Как известно [3], каждая функция $u \in \Omega_n$ обладает всеми обобщенными производными в смысле С. Л. Соболева до второго порядка включительно, причем все эти производные суммируемы с квадратом в E_n. Поэтому функция u, равно как и ее первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, эквивалентны таким функциям, для которых существуют интегралы по любой сфере $S_R(M)$, лежащей в E_n, причем эти интегралы непрерывно зависят от радиуса R сферы, если центр ее M зафиксирован. Более того, справедлива формула интегрирования по частям. Эти замечания позволяют без труда доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $u \in \Omega_n$. Через $\omega_n(r)$ обозначим площадь поверхности сферы $S_r(M)$ радиуса r, а через $\tau_n(r) = \int_0^r \omega_n(\rho)\,d\rho$ — объем шара $K_r(M)$ радиуса r с центром в точке M. Тогда $u(Q)$ эквивалентна функции, для которой справедливо следующее утверждение: для почти всех $M \in E_n$ существует такая последовательность $r_k \to 0$ положительных чисел (зависящая от выбора точки M), что*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_n(r)}\int\limits_{S_r(M)}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\omega(r_k)}\int\limits_{S_{r_k}(M)}u\,d\sigma=u(M).$$

Доказательство. Первое равенство немедленно следует из теоремы Лебега, если заметить, что

$$\int\limits_{S_r(M)}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=\int\limits_{K_r(M)}\Delta u\,dQ.$$

Для доказательства второго равенства достаточно заметить, что

$$\int\limits_{K_r(M)}u\,dQ=\int\limits_0^r\Bigg(\int\limits_{S_\rho(M)}u\,d\sigma\Bigg)\,d\rho,$$

причем внутренний интеграл непрерывно зависит от ρ при $\rho>0$. Остается вновь воспользоваться теоремой Лебега и классической формулой Коши

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\Phi_{n,\lambda}(r)=\frac{i}{4}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}}H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r), \tag{11}$$

где через $H^{(1)}_\nu(z)$ обозначена функция Ханкеля первого рода. Ряд свойств этой функции отмечен в работе автора [4]. Для дальнейшего изложения нам понадобятся лишь следующие, легко устанавливаемые оценки. Существуют такие константы B_n и C_n, что при $n>1$ и $|\lambda r|\geqslant 1$

$$|\Phi'_{n,\lambda}(r)|\leqslant B_n|\lambda|^{\frac{n-1}{2}}\frac{|e^{i\lambda r}|}{r^{\frac{n-1}{2}}}, \qquad |\Phi_{n,\lambda}(r)|\leqslant C_n|\lambda|^{\frac{n-3}{2}}\frac{|e^{i\lambda r}|}{r^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Если $f(Q)\in L_2(E_n)$ суммируема в E_n и при некотором положительном λ уравнение $-\Delta u-\lambda u=f$ имеет решение $u\in\Omega_n$, то*

$$u(M)=\int\limits_{E_n}\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,f(Q)\,dQ. \tag{13}$$

Доказательство. Пользуясь асимптотикой $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r)$, например, оценкой (12), легко установить, что интеграл (13) сходится почти для всех $M\in E_n$. Пусть для точки $M\in E_n$ этот интеграл существует и выполнены оба утверждения леммы 2. Зафиксировав эту точку, рассмотрим $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ как функцию точки Q в области $K_R(M)\setminus K_\varepsilon(M)$, ограниченной сферами $S_R(M)$ и $S_\varepsilon(M)$, предположив R настолько большим, чтобы $\lambda R > 1$. Замечая, что $\Delta\Phi_{n,\sqrt{\lambda}} + \lambda\Phi_{n,\sqrt{\lambda}} = 0$ в рассматриваемой области и $u \in \Omega_n$, будем иметь

$$\int\limits_{K_R(M)\setminus K_\varepsilon(M)} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q)\, dQ = \int\limits_{S_R(M)} \left(u \frac{\partial \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}}{\partial n} - \Phi_{n,\sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{S_\varepsilon(M)} \left(u \frac{\partial \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}}{\partial n} - \Phi_{n,\sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \qquad (14)$$

С другой стороны, из (12) следует

$$\left| \int\limits_{S_R(M)} u \frac{\partial \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}}{\partial n} d\sigma \right|^2 \leqslant \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} B_n^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{S_R(M)} |u|^2 d\sigma,$$

$$\left| \int\limits_{S_R(M)} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right|^2 \leqslant \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} C_n^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda^{\frac{n-3}{2}} \int\limits_{S_R(M)} \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\sigma.$$

Но так как функция $|u|^2 + \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$ суммируема в E_n, то существует такая последовательность положительных чисел $R_k \to \infty$, что первый интеграл в правой части формулы (14), взятый по сферам $S_{R_k}(M)$, стремится к нулю. Итак

$$\int\limits_{E_n\setminus K_\varepsilon(M)} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q)\, dQ = \int\limits_{S_\varepsilon(M)} \left(u \frac{\partial \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}}{\partial n} - \Phi_{n,\sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Для доказательства леммы достаточно в этом равенстве совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и воспользоваться леммой 2, заметив при этом, что, как показано в [4], имеют место равенства

$$\lim_{r\to 0} \omega_n(r)\, \Phi'_{n,\sqrt{\lambda}}(r) = -1, \qquad \lim_{r\to 0} \omega_n(r)\, \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Можно доказать более общее предложение. Именно, пусть самосопряженный оператор A определен на $D_A \subset L_2(E) \subset L_2(E_n)$. Допустим, что λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A и E_λ — разложение единицы, а R_λ — резольвента этого оператора. Если при некотором $f \in L_2(E)$ уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ имеет решение $u \in D_A$ и, кроме того, существует предел $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} R_\lambda f$ в смысле сходимости почти всюду, то $u = \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} R_\lambda f$. В самом деле, при любом невещественном λ функция u удовлетворяет уравнению

$$u = R_\lambda f + (\lambda_0 - \lambda)\left\{\int_{-\infty}^{\lambda_1}\frac{1}{\mu-\lambda}\,dE_\mu u + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{\mu-\lambda}\,dE_\mu u + \int_{\lambda_2}^{\infty}\frac{1}{\mu-\lambda}\,dE_\mu u\right\},$$

где $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$. Поскольку первый и третий интегралы после умножения на $\lambda_0 - \lambda$ по норме сходятся к нулю, то можно выбрать такую подпоследовательность $\lambda_k \to \lambda_0$, чтобы они сходились к нулю почти всюду. Итак, в смысле сходимости почти всюду будем иметь

$$u = \lim_{\lambda\to\lambda_0} R_\lambda f + \lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda_0 - \lambda) R_\lambda E_\Delta u,$$

где $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$, откуда и следует наше утверждение. Это замечание показывает, что нижеследующие рассуждения, опирающиеся на лемму 3, имеют несколько более общий характер.

Теорема 4. *Пусть ограниченная комплекснозначная функция $c(Q) \in L_2(E_n)$ и*

$$\sup_{M\in E_n}\int_{E_n}|\Phi_{n,\sqrt{\lambda_0}}(r_{MQ})\, c(Q)|\, dQ < 1,$$

где функция $\Phi_{n,\lambda}(r)$ определена формулой (11). Тогда λ_0 не является собственным значением оператора $-\Delta u + cu$. Если, кроме того, $\lambda_0 > 0$, то λ_0 принадлежит непрерывному спектру (в смысле Денфорда [5]) этого оператора.

Доказательство. Из доказательства леммы 3 легко усмотреть, что функция $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ $(Jm\sqrt{\lambda} > 0)$ является ядром резольвенты оператора $-\Delta u$. Допустим, что $-\Delta u + cu = \lambda_0 u$, $u \neq 0$, $u \in \Omega_n$. Воспользовавшись еще леммой 3, если $\lambda_0 > 0$, получим, что в любом случае

$$\varphi(M) = -\int_{E_n}\sqrt{c(M)}\,\Phi_{n,\sqrt{\lambda_0}}(r_{MQ})\sqrt{c(Q)}\,\varphi(Q)\,dQ,$$

где положено $\varphi(M) = \sqrt{c(M)}\,u(M)$ и, следовательно, $\|\varphi\| > 0$. Поэтому

$$\|\varphi\|^2 \leqslant \left\{\sup_{M\in E_n}\int_{E_n}|\Phi_{n,\sqrt{\lambda_0}}(r_{MQ})\, c(Q)|\, dQ\right\}^2 \|\varphi\|^2,$$

откуда и вытекает первое утверждение теоремы. Заметим далее, что, как показано в [4] (теорема 2.3), если $c(Q) \in L_2(E_n)$ ограничена, то все точки положительной полуоси принадлежат спектру оператора $-\Delta u + cu$. Если бы при этом оказалось, что многообразие функций вида $-\Delta u + cu - \lambda_0 u$ неплотно в $L_2(E_n)$, то $\lambda_0 > 0$ было бы собственным значением оператора $-\Delta u + \bar{c}u$, что противоречит доказанному выше.

Теорема 5. *Пусть $n = 3$ и $c(Q)$ ограничена и суммируема в E_3. Тогда собственные значения (включая и положительные) опе-*

ратора $-\Delta u + cu$ лежат в ограниченной области λ-плоскости, вне которой спектр чисто непрерывен и совпадает с соответствующей частью положительной полуоси.

Доказательство. Допустив, что λ_0 — собственное значение оператора $-\Delta u + cu$ и заметив, что $\Phi_{3, \sqrt{\lambda}}(r) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}$, найдем, что уравнение

$$u(M) = -\int_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q)\, u(Q)\, dQ,$$

а, следовательно, и итерированное уравнение

$$u(M) = \int_{E_3} K_{\lambda_0}(M, Q_1)\, c(Q_1)\, u(Q_1)\, dQ_1,$$

где положено

$$K_{\lambda_0}(M, Q_1) = \frac{1}{16\pi^2}\int_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{MQ}}\, e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{QQ_1}}}{r_{MQ}\, r_{QQ_1}} c(Q)\, dQ,$$

имеют нетривиальное решение $u(Q)$. Переходя, как и при доказательстве теоремы 4, к уравнению для $\varphi(M) = \sqrt{c(M)}\, u(M)$, придем к оценке

$$\|\varphi\|^2 \leqslant \sup_{M,\, Q_1 \in E_3} |K_{\lambda_0}(M, Q_1)|^2 \left(\int_{E_3} |c(Q)|\, dQ\right)^2 \|\varphi\|^2, \qquad \|\varphi\| > 0.$$

Остается воспользоваться леммой 4 из работы автора [6]. Доказательство второго утверждения теоремы проводится так же, как и в предыдущей теореме.

Теоремы 4 и 5 интересно сравнить с замечательным результатом Т. Като [7] о росте дважды дифференцируемых решений уравнения $-\Delta u + cu - \lambda u = 0$ $(\lambda > 0)$ при непрерывной $c(Q)$, стремящейся к нулю на бесконечности, доказательство которого довольно сложно и основано на специфических свойствах оператора Лапласа. Существенное отличие теоремы 1 от аналогичной теоремы И. М. Гельфанда [8] (или более общей теоремы И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна, см. подстрочное примечание на стр. 10) отмечено в самом начале этой заметки.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 VI 1961

Ռ. Մ. Մարտիրոսյան

ՈՐՈՇ ՈՉ-ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածի հիմնական բովանդակությունը տրվում է հետևյալ երկու թեորեմներով.

Թեորեմ 1. Դիցուք A ինքնահամալուծ օպերատորը որոշված է H հիլբերտյան տարածության մեջ խիտ D_A բազմության վրա և S-ը որևէ սահմանափակ գծային օպերատոր է (ոչ-ինքնահամալուծ). $D_S = H$. Դիցուք այնուհետև, $SR_\lambda S$ օպերատորը, որտեղ R_λ—A օպերատորի ռեզոլվենտն է, լիովին անընդհատ է բոլոր ոչ-իրական λ-ների դեպքում: Այդ դեպքում A օպերատորի անընդհատ սպեկտրի բոլոր կետերը պատկանում են $T = A + S^2$ $(D_T = D_A)$ գրգռված օպերատորի սպեկտրին, ընդ որում T օպերատորի սպեկտրի կետերը, որոնք ընկած են A օպերատորի սպեկտրից դուրս, կարող են լինել միայն սեփական արժեքներ, որոնք չունեն սահմանային կետեր A օպերատորի սպեկտրից դուրս:

Մտցնենք հետևյալ նշանակումները: $L_2(E_n)$-ով նշանակենք այն ֆունկցիաների հիլբերտյան տարածությունը, որոնք հանրագումարելի են մոդուլի քառակուսիով ամբողջ n-չափանի E_n էվկլիդյան տարածության մեջ: Այնուհետև մտցնենք

$$\Phi_{n,\lambda}(r) = \frac{i}{4}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r), \qquad Im\lambda > 0,\ r > 0.$$

ֆունկցիան, որտեղ $H^{(1)}_\nu(z)$-ը Հանկելի առաջին սեռի ֆունկցիան է:

Թեորեմ 2. Դիցուք կոմպլեքսարժեք $c(Q)$ ֆունկցիան պատկանում է $L_2(E_n)$-ին և

$$\sup_{M \in E_n} \int_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda_0}}(r_{MQ})\, c(Q)|\, dQ < 1.$$

Այդ դեպքում λ_0-ն չի հանդիսանում $-\Delta u + cu$ օպերատորի սեփական արժեք: Եթե, բացի դրանից, $\lambda_0 > 0$, ապա λ_0-ն պատկանում է այդ օպերատորի անընդհատ սպեկտրին:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. „ДАН СССР", новая серия, 77, 1, 1951.
2. *Флексер М. Ш.* О спектральной функции оператора $-\sum\limits_{i,k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + cu$ „Мат. сборник", **40** (82), № 1, 1956.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. V. M., Физматгиз, 1959.
4. *Мартиросян Р. М.* О спектре некоторых возмущений оператора Лапласа в многомерном и трехмерном пространствах. „Известия АН СССР, серия математ." **24**, № 6, 1960.

5. *Dunford N.*, Spectral theory. I. Convergence to projections. „Trans. Amer. Math. Soc.", 54, 1943.
6. *Мартиросян Р. М.* О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u+cu$ в трехмерном пространстве. „Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)", 10, № 1, 1957.
7. *Като Т.* Свойства роста решений приведенного волнового уравнения с переменным коэффициентом. „Математика" (сборник переводов иностранных статей), 5:1, 1961.
8. *Гельфанд И. М.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов. „Успехи матем. наук", VII, вып. 6, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

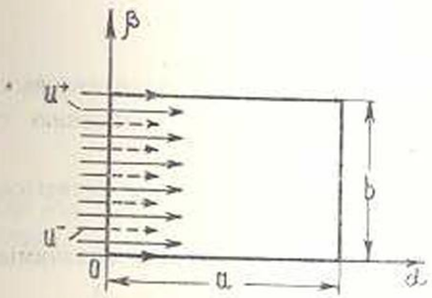
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ж. Е. Багдасарян

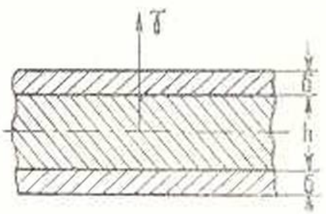
Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа

Задачи нелинейного флаттера однородных пластин и оболочек рассмотрены в работах [4, 5, 6, 16], для слоистых пластин и оболочек, насколько нам известно, такие задачи не рассматривались.

В настоящей работе делается попытка дать решение задачи нелинейного флаттера трехслойных прямоугольных пластинок, обтекаемых сверхзвуковыми потоками газа при нулевом угле атаки (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Избыточное давление газа учитывается приближенной формулой, справедливой при $M \gg 1$ [8, 9]

$$P = P_\infty\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v}{a_\infty}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{1}$$

Здесь P — давление газа на поверхности пластинки, P_∞ — давление невозмущенного потока газа, v — нормальная составляющая скорости поверхности пластинки, a_∞ — скорость звука для невозмущенного газа, $\varkappa$ — показатель политропы.

1. Рассмотрим прямоугольную трехслойную ортотропную пластинку со сторонами a и b, которая обтекается с обеих сторон сверхзвуковым потоком газа с невозмущенными скоростями, направленными вдоль оси $O\alpha$ и равными соответственно U_+ и U_-. Предположим, что слои пластинки симметрично расположены относительно срединной плоскости пластинки, которая является одновременно и координатной плоскостью $(\alpha\beta)$ (фиг. 2).

Пусть материал каждого слоя пластинки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных координатных линий α, β, γ. Третья координатная линия γ тоже прямолинейна и представляет расстояние по нормали от точки (α, β) срединной плоскости до точки (α, β, γ) пластинки.

Вопросами построения теории трехслойных пластин занимались многие авторы, например, [11, 12, 13, 14, 15]. В некотором отличии от них здесь в основу кладутся следующие предположения:

А. Для наружных слоев: справедливость гипотезы недеформируемых нормалей.

В. Для внутреннего слоя принимаются гипотезы С. А. Амбарцумяна, а именно:

а) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеют вид [1, 2]

$$\tau_{\alpha\gamma} = f(\gamma)\,\varphi(\alpha, \beta), \quad \tau_{\beta\gamma} = f(\gamma)\,\psi(\alpha, \beta), \tag{1.1}$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$ — искомые функции координат α и β; $f(\gamma)$ — функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине слоя причем $f\left(\pm\dfrac{h}{2}\right) = 0$;

б) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной плоскости, могут быть пренебрежимы по сравнению с прочими напряжениями;

в) по толщине пластинки нормальные перемещения остаются неизменными.

Предполагается также, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [7].

2. На основе принятых предположений основная разрешающая система дифференциальных уравнений движения имеет вид

$$a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4} + (a_{66} + 2a_{12})\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} + \frac{1}{2}L(w, w) = 0, \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\bar{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \bar{D}_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} - L(w, F) - \\ - b_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} - b_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} - k_{11}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\alpha^3} - k_{22}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial\beta^3} - (k_{22} + 2k_{66})\times \\ \times\left(\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + \frac{\partial^3\Phi_2}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right) - Z(\alpha, \beta, t) = 0,\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2} + b_1\Phi_1 - b_{11}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\alpha^2} - b_{66}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\beta^2} - \\ - (b_{12} + b_{66})\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\alpha\partial\beta} = 0.\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+b_2\Phi_2-b_{22}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\beta^2}-b_{66}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\alpha^2}-$$

$$-(b_{12}+b_{66})\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\alpha\partial\beta}=0, \tag{2.4}$$

где $w(\alpha, \beta, t)$ — прогиб пластинки, $F=F(\alpha, \beta, t)$ — функция напряжений, через которую внутренние усилия представляются следующим образом

$$T_1=\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}, \qquad T_2=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}, \qquad S=-\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}. \tag{2.5}$$

Для коэффициентов a_{ik} имеем

$$a_{11}=\frac{C_{11}}{\Omega}, \qquad a_{22}=\frac{C_{22}}{\Omega}, \qquad a_{12}=\frac{C_{12}}{\Omega}, \qquad a_{66}=\frac{1}{C_{66}}, \tag{2.6}$$

$$\Omega=C_{11}C_{22}-C_{12}^2.$$

Жесткости растяжения C_{ik} и изгиба D_{ik} и $\overline{D}_{ik}$ имеют вид

$$C_{ik}=2B'_{ik}\delta+B^0_{ik}h, \tag{2.7}$$

$$D_{ik}=B'_{ik}\frac{h\delta(h+\delta)}{2}+B^0_{ik}\frac{h^3}{12},$$

$$\overline{D}_{ik}=B'_{ik}\left(\frac{2}{3}\delta^3+\frac{h\delta^2}{2}\right), \tag{2.8}$$

где B^0_{ik} — упругие постоянные внутреннего слоя, а B'_{ik} — внешних слоев

$$B_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{12}=\nu_1B_{22}=\nu_2B_{11},$$

$$B_{44}=G_{23}, \qquad B_{55}=G_{13}, \qquad B_{66}=G_{12}. \tag{2.9}$$

В (2.1) — (2.4) приняты следующие обозначения

$$\Phi_1=\frac{1}{B^0_{55}}\varphi(\alpha, \beta), \qquad \Phi_2=\frac{1}{B^0_{44}}\psi(\alpha, \beta), \tag{2.10}$$

$$b_{ik}=B^0_{ik}J_1+B'_{ik}h\delta J_0(h/2),$$

$$k_{ik}=B'_{ik}\delta^2J_0(h/2), \tag{2.11}$$

$$b_1=2B^0_{55}J_0(h/2), \qquad b_2=2B^0_{44}J_0(h/2), \tag{2.12}$$

$$L(w, F)=\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2},$$

где

$$J_0(\gamma)=\int_0^{\gamma} f(\gamma)\,d\gamma, \qquad J_1=\int_{-h/2}^{h/2}\gamma J_0(\gamma)\,d\gamma. \tag{2.13}$$

Поперечная нагрузка $Z(\alpha, \beta, t)$ складывается из сил инерции, сил демпфирования и аэродинамического давления

$$Z(\alpha, \beta, t) = -m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2m^* \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta P. \tag{2.14}$$

Здесь ε — коэффициент затухания, m^* — приведенная масса пластинки, которая имеет вид

$$m^* = \frac{1}{g}(2\gamma^{\prime}\delta + \gamma^{\circ} h),$$

где γ^i — удельные веса материала слоев, g — ускорение силы тяжести.

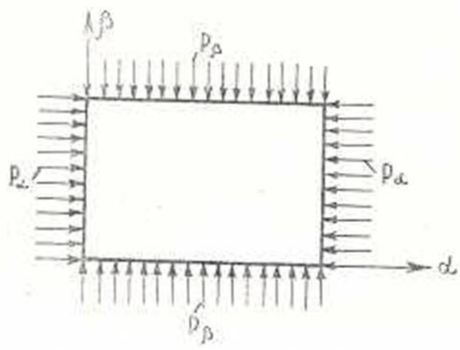
Аэродинамическое давление ΔP в случае одностороннего обтекания имеет вид [4]

$$\Delta P = -\varkappa P_\infty \left[M \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\varkappa + 1}{4} M^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\varkappa + 1}{12} M^3 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^3 + \cdots \right], \tag{2.15}$$

где $M = U_+/a_\infty$ — число Маха для невозмущенного потока.

В случае двухстороннего обтекания, когда $U_+ = U_-$, формула аэродинамического давления упрощается и принимает вид

$$\Delta P = -2\varkappa P_\infty \left[M \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\varkappa + 1}{12} M^3 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^3 - \cdots \right]. \tag{2.16}$$



Фиг. 3

Принимается, что пластинка свободно оперта по всему контуру и в своей срединной плоскости подвергается действию сжимающих усилий, средние значения которых суть — P_α, P_β. (фиг. 3).

Для рассматриваемой задачи граничные условия запишутся следующим образом

при $\alpha = 0$, $\alpha = a$

$$w = 0, \quad M_1 = -\overline{D}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \overline{D}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + k_{22} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} = 0, \tag{2.17}$$

$$\overline{S} = 0, \quad \overline{T}_1 = -P_\alpha, \tag{2.18}$$

$$\varphi = 0; \tag{2.19}$$

при $\beta = 0$, $\beta = b$

$$w = 0, \quad M_2 = -\overline{D}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \overline{D}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + k_{22} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + k_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} = 0, \tag{2.20}$$

$$\overline{S} = 0, \quad \overline{T}_2 = -P_\beta, \tag{2.21}$$

$$\varphi = 0, \tag{2.22}$$

где $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ и $\overline{S}$ — средние усилия на кромках.

Таким образом, задача сводится к исследованию системы нелинейных уравнений (2.1)—(2.4) при граничных условиях (2.17)—(2.22), когда функция Z определяется выражениями (2.14), (2.15) и (2.16).

3. Будем искать приближенное решение системы (2.1)—(2.4) в виде

$$w = f_{11}(t)\sin\lambda_1\alpha\sin\mu_1\beta + f_{21}(t)\sin\lambda_2\alpha\sin\mu_1\beta, \tag{3.1}$$

$$\Phi_1 = P_{11}(t)\cos\lambda_1\alpha\sin\mu_1\beta + P_{21}(t)\cos\lambda_2\alpha\sin\mu_1\beta, \tag{3.2}$$

$$\Phi_2 = R_{11}(t)\sin\lambda_1\alpha\cos\mu_1\beta + R_{21}(t)\sin\lambda_2\alpha\cos\mu_1\beta, \tag{3.3}$$

где $\lambda_i = \dfrac{i\pi}{a}$, $\mu_k = \dfrac{k\pi}{b}$; $f_{ik}(t)$, $P_{ik}(t)$, $R_{ik}(t)$ — некоторые функции, подлежащие определению.

Рассматривая (3.1)—(3.3), легко заметить, что граничные условия (2.17), (2.19), (2.20) и (2.22) удовлетворены полностью.

Подставив (3.1) в (2.1), найдем функцию F, удовлетворяющую граничным условиям (2.18) и (2.21). Затем, значения w, Φ_1 и Φ_2 соответственно из (3.1), (3.2) и (3.3) подставив в уравнения (2.3) и (2.4) получим алгебраическую систему относительно искомых $P_{ik}(t)$ и $R_{ik}(t)$. Решив эту систему найдем функции Φ_1 и Φ_2, выраженные через $f_{ik}(t)$. Наконец, подставив найденные выражения для F, Φ_1 и Φ_2, зависящие от неизвестных функций $f_{ik}(t)$, в уравнение (2.2) и решив его методом Бубнова-Галеркина, в случае одностороннего обтекания получим следующую нелинейную систему двух уравнений относительно двух искомых безразмерных функций

$$x_1 = \frac{f_{11}}{h_1}, \quad x_2 = \frac{f_{21}}{h_1}, \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \lambda\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - K\mu\left[-\frac{2}{3}x_2 + \mu(\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2) - \mu^2x_2(\beta_{11}x_1^2 + \right.$$
$$\left. + \beta_{12}x_2^2)\right] + Qx_1(\gamma_{11}x_1^2 + \gamma_{12}x_2^2) = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \lambda\frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2x_2 + K\mu\left[\frac{2}{3}x_1 + \mu\alpha_{21}x_1x_2 + \mu^2x_1(\beta_{21}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2)\right] +$$
$$+ Qx_2(\gamma_{21}x_1^2 + \gamma_{22}x_2^2) = 0,$$

где

$$\lambda = \frac{2\varepsilon}{\omega_1}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \mu = M\frac{h_1}{a}, \quad h_1 = h + 2\delta, \tag{3.6}$$

$$K = \frac{4\varkappa P_\infty}{m^*\omega_1^2h_1}, \quad Q = \frac{h_1^2}{16m^*\omega_1^2}, \tag{3.7}$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{9}(\varkappa + 1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(\varkappa + 1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(\varkappa + 1),$$

$$\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2(\varkappa+1)}{40},\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2(\varkappa+1)}{70},\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2(\varkappa+1)}{70}, \tag{3.8}$$

$$\gamma_{11}=\frac{\lambda_1^4}{a_{22}}+\frac{\mu_1^4}{a_{11}},\qquad \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+\frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{\lambda_1\mu_2}}+\frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{\lambda_3\mu_2}},$$

$$\gamma_{22}=\frac{\lambda_2^4}{a_{22}}+\frac{\mu_1^4}{a_{11}},\qquad \lambda_i=\frac{i\pi}{a},\qquad \mu_k=\frac{k\pi}{b},$$

$$\omega_1^2=\frac{1}{m^*}\left[\bar{D}_{11}\lambda_1^4+2(\bar{D}_{12}+2\bar{D}_{66})\lambda_1^2\mu_1^2+\bar{D}_{22}\mu_1^4+b_1\lambda_1A_{11}+\right.$$
$$+b_2\mu_1\bar{A}_{11}-k_{11}\lambda_1^3A_{11}-(k_{12}+2k_{66})(\mu_1A_{11}+\lambda_1\bar{A}_{11})\lambda_1\mu_1-$$
$$\left.-\mu_1^3k_{22}\bar{A}_{11}-\lambda_1^2P_\alpha-\mu_1^2P_\beta\right], \tag{3.9}$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{m^*}\left[\bar{D}_{11}\lambda_2^4+2(\bar{D}_{12}+2\bar{D}_{66})\lambda_2^2\mu_1^2+\bar{D}_{22}\mu_1^4+b_1\lambda_2A_{21}+\right.$$
$$+b_2\mu_1\bar{A}_{21}-k_{11}\lambda_2^3A_{21}-(k_{12}+2k_{66})(\mu_1A_{21}+\lambda_2\bar{A}_{21})\lambda_2\mu_1-$$
$$\left.-\mu_1^3k_{22}\bar{A}_{21}-\lambda_2^2P_\alpha-\mu_1^2P_\beta\right], \tag{3.10}$$

$$\Delta_{\lambda_1\mu_2}=a_{11}\lambda_1^4+(a_{66}+2a_{12})\lambda_1^2\mu_2^2+a_{22}\mu_2^4, \tag{3.11}$$

$$\Delta_{\lambda_3\mu_2}=a_{11}\lambda_3^4+(a_{66}+2a_{12})\lambda_3^2\mu_2^2+a_{22}\mu_2^4, \tag{3.12}$$

$$A_{ik}=\frac{Y}{(b_1+b_{11}\lambda_i^2+b_{66}\mu_k^2)(b_2+b_{22}\mu_k^2+b_{66}\lambda_i^2)-(b_{12}+b_{66})^2\lambda_i^2\mu_k^2}\lambda_i,$$
$$Y=[D_{11}\lambda_i^2+(D_{12}+2D_{66})\mu_k^2](b_2+b_{22}\mu_k^2+b_{66}\lambda_i^2)-$$
$$-(b_{12}+b_{66})[D_{22}\mu_k^2+(D_{12}+2D_{66})\lambda_i^2]\mu_k^2 \tag{3.13}$$

$$\bar{A}_{ik}=\frac{Y'}{(b_1+b_{11}\lambda_i^2+b_{66}\mu_k^2)(b_2+b_{22}\mu_k^2+b_{66}\lambda_i^2)-(b_{12}+b_{66})^2\lambda_i^2\mu_k^2}\mu_k.$$
$$Y'=[D_{22}\mu_k^2+(D_{12}+2D_{66})\lambda_i^2](b_1+b_{11}\lambda_i^2+b_{66}\mu_k^2)-$$
$$-(b_{12}+b_{66})[D_{11}\lambda_i^2+(D_{12}+2D_{66})\mu_k^2]\lambda_i^2$$

В случае двухстороннего обтекания с равными скоростями потока, система (3.5) принимает более простой вид

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\lambda\frac{dx_1}{d\tau}+x_1+k\mu\left[-\frac{2}{3}x_2+\mu^2x_2(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2)\right]+$$
$$+Qx_1(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2)=0,$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\lambda\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+k\mu\left[\frac{2}{3}x_1+\mu^2x_1(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2)\right]+$$
$$+Qx_2(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2)=0, \tag{3.14}$$

где $K=\frac{8\varkappa P_\infty}{m^*\omega_1^2 h_1}$, т. е. в два раза большее, чем в случае одностороннего обтекания.

Соответствующая (3.5) и (3.14) линейная система допускает решения в виде

$$x_i = y_i e^{\omega\tau}. \tag{3.15}$$

В случае малых значений μ, все характеристические показатели ω лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w=0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $\mu=\mu_*$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим и соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи

$$\mu_* = \frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{K}\sqrt{1+\frac{2(\gamma^2+1)\lambda^2}{(\gamma^2-1)^2}}. \tag{3.16}$$

4. Периодическое решение системы (3.5) в окрестности критического значения будем искать методом последовательных приближений. С этой целью, проинтегрировав два раза, перепишем систему (3.5) в виде

$$\begin{aligned} x_1 = &-\int_0^\tau\int_0^\tau \Big\{\lambda x_1' + x_1 + K\mu\Big[-\frac{2}{3}x_2 + \mu(\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2) + \\ &+\mu^2 x_2(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2)\Big] + Qx_1(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2)\Big\}d\tau d\tau + C_1, \\ x_2 = &-\int_0^\tau\int_0^\tau \Big\{\lambda x_2' + \gamma^2 x_2 + K\mu\Big[\frac{2}{3}x_1 + \mu\alpha_{21}x_1x_2 + \mu^2 x_1(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2)\Big] + \\ &+ Qx_2(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2)\Big\}d\tau d\tau + C_2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

В качестве первого приближения принимаем, что

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= A^{(1)}\cos\theta\tau, \\ x_2^{(1)} &= -A^{(1)}\cos\theta\tau, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $A^{(1)}$ и θ — амплитуда и частота установившихся колебаний флаттера, найденные методом Бубнова-Галеркина

$$A^{(1)} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(\mu-\mu_*)K}{Q\gamma_0 - K\mu^3\beta_0}}, \tag{4.3}$$

$$\theta^2 = 1 + \frac{2}{3} K\mu + \frac{3}{4} (Q\gamma_1 - K\mu^3\beta_1) (A^{(1)})^2. \tag{4.4}$$

Здесь

$$\gamma_0 = \gamma_{21} + \gamma_{22} - \gamma_{11} - \gamma_{12}, \quad \beta_0 = \beta_{21} + \beta_{22} - \beta_{11} - \beta_{12}, \tag{4.5}$$

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}, \quad \beta_1 = \beta_{11} + \beta_{12}. \tag{4.6}$$

Подставив (4.2) в правую часть системы (4.1) и удовлетворив начальным условиям, для амплитуды второго приближения получим

$$A^{(2)} = A^{(1)} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\theta^2}}. \tag{4.7}$$

Из формулы (4.7) видно, что характер движения вблизи критического значения μ зависит от поведения амплитуды первого приближения $A^{(1)}$.

Здесь возможны следующие два случая.

а) Если при $\mu \geqslant \mu_*$ $Q\gamma_0 - K\mu^3\beta_0 > 0$, то это означает, что амплитуда установившихся колебаний флаттера, равная нулю на границе области флаттера, постепенно увеличивается при дальнейшем увеличении параметра μ.

в) Если $Q\gamma_0 - K\mu^3\beta_0 < 0$ при $\mu < \mu_*$, то в этом случае амплитуда постепенно уменьшается при увеличении параметра μ. Но когда μ становится больше, чем μ_*, действительные значения $A^{(1)}$ отсутствуют и получается резкий переход от устойчивости невозмущенной формы к неустойчивости.

5. Для примера приводим решение поставленной задачи для трехслойной квадратной пластинки, характерные размеры срединной плоскости которой суть $a = b = 3.14$ *м*. Для вычисления берем: $\varkappa = 1,4$, $\lambda = 0,05$ и $P_x = P_y = 0$.

Упругие постоянные материала каждого слоя приводятся ниже.

Слои	E_1 *кг/м²*	E_2 *кг/м²*	G_{12} *кг/м²*	G_{13} *кг/м²*	G_{23} *кг/м²*	ν_1	ν_2
I и III	$1253,7\cdot10^6$	$37,3\cdot10^6$	$63,2\cdot10^6$	$50,6\cdot10^6$	$2,4\cdot10^6$	0,3487	0,0104
II	$37,3\cdot10^6$	$1253,7\cdot10^6$	$63,2\cdot10^6$	$2,4\cdot10^6$	$50,6\cdot10^6$	0,0104	0,3487

Далее, для удельных весов материала каждого слоя имеем $\gamma' = \gamma^0 = 818$ *кг/м³*.

При этих исходных данных из (3.16) с учетом (3.6) — (3.10) для критического значения параметра μ получим

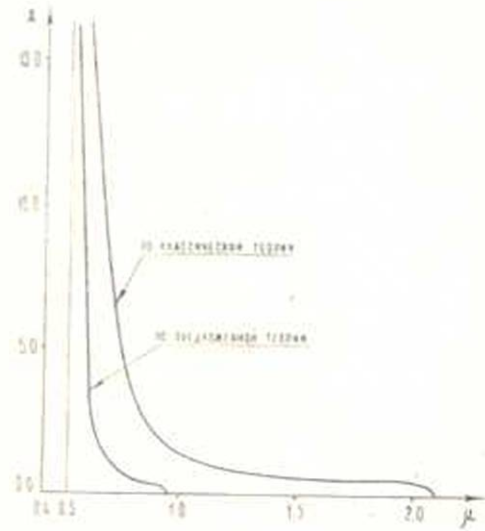
$$\mu_* = 0,945. \tag{5.1}$$

Для сравнения приводим значение μ_* без учета поперечных сдвигов в среднем слое пластинки

$$\mu_* = 2,11. \tag{5.2}$$

Сравнив (5.1) и (5.2), легко заметить существенное уменьшение значений μ_* в случае учета поперечных сдвигов.

Это означает, что значение критической скорости флаттера, найденное по предложенной теории, значительно меньше соответствующей величины, вычисленной по классической теории.



Фиг. 4

На фиг. 4 представлен график зависимости амплитуды установившихся колебаний флаттера от параметра μ по классической и предложенной теориям. Поскольку наибольший прогиб пластинки имеет порядок $A^{(1)}h_1$, то из фиг. 4 видно, что возмущения, вызывающие интенсивные колебания пластинки, значительно уменьшаются вследствие учета поперечных сдвигов в среднем слое пластинки.

Вычисления показывают также, что расхождение результатов, полученных по классической и предложенной теориям, увеличиваются с увеличением отношения h_1/a.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 IV 1961

Ժ. Ե. Բաղդասարյան

ԵՌԱՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՁԱՅՆԻՑ ՄԵԾ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀՈՍԱՆՔԻ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է օրթոտրոպ սալի ոչ-գծային կայունությունը ձայնից մեծ արագություն ունեցող հոսանքով շրջհոսվելիս:

Սալի միջին շերտում ընդունվում են Ս. Ա. Համբարձումյանի առաջարկած հիպոթեզները, իսկ արտաքին շերտերում՝ Կիրխհոֆի հիպոթեզները:

Ստացված են բանաձևեր, կրիտիկական արագության և կայունացված ամպլիտուդաների համար:

Ցույց է տրված, որ կրիտիկական արագությունը, միջին շերտում շոշափող լարումները հաշվի առնելու հետևանքով, խիստ փոքրանում է, իսկ ամպլիտուդաներն զգալիորեն մեծանում են:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. „Изв. АН СССР, ОТН", вып. 5, 1958.
2. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. „ПММ", **24**, вып. 2, 1960.
3. *Амбарцумян С. А.* К общей теории анизотропных оболочек. „ПММ", **22**, вып. 2 1958.
4. *Болотин В. В.* Нелинейный флаттер пластин и оболочек. „Инж. сб.", **28**, 1960.
5. *Болотин В. В.* О критических скоростях в нелинейной теории аэроупругости. „Научные доклады высшей школы, серия машиностроение и приборостроение", № 3, 1958.
6. *Болотин В. В., Гаврилов Ю. В., Макаров Б. П., Швейкао Ю. Ю.* Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. „Известия АН СССР, ОТН", вып. 3, 1959.
7. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
8. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. „ПММ", **20**, № 6, 1956.
9. *Ashley H.* and *Zartarian C.* Piston theory—a new aerodynamic tool for the aeroelastician. „J. Aeron. Sci." vol. **23**, № 6, 1956.
10. *Хеджпет Д.* Флаттер прямоугольных свободно опертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях. „Сб. механика. ИЛ", № 2, 1958.
11. *Reissner E.* Small bending and stretching of sandwich-type shells. „NACA" Report № 975, 1950.
12. *Хачатрян А. А.* К расчету трехслойной ортотропной оболочки. „Известия АН АрмССР серия физ.-мат. наук", **12**, № 5, 1959.
13. *Григолюк Э. И.* Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем. „Известия АН СССР, ОТН", № 1, 1957.
14. *Куршин Л. М.* Уравнения трехслойных цилиндрических оболочек. „Известия АН СССР, ОТН",№ 3, 1958.
15. *Прусаков А. П.* Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем. „ПММ", вып. 1, 1951.
16. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Ж. Е.* Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. „Известия АН СССР, ОТН", № 5, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. Варданян

Экспериментальный метод определения температурных напряжений и их концентраций

§ 1. Основы метода

Температурные напряжения в детали возникают в тех случаях, когда исключена возможность ее „свободной" деформации, вызванной изменением температуры. В частности, сопротивления деформациям будут возникать, если деталь нагревается (охлаждается) неравномерно или, если деталь состоит из материалов с различными коэффициентами линейного расширения α, даже в случае равномерного, по объему, нагрева.

