ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. Л. Лунц

О рядах типа Тейлора-Дирихле

В статье рассматриваются вопросы, связанные со сходимостью интегралов Стильтьеса вида

$$\int_{0}^{\infty} z^{\tau(t)} e^{-zt} \, dA(t). \tag{1}$$

В частности, определяются области сходимости рядов типа Тейлора-Дирихле

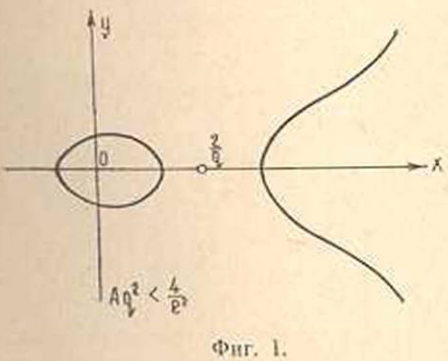
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{2}$$

где $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$, а m_n —натуральные числа или нули.

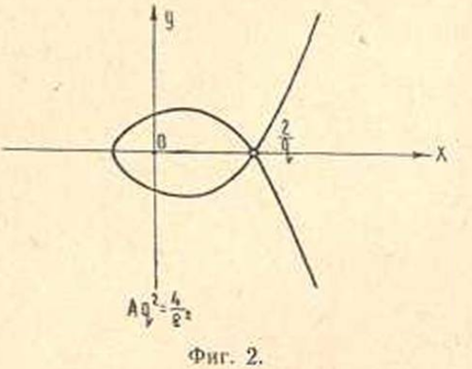
С помощью таких рядов могут выражаться решения некоторых линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка и уравнений с бесконечным множеством запаздываний.

§ 1. Линии уровня модулей членов ряда (2)

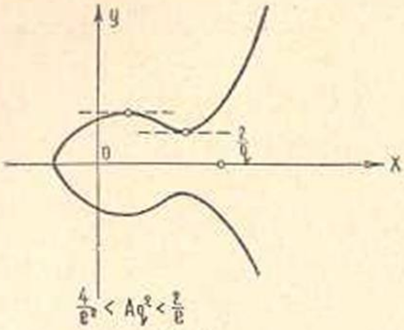
Линии уровня модулей членов ряда (2) имеют уравнения вида $x^2 + y^2 = Ae^{qx}$ $(A > 0, q > 0)$. Элементарное исследование показывает, что, в зависимости от значения величины Aq^2, эти линии имеют вид, показанный на фиг. 1—5.



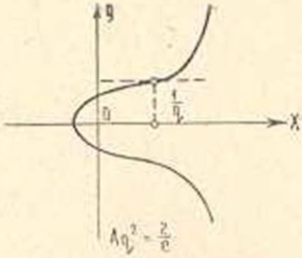
Фиг. 1.



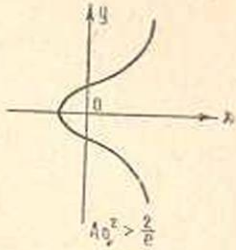
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

§ 2. Область абсолютной сходимости интеграла (1)

Пусть $A(t)$—комплексная функция с ограниченной вариацией на всяком конечном отрезке действительной положительной полуоси; $\tau(t)$—неотрицательная функция действительного переменного; $z^{\tau(t)}$— какая либо ветвь функции $e^{\tau(t)\operatorname{Ln} z}$, однозначная в плоскости с соответствующим разрезом и

$$\alpha=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\int\limits_0^r|dA(t)|}{r},\qquad \rho_1=\lim_{r\to\infty}\frac{r}{\tau(r)},\qquad \rho_2=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{r}{\tau(r)}.$$

Пусть сначала $\int\limits_0^\infty|dA(t)|=\infty$ и, следовательно, $\alpha\geqslant 0$.

Тогда, если $|z|\geqslant 1$, при любом положительном ε для n достаточно большого

$$\int\limits_n^{n+1}|z^{\tau(t)}e^{-zt}\,dA(t)|<A|z|^{\frac{n+1}{\rho_1-\varepsilon}}e^{-xn}e^{(n+1)(\alpha+\varepsilon)}=Be^{-n\left(x-\alpha-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon\right)}$$

(A и B не зависят от n).

Если точка z такова, что $\ln|z|<(x-\alpha)\rho_1$, то-есть $|z|<e^{\rho_1(x-\alpha)}$, то при достаточно малом ε будет справедливо неравенство

$$x-\alpha-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon>\delta>0,$$

а так как ряд с общим членом $e^{-n\delta}$ сходится, то интеграл (1) сходится абсолютно в области G_1: $|z|\geqslant 1$, $|z|<e^{\rho_1(x-\alpha)}$.

Если $|z|\leqslant 1$, то

$$\left|\int\limits_n^{n+1}|z^{\tau(t)}e^{-zt}\,dA(t)\right|<C|z|^{\frac{n}{\rho_2+\varepsilon}}e^{-xn}e^{(n+1)\alpha+\varepsilon},$$

откуда нетрудно заключить, что интеграл (1) сходится абсолютно также и в облаcи G_2: $|z|\leqslant 1$, $|z|<e^{\rho_2(x-\alpha)}$. Если $\rho_1=0$, то область G_1

пустая, если $\rho_2=\infty$, то область G_2 превращается в сегмент $|z|\leqslant 1$, $x>\alpha$ (если $\alpha\geqslant 1$, то область G_2, при $\rho_2=\infty$, пустая).

Из определения числа α следует, что, как мало бы ни было $\varepsilon>0$, существует такая последовательность $\{r_i\}$ $(r_i\uparrow\infty)$, что

$$\int\limits_0^{r_i}|dA(t)|>e^{r_i(\alpha-\varepsilon)}.$$

Отсюда при $|z|\geqslant 1$ и $x\geqslant 0$ имеем

$$\int\limits_0^{r_i}|z^{\tau(t)}e^{-zt}dA(t)|>e^{-xr_i}e^{r_i(\alpha-\varepsilon)}$$

и, следовательно, интеграл (1) не сходится абсолютно ни в одной точке области $|z|\geqslant 1$, $0\leqslant x<\alpha$. Если $x\leqslant 0$, $|z|\geqslant 1$, то

$$\int\limits_0^{r_i}|z^{\tau(t)}e^{-zt}dA(t)|>e^{r_i(\alpha-\varepsilon)}$$

и поэтому, в случае $\alpha>0$, интеграл (1) не сходится абсолютно в области $|z|\geqslant 1$, $x\leqslant 0$. При $\alpha=0$, $|z|\geqslant 1$, $x\leqslant 0$ равенство

$$\int\limits_0^{\infty}|z^{\tau(t)}e^{-zt}dA(t)|=\infty$$

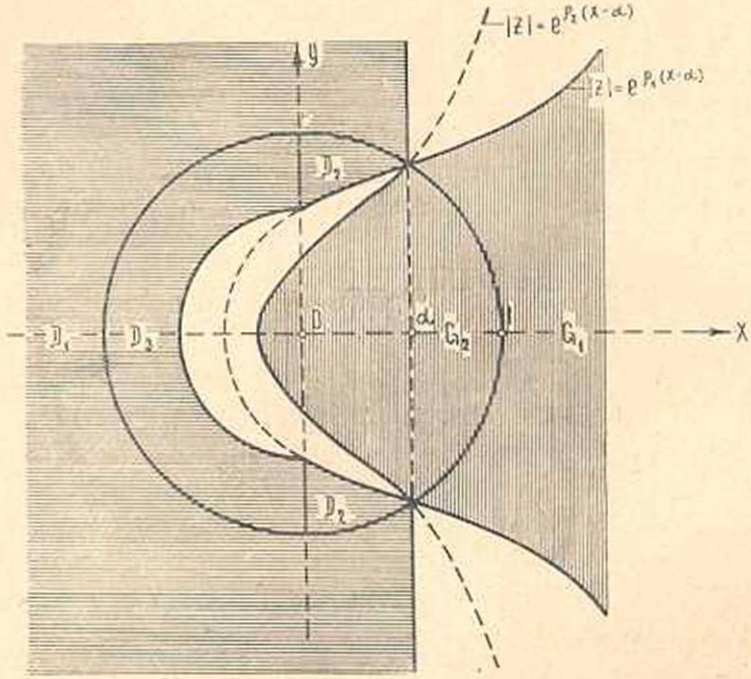
очевидно. Таким образом, интеграл (1) не сходится абсолютно в области D_1: $|z|\geqslant 1$, $x<\alpha$. Если $|z|\leqslant 1$, то сначала подберем к $\varepsilon>0$ такое A, чтобы $\tau(r)<\frac{r}{\rho_1-\varepsilon}$ при $r\geqslant A$. В силу определения числа α, к заданным ε и A можно подобрать такую последовательность $\{r_i\}$ $(r_i\uparrow\infty)$, что

$$\int\limits_A^{r_i}|dA(t)|>e^{r_i(\alpha-\varepsilon)}.$$

Тогда, при $x\geqslant 0$, будем иметь

$$\int\limits_A^{r_i}|z^{\tau(t)}e^{-zt}dA(t)|>|z|^{\frac{r_i}{\rho_1-\varepsilon}}e^{-xr_i}e^{r_i(\alpha-\varepsilon)}=e^{r_i\left(\alpha-x+\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon\right)}.$$

Отсюда очевидно, что интеграл (1) не сходится абсолютно в области D_2: $|z|\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $|z|>e^{\rho_1(x-\alpha)}$. Столь же простые выкладки показывают, что интеграл (1) не сходится абсолютно в области D_3: $e^{-\rho_1\alpha}<|z|\leqslant 1$, $x\leqslant 0$ (эта область пустая при $\alpha=0$). На фиг. 6 показаны области G_1, G_2, D_1, D_2, D_3 в случае $0<\alpha<1$ и когда кривые $|z|=e^{\rho_1(x-\alpha)}$,



Фиг. 6.

$|z|=e^{\rho_1(x-\alpha)}$ принадлежат к виду, соответствующему фиг. 3–5.

Если
$$\int_0^\infty |dA(t)| < \infty,$$
то, обозначив
$$\alpha' = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \int_r^\infty |dA(t)|}{r} \qquad (\alpha' \leqslant 0),$$
можно с помощью несложных оценок доказать, что интеграл (1) сходится абсолютно в областях $G_1'\colon |z| \geqslant 1$, $|z| < e^{\rho_1(x-\alpha')}$ и $G_2'\colon |z| \leqslant 1$, $|z| < e^{\rho_2(x-\alpha')}$ и не сходится абсолютно в области $D\colon |z| \geqslant 1$, $x \leqslant 0$, $|z| > e^{\rho_1(x-\alpha')}$. В случае $\alpha' = -\infty$ интеграл (1) сходится абсолютно во всей плоскости.

Нетрудно также доказать, что во всех случаях интеграл (1) сходится равномерно в любой конечной части области абсолютной сходимости и является функцией, аналитической в области абсолютной сходимости (на римановой поверхности или на плоскости вне соответствующего разреза).

Если выбрать функцию $A(t)$ так, что $A(t) = 0$ в интервале $[0, \lambda_1)$ и $A(t) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ в интервале $[\lambda_n, \lambda_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$, то интеграл (1) превратится в ряд (2), причем

$$m_n = \tau(\lambda_n), \quad \rho_1 = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n}, \quad \rho_2 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n},$$

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{\lambda_n}, \qquad \alpha' = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|}{\lambda_n}.$$

§ 3. Теорема Абеля для ряда (2)

Очевидно, что если ряд (2) сходится абсолютно в некоторой точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то он сходится абсолютно во всякой точке z, в которой начиная с некоторого n выполнено неравенство

$$|z|^{m_n} e^{-\lambda_n x} \leqslant |z_0|^{m_n} e^{-\lambda_n x_0} \quad \text{или} \quad |z| \leqslant |z_0| e^{\frac{\lambda_n}{m_n}(x - x_0)}.$$

Из определения чисел ρ_1 и ρ_2 получаем отсюда следующую теорему.

Теорема. *Из абсолютной сходимости ряд (2) в точке z_0 следует его абсолютная сходимость в областях $G_1 : x \geqslant x_0$, $|z| < |z_0| e^{\rho_1(x-x_0)}$ и $G_2 : x \leqslant x_0$, $|z| < |z_0| e^{\rho_2(x-x_0)}$.*

Фиг. 7.

На фиг. 7 показаны области G_1 и G_2 в случае, когда кривые $|z| = |z_0| e^{\rho_1(x-x_0)}$ и $|z| = |z_0| e^{\rho_2(x-x_0)}$ принадлежат к виду, соответствующему фиг. 3—5, а на фиг. 8 а), б)—в случае, когда эти кривые соответствуют фиг. 1.

Если $\rho_2 = \infty$, то из абсолютной сходимости ряда (2) в точке z_0 следует его абсолютная сходимость в области $x \geqslant x_0$, $|z| < |z_0| e^{\rho_1(x-x_0)}$ (фиг. 9 а), б)).

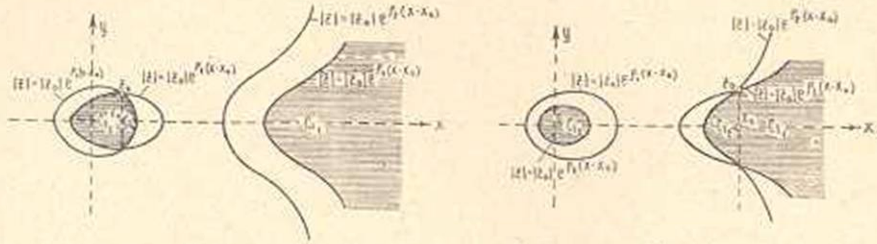
Если последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что $\ln n = o(\lambda_n)$, то доказанная теорема остается справедливой и в том случае, когда в точке z_0 ряд (2) сходится неабсолютно или даже когда в точке z_0 члены ряда (2) ограничены по модулю.