Для определения температурных напряжений, вызываемых стационарными температурными полями, применяют как теоретические [1,2], так и различные экспериментальные методы. Экспериментальными методами определяют напряжения либо в деталях, при их эксплуатации, либо в подобных им моделях. В последнем случае, обычно, в модели создаются температурное поле или относительные смещения (по методу дислокации теории упругости), вызывающие поле напряжений, соответствующее напряжениям натурной детали. До последнего времени исследование температурных напряжений на моделях не получило достаточного применения, так как существующие методы требуют сложную технику эксперимента.

В настоящей работе рассматривается метод определения температурных напряжений и их концентраций, аналогичный методу дислокаций, но осуществляемый без выполнения реальных разрезов в модели. Этот метод может быть просто реализован и позволяет достаточно точно осуществить моделирование напряжений. Метод основан на свойстве „замораживания" и „размораживания" деформаций у некоторых прозрачных, оптически—чувствительных материалов (ЭД6—М, МИХМ—ИМАШ и др.).

Сущность этого метода заключается в следующем. Разделим мысленно деталь по изотермам на ряд участков и на каждом участке i произведения $\alpha_i \Delta T_i = \overline{\varepsilon}_i$ будем считать постоянными или изменяющимися линейно. Если на этих участках внешней нагрузкой создать деформации $\overline{\varepsilon}_i$, под нагрузкой соединить их и после соединения снять нагрузку, то в натурной детали возникнут напряжения, эквивалентные температурным. Подобным образом можно поступить и с моделью из прозрачного оптически—чувствительного материала. Модель изготовляется из частей с предварительно „замороженными" деформациями, соответствующими „свободным" температурным деформациям натурной детали, монолитным склеиванием клеем холодного отверждения. После этого модель „размораживается" (для материала ЭД6—М при нагреве до 130°С), в результате чего происходит перераспределение „замороженных" деформаций. Полученные таким образом напряжения в модели, пропорциональные искомым температурным напряжениям в детали, могут определяться обычными методами фотоупругости.

Применением „замораживания" линейных и плоских деформаций заготовок частей модели можно решать как одномерные, так и двухмерные задачи температурных напряжений. При одномерном распределении температур необходимо в частях модели создать и „заморозить" деформации, соответствующие „свободным" температурным деформациям натурной детали, только в одном направлении. В остальных направлениях деформации могут быть произвольными, так как при дальнейшем „размораживании" модели эти деформации не вызывают оптического эффекта, при этом задача может быть решена одной моделью.

§ 2. Выполнение модели и переход от напряжений, полученных в модели, к напряжениям в детали

Предположим, что в исследуемых детали и модели напряжения и деформации меняются в пределах пропорциональности. Для получения зависимости между напряжениями в частях модели $\bar{\sigma}_i$ и „свободными" деформациями в частях натурной детали $\bar{\varepsilon}_i$ принимают, что максимальным и минимальным дефформациям $\varepsilon_{\max}$ и $\varepsilon_{\min}$ частей детали соответствуют максимальные и минимальные напряжения $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ в соответствующих частях модели при их „замораживании" (фиг. 1). Рассматривая треугольники OAD и ABC (фиг. 1), получаем следующую зависимость для определения $\bar{\sigma}_i$

$$\bar{\sigma}_i = \frac{b}{a}(\bar{\varepsilon}_i - a). \tag{2.1}$$

Постоянные a и b определяются по формулам

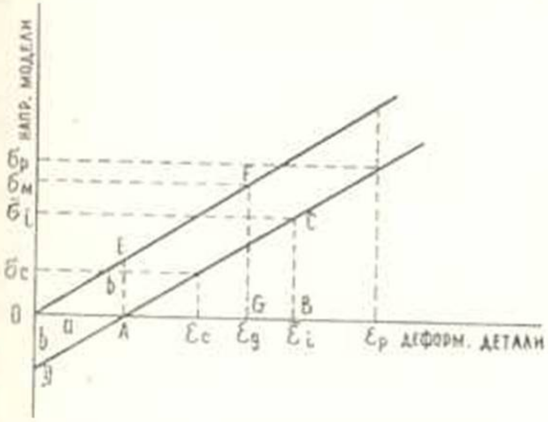
$$a = \frac{\sigma_p \varepsilon_c - \sigma_c \varepsilon_p}{\sigma_p - \sigma_c}, \qquad b = \frac{\sigma_p \varepsilon_c - \sigma_c \varepsilon_p}{\varepsilon_p - \varepsilon_c}, \tag{2.2}$$

где $\sigma_p = \sigma_{\max} \leqslant \sigma_{\text{пц. раст}} \approx 12$ $кг/см^2$; $|\sigma_c| = |\sigma_{\min}| \leqslant |\sigma_{\text{пц. сж}}| \approx 12$ $кг/см^2$; $\varepsilon_p = \varepsilon_{\max}$; $\varepsilon_c = \varepsilon_{\min}$.

Подставляя (2.2) в (2.1) получим

$$\overline{\sigma_i} = \frac{\sigma_p - \sigma_c}{\varepsilon_p - \varepsilon_c}\left(\overline{\varepsilon_i} - \frac{\sigma_p \varepsilon_c - \sigma_c \varepsilon_p}{\sigma_p - \sigma_c}\right). \tag{2.3}$$

В случае неравномерного нагрева детали, состоящей из однородного материала, $\overline{\varepsilon_i} = \alpha \Delta T_i$, $\varepsilon_p = \alpha \Delta T_{max}$, $\varepsilon_c = \alpha \Delta T_{min}$. В случае равномерного нагрева детали, состоящей из различных материалов с



Фиг. 1. Диаграмма зависимости между напряжением в модели и деформациями в натурной детали.

различными коэффициентами линейного расширения α_i,

$$\overline{\varepsilon_i} = \alpha_i \Delta T, \quad \varepsilon_p = \Delta T \cdot \alpha_{max}, \quad \varepsilon_c = \Delta T \cdot \alpha_{min}.$$

Условия подобия, по которым выполняется упругая модель и производится переход от замеров на модели к искомым величинам в натурной детали, составляются из рассмотрения фиг. 1. Из треугольников OAE и OGF следует

$$\sigma_д = \frac{a}{b} E_д \cdot \sigma_м . \tag{2.4}$$

Подставив значения a и b из (2.2), получим

$$\sigma_д = E_д \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_c}{\sigma_p - \sigma_c} \sigma_м . \tag{2.5}$$

По формуле (2.5) производят пересчет найденных напряжений в модели на напряжения в детали, если напряжения не зависят от коэффициента Пуассона или коэффициенты Пуассона материалов модели и детали одинаковы ($\nu_м = \nu_д$).

Имея величины ε_p и ε_c в частях детали выбирается σ_p и σ_c, а $\overline{\sigma_i}$ определяется по формуле (2.3). Возможны три частных случая:

1) $\sigma_c = 0$, $\varepsilon_c \neq 0$, т. е. минимальным деформациям частей детали ε_c соответствуют напряжения $\sigma_c = 0$ в соответствующих частях модели. В этом случае формулы (2.3) и (2.5) принимают вид

$$\overline{\sigma}_i = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_p - \varepsilon_c}\left(\overline{\varepsilon}_i - \varepsilon_c\right), \tag{2.3а}$$

$$\sigma_н = E_н \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_c}{\sigma_p}\sigma_м . \tag{2.5а}$$

2) $\varepsilon_c = 0$, $\sigma_c \neq 0$, т. е. минимальным деформациям $\varepsilon_c = 0$ частей детали соответствуют минимальные напряжения $\sigma_c \neq 0$ в соответствующих частях модели. Для этого случая:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_p - \sigma_c}{\varepsilon_p}\left(\overline{\varepsilon}_i - \frac{\sigma_c \varepsilon_p}{\sigma_p - \sigma_c}\right). \tag{2.3б}$$

$$\sigma_н = \frac{E_н \varepsilon_p}{\sigma_p - \sigma_c}\sigma_м . \tag{2.5б}$$

3) $\varepsilon_c = 0$, $\sigma_c = 0$, т. е. части модели, соответствующие частям натурной детали, имеющие деформации $\varepsilon_c = 0$, оставлены без напряжения ($\sigma_c = 0$). Тогда

$$\sigma_i = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_p}\overline{\varepsilon}_i , \tag{2.3в}$$

$$\sigma_н = \frac{E_н \varepsilon_p}{\sigma_p}\sigma_м . \tag{2.5в}$$

Напряжения в модели из оптически—чувствительного материала определяются методами фотоупругости [3,4]. Во внутренних точках объемной (плоской) модели имеем

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_м = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{t} m,$$

а на свободном от нагрузки контуре плоской модели—

$$\sigma_м = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{t} m,$$

где $\sigma_1 - \sigma_2$ квазиглавные (или главные) напряжения; $\sigma_м$ — напряжение вдоль контура; $\sigma_0^{(1,0)}$ — оптическая постоянная материала модели; m— —порядок полосы интерференции; t—толщина модели в направлении просвечивания.

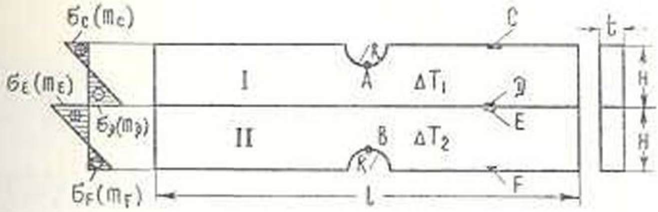
§ 3. Примеры применения

Излагаемый метод иллюстрируем двумя примерами определения температурных напряжений и их концентрации в плоских деталях.

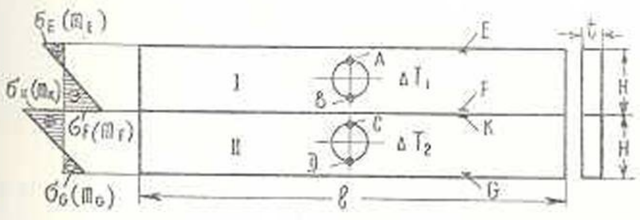
Пример 1. Определялись температурные напряжения и их концентрации в стальной пластинке с двухсторонними неглубокими выточками (фиг. 2). Верхняя 1 часть имела температуру $\Delta T_1 = 200°C$, нижняя — $\Delta T_2 = 0$. Материал пластинки — сталь ($E = 2 \cdot 10^6$ $кг/см^2$;

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$). Модель из ЭД6—М с оптической постоянной $\sigma_0^{(1,0)} = 0{,}35$ *кг/см² см/полос* имела размеры: $2h_{мод} = 30{,}8$ *мм*; $l_{мод} = 116{,}4$ *мм* (коэффициент геометрического подобия $\alpha_e = 2$) толщина модели $t_{мод} = 6{,}3$ *мм*. Часть I модели была „заморожена" при растягивающем напряжении 8,3 *кг/см²*, а часть II была оставлена без напряжений.

После склеивания частей I и II модели по ребрам и обработки по поверхности, перед „размораживанием" были сделаны выточки (фиг. 2) радиусами $r = 5$ *мм*. Из картины полос, полученной после



Фиг. 2. Пластинка с двухсторонними неглубокими выточками и эпюры напряжений (порядков полос) по неослабленному сечению. $\Delta T_1 = 200°$C; $\Delta T_2 = 0$; $R = 5$ *мм*.



Фиг. 3. Пластинка с двумя отверстиями диаметром $d = 8{,}0$ *мм* и эпюры напряжений (порядков полос) по неослабленному сечению. $\Delta T_1 = 200°$C; $\Delta T_2 = 0$.

„размораживания" модели (фиг. 4), видно, что напряжения в пластинке, на расстоянии равном $\approx 1{,}5h$ от выточек и от торцов, изменяются линейно. Порядки полос на контуре модели и у склейки определялись с учетом краевого эффекта. Эпюра напряжений (полос) для этих участков показана на фиг. 2.

По формуле $\sigma_з = \dfrac{E_з \varepsilon_p}{\sigma_p} \sigma_м = \dfrac{E_з \alpha \Delta T_{max}}{\sigma_p} \cdot \sigma_м$ получаем

$$\sigma_C = -\sigma_F = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 200}{-8{,}3} \cdot \frac{0{,}35}{0{,}63} (-4{,}5) = 1445 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_D = -\sigma_E = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 200}{-8{,}3} \cdot \frac{0{,}35}{0{,}63} \cdot 9 = -2890 \text{ кг/см}^2.$$

По наибольшим порядкам полос m_{max} в точках A и B и $m_{ном}$ (фиг 2), отсчитанных на полярископе, найдены коэффициенты концентрации $\alpha_з = \frac{m_{\max}}{m_{ном}}$, отнесенные к неослабленным сечениям частей I и II. В точках A и B (фиг. 2) $(m_{\max})_A = 11{,}5$; $(m_{\max})_B = 11{,}0$. $m_{ном} = 4{,}5$ берется в точках модели, соответствующих точкам C и F фиг. 2.

Для коэффициентов концентрации получаем

$$(\alpha_з)_A = \frac{(m_{\max})_A}{m_{ном}} = \frac{11{,}5}{4{,}5} = 2{,}56,$$

$$(\alpha_з)_B = \frac{(m_{\max})_B}{m_{ном}} = \frac{11{,}0}{4{,}5} = 2{,}45.$$

Определены коэффициенты концентрации также расчетным путем. При расчете принималось, что на каждой части I и II пластинки, имеющей односторонние неглубокие выточки, действуют сосредоточенная сила P, вызывающая чистое растяжение или сжатие и изгибающий момент $M = \frac{H}{2}P$, вызывающий чистый изгиб. Исходя из закона независимости действия сил, получаем

$$\alpha_з = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ном}} = \frac{3\alpha_з^{изг} - \alpha_з^{раст}}{2}, \tag{3.1}$$

где $\alpha_з^{изг}$ — коэффициент концентрации для пластинки с односторонней неглубокой выточкой, при изгибе моментом $M = \frac{H}{2}P$; $\alpha_з^{раст}$ — коэффициент концентрации для той же пластинки при чистом растяжении; $\sigma_{ном} = \sigma_{ном}^{изг} - \sigma_{ном}^{раст} = \frac{3P}{tH} - \frac{P}{tH}$. При расчете принимают [6]

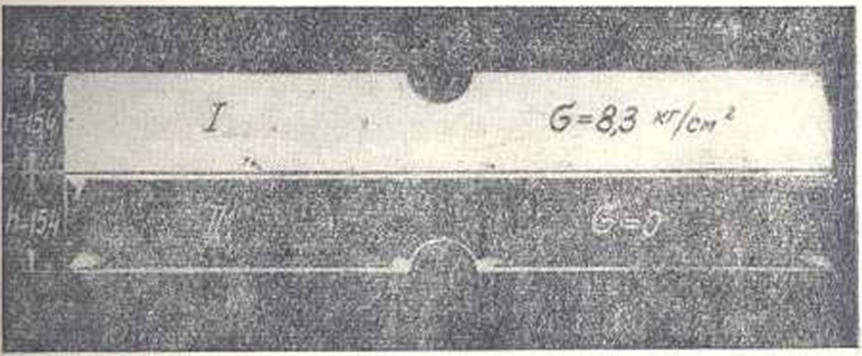
$$\alpha_з^{изг} = \alpha_з^{раст} = 3\sqrt{\frac{R}{2R}} - 1 + \frac{4}{2 + \sqrt{\frac{R}{2R}}} = 2{,}6.$$

Подставляя эти значения в формулу (3.1), получим

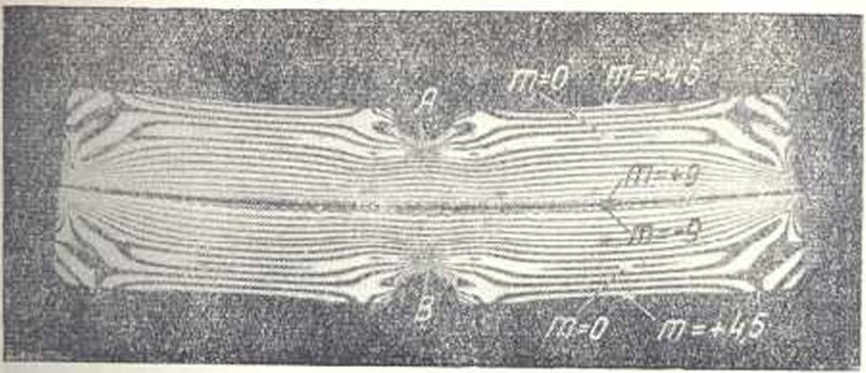
$$\alpha_з = \alpha_з^{изг} = \alpha_з^{раст} = 2{,}6.$$

Пример 2. Определялись температурные напряжения и их концентрации в стальной пластинке, имеющей два отверстия (фиг. 3). Верхняя часть I имела температуру $\Delta T_1 = 200°C$, нижняя часть II — $\Delta T_2 = 0$.

Модель была выполнена из материала ЭД6—М, имеющего оптическую постоянную $\sigma_0^{(1,0)} = 0{,}354$ *кг/см² см/полос*. Размеры модели: $2h = 30{,}2$ *мм*; $l = 99{,}3$ *мм*; $t_м = 6{,}2$ *мм*. Часть I модели с предварительно „замороженными" деформациями, соответствующими продольным напряжениям $\sigma = 8{,}47$ *кг/см²*, склеена с частью II по ребрам. После этого были просверлены отверстия диаметром $d_м = 8{,}0$ *мм* (фиг. 5а) и модель путем нагрева была „разморожена". Полученная картина полос интерференции показана на фиг. 5б. Эпюра напряжений (полос) по сечениям, где влияние отверстия затухает, показана на фиг. 3. Напряжения σ_E, σ_G, σ_K и σ_F определяются по формуле (2.5в).



а



б

Фиг. 4. Картина полос при определении температурных напряжений в пластинке, изображенной на фиг. 2
а) при „свободной" деформации I пластинки,
б) после „размораживания" склеенной модели, $m_A = 11.5$; $m_B = 11.0$

$$\sigma_E = -\sigma_G = \frac{12\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{6}\cdot 200}{-8{,}47}\cdot\frac{0{,}354}{0{,}62}(-4{,}4) = 1425\ кг/см^2$$

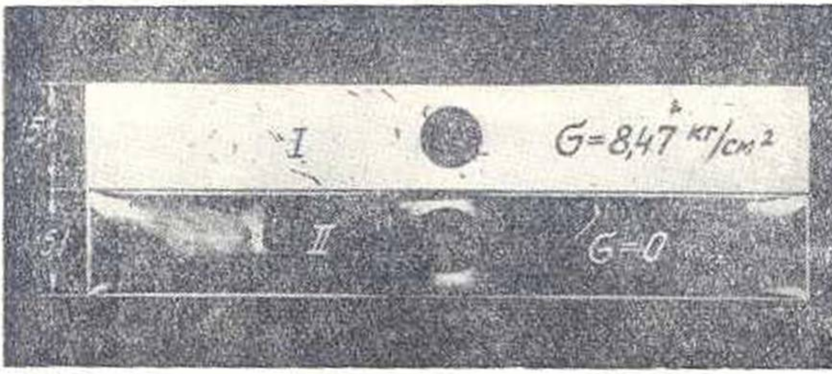
$$\sigma_K = -\sigma_F = \frac{12.10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{6}\cdot 200}{-8{,}47}\cdot\frac{0{,}354}{0{,}62}(-8{,}8) = 2850\ кг/см^2.$$

Коэффициенты концентраций в точках A, B, C и D (фиг. 5б) определяются по формуле $\alpha_\sigma = \frac{m_{max}}{m_{ном}}$, где номинальный порядок полосы $m_{ном}$ по ослабленному сечению определяется по порядкам полос неослабленного сечения

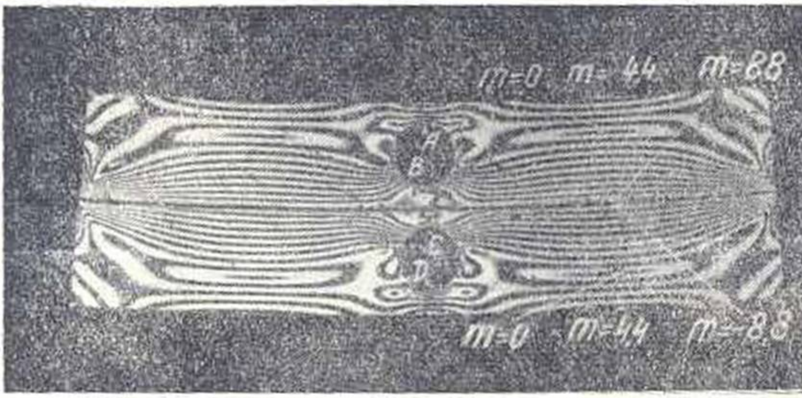
$$m_{\text{ном}}^{\text{раст}} = \frac{h}{h-d} \cdot m_{\text{раст}} = 4{,}68; \qquad m_{\text{ном}}^{\text{изг}} = \frac{h^3}{h^3-d^3} \cdot m_{\text{изг}} = 7{,}75$$

$$(m_{\max})_A = 1{,}5; \quad (m_{\max})_B = 16; \quad (m_{\max})_C = 18; \quad (m_{\max})_D = 2{,}5.$$

Для коэффициентов концентрации получаем



а



б

Фиг. 5. Картина полос при определении температурных напряжений в пластинке, изображенной на фиг. 3
а) при „свободной" деформации 1 пластинки.
б) после „размораживания" склеенной модели $m_A = 1{,}5$; $m_B = 16$; $m_C =$ ... $m_D = 2{,}5$.

$$(\alpha_z)_{\frac{A,D}{B,C}} = \frac{m_{\max}}{m_{\text{ном}}^{\text{изг}} \mp m_{\text{ном}}^{\text{раст}}},$$

$$(\alpha_z)_A = \frac{1{,}5}{3{,}07} = 0{,}49; \quad (\alpha_z)_B = \frac{16}{12{,}43} = 1{,}29;$$

$$(\alpha_z)_C = \frac{18}{12{,}43} = 1{,}45; \qquad (\alpha_z)_D = \frac{2{,}5}{3{,}07} = 0{,}815.$$

т. е. в точках A и D не имеется концентрации напряжений. Для сравнения получены коэффициенты концентрации расчетным путем. При расчете каждая часть I и II модели рассматривается как отдельная пластинка, шириною h с центральным круговым отверстием диаметра d, находящаяся под одновременным действием сосредоточенной силы P (действует по оси пластинки) и изгибающего момента $M = \frac{h}{2}P$.

Исходя из закона независимости действия сил, получаем

$$(\alpha_з)_{\substack{A,D\\B,C}} = \frac{\frac{3h^2}{h^2+hd+d^2}\alpha_з^{изг} \pm \alpha_з^{раст}}{\frac{3h^2}{h^2+hd+d^2} \mp 1}. \tag{3.2}$$

где $h = 15{,}1$ *мм*; $d = 8$ *мм*; $\alpha_з^{изг} \approx \frac{2d}{h} = \frac{16}{15{,}1} = 1{,}06$; $\alpha_з^{раст} \approx \frac{3h}{h+d} = \frac{3 \cdot 15{,}1}{23{,}1} = 1{,}96$. Номинальные напряжения берутся по ослабленному сечению на контуре [6]

$$\sigma_{ном}^{изг} = \frac{6Mh}{t(h^3-d^3)} = \frac{3Ph^2}{t(h^3-d^3)}, \qquad \sigma_{ном}^{раст} = \frac{P}{t(h-d)}.$$

Из формулы (3.2) получаем расчетные величины для коэффициентов концентраций в точках A, B, C и D

$$(\alpha_з)_A = (\alpha_з)_D = 0{,}314; \quad (\alpha_з)_B = (\alpha_з)_C = 1{,}4.$$

Полученные отклонения в экспериментальных величинах коэффициентов концентрации в сходственных точках связаны с тем, что отверстия расположены не точно на осях частей модели. Это особенно сильно сказывается в точках A и D, где напряжения небольшие.

Институт машиноведения
АН СССР

Поступила 4 III 1961

Գ. Ս. Վարդանյան

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՅԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԷՔՍՊԵՐԻՄԵՆՏԱԼ ՄԵԹՈԴ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է ջերմային լարումների և նրանց կոնցենտրացիայի որոշման նոր էքսպերիմենտալ մեթոդ, օպտիկական մեթոդի կիրառմամբ։ Մեթոդը հիմնված է դեֆորմացիաների չափման և [illegible]-

ընդմանը հատկությունների վրա, որոնցով օժտված են մի քանի օպտիկական ակտիվ նյութեր։ Լարումները որոշվում են այդ նյութերից պատրաստված մոդելներում, այնուհետև նմանության բանաձևերի միջոցով անցում է կատարվում դետալին։

Մեթոդի էությունն այն է, որ մոդելավորվում է ոչ թե դետալի ջերմային դաշտը, այլ այդ դաշտին համապատասխանող դեֆորմացիաները։

Մեթոդը պարզաբանելու նպատակով դիտարկված են հետևյալ օրինակները՝

1. Երկկողմանի ոչ խորը հանվածքներ ունեցող թիթեղում ջերմային լարումների և նրանց կոնցենտրացիայի որոշումը։

2. Անցքեր ունեցող թիթեղում ջերմային լարումների և նրանց կոնցենտրացիայի որոշումը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гейтвуд Б. Е.* Термоупругие напряжения. ИЛ, М., 1959.
2. *Мелан Э.* и *Паркус Г.* Температурные напряжения вызываемые стационарными температурными полями, Физматгиз, М., 1958.
3. Справочник Машиностроителя, т. 3, Машгиз, М., 1961.
4. *Пригоровский Н. И., Прейсс А. К., Бокштейн М. Ф., Куприкова Н. А.* Модели из нового оптически—чувствительного материала ЭД6—М для поляризационно—оптического метода исследования напряжений. Из-ние Филиала ВИНИТИ, М., 1958.
5. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. ОБОРОНГИЗ, М.—Л., 1939.
6. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. ОГИЗ—Гостехиздат, М., 1947.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

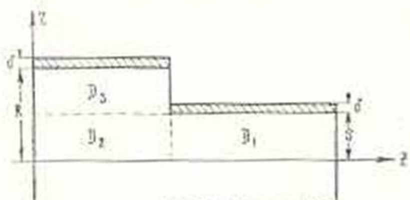
Кручение вала ступенчатого осевого сечения с тонким усиливающим покрытием

Задача о кручении составного вала переменного диаметра, а также задача о кручении вала переменного сечения с тонким усиливающим покрытием в приближенной постановке, через функцию напряжения, были исследованы в работе [1].

В настоящей статье приводится приближенное решение задачи о кручении ступенчатого цилиндрического вала, покрытого по боковой поверхности тонким усиливающим слоем постоянной толщины, при произвольном симметричном нагружении.

Эффективное решение задачи о кручении вала ступенчатого осевого сечения при помощи метода [2] сведения к бесконечной системе линейных уравнений дано в работе [3]. Подобные задачи решены также в работах [4, 5].

Функция напряжений рассматриваемой задачи представлена в виде рядов по бесселевым функциям [3, 12]. Для определения коэффициентов разложений получена вообще квазивполне-регулярная бесконечная система линейных уравнений. Для весьма широкого интервала изменения отношений размеров вала доказана вполне регулярность этих бесконечных систем. В качестве примера рассмотрена задача о кручении ступенчатого цилиндрического вала, когда скручивающая нагрузка приложена на двух участках его боковой поверхности [3].



Фиг. 1.

1. Координатная система и размеры осевого сечения скручиваемого вала показаны на фиг. 1. Области, соответствующие усиливающему покрытию, заштрихованы.

Известно [1], что решение задачи о кручении вала переменного сечения с тонким усиливающим покрытием сводится к определению функции напряжений $\Phi(r, z)$, которая в области осевого сечения вала, соответствующей основному материалу, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

и приближенному контурному условию

$$\Phi + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\int_0^s P(s)\, r^2(s)\, ds. \tag{1.2}$$

Здесь $\rho = \delta\frac{G_1}{G}$, где δ — толщина покрытия, G и G_1 — модули сдвига основного материала вала и материала покрытия, n — направление внешней нормали к контуру осевого сечения, s — длина дуги контура осевого сечения, $P(s)$ — внешняя скручивающая нагрузка:

$$P(s) = \tau_r(s)\frac{dz}{ds} - \tau_z(s)\frac{dr}{ds}, \tag{1.3}$$

а $r(s)$ — радиус вала в данном сечении.

Как известно, напряженное состояние валов переменного диаметра при кручении характеризуется двумя касательными напряжениями τ_r и τ_z, которые в области D, соответствующей основному материалу, через функцию напряжений выражаются формулами

$$\tau_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad \tau_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \tag{1.4}$$

В области, соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение постоянно по направлению нормали n и определяется формулами

$$\tau_s^* = \frac{G_1}{G}\tau_s, \qquad \tau_n^* = \tau_n. \tag{1.5}$$

Дифференцируя граничное условие (1.2) по s и имея в виду (1.3), получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial n} = r^2\left(\tau_z\frac{dr}{ds} - \tau_r\frac{dz}{ds}\right). \tag{1.6}$$

На оси сплошного вала напряжения равны нулю, так как скручивающая нагрузка распределена симметрично относительно оси вала. Поэтому, согласно (1.4), производные функции $\Phi(r, z)$ как по z, так и по r при $r=0$ должны равняться нулю, т. е. функция Φ на оси z должна быть постоянной

$$\Phi(0, z) = C = \text{const.}, \tag{1.7}$$

причем без ограничения общности можно принять $C=0$ [6].

На основании симметрии относительно оси вала. функцию $\Phi(r, z)$ можно определить только для одной половины области осевого сечения вала.

Пусть на поверхности вала задана скручивающая нагрузка. Тогда из (1.6) для $\Phi(r, z)$ будем иметь следующие контурные условия

$$
\begin{aligned}
&\tau_z(r,0)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=0}=\varphi_1(r), && 0\leqslant r<s,\\
&\tau_z(r,0)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=0}=\varphi_2(r), && s<r\leqslant R,\\
&\tau_r(R,z)=-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial r}\right)_{r=R}=\varphi_3(z), && 0\leqslant z\leqslant a, \qquad (1.8)\\
&\tau_z(r,a)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=a}=\varphi_4(r), && s<r\leqslant R,\\
&\tau_r(s,z)=-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial r}\right)_{r=s}=\varphi_5(z), && a\leqslant z\leqslant b,\\
&\tau_z(r,b)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=b}=\varphi_6(r), && 0\leqslant r\leqslant s.
\end{aligned}
$$

Предполагаем, что функции $\{\varphi_i\}$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. Тогда они могут быть представлены в виде рядов Фурье и Фурье-Дини [8]

$$
\begin{aligned}
&\varphi_3(z)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\frac{k\pi z}{a}, && 0<z<a,\\
&\varphi_5(z)=\frac{g_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a}, && a<z<b,\\
&\varphi_1(r)=a_0r+\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_1\left(\mu_k\frac{r}{s}\right), && 0<r<s,\\
&\varphi_2(r)=b_0r+\sum_{k=1}^{\infty}b_kW_1(\lambda_kr), && s<r<R, \qquad (1.9)\\
&\varphi_4(r)=f_0r+\sum_{k=1}^{\infty}f_kW_1(\lambda_kr), && s<r<R,\\
&\varphi_6(r)=q_0r+\sum_{k=1}^{\infty}q_kJ_1\left(\mu_k\frac{r}{s}\right), && 0<r<s,
\end{aligned}
$$

где

$$
W_n(\lambda_kr)=\frac{J_n(\lambda_kr)}{J_2(\lambda_kR)}-\frac{Y_n(\lambda_kr)}{Y_2(\lambda_kR)}, \qquad (n=1,\ 2), \tag{1.10}
$$

$J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя n-ого порядка соответственно первого и второго рода [7]. Числа $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ являются соответственно корнями уравнений

$$
J_2(x)=0,\quad J_2(s,\ x)\,Y_2(R,\ x)-J_2(R,\ x)\,Y_2(s,\ x)=0. \tag{1.11}
$$

Для функций $J_n(x)$ и $W_n(x)$ справедливы следующие формулы [6, 3]

$$\int_0^s xJ_1\left(\mu_k\frac{x}{s}\right)J_1\left(\mu_p\frac{x}{s}\right)dx=\frac{\mu_k}{\mu_p}\int_0^s xJ_2\left(\mu_k\frac{x}{s}\right)J_2\left(\mu_p\frac{x}{s}\right)dx=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при} \quad p\neq k,\\ \frac{1}{2}\left[sJ_1(\mu_k)\right]^2 & \text{при} \quad p=k,\end{cases} \tag{1.12}$$

$$\int_s^R xW_1(\lambda_k x)\,W_1(\lambda_p x)\,dx=\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\int_s^R xW_2(\lambda_k x)\,W_2(\lambda_p x)\,dx=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при} \quad p\neq k,\\ \omega_k & \text{при} \quad p=k,\end{cases} \tag{1.13}$$

$$\omega_k=\frac{1}{2}\left\{\left[RW_1(\lambda_k R)\right]^2-\left[sW_1(\lambda_k s)\right]^2\right\},$$

$$\int_0^s x^2J_1\left(\mu_k\frac{x}{s}\right)dx=\int_s^R x^2W_1(\lambda_k x)\,dx=0 \qquad (k=1, 2, 3, \cdots). \tag{1.14}$$

При помощи формул (1.12)—(1.14) коэффициенты разложений (1.9) определяются единственным образом.

Для рассматриваемого случая из условия равновесия вала будем иметь

$$M=\iint_F r(s)\,P(s)\,dF=2\pi\int_s r^2(s)\,P(s)\,ds=$$

$$=2\pi\left\{-\int_0^s r^2\tau_z(r,0)\,dr-\int_s^R r^2\tau_z(r,0)\,dr-\int_R^{R+\delta} r^2\tau_z^*(r,0)\,dr+\right.$$

$$+(R+\delta)^2\int_0^a\tau_r(R,z)\,dz-\int_{R+\delta}^R r^2\tau_z^*(r,a)\,dr-\int_R^{s+\delta} r^2\tau_z(r,a)\,dr+$$

$$\left.+(s+\delta)^2\int_a^b\tau_r(s,z)\,dz-\int_{s+\delta}^s r^2\tau_z^*(r,b)\,dr-\int_s^0 r^2\tau_z(r,b)\,dr\right\}. \tag{1.15}$$

Подставив значение τ_z, τ_r и τ_z^* из (1.5) и (1.8) в предыдущие интегралы, используя (1.9) и (1.14), получим

$$-\frac{a_0s^4}{4}-\frac{b_0}{4}\left[R^3(R+4\rho)-s^4\right]+\frac{f_0}{4}\left[R^3(R+4\rho)-(s+\delta)^4\right]+$$

$$+\frac{q_0}{4}s^3(s+4\rho)+\frac{ac_0(R+\delta)^2}{2}+\frac{g_0(s+\delta)^2(b-a)}{2}=0. \quad (1.16)$$

Обозначим через Φ_1, Φ_2 и Φ_3 функцию Φ в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно

$$\Phi(r, z)=\Phi_i(r, z) \text{ в области } D_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.17)$$

Функции Φ_1, Φ_2 и Φ_3 ищем в следующей форме [3]

$$\Phi_1(r, z)=r^4(Az+B)+Cz+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s}+B_k\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{s}\right]J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right)+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)+D_k K_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)\right]\sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \quad (1.18)$$

$$\Phi_2(r, z)=r^4(Ez+F)+Gz+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s}+F_k\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{s}\right]J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right)+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)+H_k K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)\right]\sin\frac{k\pi z}{a}, \quad (1.19)$$

$$\Phi_3(r, z)=r^4(Mz+N)+Pz+Q+r^2\sum_{k=1}^{\infty}[M_k\operatorname{sh}\lambda_k z+N_k\operatorname{ch}\lambda_k z]\times$$

$$\times W_2(\lambda_k r)+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)+Q_k K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)\right]\sin\frac{k\pi z}{a}, \quad (1.20)$$

где $I_2(x)$ и $K_2(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента [7].