Для доказательства запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z_0^{m_n} e^{-\lambda_n z_0}| \times$$

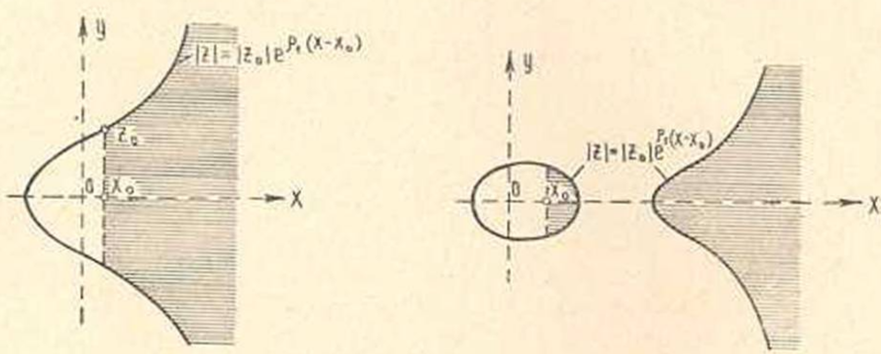
$$\times \left| \frac{z}{z_0} \right|^{m_n} e^{-\lambda_n (x-x_0)} < A \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^{m_n} e^{-\lambda_n (x-x_0)},$$

где A—постоянная. Отсюда видно, что найдутся точки, сколь угодно близкие к точке $z_0 = x_0 + iy_0$, в которых ряд (2) сходится абсолютно.



а б

Фиг. 8.



а б

Фиг. 9.

Действительно, если $y_0 \neq 0$ и точка $z^* = x^* + iy^*$ такова, что $|z^*| = |z_0|$ и $x^* = x_0 + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, то в точке z^* ряд (2) мажорируется рядом $A\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \varepsilon}$, который сходится ввиду условия $\ln n = o(\lambda_n)$. Так как области G_1^* и G_2^*, соответствующие точке z^*, сколь угодно близки к областям G_1 и G_2, то утверждение доказано.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $\ln n = o(m_n)$.

§ 4. Сходимость ряда (2) в некоторых частных случаях

Теорема. *Если выполнено условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \tag{3}$$

то ряд (2) сходится абсолютно в областях $G_1: |z| \geqslant 1,\ |z| < e^{p_1(x-k)}$ *и* $G_2: |z| \leqslant 1,\ |z| < e^{p_2(x-k)}$ *и расходится в областях* $D_1: |z| \geqslant 1,\ |z| > e^{p_2(x-k)}$ *и* $D_2: |z| \leqslant 1,\ |z| > e^{p_1(x-k)}$, *где*

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}.$$

Доказательство. В силу определения числа k при достаточно большом n имеем

$$\left|a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}\right| < e^{\lambda_n(k+\varepsilon)} |z|^{m_n} e^{-\lambda_n x} = e^{\lambda_n(k-x+\varepsilon)+m_n \ln|z|},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Но $\frac{\lambda_n}{\rho_2+\varepsilon} < m_n < \frac{\lambda_n}{\rho_1-\varepsilon}$ при достаточно большом n, поэтому в случае $|z| \geqslant 1$ получим

$$\left|a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}\right| < e^{-\lambda_n\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon\right)},$$

а в случае $|z| \leqslant 1$

$$\left|a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}\right| < e^{-\lambda_n\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_2+\varepsilon}-\varepsilon\right)},$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда (2) в областях G_1 и G_2 $\left(\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \eta}\right.$, в силу условия (3), сходится при любом положительном $\left.\eta\right)$. Из определения числа k следует также, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такая бесконечная последовательность индексов $\{n_p\}$, что

$$\left|a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}\right| > e^{\lambda_{n_p}(k-\varepsilon)+m_{n_p}\ln|z|-\lambda_{n_p} x}.$$

Следовательно, в случае $|z| \geqslant 1$, при достаточно большом p, будем иметь

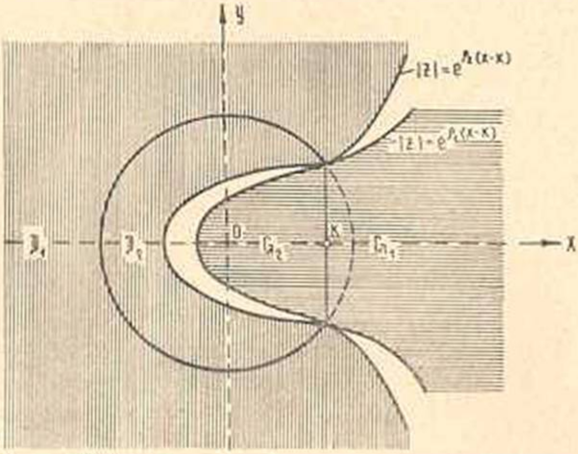
$$\left|a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}\right| > e^{-\lambda_{n_p}\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_2+\varepsilon}+\varepsilon\right)} > 1,$$

если $|z| > e^{\rho_2(x-k)}$ и ε достаточно мало, а в случае $|z| \leqslant 1$—аналогично

$$\left|a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}\right| > e^{-\lambda_{n_p}\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}+\varepsilon\right)} > 1,$$

если $|z| > e^{\rho_1(x-k)}$. Этим теорема доказана. Для случаев, соответствующих фиг. 3—5 области G_1, G_2, D_1, D_2 указаны на фиг. 10 (для $|k| < 1$).

Легко видеть, что если $k = -\infty$, то ряд (2) сходится абсолютно во всей плоскости. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, то ряд сходится абсолютно в полуплоскости $x > k$ и расходится в полуплоскости $x < k$ (за исключением, быть может, точки $z = 0$), то есть ведет себя как ряд Дирихле (см. [1]); если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = 0$, то ряд (2) сходится абсолютно в круге $|z| < 1$ и расходится вне этого круга, то есть ведет себя как ряд Тейлора; если же $\rho_2 = \infty$, то ряд (2) сходится абсолютно в об-



Фиг. 10.

ластях $|z| \geqslant 1$, $|z| < e^{\rho_1(x-k)}$ и $|z| \leqslant 1$, $x > k$ и расходится в областях $|z| \geqslant 1$, $x < k$ и $|z| \leqslant 1$, $|z| > e^{\rho_1(x-k)}$.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что, *в случае когда выполнено условие (3), существует область,* состоящая не обязательно из одной связной компоненты (см. фиг. 1), *внутри которой ряд (2) сходится абсолютно и вне которой он расходится* (точки, в которых ряд сходится неабсолютно, могут находиться только на границе этой области, так как было доказано, что в любой окрестности такой точки имеются точки абсолютной сходимости, а вместе с ними и кусок области абсолютной сходимости). Таким образом, в этом отношении, при выполнении условия (3), ряд (2) ведет себя так же как ряд Тейлора и как ряд Дирихле в аналогичном случае (см. [1]). Отсюда очевидно, что участвующие в формулировке теоремы неравенства не определяют, вообще говоря (если $\rho_1 \neq \rho_2$), точно область абсолютной сходимости и область расходимости ряда (2) при выполнении условия (3). Однако эти неравенства не могут быть улучшены. Действительно, задав произвольно действительные числа k, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, построим три ряда вида (2) следующим образом. Первые два ряда подберем так, чтобы для каждого из них $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = -\infty$; кроме того для первого ряда выберем последовательность $\{m_n\}$ так, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \rho_1$ (например, $m_n = [\lambda_n/\rho_1]$), а для второго ряда — так, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \rho_2$. Третий ряд построим так, чтобы $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = k$, а $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \rho$, где ρ — любое число, промежуточное между ρ_1 и ρ_2. Для ряда, являющегося суммой построенных рядов будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n}=\rho_1,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n}=\rho_2$$

и в то же время ряд будет сходиться абсолютно в области $|z|<e^{\rho(x-k)}$ и расходиться в области $|z|>e^{\rho(x-k)}$, так как первый и второй ряды сходятся абсолютно во всей плоскости.

Если вместо условия (3) выполнено усливие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{m_n}=0, \tag{4}$$

то имеет место следующее утверждение. *Ряд (2) сходится абсолютно в областях* $x\geqslant 0$, $|z|<e^{\rho_1 x-\varkappa}$ *и* $x\leqslant 0$, $|z|<e^{\rho_2 x-\varkappa}$ *и расходится в областях* $x\geqslant 0$, $|z|>e^{\rho_2 x-\varkappa}$ *и* $x\leqslant 0$, $|z|>e^{\rho_1 x-\varkappa}$, *где*

$$\varkappa=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{m_n}.$$

Доказательство основано на простых оценках и мы его опускаем.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}=0$, то при выполнении условия (4) ряд (2) сходится абсолютно в круге $|z|<e^{-\varkappa}$ и расходится вне его; если же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}=\infty$, то ряд сходится абсолютно в полуплоскости $x>0$ и расходится в полуплоскости $x<0$. Заметим, что если одновременно выполнены условия (3) и (4), то можно объединить соответствующие области абсолютной сходимости и расходимости.

Полученные результаты можно распространить на случай, когда $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел ($|\lambda_n|\uparrow\infty$), методом, примененным автором для обобщенных рядов Дирихле (см. [2]).

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 29 XI 1960

Գ. Լ. Լունց

ԹԵՅԼՈՐ-ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՏԻՊԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է Ստիլտեսի

$$\int_0^\infty z^{\tau(t)}e^{-zt}\,dA(t) \tag{1}$$

տեսքի ինտեգրալը, որը $A(t)$-ի համապատասխան ընտրության դեպքում բերվում է Թեյլոր-Դիրիխլեի տիպի

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{m_n}e^{-\lambda_n z} \tag{2}$$

շարքի ($\lambda_1>0$, $\lambda_n\uparrow\infty$, m_n-ը ամբողջ թվեր են)։

Որոշվում է այն տիրույթը, որտեղ (1) ինտեգրալը (համապատասխանորեն (2) շարքը) բացարձակ զուգամետ է և այն տիրույթը, որտեղ նա բացարձակ զուգամետ չէ։ (2) շարքի համար ապացուցվում է Աբելի տիպի թեորեմ։

Հայտնի է, որ Դիրիխլեի շարքի համար բացարձակ զուգամիտության տիրույթի և տարամիտության տիրույթի հետ մեկտեղ կարող է գոյություն ունենալ ոչ բացարձակ զուգամիտության տիրույթ (շերտ կամ կիսահարթություն), սակայն այն դեպքում, երբ $\ln n = o(\lambda_n)$, Դիրիխլեի շարքը իրեն պահում է այնպես, ինչպես Թեյլորի շարքը, և նրա համար գոյություն ունի այնպիսի տիրույթ (կիսահարթություն), որի ներսում նա բացարձակ զուգամետ է և որից դուրս՝ տարամետ։ Համանման պնդում ապացուցվում է Թեյլոր-Դիրիխլեի տիպի (2) շարքի համար այն դեպքում,

երբ
$$\ln n = o(\lambda_n), \tag{3}$$
կամ
$$\ln n = o(m_n)։ \tag{4}$$

Ապացուցվում է թեորեմ, որը հաստատում է, որ (3) դեպքում (2) շարքը բացարձակ զուգամետ է $G_1: |z|\geqslant 1,\ |z|<e^{\rho_1(x-k)}$ ու $G_2: |z|\leqslant 1,\ |z|<e^{\rho_2(x-k)}$ տիրույթներում և տարամետ՝ $D_1: |z|\geqslant 1,\ |z|>e^{\rho_2(x-k)}$ ու $D_2: |z|\leqslant 1,\ |z|>e^{\rho_1(x-k)}$ տիրույթներում, որտեղ

$$\rho_1=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n},\qquad \rho_2=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n},\qquad k=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}։$$

Եթե $\rho_1\neq\rho_2$, ապա G_1, G_2, D_1, D_2 տիրույթները իրենց եզրերի հետ միասին չեն ծածկում ամբողջ հարթությունը և այդ պատճառով (2) շարքի բացարձակ զուգամիտության տիրույթը (3) դեպքում, ընդհանրապես ասած, չի համընկնում G_1+G_2-ի հետ։ Սակայն ապացուցվում է, որ թեորեմայի մեջ պարունակվող արդյունքը ρ_1 և ρ_2 մեծությունների տերմիններով չի կարող բարելավվել։

G_1, G_2, D_1, D_2 տիրույթներին համանման տիրույթները կառուցվում են նաև (4) դեպքում $\left(\text{այստեղ } k \text{ մեծության փոխարեն մտցվում է } \varkappa=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{m_n}\right.$ $\left.\text{մեծությունը}\right)$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernstein V.* Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.
2. *Лунц Г. Л.* О некоторых обобщениях рядов Дирихле. „Математ. сб.“, **10** (52), № 1—2, стр. 33—50, 1942.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. А. Оганян

Разложение по собственным и присоединенным функциям краевой задачи, порожденной несамосопряженным, сингулярным дифференциальным операторам второго порядка и краевым условием, зависящим от λ

Рассмотрим краевую задачу на полуоси $[0, \infty)$

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \tag{A}$$

$$y'(0) - h(\lambda)\, y(0) = 0, \tag{B}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная функция, суммируемая на полуоси $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty |q(x)|\, dx, \tag{1}$$

а $h(\lambda)$ — четная и мероморфная функция во всей λ—плоскости, удовлетворяющая условию

$$i\lambda - h(\lambda) \to \infty, \text{ когда } \lambda \to \infty, \quad I\lambda \geqslant 0. \tag{2}$$

Целью настоящей статьи является доказательство формул разложения по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (A)—(B). Для вещественных $q(x)$ задачи с краевым условием, зависящим от λ, рассмотрены А. В. Штраусом [4]. В случае, когда $(1 + x^2)\, q(x)$—комплекснозначная функция, суммируемая на полуоси $[0, \infty)$, а $h(\lambda) \equiv \text{const}$, формулы разложения получены М. А. Наймарком [1] и Б. Я. Левиным [3]. Метод доказательства, предложенный в настоящей статье, по существу совпадает с вычетным методом Коши и отличается от методов, используемых в [1, 2, 3, 4].

§ 1. Определение и свойства некоторых решений дифференциального уравнения (A)

Как известно [2], в случае (1) уравнение (A) имеет одно решение — $e(\lambda, x)$ $(I\lambda \geqslant 0,\ 0 \leqslant x < \infty)$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) e(\lambda, t)\,dt,$$

причем $e(\lambda, x)$—при фиксированном x—голоморфная функция от λ в полуплоскости $I\lambda > 0$ и непрерывная в $I\lambda \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$.

При $\lambda \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \quad e'(\lambda, x) = i\lambda e^{i\lambda x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \tag{1.1}$$

равномерно относительно x из интервала $[0, \infty)$; для $I\lambda = 0$

$$e(\lambda, 0)\, e'(-\lambda, 0) - e'(\lambda, 0)\, e(-\lambda, 0) = -2i\lambda. \tag{1.2}$$

Пусть $v(\lambda, x)$, $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$—решения дифференциального уравнения (A), удовлетворяющие условиям:

$$v(\lambda, 0) = 1, \quad v'(\lambda, 0) = h(\lambda),$$

$$c(\lambda, 0) = 1, \quad c'(\lambda, 0) = 0,$$

$$s(\lambda, 0) = 0, \quad s'(\lambda, 0) = \lambda.$$

Заметим, что

$v(\lambda, x)$—удовлетворяет краевому условию (B) и при фиксированном x является четной и мероморфной функцией от λ во всей λ—плоскости;

$c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$—при фиксированном x—целые функции от λ, причем $s(\lambda, x)$—нечетная;

при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$ имеет место асимптотическая формула

$$s(\lambda, x) = \sin\lambda x + e^{-I\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.3}$$

равномерно относительно x из любого конечного промежутка полуоси $[0, \infty)$.

Для удобства введем следующие обозначения

$$a(\lambda) = e'(\lambda, 0) - h(\lambda)\, e(\lambda, 0), \quad \psi(\lambda, x) \equiv \frac{\lambda e(\lambda, x)}{a(\lambda)}, \quad m(\lambda) \equiv \frac{\lambda e(\lambda, 0)}{a(\lambda)}.$$

Из определения решений дифференциального уравнения (A) $e(\lambda, x)$, $v(\lambda, x)$, $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$, $\psi(\lambda, x)$ и из единственности решения задачи Коши следует, что

$$v(\lambda, x) = c(\lambda, x) + \frac{h(\lambda)}{\lambda} s(\lambda, x), \tag{1.4}$$

$$\psi(\lambda, x) = s(\lambda, x) + m(\lambda)\, v(\lambda, x), \tag{1.5}$$

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)} = -\frac{s(\lambda, x)}{e(\lambda, 0)} + \frac{\lambda e(\lambda, x)}{a(\lambda)\, e(\lambda, 0)}. \tag{1.6}$$

Пусть K—множество всех финитных функций на $[0, \infty)$ с суммируемыми производными. Для обобщенных преобразований Фурье функции $f(x)$ из K введем следующие обозначения

$$V_f(t) = \int_0^\infty f(x)\, v(\lambda, x)\, dx, \qquad C_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, c(\lambda, x)\, dx,$$

$$S_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, s(\lambda, x)\, dx, \qquad \Psi_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, \psi(\lambda, x)\, dx.$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$V_f(\lambda) = C_f(\lambda) + \frac{h(\lambda)}{\lambda} S_f(\lambda), \tag{1.7}$$

$$\Psi_f(\lambda) = S_f(\lambda) + m(\lambda)\, V_f(\lambda). \tag{1.8}$$

Пусть
$$\varphi(\lambda) \equiv \frac{1}{a(\lambda)\, e(\lambda, 0)}.$$

Лемма. *При $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$ имеют место асимптотические формулы*

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)} = -\sin\lambda x + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + $$
$$+ e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\lambda + e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\, O(1), \tag{1.9}$$

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)} = e^{-i\lambda x} O(1) + e^{i\lambda x} O(1) + e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\lambda + e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\, O(1); \tag{1.10}$$

причем при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$: $\varphi(\lambda) \to 0$.

Доказательство. Подставляя в (1.6) асимптотические формулы для $e(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ получим

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)} = -\frac{\sin\lambda x + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)} + e^{i\lambda x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\varphi(\lambda)\lambda =$$

$$= -\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left[\sin\lambda x + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\lambda + e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\, O(1) =$$

$$= -\sin\lambda x + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \sin\lambda x\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) +$$
$$+ e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\lambda + e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\, O(1).$$

Отсюда, ввиду

$$\sin\lambda x\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

получим (1.9). A из (1.9), ввиду

$$\sin\lambda x=\frac{e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x}}{2i},$$

получим (1.10). Теперь покажем, что при $\lambda\to\infty$, $I\lambda\geqslant 0$

$$\varphi(\lambda)\to 0.$$

Действительно. Из определения $a(\lambda)$ и (1.1) следует, что

$$a(\lambda)\equiv e'(\lambda,0)-h(\lambda)e(h,0)=i\lambda\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]-h(\lambda)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]=$$

$$=i\lambda-h(\lambda)+O(1)-h(\lambda)O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=i\lambda-h(\lambda)+O(1)-h(\lambda)O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+$$

$$+i\lambda O\left(\frac{1}{\lambda}\right)-i\lambda O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=i\lambda-h(\lambda)+[i\lambda-h(\lambda)]O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+O(1).$$

Отсюда, ввиду условия (2), следует, что при $\lambda\to\infty$, $I\lambda\geqslant 0$: $a(\lambda)\to\infty$, но $e(\lambda,0)=1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ поэтому при $\lambda\to\infty$, $I\lambda\geqslant 0$: $\varphi(\lambda)\to 0$. Лемма доказана.

§ 2. Основная формула

Пусть L_R—контур, идущий по вещественной оси от $-R$ к R и обходящий в верхней полуплоскости все особенности функций $\frac{h(\lambda)}{\lambda}$, $m(\lambda)$, лежащие на отрезке вещественной оси $[-R, R]$. Пусть P_R—множество всех полюсов $\frac{h(\lambda)}{\lambda}$, лежащих на отрезке вещественной оси $[-R, R]$.

В дальнейшем существенную роль играет следующая лемма.

Лемма. *Для любой $f(x)$ из K имеет место формула*

$$\int\limits_{L_R} V_f(\lambda)\,v(\lambda,x)\,m(\lambda)\,d\lambda=\int\limits_{L_R}\psi(\lambda,x)\int\limits_0^x f(t)\,v(\lambda,t)\,dt\,d\lambda+$$

$$\int\limits_{L_R} v(\lambda,x)\int\limits_x^\infty f(t)\,\psi(\lambda,t)\,dt\,d\lambda+\pi i\sum_{P_R}\operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\,v(\lambda,x)\,\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Из (1.8)

$$V_f(\lambda)\,v(\lambda,x)\,m(\lambda)=\Psi_f(\lambda)\,v(\lambda,x)-S_f(\lambda)\,v(\lambda,x)$$

отсюда

$$\int\limits_{L_R} V_f(\lambda)\,v(\lambda,x)\,m(\lambda)\,d\lambda=\int\limits_{L_R}\Psi_f(\lambda)\,v(\lambda,x)\,d\lambda-\int\limits_{L_R} S_f(\lambda)\,v(\lambda,x)\,d\lambda. \tag{2.2}$$

Очевидно, что

$$\int_{L_R} \Psi_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, dx = \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$+ \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_x^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda. \tag{2.3}$$

Два раза применив (1.5) получим

$$\int_{L_R} v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda = \int_{L_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$+ \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt\, d\lambda - \int_{L_R} s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda. \tag{2.4}$$

Подставив (2.4) в (2.3), а потом (2.3) в (2.2), получим

$$\int_{L_R} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int_{L_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$+ \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_x^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda + \int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda, \tag{2.5}$$

где

$$A(\lambda) \equiv v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt - S_f(\lambda)\, v(\lambda, x).$$

Покажем, что

$$\int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda = -\pi i \sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda). \tag{2.6}$$

Действительно. Пусть L_R^*—контур, описываемый переменной $-\lambda$, когда λ пробегает контур L_R, и направленный от R к $-R$. Заменив λ на $-\lambda$ и пользуясь нечетностью $A(\lambda)$, получим

$$\int_{L_R^*} A(\lambda)\, d\lambda = -\int_{L_R} A(-\lambda)\, d\lambda = \int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda.$$

Из теоремы Коши о вычетах и этой формулы получим

$$-2\pi i \sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda) = \int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda = \int_{L_R^*} A(\lambda)\, d\lambda = 2\int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda,$$

откуда следует формула (2.6).

Теперь покажем, что

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda) = -\sum_{P_R} \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\}. \tag{2.7}$$

Из определения $A(\lambda)$

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda) = \sum_{P_R} \operatorname{Res} \left\{ v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - \right.$$

$$\left. - s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt \right\} - \sum_{P_R} \operatorname{Res} \{ S_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \}. \tag{2.8}$$

Из (1.4) следует, что разность

$$v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt$$

является целой функцией, поэтому

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res} \left\{ v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt \right\} = 0, \tag{2.9}$$

а из (1.4) и (1.7) следует, что разность

$$S_f(\lambda)\, v(\lambda, x) - V_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)}$$

регулярна на множестве P_R, поэтому

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res} \{ S_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \} = \sum_{P_R} \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\}. \tag{2.10}$$

Из (2.8)—(2.10) следует (2.7), а из (2.5)—(2.7) следует (2.1), т. е. лемма доказана.

§ 3. Вычисление некоторых контурных интегралов

Через C_R обозначим полуокружность в верхней λ—полуплоскости радиуса R с центром в нуле, направленную по часовой стрелке.

Лемма. *Пусть* $f(x) \in K$. *Если* $\varphi(\lambda)$ *такая, что при* $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$: $\varphi(\lambda) \to 0$, *то для любого фиксированного* x *из* $(0, \infty)$ *при* $R \to \infty$

$$\int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, \lambda e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\, d\lambda \to 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \frac{i}{\lambda} f(0) - \frac{i}{\lambda} \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

ввиду этого

$$\int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, \lambda e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\, d\lambda = i f(0) \int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda +$$

$$+ i \int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\, d\lambda, \tag{3.2}$$

но в $I\lambda > 0$

$$\left| \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int\limits_0^\infty |f'(t)|\, dt < \infty$$

поэтому к обоим интегралам справа в (3.2) применима лемма Жордана.

Лемма. *Пусть $f(x) \in K$. Тогда для любого фиксированного x из $[0, \infty)$ при $R \to \infty$*

$$\int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\, e^{-i\lambda t}\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) dt\, d\lambda \to 0, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{C_R} e^{-i\lambda x} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) dt\, d\lambda \to \infty. \tag{3.4}$$

Здесь под $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ понимается функция $\varphi(\lambda, x)$ $(I\lambda \geqslant 0,\ 0 \leqslant x < \infty)$, удовлетворяющая при больших $|\lambda|$ условию

$$|\varphi(\lambda, x)| \leqslant \frac{c}{|\lambda|}$$

равномерно по x из каждого конечного интервала полуоси $[0, \infty)$.

Докажем только (3.3), так как (3.4) доказывается аналогично.

Доказательство. Обозначим

$$F(\lambda) \equiv e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\, e^{-i\lambda t}\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) dt.$$

Пусть

$$\lambda = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Очевидно, что

$$|e^{i\lambda x}| = e^{-Rx\sin\varphi}.$$

Пользуясь этим равенством легко показать, что

$$|F(\lambda)| \leqslant \left[e^{-R\delta\sin\varphi} \int_0^{x-\delta} |f(t)|\,dt + \int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\,dt \right] \frac{c}{R}, \tag{3.5}$$

где δ—любое число из $[0, x]$.

Перейдя к полярным координатам R и φ получим

$$\int_{C_R} F(\lambda)\,d\lambda = \int_0^{\pi} F(Re^{i\varphi})\,Rie^{i\varphi}\,d\varphi. \tag{3.6}$$

Из (3.6) и (3.5) следует, что

$$\left| \int_{C_R} F(\lambda)\,d\lambda \right| \leqslant \int_0^{\pi} |F(Re^{i\varphi})|\,R\,d\varphi \leqslant c \int_0^{\pi} \left[e^{-R\delta\sin\varphi} \int_0^{x} |f(t)|\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\,dt \right] d\varphi = c \int_0^{x} |f(t)|\,dt \int_0^{\pi} e^{-R\delta\sin\varphi}\,d\varphi + c\pi \int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\,dt.$$

Однако, для любого фиксированного $\delta > 0$, при $R \to \infty$

$$\int_0^{\pi} e^{-R\delta\sin\varphi}\,d\varphi \to 0,$$

а при $\delta \to 0$

$$\int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\,dt \to 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти сначала такое $\delta_\varepsilon > 0$, а потом такое R_ε, что

$$\left| \int_{C_R} F(\lambda)\,d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение (3.3) леммы.

Лемма. *Пусть $f(x) \in K$. Тогда для любого фиксированного x из $[0, \infty)$, при $R \to \infty$*

$$\int_{C_R} \psi(\lambda, x) \int_0^{x} f(t)\,v(\lambda, t)\,dt\,d\lambda \to -\frac{i\pi}{2} f(x), \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{C_R} v(\lambda, x) \int\limits_0^\infty f(t)\,\psi(\lambda, t)\,dt\,d\lambda \to -\frac{i\pi}{2} f(x).$$

Докажем только первую формулу, так как вторая доказывается аналогично.

Доказательство. Из определения $\psi(\lambda, x)$ и асимптотической формулы (1.1) следует

$$\int\limits_{C_R} \psi(\lambda, x) \int\limits_0^x f(t)\,v(\lambda, t)\,dt\,d\lambda = \int\limits_{C_R} e(\lambda, x) \int\limits_0^x f(t)\,\frac{\lambda v(\lambda, t)}{a(\lambda)}\,dt\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\,\frac{\lambda v(\lambda, t)}{a(\lambda)}\,dt\,d\lambda + \int\limits_{C_R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\,\frac{\lambda v(\lambda, t)}{a(\lambda)}\,dt\,d\lambda.$$

В первый интеграл правой части подставив (1.9), а во второй —(1.10), получим

$$\int\limits_{C_R} \psi(\lambda, x) \int\limits_0^x f(t)\,v(\lambda, t)\,dt\,d\lambda = -\int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t) \sin\lambda t\,dt\,d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\left[e^{-i\lambda t} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{i\lambda t} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\lambda +\right.$$

$$\left. + e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,O(1)\right] dt\,d\lambda + \int\limits_{C_R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\,[e^{-i\lambda t} O(1) +$$

$$+ e^{i\lambda t} O(1) + e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\lambda + e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,O(1)]\,dt\,d\lambda.$$

Из предыдущих двух лемм и леммы Жордана следует, что последние два интеграла, при $R \to \infty$, стремятся к нулю.