На основании (1.7), (1.8) и (1.9) для определения Φ_1, Φ_2 и Φ_3 получаем следующие граничные условия

$$\Phi_1(0, z)=0, \qquad a\leq z\leq b,$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{z=b}=q_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}q_k J_1\left(\mu_k\frac{r}{s}\right), \qquad 0<r<s, \quad (1.21)$$

$$-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z\partial r}\right)_{r=s}=\frac{g_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \qquad a<z<b.$$

$$\Phi_2(0, z)=0, \qquad 0\leq z\leq a,$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{z=0}=a_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}a_k J_1\left(\mu_k\frac{r}{s}\right), \qquad 0<r<s. \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)_{z=0}=b_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}b_k W_1(\lambda_k r), \qquad s<r<R, \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)_{z=a}=f_0 r+\sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r), \qquad s<r<R, \quad (1.23)$$

$$-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z\partial r}\right)_{r=R}=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos\frac{k\pi z}{a}, \qquad 0<z<a.$$

Кроме того, на смежных сторонах прямоугольников D_1 и D_2, D_2 и D_3 должны быть выполнены условия сопряжения

$$\Phi_1(r,\ a)=\Phi_2(r,\ a), \quad \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)_{z=a}=\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)_{z=a}, \qquad 0<r<s, \quad (1.24)$$

$$\Phi_2(s,\ z)=\Phi_3(s,\ z), \quad \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s}=\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)_{r=s}, \qquad 0<z<a. \quad (1.25)$$

На линиях сопряжения неизвестные напряжения $\tau_r(s,\ z)$ и $\tau_z(r,\ a)$ формально разложим в ряды

$$\tau_r(s,\ z)=\frac{\eta_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\cos\frac{k\pi z}{a}, \qquad 0<z<a. \quad (1.26)$$

$$\tau_z(r,\ a)=\zeta_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k J_1\left(\mu_k\frac{r}{s}\right), \qquad 0<r<s, \quad (1.27)$$

где η_k и ζ_k — пока неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Из условий равновесия частей вала, в силу (1.16) определяем ζ_0 и η_0

$$\zeta_0=q_0+\frac{2g_0(b-a)}{s(s+4\rho)}, \qquad \eta_0=\frac{s^2}{2a}(a_0-\zeta_0). \quad (1.28)$$

Удовлетворив первому условию (1.25), используя (1.28) найдем

$$Q=\frac{a_0-b_0}{4}s^4. \quad (1.29)$$

2. Удовлетворив граничным условиям (1.21)—(1.23), имея в виду (1.26)—(1.29), получим

$$\Phi_1(r,\ z)=\frac{r^4}{4}\left[q_0+\frac{2g_0(b-z)}{s(s+4\rho)}\right]+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s}{\mu_k}\operatorname{csch}\frac{\mu_k(b-a)}{s}\times$$

$$\times\left[\zeta_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-z)}{s}+q_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k(z-a)}{s}\right]J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right)+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\rho N_k(\zeta_k)-g_k(b-a)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)+\rho\frac{k\pi}{b-a}I_1\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}\cdot\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{k\pi}\times$$

$$\times \sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ a \leqslant z \leqslant b \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(r, z) = \frac{r^4}{4}\left\{a_0 + \frac{z}{a}\left[q_0 - a_0 + \frac{2g_0(b-a)}{s(s+4\rho)}\right]\right\} +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{\mu_k} \operatorname{cs}\operatorname{ch}\frac{\mu_k a}{s}\left[\zeta_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s} + a_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k(a-z)}{s}\right] \times$$

$$\times J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) - \frac{ar^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{k}\cdot\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cdot\sin\frac{k\pi z}{a}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\Phi_3(r, z) = \frac{r^4}{4}\left(b_0 + \frac{f_0 - b_0}{a} z\right) + \frac{s^4 z}{4a}\left[b_0 - f_0 + q_0 - a_0 + \frac{2g_0(b-a)}{s(s+4\rho)}\right] +$$

$$+ \frac{a_0 - b_0}{4} s^4 + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cs}\operatorname{ch}\lambda_k a}{\lambda_k}\left[f_k \operatorname{sh}\lambda_k z + b_k \operatorname{sh}\lambda_k(a-z)\right] W_2(\lambda_k r) +$$

$$+ \frac{ar^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{\eta_k\left[\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) - \rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi r}{a}\right)\right] -}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) + \rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}$$

$$\frac{-\left(c_k - \frac{2\rho}{a}T_k\right)\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) + \rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \times \sin\frac{k\pi z}{a}, \quad \begin{pmatrix} s \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где

$$N_k(\zeta_k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2 J_1(\mu_n)}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\left[\zeta_n + (-1)^{k+1} q_n\right], \tag{2.4}$$

$$T_k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2 W_1(\lambda_n R)}{\lambda_n^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}\left[b_n + (-1)^{k+1} f_n\right], \tag{2.5}$$

$$\Delta(x, y) = I_2(x) K_2(y) - I_2(y) K_2(x), \tag{2.6}$$

$$U(x, y) = I_1(x) K_2(y) + I_2(y) K_1(x). \tag{2.7}$$

Используя вторые условия (1.24) и (1.25) и принимая во внимание (2.1), (2.2) и (2.3), получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} F_k - \frac{4\rho\mu_p}{(b-a)s^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{pk} B_{kn} L_n + \beta_p, \tag{2.8}$$

$$F_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} L_n + \gamma_k. \tag{2.9}$$

При этом использованы формула (1.12), рекуррентные соотношения для бесселевых функций, значения интегралов

$$\int_0^s r^3 J_2\left(\mu_p \frac{r}{s}\right) dr = -\frac{s^4}{\mu_p} J_1(\mu_p), \tag{2.10}$$

$$\int_0^s r I_2(\alpha r) J_2\left(\mu_p \frac{r}{s}\right) dr = -\frac{\mu_p I_2(\alpha s) J_1(\mu_p)}{\alpha^2 + \left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2} \tag{2.11}$$

и формула Вронского [7]

$$K_{n+1}(x) I_n(x) + K_n(x) I_{n+1}(x) = \frac{1}{x}, \tag{2.12}$$

где

$$A_{pk} = \frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) + \rho \frac{k\pi}{b-a} I_1\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}, \tag{2.13}$$

$$B_{kn} = \operatorname{sh} \frac{\mu_n a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_n (b-a)}{s} \operatorname{cs\,ch} \frac{\mu_n b}{s} \cdot \frac{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}, \tag{2.14}$$

$$a_{pk} = \frac{2\mu_p}{as} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}, \tag{2.15}$$

$$b_{kn} = 2\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{\mu_n a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_n (b-a)}{s} \operatorname{cs\,ch} \frac{\mu_n b}{s} \cdot \frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) + \rho \frac{k\pi}{a} U\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right) + \rho \frac{k\pi}{a} I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}, \tag{2.16}$$

$$\beta_p = s J_1(\mu_p) \left| a_p \operatorname{cs\,ch} \frac{\mu_p a}{s} + q_p \operatorname{cs\,ch} \frac{\mu_p (b-a)}{s} \right| +$$

$$
+\frac{s^2}{a\mu_p}\left(\frac{q_0-a_0}{2}s+\frac{g_0 b}{s+4\rho}\right)+
$$

$$
+\frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}A_{pk}g_k+\frac{4\rho\mu_p}{(b-a)s}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k A_{pk}q_n\frac{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2 J_1(\mu_n)}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}, \tag{2.17}
$$

$$
\gamma_k=2sI_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\frac{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}\left[(q_0-f_0)s+\right.
$$

$$
+(-1)^{k+1}(a_0-b_0)s+\frac{2g_0(b-a)}{s+4\rho}+
$$

$$
+(-1)^{k+1}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n J_1(\mu_n)}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n-(-1)^{k+1}b_n}{\lambda_n^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}\times
$$

$$
\left.\times W_1(\lambda_n s)\right]+(-1)^{k+1}\frac{(ac_k-2\rho T_k)I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}, \tag{2.18}
$$

$$
L_k=sJ_1(\mu_k)\,\mathrm{sh}\frac{\mu_k b}{s}\,\mathrm{csch}\frac{\mu_k a}{s}\,\mathrm{csch}\frac{\mu_k(b-a)}{s}\gamma_k, \tag{2.19}
$$

$$
F_k=a(-1)^{k+1}\gamma_k.
$$

Совокупность двух бесконечных систем уравнений (2.8), (2.9) можно привести к одной системе подстановкой (2.9) в (2.8)

$$
L_p=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{pk}b_{kn}-\frac{4\rho\mu_p}{(b-a)s^2}A_{pk}B_{kn}\right]L_n+\sum_{k=1}^{\infty}a_{pk}\gamma_k+\beta_p,\quad(p=1,2,3,\cdots). \tag{2.20}
$$

Докажем, что бесконечная система линейных уравнений (2.20) при условии $\frac{b-a}{s}<9$ вполне регулярна.

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{pk}b_{kn}-\frac{4\rho\mu_p}{(b-a)s^2}A_{pk}B_{kn}\right]\right|=
$$

$$
=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\mu_p}{as}\,\mathrm{sh}\frac{\mu_n a}{s}\,\mathrm{sh}\frac{\mu_n(b-a)}{s}\,\mathrm{csch}\frac{\mu_n b}{s}\times\right.
$$

$$\times\left|\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\frac{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}-\frac{a\rho}{(b-a)s}\times$$

$$\times\frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)+\rho\frac{k\pi}{b-a}I_1\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\right|\Bigg|<$$

$$<\frac{2\mu_p}{as}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi s}{2a}I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\frac{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+\frac{a\rho}{(b-a)s}\cdot\frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)+\rho\frac{k\pi}{b-a}I_1\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\right|<\frac{2\mu_p}{as}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi s}{2a}I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}U\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+\rho\frac{k\pi}{a}I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+$$

$$\left.+\frac{a\rho}{(b-a)s}\cdot\frac{1}{1+\rho\frac{k\pi}{b-a}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\right|<$$

$$<\frac{2\mu_p}{as}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi s}{2a}I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\left[1+\frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cdot\frac{K_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}\right]\times\right.$$

$$\times \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+\frac{a}{k\pi s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\Bigg\}<$$

$$<\frac{2\mu_p}{as}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{k\pi s}{2a}I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\left[1+\frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cdot\frac{K_1\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_1\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\right]\times\right.$$

$$\left.\times \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+\frac{a}{k\pi s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{2\mu_p}{as}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_1\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+\frac{a}{k\pi s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\right\}<$$

$$<\frac{2\mu_p}{as}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+\frac{a}{k\pi s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2}\right\}\leqslant\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{2}{\pi\mu_p}+\frac{1}{\pi\mu_p}\ln\left[1+\left(\frac{b-a}{2\pi s}\right)^2\mu_p^2\right]=0{,}624+\frac{y_{\max}}{\pi}, \tag{2.21}$$

где

$$\mu_1=5{,}13562\ldots,\qquad y=\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x^2). \tag{2.22}$$

Функция (2.22) получает свое максимальное значение (с точностью до 0,1) $y_{\max}=0{,}8\sqrt{\alpha}$ при $x=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Таким образом, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{pk}b_{kn}-\frac{4\varphi\mu_p}{(b-a)s^2}A_{pk}B_{kn}\right]\right|\leqslant 0{,}624+0{,}04053\frac{b-a}{s}. \tag{2.23}$$

Здесь использованы суммы и неравенства [3, 4, 9]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\mu_n}{s}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}=\frac{as}{2k\pi}\cdot\frac{I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}, \tag{2.24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}\left(\operatorname{cth}\alpha\pi-\frac{1}{\alpha\pi}\right), \tag{2.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\alpha^2)}\approx\frac{1}{1+\alpha^2}+\frac{1}{2\alpha^2}\ln\left[1+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right], \tag{2.26}$$

$$\operatorname{cth}x-\frac{1}{x}<1 \qquad \text{при} \qquad 0\leqslant x\leqslant\infty, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{sh}\frac{\mu_n a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_n(b-a)}{s}\operatorname{cs}\operatorname{ch}\frac{\mu_n b}{s}\leqslant\frac{1}{2}, \tag{2.28}$$

$$0<K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)-K_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)=$$

$$=\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)<I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right), \tag{2.29}$$

$$\frac{K_n(x_2)}{I_n(x_2)}<\frac{K_n(x_1)}{I_n(x_1)} \qquad \text{при} \qquad x_2>x_1>0, \tag{2.30}$$

$$U\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)=I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)+I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)K_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)>0 \tag{2.31}$$

так как

$$I_n(x)>0, \quad K_n(x)>0 \quad \text{при} \quad x>0, \quad R(n)>-\frac{1}{2}, \tag{2.32}$$

$$I_{n+1}(x)\leqslant I_n(x), \quad K_n(x)\leqslant K_{n+1}(x) \quad \text{при} \quad x>0, \quad R(n)>-\frac{1}{2} \tag{2.33}$$

и формула (2.12).

Таким образом на основании (2.23) бесконечная система (2.20) при условии $\frac{b-a}{s}<9{,}277$ вполне регулярна [10]. Свободные члены системы (2.20) ограничены. Ограниченность свободных членов (2.17) и (2.18) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.20) позволяет определять искомые коэффициенты с любой степенью точности [10]. Из (2.21) и (2.22) следует, что бесконечная система (2.20) вообще будет квазивполне—регулярной при произвольных размерах вала и параметра μ_p.

Напряжения определяются формулами (1.4), при этом в каждой области следует брать соответствующую функцию напряжений Φ_i $(i=1, 2, 3)$.

3. В качестве численного примера рассмотрим кручение ступенчатого вала с тонким усиливающим покрытием следующих размеров

$$R=a=2s, \quad b=6s, \quad l_2=2l_1=s, \quad \delta=0{,}1\cdot s, \quad \frac{G_1}{G}=10. \tag{3.1}$$

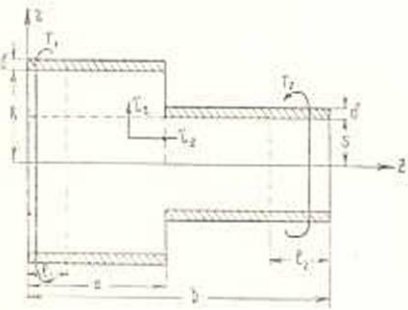
Тогда $\rho=s$.

Пусть нагрузка приложена на участках длины l_1 и l_2 по концам вала по следующему закону

$$\tau_r(R,z) = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z\partial r}\right)_{r=R} = -T_1, \qquad 0\leqslant z\leqslant l_1,$$

$$\tau_r(s,z) = -\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z\partial r}\right)_{r=s} = T_2, \qquad b-l_2\leqslant z\leqslant b. \tag{3.2}$$

Остальная часть поверхности вала свободна (фиг. 2).



Фиг. 2.

Пользуясь разложениями (1.9), имеем

$$a_k = b_k = f_k = q_k = 0, \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots). \tag{3.3}$$

$$c_0 = -\frac{2T_1 l_1}{a}, \qquad c_k = -\frac{2T_1}{k\pi}\sin\frac{k\pi l_1}{a},$$
$$g_0 = \frac{2T_2 l_2}{b-a}, \qquad g_k = (-1)^k\frac{2T_2}{k\pi}\sin\frac{k\pi l_2}{b-a}. \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3.4}$$

Подставив (3.3) и (3.4) в (1.16), получим

$$T_1 l_1 (R+\delta)^2 = T_2 l_2 (s+\delta)^2. \tag{3.5}$$

Используя (3.1)—(3.4), для бесконечной системы (2.20) будем иметь

$$A_{pk} = \frac{I_2\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \frac{k\pi}{4} I_1\left(\frac{k\pi}{4}\right)}\cdot\frac{s^2}{\mu_p^2+\left(\frac{k\pi}{4}\right)^2}, \tag{3.6}$$

$$B_{kn} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k\pi}{4\mu_n}\right)^2}, \qquad a_{pk} = \frac{\mu_p}{\mu_p^2+\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}, \tag{3.7}$$

$$b_{kn} = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 I_2\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{\Delta\left(k\pi,\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{k\pi}{2}U\left(k\pi,\frac{k\pi}{2}\right)}{I_2(k\pi)+\frac{k\pi}{2}I_1(k\pi)}\cdot\frac{1}{\mu_n^2+\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}, \tag{3.8}$$

$$\beta_p=\left\{\frac{0{,}3}{\mu_p}+\frac{4\mu_p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\frac{I_2\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi}{4}\right)+\frac{k\pi}{4}I_1\left(\frac{k\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{\mu_p^2+\left(\frac{k\pi}{4}\right)^2}\right\}T_2 s, \tag{3.9}$$

$$\gamma_k=\frac{1{,}6\,I_2\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{I_2(k\pi)+\frac{k\pi}{2}I_1(k\pi)}\left\{\Delta\left(k\pi,\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{k\pi}{2}U\left(k\pi,\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{5T_1}{2T_2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(-1)^k}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}\right\}T_2 s. \tag{3.10}$$

Для рассматриваемого случая бесконечная система (2.20) вполне регулярна. Пользуясь теорией вполне регулярных систем линейных уравнений [10], получим следующие оценки для неизвестных

$$\begin{aligned}
&L_1^-=0{,}25955, && T_1 s\leqslant L_1\leqslant 0{,}26311, && T_1 s=L_1^+,\\
&L_2^-=0{,}24075, && T_1 s\leqslant L_2\leqslant 0{,}24863, && T_1 s=L_2^+,\\
&L_3^-=0{,}23170, && T_1 s\leqslant L_3\leqslant 0{,}24034, && T_1 s=L_3^+,\\
&L_4^-=0{,}22622, && T_1 s\leqslant L_4\leqslant 0{,}23837, && T_1 s=L_4^+,\\
&F_1^-=0{,}53267, && T_1 s\leqslant F_1\leqslant 0{,}53296, && T_1 s=F_1^+,\\
&F_2^-=0{,}42130, && T_1 s\leqslant F_2\leqslant 0{,}42202, && T_1 s=F_2^+,\\
&F_3^-=0{,}31670, && T_1 s\leqslant F_3\leqslant 0{,}31779, && T_1 s=F_3^+,\\
&F_4^-=0{,}25806, && T_1 s\leqslant F_4\leqslant 0{,}25942, && T_1 s=F_4^+.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Используя формулы (1.4), в силу (2.19) и (3.1)—(3.4) из (2.1)—(2.3) определим напряжения τ_z и τ_r. Подставив коэффициенты $\{L_k\}$ и $\{F_k\}$ из (3.11) в полученные выражения, для τ_z и τ_r найдем верхнюю и нижнюю границы напряжений τ_z и τ_r.

Таблица 1

Значения $\dfrac{\tau_z(r,z)}{T_1}$

z/s	r/s				
	0,25	0,5	1	1,5	2
5	0,32218 0,32138	0,66200 0,66038	1,5265 1,5232	— —	— —
4	0,41098 0,40937	0,82319 0,81999	1,6420 1,6358	— —	— —
3	0,43134 0,42911	0,86688 0,86232	1,7673 1,7571	— —	— —
1,75	0,19571 0,19550	0,37885 0,37800	0,40229 0,40219	0,077711 0,077629	0,058153 0,058146
1,5	0,12102 0,12078	0,21436 0,21382	0,21916 0,21883	0,12415 0,12408	0,10212 0,10211
1	0,051883 0,051823	0,098757 0,098679	0,14814 0,14813	0,14825 0,14824	0,19190 0,19189
0,5	0,023930 0,023762	0,046709 0,046684	0,069563 0,069512	0,11829 0,11829	0,26078 0,26078

Таблица 2

Значения $\dfrac{\tau_r(r,\, z)}{T_1}$

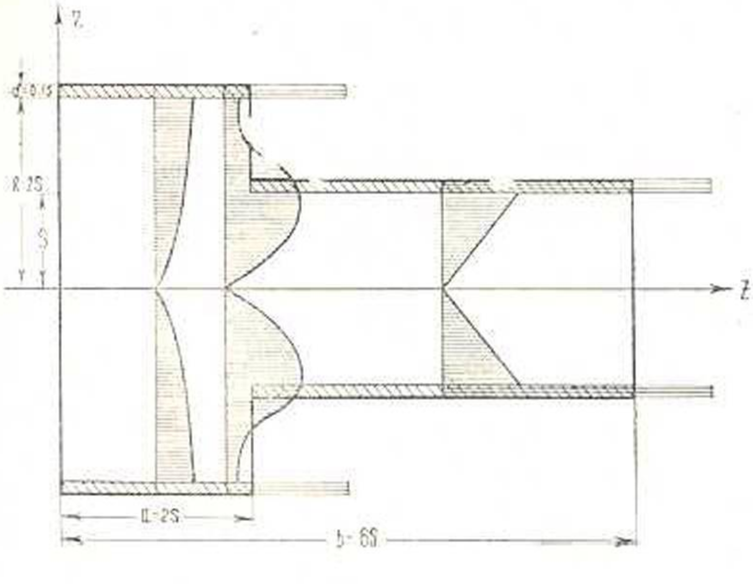
z/s	r/s				
	0.25	0.5	1	1.5	2
4	0,001922 0,001875	0,007419 0,007228	0,027443 0,026406	— —	— —
1	−0,004709 −0,004722	−0,016506 −0,016549	−0,10061 −0,10093	−0,04294 −0,04297	−0,02316 −0,02317

В таблицах 1 и 2 приведены значения напряжений τ_z и τ_r в нескольких точках осевого сечения вала.

Согласно (1.5) и (3.1), напряжения в усиливающем покрытии будут

$$\tau'_z = 10 \cdot \tau_z \text{ и } \tau'_r = \tau_r \quad \text{при} \quad r = \pm s \quad \text{и} \quad r = \pm R. \tag{3.12}$$

Сопоставляя полученные результаты с таблицей 1 ([3], стр. 472), замечаем, что, благодаря горизонтальному усиливающему покрытию, максимальное касательное напряжение в основном материале при одних и тех же крутящих моментах уменьшается более, чем в 4.8 раза.



Фиг. 3.

Для наглядного представления закона распределения касательного напряжения τ_z на фиг. 3 приведены эпюры этих напряжений по некоторым данным таблиц 1 и 2.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 IV 1961

Պ. Հ. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆԱՁԵՎ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Փոփոխական տրամագծով բաղադրյալ լիսեռի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը, ինչպես նաև փոփոխական կտրվածքով ուժեղացնող բարակ ծածկույթով լիսեռի ոլորման խնդրի լուծումը մոտավոր դրվածքով, լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ ուսումնասիրվել է [1] աշխատության մեջ։

Ներկա աշխատության մեջ դիտարկվում է կամայական սիմետրիկ բեռնավորմամբ աստիճանաձև լիսեռի ոլորման խնդրի մոտավոր լուծումը, երբ նրա կողմնային մակերևույթը ծածկված է հաստատուն հաստությամբ ուժեղացնող բարակ շերտով։

Աստիճանաձև լիսեռի ոլորման խնդրի էֆեկտիվ լուծումը, կամայական սիմետրիկ բեռնավորման դեպքում առանց ուժեղացնող բարակ ծածկույթի, [2] աշխատության մեջ առաջարկված օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման եղանակով, երբ խնդրի լուծումը բերվում է գծային անվերջ հավասարումների սիստեմի լուծմանը, տրված է [3] աշխատության մեջ։ Նման խնդիրներ լուծված են նաև [4, 5] աշխատություններում։

Դիտարկվող խնդրում լարումների ֆունկցիան ներկայացվում է շարքերով, ըստ Բեսսելի և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների [3, 12]։ Վերլուծության գործակիցները որոշելու համար ընդհանրապես ստացել ենք կվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմ։ Լիսեռի չափերի հարաբերության փոփոխման բավականաչափ մեծ ինտերվալի համար ցույց է տրված ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լիովին ռեգուլյարությունը։ Որպես օրինակ դիտարկված է ուժեղացնող բարակ ծածկույթով աստիճանաձև լիսեռի ոլորումը, երբ ոլորող բեռը կիրառված է նրա կողմնային մակերևույթի միայն երկու մասերում [3] (նկ. 2)։ Ստացված թվային արդյունքները համեմատված են [3] աշխատության մեջ բերված թվային արդյունքների հետ։ Կազմված են լարումների բաշխման էպյուրները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чобанян К. С.* Кручение составного вала переменного диаметра. „ДАН АрмССР“, **27**, № 3, 1958, 139—144.
2. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „ПММ“, т. **13**, № 1, 1949, 107—112.
3. *Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М.* О кручении валов переменного сечения. „ПММ“, **15**, № 4, 1951, 451—472.
4. *Костандян Б. А.* О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“ **7**, № 4, 1954, 23—52.
5. *Костандян Б. А.* Кручение вала с насаженным диском. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, **11**, № 3, 1958, 63—77.
6. *Солянин-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат. М.-Л., 1949.
7. *Грей Э., Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат, М., 1953.

8. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Госиноиздат, М., 1949.
9. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.-Л., 1951.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
11. British Association Mathematical Tables X, Bessel Functions Part II. University press Cambridge, 1952.
12. *Timpe A.* Die Torsion von Umdrehungskörpern, Mathem. Annalen, Band. 1912, 71, Leipzig, 480.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных призматических стержней удлиненного профиля, изготовленных из ортотропного материала

В настоящей статье рассматривается задача о кручении анизотропного (ортотропного) стержня удлиненного профиля (эллипс, трапеция, треугольник и авиационный профиль общего типа), когда главные направления упругости не совпадают с главными осями поперечного сечения стержня. По методу малого параметра получены выражения функций напряжений, жесткости и максимального касательного напряжения.

Исследовано влияние различного расположения главных направлений упругости ортотропного материала на наибольшие напряжения и на жесткость. Показано, при какой их ориентации жесткость будет наибольшей, а напряжения—наименьшими. Иначе говоря, в настоящей работе показано, как нужно изготовить анизотропный стержень из ортотропного материала, чтобы он имел наивыгоднейшие механические свойства (наибольшую жесткость и наименьшее максимальное напряжение), и наоборот, как не следует ориентировать главные направления упругости при изготовлении стержня.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность проф. С. Г. Лехницкому за постановку задачи и ценные указания и академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну за руководство.

§ 1. Постановка и решение задачи

Рассмотрим анизотропный призматический стержень из ортотропного материала, находящийся в равновесии под действием усилий, распределенных по концам и приводящихся к скручивающим моментам M_z.

Направим ось z декартовых координат xyz параллельно оси стержня, а плоскость $z=0$ совместим с закрепленным концом стержня. Предположим, что оси $O\xi$ и $O\eta$ являются главными направлениями упругости (физические оси), а ox и oy—направлениями (геометрические оси), не совпадающими с физическими осями. Здесь система $\xi\eta z$ получена из системы xyz путем поворота вокруг общей оси z на некоторый угол φ.

Тогда уравнения обобщенного закона Гука, отнесенные к системе $\xi\eta z$, будут иметь вид [1]

$$\gamma_{\eta z} = \frac{1}{G_{\eta z}} \cdot \tau_{\eta z}$$

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1}{G_{\xi z}} \cdot \tau_{\xi z}, \tag{1.1}$$

$$\tau_{\xi z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}$$

где

$$\tau_{\eta z} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi},$$

а $G_{\xi z}$ и $G_{\eta z}$ — модуль сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям ξoz и ηoz. Для определенности положим $G_{\eta z} = G_{max}$ и $G_{\xi z} = G_{min}$, т. е. плоскости ηoz и ξoz соответственно назовем „плоскостью наибольшего модуля сдвига" и „плоскостью наименьшего модуля сдвига", а направления η и ξ — „направлением (осью) наибольшего модуля сдвига" и „направлением (осью) наименьшего модуля сдвига".

Здесь функция напряжений удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{G_{max}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{G_{min}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} = -2\theta \tag{1.2}$$

и условию на контуре поперечного сечения

$$\varphi_0 = 0. \tag{1.3}$$

Задача усложняется, когда оси $o\xi$ и $o\eta$ не совпадают с осями ox и oy.

В этом случае уравнения обобщенного закона Гука (отнесенные к системе xyz) будут

$$\gamma_{yz} = a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz},$$

$$\gamma_{xz} = a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}. \tag{1.4}$$

Здесь

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{1.5}$$

а новые упругие постоянные a_{ij} $(i, j = 4,5)$ определяются так [1]

$$a_{44} = \frac{\cos^2\varphi}{G_{\eta z}} + \frac{\sin^2\varphi}{G_{\xi z}},$$

$$a_{55} = \frac{\sin^2\varphi}{G_{\eta z}} + \frac{\cos^2\varphi}{G_{\xi z}}, \tag{1.6}$$

$$a_{45} = \left(\frac{1}{G_{\gamma z}} - \frac{1}{G_{\xi z}}\right)\cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

В этом случае функция напряжений $\overline{\varphi} = \theta \cdot \Psi$ удовлетворяет уравнению

$$a_{44}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - 2a_{45}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} + a_{55}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -2 \tag{1.7}$$

или

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{G_{\gamma z}} + \frac{\sin^2\varphi}{G_{\xi z}}\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{G_{\gamma z}} - \frac{1}{G_{\xi z}}\right)\cdot \sin 2\varphi \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} +$$

$$+\left(\frac{\sin^2\varphi}{G_{\gamma z}} + \frac{\cos^2\varphi}{G_{\xi z}}\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -2 \tag{1.7'}$$

с граничным условием

$$\Psi = 0. \tag{1.8}$$

Решим уравнение (1.7) или (1.7′) при граничном условии (1.8) для удлиненных областей. Для этого воспользуемся результатами, полученными в работах [2,3].

Предположим, что область ограничена двумя дугами кривых

$$y = \lambda\varphi_1(x),$$

$$y = \lambda\varphi_2(x).$$

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений x.

Полагая*

$$y = \lambda\eta, \quad \Psi(x, y) = \Phi(x, \eta; \lambda) \quad (0 < \lambda < 1)$$

решение уравнения (1.7) представим в виде ряда по степеням малого параметра λ

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, \eta)\cdot\lambda^k.$$

Подставив значение Φ в дифференциальное уравнение (1.7), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений с частными производными, которая при помощи (1.8) последовательно интегрируется и определяются неизвестные функции $P_k(x, \eta)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

Следовательно, можно записать выражение для функции напряжения

$$\Psi(x, y) = -\frac{y^2}{a_{55}} + \lambda\cdot\left\{\frac{y\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}{a_{55}} + \frac{a_{45}\cdot y^2\cdot D_x(\varphi_1+\varphi_2)}{a_{55}^2} + \cdots\right\} +$$

$$+\lambda^2\cdot\left\{-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a_{55}} - \frac{a_{45}\cdot y\cdot(\varphi_1+\varphi_2)\cdot D_x(\varphi_1+\varphi_2)}{a_{55}^2} + \cdots\right\} + \cdots. \tag{1.9}$$

*Здесь и в дальнейшем приняты обозначения [2,3].

Таким образом, имея функцию напряжений, касательные напряжения можно определить по формуле (1.5), а жесткость стержня находим при помощи формулы [1]

$$T = 2 \cdot \iint \Psi \, dx dy. \tag{1.10}$$

Итак, из (1.5)—(1.10) видно, что касательные напряжения и жесткость кручения ортотропного стержня будут зависеть от геометрических параметров профиля (высоты и длины) и от модулей сдвигов (G_{max} и G_{min}). Жесткость и касательные напряжения при кручении ортотропного стержня будут также зависеть от направлений главных осей анизотропии, т. е. от угла φ.

Рассмотрим кручение анизотропного призматического стержня из ортотропного материала для ряда профилей.

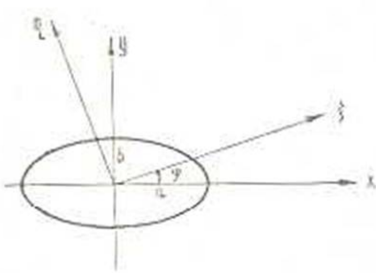
§ 2. Конкретные задачи

а) *Стержень эллиптического сечения.* Пусть контур поперечного сечения (фиг. 1) задан уравнением

$$y = \pm \lambda f(x), \tag{2.1}$$

где

$$f^2(x) = a^2 - x^2, \quad 0 < \lambda = \frac{b}{a} < 1.$$



Фиг. 1.

Подставив значение $f(x)$ из (2.1) в (1.9) и (1.5), выполнив ряд несложных действий, как это сделано в работах [2,3], для функции напряжений и для максимального касательного напряжения окончательно получим следующие выражения

$$\Psi = \frac{\lambda^2 (a^2 - x^2) - y^2}{a_{55} + \lambda^2 a_{44}}, \tag{2.2}$$

$$|\tau_{xz}|^{max} = \left| \left. \tau_{xz} \right|_{\substack{x=0 \\ y=b}} \right| = \frac{2M_t}{\pi a b^2}. \tag{2.2'}$$

Из формулы (2.2′) видно, что наибольшее напряжение не зависит от упругих постоянных и имеет такой же вид, как и в соответствущем изотропном стержне [1,4—5].

При помощи (2.2) и (1.10) получим

$$T(\varphi) = \frac{2\pi a^4 \lambda^3 G_{\xi z}}{(1+\lambda^2)(1+G^*) + (1-\lambda^2)(1-G^*)\cos 2\varphi}, \tag{2.3}$$

где

$$G^* = \frac{G_{min}}{G_{max}} = \frac{G_{\xi z}}{G_{\eta z}} < 1. \tag{2.3'}$$

В частном случае, когда физические оси совпадают с геометрическими осями ($\varphi = 0$), будем иметь

$$T(0) = \frac{\pi a^4 \lambda^3 G_{\eta z} G_{\xi z}}{G_{\xi z}\lambda^2 + G_{\eta z}}. \tag{2.4}$$

Обозначим

$$C_1(\varphi) = \frac{T(\varphi)}{T(0)}.$$

Тогда при помощи (2.3) и (2.4) можно написать

$$C_1(\varphi) = \frac{2(1+\lambda^2 G^*)}{(1+\lambda^2)(1+G^*)+(1-\lambda^2)(1-G^*)\cos 2\varphi}$$

или

$$C_1(\varphi) = \frac{A}{1+B\cos 2\varphi}. \tag{2.5}$$

Здесь $$A = \frac{2(1+\lambda^2 G^*)}{(1+\lambda^2)(1+G^*)}, \qquad B = \frac{(1-\lambda^2)(1-G^*)}{(1+\lambda^2)(1-G^*)}. \tag{2.6}$$

Как видно из (2.5) и (2.6), $C_1(\varphi)$—периодическая функция с периодом π, а для величин A и B имеют место следующие условия

$$0 < A < 2, \qquad B < 1. \tag{2.7}$$

Так как имеют место условия (2.7), то могут быть два случая существования экстремальных значений: $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим их несколько подробнее.

Для этого составим

$$\frac{d^2 C_1(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{4AB}{(1+B\cos 2\varphi)^3}\cdot[\cos 2\varphi + B(1+\sin^2 2\varphi)]. \tag{2.8}$$

В первом случае, когда $\varphi = 0$, при помощи (2.6)—(2.8) и (2.3′) легко убедимся, что выражение $C_1(\varphi)$ принимает минимальное значение. Тогда для рассматриваемого стержня минимальная жесткость кручения будет иметь вид

$$T_{\min} = T(0) = \frac{\pi a^4 \lambda^3 G_{\min}}{1+G^*\lambda^2}. \tag{2.9}$$

Во втором случае, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, используя опять (2.5)—(2.8) и (2.3′), нетрудно убедиться, что выражение $C_1(\varphi)$ принимает максимальное значение.

Тогда

$$T_{\max} = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^4 \lambda^3 G_{\min}}{G^*+\lambda^2}. \tag{2.10}$$

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать следующие практически важные выводы:

1) Если хотим изготовить анизотропный стержень эллиптического сечения из ортотропного материала так, чтобы он имел наибольшую жесткость (выгодный случай), то необходимо, чтобы плоскость наибольшего модуля сдвига совпала с главной плоскостью стержня, проходящей через наибольший диаметр сечения.

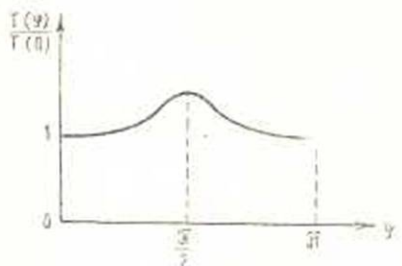
Иначе говоря, ось наибольшего модуля сдвига должна совпасть с наибольшим диаметром сечения (наибольшей осью).

2) Если хотим изготовить анизотропный стержень эллиптического сечения из ортотропного материала так, чтобы он имел наименьшую жесткость (невыгодный случай), то необходимо, чтобы плоскость наибольшего модуля сдвига была нормальна к главной плоскости стержня, проходящей через наибольший диаметр сечения.

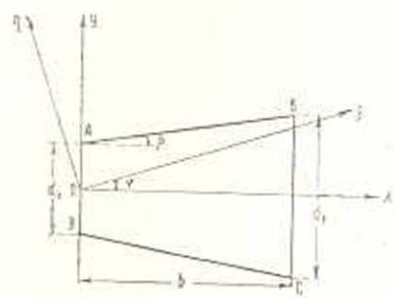
Иначе говоря, ось наибольшего модуля сдвига должна быть нормальна к наибольшему диаметру сечения (наибольшей оси).

Ниже приведен график (фиг. 2), построенный согласно выражению (2.5).

б) *стержень трапециодального поперечного сечения* (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В этом случае

$$y = \lambda f(x)$$

$$y = -\lambda f(x), \quad \text{где} \quad f^2(x) = (ax - c)^2$$

$$a = \frac{d_2 - d_1}{2d_2}, \qquad c = \frac{bd_1}{2d_2}, \qquad 0 < \lambda = \frac{d_2}{b} < 1.$$

Для жесткости кручения стержня удлиненного трапециодального сечения найдено такое выражение [2]

$$T = \frac{b}{12} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2 - d_1} \cdot \frac{1}{a_{55}\left(1 - \frac{a_{44}}{a_{55}} \cdot k^2\right)}.$$

Здесь

$$k = \operatorname{tg}\beta = a\lambda = \frac{d_2 - d_1}{2b}.$$

Аналогичным образом, как и в предыдущей задаче, находим

$$C_2(\varphi)=\frac{T(\varphi)}{T(0)}=\frac{2(1-k^2G^*)}{(1+G^*)(1-k^2)+(1-G^*)(1+k^2)\cos 2\varphi}, \qquad (2.11)$$

$$C_2(\varphi)=\frac{A_1}{1+B_1\cos 2\varphi}, \qquad (2.11')$$

где

$$A_1=\frac{2(1-k^2G^*)}{(1-k^2)(1+G^*)}, \quad B_1=\frac{(1+k^2)(1-G^*)}{(1-k^2)(1+G^*)}, \quad 1-k^2G^*>0.$$

Нетрудно заметить, что имеют место следующие условия*

$$C_2(\varphi+\pi)=C_2(\varphi), \qquad 0<A_1<2, \qquad B_1<1.$$

При этих условиях исследования показывают, что функция $C_2(\varphi)$ имеет точно такой же характер, что и $C_1(\varphi)$.

Причем будем иметь

$$T_{\min}=T(0)=\frac{b}{12}\cdot\frac{d_2^4-d_1^4}{d_2-d_1}\cdot\frac{G_{\min}}{1-k^2G^*},$$

$$T_{\max}=T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{b}{12}\cdot\frac{d_2^4-d_1^4}{d_2-d_1}\cdot\frac{G_{\min}}{G^*-k^2}. \qquad (2.12)$$

Отсюда видно как нужно ориентировать физические оси, чтобы иметь стержень с наибольшей жесткостью.

В этом случае, как и в предыдущей задаче, максимальное касательное напряжение не зависит от упругих постоянных [2—3]

$$|\tau_{xz}|_{\max}=\left|\tau_{xz}\Big|_{\substack{x=b\\ y=\frac{d_2}{2}}}\right|=M_z\cdot\frac{12d_2}{b}\cdot\frac{d_2-d_1}{d_2^4-d_1^4}.$$

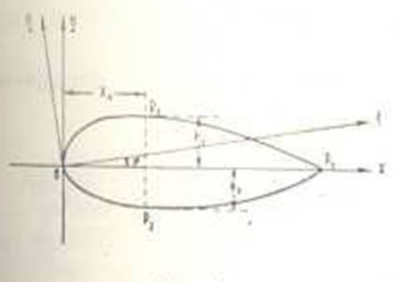
В частном случае, когда $d_1=0$, из (2.11)—(2.12) получим выражение жесткости кручения для стержня удлиненного треугольного поперечного сечения.

в) *Авиационный профиль* (фиг. 4). Следуя академику Л. С. Лейбензону, авиационным профилем назовем область ограниченную двумя кривыми

$$y=a\left(\frac{x}{b}\right)^m\cdot\left[1-\left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q,$$

$$(2.13)$$

$$y=-a_1\left(\frac{x}{b}\right)^m\cdot\left[1-\left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q,$$



Фиг. 4.

* Последним двум условиям можно удовлетворять для удлиненных профилей за счет k и G^*, т. е. принять $G^*-k^2>0$.

где a, a_1—постоянные коэффициенты, m, p, q—положительные числа, b—ширина профиля.

Решив дифференциальное уравнение (1.7) при граничном условии (1.8), для рассматриваемой области, как это сделано в работе [3], будем иметь $\Psi(x, y)$. Затем, выполнив ряд несложных, но трудоемких действий, для максимального касательного напряжения получим следующее компактное выражение*

$$\tau_{\max} = \left| \tau_{xz} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=h_1}} \right| = k_1 \cdot \frac{M_t}{b(h_1+h_2)} \cdot \frac{1-\lambda^2 E_1 \Delta_2}{1-\lambda^2 E_2 k_2}$$

или

$$\tau_{\max} = k_1 \cdot \frac{M_t}{b(h_1+h_2)^2} \cdot \frac{a_{55}^2 - a_{44}a_{55} \cdot e_1 + a_{45}^2 e_2}{a_{55}^2 - a_{55}a_{44}e_3 + a_{45}^2 \cdot e_4}. \tag{2.14}$$

Здесь

$$e_1 = \frac{2\lambda^2 \Delta_2}{3} \cdot \frac{2h_1^3 + 5h_1^2 h_2 + 4h_1 h_2^2 + h_2^3}{(h_1+h_2)^3},$$

$$e_2 = \frac{4\lambda^2 \Delta_2}{3} \cdot \frac{h_1^3 + 4h_1^2 h_2 - 4h_1 h_2^2 - h_2^3}{(h_1+h_2)^3},$$

$$e_3 = -\lambda^2 k_2 \cdot \frac{(h_1-h_2)^2 \delta_1 + 4h_1 h_2 \delta_1}{(h_1+h_2)^2},$$

$$e_4 = -4\lambda^2 k_2 \cdot \frac{(h_1-h_2)^2 \cdot [3h_1 h_2 \delta_1 - (h_1+h_2)^2 \delta_2]}{(h_1+h_2)^4},$$

$\lambda = \dfrac{h_1+h_2}{2b}$ — малый параметр, а величины E_1, E_2, k_1, k_2, Δ_2, δ_1, δ_2, δ_3 имеют такие же значения, что и в работе [3].

Подставив значения a_{ij} из (1.6) в (2.14), введя обозначения

$$c_1 = \frac{1+G^*}{2G_{zz}}, \quad c_2 = \frac{G^*-1}{G^*+1}, \quad c_3 = \frac{G^*-1}{2G_{zz}}, \quad R(\varphi) = \frac{\tau_{\max}(\varphi)}{\tau_{\max}(0)},$$

где

$$\tau_{\max}(0) = \frac{1-c_2-e_1(1+c_2)}{1-c_2-e_3(1+c_2)} \cdot \frac{M_t \cdot k_1}{b(h_1+h_2)^2}$$

и произведя некоторые преобразования, окончательно для авиационного профиля общего типа получим

$$R(\varphi) = \frac{1-G^* c_2}{1-G^* c_1} \cdot \frac{1-e_1+e_2 c_2^2 - 2c_2 \cos 2\varphi + c_2^2 (1-e_1-e_2) \cdot \cos^2 2\varphi}{1-e_3-e_4 c_2^2 - 2c_2 \cos 2\varphi + c_2^2 (1+e_3-e_4) \cdot \cos^2 2\varphi}. \tag{2.15}$$

Очевидно, что $R(\varphi+\pi) = R(\varphi)$.