Остается показать, что при $R \to \infty$

$$\int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t) \sin\lambda t\,dt\,d\lambda \to \frac{i\pi}{2} f(x).$$

Пусть

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t), & \text{для } \ 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & \text{для } \ t > x. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t) \sin\lambda t\,dt\,d\lambda = \int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f^*(t) \sin\lambda t\,dt\,d\lambda =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} \int_0^\infty f^*(t) \sin \lambda t \, dt \, d\lambda = i \int_{-R}^{R} \sin \lambda x \int_0^\infty f^*(t) \sin \lambda t \, dt \, d\lambda \to$$

$$\to \frac{i\pi}{2} f^*(x) = \frac{i\pi}{2} f(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Теорема разложения

Пусть L—контур, который для любого $R > 0$ на отрезке вещественной оси $[-R, R]$ совпадает с контуром L_R. Из теоремы Коши о вычетах и формул (3.7) следует, что при $R \to \infty$

$$\int_{L_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t) v(\lambda, t) \, dt \, d\lambda + \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_x^\infty f(t) \psi(\lambda, t) \, dt \, d\lambda \to$$

$$\to -i\pi f(x) + 2\pi i \sum_N \operatorname{Res} B(\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$B(\lambda) = \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t) v(\lambda, t) \, dt + v(\lambda, x) \int_0^\infty f(t) \psi(\lambda, t) dt,$$

а N—множество всех полюсов $B(\lambda)$, расположенных над контуром L.

Лемма. *Пусть M—множество всех полюсов $h(\lambda)$, расположенных над контуром L. Тогда*

$$\sum_N \operatorname{Res} B(\lambda) = \sum_N \operatorname{Res} [V_f(\lambda) v(\lambda, x) m(\lambda)] +$$

$$\sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda) v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из формул (1.4) и (1.5) следует, что разность

$$B(\lambda) - V_f(\lambda) v(\lambda, x) m(\lambda) - S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda}$$

является целой функцией, поэтому

$$\sum_N \operatorname{Res} B(\lambda) = \sum_N \operatorname{Res} [V_f(\lambda) v(\lambda, x) m(\lambda)] +$$

$$+ \sum_N \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\}. \tag{4.3}$$

Очевидно, что

$$\sum_N \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\} = \sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\}. \tag{4.4}$$

Из формул (1.4) и (1.7) следует, что разность

$$S_f(\lambda)\, s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} - V_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)}$$

является регулярной на множестве M, а, следовательно, и на множестве $N \cap M$. Поэтому

$$\sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda)\, s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\} = \sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\}. \tag{4.5}$$

Из (4.3)—(4.5) следует утверждение (4.2) леммы.

Заметим, что N совпадает с множеством всех корней уравнения

$$p(\lambda)\, e'(\lambda, 0) - n(\lambda)\, e(\lambda, 0) = 0,$$

расположенных над контуром L, где $n(\lambda)$ и $p(\lambda)$ не имеют общих корней и $\dfrac{n(\lambda)}{p(\lambda)} \equiv h(\lambda)$.

Действительно. Из формул (1.4) и (1.5) следует, что разность

$$B(\lambda) - v(\lambda, x) \int_0^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt$$

является целой функцией, поэтому N есть множество всех полюсов функции

$$v(\lambda, x) \int_0^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt,$$

расположенных над контуром L, а

$$v(\lambda, x) \int_0^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt = \frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)} \int_0^\infty f(t)\, e(\lambda, t)\, dt =$$

$$= \frac{\lambda p(\lambda)\, c(\lambda, x) + n(\lambda)\, s(\lambda, x)}{p(\lambda)\, e'(\lambda, 0) - n(\lambda)\, e(\lambda, 0)} \int_0^\infty f(t)\, e(\lambda, t)\, dt.$$

Отсюда следует наше утверждение относительно множества N.

Теорема. *Пусть в задаче* (A)—(B): $q(x)$—*комплекснозначная и суммируемая на полуоси* $[0, \infty)$ *функция*, $h(\lambda)$—*четная и мероморфная во всей* λ—*плоскости функция, удовлетворяющая условию* $i\lambda - h(\lambda) \to \infty$, при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$.

Тогда любую $f(x)$ *из* K *можно представить в виде*

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int_L V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda + 2 \sum_N \operatorname{Res} \{ V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda) \} +$$

$$+ 2 \sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda) v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\} + \sum_P \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda)\, v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\}, \tag{4.6}$$

где L—контур, который для любого $R>0$ на отрезке вещественной оси $[-R, R]$ совпадает с контуром L_R; N—множество всех корней уравнения $p(\lambda)e'(\lambda, 0)-n(\lambda)e(\lambda, 0)=0$, расположенных над контуром L; M—множество всех полюсов $h(\lambda)$, расположенных над контуром L; P—множество всех полюсов $\frac{h(\lambda)}{\lambda}$, лежащих на вещественной оси.

Доказательство. Перейдя к пределу в формуле (2.1) при $R\to\infty$ и учитывая формулу (4.1), получим

$$\int_L V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = -i\pi f(x) + 2\pi i \sum_N \operatorname{Res} B(\lambda) + \sum_P \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\},$$

откуда

$$f(x) = -\frac{1}{i\pi}\int_L V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda + 2\sum_N \operatorname{Res} B(\lambda) + \sum_P \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}.$$

Подставив сюда (4.2) получим (4.6). Теорема доказана.

В частности, если $h(\lambda)$ и $m(\lambda)$ не имеют особенностей на вещественной оси, формулу (4.6) можно написать в виде

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)} + 2\sum_N \operatorname{Res}\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\} + 2\sum_{N\cap M} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{4.7}$$

Действительно, в этом случае контур L совпадает с вещественной осью, а на вещественной оси, как следует из формулы (1.2),

$$\frac{m(\lambda)+m(-\lambda)}{2} = -\frac{i\lambda^2}{a(\lambda)\, a(-\lambda)}. \tag{4.8}$$

Пользуясь нечетностью функции $\frac{m(\lambda)-m(-\lambda)}{2}$ и формулой (4.8) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = -i\int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)},$$

а ввиду четности функции $V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2}{a(\lambda)\, a(-\lambda)}$ —

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)} = 2\int_0^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)}.$$

Объединяя эти формулы, получим

$$\frac{i}{\pi}\int\limits_{L} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)}. \tag{4.9}$$

Подставив (4.9) в (4.6) и учтя, что множество P пусто, получим формулу (4.7), т. е. то, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Формула (4.7) доказана для $f(x)$ из K, но с помощью предельного перехода ее можно распространить на все те функции $f(x)$, для которых $f''(x) - q(x) f(x) \in L^2_{(0, \infty)}$.

Замечание 2. При $h(\lambda) \equiv \text{const}$ из формулы (4.7) получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)} +$$

$$+ 2\sum_{N} \operatorname{Res}\, [V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)], \tag{4.10}$$

где N—множество всех корней уравнения $a(\lambda) = 0$, лежащих в $I\lambda > 0$.

В случае, когда $(1 + x^2)\, q(x)$—комплекснозначная функция, суммируемая на полуоси $[0, \infty)$, формула (4.10), доказана М. А. Наймарком [1] и Б. Я. Левиным [3].

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Владимиру Александровичу Марченко, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Харьковский государственный университет Поступила 23 VII 1960

Ռ. Ա. Օհանյան

ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ԸՍՏ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԵՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ, ՈՐԸ ՏՐՎԱԾ Է ՈՉ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐՈՎ ԵՎ λ-ԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թ ե ո ր ե մ ա — Դիցուք (A)—(B) *խնդրում* $q(x)$*-ը կոմպլեքս արժեքներ ընդունող մի ֆունկցիա է, որը բավարարում է (1) պայմանին։*

$h(\lambda)$*-ն զույգ և մերոմորֆ ֆունկցիա է ամբողջ* λ*-հարթության վրա, որը բավարարում է (2) պայմանին։*

Այդ դեպքում ամեն մի $f(x)$ *ֆունկցիայի համար, որը ֆինիտ է և ունի հանրագումարելի ածանցյալ՝ տեղի ունի (4.6) բանաձևը։*

Մասնավոր դեպքում, երբ $(1 + x^2)\, q(x)$ *ֆունկցիան հանրագումարելի է* $[0, \infty)$ *կիսաառանցքի վրա,* $h(\lambda) \equiv \text{const}$, $m(\lambda)$*-ն չունի եզակիություններ*

իրական առանցքի վրա—(4.6) բանաձևը ապացուցել են Մ. Ա. Նայմարկը [1] Բ. Յա. Լևինը [3]։

Ապացույցի մեթոդը նման է Կոշիի մեթոդին և տարբերվում է [1, 2, 3, 4] աշխատություններում օգտագործված մեթոդներից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* О разложении по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. „ДАН СССР", **89**, № 2, 1953, 213—216.
2. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложения по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси. „Труды Матем. о-ва", № 3, 1954, 181—270.
3. *Левин Б. Я.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. „ДАН СССР", **106**, 1956, 187—190.
4. *Штраус А. В.* О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси. „Известия АН СССР, сер. матем.", **20**, 1956, 783—792.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян

Изгиб круглых валов с продольными зубцами или выточкой

Рассматривается задача изгиба призматических стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с симметрично-расположенными зубцами и кольца с секториальной выточкой, когда изгибающая сила действует вдоль оси симметрии. Решение задачи ищется в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю (при $p \to \infty$) свободные члены.

Подобные задачи рассматривались в работах Лейбензона [4], Стивенсона [5, 6], М. Сигара и К. Пирсона [8] и других [2, 3, 7, 9, 10].

§ 1. Постановка задачи

Пусть внешняя изгибающая сила P приложена на свободном конце стержня и действует вдоль оси симметрии поперечного сечения стержня, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [4]

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{P}{J}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma} y - \frac{1}{2} f'(y)\right] \cdot \tag{1.1}$$

а на контуре сечения удовлетворяет условию

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{J}\left[\frac{x^2}{2} - x_0 x - \frac{1}{2} f(y)\right] \frac{dy}{ds} \cdot \tag{1.2}$$

где x_0—координата центра тяжести сечения, J—осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси η, $f(y)$—произвольная функция, σ—коэффициент Пуассона.

Положим

$$f(y) = b^2 - y^2 \tag{1.3}$$

и перейдем к новым координатам следующим образом [2, 3]

$$x = be^{\xi}\cos\varphi, \quad y = be^{\xi}\sin\varphi. \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.1) и условие (1.2) примут вид

$$\nabla^2 F(t, \varphi) = -\frac{Pb^3}{J}\,\frac{1+2\sigma}{1+\sigma}\,e^{3t}\sin\varphi, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{Pb^3}{2J}\left[e^{2t} - 1 - 2\frac{x_0}{b}e^t\cos\varphi\right]\frac{d\,(e^t\cdot\sin\varphi)}{ds}. \tag{1.6}$$

Касательные напряжения при изгибе определяются формулами

$$\begin{aligned} \tau_{z\varphi}(t, \varphi) &= -\frac{1}{be^t}\,\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{Pb^2}{2J}\left[e^{2t} - 1 - 2\frac{x_0}{b}e^t\cos\varphi\right]\sin\varphi; \\ \tau_{zt}(t, \varphi) &= \frac{1}{be^t}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{Pb^2}{2J}\left[e^{2t} - 1 - 2\frac{x_0}{b}e^t\cos\varphi\right]\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.7}$$

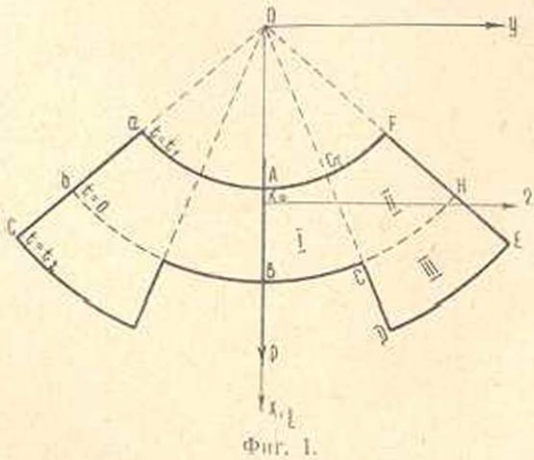
На оси симметрии $y=0$ $(\varphi = 0; \pi)$ напряжение $\tau_{z\varphi} = 0$, т. е.

$$F(t, \varphi)\Big|_{\varphi=0;\,\pi} = \text{const}. \tag{1.8}$$

§ 2. Изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с симметрично-расположенными зубцами

Рассмотрим задачу изгиба стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с симметрично-расположенными зубцами, когда изгибающая сила P проходит по оси симметрии (фиг. 1).

В силу симметрии области сечения, достаточно рассматривать только область $ABCDEFGA$. Чтобы решение, определенное в этой



Фиг. 1.

части области, распространилось на всю область сечения, требуется, чтобы на оси симметрии имело бы место соотношение (1.8).

Из граничного условия (1.6) следует

$$F(-t_1, \varphi) = \frac{Pb^3e^{-t_1}}{2J}\left[-(1-e^{-2t_1})\sin\varphi - \frac{x_0e^{-t_1}}{2b}(2\varphi + \sin 2\varphi)\right],$$

$$F(0, \varphi) = -\frac{Pb^2 x_0}{4J}(2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$F(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{t_2}}{2J}\left|(e^{2t_2}-1)\sin\varphi - \frac{x_0 e^{t_2}}{2b}(2\varphi + \sin 2\varphi)\right| + C_2,$$

$$F(t, \varphi_1) = \frac{Pb^3 \sin\varphi_1}{2J}\left|\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0 e^{2t}}{b}\cos\varphi_1\right| + C_1, \tag{2.1}$$

$$F(t, \varphi_2) = \frac{Pb^3 \sin\varphi_2}{2J}\left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0 e^{2t}}{b}\cos\varphi_2\right] + C_3.$$

Из условия непрерывности граничных значений функции $F(t, \varphi)$ в точках C, D, E, F, получим выражения для C_i $(i = 1, 2, 3)$ и координату центра тяжести

$$C_1 = \frac{Pb^3}{2J}\left|\frac{2}{3}\sin\varphi_1 - \frac{x_0\varphi_1}{b}\right|,$$

$$C_2 = \frac{Pb^3}{2J}\left|-\frac{2}{3}(e^{3t_2}-1)\sin\varphi_1 + \frac{x_0\varphi_1}{b}(e^{2t_2}-1)\right|. \tag{2.2}$$

$$C_3 = \frac{Pb^3}{2J}\frac{Pb^3}{2J}\left|\frac{2}{3}e^{-3t_1}\sin\varphi_1 - \frac{x_0 e^{-2t_1}\varphi_2}{b}\right|,$$

$$\frac{x_0}{b} = \frac{2}{3}\,\frac{(e^{3t_2} - e^{-3t_1})\sin\varphi_2 - (e^{3t_2}-1)\sin\varphi_1}{(e^{2t_2} - e^{-2t_1})\varphi_2 - (e^{2t_2}-1)\varphi_1}. \tag{2.3}$$

В области $ABCDEFGA$ функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде [1, 2, 3]

$$F(t, \varphi) = \begin{cases} F_1(t, \varphi) & \text{в области I}, \\ F_2(t, \varphi) & \text{в области II}, \\ F_3(t, \varphi) & \text{в области III}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Пользуясь условием симметрии (1.8) и граничными условиями (2.1), в силу (2.4) для $F_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ получим следующие граничные условия

$$F_1(t, 0) = 0,$$

$$F_1(-t_1, \varphi) = F_2(-t_1, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{-t_1}}{2J}\Big[-(1 - e^{-2t_1})\sin\varphi -$$

$$- \frac{x_0 e^{-t_1}}{b}(2\varphi + \sin 2\varphi)\Big],$$

$$F_1(0, \varphi) = -\frac{Pb^2 x_0}{4J}(2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$F_3(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{t_2}}{2J}\left[(e^{2t_2}-1)\sin\varphi - \frac{x_0 e^{t_2}}{2b}(2\varphi + \sin 2\varphi)\right| + C_2, \tag{2.5}$$

$$F_3(t,\varphi_1)=\frac{Pb^3\sin\varphi_1}{2J}\left[\frac{e^{3t}}{3}-e^t-\frac{x_0e^{2t_2}}{2b}\cos\varphi_1\right]+C_1,$$

$$F_2(t,\varphi_2)=F_3(t,\varphi_2)=\frac{Pb^3\sin\varphi_2}{2J}\left[\frac{e^{3t}}{3}-e^t-\frac{x_0e^{2t}}{b}\cos\varphi_2\right]+C_3,$$

$$F_1(t,\varphi_1)=F_2(t,\varphi_1),\qquad F_2(0,\varphi)=F_3(0,\varphi),$$
$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}=\left.\frac{\partial F_2}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1},\qquad \left.\frac{\partial F_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial F_3}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{2.6}$$

§ 2. Определение функции напряжений

Решив уравнение (1.5) методом разделения переменных и удовлетворив условиям (2.5) и (2.6), как это сделано в работе [3], для функций $F_i(t,\varphi)$ $(i=1,\,2,\,3)$ получим выражения

$$F_1(t,\varphi)=C\sin\varphi\left[e^{3t}+e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_1}-\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sh}t_1}\right]+\frac{Pb^3e^{-2t_1}}{J}\operatorname{sh}t\cdot\sin\varphi-$$
$$-\frac{Pb^2x_0}{4J}e^{2t}\sin2\varphi-\frac{Pb^2x_0}{2J}\left(\frac{t_1+t}{t_1}-\frac{t}{t_1}e^{-2t_1}\right)\varphi+$$
$$+\frac{2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\beta_k}\frac{\operatorname{sh}\beta_k\varphi}{\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1}\sin\beta_kt \tag{2.7}$$

в области $(-t_1<t\leqslant0,\ 0<\varphi\leqslant\varphi_1)$.

$$F_2(t,\varphi)=C\sin\varphi\left[e^{3t}+e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_1}-\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sn}t_1}\right]+\frac{Pb^3e^{-2t_1}}{J}\operatorname{sh}t\cdot\sin\varphi-$$
$$-\frac{Pb^2x_0}{4J}e^{2t}\sin2\varphi-\frac{Pb^2x_0e^{-2t_1}}{2J}\varphi-\frac{Pb^3}{2J}\left[\frac{2(1-e^{-3t_1})}{3}\frac{\varphi-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_1}\sin\varphi_2+\right.$$
$$\left.+\frac{x_0\varphi_1(1-e^{-2t_1})}{b}\frac{\varphi_2-\varphi}{\varphi_2-\varphi_1}\right]\frac{t_1+t}{t_1}-\frac{2\sin\varphi_2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{\operatorname{sh}\beta_k(\varphi-\varphi_1)}{\operatorname{sh}\beta_k(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\beta_kt+$$
$$+\frac{2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\beta_k}\frac{\operatorname{sh}\beta_k(\varphi_2-\varphi)}{\operatorname{sh}\beta_k(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\beta_kt-$$
$$-\frac{2}{\varphi_2-\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{\delta_k}\frac{\operatorname{sh}\delta_k(t_1+t)}{\operatorname{sh}\delta_kt_1}\sin\delta_k(\varphi-\varphi_1) \tag{2.8}$$

в области $(-t_1<t\leqslant0,\ \varphi_1\leqslant\varphi<\varphi_2)$.

$$F_3(t,\varphi)=C\sin\varphi\left[e^{3t}-e^{3t_2}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_2}-\frac{\operatorname{sh}(t_2-t)}{\operatorname{sh}t_2}\right]+\frac{Pb^3e^{2t_2}}{J}\operatorname{sh}t\cdot\sin\varphi+C_2-$$
$$-\frac{Pb^2x_0}{4J}e^{2t}\sin2\varphi+\frac{Pb^3}{3J}(e^{3t_2}-1)\frac{(\varphi_2-\varphi)\sin\varphi_1+(\varphi-\varphi_1)\sin\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}\cdot\frac{t_2-t}{t_2}-$$

$$-\frac{Pb^2x_0}{2J}e^{2t_1}\cdot\varphi+\frac{2}{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}E_k\left[\sin\varphi_1\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\varphi_2-\varphi)}{\operatorname{sh}\gamma_k(\varphi_2-\varphi_1)}+\sin\varphi_2\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(\varphi-\varphi_1)}{\operatorname{sh}\gamma_k(\varphi_2-\varphi_1)}\right]\sin\gamma_k t-$$

$$-\frac{2}{\varphi_2-\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{\delta_k}\frac{\operatorname{sh}\delta_k(t_2-t)}{\operatorname{sh}\delta_k t_2}\sin\delta_k(\varphi-\varphi_1) \qquad (2.9)$$

в области $(0 < t < t_2,\ \varphi_1 < \varphi \leqslant \varphi_2)$,

где

$$D_k=[1+(-1)^{k+1}e^{-3t_1}]\left[8C\frac{\beta_k}{(\beta_k^2+1)(\beta_k^2+9)}-\right.$$

$$\left.-\frac{Pb^3}{J}\frac{\beta_k^2-3}{\beta_k(\beta_k^2+1)(\beta_k^2+9)}\right],$$

$$(2.10)$$

$$E_k=[1+(-1)^{k+1}e^{3t_2}]\left[8C\frac{\gamma_k}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)}-\right.$$

$$\left.-\frac{Pb^3}{J}\frac{\gamma_k^2-3}{\gamma_k(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)}\right],$$

$$\beta_k=\frac{k\pi}{t_1},\qquad \gamma_k=\frac{k\pi}{t_2},\qquad \delta_k=\frac{k\pi}{\varphi_2-\varphi_1}. \qquad (2.11)$$

$$C=\frac{Pb^3}{8J}\frac{1+2\sigma}{1+\sigma}. \qquad (2.12)$$

Для определения неизвестных коэффициентов X_k и Y_k получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$X_p=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}Y_k+P_p,$$

$$(p=1, 2\cdots) \qquad (2.13)$$

$$Y_p=\sum_{k=1}^{\infty}b_{kp}X_k+Q_p,$$

где

$$a_{kp}=\frac{2\beta_p}{(\varphi_2-\varphi_1)[\operatorname{cth}\beta_p\varphi_1+\operatorname{cth}\beta_p(\varphi_2-\varphi)]}\cdot\frac{1}{\delta_k^2+\beta_p^2},$$

$$(2.14)$$

$$b_{kp}=\frac{2\delta_p}{t_1[\operatorname{cth}\delta_p t_1+\operatorname{cth}\delta_p t_2]}\cdot\frac{1}{\beta_k^2+\delta_p^2},$$

$$P_p=\frac{1}{\operatorname{cth}\beta_p\varphi_1+\operatorname{cth}\beta_p(\varphi_2-\varphi_1)}\left\{\frac{Pb^3}{2J\beta_p(\varphi_2-\varphi_1)}\left[\frac{2(1-e^{-3t_1})}{3}\sin\varphi_2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{x_0\varphi_2}{b}(1-e^{-2t_1})\right]-\frac{\beta_p D_p}{\operatorname{sh}\beta_p(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\varphi_2\right\}, \qquad (2.15)$$

$$Q_p = \frac{\delta_p}{\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2}\left\{B_p\left[[\sin\varphi_1 + (-1)^{p+1}\sin\varphi_2]\left(\operatorname{cth}\delta_p t_2 - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh}\delta_p t_2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \sin\varphi_2\left(\operatorname{cth}\delta_p t_1 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh}\delta_p t_1}\right)\right] + \left(\frac{Pb^3}{2J} - C\right)\left(\operatorname{cth} t_1 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} t_1}\right)\frac{\sin\varphi_1}{\delta_p^2 - 1} +$$

$$\left. + \left(3C - \frac{Pb^3}{2J}\right)\frac{\sin\varphi_1}{\delta_p^2 - 9} - \frac{Pb^2 x_0}{J}\frac{(1 - e^{-2t_1})\varphi_1}{2t_1\delta_p^2}\right\}, \tag{2.16}$$

$$B_p = 8C\frac{\delta_p}{(\delta_p^2 - 1)(\delta_p^2 - 9)} - \frac{Pb^3}{J}\frac{\delta_p^2 + 3}{\delta_p(\delta_p^2 - 1)(\delta_p^2 - 9)}. \tag{2.17}$$

Покажем, что системы (2.13) вполне регулярны. Действительно, для суммы модулей коэффициентов систем (2.13) имеют место следующие неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kp}| = \frac{\operatorname{cth}\beta_p(\varphi_2 - \varphi_1) - 1/\beta_p(\varphi_2 - \varphi_1)}{\operatorname{cth}\beta_p(\varphi_2 - \varphi_1) + \operatorname{cth}\beta_p\varphi_1} < \frac{1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{kp}| = \frac{\operatorname{cth}\delta_p t_1 - 1/\delta_p t_1}{\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2} < \frac{1}{2}, \tag{2.18}$$

т. е. системы (2.13) оказались вполне регулярными.

Легко увидеть из (2.15)—(2.17), что свободные члены систем (2.13) ограничены сверху и, при $p \to \infty$, стремятся к нулю.

Числовые примеры. В качестве числовых примеров рассмотрен изгиб стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с внешними симметрично расположенными зубцами, с размерами

$$t_1 = t_2 = 0{,}270; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 0{,}2366; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ и } \pi.$$

Для этих случаев вычислены значения касательных напряжений в некоторых точках, которые показаны на фиг. 2 и 3.

Частные случаи. Рассмотрим изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с трещиной (фиг. 4). Решение этой задачи получается из формул (2.7)—(2.9), переходя к пределу $\varphi_1 = 0$. Для функции напряжений получаем следующие выражения

$$F_2(t,\varphi) = C\sin\varphi\left[e^{3t} + e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1}\right] + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J}\operatorname{sh} t\cdot\sin\varphi -$$

$$- \frac{Pb^2 x_0}{4J}e^{2t}\sin 2\varphi - \frac{Fb^2 x_0 e^{-2t_1}}{2J}\varphi - \frac{Pb^3\sin\varphi_2}{3J\varphi_2}(1 - e^{-3t_1})\varphi\frac{t_1 + t}{t_1} -$$

$$- \frac{2\sin\varphi_2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}B_k}{\operatorname{cth}\delta_k t_1 + \operatorname{cth}\delta_k t_2}\left(\operatorname{cth}\delta_k t_1 + \operatorname{cth}\delta_k t_2 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh}\delta_k t_1} - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh}\delta_k t_2}\right)\times$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\delta_k(t_1 + t)}{\operatorname{sh}\delta_k t_1}\sin\delta_k\varphi - \frac{2\sin\varphi_2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{\operatorname{sh}\beta_k\varphi}{\operatorname{sh}\beta_k\varphi_2}\sin\beta_k t \tag{2.19}$$

в области $(0 < \varphi < \varphi_2, \; -t_1 < t < 0)$,

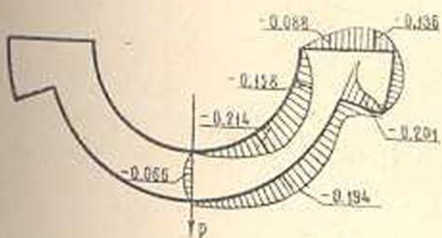
$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} - e^{3t_2} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_2} - \frac{\operatorname{sh}(t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \right] + \frac{Pb^3 e^{2t_2}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin\varphi -$$

$$- \frac{Pb^3 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{Pb^3 \sin \varphi_2}{3J\varphi_2} (e^{3t_2} - 1) \varphi \frac{t_2 - t}{t_2} - \frac{Pb^2 x_0}{2J} e^{2t_2} \varphi -$$

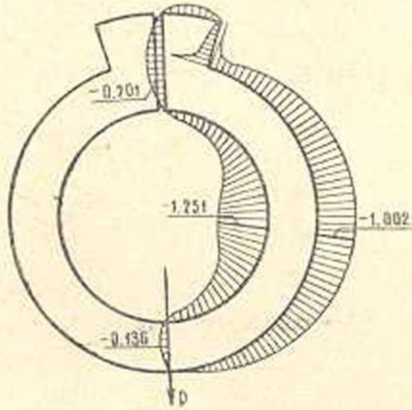
$$- \frac{2 \sin \varphi_2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} B_k}{\operatorname{cth} \delta_k t_1 + \operatorname{cth} \delta_k t_2} \left(\operatorname{cth} \delta_k t_1 + \operatorname{cth} \delta_k t_2 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \right) \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \sin \delta_k \varphi + \frac{2 \sin \varphi_2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \varphi}{\operatorname{sh} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t \qquad (2.20)$$

в области $(0 < \varphi < \varphi_2,\ 0 < t < t_2)$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

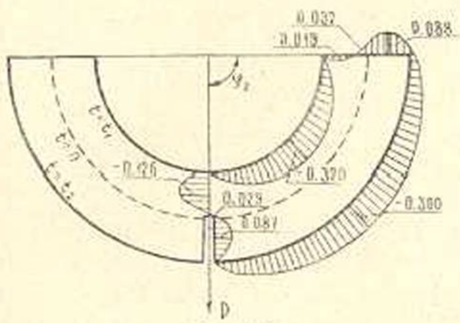
Для рассмотренного случая использованы значения

$$X_p = 0,$$

$$Y_p = \frac{(-1)^{p+1} \delta_p \sin \varphi_2}{\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2} \left(\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} \delta_p t_1} - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh} \delta_p t_2} \right) B_p, \qquad (2.21)$$

полученные из (2.13)—(2.16) соответствующим предельным переходом.