---

* Наибольшее напряжение сдвига получается в одной из точек P_1 или P_2, в которых касательная параллельна оси профиля ox.

Полученный результат значительно упрощается для симметричного авиационного профиля $\left(h_1 = h_2 = h = \frac{H}{2}\right)$

$$R(\varphi) = d_0 \cdot \frac{1 - d_1 \cdot \cos 2\varphi}{1 - d_2 \cdot \cos 2\varphi}, \tag{2.16}$$

где

$$d_0 = \frac{1 + G^* \lambda^2 k_2 \delta_3}{1 - G^* \lambda^2 \Delta_2} \cdot \frac{1 - \lambda^2 \Delta_2}{1 + \lambda^2 k_2 \delta_3}, \quad d_1 = c_2 \cdot \frac{1 + \lambda^2 \Delta_2}{1 - \lambda^2 \Delta_2}, \quad d_2 = c_2 \cdot \frac{1 - \lambda^2 \delta_3 k_2}{1 + \lambda^2 \delta_3 k_2}.$$

Выражение (2.15) или (2.16) показывает, как изменяется максимальное касательное напряжение авиационного профиля при кручении, в зависимости от ориентации главных направлений упругости ортотропного материала, т. е. формула (2.15) или (2.16) показывает влияние расположения осей анизотропии на максимальное касательное напряжение.

Для иллюстрации полученного результата рассмотрим авиационный профиль проф. В. П. Ветчинкина $\left(m = \frac{1}{2}, \quad p = q = 1\right)$. Тогда

$$d_0 = \frac{1 - 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2}}{1 - 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2} \cdot G^*} \cdot \frac{1 - 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2} \cdot G^*}{1 - 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2}},$$

$$d_1 = \frac{G^* - 1}{G^* + 1} \cdot \frac{1 + 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2}}{1 - 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2}}, \quad d_2 = \frac{G^* - 1}{G^* + 1} \frac{1 + 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2}}{1 - 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2}}. \tag{2.17}$$

Рассмотрим численный пример для данного профиля.

Пусть $\frac{H}{b} = \frac{1}{5}$, $G^* = \frac{1}{10}$. Тогда, используя выражение (2.17), формула (2.16) примет вид

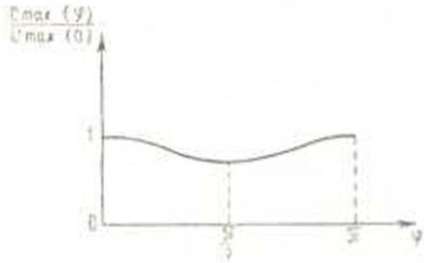
$$R(\varphi) = 0{,}9902 \cdot \frac{1 + 0{,}93663 \cos 2\varphi}{1 + 0{,}91728 \cos 2\varphi}. \tag{2.18}$$

Видно, что $R(\varphi)$ симметрично относительно прямой $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Поэтому достаточно выполнить вычисления для значения φ от $0°$ до $90°$.

Ниже приведены таблица и график (фиг. 5), подсчитанные по (2.18), для максимального напряжения авиационного профиля проф. В. П. Ветчинкина.

Таблица 1

φ	0	15	30	45	60	75	90
$\dfrac{\tau_{max}(\varphi)}{\tau_{max}(0)}$	1	0,99926	0,99658	0,99002	0,97233	0,90833	0,75852



Фиг. 5.

Перейдем к определению жесткости кручения авиационного профиля общего типа, в зависимости от угла φ. Для жесткости кручения очень тонких профилей нами было получено выражение [3]

$$C_t = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p a_{55}} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)$$

Подставив значение a_{55} из (1.6) и введя обозначения $C_2(\varphi) = \dfrac{C_t(\varphi)}{C_t(0)}$, находим

$$C_2(\varphi) = \frac{2}{1 + G^* + (1 - G^*)\cos 2\varphi}. \tag{2.19}$$

Легко видеть, что $C_2(\varphi)$ принимает экстремальные значения при $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Далее, обычным способом устанавливаем:

1) $C_2(\varphi)$ в $\varphi = 0$ принимает наименьшее значение. В этом случае будем иметь

$$C_t^{\min} = C_t(0) = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3 G_{\min}}{3p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right),$$

2) $C_2(\varphi)$ принимает наибольшее значение в $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда будем иметь

$$C_t^{\max} = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3 G_{\max}}{3p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right).$$

График функции $C_2(\varphi)$ такой же как и в предыдущих задачах. Для удлиненных профилей была получена более точная формула [3]

$$C_t = \frac{B_1 a_{55}^2 + B_2 a_{44} a_{55} + B_3 a_{45}^2}{a_{55}^3}, \tag{2.20}$$

где

$$B_1 = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right),$$

$$B_2 = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^5}{3p\,(h_1 + h_2)^2} \cdot \left[(h_1 - h_2)^2 \cdot \delta_1 + 4h_1 h_2 \delta_2\right] \cdot B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)$$

$$B_3=\frac{32b^4\lambda^5\Delta^5(h_1-h_2)^2\cdot[(h_1+h_2)^2\cdot\delta_2-3h_1h_2\delta_1]}{3p(h_1+h_2)^4}\cdot B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right).$$

Внеся значения a_{ij} из (1.6) в (2.20) и обозначив $C_4(\varphi)=\frac{C_t(\varphi)}{C_t(0)}$ получим

$$C_4(\varphi)=A\cdot\frac{(1-c_2\cos2\varphi)^2+N_1(1-c_2^2\cos^2 2\varphi)+N_2c_3^2\sin^2 2\varphi}{(1-c_2\cos2\varphi)^3}. \qquad (2.21)$$

Здесь

$$N_1=\frac{B_2}{B_1},\qquad N_2=\frac{B_3}{B_1},\qquad A=\frac{(1-c_2)^2}{1-c_2+N_1(1-c_2)}.$$

В частном случае, для симметричного авиационного профиля будем иметь

$$C_4(\varphi)=A\cdot\frac{1+N_1+(N_1-1)\,c_2\cos2\varphi}{(1-c_2\cos2\varphi)^2}. \qquad (2.22)$$

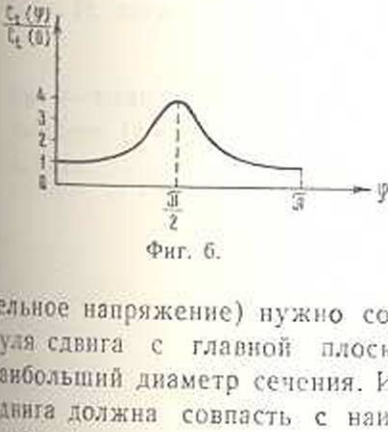
Для наглядности полученного результата опять рассмотрим численный пример для того же авиационного профиля $\left(m=\frac{1}{2},\ p=q=1,\ \frac{H}{b}=\frac{1}{5},\ G^*=\frac{1}{10}\right)$. Тогда (2.22) будет иметь вид

$$C_4(\varphi)=1{,}72418\cdot\frac{1+0{,}91731\cos2\varphi}{(1+0{,}81818\cos2\varphi)^2}. \qquad (2.23)$$

Ниже приведены таблица и график (фиг. 6) жесткости кручения рассматриваемого частного профиля, подсчитанные по (2.23).

Таблица 2

φ	0°	15°	30	45°	60°	75°	90°
$\frac{C_t(\varphi)}{C_t(0)}$	1	1,05986	1,26666	1,72418	2,66407	4,1732	4,31273



Фиг. 6.

Таким образом можно сделать следующий вывод:

Чтобы из ортотропного материала изготовить стержень с поперечным сечением в виде авиационного профиля, обладающий наивыгоднейшими механическими свойствами (наибольшая жесткость и наименьшее максимальное касательное напряжение) нужно совпадение плоскости наибольшего модуля сдвига с главной плоскостью стержня, проходящей через наибольший диаметр сечения. Иначе говоря, ось наибольшего модуля сдвига должна совпасть с наибольшим диаметром сечения (длиной профиля).

Ереванский государственный университет

Поступила 23 V 1961

Վ. Ս. Սարգսյան

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻՑ ԲԱՂԿԱՑԱԾ ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ՊՐՈՖԻԼՆԵՐՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՐԻԶՄԱՅԱՁԵՎ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկված է օրթոտրոպ նյութից բաղկացած եր կարացված պրոֆիլով (էլիպս, օղակ, հատված և ընդհանուր տեսքի ավե ցվող պրոֆիլ) անիզոտրոպ պրիզմայաձև ձողի ոլորման խնդիրը, երբ առաձ գականության գլխավոր ուղղությունները (ֆիզիկական առանցքները) չե համընկնում ձողի լայնական հատվածքի գլխավոր առանցքների (երկրաչա փական առանցքների) հետ: Ուսումնասիրված է օրթոտրոպ նյութի առաձգա կանության գլխավոր առանցքների տարբեր դիրքերի ազդեցությունը ամենա մեծ լարումների և կոշտության վրա: Ցույց է տրված, թե նրանց ինչպիս օրիենտացիայի դեպքում ձողի ոլորման կոշտությունը կլինի ամենամեծ իսկ լարումները՝ ամենափոքրը: Եվ հակառակը:

Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ: Կառուցված են գրաֆի ներ և կազմված են աղյուսակներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостиздат технико-теорет. лит., М.—Л., 1950.
2. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненны профилем. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 2, 1959.
3. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней сечением в виде удлиненного анизотропного профиля. Известия АН Армянской ССР, сери физ.-мат. наук, **14**, № 2, 1961.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1935.
5. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. Бабаджанян, С. Н. Цатурян

Определение закона изменения расхода газа вдоль длинного газопровода при нестационарном режиме работы

§ 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Нестационарное, одномерное, изотермическое движение газа в длинном газопроводе описывается следующей системой уравнений [1]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda u^2}{2D},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$p = gRT\rho,$$

где p, u и ρ—средние значения по сечению давления, скорости и плотности газа в газопроводе, λ—безразмерный коэффициент сопротивления, D—диаметр трубы, g—ускорение силы тяжести, R—газовая постоянная, T—абсолютная температура газа, x—координата, отсчитываемая вдоль газопровода, t—время.

Уравнения системы (1.1) являются, соответственно, уравнениями движения, неразрывности и состояния.

Секундный расход газа по сечению трубы обозначим через $G(x, t)$, тогда

$$G(x, t) = gs\rho u, \tag{1.2}$$

где s—площадь поперечного сечения газопровода. Имея в виду выражение (1.2) и уравнение состояния, систему (1.1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -aG^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -b\frac{\partial G}{\partial x}, \tag{1.3}$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t),$$

$$a = \frac{RT\lambda}{Dgs^2}, \quad b = \frac{2pRT}{s}.$$

Точное интегрирование системы (1.3) при переменном b невозможно, поэтому в выражении b значение давления заменим его средним значением при стационарном режиме согласно следующей формуле [2]

$$(p_0)_{\text{ср.}} = \frac{2}{3}\left(p_{\text{н}} + \frac{p_k^2}{p_{\text{н}} + p_{\text{к}}}\right), \tag{1.4}$$

где $p_{\text{н}}$ — давление в начале трубы,

$p_{\text{к}}$ — давление в конце трубы.

Принимая b постоянным, перекрестным дифференцированием из системы (1.3) получим следующее уравнение

$$AG\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \tag{1.5}$$

где

$$A = \frac{\lambda}{D\,(p_0)_{\text{ср.}}\,gs}.$$

Принимаем следующие начальные и граничные условия:

$$\text{при}\quad t=0,\quad G(x,t) = G_0 = \text{const.},$$

$$\text{при}\quad x=0,\quad G(x,t) = G_0,$$

$$\text{при}\quad x=l,\quad G(x,t) = G_0 + f(t),$$

где G_0 — расход газа при стационарном режиме,

l — длина газопровода.

Здесь $f(t)$ заданная функция (обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$), которая показывает закон изменения расхода в конце трубопровода.

§ 2. Решение уравнения (1.5)

Решение уравнения при указанных начальных и граничных условиях ищем в виде

$$G(x,t) = G_0 + G'(x,t). \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$AG_0\frac{\partial G'}{\partial t} = \frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} - AG'\frac{\partial G'}{\partial t}, \tag{2.2}$$

для которого начальными и граничными условиями будут

$$\text{при}\quad t=0,\quad G'(x,t) = 0,$$

$$\text{при}\quad x=0,\quad G'(x,t) = 0,$$

$$\text{при}\quad x=l,\quad G'(x,t) = f(t).$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$G' = G_0 G'^*$$

$$x = lx^*,$$

$$t = t_0 t^*,$$

где, G_0, l, t_0—характерные расход, длина и время. Здесь за характерный расход принят расход газа при стационарном режиме, за характерную длину—длина трубопровода, а для характерного времени из уравнения (2.2) получим

$$t_0 = l^2 A G_0. \tag{2.3}$$

После перехода к безразмерным величинам уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial G'}{\partial t} = \frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} - G' \frac{\partial G'}{\partial t}, \tag{2.4}$$

где для простоты записи звездочки опущены.

Начальными и граничными условиями будут

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad t = 0, \quad G'(x, t) = 0, \\ &\text{при} \quad x = 0, \quad G'(x, t) = 0, \\ &\text{при} \quad x = 1, \quad G'(x, t) = f(t). \end{aligned}$$

Для решения уравнения (2.4) удобно ввести новую переменную

$$y = \frac{1-x}{x}.$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 G'}{\partial y^2} - \frac{\partial G'}{\partial t} = G' \frac{\partial G'}{\partial t} - \frac{\partial^2 G'}{\partial y^2} \sum_{k=1}^{4} C_4^k y^k - 2 \frac{\partial G'}{\partial y} \sum_{k=0}^{3} C_3^k y^k, \tag{2.5}$$

а начальные и граничные условия в новых переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad t = 0, \quad G'(y, t) = 0, \\ &\text{при} \quad y = \infty, \quad G'(y, t) = 0, \\ &\text{при} \quad y = 0, \quad G'(y, t) = f(t). \end{aligned}$$

Следуя А. А. Дородницыну, сделаем следующее преобразование координат

$$\zeta = \frac{y}{2\sqrt{t}}, \qquad \sqrt{t} = \tau,$$

и кроме того положим

$$G'(y, t) = t^2 \Phi(y, t) = \tau^4 \psi(\zeta, \tau). \tag{2.6}$$

Тогда уравнение (2.5) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 8\psi - 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \tau^4 \left(8\psi + 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) -$$

$$- 4 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \tau \sum_{k=0}^{3} 2^k C_3^k \zeta^k \tau^k - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \sum_{k=1}^{4} 2^k C_4^k \zeta^k \tau^k. \tag{2.7}$$

Положим

$$\psi(\zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta)\, \tau^n. \tag{2.8}$$

Подставив (2.8) в (2.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим систему дифференциальных уравнений для определения всех членов ряда (2.8).

Система дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_n}{\partial \zeta} - 2(n+4)\psi_n = 2\psi_0\left(n\psi_{n-1} - \zeta \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial \zeta}\right) + \cdots +$$

$$+ 2\psi_{n-1}\left(n\psi_0 - \zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta}\right) - 4\sum_{k=0}^{3} 2^k C_3^k \zeta^k \frac{\partial \psi_{n-k-1}}{\partial \zeta} - \sum_{k=1}^{4} 2^k C_4^k \zeta^k \frac{\partial^2 \psi_{n-k}}{\partial \zeta^2}, \tag{2.9}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Считаем, что функция $f(t)$ может быть разложена в ряд по степеням t в следующем виде

$$f(t) = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n/2} = \tau^4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n.$$

Граничными условиями для ψ_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ будут

$$\begin{aligned} &\text{при } \zeta = 0, \quad \psi_n = a_n, \\ &\text{при } \zeta = \infty, \quad \psi_n = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$.

Перейдем к решению системы (2.9).

Задавая n значения 0, 1, 2,..., получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} - 8\psi_0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} - 10\psi_1 = -4\frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} - 8\zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta}. \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta^2} - 12\psi_2 = -4\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} - 24\zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} - 8\zeta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} - 24\zeta^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \zeta^2}.$$

. . . .

. . . .

Как видно из (2.11), имея решение первого уравнения, можно решить второе уравнение, затем по значениям ψ_0, ψ_1 определяется ψ_2 из третьего уравнения, причем легко заметить, что если известны $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m-1}$ можно определить ψ_m. Из вышеуказанного следует, что для нахождения ψ_n необходимо решить следующее уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\zeta^2}+2\zeta\frac{\partial\psi_n}{\partial\zeta}-2(n+4)\psi_n=\Psi_n(\zeta).$$

Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\zeta^2}+2\zeta\frac{\partial\psi_n}{\partial\zeta}-2(n+4)\psi_n=0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$\psi_n=c_1L_{n+4}\zeta+c_2P_{n+4}(\zeta)$$

где c_1 и c_2 постоянные интегрирования, а $P_{n+4}(\zeta)$—полином степени $n+4$ [2].

Функции $L_n(\zeta)$ имеют вид [3]

$$L_n(\zeta)=A_n\int\limits_{\infty}^{\zeta}[\iint\cdots\int e^{-z^2}(dz)^n]\,dz,$$

в частности

$$L_0=A_0\int\limits_{\infty}^{\zeta}e^{-z^2}\,dz,$$

$$L_n(0)=1,\qquad L_n(\infty)=0.$$

Между коэффициентами A_n и функциями L_n существуют следующие соотношения:

$$A_n=2nA_{n-2},\quad A_0=-\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad A_1=2.$$

$$\zeta L_n(\zeta)=\frac{A_n}{A_{n+1}}(n+1)[L_{n+1}(\zeta)-L_{n-1}(\zeta)],$$

$$L_n^{(k)}(\zeta)=\frac{A_n}{A_{n-k}}L_{n-k}(\zeta),\quad \int\limits_{\infty}^{\zeta}L_n(\zeta)\,d\zeta=\frac{A_n}{A_{n+1}}L_{n+1}(\zeta).$$

Учитывая граничные условия (2.15), для c_1 и c_2 получим

$$c_1=a_n,$$

$$c_2=0.$$

До непосредственного перехода к решениям дифференциальных уравнений системы (2.9) заметим, что для всех нечетных n краевые условия для ψ однородны, т. е. при нечетных n

$$c_1=c_2=0.$$

Решение уравнения (2.9) имеет вид

при $n=0$

$$\psi_0=a_0L_4, \tag{2.12}$$

при $n=1$

$$\psi_1 = -\frac{A_4}{A_2} a_0 (4L_5 - 7L_3 + 3L_1), \tag{2.13}$$

при $n=2$

$$\psi_2 = a_2 L_6 + 4a_0 (25L_6 - 66L_4 + 57L_2 - 16L_0) - 8A_0 a_0 \zeta e^{-\zeta^2}, \tag{2.14}$$

при $n=3$

$$\psi_3 = -a_2 \frac{A_6}{A_5} (6L_7 - 11L_5 + 5L_3) - 8A_0 a_0 (80L_7 - 264L_5 +$$

$$+ 310L_3 - 145L_1 + 19e^{-\zeta^2}) + 16 \frac{A_2}{A_3} a_0 \zeta^2 e^{-\zeta^2} (9 - 2\zeta^2) \tag{2.15}$$

при $n=4$

$$\psi_4 = a_4 L_8 + 4 \frac{A_4 A_2}{A_5 A_3} a_0^2 (L_5 L_3 - L_8) + 6a_2 (49L_8 - 146L_6 + 153L_4 - 64L_2 +$$

$$+ 8L_0) + 100a_0 (49L_8 - 190L_6 + 276L_4 - 178L_2 + 43L_0) +$$

$$+ 4A_2 a_0 \zeta e^{-\zeta^2} (145 - 50\zeta^2) + 16 \frac{A_2}{A_3} a_0 \zeta^2 e^{-\zeta^2} (13 - 2\zeta^2). \tag{2.16}$$

Ограничиваясь значением $n=4$, в силу (2.8) и (2.6) будем иметь

$$G'(x, t) = t_0^2 \psi_0 + t^{5/2} \psi_1 - t^3 \psi_2 + t^{7/2} \psi_3 + t^4 \psi_4.$$

Таким образом, для расхода получаем

$$G(x, t) = G_0 (1 + t^2 \psi_0 + t^{5/2} \psi_1 + t^3 \psi_2 + t^{7/2} \psi_3 + t^4 \psi_4). \tag{2.17}$$

§ 3. Пример расчета

Для примера возьмем следующие данные

$$l = 165 \ км, \qquad D = 0{,}625 \ м,$$

$$P_н = 36 \ атм, \quad R = 50 \ \frac{м}{град}$$

$$P_к = 14 \ атм, \quad g = 9{,}81 \ \frac{м}{сек^2}$$

$$\lambda = 0{.}0119, \qquad T = 280 \ град.$$

Расчет проводим следующим образом.

1. По формуле (2.3) находим характерное время

$$t_0 = 33078,\ 375 \ сек.$$

Причем при вычислении t_0, $(P_0)_{ср}$ вычисляли согласно формуле (1.4), а G_0 — по формуле [3]

$$G_0 = s \sqrt{\frac{(p_н^2 - p_k^2)\, gD}{lTR\lambda}}.$$

2. Для определения функции $f(t)$, которая, как мы отметили, обусловлена законом изменения расхода в конце трубопровода, поступим следующим образом. Имея график потребления газа, путем

апроксимации, составим уравнение этой кривой. Для города Еревана аналитическое уравнение графика потребления в суточном разрезе в период провала расхода апроксимировано многочленом четвертой степени в виде

$$G(t) = G_0 + G_0(a_0 t^2 + a_2 t^3 + a_4 t^4), \qquad (3.1)$$

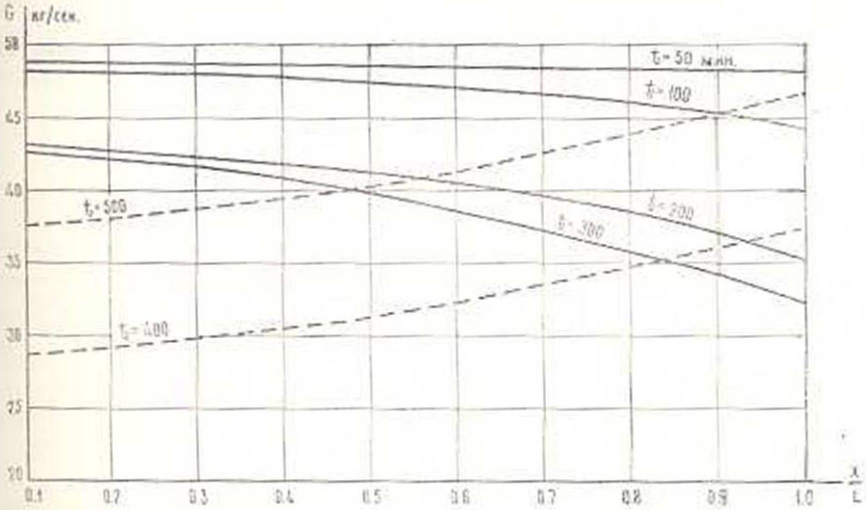
где

$$a_0 = -5{,}28676,$$

$$a_2 = 10{,}14370,$$

$$a_4 = -4{,}85700.$$

3. Имея характерное время, функцию $f(t)$ и протобулированные значения $L_n(\tau)$ [4], по формулам (2.12)—(2.16) вычислив значения



Фиг. 1.

$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ и подставив их в выражение (2.17), получим закон изменения расхода вдоль газопровода и во времени (фиг. 1).

Институт энергетики и гидравлики
АН Армянской ССР

Поступила I XII 1960

Գ. Հ. Բաբաջանյան, Ս. Խ. Ծատուրյան

ՉՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՌԵԺԻՄՈՎ ԱՇԽԱՏՈՂ ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԳԱԶԻ ԵԼՔԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է երկար գազամուղում գազի չհաստատված շարժումը, որը պայմանավորված է նրա վերջում գազի ելքի ոչ հաստատուն լինելով։

Գազամուղի վերջում տրվում է գազի ելքի փոփոխման օրենքը բազմանդամի տեսքով, որի գործակիցները որոշվում են գազի ելքի փոփոխման օրվա գրաֆիկից։

Խնդրի լուծումը բերվում է ոչ գծային մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը՝ համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմաններով։ Լուծումը տրվում է անվերջ շարքի տեսքով։ Ստացված է ելքի բաշխման օրենքը, բավարարվելով շարքի հինգերորդ անդամով։ Հաշված է կոնկրետ օրինակ Ղարադաղ—Երևան գազամուղի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. *Мхитарян А. М.* К теории конвекции большого масштаба. „Известия АН АрмССР, сер. ФМЕТ", **8**, № 1, 1955.
3. *Смирнов А. С., Ширковский А. И.* Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, Москва, 1957.
4. *Гутман Л. А.* К вопросу о расчете тепдового состояния тел. „Инженерный сборник", **15**, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Плоская и осесимметричная задача для давления

Рассмотрим плоскую задачу для проникания давления в сжимаемую идеальную жидкость. Уравнение политропы для жидкости имеет вид

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] \tag{1}$$

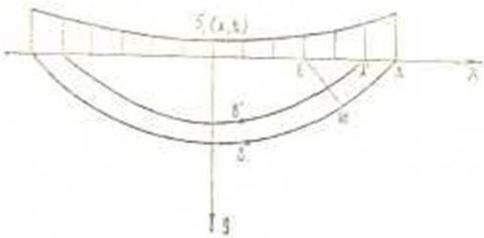
где P — давление, ρ — плотность, B, n — постоянные.

Обозначим через O точку возникновения давления на границе. Выберем ось Ox в плоскости поверхности жидкости, ось Oy направим вниз (фиг. 1). Уравнения движения и неразрывности запишутся так [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{dP}{dt} + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$



Фиг. 1.

где u и v — составляющие скорости по Ox и Oy, ρ — плотность, c — скорость звука, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$.

На границе жидкости имеется граничное условие

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} \bar{P}_1(x, t) & x < R(t), \\ 0 & x > R(t). \end{cases} \tag{3}$$

$x = R(t)$ — радиус фронта давления на поверхности.

Пусть скорость фронта давления сверхзвуковая $R'(t) > a$. Найдем ударную волну, идущую в жидкости, предполагая, что она настолько слаба, что не влияет на течение за ней. Будем рассматривать взаимодействие волн разряжения, идущих от границы с ударным фронтом. В качестве волн разряжения возьмем характеристические поверхности первого семейства, догоняющие ударный фронт. Уравнение характеристик первого семейства $y(x, t)$ можно найти обычным способом.

Обозначим через $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ дифференцирование в характеристической поверхности, причем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}};\qquad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial t}\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial t}}. \tag{4}$$

Для скоростей u и v имеем также уравнения (4), где вместо P нужно подставить u, v.

Подставив (4) в (2) и записав условие неоднозначности решения, получим уравнение характеристики [1]

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\operatorname{tg}\alpha,\qquad \frac{\partial y}{\partial t}\cos\alpha=c+V, \tag{5}$$

где $y=y(x, t)$ — уравнение характеристики, V — скорость жидкости, причем в (5) сделано предположение, о нормальности скоростей частиц к характеристике, что выполняется для волн, догоняющих фронт.

Условие совместности на характеристике имеет вид

$$(c\sin\alpha+u)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)+(c\cos\alpha+v)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\rho c\,(u\sin\alpha+c)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$
$$+\rho cu\cos\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\rho cv\sin\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\rho c\,(v\cos\alpha+c)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{6}$$

Для давлений до 1000 $кг/см^2$ величина $\frac{P}{Bn}$ будет мала. Например, для воды $\frac{P}{Bn}=0{,}05$.

Будем искать решение (5) и (6) в виде

$$P=P_1+\frac{1}{Bn}P_2,\qquad y=y_1+\frac{1}{Bn}y_2,\qquad \alpha=\alpha_1+\frac{1}{Bn}\alpha_2, \tag{7}$$
$$c=a_0\left(1+\frac{1}{Bn}P_1\right),\qquad dV=\frac{dP}{\rho c},$$

причем последние два уравнения в (7) следуют из (1) и условий на ударном фронте. Если подставить (7) в (5) и (6) и ограничиться малыми первого порядка, легко найти

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}\cos\alpha_1=a_0,\qquad 2\frac{dP_1}{dt}+\frac{P_1}{a_0}\frac{d\alpha_1}{ds}=0, \tag{8}$$

где $\frac{d}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)a_0\sin\alpha_1+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)a_0\cos\alpha_1$, $\frac{d\alpha_1}{ds}$ — кривизна характеристики.

Решение (8) дает конечный результат для линейной задачи

$$x - R(t_0) = a_0 (t - t_0) \sin \alpha_1 (t_0), \qquad (9)$$
$$y = a_0 (t - t_0) \cos \alpha_1 (t_0),$$

$$P = \widetilde{P}_1 (R, t_0) \frac{\sqrt{-\frac{r(t_0)}{a_0}}}{\sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}} = \frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}}, \qquad (10)$$

где $R(t_0) = x$ — координата точки E границы в момент t_0 прохождения через нее фронта волны [2], $r(t_0)$ — радиус кривизны фронта в момент t_0.

Для решения, соответствующего не самому фронту AB (фиг. 1), а произвольной характеристике $A'B'$, граничное условие для (8) ставится в точке $x = \lambda R(t')$ в момент $t' = t_0 + t_0'$ $\lambda \leq 1$. Тогда вместо (9) и (10) легко получить уравнение кривой $A'B'$ (фиг. 1)

$$x - \lambda R(t_0' + t_0) = a_0 (t - t_0 - t_0') \sin \alpha_1 (t_0 + t_0'), \qquad (11)$$
$$y_1 = a_0 (t - t_0 - t_0') \cos \alpha_1 (t_0 + t_0')$$

и решение на характеристиках

$$P_1 = \frac{A_0(t_0 + t_0')}{\sqrt{t - t_0 - t_0' + \frac{r(t_0 + t_0')}{a_0}}} = \widetilde{P}_1 (R, t_0 + t_0') \times$$
$$\times \frac{\sqrt{-\frac{r(t_0 + t_0')}{a_0}}}{\sqrt{t - t_0 - t_0' + \frac{r(t_0 + t_0')}{a_0}}}, \qquad (12)$$

где постоянная

$$A_0(t_0) = \widetilde{P}_1 (R, t_0) \sqrt{-\frac{r(t_0)}{a_0}}. \qquad (13)$$

При определении y_2 следует в (5) приравнивать члены второго порядка

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} + a_0 \sin \alpha_1 (t_0) \frac{\partial y_2}{\partial x} = a_0 \frac{n+1}{2} \frac{P_1}{\cos \alpha_1(t_0)}. \qquad (14)$$

В уравнении (14) перейдем к переменным t_0, t с помощью первого уравнения (9). Нетрудно видеть, что

$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial t}\right|_{t_0} = \left.\frac{\partial y_2}{\partial t}\right|_{x} + \left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{t} a_0 \sin \alpha_1 (t_0).$$

Тогда получим

$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial t}\right|_{t_0} = a_0 \frac{n+1}{2} \frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t - t_0 + \dfrac{r(t_0)}{a_0}}} \frac{1}{\cos\alpha_1(t_0)}.$$

Решение последнего уравнения представляется в виде

$$y_2 = a_0 \frac{n+1}{2} \frac{A_0(t_0)}{\cos\alpha_1(t_0)} 2\sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} -$$

$$- a_0 \frac{n+1}{2} \frac{A_0(t_0)}{\cos\alpha_1(t_0)} 2\sqrt{t' - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}, \tag{15}$$

где для определения t' из граничного условия и (9) будем иметь

$$R(t') - R(t_0) = a_0 (t' - t_0) \sin\alpha_1(t_0).$$

Уравнение (15) показывает, что движение характеристик определится по линейным лучам, как и в случае коротких волн [2].

В нашем приближении $t' = t_0$. Для определения закона движения ударной волны запишем формулу для ее скорости [3]

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = a_0\left(1 + \frac{n+1}{4} \frac{P_1}{Bn}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим (11) и (9). В силу малости $\frac{P}{Bn}$ характеристики, обгоняющие фронт, отстают от него на расстояние порядка $\frac{P_1}{Bn}$. Поэтому t_0' и $\lambda' = 1 - \lambda$ малы.

Разлагая (11) по степеням этих параметров, в силу (9) имеем

$$t_0' = \frac{\lambda' R(t_0)}{- a_0 \sin\alpha_1(t_0) + a_0 (t - t_0) \cos\alpha_1(t_0) \dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0} + R'(t_0)} \tag{17}$$

и

$$y_1 = a_0 (t - t_0) \cos\alpha_1(t_0) -$$

$$- \lambda' R(t_0) \frac{a_0 (t - t_0) \sin\alpha_1(t_0) \dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0} + a_0 \cos\alpha_1(t_0)}{R'(t_0) + a_0 (t - t_0) \cos\alpha_1(t_0) \dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0} - a_0 \sin\alpha_1(t_0)}. \tag{18}$$

Вспомнив, что $y = y_1 + \frac{1}{Bn} y_2$, подставив (18) и (15) в (16) и оставив только малые первого порядка, получим уравнение для λ' вдоль фронта

$$-\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{a_0(t-t_0)\sin\alpha_1(t_0)\dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0}+a_0\cos\alpha_1(t_0)}{R'(t_0)+a_0(t-t_0)\cos\alpha_1(t_0)\dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0}-a_0\sin\alpha_1(t_0)}\,R(t_0)\,\lambda'\Bigg|_{t_0}-$$

$$-\frac{a_0(t-t_0)\sin\alpha_1(t_0)\dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0}-a_0\cos\alpha_1(t_0)}{R'(t_0)+a_0(t-t_0)\cos\alpha_1(t_0)\dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0}-a_0\sin\alpha_1(t_0)}\,R(t_0)\frac{\partial\lambda'}{\partial t_0}\Bigg|_{t_0}=$$

$$=-a_0\frac{n+1}{4}\,\frac{P_1}{\mathrm{B}n}\,\frac{1}{\cos\alpha_1(t_0)}.$$

Решение полученного уравнения при условии $\lambda'=0$, $x=R(t)$ запишется в виде

$$\lambda'=+a_0\frac{n+1}{4}\,\frac{1}{\cos\alpha_1(t_0)}\,\frac{1}{\mathrm{B}n}A_0(t_0)\times$$

$$\times 2\left[\sqrt{t-t_0+\frac{r(t_0)}{a_0}}-\sqrt{t'-t_0+\frac{r(t_0)}{a_0}}\right]\times$$

$$\times\frac{R'(t_0)+a_0(t-t_0)\cos\alpha_1(t_0)\dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0}-a_0\sin\alpha_1(t_0)}{a_0(t-t_0)\sin\alpha_1(t_0)\dfrac{\partial\alpha_1(t_0)}{\partial t_0}+a_0\cos\alpha_1(t_0)}. \tag{19}$$

Если подставить λ' из (19) в (18), получим уравнение ударного фронта.

Из формулы (12), отбросив малые второго порядка, получим

$$P_1=\frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t-t_0+\dfrac{r(t_0)}{a_0}}}+\frac{\partial}{\partial t_0}\,\frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t-t_0+\dfrac{r(t_0)}{a_0}}}\,t_0',$$

где t_0' определяется с помощью (19) и (17).

Для определения давления на ударной волне нужно еще записать условие на характеристике (6) с точностью до малых второго порядка. Имеем

$$2\frac{dP_2}{dt}+\frac{1}{\sqrt{t-t_0+\dfrac{r(t_0)}{a_0}}}P_2+\psi(x,\ t)=0,$$

где

$$\psi(x,\ t)=P_1a_0\frac{n+1}{2}\sin\alpha_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)+a_0\cos\alpha_1\cdot\alpha_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)+$$

$$+P_1a_0\frac{n+1}{2}\cos\alpha_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)-a_0\alpha_2\sin\alpha_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)+a_0P_1^2\frac{n+1}{2}\left(\frac{\partial\sin\alpha_1}{\partial x}\right)+$$

$$+ a_0 P_1^2 \frac{n+1}{2} \left(\frac{\partial \cos \alpha_1}{\partial y} \right) + a_0 P_1^2 \left(\frac{\partial \sin \alpha_1}{\partial x} \right) - a_0 P_1 \sin \alpha_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \right) +$$

$$+ \left(P_1 a_0 \sin^2 \alpha_1 + \frac{n-1}{2} P_1 a_0 \right) \left(\frac{\partial P_1 \sin \alpha_1}{\partial x} \right) + P_1 a_0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \times$$

$$\times \left(\frac{\partial P_1 \sin \alpha_1}{\partial y} \right) + P_1 a_0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \left(\frac{\partial P_1 \cos \alpha_1}{\partial x} \right) +$$

$$+ P_1 a_0 \left(\cos^2 \alpha_1 + \frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{\partial P_1 \cos \alpha_1}{\partial y} \right),$$

$$\alpha_2 = - \cos^2 \alpha_1 \frac{\partial y_2}{\partial x},$$

а производные вычисляются в характеристике.

Теперь можно записать на ударной волне

$$P = P_1 + \frac{1}{Bn} P_2,$$

причем

$$P_2 = - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}} \int_{t_0}^{t} \psi(x, t) \sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} \, dt.$$

В случае осевой симметрии решение линейной задачи (9), (10) содержит еще множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и вычисления сильно усложнятся.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 I 1961

Ա. Գ. Բագդոև

ՀԱՐԹ ԵՎ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐ՝ ՃՆՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված են սեղմելի հեղուկում ճնշման տարածման հարթ և առանցքասիմետրիկ խնդիրը։ Թարակտերիստիկների համապատասխան մոտավոր լուծումները օգտագործված են հարվածող ալիքները կառուցելու համար։ Նախորդ աշխատություններում այս խնդիրը մեր կողմից լուծված էր մասնավոր դեպքում։

Ստացված լուծումը ճշտում է գծային մոտավորությունը և բավարար չափով ճիշտ է նաև մեծ ճնշումների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель и Розе.* Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат. М., 1948.
2. *Багдоев А. Г.* Определение давления из ударной волне. Вестник МГУ, № 3, 1960.
3. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

О влиянии плотности и структурной прочности грунта на зависимость между напряжениями и деформациями

В целях уточнения теории фильтрационной консолидации с учетом влияния сопротивления скелета грунта на процесс уплотнения В. А. Флориным было введено понятие ползучести скелета. Для учета деформации ползучести скелета грунта В. А. Флорин пользовался теорией упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна. Нами [1, 2] была экспериментально обоснована применимость теории упруго-ползучего тела для описания деформации ползучести грунта. В целях дальнейшего уточнения и определения границы применимости указанной теории ползучести нами выполнена настоящая работа.*

Для создания теории ползучести грунтов или же приспособления существующих теорий ползучести к грунтам необходимо знать: 1) зависимость между напряжениями и мгновенными деформациями; 2) зависимость между напряжениями и доформациями ползучести.

Нами было показано [1, 2], что зависимость между напряжениями и мгновенными деформациями с достаточной точностью выражается линейным законом, зависимость же между напряжениями и деформациями ползучести при напряжениях $P \leqslant 0{,}5 \div 1{,}0$ *кг/см*^{2} линейна, а при $P \geqslant 0{,}5 \div 1{,}0$ *кг/см*^{2} — нелинейна.

Указанные выводы соответствовали случаю испытания грунтов нарушенной структуры при влажности, близкой к их влажности при пределе текучести, случаю, когда грунты обладали высокой пористостью—влажностью и небольшой структурной прочностью к началу испытания.

Учитывая, что деформативные свойства глинистых грунтов зависят от множества факторов, в частности от их плотности, было необходимо не ограничиваться исследованием одного состояния („возраста“) грунта, а расширить эти исследования и рассмотреть вопрос влияния плотности и структурной прочности на указанные выше зависимости.

---

* Основные результаты доложены на Первом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Москве в январе—феврале 1960 г.