Для этого случая приведен числовой пример, когда $t_1 = t_2 = 0{,}270$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Вычислены значения касательных напряжений в некоторых точках контура, которые приведены на фиг. 4.



Фиг. 4.

При $\varphi_2 = \pi$ (фиг. 5) формулы (2.19) и (2.20) упрощаются и принимают вид

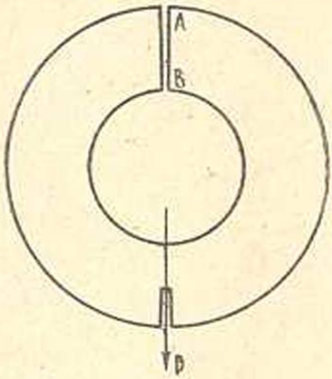
$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi \left| e^{3t} + e^{-3t_1} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right| + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi -$$

$$-\left(2C-\frac{Pb^3}{J}\right)\frac{e^{2t_2}-e^{-2t_1}}{\operatorname{cth}t_1+\operatorname{cth}t_2}\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sh}t_1}\sin\varphi, \tag{2.22}$$

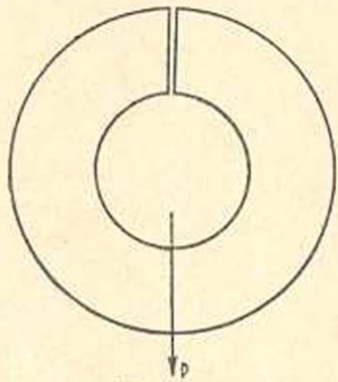
$$F_3(t,\varphi)=C\sin\varphi\left[e^{3t}-e^{3t_2}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_2}-\frac{\operatorname{sh}(t_2-t)}{\operatorname{sh}t_2}\right]+\frac{Pb^3e^{2t_2}}{J}\operatorname{sh}t\,\sin\varphi-$$

$$-\left(2C-\frac{Pb^3}{J}\right)\frac{e^{2t_2}-e^{-2t_1}}{\operatorname{cth}t_1+\operatorname{cth}t_2}\frac{\operatorname{sh}(t_2-t)}{\operatorname{sh}t_2}\sin\varphi. \tag{2.23}$$

Переходя к пределу при $t_2=0$, из формулы (2.22) получим формулу функции напряжений для кольца с трещиной (фиг. 6)



Фиг. 5.



Фиг. 6.

$$F_2(t,\varphi)=C\sin\varphi\left[e^{3t}+e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_1}-\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sh}t_1}\right]+$$

$$+\frac{Pb^3e^{-2t_1}}{J}\operatorname{sh}t\cdot\sin\varphi. \tag{2.24}$$

Ниже приводятся значения напряжений на некоторых линиях ($\sigma=0{,}3$, $t_1=0{,}270$)

$$\tau_{zr}\left(-\frac{t_1}{2},\varphi\right)=\frac{Pb^3}{J}0{,}00863\cdot\cos\varphi,$$

$$\tau_{z\varphi}(0,\varphi)=-\frac{Pb^2}{J}0{,}67352\cdot\sin\varphi,$$

$$\tau_{z\varphi}\left(-\frac{t_1}{2},\varphi\right)=-\frac{Pb^2}{J}0{,}78528\cdot\sin\varphi,$$

$$\tau_{z\varphi}(-t_1,\varphi)=-\frac{Pb^2}{J}0{,}90922\cdot\sin\varphi.$$

Из формулы (2.19), предельным переходом $t_2=0$, после некоторого преобразования получим решение для кольцевого сектора

$$F_2(t,\varphi)=Ce^{3t}\left(\sin\varphi-\sin\varphi_2\frac{\sin3\varphi}{\sin3\varphi_2}\right)-\frac{Pb^3}{2J}e^t\sin\varphi-$$

$$-\frac{Pb^2x_0}{4J}e^{2t}\sin 2\varphi+\frac{Pb^3}{6J}e^{3t}\frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2}\sin\varphi_2+$$

$$+\frac{2\sin\varphi_2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_k\left[\frac{\operatorname{sh}\delta_k(t_1+t)}{\operatorname{sh}\delta_k t_1}-e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh}\delta_k t}{\operatorname{sh}\delta_k t_1}\right]\sin\delta_k\varphi \tag{2.25}$$

в области $(-t_1<t<0,\ 0<\varphi<\varphi_2)$.

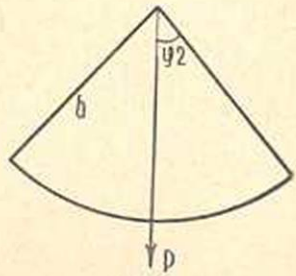
Отсюда, перейдя к пределу при $t_1\to\infty$ $(ae^{t_1}=b)$, получим решение для кругового сектора (фиг. 7)

$$F_2(t,\varphi)=Ce^{3t}\left(\sin\varphi-\sin\varphi_2\frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2}\right)-\frac{Pb^3}{2J}e^t\sin\varphi-$$

$$-\frac{Pb^2x_0}{4J}e^{2t}\sin 2\varphi+\frac{Pb^3}{6J}\sin\varphi_2\frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2}e^{3t}+$$

$$+\frac{2\sin\varphi_2}{\varphi_2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_k e^{\delta_k t}\sin\delta_k\varphi \tag{2.26}$$

в области $(-\infty<t<0,\ 0<\varphi<\varphi_2)$.



Фиг. 7.

Последние две формулы совпадают с результатами, полученными М. Сигаром и К. Пирсоном [8] другим путем.

Интересно отметить, что в этом случае при $\frac{\pi}{2}<\varphi_2\leqslant\pi$ касательные напряжения в точке 0 не обращаются в бесконечность.

Из последней формулы, при $\varphi_2=\pi$, получается функция напряжений при изгибе круглого вала с трещиной до центра

$$F_2(t,\varphi)=C\sin\varphi\,[e^{3t}-e^t]. \tag{2.27}$$

Так как эта функция совпадает с функцией напряжений для круглого вала без трещины, полученной Л. С. Лейбензоном [4], то следует, что в этом случае наличие трещины не влияет на значения касательных напряжений.

§ 3. Изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольца с секториальной выточкой

Рассматривается задача изгиба стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца с симметрично расположенной выточкой, когда изгибающая сила P проходит по оси симметрии (фиг. 8).

Интегрируя граничное условие (1.6) по контуру сечения, получим

$$F(-t_1,\varphi)=\frac{Pb^3e^{-t_1}}{2J}\left[-(1-e^{-2t_1})\sin\varphi-\frac{x_0e^{-t_1}}{2b}(2\varphi+\sin 2\varphi)\right],$$

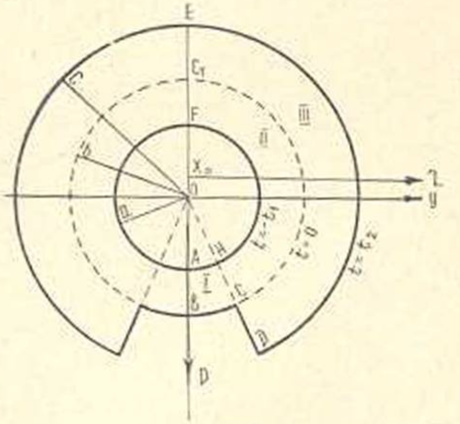
$$F(0,\varphi)=-\frac{Pb^2x_0}{4J}(2\varphi+\sin 2\varphi).$$

$$F(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3e^{t_2}}{2J}\left[(e^{2t_2}-1)\sin\varphi - \frac{x_0e^{t_2}}{2b}(2\varphi+\sin 2\varphi)\right] + C_2,$$

$$F(t, \varphi_1) = \frac{Pb^3\sin\varphi_1}{2J}\left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0}{b}e^{2t}\cos\varphi_1\right] + C_3, \tag{3.1}$$

$$F(t, \pi) = C_1, \quad F(t, 0) = 0.$$

Обеспечивая непрерывность граничных значений функции напряжений в точках C, D, E, F, получим значения $C_i (i = 1, 2, 3)$ и формулу для координаты центра тяжести поперечного сечения вала



Фиг. 8.

$$C_1 = -\frac{Pb^2e^{-2t_1}x_0\pi}{2J},$$

$$C_2 = \frac{Pb^2(e^{2t_2}-e^{-2t_1})x_0\pi}{2J}, \tag{3.2}$$

$$C_3 = \frac{Pb^3}{2J}\left[\frac{2}{3}\sin\varphi_1 - \frac{x_0\varphi_1}{b}\right],$$

$$\frac{x_0}{b} = -\frac{2}{3}\times$$

$$\times\frac{(e^{3t_2}-1)\sin\varphi_1}{(e^{2t_2}-e^{-2t_1})\pi-(e^{2t_1}-1)\varphi_1}. \tag{3.3}$$

В области $ABCDEGFHA$ функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде (2.4). Тогда из (3.1) и (2.4) для функции $F_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ получим следующие граничные условия и условия сопряжения

$$F_1(t, 0) = 0,$$

$$F_1(0, \varphi) = -\frac{Pb^2x_0}{4J}(2\varphi+\sin 2\varphi),$$

$$F_1(-t_1, \varphi) = F_2(-t_1, \varphi) =$$

$$= \frac{Pb^3e^{-t_1}}{2J}\left[-(1-e^{-2t_1})\sin\varphi - \frac{x_0e^{-t_1}}{2b}(2\varphi+\sin 2\varphi)\right],$$

$$F_3(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3e^{t_2}}{2J}\left[(e^{2t_2}-1)\sin\varphi - \frac{x_0e^{t_2}}{2b}(2\varphi+\sin 2\varphi)\right] + C_2,$$

$$F_3(t, \varphi_1) = \frac{Pb^3\sin\varphi_1}{2J}\left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0}{b}e^{2t}\cos\varphi_1\right] + C_3, \tag{3.4}$$

$$F_2(t, \pi) = F_3(t, \pi) = C_1,$$

$$F_1(t, \varphi_1) = F_2(t, \varphi_1), \qquad F_2(0, \varphi) = F_3(0, \varphi), \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1} = \left.\frac{\partial F_2}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}, \qquad \left.\frac{\partial F_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial F_3}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Решив уравнение (1.5) и удовлетворив условиям (3.4) и (3.5), для функций $F_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ получим следующие выражения

$$F_1(t, \varphi) = C \sin\varphi \left[e^{3t} + e^{-3t_1} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] -$$

$$- \frac{Pb^2 x_0}{2J} \left(\frac{t_1 + t}{t_1} - \frac{t}{t_1} e^{-2t_1} \right) \varphi + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin\varphi -$$

$$- \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{X}_k}{\beta_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t \tag{3.6}$$

в области $(0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1, \ -t_1 \leqslant t \leqslant 0)$,

$$F_2(t, \varphi) = C \sin\varphi \left[e^{3t} + e^{-3t_1} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] -$$

$$- \frac{Pb^2 x_0 \varphi_1}{2J} \left(\frac{t_1 + t}{t_1} - \frac{t}{t_1} e^{-2t_1} \right) \frac{\pi - \varphi}{\pi - \varphi_1} + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin\varphi -$$

$$- \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{X}_k}{\beta_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k (\pi - \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k (\pi - \varphi_1)} \sin \beta_k t -$$

$$- \frac{2}{\pi - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{Y}_k}{\delta_k} \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} \sin \delta_k (\varphi - \varphi_1) \tag{3.7}$$

в области $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \ -t_1 \leqslant t \leqslant 0)$

$$F_3(t, \varphi) = C \sin\varphi \left[e^{3t} - e^{3t_2} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_2} - \frac{\operatorname{sh}(t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \right] -$$

$$- \frac{Pb^3 \sin\varphi_1}{3J} (e^{3t_2} - 1) \frac{\pi - \varphi}{\pi - \varphi_1} \cdot \frac{t}{t_2} + \frac{Pb^3 e^{2t_2}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin\varphi -$$

$$- \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi - \frac{Pb^2 x_0}{2J} \frac{\varphi_1 (\pi - \varphi_1) + \pi e^{-2t_1} (\varphi - \varphi_1)}{\pi - \varphi_1} -$$

$$- \frac{2}{\pi - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{Y}_k}{\delta_k} \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \sin \delta_k (\varphi - \varphi_1) +$$

$$+ \frac{2 \sin\varphi_1}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\pi - \varphi)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\pi - \varphi_1)} \sin \gamma_k t \tag{3.8}$$

в области $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \ 0 \leqslant t \leqslant t_2)$,

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \qquad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \qquad \delta_k = \frac{k\pi}{\pi - \varphi_1}. \tag{3.9}$$

Для определения постоянных $\overline{X}_k$ и $\overline{Y}_k$ получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$\overline{X_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_{kp}\, \overline{Y_k} + \overline{P_p},$$

$$(p = 1, 2, \cdots) \qquad (3.10)$$

$$\overline{Y_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b}_{kp}\, \overline{X_k} + \overline{Q_p},$$

где

$$\overline{a}_{kp} = \frac{2\beta_p}{(\pi - \varphi_1)\left[\operatorname{cth}\beta_p \varphi_1 + \operatorname{cth}\beta_p (\pi - \varphi_1)\right]} \cdot \frac{1}{\delta_k^2 + \beta_p^2},$$

$$(3.11)$$

$$\overline{b}_{kp} = \frac{2\delta_p}{t_1\left[\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2\right]} \cdot \frac{1}{\beta_k^2 + \delta_p^2},$$

$$\overline{Q}_p = -\frac{Pb^2 x_0 \pi \left(1 - e^{-2t_1}\right)}{2J\beta_p(\pi - \varphi_1)\left[\operatorname{cth}\beta_p \varphi_1 + \operatorname{cth}\beta_p(\pi - \varphi_1)\right]}, \qquad (3.12)$$

$$\overline{P}_p = \frac{\delta_p \cdot \sin\varphi_1}{\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2}\left\{B_p + \left(\frac{Pb^3}{2J} - C\right)\left(\operatorname{cth} t_1 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} t_1}\right)\frac{1}{\delta_p^2 - 1} + \right.$$

$$\left. + \left(3C - \frac{Pb^3}{2J}\right)\frac{1}{\delta_p^2 - 9} - \frac{Pb^2 x_0 \varphi_1}{J\delta_p^2} \cdot \frac{1 - e^{-2t_1}}{2t_1 \cdot \sin\varphi_1}\right\}. \qquad (3.13)$$

Эти системы вполне регулярны (см. 2.18), а свободные члены этих систем ограничены сверху и, при $p \to \infty$, стремятся к нулю.