Была исследована на сжатие глина нарушенной структуры при четырех значениях плотности к началу испытания. Ясно, что каждой плотности грунта соответствовала своя структурная прочность.

Основные данные о физических свойствах грунта сведены в таблицу № 1.

Таблица 1

Лаб. № грунта	Наименование	Удельный вес $г/см^3$	Пределы пластичности		
			граница текучести	граница пластичности	число пластичности
4—57	Глина	2,70	41,2	23,2	18,0

Испытания проводились в условиях отсутствия бокового расширения в компрессионных приборах нашей конструкции [2]. Диаметр образцов—70 *мм*, высота—20 *мм*. Влажность грунта в момент заполнения колец соответствовала влажности грунта при пределе текучести.

Подготовка трех серий образцов с различными физико-механическими свойствами (плотность, влажность, объемный вес, структурная прочность) осуществлялась путем предварительного уплотнения нагрузками различной величины. В данном случае одна серия образцов уплотнялась нагрузками 0,25 $кг/см^2$, вторая — 0,5 $кг/см^2$, третья— 0,75 $кг/см^2$ в течение 3, 9 и 16 дней соответственно. Нагрузки прикладывались ступенями по 0,25 $кг/см^2$. В каждой серии испытывались 6—8 образцов.

Так как все образцы перед предварительным уплотнением имели одинаковую пористость, то пористость каждой серии образцов грунта к концу предварительного уплотнения определялась на компрессионной кривой величиной предварительно уплотняющей нагрузки.

Таким образом, состояние („возраст") τ_i каждой серии образцов-близнецов определялось точкой на компрессионной кривой с уплотняющей нагрузкой P_i и коэффициентом пористости ε_i.

Для определения зависимости между напряжениями и деформациями образцы грунта данной серии („возраста") параллельно испытывались различными нагрузками. В приведенном здесь случае образцы грунта испытывались нагрузками 0,25; 0,5; 0,75 и 1,0 $кг/см^2$. Нагрузки к образцам прикладывались за предельно короткое время, без удара, на полную величину. Отсчеты брались сейчас же после приложения ($t \approx 0$) нагрузок, далее через 5, 10, 20 и 30 *сек*, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 15, 30 и 60 *мин* и через каждые сутки. Испытание продолжалось с 8/III—1959 года по 14/VI—1960 года.

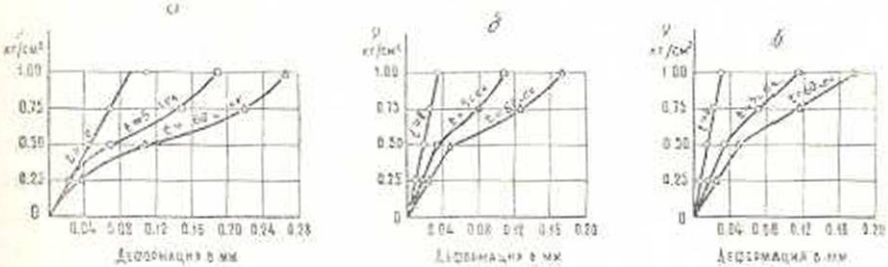
Как и прежде [1, 2], полная деформация грунта разбивалась на мгновенную деформацию и деформацию ползучести

$$l = l_{мгн} + l_{полз}(t). \tag{1}$$

Рассмотрим результаты экспериментальных исследований для мгновенной деформации и деформации ползучести в отдельности.

На графиках фиг. 1 приведены кривые зависимости между мгновенными деформациями и напряжениями для всех трех состояний („возрастов") τ_1, τ_2 и τ_3, а также кривые зависимости между напряжениями и полными деформациями для моментов времени 5 и 60 *сек* после начала загружения.

Зависимость между напряжениями и мгновенными деформациями с достаточной точностью выражается линейным законом, что же касается кривых зависимости между напряжениями и полными деформациями, то они по сравнению с моментом времени $t \approx 0$ претерпевают большие изменения. При τ_1 кривые зависимости $l = f(P)$ принимают форму буквы S с вогнутостью вниз до $P \leqslant 0{,}5$ *кг/см²* и вогнутостью вверх при $P \geqslant 0{,}5$ *кг/см²*. В остальных двух случаях указанная зависимость при $P < 0{,}5$ *кг/см²* имеет линейный характер, однако при $P > 0{,}5$ *кг/см²* в случае τ_2 прямая переходит в кривую с вогнутостью вверх, а при τ_3 она подчиняется линейному закону, т. е. при τ_3 зависимость между напряжениями и деформациями можно аппроксимировать двумя прямыми с различными углами наклона к оси абсцисс с точкой перелома при $P = 0{,}5$ *кг/см²*.



Фиг. 1.

Изменение формы кривой зависимости между напряжениями и деформациями в результате проявления явления ползучести зависит как от плотности, влажности и структурной прочности грунта, так и от величины ступени нагрузки и длительности испытания.

Сравнивая приведенные на графиках фиг.1а кривые зависимости $l = f(P)$ (состояние τ_1) с результатами наших прежних экспериментов [1, 2], можно заметить, что они несколько отличаются друг от друга при $P \leqslant 0{,}5$ *кг/см²*. Расхождения, которые имеют место при нагрузках $P \leqslant 0{,}5$ *кг/см²*, можно объяснить влиянием структурной прочности грунта на процесс деформирования. В рассматриваемом случае, ввиду несколько более прочных связей скелета грунта, чем в наших прежних экспериментах (длительность предварительного уплотнения нагрузками 0,25 *кг/см²* равна 3 суткам вместо 1 часа), перемещение структурных элементов и частиц грунта друг относительно друга происходит значительно труднее. Это приводит к уменьшению скорости деформирования при $P \leqslant 0{,}5$ *кг/см²*. При нагрузках $P > 0{,}5$ *кг/см²* сравнительно слабые структурные связи не оказывают влияния на ход деформирования и кривая зависимости между напряжениями и деформациями имеет обычную форму [3].

В состояниях τ_2 и τ_3, когда серии образцов-близнецов обладают более высокими значениями плотности и структурной прочности, форма кривых зависимости между напряжениями и деформациями существенно отличается от той, которая была рассмотрена выше. В этом случае при нагрузках $P \leqslant 0.5$ *кг/см*^{2} указанная зависимость с достаточной точностью выражается линейным законом, т. е. в течение рассматриваемого интервала времени, скорость деформирования была прямо пропорциональна нагрузке, следовательно деформация ползучести происходила за счет вязкого перемещения структурных элементов друг относительно друга. При напряжениях $P > 0,5$ *кг/см*^{2} в состоянии τ_2, ввиду лавинного разрушения структурного каркаса грунта, форма кривой $l = f(P)$ соответствует случаю испытания грунтов со слабыми структурными связями (относительно действующих напряжений), т. е. имеет обычную форму [1, 2], а в состоянии τ_3, хотя в рассматриваемых интервалах нагрузок имеет место разрушение существующей структуры грунта, он переходит в такое новое состояние, где указанная зависимость опять остается линейной, но с другим, меньшим, углом наклона к оси абцисс.

Уменьшение угла наклона к оси абсцисс говорит о разупрочнении грунта в процессе деформирования.

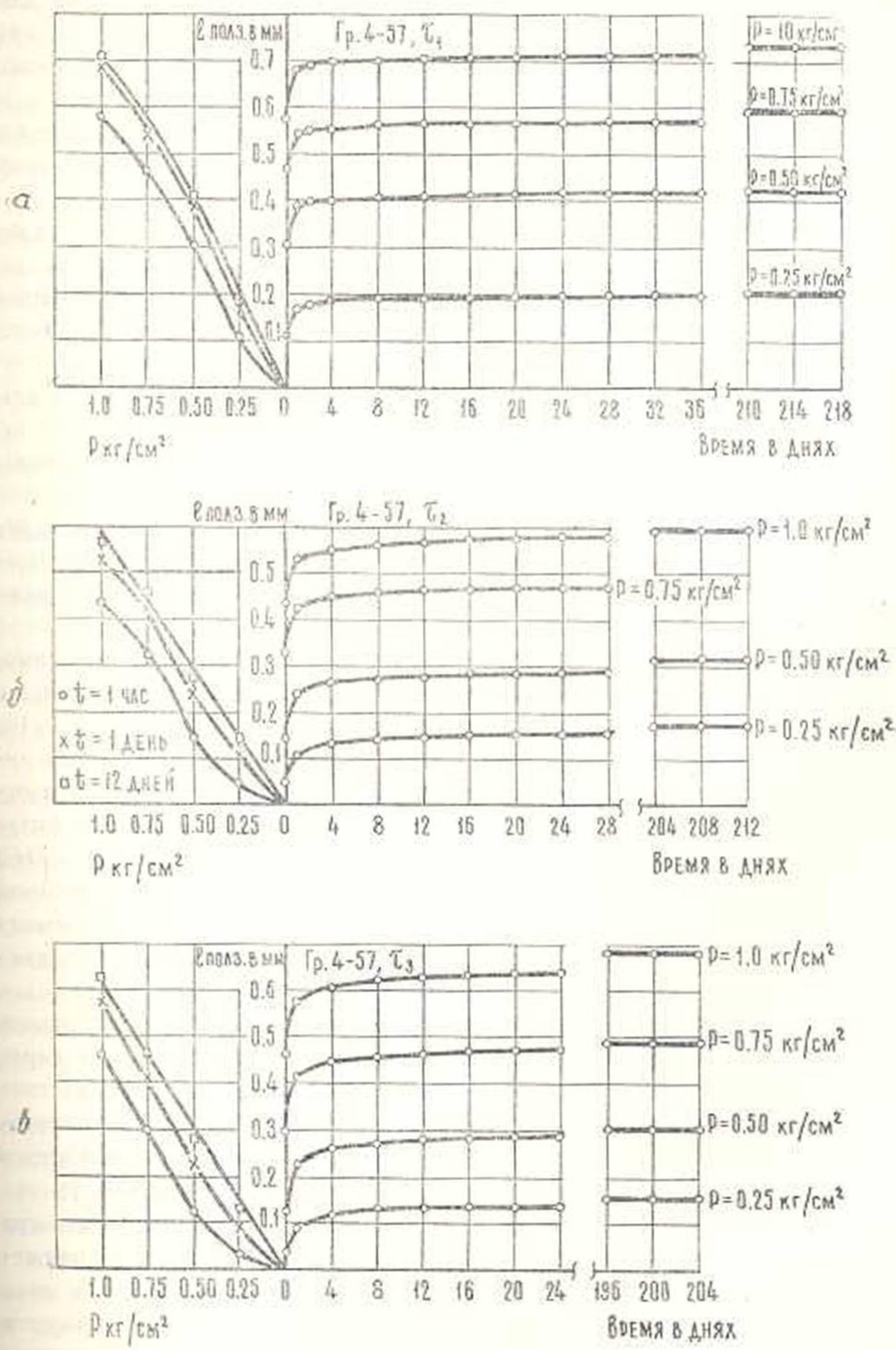
Рассмотрим результаты экспериментального исследования ползучести серии образцов, испытанных при трех значениях плотности, влажности и структурной прочности, а также зависимости между напряжениями и деформациями ползучести (фиг. 2).

На правых половинах фигур 2а, 2б и 2в приведены семейства кривых ползучести трех серий образцов испытанных в состояниях („возрастах") τ_1, τ_2 и τ_3 нагрузками 0,25; 0,5; 0,75 и 1,0 *кг/см*^{2}, а на левых половинах этих же фигур—зависимости между напряжениями и деформациями ползучести при трех значениях длительности испытания: 1 час, 1 день и 12 дней. Как и прежде [4], деформации ползучести определялись путем исключения „мгновенных" деформаций из общих.

Сравнение кривых зависимости между напряжениями и деформациями ползучести (фиг. 2) с кривыми зависимости $l = f(P)$ (фиг. 1) показывает, что:

1) в случае испытания серии образцов-близнецов с наименьшим значением плотности и структурной прочности к моменту загружения (состояние τ_1) кривая $l_{полз} = f(P)$ сперва ($t = 1$ час) сохраняет прежнюю форму (фиг. 2а) и принимает вид вытянутой буквы S, а затем ($t = 12$ дн.) она принимает форму, характерную для грунтов со слабыми структурными связями. При этом начальный участок кривой с достаточной точностью аппроксимируется прямой линией;

2) в случае испытания серии образцов в состояниях τ_2 и τ_3 сперва (при $t = 1$ час и 1 день) нарушается прямолинейность участка кри-


а
е полз. в мм
Гр. 4-57, τ1
P = 1.0 кг/см²
P = 0.75 кг/см²
P = 0.50 кг/см²
P = 0.25 кг/см²
1.0 0.75 0.50 0.25 0 4 8 12 16 20 24 28 32 36 210 214 218
P кг/см²
Время в днях
б
е полз. в мм
Гр. 4-57, τ2
o t = 1 час
x t = 1 день
□ t = 12 дней
P = 1.0 кг/см²
P = 0.75 кг/см²
P = 0.50 кг/см²
P = 0.25 кг/см²
1.0 0.75 0.50 0.25 0 4 8 12 16 20 24 28 204 208 212
P кг/см²
Время в днях
в
е полз. в мм
Гр. 4-57, τ3
P = 1.0 кг/см²
P = 0.75 кг/см²
P = 0.50 кг/см²
P = 0.25 кг/см²
1.0 0.75 0.50 0.25 0 4 8 12 16 20 24 196 200 204
P кг/см²
Время в днях

Фиг. 2.

вой $l=f(P)$ при $P \leqslant 0{,}5$ *кг/см²*, а затем, по мере увеличения длительности испытания, она постепенно выпрямляется. При $t=12$ суткам зависимость $l_{\text{полз}}=f(P)$ с достаточной точностью можно выразить линейным законом (фиг. 2).

Природу формоизменения кривых зависимости между напряжениями и деформациями можно объяснить теми же причинами, о которых было сказано выше, а именно:

а) При слабой структурной прочности испытываемых образцов, под действием сравнительно больших нагрузок, большая часть деформации происходит за короткое время с полным разрушением структурного каркаса, после чего грунт переходит в такое состояние, когда деформации протекают очень медленно, только за счет адсорбционных деформаций. Иначе говоря, большая часть потенциальной возможности деформирования грунта под данной нагрузкой исчерпывается за довольно короткое время. При сравнительно небольших значениях нагрузок (0,25—0,5 *кг/см²*), разрушение структурного каркаса происходит постепенно, медленно, поэтому деформация достигает максимума спустя определенное время. Ясно, что чем меньше величина нагрузки, тем большее время необходимо для достижения максимума деформации. Можно было полагать, что не исключена возможность влияния и фактора фильтрации на изменение зависимости между напряжениями и деформациями в зависимости от длительности испытания. Однако, как показывают эксперименты [5, 6, 7] в самом начале процесса деформирования, в рассматриваемых нами интервалах времени ($t=5$ и 60 *сек*), скорость деформации грунта в основном обусловлена ползучестью скелета и влиянием фактора фильтрации можно пренебречь. Что же касается зависимости $l_{\text{полз}}=f(P)$ при $t=1$ часу, 1 и 12 дням, то и в этом случае, ввиду небольшой толщины образца, избыточные напоры в поровой воде к этому времени достигают такой величины, что их влиянием также можно пренебречь [7].

б) При сравнительно прочных связях, по приведенной выше причине увеличение длительности испытания сперва приведет к нарушению линейной зависимости $l=f(P)$ при $P \leqslant 0{,}5$ *кг/см²* вследствие проявления структурных [8] деформаций вместо только одной адсорбционной [8] (скорость деформирования при $P=0{,}5$ *кг/см²* увеличивается не пропорционально по сравнению с $P=0{,}25$ *кг/см²*), а затем уменьшение скорости деформирования при $P>0{,}5$ *кг/см²* и увеличение при $P=0{,}25$ *кг/см²* приводят к линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести ($t=12$ суткам).

Таким образом, с момента установления линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести ($t=12$ суткам) дальнейшее деформирование грунтов происходит при сохранении этой зависимости. Следовательно, наступает такое новое состояние, после которого можно считать, что опять вступает в силу линейная зависимость между напряжениями и скоростями деформации.

Наконец, рассмотрим закономерности деформирования при четвертом состоянии грунта τ_4.

Для получения нового, четвертого, состояния грунта сперва образцы всех серий были разгружены до 0,25; 0,5 и 0,75 *кг/см²* соответственно. Затем нагрузка всех образцов трех серий была доведена до 2 *кг/см²*, а после—до 3 *кг/см²* (процесс разгрузки и нагрузки продолжался с 24/X—1959 г. по 9/II—1960 г.). После полной стабилизации деформации все образцы были полностью разгружены до $P=0$, а после—нагружены до 2 *кг/см²*. Таким образом, перед исследованием интересующего нас вопроса все образцы находились под нагрузкой 2 *кг/см²*.

Изложенная выше методика приготовления образцов преследовала цель: во-первых, изучить закономерности деформирования грунтов при разгрузке; во-вторых, добиться того, чтобы образцы были бы однородными и имели бы одинаковые физико-механические свойства.

Об однородности образцов мы судили путем сравнения деформаций образцов. Например, при $P=3$ *кг/см²* величина деформации образцов колебалась от 1,982 *мм* до 2,112 *мм*. Только деформация одного образца достигла 2,212 *мм*.

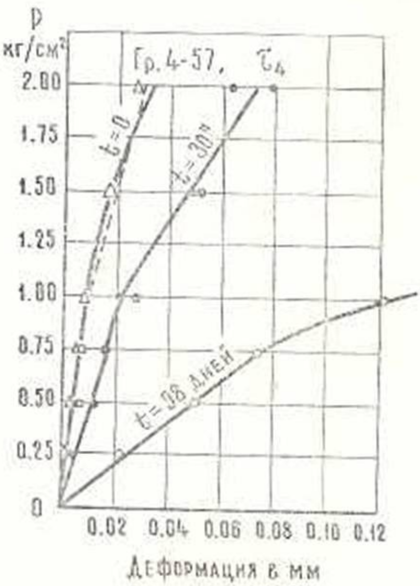
Методика исследования рассмотренных выше зависимостей прежняя, однако, помимо нагрузок 0,25; 0,5; 0,75 и 1,0 *кг/см²*, образцы были испытаны и под нагрузками 1,5 и 2,0 *кг/см²*. Опыт продолжался 98 дней с 7/III 1960 г. по 14/VI 1960 г.

На графиках фигуры 3 приведены исследования зависимостей между напряжениями и деформациями при $t \approx 0{,}30$ *сек* и 98 дней, а на фиг. 4—зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями для всех четырех состояний („возрастов") грунтов τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4. Как и прежде, зависимость между напряжениями и деформациями при нагрузках до 1 *кг/см²* ($t=0$ и 30 *сек*) линейная. При напряжениях до 2 *кг/см²* зависимость $l=f(t)$ аппроксимируется двумя прямыми с различными углами наклона к оси абсцисс (модулями деформации) с точкой перелома при $P=1$ *кг/см²*, вместо $P=0{,}5$ *кг/см²* при τ_2 и τ_3.

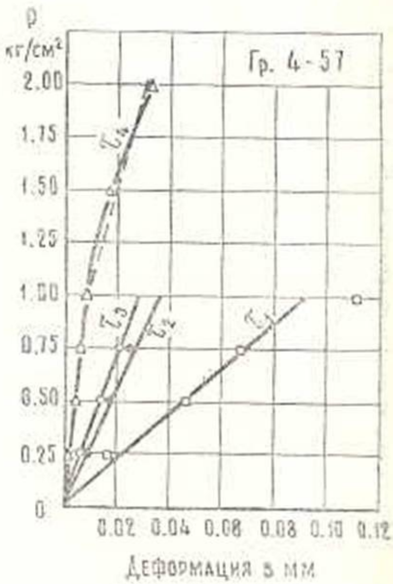
Таким образом, здесь повторяется то, что имело место при состоянии τ_3 с той лишь разницей, что точка перелома кривой зависимости $l=f(P)$ переместилась выше.

Полученные результаты полностью укладываются в рамки изложенной выше природы деформирования. А именно, при нагрузках до 1 *кг/см²*, ввиду большой структурной прочности, деформации во времени протекают за счет вязкого перемещения структурных элементов и частиц (адсорбционная деформация). Более значительное увеличение нагрузок ($P=1{,}5$ и 2,0 *кг/см²*) приводит к разрушению структуры, которая была образована в период подготовки образцов к испытанию, грунт переходит в новое состояние, при котором зависимость опять остается линейной.

Уменьшение угла наклона прямой второго участка кривой зависимости $l=f(P)$ к оси абсцисс говорит о разупрочнении грунта, а сравнение с кривыми других состояний приводит к выводу, что в результате разупрочнения, грунт из состояния τ_4 перешел в состояние τ_3.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

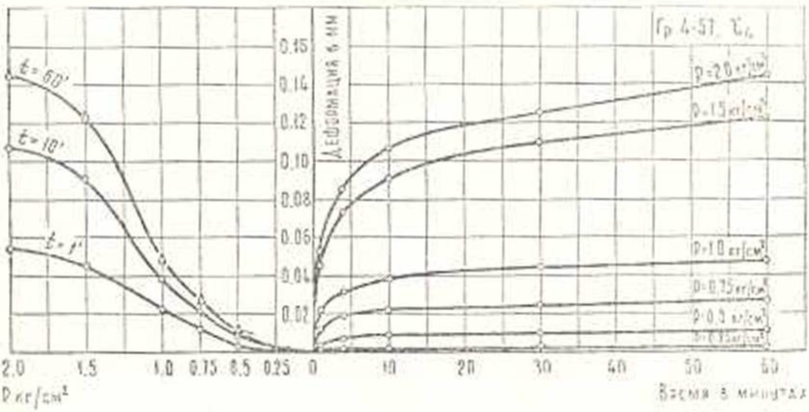
Здесь, как и при τ_1, τ_2 и τ_3, отчетливо выделяются две области деформирования с разными модулями деформации и факторами деформирования. В первой области деформирования зависимость $l=f(P)$ в основном обусловлена адсорбционными деформациями [8], а во второй—структурными деформациями.

Рассмотрим результаты исследования зависимости между напряжениями и деформациями ползучести образцов-близнецов в состоянии τ_4. На графиках фиг. 5 и 6 приведены семейства кривых ползучести и указанная выше зависимость при $t=1$ мин, 10 мин, 1 часу, 1 дню и 98 дням.

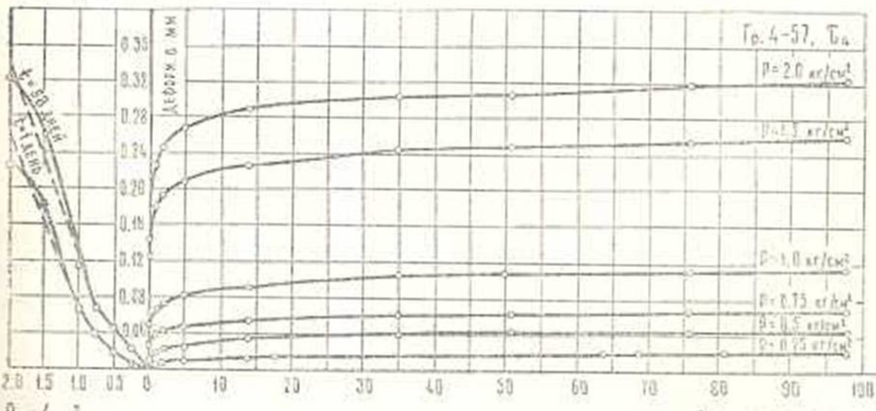
Анализ данных экспериментальных исследований приводит нас к выводу, что в данном случае повторяется все то, что было при состояниях τ_1, τ_2 и τ_3, с изменениями, обусловленными значениями плотности и структурной прочности состояния τ_4. Существенное отличие между кривыми зависимости $l_{полз}=f(P)$ при τ_4 от τ_1, τ_2 и τ_3 заключается в том, что с увеличением длительности испытания эта зависимость никогда не принимает линейного характера.

В начале процесса деформирования $l_{полз}=f(P)$, как и прежде (фиг. 2), принимает форму буквы S, а затем при больших t аппроксимируется прямой до $P=0{,}75$ *кг/см²* и кривой при $P>0{,}75$ *кг/см²*. Форма кривой $l_{полз}=f(P)$ при $P>0{,}75$ *кг/см²* соответствует испытанию грунтов со слабыми структурными связями.

Интересно отметить, что прямая пропорциональность первой области ($P \leqslant 1{,}0$ *кг/см²*, фиг. 4) зависимости $l = f(P)$ остается в силе и при больших значениях t, с той разницей, что изменяется граница между двумя областями деформирования. При $t = 98$ дней переход



Фиг. 5.



Фиг. 6.

из одной области деформирования в другую осуществляется при $P = 0{,}75$ *кг/см²*. Ясно, что это является результатом развития структурных деформаций в образцах грунта, испытанных нагрузками $P = 1$ *кг/см²* и их перехода во вторую область деформирования.

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать следующее заключение:

1. Связь между напряжениями и деформациями образцов глинистых грунтов небольшой толщины зависит от плотности, структурной прочности, а также от длительности испытания и величины приложенной нагрузки.

2. В зависимости от указанных в пункте 1 факторов, $l = f(P)$ может быть обусловлена: а) только структурными деформациями;

б) только адсорбционными деформациями; в) адсорбционными и структурными деформациями.

3. В общем случае, когда $l = f(P)$ зависит как от адсорбционных, так и от структурных деформаций, указанная зависимость разбивается на область адсорбционных и область структурных деформаций. Разумеется, что адсорбционные деформации обычно сопровождаются микроструктурными деформациями, а структурные деформации—адсорбционными.

4. При сравнительно слабых структурных связях и плотности грунта ($t > 1$ дня и $P = 1$ $кг/см^2$), с достаточной для практики точностью зависимость $l = f(P)$, можно аппроксимировать прямыми. В случае высокой прочности и плотности грунта указанная зависимость аппроксимируется двумя прямыми с разными углами наклона к оси абсцисс. Граница перехода из одной области в другую зависит от состояния данного грунта к началу испытания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 IV 1961

Ս. Ռ. Մեսչյան

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԵՂԱԾ ԱՌՆՉՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԳՐՈՒՆՏԻ ԽՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՅԻՆ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրված է կավային գրունտի լարումների և դեֆորմացիաների միջև եղած առնչությունը սեղման ժամանակ կողային ընդարձակման բացակայության պայմաններում, կախված նրա խտությունից, ստրուկտուրային ամրությունից և փորձարկման տևողությունից:

Ցույց է տրված, որ՝

1) Լարումների ու դեֆորմացիաների միջև եղած առնչությունը, նմուշների ոչ մեծ բարձրության դեպքում, կախված է գրունտի ստրուկտուրային ամրությունից, փորձարկման տևողությունից և բեռնավորման աստիճանի մեծությունից:

2) Գրունտի լարումների ու դեֆորմացիաների միջև եղած առնչությունը կարող է պայմանավորված լինել՝ ա) միմիայն ադսորբցիոն դեֆորմացիաներով, բ) միմիայն ստրուկտուրային դեֆորմացիաներով, և գ) ադսորբցիոն ու ստրուկտուրային դեֆորմացիաներով:

3) Ընդհանուր առմամբ, երբ հիշյալ առնչությունը կախված է լինում թե՛ ադսորբցիոն և թե՛ ստրուկտուրային դեֆորմացիաներից, ապա հիշյալ առնչությունը բաժանվում է երկու՝ ադսորբցիոն դեֆորմացիաների ու ստրուկտուրային դեֆորմացիաների շրջանների: Չի բացառվում այդ երկու տեսակի դեֆորմացիաների համատեղ գործողությունը թե՛ մեկ և թե՛ մյուս շրջանում:

4) Գրունտի համեմատաբար թույլ ստրուկտուրա ունենալու դեպքում, երբ փորձարկման տևողությունը ավելի է մեկ օրից, իսկ լարվածության մեծությունը մեծ չէ, քան 1 կգ/սմ², ապա լարումների և սեղքի դեֆորմացիա-

ների միջև եղած կապը ենթարկվում է գծային օրենքին: Հակառակ դեպքում, հիշյալ առնչությունը ապրոքսիմացիայի է ենթարկվում (նույն տևման բեռների մեծությունը) երկու ուղիղով, որոնք աբսցիսների առանցքի նկատմամբ ունեն թեքության տարբեր անկյուններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Месчян С. Р.* Экспериментальное исследование зависимости между напряжениями и деформациями ползучести связных грунтов. ДАН АрмССР **24**, № 2, 1957.
2. *Месчян С. Р.* О ползучести связного грунта при сжатии в условиях невозможности бокового расширения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4 1958.
3. *Денисов Н. Я.* Строительные свойства глинистых пород и их использование в гидротехническом строительстве. Госэнергоиздат, М.—Л., 1956.
4. *Месчян С. Р.* К вопросу о ползучести связных грунтов. Изв. АН АрмССР, серия ФМЕиТ наук, **7**, № 6, 1954.
5. *Павилонский В. М.* Экспериментальные исследования порового давления в глинистых грунтах. „Инф. мат. НИИ ВОДГЕО", № 4, М., 1960.
6. *Сипидин В. П.* О проявлении свойств ползучести при компрессионных испытаниях грунтов. ДАН АрмССР, **31**, № 5, 1960.
7. *Месчян С. Р.* К вопросу о перераспределении напряжений между скелетом и поровой водой глинистого грунта. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, № 1, 1961.
8. *Денисов Н. Я.* О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота, М., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

ФИЗИКА

А. Ц. Аматуни, А. Н. Оганесян

Излучения, возникающие при пролете заряженных частиц над системой металлических шаров или цилиндров

В работе получен спектральный состав излучения, образующегося при пролете с постоянной скоростью v нерелятивистской заряженной частицы над шаром и заряженной нити над цилиндром. Как и следует ожидать из простых соображений, максимум излучения в обоих случаях приходится на частоту $\omega \sim v/l$, где l—прицельное расстояние. В случае цилиндров излучение носит изотропный, по полярному углу, характер. Получены также формулы для излучения m одинаковых шаров (или цилиндров), если известно излучение одного шара (или цилиндра). Простой способ получения этих формул, описывающих интерференционные эффекты при излучении заряженных частиц, движущихся через или над периодической структурой, не содержит допущения $v \ll c$ и имеет общий характер.

1. Пусть частица с зарядом e и постоянной скоростью v пролетает над шаром радиуса $a < l$. При этом возникает излучение, которое иногда называют излучением индуцированных на металлической поверхности переменных зарядов. Если скорость заряженной частицы $v \ll c$, то запаздыванием поля можно пренебречь и для определения возникающего излучения можно использовать электростатический метод изображений. Такой, естественный в данном случае подход к задаче применялся в работе Аскаряна [1], где рассмотрено лобовое столкновение заряженной частицы с металлическим шаром и подсчитана полная энергия излучения. Как уже упоминалось, ниже рассматривается случай пролета частицы над шаром и мы интересуемся не только полной излученной энергией, но и спектральным составом излучения.

Отметим, что мы будем предполагать скорость $v \ll c$, но все же достаточно большой, чтобы иметь возможность считать ее постоянной, т. е. пренебречь отдачей при излучении и изменением скорости из-за взаимодействия с индуцированными на поверхности шара зарядами.

Поле вне шара может быть получено как поле заряда e, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью v, и поле зарядов изображений

$$e_1 = -e_2 = -\frac{ea}{q}, \tag{1.1}$$

где q — расстояние от заряда e до центра шара $q = \sqrt{l^2 + v^2t^2}$.

Заряд e_2 расположен в центре шара, заряд e_1 — на расстоянии $q_1 = \frac{a^2}{q}$ от него на прямой, соединяющей центр с зарядом e. При движении заряда e из $-\infty$ в $+\infty$, переменный по величине заряд — изображение e_1, описывает окружность диаметра a^2/e, проходящую через центр металлического шара.

Поле излучения будет определяться зарядами e_1, e_2 причем, если $v \ll c$, то скорость движения заряда e_1 будет также меньше скорости света и излучение будет носить дипольный характер ($a \ll \lambda$, где λ — характерная длина волны излучения).

Поместим начало координат в центре шара. Пусть частица движется вдоль оси y, плоскость zoy проходит через центр шара и траекторию частицы. Ось oz перпендикулярна к траектории. Частица с зарядом e при $t = -\infty$ находилась на $-\infty$, при $t = 0$ пересекает ось z на прицельном расстоянии l. Тогда величина дипольного момента $\vec{d}$ равна

$$d_x = 0, \quad d_y = -\frac{ea^3vt}{(l^2 + v^2t^2)^{3/2}}, \quad d_z = -\frac{ea^3l}{(l^2 + v^2t^2)^{3/2}} \tag{1.2}$$

и излучение в телесный угол $d\Omega$

$$dE_{\vec{n}} = \frac{225e^2v^3}{4096c^3l}\left(\frac{a}{l}\right)^6 [7\sin^2\theta + 5(1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi)]\, d\Omega. \tag{1.3}$$

В (1.3) θ и φ — углы, определяющие направление излучения $\vec{n}$. Из (1.3) видно, что излучение слабо анизотропно, максимум его приходится на $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0, \pi$, а минимум на $\theta = 0, \pi$.

Интегрируя по углам, получим полное излучение за все время пролета

$$E = 1{,}76\frac{e^2\beta^3}{l}\left(\frac{a}{l}\right)^6. \tag{1.4}$$

Из формул (1.3) и (1.4) видно, что излученная энергия довольно сильно зависит от отношения a/l и при прицельном расстоянии l, заметно превышающем радиус шара a, резко падает.

Частотное распределение излучения определяется по формуле

$$dE_{\vec{n},\omega} = \frac{\omega^4}{c^3}\,|[\vec{d}_\omega \vec{n}]|^2 d\Omega\, d\omega, \tag{1.5}$$

где $\vec{d}_\omega$ — фурье-компонента от $\vec{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)$ и $R_0 \gg a$ — точка наблюдения поля излучения.

$$d_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d_y\left(t - \frac{R_0}{c}\right)dt = -\frac{ie\omega a^3}{\pi v^2} e^{i\frac{\omega}{c}R_0} K_0\left(\frac{l\omega}{v}\right),$$

$$d_z(\omega) = -\frac{e\omega a^2}{\pi v^2} e^{i\frac{\omega}{c}R_0} K_1\left(\frac{l\omega}{v}\right). \qquad (1.6)$$

Здесь K_0 и K_1—молерированные функции Ганкеля.

Из (1.5) и (1.6) следует:

$$dE_{n\omega} = \frac{e^2\omega^6 a^6}{\pi^2 c^3 v^4}\left\{K_1^2\left(\frac{l\omega}{v}\right)\sin^2\theta + K_0^2\left(\frac{l\omega}{v}\right)(1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi)\right\} d\Omega d\omega, \qquad (1.7)$$

$$dE_\omega = \frac{8e^2\omega^6 a^6}{3\pi c^3 v^4}\left\{K_0^2\left(\frac{l\omega}{v}\right) + K_1^2\left(\frac{l\omega}{v}\right)\right\} d\omega. \qquad (1.8)$$

Максимум излучения приходится на частоту $\omega_{max} = 2{,}2\ v/l$

при $\omega \ll \omega_{max}$

$$dE_\omega = \frac{8e^2 a^6 \omega^4}{3\pi c^3 v^2 l^2}, \qquad (1.8')$$

при $\omega \ll \omega_{max}$

$$dE_\omega = \frac{8e^2 a^6 \omega^5}{3c^3 v^3 l}\cdot\exp\left(-\frac{2l\omega}{v}\right). \qquad (1.8'')$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда заряженная частица с постоянной скоростью $v \ll c$ пролетает параллельно линии центров m одинаковых металлических шаров. Пусть расстояние между центрами соседних шаров есть r. Можно показать, что если $(a/r)^3 \ll 1$, поле излучения, возникающее в этом случае есть сумма полей излучения от зарядов—изображений (1.1) в отдельных шарах. Иначе говоря, при $(a/r)^3 \ll 1$ изображениями изображений можно пренебречь. Нетрудно видеть, что поле излучения $\vec{H}$, возникающее в этом случае, запишется в виде

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 R_0}\sum_{k=1}^{m}\left[\ddot{\vec{d}}\left(t_k - \frac{R_0^{(k)}}{c}\right)\vec{n}\right], \qquad (2.1)$$

где

$$t_k = t - \frac{r(k-1)}{c},$$

$$R_0^{(k)} \approx R_0 - (k-1)\,\vec{r}\,\vec{n} = R_0 - (k-1)\,r\cos\Theta,$$

Θ—угол между траекторией частицы и направлением излучения $\vec{n}$ ($\cos\Theta = \sin\theta\sin\varphi$). Фурье-компоненты от $\vec{d}\left(t_k - \frac{R_0^{(k)}}{c}\right)$ будут отличаться от выражений (1.6) множителем $\exp\left[i\frac{(k-1)\,r\omega}{v}(1 - \beta\cos\Theta)\right]$ и излученная энергия определится выражением

$$dE^{(m)}_{\vec{n}\omega} = c\,|\vec{H}_\omega|^2 R_0^2\, d\Omega d\omega =$$

$$= \frac{e^2\omega^6 a^6}{\pi^2 c^3 v^4}\left[K_1^2\left(\frac{\omega l}{v}\right)\sin^2\theta + K_0^2\left(\frac{\omega l}{v}\right)(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)\right]\times$$

$$\times\left\{m + 2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\cos\left[\frac{k\omega r}{v}(1-\beta\sin\theta\sin\varphi)\right]\right\}d\Omega d\omega. \qquad (2.2)$$

Формулу (2.2) можно переписать иначе

$$dE^{(m)}_{\vec{n}\omega} = \frac{e^2\omega^6 a^6}{\pi^3 c^3 v^4}\left[K_1^2\left(\frac{\omega l}{v}\right)\sin^2\theta + K_0^2\left(\frac{\omega l}{v}\right)(1-\cos^2\Theta)\right]\times$$

$$\times\frac{\sin^2\left[\frac{m\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)\right]}{\sin^2\left[\frac{\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)\right]}\,d\Omega d\omega. \qquad (2.3)$$

Таким образом, излучение в случае с m шарами отличается от излучения в случае одного шара множителем

$$\frac{\sin^2\left[\frac{m\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)\right]}{\sin^2\left[\frac{\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)\right]}, \qquad (2.4)$$

который описывает интерференцию излучений от отдельных шаров. Обсуждение роли множителя (2.4), характерного для периодических структур, приводится ниже.

3. Рассмотрим теперь, с точки зрения величины выхода излучения, практически несколько более интересную задачу о пролете заряженной нити над металлическим цилиндром и системой параллельно расположенных цилиндров. Начнем со случая одного цилиндра радиуса a, расположенного вдоль оси z. Заряженная нить с линейной плотностью заряда q также параллельна оси z и движется вдоль оси x с постоянной скоростью $v \ll c$ в плоскости, отстоящей на расстоянии l от оси цилиндра.

Опять используя метод изображений найдем, что поле вне цилиндра создается зарядом нити и зарядами двух нитей-изображений $q_1 = -q_2 = -q$, причем, нить с линейной плотностью заряда q_2 расположена на оси цилиндра, нить с постоянным во времени зарядом q_1 находится на прямой, соединяющей центр цилиндра с движущейся прямолинейно нитью q, а нить q_1 находится на расстоянии $a^2/(l^2+v^2t^2)^{1/2}$ от оси цилиндра, и при пролете нити q из $-\infty$ в $+\infty$ нить-изображение q_1 описывает цилиндр диаметра a^2/l, проходящий через ось. Поле излучения создается нитью q_1 и вектор потенциал поля определяется формулой [2]

$$\vec{A}(x, y, t) = 2\int_{-\infty}^{t}\left[\iint\limits_{\rho=c(t-\tau)} \frac{\vec{j}(\zeta, \eta, \tau)\, d\zeta d\eta}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\right] d\tau, \qquad (3.1)$$

где $\rho = \sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}$, $\vec{j} = q_1 \vec{v}\,\delta(\zeta-\zeta_0(t))\,\delta(\eta-\eta_0(t))$,

$$\zeta_0(t) = \frac{a^2vt}{l^2+v^2t^2}, \quad \eta_0(t) = \frac{a^2l}{l^2+v^2t^2},$$

$$v_x = \dot{\zeta}_0, \quad v_y = \dot{\eta}_0.$$

Для дальнейшего удобно ввести $v_{\pm} = v_x \pm iv_y$ и соответственно $A_{\pm} = A_x \pm iA_y$. Поскольку мы ищем поле излучения на больших (по сравнению с радиусом a цилиндра) расстояниях, и, кроме того, $v \ll c$, можно ρ приближенно заменить на $\rho_0 = \sqrt{x^2+y^2}$.

Тогда

$$A_{\pm} = 2q_1a^2v \int_{-\infty}^{t-\rho_0/c} \frac{d\tau}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-\rho_0^2}} \frac{1}{(l \pm iv\tau)^2} =$$

$$= \frac{2q_1a^2v}{c} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'^2-\rho_0^2}} \cdot \frac{1}{\left[l \pm ivt \mp i\dfrac{v}{c}\tau'\right]^2}. \qquad (3.2)$$

Для фурье-компоненты потенциала имеем

$$A_{\pm}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} A_{\pm}(t)\, dt.$$

Выполнив интегрирование по частям и перейдя в плоскость комплексного переменного t (в которой контур интегрирования замыкается большой полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости при $\omega > 0$ и в нижней — при $\omega < 0$), получим

$$A_{-}(\omega) = \frac{2q_1a^2\omega}{cv} e^{-\frac{l\omega}{v}} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\tau' e^{i\frac{\omega}{c}\tau'}}{\sqrt{\tau'^2-\rho_0^2}} =$$

$$= -\frac{4iq_1a^2\omega}{cv\pi} e^{-\frac{l\omega}{v}} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}\rho_0\right), \quad \omega > 0, \qquad (3.3)$$

$$A_{-}(\omega) = 0, \quad \omega > 0; \quad A_{+}(\omega) = 0, \quad \omega < 0.$$

$$A_{-}(\omega) = -\frac{4iq_1a^2|\omega|}{cv\pi} e^{-\frac{l|\omega|}{v}} H_0^{(2)}\left(\frac{|\omega|}{c}\rho_0\right), \quad \omega < 0.$$

Учитывая, что $\rho_0 \gg \lambda = \frac{c}{\omega}$, используем асимптотические разложения функций Ганкеля и для фурье-компоненты магнитного поля $\vec{H} = rot\ \vec{A}$ получим

$$H_z(\omega) = -\frac{2iq_1 a^2 \omega^2}{\pi v c^2} \cdot \sqrt{\frac{2c}{\pi|\omega|\rho_0}}\, e^{-\frac{l|\omega|}{v} - i\left(\frac{\omega}{c}\rho_0 - \frac{\pi}{4} - \varphi\right)},$$

$$H_z(\omega) = H^*(-\omega), \tag{3.4}$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ — азимутальный угол полярной системы координат. Тогда для излучения с единицы длины нити за все время пролета будем иметь

$$dE_{\vec{n}\omega} = c\,|H_\omega|^2 \rho_0\, d\varphi d\omega = \frac{8q^2 a^4 \omega^3}{\pi^3 c^2 v^2}\, e^{-\frac{2l\omega}{v}}\, d\varphi d\omega. \tag{3.5}$$

Из (3.5) видно, что излучение изотропно, максимум излучения приходится на частоту $\omega_{max} = \frac{3}{2}\, v/l$, спектр экспоненциально обрезается при $\omega \gg v/l$.

Полная энергия излучения с единицы длины нити

$$E = \frac{16}{\pi^2}\, q^2\beta^2 \left(\frac{a}{l}\right)^4 \sim 1{,}6 q^2\beta^2 \left(\frac{a}{l}\right)^4. \tag{3.6}$$

Из сравнения формул (1.4) и (3.6) видно, что в случае пролета нити над цилиндром несколько менее сильно выражена зависимость от отношения $\frac{a}{l}$ и β. Очевидно, что поскольку линейную плотность заряда можно сделать заметной, в данном случае возможно получить сравнительно большое излучение.

4. Пусть теперь заряженная нить пролетает над системой из m параллельных металлических цилиндров. Оси соседних цилиндров отстоят на r, радиус каждого a и нить, расположенная параллельно осям цилиндров, движется со скоростью $v \ll c$.

Поле, созданное изображением нити в k-ом цилиндре на больших расстояниях от системы будет иметь вид

$$H_z^{(k)}(\omega, \rho_0, y) = H_z e^{\frac{i(k-1)\omega r}{v}(1-\beta\cos\Theta)}, \tag{4.0}$$

где H_z, в пренебрежении, как и ранее, изображениями изображений, определено формулой (3.4), а дополнительная фаза обусловлена сдвигом времени $t \to t - \frac{(k-1)r}{v}$ и другим расстоянием от k-го шара до точки наблюдения $\rho_0^k \simeq \rho_0 - r(k-1)\cos\Theta$, где Θ — угол между направлением излучения и направлением движения нити. Суммируя поля от отдельных цилиндров и находя общую энергию излучения, получим

$$dE^{(m)}_{\vec{n}\omega} = dE_{\vec{n}\omega}\left[m + 2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\cos\left[\frac{k\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)\right]\right] \qquad (4.1)$$

или

$$dE^{(m)}_{\vec{n}\omega} = dE_{\vec{n}\omega}\frac{\sin^2\dfrac{m\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)}{\sin^2\dfrac{\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)}. \qquad (4.1)'$$

Здесь $dE_{\vec{n}\omega}$ —излучение одного цилиндра, определяемое формулой (3.5). Сравнивая (4.1), (4.1)' с (2.2) и (2.3) мы видим, что эффект интерференции от m периодически повторяющихся объектов в обоих случаях описывается одним и тем же фактором (2.4). Поскольку при получении (2.4) было использовано только условие $\rho_0(R_0)\gg mr$, этот фактор не изменится и в релятивистском случае, когда использованный метод изображений не применим. Ясно также, что этот фактор не зависит от формы металлических объектов периодической структуры.

Заметим, что изложенным выше способом можно просто решать задачи об излучении, возникающем при пролете заряженной частицы над произвольной периодической структурой*. Вся трудность задачи сводится, тем самым, к определению поля излучения от одного элемента структуры. Излучение от m элементов получится тогда путем умножения энергии излучения от одного элемента структуры на фактор типа (2.4), возникающий за счет разности фаз полей излучения, созданного разными элементами структуры. Разность фаз, в свою очередь, как было видно из приведенных выше примеров, определена разностью времен пролета частицы над соседними элементами структуры и разностью оптических путей от этих элементов до точки наблюдения.

Остановимся теперь более детально на роли фактора (2.4) в рассмотренных выше двух случаях.

а) Пусть общая длина системы mr мала, точнее, пусть

$$\frac{m\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta)\ll 1, \quad \text{или} \quad mr \ll \frac{\lambda\beta}{1-\beta\cos\Theta}. \qquad (4.2)$$

Тогда излучение от m шаров (или цилиндров) будет в m^2 раз больше излучения от одного элемента.

б) Фактор (2.4) будет иметь главные максимумы, пропорциональные m^2 и ширину $\sim 1/m$ при

$$\frac{\omega r}{2v}(1-\beta\cos\Theta) = \pi k. \qquad (4.3)$$

При заданном угле излучения Θ условие на λ будет иметь вид

* Пролет через периодическую структуру таким же способом рассмотрен Г. М. Гарибяном (частное сообщение).

$$\lambda = \frac{r}{k}\left(\frac{1}{\beta} - \cos\Theta\right). \tag{4.3'}$$

[Например, полезно выбрать λ, соответствующий максимуму в спектрах (1.8) или (3.5)].

При заданной λ максимумы излучения будут наблюдаться под углами

$$\cos\Theta = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{k\lambda}{r}\right). \tag{4.4}$$

Это условие имеет простой физический смысл [3,4]. Из (4.4) следует, в частности, что

$$\left|\frac{1}{\beta} - \frac{k\lambda}{r}\right| \leqslant 1. \tag{4.4'}$$

При заданных β и λ/r, (4.4′) есть условие на порядок максимума k.

Поскольку $\beta < 1$, k может принимать только положительные целые значения.

Нетрудно видеть, например, что при $r \sim \lambda$ и $\beta \simeq 1/3$ имеет место только несколько первых максимумов.

в) Наконец, рассмотрим случай, когда r очень велико

$$\frac{\omega r}{2v}(1 - \beta\cos\Theta) \gg 1.$$

Тогда из формулы (2.2) и (4.1) следует, что энергия излучения от m объектов есть m раза излучения одного объекта.

В заключение авторы благодарят Г. М. Гарибяна за полезные обсуждения.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 27 VI 1961

Ա. Ծ. Ամատունի, Ա. Ն. Հովհաննիսյան

ՄԵՏԱՂԵ ԳՆԴԵՐԻ ԿԱՄ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ՎՐԱՅՈՎ ԼԻՑՔԱՎՈՐ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐ ԱՆՑՆԵԼԻՍ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ստացված է մետաղե գնդի վրայով անցնող e հաստատուն լիցքով մասնիկի և մետաղե գլանի վրայով անցնող գծային e հաստատուն խտությամբ լիցքավորված լարի ճառագայթման էներգիաների սպեկտրալ կազմն այն դեպքում, երբ մասնիկը կամ լարը շարժվում են հաստատուն v ոչ-ռելյատիվիստիկ արագությամբ և l նշանաձգային հեռավորության վրա:

Առավելագույն ճառագայթումն ստացվում է $\omega \sim v/l$ հաճախությամբ, որը հայտնի և սպասվում էր ֆիզիկական նկատառումներից: Գլանի համար ճառագայթումն իզոտրոպ է բևեռային անկյան նկատմամբ:

Օգտվելով մի գնդի կամ գլանի ճառագայթման բանաձևերից, ստանում ենք միանման N գնդերի կամ գլանների շարքում առաջացած ճառագայթման արտահայտությունները:

Պարբերական ստրուկտուրաների վրայով լիցքակիր անցնելիս առաջացած ճառագայթման ինտերֆերենցիոն էֆեկտները նկարագրող այս բանաձևերն ստացված են առանց $v \ll c$ պայմանի օգտագործման և ունեն ընդհանուր բնույթ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аскарян Г. А.* Об излучении ускоренно движущегося электрического изображения равномерно движущегося заряда. ЖЭТФ, **29**, 388, 1955.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. II, ГИТТЛ, М., 1951.
3. *Smith S. J.* and *Purcell E. M.* Visible light from localizid surface charges moving across a grating. Phys. Rev., **92**, 1069, 1955.
4. *Аматуни А. Ц.* и *Корхмазян Н. А.* Излучение заряженной частицы в среде с периодически меняющейся плотностью. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 5, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

Г. С. Саакян и Д. М. Седракян

К теории гиперонных конфигураций звездных масс

В работе [1] было показано, что если в сверхплотных конфигурациях, ранее известных под названием нейтронных звезд [2, 3], плотность вещества более чем в три раза превышает плотность в атомных ядрах, то в их „химическом“ составе происходят коренные изменения. А именно, в звезде появляются гипероны и μ^--мезоны. Эти конфигурации звездных масс названы гиперонными звездами. Далее, в работе [4] было произведено детальное исследование внутреннего строения гиперонных конфигураций. Было показано, что гиперонная звезда состоит из трех основных областей: „гиперонного ядра“, „нейтронного слоя“ и „наружной оболочки“. Гиперонное ядро состоит из газа барионов, в котором численно преобладают гипероны (концентрации разного типа барионов — величины одинакового порядка), имеются также в сравнительно небольшом количестве электроны и μ^--мезоны. Нейтронный слой состоит преимущественно из нейтронов. Имеются также протоны и электроны, но концентрация их приблизительно на три порядка меньше концентраций нейтронов. В наружной оболочке вещество находится приблизительно в таком состоянии как в белых карликах, т. е. состоит из голых ядер и свободных электронов, а у самой поверхности из атомов. Масса звезды в основном образуется за счет гиперонного ядра и нейтронного слоя. Что касается наружной оболочки, то она фактически не дает никакого вклада в массу. Радиус гиперонного ядра больше толщины нейтронного слоя, а последняя больше толщины наружного слоя.

Вопросы о размерах и массе наружной оболочки гиперонных звезд не были исследованы в работах [1, 4]. В этой заметке мы займемся вычислением этих параметров звезды. Размеры и масса наружной области могут быть получены путем интегрирования следующих дифференциальных уравнений [3, 4]

$$\frac{du}{dr} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot r^2 \cdot \rho(r),$$
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(P+\rho)}{r\left(\frac{c^2}{k} r - 2u\right)} \left(u + \frac{4\pi}{c^2} P r^3\right). \tag{1}$$

где ρ — плотность материи, P — давление, $u(r)$ для рассматриваемой области с большой точностью является массой центральной сферы радиуса r, c — скорость света, а k — гравитационная константа. Эти уравнения, на протяжении внутренних областей, возможно интегрировать только численным способом. Однако, в случае наружной оболочки положение дел значительно лучше. Здесь уравнения допускают некоторые упрощения, после чего удается найти достаточно точные аналитические решения.

Для интегрирования системы уравнений (1), прежде всего необходимо иметь уравнение состояния вещества. В рассматриваемой области звезды мы имеем дело с газом, состоящим из голых ядер и свободных электронов. Очевидно, в таких физических условиях плотность энергии вещества определяется ядрами, а давление — электронами. Поэтому для плотности энергии имеем

$$\rho = mc^2 \frac{N_e}{Z}, \tag{2}$$

где m и Z — соответственно масса и заряд ядра, а N_e — плотность электронов. Следуя работе [4], мы предполагаем, что температура звезды равна нулю. Поэтому мы имеем дело с полностью вырожденным электронным газом (вообще говоря это предположение необязательно).

Пусть p-граничный импульс Ферми для электронов. Тогда, введя обозначение

$$\frac{p}{m_e c} = x,$$

уравнение состояния можно написать в следующем параметрическом виде

$$\rho = \frac{32}{3} \frac{m}{Zm_e} K_e x^3,$$

$$P = \frac{4}{3} K_e \left[x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3 \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \right], \tag{3}$$

где

$$K_e = \frac{m_e^4 c^5}{32\pi^2 h^3}.$$

Очевидно, отношение m к Z должно быть порядка удвоенной массы нуклона. Ниже мы примем $\frac{m}{Z} = 2m_n$, где m_n-масса нейтрона.

Нам остается задать начальные условия. В качестве начальных условий следует принять

$$u(R) = M, \quad x(R) = x_0. \tag{4}$$

Здесь R и M-соответственно радиус и масса внутренней сферы, где материя состоит преимущественно из барионного газа (гиперонное ядро и нейтронный слой). С достаточным приближением [4] эти величины совпадают с радиусом и массой звезды, x_0 есть значение параметра $x = \frac{p}{m_e c}$ на наружной поверхности нейтронного слоя.

Конечно, резкой границы между наружным и нейтронным слоями не существует. На самом деле имеется некоторая промежуточная область, где порциальные давления электронного и нейтронного газов одинакового порядка величины. В этой промежуточной области концентрация нейтронов заметно превышает концентрацию электронов. Масса и размеры ее даже больше соответствующих величин для наружной области. Ниже, в качестве границы между нейтронным и наружным слоями мы будем подразумевать ту поверхность, на которой порциальные давления электронного и нейтронного газов равны

$$P_e = P_n. \tag{5}$$

Решив уравнение (5), получаем, что на границе раздела нейтронного и наружного слоев концентрация нейтронов $N_h \approx 5{,}3\cdot 10^{32}\,см^{-3}$, а концентрация электронов $N_e \approx 10^{31}\,см^{-3}$. Этой концентрации электронов соответствует граничный импульс Ферми $cp \approx 1{,}3$ *мэв*. Следовательно, $x_0 = 2{,}6$, давление $P_0 = 4{,}91\cdot 10^{24}$ *эрг. см*$^{-3}$ и плотность энергии $\rho_0 = 3{,}13\cdot 10^{27}$ *эрг. см*$^{-3}$. Исходя из начальных условий (4), мы должны уравнения (1) интегрировать до расстояния $r = R + l$, где давление обращается в нуль $P(R+l) = 0$. Тогда полученное значение l будет толщиною наружного слоя, $u\,(R+l)$ — массой всей звезды.

Уравнения (1) легко интегрируются, если учесть, что в рассматриваемой области звезды

$$P \ll \rho, \quad \frac{4\pi}{c^2}\, r^3 P \ll u.$$

Введя обозначение $u - M = v$ и отбрасывая малые члены, уравнение (1) мы можем представить в виде

$$\frac{dv}{dr} = \frac{4\pi}{c^2}\, r^2 \rho\,(r),$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{r_0}{2}\,\frac{\rho\,(r)}{r\,(r - r_0)}, \tag{6}$$

где $r_0 = \frac{2Mk}{c^2}$ — гравитационный радиус звезды. Укажем, что в левой части второго уравнения $u\,(r)$ заменено через массу звезды M, что является хорошим приближением.

Подставив выражения плотности энергии и давления из (3) в (6), получим

$$\frac{dv}{dr} = \frac{4\pi}{c^2}\, A r^2 x^3,$$

$$\frac{dx}{dr} = -\frac{A r_0}{16B}\,\frac{(1 + x^2)^{1/2}}{x r\,(r - r_0)}. \tag{7}$$

где

$$A = \frac{64}{3}\frac{m_n}{m_e}K_e = 1{,}78\cdot 10^{26}\ \textit{эрг}\cdot\textit{см}^{-3}; \qquad B = \frac{4}{3}\,K_e = 6{,}04\cdot 10^{21}\ \textit{эрг}\cdot\textit{см}^{-3}.$$

Интегрирование второго уравнения дает

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x_0^2} = \frac{A}{16B}\left[\ln\left(1-\frac{r_0}{R}\right) - \ln\left(1-\frac{r}{R}\right)\right]. \tag{8}$$

Таблица 1

Наиболее важные параметры гиперонных конфигураций звездных масс, состоящих из идеального газа элементарных частиц

$\varepsilon(0)$ *г/см*³	$M/\odot$	ΔM *г*	R *км*	l *м*	$\varepsilon(0)$ *г/см*³	$M/\odot$	ΔM *г*	R *км*	l *м*
$1{,}0\cdot 10^{14}$	0,306	$3{,}14\cdot 10^{25}$	21,1	492,7	$3{,}62\cdot 10^{16}$	0,450	$6{,}45\cdot 10^{23}$	9,18	54,5
$2{,}24\cdot 10^{14}$	0,411	$1{,}27\cdot 10^{25}$	18,4	251,6	$8{,}29\cdot 10^{16}$	0,329	$5{,}63\cdot 10^{23}$	8,14	60,8
$3{,}62\cdot 10^{14}$	0,460	$6{,}27\cdot 10^{24}$	16,0	174,3	$3{,}45\cdot 10^{17}$	0,228	$4{,}38\cdot 10^{24}$	6,93	65,2
$6{,}6\cdot 10^{14}$	0,557	$2{,}38\cdot 10^{24}$	14,6	116,8	$1{,}15\cdot 10^{18}$	0,177	$8{,}61\cdot 10^{23}$	7,63	104,5
$2{,}34\cdot 10^{15}$	0,634	$9{,}17\cdot 10^{23}$	11,0	54,0	$3{,}39\cdot 10^{19}$	0,220	$2{,}52\cdot 10^{24}$	10,5	161,5
$5{,}92\cdot 10^{15}$	0,578	$7{,}7\cdot 10^{23}$	10,3	52,1	∞	0,324	$2{,}08\cdot 10^{24}$	11,1	117,9
$1{,}09\cdot 10^{16}$	0,519	$6{,}66\cdot 10^{23}$	9,63	51,3					

Таблица 2

Наиболее важные параметры гиперонных конфигураций звездных масс, состоящих из реального газа элементарных частиц

$\varepsilon(0)$ *г/см*³	$M/\odot$	ΔM *г*	R *км*	l *м*	$\varepsilon(0)$ *г/см*³	$M/\odot$	ΔM *г*	R *км*	l *м*
$1{,}12\cdot 10^{15}$	0,715	$1{,}92\cdot 10^{24}$	12,2	58,3	$1{,}38\cdot 10^{17}$	0,673	$1{,}62\cdot 10^{22}$	4,5	5,74
$1{,}44\cdot 10^{15}$	0,760	$1{,}04\cdot 10^{24}$	11,7	49,8	$5{,}46\cdot 10^{17}$	0,666	$2{,}07\cdot 10^{22}$	4,79	6,92
$2{,}36\cdot 10^{15}$	0,860	$4{,}13\cdot 10^{23}$	10,0	29,5	$1{,}61\cdot 10^{18}$	0,670	$2{,}44\cdot 10^{22}$	4,9	7,25
$4{,}31\cdot 10^{15}$	1,007	$1{,}16\cdot 10^{23}$	8,3	14,5	$7{,}25\cdot 10^{18}$	0,686	$2{,}41\cdot 10^{22}$	4,93	7,11
$1{,}67\cdot 10^{16}$	1,028	$1{,}77\cdot 10^{22}$	5,4	4,2	$1{,}55\cdot 10^{21}$	0,686	$2{,}41\cdot 10^{22}$	4,93	7,11
$5{,}75\cdot 10^{16}$	0,847	$1{,}38\cdot 10^{22}$	4,77	4,35	$2{,}88\cdot 10^{22}$	0,686	$2{,}41\cdot 10^{22}$	4,93	7,11
$9{,}68\cdot 10^{16}$	0,777	$1{,}45\cdot 10^{22}$	4,67	4,86	∞	0,690	$2{,}43\cdot 10^{22}$	4,95	7,08

Формула (8) вместе с (3) определяет законы убывания плотности энергии и давления как функции расстояния r. Подставив в (8) $x=0$ и $r = R + l$, мы находим толщину наружного слоя

$$l = \frac{r_0}{1-\left(1-\frac{r_0}{R}\right)\exp\left[D\left(\sqrt{x_0^2+1}-1\right)\right]} - R, \tag{9}$$

где

$$D = \frac{16B}{A} = 5{,}44\cdot 10^{-4}.$$

В частности, при $x_0 = 2{,}6$, имеем $D\left(\sqrt{x_0^2+1}-1\right) \approx 0{,}001$ и, следовательно,

$$l \approx \frac{0{,}001}{r_0/R - 0{,}001}(R - r_0).$$

Перейдем к вычислению массы наружного слоя. Из уравнений (7), исключив dr, находим

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{64\pi B}{c^2 r_0} r^3 (r - r_0) \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{10}$$

Здесь возможно дальнейшее упрощение. В области интегрирования $0 < x < x_0$, множитель $r^3(r - r_0)$ изменяется достаточно медленно, тогда как $\frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}$ испытывает большие изменения. Поэтому при оценке значения массы наружного слоя ΔM, мы можем медленно меняющуюся функцию $r^3(r - r_0)$ заменить ее средним значением и вынести из-под интеграла. Тогда, после интегрирования, получим

$$\Delta M = \frac{8\pi B}{c^2 r_0} r_1^3 (r_1 - r_0)\{x_0(2x_0^2 - 3)\sqrt{x_0^2+1} + 3\ln(x_0 + \sqrt{x_0^2+1})\}, \tag{11}$$

где $r_1 = R + l/2$ — среднее значение r.

В таблицах I и 2 приведены наиболее важные параметры гиперонных конфигураций, состоящих из идеального и реального газов барионов. В них $\varepsilon(0) = \rho(0)/c^2$ есть плотность массы в центре звезды. Значения радиуса R и массы M барионного ядра (т. е. центральной сферы, охватывающей гиперонное ядро и нейтронный слой) взяты из работы [4]. Массы конфигураций даны в единицах массы Солнца, а массы наружных оболочек — в граммах.

Авторы признательны академику В. А. Амбарцумяну за ценные замечания.

Ереванский государственный университет

Поступила 3 VII 1961

Գ. Ս. Սահակյան, Դ. Մ. Սեդրակյան

ԱՍՏՂԱՅԻՆ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ՀԻՊԵՐՈՆԱՅԻՆ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ հետազոտված է աստղային զանգվածների հիպերոնային կոնֆիգուրացիաների արտաքին շերտը։ Ինտեգրված են հավասարակշռության հավասարումները արտաքին շերտի համար։ Ինտեգրման հետևանքով ստացվել են՝ ճնշման և էներգիայի խտության նվազման օրենքները, ինչպես նաև արտաքին շերտի հաստությունն ու զանգվածը։

Արտաքին շերտի հաստությունը իդեալական բարիոնային գազից բաղկացած կոնֆիգուրացիաների համար գտնվում է 50-ից մինչև 500 մ սահման-

ներում, իսկ ատոմ բարիոնային գազից բաղկացած կոնֆիգուրացիաների համար՝ 5-ից մինչև 60 կմ սահմաններում։

Աստղի այդ շերտի զանգվածը, համեմատած ամբողջ կոնֆիգուրացիայի զանգվածի հետ, չափազանց փոքր է՝ այն $10^{22}-10^{25}$ գ կարգի թիվ է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян В. А.* и *Саакян Г. С.* О вырожденном сверхплотном газе элементарных частиц. „Астрон. Ж.“ 37, 193, 1960.
2. *Ландау Л. Д.* Origin of stellar energy. „Nature“, 141, 333, 1938.
3. *Oppenheimer J. R.* and *Volkoff C. M.* On Massive Neutron Cores. „Phys. Rev.“ 55, 374, 1939.
4. *Амбарцумян В. А.* и *Саакян Г. С.* О равновесных конфигурациях сверхплотных вырожденных газовых масс. „Астрон. ж.“ в печати, 1961 г.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

В. А. Санамян

Об одной возможности увеличения избирательности интерференционных радиотелескопов

Одной из основных характеристик радиотелескопов является степень их избирательности, т. е. возможности разделения близких источников и точного определения их координат.

На более коротких (сантиметровых и дециметровых) волнах высокая разрешающая сила в основном достигается прямым путем за счет увеличения размеров антенн радиотелескопов. На длинных волнах прямой путь увеличения разрешающей силы ограничен техническими трудностями строительства антенн очень больших размеров и высокая избирательность достигается косвенным путем, применением интерферометров различных систем.

В данной работе предлагается новый метод, который позволяет при заданных размерах антенны и базы радиоинтерферометра значительно увеличить его разрешающую способность.

Основная идея этого метода заключается в том, что прежде чем суммировать сигналы от двух антенн радиоинтерферометра, их предварительно усиливают, затем с помощью многократного нелинейного преобразования их возвышают в степень, после чего только суммируют на входе приемника.

§ 1. Анализ метода

Пусть две антенны радиоинтерферометра расположены на расстоянии „D" вдоль линии восток—запад, приемник помещен в середине между ними. Для простоты предположим, что обе антенны направлены по меридиану и остаются неподвижными, а источник радиоизлучения совершает свое видимое суточное движение и проходит через плоскость меридиана.

Обозначим напряжение сигнала источника радиоизлучения на входах антенн радиоинтерферометра соответственно через комплексные функции:

$$\dot{E}_1 = E(\theta) e^{j\omega_0 t}, \qquad \dot{E}_2 = E(\theta) e^{j(\omega_0 t + \varphi)},$$

где $E(\theta)$ — функция, зависящая от интенсивности радиоизлучения источника и диаграммы направленности антенн, ω_0 — круговая частота сигнала, θ — угол между направлениями на источник и плоскостью меридиана, φ — характеризует разность фаз между напряженностями полей, создаваемых источником в антеннах радиоинтерферометра, обусловленную разностью хода для двух антенн и выражается формулой

$$\varphi = \frac{2\pi D}{\lambda_0} \sin\theta. \tag{1.1}$$

Здесь λ — длина волны.

Если считать, что электрические длины кабелей от каждой антенны до приемника одинаковы, то напряжение на входе приемника от поступающей монохроматической волны, в обычном случае интерференции, выразится суммой

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = E_0(\theta)\,[1 + e^{j\varphi}]\,e^{j\omega_0 t}\ .$$

Когда входной прибор приемника реагирует, как это обычно бывает, на мощность, то показания его $P(\theta)$ будут пропорциональны величине

$$P(\theta) = |\,\dot{E}_1 + \dot{E}_2'\,|^2 = 2P_0\Phi_0(\theta)\,[1 + \cos\varphi], \tag{1.2}$$

где P_0 — мощность, которая попадала бы в приемник от одной эквивалентной ненаправленной антенны, $\Phi_0(\theta)$ — функция пропорциональная произведению характеристик направленности антенн.

Ширина лепестка интерференционной картины ψ, т. е. угловая ширина между двумя последующими максимумами, выражается формулой

$$\psi = \frac{\lambda_0}{D\cos\theta\cos\delta}\,, \tag{1.3}$$

где δ — склонение наблюдаемого источника.

Допустим теперь, что после предварительного усиления сигналы от обеих антенн радиоинтерферометра прежде чем их суммировать пропускаются через идентичные нелинейные четырехполюсники, в которых они путем многократного преобразования возвышаются в N степень. Тогда напряжение сигнала на входе приемника выразится формулой

$$\dot{E}_N = \dot{E}_1^N + \dot{E}_2^N = E_0^N(1 + \cos e^{jN\varphi})\,e^{jN\omega_0 t}$$

Для выходной мощности сигнала после аналитического преобразования получим

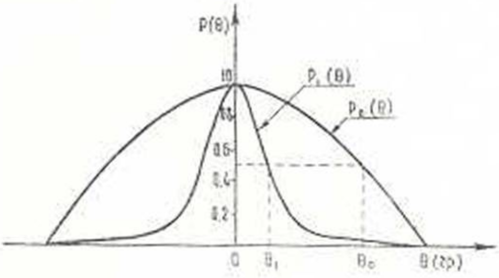
$$P_N(\theta) = \Phi_1(\theta)\,[1 + \cos N\varphi]; \qquad \Phi_1 = [P_0\Phi_0]^N. \tag{1.4}$$

Для значения ширины лепестков интерференционной картины будем иметь

$$\psi_N = \frac{\lambda_0}{DN\cos\theta\cos\delta} = \frac{\psi}{N}\,. \tag{1.5}$$

Из формул (1.4) и (1.5) следует, что:

а) После вышеуказанного преобразователя выходная мощность сигнала становится пропорциональной не произведению характеристик направленности антенн радиоинтерферометра, как и в обычном случае интерференции, а зависит от N-ой степени этого произведения. В результате этого резко усилится центральный максимум диаграмм, что эквивалентно сужению результирующей диаграммы направленности антенн радиоинтерферометра.



Фиг. 1.

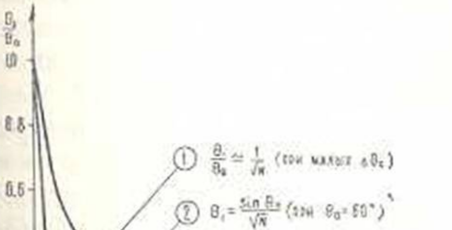
Связь между углами θ_0 и θ_1, соответствующими уровню половинных мощностей нормированных характеристик направленности Φ_0 и Φ_1, можно определить из соотношения (см. фиг. 1)

$$\Phi_0(\theta_0) = \Phi_1(\theta_1) = [\Phi_0(\theta_1)]^N.$$

В частности, когда основная диаграмма направленности приближенно выражается через косинус, то при достаточно малом значении θ_1 (или больших N) это соотношение выразится формулой

$$\theta_1 = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{N}}; \qquad \left(\text{при малых } \theta_0,\ \theta_1 \simeq \frac{\theta_0}{\sqrt{N}}\right),$$

т. е. при заданной начальной диаграмме направленности антенны ширина результирующей диаграммы обратно пропорциональна корню из числа N, на которое умножается частота основного сигнала.



Фиг. 2.

Кривая зависимости угла θ_1 от N приведена на фиг. 2. Ее крутизна уменьшается в сторону больших N. Следовательно, более эффективное сужение диаграммы имеет место при небольших значениях N.

б) Ширина лепестка результирующей интерференционной картины уменьшается в N раз по сравнению с шириной лепестка данного интерферометра. Это обусловлено так же тем, что при заданной базе радиоинтерферометра, для кратной волны скорость изменения фазы сигнала, принимаемого отдельными антеннами, больше, чем у фазы сигнала основной волны. Соответственно увеличивается скорость прохождения лепестков интерференционной картины.

Оба перечисленных результата преобразования, фактически, приводят к повышению разрешающей способности интерференционного радиотелескопа.

§ 2. О практическом осуществлении предлагаемого метода

Чтобы возвысить сигнал в N-ую степень практически достаточно, после каскада предварительного усиления, прибавить каскады, работающие в режиме умножения частоты, т. е. в нижней нелинейной части характеристики лампы. Если, в частности, характеристика каскада квадратичная, то на его выходе сигнал будет пропорционален квадрату приложенного на входе сигнала. Если вместо одного каскада использовать k таких последовательных каскадов, то сигнал может быть возведен в N степень, определяемую из соотношения

$$N = 2^k \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{2.1}$$

Разумеется, между двумя преобразующими каскадами [скажем $(p-1)$ и p] нужно произвести усиление сигнала с помощью резонансного усилителя, настроенного на частоте $p\omega_0$ $(p = 1, 2, \cdots)$. Усиление этих каскадов должно быть достаточно большим, чтобы шумы, вносимые последующим преобразователем, были возможно малы.

§ 3. Некоторые замечания

1. Предлагаемый метод пригоден также для радиоинтерферометра с переключением фазы. Однако, в этом случае, для изменения фазы сигнала в одном плече радиоинтерферометра на 180°, нужно менять его длину не на $\lambda_0/2$ как в обычном случае, а на величину $\lambda_0/2N$, где λ_0 — длина применяемой волны до преобразования.

Переменная составляющая выходной мощности в этом случае будет определяться формулой

$$P_{\sim N} = 4[P_0\Phi_0(\theta)]^N \cos N\varphi. \tag{3.1}$$

2. Описанный выше способ „сужения" диаграммы антенны радиоинтерферометра пригоден также и для радиотелескопов с одиночными антеннами. В статье этот вопрос не обсуждается в общем виде только потому, что применение этого метода более эффективно в случае приема радиоизлучения на длинных волнах, на которых, в основном, применяются радиоинтерферометры различных типов.

3. В процессе вышеуказанного преобразования будут подавляться сигналы, принимаемые по направлению боковых лепестков диаграммы антенны радиотелескопа. Например, для синфазной антенны, состоящей из 8-ми элементов, расположенных вдоль одной линии, интенсивность первого бокового лепестка по мощности составляет

около 4% от интенсивности главного лепестка. После выполнения же, скажем, однократного преобразования, интенсивность будет составлять всего $0{,}6\%$, а при двукратном преобразовании—$0{,}00025\%$.

4. Предлагаемый метод может оказаться очень практичным, когда одно и то же зеркало антенны используется для приема сигнала на различных длинах волн путем смены системы облучения. В этом случае основной приемник, фазопереключающее устройство и различные согласующие элементы можно без изменения использовать для приема сигналов различных длин волн. Например, если основная приемная аппаратура работает на длине волны λ_0, то последовательно настраивая приемную антенну на длину волн $2\lambda_0$, $4\lambda_0$.. и соответственно добавляя $1, 2 \cdots$ каскадов квадратичных преобразователей, ее можно без изменения использовать для приема сигнала на этих кратных длинах волн. Задача более упрощается, когда антенна сама широкополосная.

5. При каждом преобразовании будет меняться отношение шума к сигналу, как это имеет место при любом преобразовании частот. Этот вопрос, разумеется, требует самостоятельного исследования. Однако, можно сказать, что если производится достаточно большое предварительное усиление на основной частоте УВЧ, то шум-фактор всего тракта в основном будет зависеть от шум-фактора предусилителя. Кроме того, когда вопрос относится к приему сигнала, мощность которого превышает порог чувствительности, отнесенной к входу усилителя первой основной частоты (а на практике радиоастрономических наблюдений мы чаще всего имеем дело с такими сигналами), то можно показать, что в процессе вышеуказаного преобразования отношение шума к сигналу не только не ухудшается, а, наоборот, может улучшаться, если шумы, вносимые самим преобразователем, не велики.

6. Применение указанного преобразования сигнала открывает новые возможности для измерения угловых размеров космических источников радиоизлучения. Для этой цели, вместо обычно применяемого радиоинтерферометра с переменными базами, можно использовать радиоинтерферометр с постоянной базой, но производить разное число преобразований сигналов.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР Поступила 8 IV 1961

Վ. Ա. Սանամյան

ԻՆՏԵՐՖԵՐԵՆՑԻՈՆ ՌԱԴԻՈԴԻՏԱԿՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԸՆՏՐՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵԾԱՑՄԱՆ ՄԵԿ ՀՆԱՐԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Առաջարկվում է նոր մեթոդ, որը հնարավորություն է ստեղծում ռադիոինտերֆերոմետրերի անտենաների տրված չափերի դեպքում, զգալիորեն մեծացնել նրա տարածական ընտրողականությունը։

Մեթոդի հիմնական սկզբունքն այն է, որ ինտերֆերոմետրի անտենաների ընդունած ազդանշանները, նախքան նրանց գումարելը, ոչ գծային քառաբևեռների օգնությամբ N աստիճան են բարձրացվում, հետո գումարվում ընդունիչի մուտքում: Այդ ժամանակ ազդանշանի ամպլիտուդան, որը համեմատական է անտենայի ուղղվածությանը, N աստիճան է բարձրացվում, իսկ փազաների տարբերությունը, որը կախված է ճառագայթող աղբյուրի անտենաների նկատմամբ ունեցած դիրքից, բազմապատկվում է N-ով: Որպես հետևանք անտենաների էկվիվալենտ դիագրամը նեղանում է $\sqrt{N}$ անգամ, իսկ ինտերֆերենցիոն պատկերի թերթիկի լայնությունը՝ N անգամ:

Արվում են դիտողություններ քննարկվող մեթոդը ռադիոաստղագիտական դիտումների համար կիրառելու հնարավորությունների մասին:

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

Г. М. Товмасян, Р. К. Шахбазян

Об отождествлении космических радиоисточников

§ 1. Введение

Со времени открытия дискретных космических источников радиоизлучения проблема отождествления с оптическими объектами и выяснения природы радиоисточников продолжает оставаться одной из важнейших в современной радиоастрономии.

Известно, что существуют два класса радиоисточников [1]. К I классу относятся протяженные радиоисточники, являющиеся, как правило, членами нашей Галактики и расположенные вдоль плоскости Млечного Пути. Из них к настоящему времени отождествлено всего десять радиоисточников [2, 3]. Это остатки сверхновых I и II типов, например, Крабовидная туманность, туманность в Кассиопее (радиоисточник Кассиопея-А), Волокнистые туманности в Лебеде и др. Многочисленные радиоисточники класса II, вопросу отождествления которых посвящена настоящая работа, равномерно распределены по небу и, поэтому, вполне вероятно, что эти радиоисточники имеют внегалактическое происхождение (за исключением некоторых более протяженных объектов, которые могут принадлежать сферической составляющей нашей Галактики). Однако, пока лишь только очень небольшое количество этих радиоисточников отождествлено с определенными галактиками. Основной трудностью является все еще низкая точность определения координат радиоисточников.

Произведенные отождествления показали, что очень мощными радиоизлучателями являются пекулярные галактики: двуядерная галактика в Лебеде, интересные галактики в Персее (NGC 1275) и Центавре (NGC 5128), замечательная галактика в Деве (NGC 4486) и др., а также тесные двойные и кратные системы эллиптических галактик [3, 4]. К настоящему времени с пекулярными и тесными двойными галактиками отождествлено около двух десятков радиоисточников [3, 5, 6]*. Отношение мощности радиоизлучения к мощности оптического излучения пекулярных галактик порядка 10^{-3}, а в случае Лебедя-А это отношение близко к единице [7]. Нормальные галактики типов S_b и S_c имеют небольшую радиоизлучательную способность. Для них отношение радио и оптического излучений в

* В стадии окончания настоящей работы нами была получена статья Миллса [36], в которой приводится еще около двадцати отождествлений с тесными двойными Е галактиками.