Числовой пример. В качестве числового примера рассмотрен изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольца с трещиной. Принято

$$\frac{c}{a} = 2, \quad \frac{b}{a} = \frac{5}{3}, \quad \frac{c-b}{b-a} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = 0{,}2 = 11^\circ 27'$$

($t_1 = 0{,}51083$; $t_2 = 0{,}18232$). Вычислены значения касательных напряжений в некоторых точках, которые приведены в таблицах 1 и 2.

Из таблицы 1 видно, что максимальные значения касательного напряжения $\tau_{z\varphi}$ получаются на внутреннем контуре.

Таблица 1

$$-\tau_{z\varphi}(t, \varphi) \Big/ \frac{Pb^2}{J}$$

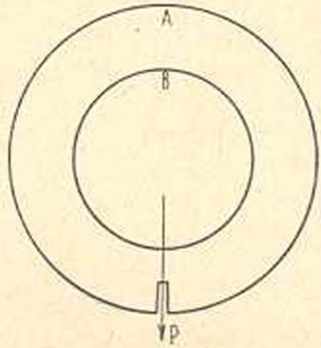
t \ φ	0	$\frac{\varphi_1}{2}$	φ_1	$\varphi_1 + 30^\circ$	$\varphi_1 + 60^\circ$	$\varphi_1 + 90^\circ$	$\varphi_1 + 120^\circ$	$\varphi_1 + 150^\circ$	π
$-t_1$	0	0,0923	0,1480	0,6497	0,9856	1,0354	0,7981	0,3405	0
$-\frac{t_1}{2}$	0	0,0704	0,1279	0,5264	0,8025	0,8422	0,6482	0,2774	0
0	0	0,0463	∞	0,4680	0,7008	0,7395	0,5686	0,2385	0
$\frac{t_2}{2}$	—	—	0	0,4377	0,6447	0,6799	0,5289	0,2244	0
t_2	—	—	0	0,4088	0,6105	0,6500	0,5029	0,2110	0

Таблица 2

$$\tau_{zr}\left(-\frac{t_1}{2},\varphi\right)\Big/\frac{Pb^2}{J}$$

$\varphi=0$	$\frac{\varphi_1}{2}$	φ_1	φ_1+30°	φ_1+60°	φ_1+90°	φ_1+120°	φ_1+150°	π
0,0630	0,0640	0,0693	0,0764	0,0311	−0,0246	0,0775	−0,1108	−0,1177

Частные случаи. Из формул (3.6)—(3.13), перейдя к пределу при $\varphi_1=0$, получим решение задачи изгиба для полого вала с трещиной (фиг. 9). Это решение совпадает с формулами (2.22) и (2.23), т. е. наличие трещины AB на оси симметрии $\varphi=\pi$, $(-t_1, t_2)$ в этом случае не имеет никакого значения для касательных напряжений.



Фиг. 9.

Для полого вала без трещины функция напряжений принимает вид

$$F_1(t,\varphi)=C\sin\varphi\left[e^{3t}+e^{-3t_1}\,\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_1}-\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sh}t_1}\right]+$$

$$+\frac{Pb^3e^{-2t_1}}{J}\operatorname{sh}t\cdot\sin\varphi. \qquad (3.14)$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 XI 1960

Ա. Հ. Բաբլոյան

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԱԿՈՍ ԿԱՄ ԱՏԱՄՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԼՈՐ ՁՈՂԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է պրիզմատիկ ձողերի ծռման խնդիրը, երբ ձողի լայնական կտրվածքը իրենից ներկայացնում է՝

ա) սիմետրիկ ձևով դասավորված ատամներով օղակային սեկտոր,

բ) օղակային սեկտորի տեսք ունեցող ակոսով շրջանային օղակ, երբ ծռող ուժը անցնում է հատվածքի սիմետրիայի առանցքով։

Խնդիրը բերված է գծային անվերջ սիստեմների լուծմանը, ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները լիովին ռեգուլյար են, իսկ ազատ անդամներն ունեն $O\left(\frac{1}{k}\right)$ *կարգը։ Դիտարկված են մի քանի մասնավոր դեպքեր, բերված են թվային օրինակներ։*

Նման խնդիրներ դիտարկվել են Լեյբենզոնի [4], Սախիենսանի [5, 6] ու Միգարի և Գիրանի [8] աշխատություններում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „ПММ“, **13**, в. 1, 1949.
2. *Абрамян Б. Л.* Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы. „ДАН АрмССР“, **28**, № 3, 1959.
3. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Кручение круглых стержней, имеющих продольные выточки. „ПММ“, **24**, № 2, 1960.
4. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Огиз, Гостехизд-т, М.—Л., 1947.
5. *Stevenson A. C.* The centre of flexure of a hollow shaft. „Proc. Lond. Math. Soc.“ (2), 50, 1949.
6. *Stevenson A. C.* Flexure with shear and associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross-sections. „Philosophical Transaction of the Royal Society of London“, Ser. A., vol. 237, 1939.
7. *Зволинский Н. В.* Некоторые случаи точного решения проблемы о центре изгиба. „Труды ЦАГИ“, вып. 249, 1936.
8. *Mary Seegar*, Karl Pearson. De Saint-Venant solution for the Flexure... „Proc. Roy. Soc.“ Ser. A, vol. 96, № A. 676, 1919.
9. *Бурак Я. Й.* Деякі задачі кручення та згину призматичних стержнів. Изд. АН УкрССР, Киев, 1959.
10. *Юнг, Элдертон* и *Пирсон* (Young, Elderton and K. Pearson). On the torsion resulting from flesure in prismatic cross sections of uniaxial symmetry only. „Drapers Company Research Memoirs“. Tech. Series 7, 1918, 175.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных призматических стержней сечением в виде удлиненного авиационного профиля

Впервые задача о кручении изотропного и ортотропного стержня сечением в виде авиационного профиля, как частного, так и общего типа, была приближенно решена, исходя из вариационного уравнения Лагранжа и из вариационной формулы Кастилиано, академиком Л. С. Лейбензоном [1].

Позднее, та же задача для изотропного стержня сечением в виде авиационного профиля частного типа, т. е. сечением, ограниченным полукубической параболой, методом малого параметра была решена Дунканом [2] и тем же методом, но довольно строго математически обосновано — Д. Ю. Пановым [3, 4].

Та же задача в более общей постановке методом функций комплексного переменного приближенно решена Икуи [5].

Приближенное решение задачи о кручении анизотропного стержня, имеющего только одну плоскость симметрии, нормальную к оси (т. е. неортотропного), сечением, ограниченным полукубическими параболами, было найдено В. Д. Ванториным [6]*.

Решение задачи кручения неортотропного стержня методом малого параметра получено А. Р. Янпольским [22] и нами в работе [8].

В настоящей работе рассматривается задача о кручении неортотропных стержней сечениями в виде удлиненного авиационного профиля общего типа. По методу малого параметра получены выражения функций напряжений, жесткости и касательных напряжений, определены максимальные напряжения.

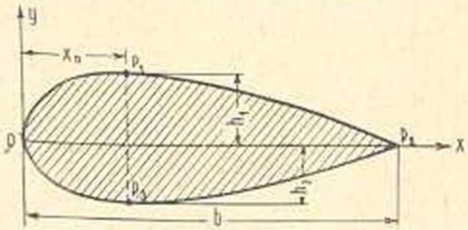
Исследованы вопросы о точности приближенных формул жесткости кручения. Полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами.

* В. Д. Ванторин решил дифференциальное уравнение А. Ш. Локшина [7] в задаче кручения анизотропной (неортотропной) призмы методом Ритца, ограничиваясь первым приближением. Если в результатах, полученных В. Д. Ванториным [6], перейти от модулей упругости c_{ij} к коэффициентам деформации a_{ij} $(i, j = 4, 5)$, то заметим, что выржения жесткости и касательных напряжений не зависят от коэффициента деформации a_{45}, иначе говоря, получим решение задачи о кручении ортотропного стержня. На наш взгляд правильным было бы ограничиться не первым приближением решения уравнения кручения неортотропного стержня, а хотя бы вторым или третьим, чтобы выявилось влияние неортотропности материала.

Как частный случай, получены результаты для кручения анизотропных стержней сечением в виде удлиненного параболического серпа, параболического сегмента и полукубической параболы.

§ 1. Постановка и решение задачи

Пусть поперечное сечение стержня ограничено двумя кривыми OP_1P_2 и OP_3P_2 (фиг. 1), заданными следующими уравнениями



Фиг. 1.

$$y = a\left(\frac{x}{b}\right)^m \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q, \tag{1.1}$$

$$y = -a_1\left(\frac{x}{b}\right)^m \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q, \tag{1.2}$$

где a, a_1 — постоянные коэффициенты, m, p, q — положительные числа, b — ширина профиля.

Область, ограниченную кривыми (1.1) и (1.2), следуя академику Л. С. Лейбензону, назовем авиационным профилем.

Определим коэффициенты a и a_1. Легко видеть, что ордината y получает свое максимальное значение при значении абсциссы

$$x_0 = b \cdot \left(\frac{m}{m + pq}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Тогда, при помощи уравнений (1.1), (1.2) и выражения (1.3), находим

$$\begin{aligned} a &= \Delta(m, p, q) \cdot h_1, \\ a_1 &= \Delta(m, p, q) \cdot h_2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\Delta(m, p, q) = \Delta = \frac{(m + pq)^{\frac{m+pq}{p}}}{m^{\frac{m}{p}}\,(pq)^q}, \tag{1.5}$$

а h_1 и h_2 — наибольшие высоты профиля (соответственно верхняя и нижняя).

Так как поперечное сечение представляет собой узкую, длинную область, то отношение

$$\lambda = \frac{h_1 + h_2}{2b} \qquad 0 < \lambda < \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

естественно принять в качестве малого параметра. Тогда очертание авиационного профиля (1.1)—(1.2) можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} y &= \lambda c_1 \varphi(x), \\ y &= \lambda c_2 \varphi(x), \end{aligned} \tag{1.7}$$

которые эквивалентны уравнению

$$F(x, y) = [y - \lambda c_1 \varphi(x)] \cdot [y - \lambda c_2 \varphi(x)] = 0. \tag{1.7'}$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi(x) = x^m (b^p - x^p)^q, \qquad c_1 = \frac{2h_1\Delta}{(h_1 + h_2)\, b^{m+pq-1}},$$

$$c_2 = -\frac{2h_2\Delta}{(h_1 + h_2)\, b^{m+pq-1}},$$

$F(x, y) = 0$ — уравнение кривой, ограничивающей поперечное сечение стержня.

Как известно [9], задача о кручении анизотропного стержня, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси (т. е. неортотропного), сводится к решению уравнения

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2\theta \tag{1.8}$$

с граничным условием $\Psi(x, y) = 0$ вдоль кривой $F(x, y) = 0$.

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений, a_{ik} — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \tag{1.9}$$

θ — относительный угол закручивания.

Положим

$$y = \lambda\eta \quad \Psi(x, y) = \Phi(x, \eta; \lambda). \tag{1.10}$$

Имея в виду (1.10), уравнение (1.8) и граничное условие можно написать так

$$\lambda^2 a_{11} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\lambda a_{12} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = -2\theta\lambda^2, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} &\Phi[x, c_1\varphi(x); \lambda] = 0, \\ &\Phi[x, c_2\varphi(x); \lambda] = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Представим решение (1.11) в виде ряда по степеням λ*

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, \eta) \cdot \lambda^k. \tag{1.13}$$

Тогда, при помощи (1.11)—(1.13), для определения неизвестных функций $P_k(x, \eta)$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ получатся следующие рекуррентные дифференциальные уравнения с соответствующими граничными условиями [8]

---

* Асимптотическая сходимость этого ряда довольно строго математически доказана в работе [8].