тысячи раз меньше, чем у пекулярных галактик. Одиночные нормальные галактики S_0 и E являются еще более слабыми радиоизлучателями [8, 9].

После отождествления Бааде и Минковским интенсивного радиоисточника Лебедь-А со слабой двуядерной галактикой ими была высказана гипотеза, по которой мощное радиоизлучение галактик объясняется случайным столкновением двух галактик [10]. В. А. Амбарцумян в ряде работ [11, 12, 13] подверг критике теорию случайного столкновения и предложил гипотезу деления галактик. Согласно В. А. Амбарцумяну, мощное радиоизлучение возникает при бурных нестационарных процессах, имеющих место при делении ядра галактики или выбрасывании из него некоторой массы и последующем удалении вновь образованного ядра или сгустка через первоначально существующую галактику. Именно этим объясняется наличие интенсивного радиоизлучения у радиогалактик Лебедь-А, Центавр-А, Персей-А и др. В случае радиоисточника Дева-А непосредственно наблюдается вопрос из ядра NGC 4486 вещества в виде струи, содержащей сгустки, причем бо́льшая часть радиоизлучения ассоциирована со струей [14]. Существенным в этих представлениях является то, что радиоизлучение возникает как результат активной деятельности ядра сверхгигантской галактики на некоторых этапах развития этого ядра.

Как известно, большинство галактик, и в особенности галактик, обладающих высокой светимостью, входит в состав скоплений галактик. С другой стороны, все те пекулярные галактики, которые уверенно отождествлены с радиоисточниками, входят в состав довольно заметных скоплений в качестве самого яркого или по крайней мере одного из самых ярких членов соответствующего скопления.

Приведенные соображения говорят о том, что при отождествлении радиоисточников класса II естественно искать соответствующие оптические объекты в скоплениях галактик. И если верно, что процессы выброса галактики-спутника или выделения из ядра галактики некоторой массы сопровождаются интенсивным радиоизлучением, то следует ожидать, что на месте радиоисточников будут обнаружены пекулярные, а также тесные двойные эллиптические галактики, занимающие преимущественно центральное положение в скоплениях галактик.

В силу изложенного, целесообразнее к решению задачи отождествления радиоисточников подойти иным, чем принято, методом, разделив процесс отождествления на две части: 1) отождествление радиоисточника со скоплением галактик и 2) выделение того члена скопления, который является ответственным за радиоизлучение. При таком поэтапном методе отождествления возрастает уверенность в правильности произведенного отождествления, хотя выделенный член скопления может иногда и не совпадать точно с радиоисточником. Причиной этого может быть, как было отмечено, низкая точность определения координат радиоисточников. Однако возможна и другая причина. Известны случаи, когда изображение радиоисточника заметно отличается от изображения отождествляемого с ним оптического объекта. Например, радиоисточник Лебедь-А, отождествленный с объектом, имеющим протяженность около 30″, состоит из двух дисков по 40″, удаленных друг от друга на расстояние около 90″ [15]. Не вызывает сомнения отождествление радиоисточника Центавр-А с NGC 5128. Однако, если оптический объект имеет протяжение в 31′, то радиоисточник содержит две симметричные массы, в которых сосредоточено 75% радиоизлучения, и центры тяжести которых удалены друг от друга на 4°, что при расстоянии в $6 \cdot 10^6$ парсеков соответствует $4 \cdot 10^5$ парсекам [16, 17]. Центральная область также имеет сложную структуру, состоя из двух сгущений по 2′,5 на расстоянии 5′ друг от друга [18]. Полное протяжение источника порядка 10^6 парсеков, что больше, чем взаимные расстояния галактик в скоплениях. По недавним наблюдениям Болтона [19] источник Геркулес-А отождествлен с эллиптической галактикой и протяженность несимметричного по отношению к галактике радиоисточника порядка взаимных расстояний между галактиками в скоплениях галактик. В этом случае центр тяжести радиоизображения не совпадает с центром оптического изображения*. Помимо этого имеются отдельные, правда неподтвержденные, указания на такие случаи радиоизлучения от скоплений галактик [20, 21, 22]**, когда интенсивность радиоизлучения скопления больше суммы интенсивностей радиоизлучений нормальных галактик, составляющих скопление [20]. По-видимому это может быть объяснено протяженными гало пекулярных галактик типа Центавра-А.

§ 2. Отождествление радиоисточников со скоплениями галактик

В настоящей работе отождествление радиоисточников II класса с индивидуальными галактиками проведено двумя этапами на основе исследования связи радиоисточников со скоплениями галактик. Вначале мы попытались исследовать статистически вопрос о реальности физической связи между радиоисточниками и скоплениями галактик и уже потом, после доказательства наличия такой связи, были предприняты поиски соответствующих объектов в скоплениях галактик, ответственных за радиоизлучение. Для решения поставленной задачи были использованы каталог скоплений галактик Абеля [23] и сиднейский (MSH) [21] и два кембриджских [24, 25], (2C и 3C) списка радиоисточников. Для уточнения координат радиоисточников третьего кембриджского обзора неба были использованы также работы Элсмора и др. (ERL) [26] и Харриса и Робертса (HR) [27].

Поскольку мы задались целью произвести отождествления радиоисточников II класса, то из списков радиоисточников были исключены радиоисточники, расположенные вдоль плоскости Галактики и были рас-

* *Примечание при корректировке.* Виллиамс, Дюхерст и Десли (Obs., 82... 1961) отождествили радиоисточник Геркулес—А, состоящий из двух компонент почти одинаковой интенсивности (A. Boishot, 13 th General Assembly URSI, London, 1960), с двойной галактикой 18-й величины. Расстояние между компонентами около 400 кпс.

** В отмеченной работе Милласа [36] произведено около полусотни отождествлений радиоисточников со скоплениями галактик без конкретного указания галактики, ответственной за радиоизлучение.

смотрены только те, которые находились вне этой плоскости. Границы исключенной из исследования области неба взяты те же, которые даны Абелем [23] для области ненадежно определенных (из-за высокой плотности звезд и наличия большого поглощения) скоплений галактик. Границы исключенной области вдоль Млечного Пути приведены в табл. 1.

Таблица 1

l	b	l	b
0°—10°	+40°	0—80	−35°
10—60	+35	80—160	−30
60—150	+25	160—200	−25
150—210	+30	200—340	—
210—360	+40	340—360	−35

Таким образом, распеределение радиоисточников и скоплений галактик было исследовано в общей для радиоисточников и скоплений галактик области неба (от $\alpha = 00^h$ до $\alpha = 24^h$ и от $\delta = -27°$ до $\delta = +83°$) за вычетом указанной выше полосы вдоль галактического экватора. Поверхность рассмотренной области несколько больше 13000 кв. град.

Помимо исключения из списков радиоисточников тех из них, которые могли принадлежать I классу радиоисточников, были исключены из рассмотрения также и слабые, ненадежные радиоисточники. После произведенного отбора в исследованной области неба оказалось 135 радиоисточников сиднейского списка, мощность радиоизлучения которых выше $20 \cdot 10^{-26}$ *ватт гц*$^{-1}$*м*$^{-2}$. Реальность этих источников установлена Арчером и др. [28], а также Эджем и др. [29] в результате сравнения сиднейского списка с третьим кембриджским списком радиоисточников. Из второго кембриджского списка было отобрано 102 радиоисточника, попадающих в исследуемую область и имеющих мощности выше $40 \cdot 10^{-26}$ *ватт гц*$^{-1}$*м*$^{-2}$. На большую реальность таких источников указано в тех же работах [28, 29]. Из списка 2С были исключены также те радиоисточники, ошибки измерений которых значительно превосходили средние ошибки измерений. Из списка 3С в исследование включено 153 радиоисточника с мощностью выше $10 \cdot 10^{-26}$ *ватт гц*$^{-1}$*м*$^{-2}$. Нижний предел мощности надежных источников указан как самими авторами обзора, так и Костейном и Смитом [30].

В результате всего этого для наших исследований мы получили некоторый рабочий каталог относительно интенсивных и сравнительно достоверных радиоисточников, содержащий 390 объектов.

В каталоге Абеля все скопления галактик подразделены на 7 групп по расстояниям. Расстояния скоплений определены по видимой величине десятой по яркости галактики каждого скопления. По причине трудности обнаружения скоплений при их большой близости за нижний предел расстояний скоплений, включенных в каталог, принято расстояние скоплений, звездная величина десятого по яркости члена которых равна $13^m_{,}3$. Верхний предел расстояний ограничен предельной звездной величиной паломарских карт (20^m). Мы ограничились более близкими яркими скоплениями, вплоть до пятой группы скоплений Абеля включительно. Звездная величина десятой по яркости галактики скоплений этой группы находится в пределах $16^m_{,}5-17^m_{,}2$. Число использованных в нашей работе скоплений галактик равно 1215.

Для выяснения наличия физической связи радиоисточников со скоплениями галактик подсчитано количество совпадений радиоисточников со скоплениями галактик и вычислено математическое ожидание совпадений при допущении равномерного случайного распределения обоих объектов. При заметном превышении числа совпадений над математическим ожиданием можно с уверенностью говорить о реальной физической связи радиоисточников и скоплений галактик.

Радиоисточник принимался совпавшим со скоплением галактик, когда поверхность, ограниченная ошибками определения координат радиоисточника, перекрывалась хотя бы частично (или, в худшем случае, касалась) поверхностью скопления. Ожидаемое количество случайных совпадений можно рассчитать по формуле

$$P = \frac{\pi (r+R)^2}{S} nN,$$

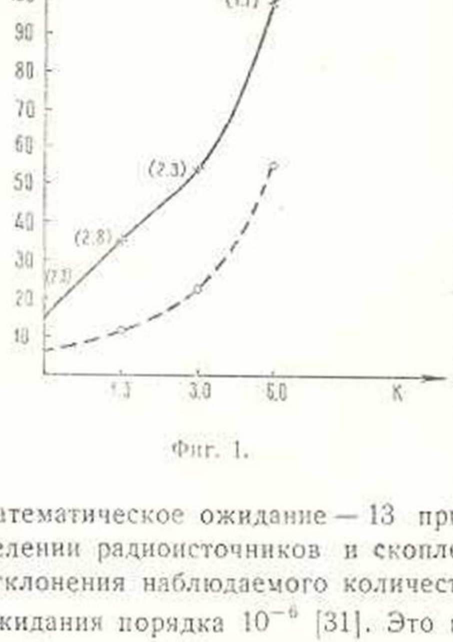
где r — радиус круга, равновеликого поверхности вероятного расположения радиоисточника, определяемой по ошибкам измерений координат радиоисточника, R — видимый радиус скопления галактик, n — число радиоисточников, N — число скоплений галактик, S — площадь исследованной области. Видимый радиус скоплений галактик был определен на основе принятого Абелем среднего линейного радиуса скоплений при учете их расстояний, определяемых по звездным величинам десятой по яркости галактики скоплений. Проверкой на паломарских картах было установлено, что определенный таким образом видимый радиус скопления не намного отличается от действительного.

Согласно приведенной формуле, математическое ожидание совпадений зависит от размеров области вероятного расположения радиоисточников, обусловленных ошибками измерения координат радиоисточников. И поскольку в списках радиоисточников даны соответствующие ошибки измерения координат, то казалось бы, что при расчетах нужно использовать именно эти данные. Однако, сравнение различных списков показывает, что координаты одного и того же радиоисточника, зарегистрированного в этих списках, иногда отличаются друг от друга на величины, в несколько раз превосходящие указанные в списках ошибки измерения координат. Это говорит о том, что координаты радиоисточников вообще измерены с бóльшей неточностью, чем указывается в соответствующих списках.

Поэтому правильнее будет принять, что действительная величина ожидаемой ошибки r отличается некоторым множителем k от ошибки r_0, приведенной в списке, т. е. $r = kr_0$. При существовании физической связи между радиоисточниками и скоплениями галактик число совпадений обоих объектов друг с другом должно значительно превышать математическое ожидание совпадений. Однако если координаты радиоисточников измерены с ошибками и если k взято необоснованно малым, то число совпадений может быть меньше действительного. При правильном значении k количество совпадений может быть близким к истинному числу реальных совпадений. Если же для k принять непомерно большие значения, то очевидно, что начнут преобладать случайные совпадения и тогда математическое ожидание совпадений и количество полученных из сравнения совпадений должны быть приблизительно одинаковы. Таким образом открывается возможность по максимальному отношению количества совпадений к математическому ожиданию судить о точности измерений координат радиоисточников.

Нами расчеты были проведены для следующих четырех случаев: $k=0$, $k=1{,}5$, $k=3$ и $k=6$. В каждом из четырех вариантов, при перекрывании по какой-либо координате области неопределенности радиоисточника одного списка областью неопределенности того же радиоисточника другого списка, учитывалось более точное определение координаты. Соответственно, из общего количества радиоисточников вычиталось количество совпавших радиоисточников.

Результаты расчетов приведены на фиг. 1. Пунктирной линией приведена построенная по четырем точкам кривая зависимости математического ожидания случайных совпадений радиоисточников со скоплениями галактик от множителя k. Сплошной же линией представлена такая же зависимость для числа получившихся совпадений. В скобках указаны отношения A количества совпадений к математическому ожиданию при соответствующем k.



Фиг. 1.

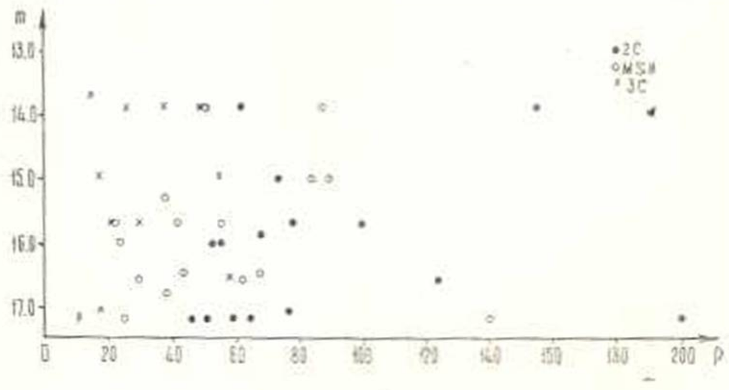
Рассмотрение фигуры показывает, что максимальное отношение количества совпадений к математическому ожиданию получается тогда, когда $k = 1{,}5$. В этом случае число радиоисточников, совпавших со скоплениями галактик — 36 почти в три раза выше, чем математическое ожидание — 13 при равномерном случайном распределении радиоисточников и скоплений галактик. Вероятность такого отклонения наблюдаемого количества совпадений от математического ожидания порядка 10^{-6} [31]. Это говорит о том, что *на самом деле имеет место физическая связь радиоисточников со скоплениями галактик, а не случайное проектирование.*

При меньших или больших значениях k отношение A убывает. В первом случае это указывает на то, что полностью не учитываются ошибки измерения координат радиоисточников. Во втором случае уменьшение отношения A говорит о возрастании количества действительно случайных совпадений. Очевидно, что при дальнейшем увеличении k отношение A должно стремиться к единице.

Исходя из полученных результатов можно полагать, что реальные ошибки измерения координат радиоисточников в среднем около 1,5 раз превосходят ошибки, приводимые в списках радиоисточников.

Таким образом, допустив, что координаты радиоисточников измерены с ошибками около полутора раз большими, чем приводится в списках радиоисточников, из 351 радиоисточника всех трех списков 36 радиоисточников было отождествлено со скоплениями галактик. Возможно, что некоторые из них результат случайного проектирования.

Была сделана попытка найти зависимость между интенсивностью радиоисточника и его расстоянием, определенным по отождествляемому с ним скоплению галактик. Рассмотрение фиг. 2, на которой по оси абсцисс



Фиг. 2.

отложены мощности радиоисточников, а по оси ординат звездные величины десятой по яркости галактики скоплений галактик, отождествляемых с радиоисточниками, указывает на значительную дисперсию мощностей радиоисточников и очень слабую корреляцию между расстоянием источника и его мощностью. Однако, среднее значение логарифмов мощностей источников, отождествленных со скоплениями галактик, выше среднего значения логарифмов мощностей всех радиоисточников, включенных в исследование. В табл. 2 приведены соответствующие значения логарифмов средних мощностей по отдельным спискам радиоисточников (при определении средних значений логарифмов мощностей радиоисточников не принята в расчет мощность радиоисточника Дева-А, значительно превышающая мощности всех других радиоисточников). Таким образом, с видимыми скоплениями галактик отождествлены в среднем более интенсивные источники.

Таблица 2

		2C	MSH	3C
lg *P*	для отождествленных радиоисточников	−24,13	−24,39	−24,60
	для всех радиоисточников	−24,45	−24,48	−24,76

В недавней работе Миллса [36] приводится 55 отождествлений радиоисточников со скоплениями галактик. Из них только 8 отождествлены и нами. Различие результатов объясняется различием примененного материала. Миллс использовал все 1159 радиоисточников сиднейского списка У нас же использован 351 достоверный радиоисточник трех различных списков, большая часть которых находится вне исследованного Миллсом пояса неба.

§ 3. Отождествление радиоисточников в скоплениях галактик

После того как была установлена реальность физической связи радиоисточников со скоплениями галактик, были предприняты поиски индивидуальных галактик в скоплениях галактик, ответственных за радиоизлучение. С этой целью все 36 скоплений галактик были просмотрены на паломарских картах. При этом особое внимание обращалось на наличие на месте или в окрестностях радиоисточников пекулярных галактик (тесных двойных, галактик со струями или выбросами, аномальных галактик), которые, согласно приведенным в § 1 соображениям, должны, по-видимому, быть источниками интенсивного радиоизлучения. Результаты просмотров приведены в табл. 3. В последнем столбце таблицы даны оценки надежности отождествлений. Радиоисточник считался хорошо отождествленным с указанной галактикой в данном скоплении, когда галактика находится в области вероятного расположения радиоисточника. При определении размеров этой области ошибки измерения координат радиоисточников взяты, как это следует из предыдущего, в полтора раза выше табличных. За удовлетворительное отождествление приняты случаи, когда галактика находится вне области неопределенности положения радиоисточника в пределах 2′—3′ от границ области. При посредственном отождествлении подозреваемая в радиоизлучении галактика находится на расстоянии до 10′ от границ области вероятного расположения радиоисточника. За вероятное отождествление приняты случаи, когда радиоисточник находится в области довольно слабого скопления, о членах которого трудно что-либо сказать. В качестве мало вероятных отмечены случаи, при которых в непосредственной близости от области вероятного места радиоисточника в скоплении галактик не обнаружены какие-либо примечательные объекты или когда при непосредственном рассмотрении паломарских карт выяснилось плохое отождествление радиоисточника со скоплением галактик.

Отбросив вероятные и мало вероятные отождествления мы видим, что в 29 случаях из 36 радиоисточники довольно надежно отождествляются с

№	Координаты радиоисточника		Список, № радиоисточника	Координаты галактики	
	α (1950)	δ (1950)		α (1950)	δ (1950)
1	2	3	4	5	6
1*	$00^h30^m,8$	05°53′	MSH 00+7	$00^h31^m,5$	06 04′
2	00 39,2	−09 43	MSH 00−11	00 39,3	−09 44
3	00 54,1	−10 23	2C76	00 53,6	−10 17
4*	00 55,0	−01 35	3C29	00 53,7	−01 30
5	01 06,0	−16 18	3C32	01 06,7	−16 20
6	01 06,2	13 05	3C33	01 06,8	12 56
7*	01 23,6	−01 32	3C40	01 23,5	−01 36
8	01 50,7	−04 17	3C53	01 50,5	−04 20
9	02 35,4	−19 42	MSH 02−10	02 34,6	−19 36

Таблица 3

№ скопления каталога Абеля	Примечания	Оц-ка надежности отождествления
7	8	9
55	Тесная тройная система Е галактик, погруженная в диффузную материю. Находится в центре скопления.	удовл.
85	Тесная двойная Е галактика в южной части скопления. Яркая компонента кажется сверхтесной двойной.	хорошо
117	Центральная галактика скопления, по виду напоминает NGC 1275.	удовл.
119	Эллиптическая галактика, компонента пары галактик в центре скопления. В скоплении имеются несколько тесных двойных. Источник протяженный.	поср.
151	Тесная двойная Е галактика в южной части скопления.	поср.
150	Центральная Е галактика скопления, сходная с NGC 1275.	удовл.
194	Тесная двойная эллиптическая галактика NGC 545/547.	хорошо
266	Очень тесная двойная Е галактика в центре скопления. Возможно, что это одна Галактика с двумя симметричными струями.	хорошо
367	Тесная двойная галактика. Одна из двух центральных галактик скопления.	поср.

1	2	3	4	5	6
10*	02 55,1	05 52	3C75	02 55,3	05 52
11*	04 32,0	−13 26	MSH 04−12	04 31,5	−13 21
12	08 07,2	35 04	2C722	08 07,2	35 22
13	09 55,5	19 32	2C852	09 55,3	19 30
14	10 08,6	06 32	MSH 10+02	10 10,0	06 39
15	10 54,0	02 09	MSH 10+10	10 55,4	01 59
16	11 32,7	−11 52	2C1006	11 32,8	−13 17
17	11 42,6 11 40,8	20 00 19 20	3C264 ERL	11 41,4	20 14
18	11 42,9	31 46	3C265	11 42,1	31 10
19	11 41,8	16 31	2C1013	11 42,8 11 41,8 11 41,9	15 48 15 55 16 49

(продолжение табл. 3)

7	8	9
400	Тесная двойная Е галактика в центре скопления.	удовл.
496	Эллиптическая галактика в центре скопления. По виду напоминает NGC 1275.	удовл.
628	Сверхтесная двойная Е галактика, компонента пары центральных галактик скопления.	хорошо
903	Очень тесная двойная, а возможно и одна эллиптическая галактика, разделенная поглащающей полосой. Находится в центре слабого скопления, расположенного на 20′ южнее скопления А 903.	хорошо
949	Несколько пекулярная эллиптическая галактика в центре скопления. Кажется имеет слабый выброс.	поср.
1139	Тесная тройная система сферических галактик, погруженная в диффузную среду.	поср.
1317	Сверхтесная двойная Е галактика в центре скопления.	хорошо
1367	Тесная двойная эллиптическая галактика NGC 3841/3842 в центре скопления.	поср.
1365	Приведены координаты центра скопления.	м. вер.
1371	а) Сверхтесная двойная галактика, находится западнее центра скопления. б) Яркая сферическая галактика вне скопления. в) Яркая Е галактика NGC 3853 вне скопления.	удовл.

1	2	3	4	5	6	7
20	11 50,2	55 20	2C1016	11 49,1	55 22	1400
21	12 39,8	−04 39	3C275	12 39,2	−04 33	1588
22	12 57,0	−17 16	MSH 12−19	12 56,8	−17 16	1644
23	13 24,7	59 14	2C1110	13 24,7	59 33	1744
24	14 42,3	55 47	2C1231	14 42,1	55 40	1962
25	15 07,8	08 09	3C313	15 07,5	07 55	2028
26*	15 08,6	06 08	MSH 15+03	15 08,7	05 56	2029
27	15 10,0	07 30	2C1270	15 09,2	06 32	2033

(продолжение табл. 3)

8	9
Приведены координаты центра слабого скопления. К западу и востоку от скопления находятся две эллиптические галактики, напоминающие NGC 1275. Радиоисточник является, по-видимому, блендой всех этих объектов.	вероят.
Приведены координаты центра слабого скопления.	вероят.
Пекулярная галактика, напоминающая по виду NGC 1275, одна из сравнительно ярких галактик скопления. Возможно, что имеет слабый выброс в виде струи. В скоплении есть несколько тесных двойных. Радиоисточник протяженный.	хорошо
Тесная двойная галактика, компонента пары эллиптических галактик в центре скопления.	хорошо
Очень тесная двойная эллиптическая галактика. Компонента пары галактик в северной части скопления.	удовл.
Аномальная эллиптическая галактика, напоминающая NGC 1275. Одна из сравнительно ярких членов скопления.	удовл.
Центральная галактика скопления, сходная с NGC 1275.	удовл.
а) Сверхтесная двойная галактика в центре скопления, являющаяся компонентой тесной двойной, которая в свою очередь является компонентой не тесной пары галактик.	удовл.

1	3	3	4	5	6	7	8	9
				15 10,5	07 36	2040	б) Три сферические галактики, погруженные в диффузную среду в центре скопления. В скоплении находится также очень тесная тройная галактика. Область вероятного расположения радиоисточника охватывает оба скопления.	
28*	15 14,3	07 11	3C317	15 14,5	07 10	2052	Аномальная эллиптическая галактика в центре скопления. Наблюдения [26] на месте этого источника дают два источника с координатами: 1) $\alpha=15^h14^m,3$, $\delta=7°12'$ и 2) $\alpha=15^h15^m,3$, $\delta=07°52'$.	хорошо
29	15 21,0	01 25	2C1291	15 21,7	01 12	2066	Приведены координаты центра скопления.	вероят.
30	15 36,0	13 08	2C1315	15 35,9	12 21	2101	Приведены координаты центра слабого скопления.	вероят.
31	16 14,2	30 09	3C332	16 10,7	29 39	2162	Приведены координаты центра слабого скопления.	м. вер.
32	16 26,9	39 38	3C338	16 27,0	39 37	2199	Двойная E галактика NGC 6166 в центре скопления.	хорошо
33	21 33,5	−15 26	2C1292	21 33,4	−15 08	2354	Тесная двойная галактика в южной части скопления.	хорошо
34	22 34,2	−19 32	2C1865	22 34,2	−15 54	2459	Две сравнительно яркие эллиптические галактики. Область возможного расположения радиоисточника охватывает и скопление A2456, в центре которой с координатами $\alpha=22^h32^m,7$, $\delta=15°32'$ находится тесная двойная E галактика.	хорошо
35	22 53,4	13 06	3C455	22 53,4	13 12	2506	Приведены координаты центра слабого скопления.	вероят.
36	23 22,6	−12 29	MSH 23−12	23 22,7	−12 22	2597	Центральная галактика скопления. По виду напоминает NGC 1275.	хорошо

* Радиоисточник отождествлен Миллсом [36] с соответствующим скоплением.

определенными галактиками в скоплениях галактик. За исключением нескольких галактик, это в основном тесные и сверхтесные пары эллиптических галактик, а также аномальные E галактики, напоминающие по виду изображение NGC 1275 на паломарских картах. При этом в большинстве случаев (в 21 из 29) источником радиоизлучения является наиболее яркий, центральный член скопления галактик.

Среднее значение логарифмов мощностей надежно отождествленных радиоисточников еще выше, чем при подсчете той же величины для всех источников, отождествленных вообще со скоплениями галактик.

Как отмечалось выше, у нас имеется 8 отождествлений радиоисточников со скоплениями галактик, которые отождествлены также в Миллсом. В шести из них как Миллсом, так и нами указаны одни и те же галактики, ответственные за радиоизлучение. Для двух других скоплений отождествления с конкретными галактиками, членами этих скоплений, у Миллса отсутствуют. Нужно заметить, что у Миллса вообще только 9 радиоисточников из 55, отождествленных со скоплениями галактик, отождествлены конкретно с одним из членов этих скоплений. Такое малое количество отождествлений с индивидуальными галактиками в скоплениях может быть объяснено тем, что Миллс не производил поисков, ответственных за радиоизлучение объектов в большинстве из отождествленных с радиоисточниками скоплений галактик. Для отождествления радиоисточников со скоплениями галактик он использовал все радиоисточники своего списка. А с целью отождествления с галактиками он использовал только 400 более мощных источников, расположенных вне пояса Млечного Пути (исключена область с $b > |12^{\circ},5|$). И, таким образом, только для 18 радиоисточников, отождествленных со скоплениями галактик, произведены поиски ответственного за радиоизлучение члена скопления. Как было сказано, в 9 случаях обнаружена соответствующая галактика.

§ 4. Отождествление радиоисточников вне скоплений галактик

Для получения несколько более полного представления о природе радиоисточников была сделана попытка произвести отождествления также и некоторого количества радиоисточников, расположенных вне включенных в список Абеля скоплений галактик. С этой целью на паломарских картах были просмотрены области вероятного расположения наиболее достоверных радиоисточников третьего кембриджского списка, которые были наблюдены также Харрисом и Робертсом [27]. В исследованной нами области неба находятся 45 таких источников, один из которых — известный радиоисточник Дева-А. Среднее значение мощности этих радиоисточников в 1,7 раза выше средней мощности радиоисточников списка 3С, включенных в наше исследование (без учета мощности радиоисточника Дева-А, значительно превышающей мощности всех других источников). Из этого количества 10 радиоисточников уже было отождествлено со скоплениями галактик или отдельными галактиками близ скоплений, так что в итоге

№№	Координаты радиоисточника		Список. № радиоисточника	Координаты галактики	
	α (1950)	δ (1950)		α (1950)	δ (1950)
1	$00^h36^m37^s$	−02°16′	3C17	$00^h36^m46^s$	− 2°19′
2	00 53 09	26 08	3C28	00 53 23	26 02
3	01 18 06	−15 55	3C38	01 18 09	−15 56
4	01 33 42	20 42	3C47	01 33 52	20 46
5	02 20 15 02 19 49	42 51 42 45	3C66 HR18	02 20 02 02 19 48	42 46 42 47
6	11 41 11	31 49	2C1012	11 40 00	31 44
7	11 42 54	31 46	3C265	11 43 00	31 34
8	12 16 55 12 16 49	06 15 06 07	3C270 HR52	12 16 50	06 07
9	12 26 44	02 22	3C273	12 26 40	02 27
10	12 28 18	12 40	3C274	12 28 18	12 40
11	12 52 00	−12 25	3C278	12 51 57	−12 18
12	15 02 48	26 14	3C310	15 02 48	26 14
13	15 11 32	26 19	3C315	15 11 33	26 18
14	15 19 30	07 55	MSH 15+7	15 19 23	07 54
15	16 00 01	02 05	3C327	15 59 56	02 06
16	16 41 33 16 41 57	40 11 39 54	3C345 HR74	16 41 43	39 54

Таблица 4

Примечание	Оценка и-и от-ия
Галактика по виду напоминает NGC 1275. Находится в центре очень слабого скопления галактик.	удовл.
Двойная Е галактика в центре скопления.	удовл.
Яркая эллиптическая галактика.	хорошо
Сферическая и эллиптическая галактики, составляющие пару.	хорошо
Двойная галактика в центре скопления. Одна из галактик имеет слабую очень тесную компоненту (возможно звезда). Вторая галактика несколько аномальна.	хорошо
Сверхтесная пара эллиптических галактик.	удовл.
Эллиптическая галактика с двумя симметричными струями.	хорошо
Эллиптическая галактика NGC 4261.	хорошо
Центральная Е галактика очень слаб. скопл.	хорошо
NGC 4486.	хорошо
Тесная двойная эллиптическая галактика NGC 4782/4783.	хорошо
Двойная эллиптическая галактика в центре скопления.	хорошо
Тесная двойная Е галактика в центре слабого скопления.	хорошо
Аномальная эллиптическая галактика NGC 5920, напоминающая по виду NGC 1275.	хорошо
Эллиптическая галактика в центре слабого скопления.	хорошо
Аномальная эллиптическая галактика.	удовл.

рассмотрены области 34 источников. Оказалось, что 11 из них, а именно 3С 17, 28, 66, 227, 283, 287, 310, 315, 444, 445, 446 попадают в области далеких слабых скоплений галактик, не включенных в наше исследование или отсутствующих в каталоге Абеля. В семи случаях радиоисточники отождествляются с центральными наиболее яркими членами этих скоплений. Четыре из них тесные двойные, одна пекулярная галактика, несколько похожая на NGC 1275, и две нормальные эллиптические галактики, пекулярность которых (если таковая и имеется) трудно заметить из-за их достаточной слабости. Кроме того 5 источников было определенно отождествлено с яркими галактиками вне скоплений галактик. На месте оставшихся 18 радиоисточников ничего примечательного обнаружено не было.

В табл. 4 приведены отождествления радиоисточников с галактиками, расположенными вне включенных в настоящее исследование скоплений галактик, а также отождествления источников с галактиками, находящимися близ скоплений галактик, которые не были приведены в табл. 3. Обзор табл. 4 показывает, что и здесь также большинство представителей радиогалактик является тесными двойными и пекулярными галактиками. Необходимо заметить, что некоторые из отождествленных с радиоисточниками галактик, находящихся вне скоплений галактик, на самом деле могут быть членами очень близких, а потому широко разбросанных скоплений галактик, которые трудно сразу увидеть на паломарских картах, и потому не приведенных в каталоге Абеля. К таким галактикам относится, например, NGC 4486.

§ 5. Скопления галактик без радиоисточников

Выше было показано, что в большинстве отождествленных с радиоисточниками скоплений галактик были обнаружены характерные по внешнему виду галактики или системы галактик, совпадающие по положению или находящиеся в непосредственной близости от радиоисточников. Как и ожидалось, такими объектами, имеющими огромную радиоизлучательную способность, оказались в основном тесные двойные и пекулярные эллиптические галактики. И также в соответствии с ожиданием это наиболее яркие, центральные члены скоплений галактик. Является ли такая особенность внешнего вида галактики и ее положения в скоплении галактик достаточным для наличия у нее мощного радиоизлучения? С целью получения ответа на этот вопрос было исследовано несколько скоплений галактик в выбранных наугад двух областях неба, в которых не были зарегистрированы радиоисточники ни в одном из трех использованных списков радиоисточников. Координаты областей следующие: 1) α от 15^h16^m до $15^h 39^m$ и δ от $+27°$ до $+32°$ и 2) α от 23^h15^m до 23^h35^m и δ от $+14°$ до $+19°$. В этих областях оказалось 17 скоплений галактик, относящихся к первым пяти группам списка Абеля, включенным в наше исследование. В семи скоплениях галактик, а именно в скоплениях №№ 2065, 2089, 2092, 2110, 2589 и 2593 (номера скоплений по каталогу Абеля), были обнаружены тесные двойные эллиптические галактики и одна пекулярная E галактика, напоминающая NGC 1275. Таким образом, в 40% из рассмотренных скоплений галактик, где отсутствует заметное радиоизлучение, имеются галактики с присущим радиогалактикам внешним видом. Между тем для скоплений галактик, отождествленных с радиоисточниками, процент подобных систем равен 76.

§ 6. Заключение

1. Полученные нами результаты, а также другие имеющиеся данные (известные интенсивные радиоисточники, находящиеся в скоплениях галактик; отождествления радиоисточников со скоплениями галактик, произведенные Миллсом) позволяют придти к выводу, что *большинство отождествленных космических радиоисточников II класса находится в скоплениях галактик.*

2. Примечательно, что из 45 более мощных радиоисточников третьего кембриджского списка, наблюденных также Харрисом и Робертсом [27], 60% было отождествлено со скоплениями галактик или с индивидуальными галактиками. Среднее значение логарифмов мощностей радиоисточников всех трех списков, отождествленных со скоплениями галактик также больше среднего значения логарифмов мощностей, включенных в наше исследование радиоисточников соответствующих списков. Таким образом, отождествления произведены, в среднем, для более мощных источников. Можно думать, что, *во всяком случае, значительная часть менее интенсивных, неотождествленных радиоисточников находятся в более удаленных и даже невидимых скоплениях галактик**. Этот вывод подтверждается и наблюдениями в Джодрел Бенке, по которым 10—15% радиоисточников имеют диаметры меньше 8″ [3]**.

3. Из 45 произведенных нами отождествлений с индивидуальными галактиками (29 в скоплениях и 16—вне) только 5 радиогалактик или около 10% являются одиночными, не пекулярными галактиками. *Таким образом, подавляющее большинство космических радиоисточников II класса представляет особый класс галактик. В основном это тесные пары эллиптических галактик и пекулярные галактики.* К пекулярным галактикам относятся эллиптические галактики с двумя тесными ядрами, галактики со струями или очень тесно к ним примыкающими выбросами, галактики, пекулярность которых можно характеризовать их сходством с NGC 1275 и др.

4. При исследовании скоплений галактик без наличия заметного радиоизлучения, в 40% из них нами были обнаружены тесные двойные и пекулярные галактики. Известны и другие примеры подобных галактик,

* Недавно получено сообщение Минковского (Ap. J. **132**, 908, 1960) об отождествлении радиоисточников 3C 295 с центральной галактикой очень слабого скопления галактик.

** *Примечание при корректировке.* Недавно было сообщено об определении в Джодрел Бэнке (Allen L. R., Palmer P. H., Rowson B. Nature, **188**, 731, 1960) верхних пределов диаметров 38 радиоисточников. У 7 из них диаметр меньше 3″ и поверхностная яркость, сравнима с поверхностной яркостью Лебедя—A.

от которых не обнаружено радиоизлучения. Например, заметное радиоизлучение отсутствует и от обнаруженных В. А. Амбарцумяном и сотрудниками Бюраканской Обсерватории [32, 33, 34] эллиптических галактик с голубыми выбросами и спутниками, напоминающими струю в NGC 4486 и являющимися системами типа карликовых галактик. Все это говорит о том, что *двойственность и пекулярность вида галактик не достаточное условие для наличия интенсивного радиоизлучения.* По-видимому, окончательное деление галактики и удаление вновь образованных частей друг от друга, или выброс спутника длится дольше, чем процессы, приводящие к интенсивному радиоизлучению. Если это так, то следовательно, *радиогалактики это такие объекты, в которых процесс деления ядра или выброса спутника начался очень недавно.* Например, И. С. Шкловский [35] в своей недавней работе на основе ряда соображений говорит о молодости радиогалактик.

Возможно, что отсутствие радиоизлучения от некоторых тесных двойных и пекулярных галактик, т. е. галактик, находящихся в нестационарном состоянии, в некоторых случаях может быть объяснено отсутствием необходимых для возникновения радиоизлучения особых условий, как отсутствие больших диффузных масс, магнитных полей и др.

5. Отождествление радиоисточников со скоплениями галактик дало возможность получить некоторые сведения о расстояниях этих источников и тем самым представление о дисперсии радиоизлучательной способности радиогалактик. Как мы видели, дисперсия радиоизлучательной способности радиогалактик очень велика. Это было известно и на основе немногих известных отождествлений. *Мощность радиоизлучения зависит, по-видимому, во-первых, от масштабов происходящих явлений.* Например, мощность радиоизлучения огромна у Лебедя-А, где происходит деление ядра галактики на две одинаковые части, и значительно меньше у Девы-А, где имеет место выброс из ядра галактики только некоторых сгустков вещества. *Во-вторых, мощность радиоизлучения зависит, конечно, и от того, на какой стадии развития находятся процессы, приводящие к радиоизлучению.*

6. Как мы видели, в большинстве случаев радиогалактика находится в центре скопления галактик и является наиболее ярким его членом. Такое положение радиогалактики отвергает теорию случайного столкновения двух галактик, ибо очень мало вероятно, чтобы в скоплении галактик столкновение между двумя галактиками имело место только в центре скопления и притом между двумя его наиболее яркими членами. *Скорее всего такое положение говорит, по-видимому, об особой роли радиогалактики в жизни и активности всего скопления галактик.*

В заключение, авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность акад. В. А. Амбарцумяну за руководство и большое внимание к настоящей работе, а также сотруднице ИРФЭ Г. Ляпуновой и сотруднице БАО К. А. Саакян за помощь при выполнении работы.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 4 VII 1961

Հ. Մ. Թովմասյան, Ռ. Կ. Շահբազյան

ԿՈՍՄԻԿԱԿԱՆ ՌԱԴԻՈԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐԻ ՆՈՒՅՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ աշխատության մեջ II տիպի կոսմիկական ռադիոաղբյուրների նույնացման պրոցեսը բաժանված է երկու մասի՝ նախ նույնացումը կատարված է գալակտիկաների կույտի հետ և ապա կույտի այն անդամի հետ, որն իրենից ներկայացնում է ռադիոճառագայթող օբյեկտ։ Այդպիսի երկէտապ մեթոդով կատարված նույնացումը ավելի վստահելի է, չնայած որ կույտի նշված անդամը կարող է և անմիջապես չհամընկնել ռադիոաղբյուրի հետ։ Դա կարող է լինել ռադիոաղբյուրների կոորդինատների որոշման բավականաչափ ցածր ճշտության պատճառով։ Որպես այլ հնարավոր պատճառ կարող է հանդիսանալ աղբյուրների օպտիկական և ռադիո պատկերների միջև եղած տարբերությունը, ինչպես օրինակ՝ Կարապ-Ա և Կենտավր-Ա ռադիոաղբյուրների դեպքում։

Այդպիսի երկէտապ մեթոդը կիրառված է երեք հայտնի (2C, 3C և MSH) ցուցակների վստահելի դիտված ռադիոաղբյուրների նույնացման համար։ Այդ ցուցակներից ընտրված 390 համեմատաբար ինտենսիվ ռադիոաղբյուրների բաշխումը համեմատված է նույն տիրույթում գտնվող 1200 գալակտիկաների կույտերի բաշխման հետ։ Այդ օբյեկտների պատահական բաշխման դեպքում պետք էր սպասել 13 համընկնում ռադիոաղբյուրների և գալակտիկաների կույտերի միջև, իսկ իրականում տեղի է ունեցել 36 համընկնում։ Մաթեմատիկական սպասողությունից դիտված համընկնումների այդպիսի շեղման հավանականությունը 10^{-6} *կարգի է։ Դա խոսում է այն մասին, որ իրոք ֆիզիկական կապ գոյություն ունի ռադիոաղբյուրների և գալակտիկաների կույտերի միջև։ Այդ կապի առկայությունը հաստատելուց հետո կատարվել են ռադիոճառագայթող օբյեկտների որոնումները կույտերի միջև։ Այդ նպատակով բոլոր 36 կույտերը դննված են Պալոմարի քարտեզների վրա։ 29 դեպքերում ռադիոաղբյուրները որոշակիորեն նույնացվել են գալակտիկաների կույտերում գտնվող առանձին գալակտիկաների հետ։*

Աշխատանքի արդյունքներից կարելի է եզրակացնել հետևյալը՝

1. Նույնացված II տիպի ռադիոաղբյուրների մեծամասնությունը գտնվում է գալակտիկաների կույտերում։

2. Հիմնականում նույնացված են ավելի հզոր ռադիոաղբյուրները։ Կարելի է կարծել, որ, համենայն դեպս, ավելի թույլ, չնույնացված ռադիոաղբյուրների զգալի մասը գտնվում է ավելի հեռու և նույնիսկ չերևացող գալակտիկաների կույտերում։

3. II տիպի ռադիոաղբյուրների գերակշռող մասը իրենից ներկայացնում է հատուկ տիպի գալակտիկաներ։ Դրանք հիմնականում էլիպտիկ գալակտիկաների սերտ զույգեր են և պեկուլյար գալակտիկաներ։

4. Գալակտիկաների պեկուլյար տեսքը կամ սերտ կրկնակիությունը դեռ բավարար պայման չէ ռադիոճառագայթման առկայության համար։ Հավանաբար, գալակտիկաների վերջնական բաժանումը և նոր առաջացած մասերի իրարից հեռանալը տևում է ավելի երկար, քան այն պրոցեսները, որոնք բե-

րում են ինտենսիվ ռադիոճառագայթման։ Եթե այդ այդպես է, ապա ռադիոգալակտիկաները այնպիսի օբյեկտներ են, որտեղ միջուկի բաժանման կամ արբանյակի ժայթքման պրոցեսներն սկսվել են միայն վերջերս։

5. Ռադիոգալակտիկաների ռադիոճառագայթման հատկության դիսպերսիան շատ մեծ է։

6. Ռադիոգալակտիկաների մեծ պայծառությունը և կենտրոնական դիրքը կույտերում վկայում են հավանաբար այն մասին, որ ռադիոգալակտիկաները հատուկ դեր են խաղում գալակտիկաների կույտերի կյանքում և զարգացման մեջ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mills B. Y.* The distribution of the discrete sources of cosmic radio radiation. „Aust. J. Sci. Res", **A5**, 266, 1952.
2. *Minkowski R.* Optical observations of nonthermal galactic radio sources. Paris Symp. on Radio Astr, 315, Stanf. Univ. Press, 1959.
3. *Minkowski R.* International cooperative efforts directed toward optical identification of radio sources. „Proc. Nat. Acad. Sci. USA", **46**, 13, 1960.
4. *Dewhirst D. W.* Meeting of the Royal Astronomical Society, „Obs.", **80**, 46, 1960.
5. *Ryle M.* The nature of the radio sources. Paris Symp. on Radio Astr, 523, Stanf. Univ. Press, 1959.
6. *Dewhirst D. W.* The optical identification of radio sources. Paris Symp. on Radio Astr, 507, Stanf. Univ. Press, 1959.
7. *Пози Дж. Л., Брейсуелл Р. Н.* Радиоастрономия. Изд. иностр. лит., 1958.
8. *Hanbury Brown R.* The distribution and identification of the sources. Paris Symp. on Radio Astr, 471, Stanf. Univ. Press, 1959.
9. *Mills B. Y.* The observation and interpretation of radio emission from some bright galaxies. „Aust. J. Ph", **8**, 368, 1955.
10. *Baade W., Minkowski R.* Identification of the radio sources in Cassiopeia, Sygnus A, and Puppis A. „Ap. J." **119**, 206, 1954.
11. *Амбарцумян В. А.* К вопросу о природе источников радиоизлучения. „Труды V совещания по вопросам космогонии", 413, 1956.
12. *Амбарцумян В. А.* Кратные галактики и радиогалактики. Сообщение. I. ДАН АрмССР, **23**, 161, 1956.
13. *Амбарцумян В. А.* Об эволюции галактик. „Известия АН АрмССР, серия физ-мат. наук", **11**, 9, 1958.
14. *Biraud F., Lequeux J., Le Roux E.* Interferometric measurements of Cygnus A, Sagittarius A, Virgo A and the Supernovae of Tycho Brahe and Kepler. „Obs.", **80**, 116, 1960.
15. *Jennison R. C.* and *Latham V.* The brightness distribution within the radio sources Cygnus A (19 N:4A) and Cassiopeia A (23 N:5A), „MN", **119**, 174, 1958.
16. *Wade C. M.* The extended component of Centaurus A. "Aust. J. Ph", **12**, 471, 1959.
17. *Bolton J. G., Clark B. J.* A study of Centaurus A at 31 centimeters. „PASP", **72**, 29, 1960.
18. *Twiss R. Q., Carter A. W., Little A. G.* Brightness distribution over some strong radio sourses at 1427 Mc/s. „Obs", **80**, 153, 1960.
19. *Roberts J. A., Bolton J. G., Harris D. E.* Positions and suggested identifications for the radio sources Hydra A and Hercules A. „PASP", **72**, 5, 1960.
20. *Hanbury-Brown R., Hazard C.* A survey of 23 Localized radio sources in the Northern hemisphere. „MN", **113**, 123, 1953.
21. *Mills B. Y., Slee O. B., Hill E. R.* A catalogue of radio sources between declinations $+10^{\circ}$ and -20°. „Aust. J. Ph", **11**, 360, 1958.

22. *Mills B. Y.* A survey of radio sources at 3,5m wavelength. Paris Symp. on Radio Astr., 498, Stanf. Univ. Press, 1959.
23. *Abell G. O.* The distribution of rich clusters of galaxies. „Ap. J. Suppl.", Ser. 31, **3**, 211, 1958.
24. *Shakeshafte J. R., Ryle M.* and oth. A survey of radio sources between declinations —38° and +83°. „Memoirs RAS", **67**, 106, 1955.
25. *Edge D. O., Shakeshafte J. R.* and oth. A survey of radio sources at a frequency of 159 Mc/s. „Memoirs RAS", **68**, 37, 1959.
26. *Elsmore B., Ryle M., Leslie P. R. R.* The positions, flux densities and angular diameters of 64 radio sources observed at a frequency of 178 Mc/s. „Memoirs RAS", **68**, 61, 1959.
27. *Harris D. E., Roberts J. A.* Radio sources measurements at 960 Mc/s. „PASP", **72**, 237, 1960.
28. *Archer S.* and oth. Studies of radio sources at 159 Mc/s. Paris Symp. on Radio Astr. 487, 1959. Stanf. Univ. Press.
29. *Edge D. O., Sheuer P. A., Shakeshafte J. R.* Evidence of the spacial distribution of radio sources derived from a survey at a frequency of 159 Mc/s. „MN", **118**, 183, 1958.
30. *Costain C. H., Smith F. G.* The radio telescope for 7.9 meters waivelength at the Millard Observatory. „MN", **121**, 405, 1960.
31. *Molina E. C.* Poisson's Exp. Bin. Limit, N. Y., 1943.
32. *Амбарцумян В. А., Шахбазян Р. К.* Кратные галактики и радиогалактики. Сообщение II. „ДАН АрмССР", **25**, 185, 1957.
33. *Амбарцумян В. А., Шахбазян Р. К.* Кратные галактики и радиогалактики. Сообщение IV. „ДАН АрмССР", **26**, 277, 1958.
34. *Шахбазян Р. К., Искударян С. Г.* Голубые объекты около эллиптических галактик. „ДАН АрмССР", **28**, 53, 1959.
35. *Шкловский И. С.* Радиоисточники. „АЖ", **37**, 945, 1960.
36. *Mills B. Y.* On the identification of extragalactic radio sources. „Aust. J. Ph", **13**, 550, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Г. В. Бадалян

О функциях класса $\bar{C}_{\left\{\prod\limits_1^n \gamma_\nu\right\}}$.

Определение. *Условимся говорить, что функция*

$$\varphi(t) \in \bar{C}_{\left\{\prod\limits_1^n \gamma_\nu\right\}}([u, v)), \quad u > 0, \tag{1}$$

если она представляется сходящимся на $[u, v)$ квазистепенным рядом

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n\left(\frac{t}{u}\right), \tag{2}$$

где $t \in [u, v)$,

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}\right) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}, \tag{3}$$

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots,$$

а простой контур C здесь и впредь в аналогичных случаях охватывает окрестности полюсов подинтегральной функции.

Теорема 1. *Если*

$$\varphi(t) \in \bar{C}_{\left\{\prod\limits_1^n \gamma_\nu\right\}}([u, v)), \quad u > 0,$$

то ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n\left(\frac{t}{u}\right)$$

не только сходится равномерно и абсолютно в каждой замкнутой подобласти области $[u, v)$, но и в такой подобласти его можно почленно дифференцировать (обобщенно, в смысле [1]) в любое число раз.

Доказательство. Обозначим

$$\omega_{n,\mu}\left(\frac{t}{u}\right)=\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_\mu)},$$

$$\prod_{\nu=\mu+1}^{\mu}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}=1$$

и допустим, что в $[u, t_1]\subset[u, v)$ ряд

$$\varphi^{[\mu]}(t)=\sum_{n=\mu}^{\infty}a_n\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\mu}\left(\frac{t}{u}\right)\prod_{\nu=1}^{\mu}\gamma_\nu t^{-\gamma_\mu-1} \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Докажем, что для всякого $t\in[u, t']$, где $t'<t_1$, таким свойством обладает и ряд

$$\varphi^{[\mu+1]}(t)=t^{-\gamma_{\mu+1}-1}\prod_{\nu=1}^{\mu+1}\gamma_\nu\sum_{n=\mu+1}^{\infty}a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right). \tag{5}$$

С этой целью рассмотрим

$$S_{p,q}(t)=\sum_{n=p}^{q}a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)=$$

$$=\sum_{n=p}^{q}a_n\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}. \tag{6}$$

Для достаточно большого p, в силу сходимости ряда (4) будем иметь

$$|S_{p,q}(t)|<\varepsilon(p)\sum_{n=p}^{q}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}<$$

$$<\varepsilon(p)\sum_{n=p}^{q}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)} \tag{6'}$$

так как при $t>u$ функция

$$\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)=f(t)$$

монотонно возрастает. $\varepsilon(p)>0$—число сколь угодно малое.

Таким образом, все сводится к оценке сверху

$$\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}=\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t_1'}{u}\right)}\cdot\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t_1'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}, \tag{7}$$

где $u<t'<t_1'<t_1$.

Если обозначить

$$\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}=\alpha_{\nu+\mu+1},$$

тогда

$$\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-\mu-1}\alpha_{\nu+\mu+1}}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-\mu-1}(\zeta+\alpha_{\nu+\mu+1})}\left(\frac{t}{u}\right)^{-1}$$

и к ней можно применить лемму 1 теоремы 1 работы [1].

Будем иметь

$$0<\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t_1'}{u}\right)}<\left(\frac{\ln\frac{t'}{u}}{\ln\frac{t_1'}{u}}\right)^{n-\mu-1}=\delta^{n-\mu-1}, \tag{8}$$

где при $u<t'<t_1'$, $0<\delta<1$.

Оценим наконец

$$\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t_1'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}.$$

Имеем

$$\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)=\frac{(-1)^{n-\mu-1}\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta-\gamma_\mu-1}}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta.$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что

$$\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)=\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\left(\frac{\omega_{n\mu}\left(\frac{t}{u}\right)}{\left(\frac{t}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1}}\right)'. \tag{9}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t}{u}\right)}{\left(\frac{t}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1}}=\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\int\limits_u^t\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{u}.$$

Это значит, что

$$\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)\geqslant\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\int\limits_{t_1'}^{t_1}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{u}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t_1'}{u}\right)\frac{t_1-t_1'}{u}$$

или

$$0<\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t_1'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}\leqslant\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\cdot\frac{u}{\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1}(t_1-t_1')}. \tag{10}$$

Из (7) в силу (8) и (10) получаем

$$0<\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t'}{u}\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u}\right)}\leqslant\frac{C(t_1)}{t_1-t_1'}\delta^{n-\mu-1}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}, \tag{11}$$

где при $u<t'<t_1'<t_1$ постоянная $C(t_1)$ не зависит от n.

Из (6′) в силу (11) получаем

$$|S_{p,q}(t)|<\varepsilon(p)\,C(t_1)\sum_{n=p}^{q}\delta^{n-\mu-1}\cdot\frac{1}{t_1-t_1'}<\varepsilon(p)\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k,$$

если число $p>0$—достаточно большое.

Последнее неравенство доказывает теорему.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей заметки.

Теорема 2. *Для того, чтобы*

$$\varphi(t)\in\tilde{C}_{\left\{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}([u,v])$$

необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух A_γ—абсолютно монотонных функций (см. [1]).

Достаточность условия теоремы в силу теоремы 1 работы [1] очевидна.

Докажем необходимость условия теоремы.

Пусть

$$\varphi(t) \in \widetilde{C}_{\left\{\prod\limits_1^n \gamma_\nu\right\}}([u, v)),$$

тогда ряд

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right),$$

в силу теоремы 1, в каждой замкнутой подобласти области $[u, v)$ можно почленно обобщенно дифференцировать в любое число раз при этом совершать всякие перестановки его членов.

Таким образом получаем

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k + |a_k|}{2} \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k| - a_k}{2} \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right),$$

где суммы рядов правой части последнего равенства, как нетрудно заметить, являются A_γ—абсолютно монотонными функциями.

Этим теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Разберем теперь тот случай, когда $u = 0$.

В этом случае класс

$$\widetilde{C}_{\left\{\prod\limits_1^n \gamma_\nu\right\}}((0, v))$$

рассматривается как предельный случай класса

$$\widetilde{C}_{\left\{\prod\limits_1^n \gamma_\nu\right\}}([u, v))$$

когда $u \to 0+$.

Нетрудно заметить, что в этом случае

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^{\gamma_k}, \tag{12}$$

где ряд сходится на бесконечнолистной римановой поверхности с точкой разветвления в $t = 0$ и его радиус сходимости $R = v$.

Очевидно, что, если $\gamma_n \to \infty$ достаточно быстро то радиусы абсолютной и равномерной сходимости ряда (12) равны R и почленное дифференцирование ряда законно.

Это значит, что в силу теоремы 2 работы [1] теорема 2 остается в силе и в случае, когда $u=0$, если только сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta^{\gamma_n}$, где $\delta\in(0,1)$ произвольное число.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 III 1961

Հ. Գ. Բադալյան

$\overline{C}_{\left\{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}$ ԴԱՍԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սահմանում. Պայմանավորվենք ասել, որ

$$\varphi(t)\in\overline{C}_{\left\{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}([u,v)),\quad u>0,$$

եթե $\varphi(t)$-ն $[u,v)$ միջակայքում ներկայացվում է

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n\left(\frac{t}{u}\right)$$

քվազի աստիճանային շարքով, որտեղ

$$t\in[u,v),\quad \omega_n\left(\frac{t}{u}\right)=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)},\tag{1}$$

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots,$$

իսկ C պարզ կոնտուրը ընդգրկում է ընդինտեգրալ ֆունկցիայի բոլոր բևեռները:

Աշխատության մեջ ապացուցված են՝

Թեորեմ 1. Եթե

$$\varphi(t)\in\overline{C}_{\left\{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}([u,v)),\quad u>0,$$

ապա

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\omega_n\left(\frac{t}{u}\right)\tag{2}$$

շարքը ոչ միայն հավասարաչափ զուգամետ է $[u,v)$ միջակայքի յուրաքանչյուր փակ մասում, այլև այնտեղ բացարձակ զուգամետ է, ըստ որում վերը

նշված ամեն մի ենթատիրույթում (2) շարքը կարելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցել ցանկացած անգամ և միաժամանակ կատարել անդամների ցանկացած տեղափոխություն։

Սահմանում. Պայմանավորվենք ասել, որ $\varphi(t)$ *ֆունկցիան* $[u, v]$ *միջակայքում* A_γ*-բացարձակ մոնոտոն է, եթե այնտեղ գոյություն ունեն*

$$\varphi_0(t)=\varphi(t), \quad \varphi_1(t)=\varphi'(t),$$

$$\varphi_{k+1}(t)=\left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)', \quad k=1, 2, \ldots$$

և

$$\varphi_k(t)\geqslant 0,$$

երբ $t\in[u, v]$*։*

Թեորեմ 2. Որպեսզի

$$\varphi(t)\in\widetilde{C}_{\left\{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}([u, v]),$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի երկու A_γ*-բացարձակ մոնոտոն ֆունկցիաների տարբերության տեսքով։*

Աշխատության մեջ ցույց է տրված նաև, որ վերը բերված թեորեմները ճիշտ են մնում նաև այն դեպքում, երբ $u=0$*, եթե միայն ընդունենք, որ այդ դեպքում* $u=0+$ *և* $\gamma_n\to\infty$ *բավականաչափ արագ։*

ЛИТЕРАТУРА

Бадалян Г. В. A_γ-абсолютно монотонные функции. „Известия АН АрмССР, серия физико-математических наук", **14**, № 4, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

М. Б. Эдилян

Применение электронно-вычислительных машин для синтеза несимметричного направляющего механизма

§ 1. Определение параметров несимметричного шарнирно-четырехзвенного механизма

Механизмы с остановкой некоторой продолжительности в заданном положении ведомого звена представляют собой значительную группу исполнительных механизмов машин автоматов. Для обеспечения приближенного выстоя используют зубчато-рычажные и шарнирные механизмы. Шарнирные механизмы просты по конструкции, дешевы и, вследствие отсутствия высших пар, надежны в работе. Вышеуказанные достоинства последних говорят в пользу внедрения шарнирных механизмов в промышленность с целью обеспечения приближенного выстоя.

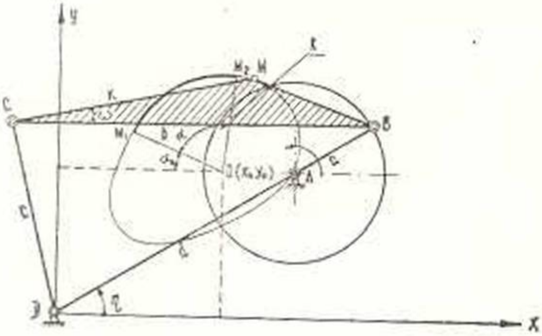
П. Л. Чебышевым [3] разработана теория симметричного кругового-направляющего механизма и получены формулы для определения его параметров. Однако, столь ценная с научной точки зрения эта работа П. Л. Чебышева не нашла практического применения из-за того, что не были определены границы выбора свободных параметров механизма, при котором получаются действительные решения. Проблема, указанная П. Л. Чебышевым доведена до инженерного решения в работе Л. С. Гродзенской [5].

Н. И. Левитским разработана общая теория синтеза приближенных механизмов [1], [2].

Синтез несимметричных механизмов представляет собой более общую задачу. Области существования свободных параметров механизма в общем случае будут более развернутыми. Кроме того, при решении задач синтеза симметричных механизмов часто звенья последних получаются неконструктивными. Наконец, данный вопрос актуален тем, что выявляет возможность применения электронно-вычислительных машин для задач синтеза механизмов. Последнее открывает практически безграничные возможности для проектирования самых разнообразных механизмов, воспроизводящих выстой любой продолжительности и отвечающих самым разнообразным требованиям. Изменением и широкой вариацией входных параметров можно спроектировать механизмы для получения различных кривых. Разработка методики и программирования задач синтеза несимметричного механизма с остановкой и составляет предмет настоящей статьи. В общем случае задача синтеза направляющих четырехзвенников формулируется следующим образом.

Задана некоторая плоская кривая $y=f_1(x)$ своим уравнением или таблицей значений координат x и y. Определить размеры и положение шарнирного четырехзвенника, на шатуне которого имеется точка M, описывающая шатунную кривую $y=f_2(x)$, мало отличающуюся от заданной кривой на некотором участке или на всем своем протяжении.

В данной работе рассматривается случай, когда заданная плоская кривая является дугой окружности (фиг. 1). За исходные параметры приняты: $CM=k$, $DC=c$, радиус окружности приближения R,



Фиг. 1.

координаты центра окружности приближения $O(x_0, y_0)$, центральный угол дуги приближения α и $\angle\alpha_0$, фиксирующий положение дуги приближения относительно оси X—итого семь параметров.

Подлежат определению следующие величины: $AB=a$, $BC=b$, $AD=d$, $\angle BCM=\omega$ и угол наклона стойки η—итого пять параметров.

Задача о воспроизведении заданной траектории при помощи шарнирного механизма может быть сведена к задаче о нахождении искомых параметров из условия малого отклонения от нуля взвешенной разности Δq.

Аналитическое выражение взвешенной разности Δq при $x_D=0$ $y_D=0$ имеет следующий вид:

$$\Delta q = -\frac{b\cos\omega}{k}(\rho^2-k^2-c^2)-\frac{b\sin\omega}{k}U+\frac{db\sin(\omega+\eta)}{k}(Vx+Wy)+$$

$$+\frac{db\cos(\omega+\eta)}{k}(Wx-Vy)-d\sin\eta\,(Vx+Wy-2y)- \tag{1.1}$$

$$-d\cos\eta\,(Wx-Vy-2x)-c^2-b^2-d^2+a^2.$$

Для вычисления пяти параметров (a, b, d, ω, η) сгруппируем члены в выражении взвешенной разности (1.1) так, чтобы оно имело вид следующей функции

$$\Delta q = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + \cdots + p_6 f_6(x), \tag{1.2}$$

где

$f_i(x)$ — функции переменного аргумента x, не содержащие неизвестных параметров,

p_i — коэффициенты, зависящие от искомых параметров.

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= k^2 + c^2 - \rho^2, & p_0 &= \frac{b\cos\omega}{k},\\
f_1(x) &= -U, & p_1 &= \frac{b\sin\omega}{k},\\
f_2(x) &= 2y - Vx - Wy, & p_2 &= d\sin\eta,\\
f_3(x) &= 2x + Vy - Wx, & p_3 &= d\cos\eta,\\
f_4(x) &= 1, & p_4 &= a^2 - c^2 - b^2 - d^2,\\
f_5(x) &= -Vx - Wy, & p_5 &= -p_0p_2 - p_1p_3,\\
f_6(x) &= Vy - Wx, & p_6 &= p_1p_2 - p_0p_3,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$U = \pm\sqrt{4k^2\rho^2 - (\rho^2 + k^2 - c^2)^2}\,^{*})$$

$$V = \frac{U}{\rho^2}, \qquad W = \frac{\rho^2 + k^2 - c^2}{\rho^2}.$$

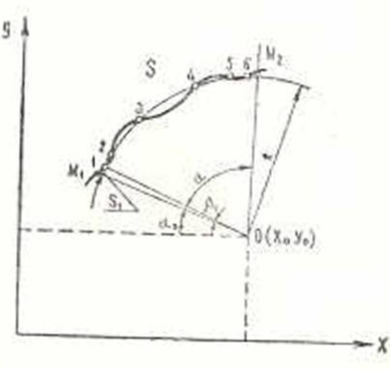
Узлы интерполирования рекомендуется располагать в соответствии с расположением нулей полинома Чебышева, т. е. по ф-ле, которая для рассматриваемого случая принимает вид

$$S_i = 0{,}5\left(1 - \cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)S, \tag{1.4}$$

где $n = 6$ — число узлов интерполирования,

S_i — длина дуги графика заданной функции, измеряемая от начала участка приближения до i-го узла интерполирования,

S — длина дуги графика заданной функции на участке приближения (фиг. 2).



Фиг. 2.

Совпадение шатунной кривой с заданной окружностью можно ожидать максимум в 6 точках. Пять параметров механизма определяются из условия равенства нулю выражений типа взвешенной разности (1.2), написанных для пяти узлов интерполирования.

---

* Знак перед радикалом U выбирается в зависимости от того, какая из двух ветвей шатунной кривой должна быть приближена к заданной траектории.

Центральные углы соответствующих дуг S_i для шести узлов интерполирования будут равны

$$\beta_i = a_i \alpha \qquad i = 1, 2 \cdots 6, \tag{1.5}$$

где

$$a_1 = 0{,}0170371; \qquad a_2 = 0{,}1464466; \qquad a_3 = 0{,}3705905;$$

$$a_4 = 0{,}6294095; \qquad a_5 = 0{,}8535534; \qquad a_6 = 0{,}9829629.$$

Координаты узлов интерполирования связаны с координатами центра и радиусом окружности приближения следующим образом

$$x_i = x_0 - R\cos(a_i\alpha + \alpha_0),$$

$$y_i = y_0 + R\sin(a_i\alpha + \alpha_0), \qquad i = 1, 2, \cdots 5. \tag{1.6}$$

Подсчитывая функции $f_i(x)$ по (1.3), мы получаем следующую систему уравнений для определения пяти параметров механизма (a, b, d, ω, η)

$$\Delta q_i = p_0 f_{0i}(x) + p_1 f_{1i}(x) + p_2 f_{2i}(x) + \cdots + p_6 f_{6i}(x) = 0 \tag{1.7}$$

$$i = 1, 2 \cdots 5.$$

Система уравнений (1.7), путем последовательного исключения p_4, p_5, p_6, p_2, p_3, приводится к виду

$$\begin{aligned} p_3 &= k_1 p_1 + k_2 p_0, \\ p_2 &= k_3 p_1 + k_4 p_0, \\ p_6 &= k_5 p_1 + k_6 p_0, \\ p_5 &= k_7 p_1 + k_8 p_0, \\ p_4 &= k_9 p_1 + k_{10} p_0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Зависимости (1.8) при обозначении $\frac{p_1}{p_0} = \xi$ приводятся к кубическому уравнению относительно ξ

$$A_1\xi^3 + A_2\xi^2 + A_3\xi + A_4 = 0, \tag{1.9}$$

где

$$A_1 = k_5 k_1 + k_3 k_7, \quad A_2 = (k_2 + k_3) k_5 + (k_4 - k_1) k_7 + k_6 k_1 + k_8 k_3,$$

$$A_3 = (k_2 + k_3) k_6 + (k_5 + k_8) k_4 - k_8 k_1 - k_7 k_2, \quad A_4 = k_4 k_6 - k_2 k_8. \tag{1.9'}$$

После определения ξ, параметры p_i выражаются следующими зависимостями

$$p_3 = -\frac{k_5\xi + k_6 + (k_7\xi + k_8)\xi}{1 + \xi^2},$$

$$p_2 = \frac{-k_7\xi - k_8 + (k_5\xi + k_6)\xi}{1 + \xi^2}, \tag{1.10}$$

$$p_1 = \frac{k_4 p_3 - k_2 p_2}{k_1 k_4 - k_3 k_2}, \qquad p_0 = \frac{k_1 p_2 - k_3 p_3}{k_1 k_4 - k_3 k_2},$$

$$p_6 = k_5 p_1 + k_6 p_0, \quad p_5 = k_7 p_1 + k_8 p_0, \quad p_4 = k_9 p_1 + k_{10} p_0.$$

Отыскиваемые параметры a, b, d, ω, η будут соответственно равны

$$b = k\sqrt{p_0^2 + p_1^2}, \qquad d = \sqrt{p_2^2 + p_3^2}, \qquad a = \sqrt{c^2 + b^2 + d^2 + p_4},$$

$$\omega = \arccos p_0 \frac{k}{b}, \qquad \eta = \arcsin \frac{p_2}{d}. \tag{1.11}$$

Полученные параметры p_i необходимо подставить в исходные уравнения Δq_i (1.7) и проверить условия

$$\Delta q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots 5. \tag{1.12}$$

После получения параметров механизма (a, b, d, ω, η) следует также проверить

1) условие проворачиваемости кривошипа

$$a + d \leqslant b + c, \tag{1.13}$$

2) условие обеспечения минимального угла передачи

$$\cos\psi_{min} = \left| \frac{b^2 + c^2 - (d \pm a)^2}{2bc} \right|, \tag{1.14}$$

при предварительно заданной величине ψ_{min},

3) конструктивную приемлемость соотношений длин звеньев механизма

$$\frac{d}{a} \text{ и } \frac{c}{a}, \tag{1.15}$$

желательные значения которых заранее оговариваются

$$m_1 \leqslant \frac{d}{a} \leqslant m_2, \qquad n_1 \leqslant \frac{c}{a} \leqslant n_2.$$

§ 2. Определение отклонений шатунной кривой от дуги окружности

Примем, что точки M_1 и M_2 лежат на данной окружности (фиг. 2). Тогда для координат этих точек можно написать

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - R\cos\alpha_0 \qquad & x_2 &= x_0 - R\cos(\alpha_0 + \alpha), \\ y_1 &= y_0 + R\sin\alpha_0, \qquad & y_2 &= y_0 + R\sin(\alpha_0 + \alpha). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Используя реккурентные соотношения между координатами точек шатунной кривой и кривошипа, мы можем написать (фиг. 3)

$$\begin{aligned} x_{B_i} &= x_i + \frac{V_i Q_i + W_i T_i}{2k}, \\ y_{B_i} &= y_i + \frac{V_i T_i - W_i Q_i}{2k} \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

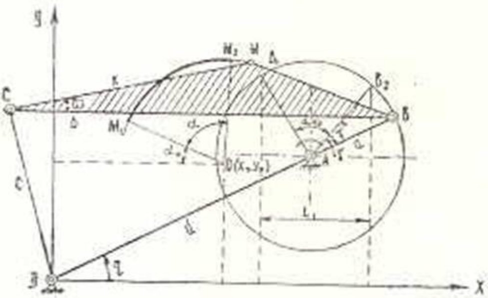
$$V_i = \frac{\pm\sqrt{4k^2\rho_i^2 - (\rho_i^2 + k^2 - c^2)^2}\,^*}{\rho_i^2},$$

$$W_i = \frac{\rho_i^2 + k^2 - c^2}{\rho_i^2}, \tag{2.3}$$

$$Q_i = x_i b\sin\omega - y_i(b\cos\omega - k),$$

$$T_i = y_i b\sin\omega + x_i(b\cos\omega - k),$$

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2.$$



Фиг. 3.

Отрезок между абсциссами точек B_2 и B_1 обозначим через L_1, т. е.

$$x_{B_2} - x_{B_1} = L_1. \tag{2.4}$$

Разделив отрезок L_1 на некоторое n число частей, для текущей точки B_i будем иметь

$$x_{B_i} = x_{B_1} + \frac{L_1}{n}i \quad i = 0, 1, 2\cdots n. \tag{2.5}$$

Из фиг. 3 видно, что

$$y_{B_i} = d\sin\eta + \sqrt{a^2 - (d\cos\eta - x_{B_i})^2}. \tag{2.6}$$

Имея i различных значений абсцисс x_{B_i} (ординат y_{B_i}), используя реккурентные соотношения между координатами точек M и B, можем вычислить значения координат точек шатунной кривой

$$x^i = x_{B_i} + \frac{V_{B_i}Q_{B_i} + W_{B_i}T_{B_i}}{2b},$$

$$y^i = y_{B_i} + \frac{V_{B_i}T_{B_i} - W_{B_i}Q_{B_i}}{2b}, \tag{2.7}$$

где

$$V_{B_i} = \frac{\pm\sqrt{4b^2\rho_{B_i}^2 - (\rho_{B_i}^2 + b^2 - c^2)^2}\,^{**}}{\rho_{B_i}},$$

$$W_{B_i} = \frac{\rho_{B_i}^2 + b^2 - c^2}{\rho_{B_i}^2},$$

---

* Знак V_i совпадет со знаком V в (1.3).

** Знак V_{B_i} совпадает со знаком V в (1.3).

$$Q_{B_i} = -x_{B_i} k\sin\omega - y_{B_i}(k\cos\omega - b),$$

$$T_{B_i} = -y_{B_i} k\sin\omega + x_{B_i}(k\cos\omega - b), \tag{2.8}$$

$$p^2_{B_i} = x^2_{B_i} + y^2_{B_i}.$$

Определив значения координат точек шатунной кривой, найдем отклонения между шатунной кривой и окружностью на дуге приближения по следующей формуле

$$\Delta^i_n = R - \sqrt{(x^i - x_0)^2 + (y^i - y_0)^2}, \tag{2.9}$$

где x_0, y_0, R—координаты центра и радиус окружности приближения,

Δ^i_n—отклонение по нормали между шатунной кривой и окружностью на дуге приближения.

Необходимо определить также значение угла поворота звена $AB = a$, соответствующего углу выстоя α.

Расстояние между точками B_2 и B_1 равно

$$l = \sqrt{(x_{B_2} - x_{B_1})^2 + (y_{B_2} - y_{B_1})^2} \tag{2.10}$$

и

$$\alpha_{kp} = 2\arc\sin\frac{l}{2a}. \tag{2.11}$$

Сориентируем данный угол α_{kp} с нулевым положением механизма. Согласно фиг. 3, если $x_{B_2} > d\cos\eta$, то

$$\gamma = \arccos\frac{x_{B_2} - d\cos\eta}{a} \tag{2.12}$$

и

$$\gamma_0 = \gamma - \eta.$$

Если $x_{B_2} < d\cos\eta$, тогда

$$\gamma = 180^\circ - \arccos\frac{d\cos\eta - x_{B_2}}{a} \tag{2.13}$$

и

$$\gamma_0 = \gamma - \eta.$$

На основании построенного алгоритма Вычислительным центром Академии наук Армянской ССР составлена программа и выполнены вычисления на автоматической цифровой электронной вычислительной машине*. Просчитано свыше 500 различных механизмов.

Механизмы не удовлетворяющие условиям (1.13), (1.14), (1.15) отбраковываются. В (1.14) величина угла $\psi_{\min} = 20^\circ$. В (1.15) величины

* Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность зав. сектором программирования ВЦ Академии наук АрмССР кандидату физико-математических наук Т. М. Тер-Микаеляну и сотрудникам ВЦ Х. К. Брутяну Г. А. Саркисяну.

$m_1 = n_1 = 1{,}5$, $m_2 = n_2 = 8$. Отклонения просчитываются для 50 точек, т. е. в (2.5) $n = 50$.

Для иллюстрации, из отобранных механизмов приведены некоторые, наиболее характерные.

В таблицах № 1 и № 2 приведены параметры и отклонения 2-х различных механизмов.

Таблица 1

Входные параметры		Отыскиваемые параметры	
R	1,309523 1,909523	b	3,373337 4,005557
κ	3,363491 3,363491	d	2,395603 2,784047
c	2,199999 2,199999	a	1,304320 1,456320
α_0	0,287979 0,462511	ω	0,0035526 0,2304035
α	1,169370 1,343903	η	0,8452596 0,6432647
x_0	1,5793650		
y_0	1,7936507		

Таблица 2

Отклонение взвешенной разности Δ_q в 5 узлах интерполирования					Отклонение по нормали $\Delta_{n_{max}}$
$10^{-6} \cdot 0{,}208616$	$10^{-4} \cdot 0{,}084043$	$10^{-4} \cdot 0{,}240803$	$10^{-4} \cdot 0{,}341237$	$10^{-4} \cdot 0{,}341236$	0,0000306
$10^{-6} \cdot 0{,}357628$	$10^{-5} \cdot 0{,}352866$	$10^{-7} \cdot 0{,}596046$	$10^{-6} \cdot 0{,}357628$	$10^{-6} \cdot 0{,}417233$	0,0012764

Проектирование присоединенной диады к основному направляющему механизму не входит в содержание данной статьи.

Присоединяемая группа проектируется по условию нестеснимости и с учетом угла передачи [6].

Մ. Բ. Էդիլյան

ՈՒՂՂՈՐԴ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻՉ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեքենա-ավտոմատներում որոշակի խումբ են կազմում այն մեխանիզմները, որոնց տարվող աշխատանքային օղակը աշխատում է կանխատեսված կանգնումներով:

Նման նպատակների համար կիրառվում են ատամնավոր-լծակային և հոդավոր մեխանիզմներ:

Հոդավոր մեխանիզմները կառուցվածքով պարզ են, էժան և բարձր զույգերի բացակայության պատճառով հուսալի են աշխատանքում։

Վերոհիշյալ առավելությունները հնարավոր են դարձնում հոդավոր մեխանիզմների լայն կիրառումը արդյունաբերության մեջ։

Էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենաների կիրառումը նման մեխանիզմների հաշվարկներում գործնականորեն անսահման հնարավորություններ է ստեղծում բազմազան մեխանիզմների հաշվարկն ու նախագծումը ճշտելու և արագացնելու համար։

Հոդվածի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ մեխանիզմների նախագծման և էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենաների համար ծրագրման մեթոդի մշակումը։

Հարթ-ուղղորդ-հոդակապային քառօղակների սինթեզի խնդիրը ընդհանուր առմամբ ձևակերպվում է այսպես՝

Տրված է մի հարթ կոր $y=f_1(x)^*$, *որոշել հոդակապային քառօղակի չափը և դիրքը, որի շուռտվիկի վրա գտնվող* M *կետը կվերարտադրի* $y=f_2(x)$ *շուռտվիկային կորն այնպես, որ նա քիչ տարբերվի տրված* $y=f_1(x)$ *կորից՝ կորի ամբողջ երկարությամբ կամ նրա որոշ մասում։*

Հոդակապային մեխանիզմի միջոցով տրված տրայեկտորիայի վերարտադրման խնդիրը կարելի է բերել որոնվող պարամետրների որոշման խնդրին այնպես, որ կշռային տարբերությունը (տե՛ս բանաձև 1.1) քիչ տարբերվի զերոյից։

Տվյալ խնդրի ալգորիթմի հիման վրա կազմված է ծրագիր էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի համար։ Հաշվարկված են մոտ 500 տարբեր մեխանիզմներ և, որպես օրինակ, բերված են մի քանի հատկանշական մեխանիզմներ։

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 18 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитский Н. И.* Синтез механизмов по Чебышеву. Изд. АН СССР, М., 1946.
2. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Гос. издательство физико-математической литературы. М., 1959.
3. *Чебышев П. Л.* О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси. Собр. соч. АН СССР, т. IV, 1948.
4. *Артоболевский И. И., Добровольский В. В., Блох З. Ш.* Синтез механизмов. ГТТИ М., 1944.
5. *Гродзенская Л. С.* Проектирование шарнирных механизмов по заданой продолжительности остановки ведомого звена. Диссертация. М., 1958.
6. *Hrones J. A., Nelson G. L.* Analysis of the Four-Bar Linkage, New York, 1951.

* *Կորը կարող է տրված լինել անալիտիկ ձևով կամ էլ* x *և* y *կոորդինատների աղյուսակի միջոցով։*