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} &= 0,\\ -2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 P_0}{\partial x\partial\eta} + a_{22}\cdot\frac{\partial^2 P_1}{\partial \eta^2} &= 0,\\ a_{11}\cdot\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} - 2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial\eta} + a_{22}\cdot\frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2} &= -2\theta,\\ a_{11}\cdot\frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} - 2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 P_{k+1}}{\partial x\partial\eta} + a_{22}\cdot\frac{\partial^2 P_{k+2}}{\partial \eta^2} &= 0\\ (k = 1,\ 2,\ 3,\dots), \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

$$\left.\begin{aligned} P_k\,[x,\ c_1\varphi(x)] &= 0,\\ P_k\,[x,\ c_2\varphi(x)] &= 0. \end{aligned}\quad (k=0,1,2,\dots)\right\} \tag{1.15}$$

Из рекуррентных уравнений (1.14) при помощи (1.15) последовательно определяются функции $P_k(x,\ \eta)$ $(k=0,1,2,3,\dots)$

$$P_0(x,\ \eta)\equiv 0,$$

$$P_1(x,\ \eta)\equiv 0,$$

$$P_2(x,\ \eta) = -\frac{\theta}{a_{22}}\cdot\{\eta^2 - x^m(b^p-x^p)^q\cdot[c\eta - dx^m(b^p-x^p)^q]\},$$

$$P_3(x,\ \eta) = \frac{\theta a_{12}}{a_{22}^2}\cdot cx^{m-1}(b^p-x^p)^{q-1}\cdot(r-x^ps)\cdot\{\eta^2 - x^m(b^p-x^p)^q\times$$

$$\times[c\eta - d\,x^m(b^p-x^p)^q]\},$$

$$P_4(x,\ \eta) = \frac{2a_{12}^2\theta}{a_{22}^3}\cdot\Big\{cx^{m-2}(b^p-x^p)^{q-2}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-$$

$$-x^p(b^p-x^p)sp]\cdot\left[\frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^2}{2}cx^m(b^p-x^p)^q + \frac{\eta}{6}gx^{2m}(b^p-x^p)^{2q}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}cdx^{3m}(b^p-x^p)^{3q}\right] - c^2x^{2(m-1)}(b^p-x^p)^{2(q-1)}\cdot(r-x^ps)^2\times$$

$$\times\left[\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2}cx^m(b^p-x^p)^q + \frac{d}{2}x^{2m}(b^p-x^p)^{2q}\right]\Big\} +$$

$$+\frac{a_{11}\theta}{a_{22}^2}\cdot\Big\{cx^{m-2}(b^p-x^p)^{q-2}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-$$

$$-x^p(b^p-x^p)sp]\cdot\left[-\frac{\eta^3}{6} + \frac{\eta}{6}gx^{2m}(b^p-x^p)^{2q} - \frac{cd}{6}x^{3m}(b^p-x^p)^{3q}\right]+$$

$$+2dx^{2(m-1)}\cdot(b^p-x^p)^{2(q-1)}\cdot[(r-x^ps)(f-x^pv) - psx^p(b^p-x^p)]\times$$

$$\times\left[\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2}cx^m(b^p-x^p)^q + \frac{d}{2}x^{2m}(b^p-x^p)^{2q}\right]\Big\}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{1.16}$$

где

$$c=c_1+c_2,\quad d=c_1\cdot c_2,\quad s=m+pq,\quad r=mb^p,\quad l=(m-1)b^p,$$

$$u=m+pq-1-p,\quad g=c_1^2+c_1c_2+c_2^2,\quad v=2m-1+2pq-p,$$

$$f=(2m-1)\cdot b^p.$$

Таким образом, последовательно определяя функции $P_k(x, \eta)$, можно записать выражение для $\Phi(x, \eta; \lambda)$, следовательно, и для функции напряжений

$$\begin{aligned}
\Psi(x, y) = &-\frac{\theta}{a_{12}}y^2 + \lambda\theta c y x^{m-2}(b^p-x^p)^{q-2}\cdot\left\{\frac{x^2(b^p-x^p)^2}{a_{22}}+\right.\\
&+y\cdot\frac{a_{12}}{a_{22}^2}\cdot x(b^p-x^p)(r-x^ps)+y^2\cdot\frac{4a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{6a_{22}^3}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-\\
&\left.-x^p(b^p-x^p)sp]\right\}+\lambda^2\theta x^{2(m-1)}(b^p-x^p)^{2(q-1)}\times\\
&\times\left\{-\frac{d}{a_{22}}\cdot x^2(b^p-x^p)^2-y\cdot\frac{a_{12}}{a_{22}^2}c^2x(b^p-x^p)(r-x^ps)-\right.\\
&-y^2\left(\frac{a_{12}^2c^2}{a_{22}^3}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-x^p(b^p-x^p)sp]+\right.\\
&\left.\left.+\frac{a_{12}^2}{a_{22}^3}\cdot(r-x^ps)^2\cdot c^2-\frac{a_{11}d}{a_{22}^2}\cdot[(r-x^ps)(f-vx^p)-x^p(b^p-x^p)sp]\right)\right\}+\\
&+\lambda^3\theta x^{3m-2}(b^p-x^p)^{3q-2}c\left\{\frac{a_{12}d}{a_{22}^2}(r-x^ps)(b^p-x^p)x+\right.\\
&+y\left(\frac{a_{12}^2}{3a_{22}^3}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-x^p(b^p-x^p)sp]\cdot g+\frac{a_{12}^2c^2}{a_{22}^3}(r-x^ps)^2+\right.\\
&+\frac{a_{11}g}{6a_{22}^2}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-x^p(b^p-x^p)sp]-\\
&\left.\left.-\frac{a_{11}d}{a_{22}^2}\cdot[(r-x^ps)(f-x^pv)-psx^p(b^p-x^p)]\right)\right\}+\\
&+\lambda^4\theta x^{2(2m-1)}(b^p-x^p)^{2(2q-1)}d\cdot\left\{\frac{2a_{12}^2c^2}{3a_{22}^3}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-\right.\\
&-x^p(b^p-x^p)sp]-\frac{a_{12}^2c^2}{a_{22}^3}\cdot(r-x^ps)^2+\\
&+\frac{a_{11}d}{a_{22}^2}\cdot[(r-x^ps)(f-x^pv)-x^p(b^p-x^p)sp-\\
&\left.-\frac{a_{11}c^2}{6a_{22}^2}[(r-x^ps)(l-x^pu)-x^p(b^p-x^p)sp]\right\}+\cdots \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

§ 2. Жесткость кручения неортотропного стержня

Определим жесткость анизотропного призматического стержня удлиненного авиационного профиля

$$C_t = \frac{2}{\theta} \int_0^b \int_{\lambda c_2 \varphi}^{\lambda c_1 \varphi} \Psi(x, y)\, dx dy.$$

Подставив значение функции напряжений из (1.17), проинтегрировав по y и выполнив ряд нетрудных, но утомительных преобразований, получим

$$C_t = \frac{\lambda^3 (c_1 - c_2)^3}{3a_{22}} \cdot J_1 - \frac{\lambda^4 c\, (c_1 - c_2)^3 a_{12}}{3a_{22}^2} \cdot J_2 + \frac{\lambda^5 (c_1 - c_2)}{12 a_{22}^3} \times$$
$$\times \{c^2 [a_{11} a_{22} (c_1 - c_2)^2 + 12 a_{12}^2 c_1 c_2] \cdot J_3 + 4 (c_1 - c_2)^2 \times$$
$$\times [c^2 a_{12}^2 \cdot J_4 - d \cdot a_{11} a_{22} \cdot J_5]\} + 0(\lambda^7), \tag{2.1}$$

где

$$J_1 = \int_0^b x^{3m} (b^p - x^p)^{3q} dx,$$

$$J_2 = \int_0^b x^{4m-1} (b^p - x^p)^{4q-1} (r - x^p s)\, dx,$$

$$J_3 = \int_0^b x^{5m-2} (b^p - x^p)^{5q-2} [(r - x^p s)(l - x^p u) - x^p (b^p - x^p)\, sp]\, dx,$$

$$J_4 = \int_0^b x^{5m-2} (b^p - x^p)^{5q-2} (r - x^p s)^2\, dx,$$

$$J_5 = \int_0^b x^{5m-2} (b^p - x^p)^{5q-2} [(r - x^p s)(f - x^p v) - psx^p (b^p - x^p)]\, dx.$$

Вычислим эти интегралы. Для этого введем новую переменную z

$$x = bz^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$J_1 = \int_0^b x^{3m} (b^p - x^p)^{3q} dx = \frac{b^{3(m+pq)+1}}{p} \cdot \int_0^1 z^{\frac{3m+1}{p} - 1} (1 - z)^{3q} dz =$$
$$= \frac{b^{3(m+pq)+1}}{p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q + 1\right). \tag{2.2}$$

Здесь введено общеизвестное обозначение эйлерова интеграла первого рода (бета-функция)*

$$B(\alpha,\ \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся формулой приведения

$$B(\alpha,\ \beta)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\ \beta)\quad(\alpha>1).$$

Тогда

$$J_2=\frac{b^{4(m+pq)}}{p}\left\{mB\left(\frac{4m}{p},\ 4q\right)-(m+pq)B\left(\frac{4m+p}{p},\ 4q\right)\right\}=$$

$$=\frac{b^{4(m+pq)}}{p}\left\{m-(m+pq)\frac{m}{m+pq}\right\}B\left(\frac{4m}{p},\ 4q\right)=0, \tag{2.3}$$

$$J_3=\frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\left\{m(m-1)B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)-\right.$$

$$-[2m(m+pq-1)+pq(p-1)]B\left(\frac{5m-1+p}{p},\ 5q-1\right)+$$

$$\left.+(m+pq)(m+pq-1)B\left(\frac{5m-1+2p}{p},\ 5q-1\right)\right\}=$$

$$=\frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\delta_1(m,\ p,\ q)B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right), \tag{2.4}$$

$$J_4=\frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\left\{m^2B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)-2m(m+pq)\times\right.$$

$$\left.\times B\left(\frac{5m-1+p}{p},\ 5q-1\right)+(m+pq)^2B\left(\frac{5m-1+2p}{p},\ 5q-1\right)\right\}=$$

$$=\frac{b^{5(m+pq)-1}\delta_2(m,p,q)}{p}B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right), \tag{2.5}$$

$$J_5=\frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\left\{m(2m-1)B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)-\right.$$

$$-[2m(2m+2pq-1)-pq(1-p)]B\left(\frac{5m-1}{p}+1,5q-1\right)+$$

---

* В дальнейшем, при решении конкретных примеров, для вычисления $B(\alpha,\ \beta)$ использовалась общеизвестная формула $B(\alpha,\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Здесь $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ — гамма-функция, численные значения которой брались из [10].

$$+ (m + pq)(2m + 2pq - 1)\, B\left(\frac{5m - 1 + 2p}{p},\, 5q - 1\right)\Bigg\} =$$

$$= \frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\,\delta_3(m, p, q)\, B\left(\frac{5m-1}{p},\, 5q - 1\right), \qquad (2.6)$$

где

$$\delta_1(m, p, q) = m(m-1) - \frac{(5m-1)\,[2m(m+pq-1) + pq(p-1)]}{5(m+pq) - 1 - p} +$$

$$+ \frac{(5m-1)(5m-1+p)\,(m+pq)(m+pq-1)}{[5(m+pq) - 1 - p]\,[5(m+pq) - 1]},$$

$$\delta_2(m, p, q) = m^2 - \frac{2m(m+pq)(5m-1)}{5(m+pq) - p - 1} +$$

$$+ \frac{(m+pq)^2 (5m-1)(5m-1+p)}{[5(m+pq) - 1 - p]\,[5(m+pq) - 1]},$$

$$\delta_3(m, p, q) = m(2m-1) - \frac{[2m(2m+2pq-1) - pq(1-p)]\,(5m-1)}{5(m+pq) - p - 1} +$$

$$+ \frac{(m+pq)(2m+2pq-1)(5m-1)(5m-1+p)}{[5(m+pq) - 1 - p]\,[5(m+pq) - 1]}.$$

Подставляя значения интегралов $J_1, \ldots, J_5$ из (2.2)–(2.6) в выражение (2.1), учитывая выражение (1.5) и значения c_1 и c_2, для жесткости кручения неортотропного призматического стержня удлиненного авиационного профиля окончательно получим следующее выражение

$$C_t = \frac{8\lambda^3 b^3 \Delta^3}{3a_{22}p}\, B\left(\frac{3m+1}{p},\, 3q+1\right) + \frac{8\lambda^5 b^4 \Delta^5}{3a_{22}^2 p\,(h_1 + h_2)^4} \times$$

$$\times \{(h_1 - h_2)^2\,[a_{11}a_{22}(h_1 + h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2]\,\delta_1(m, p, q) +$$

$$+ 4(h_1 + h_2)^2\,[(h_1 - h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2(m, p, q) + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta\,(m, p, q)]\} \times$$

$$\times B\left(\frac{5m-1}{p},\, 5q - 1\right) + 0(\lambda^7). \qquad (2.7)$$

В частном случае, для жесткости кручения неортотропного призматического стержня удлиненного симметричного авиационного профиля (т. е. $h_1 = h_2 = h$) из (2.7) будем иметь

$$C_t = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3a_{22}p}\, B\left(\frac{3m+1}{p},\, 3q+1\right) + \frac{8\lambda^5 b^4 \Delta^5 a_{11}}{3a_{22}^2 p}\,\delta_3(m, p, q) \times$$

$$\times B\left(\frac{5m-1}{p},\, 5q - 1\right) + 0(\lambda^7). \qquad (2.8)$$

Более точное [с точностью $0(\lambda^9)$] выражение для жесткости при кручении анизотропного упругого стержня симметричного поперечного сечения получено в работе [8].

Если стержень ортотропный (т. е. $a_{12}=0$), то для жесткости кручения из (2.7) получим

$$C_t=\frac{8\lambda^3 b^4\Delta^3}{3a_{22}p}B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)+\frac{8\lambda^5 b^4\Delta^5 a_{11}}{3a_{22}^2 p(h_1+h_2)^2}\times$$

$$\times\left[(h_1-h_2)^2\delta_1(m,p,q)+4h_1h_2\delta_3(m,p,q)\right]\times$$

$$\times B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)+0(\lambda^7). \qquad (2.9)$$

Л. С. Лейбензон, исследуя задачу о кручении ортотропного стержня с сечением в виде авиационного профиля, исходя из вариационной формулы Кастилиано, получил [1]

$$C_t^*=G_{13}\frac{b(a+a_1)^3 B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}{3p\left[1+\varepsilon\dfrac{a^2+aa_1+a_1^2}{b^2}\dfrac{G_{13}}{G_{23}}\right]}, \qquad (2.10)$$

где

$$\varepsilon=\frac{\dfrac{m^2}{p}B\left(\dfrac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)-\dfrac{2m(m+pq)}{p}B\left(\dfrac{5m-1+p}{p},\ 5q-1\right)}{\dfrac{1}{p}B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}+$$

$$+\frac{\dfrac{(m+pq)^2}{p}B\left(\dfrac{5m-1+2p}{p},\ 5q-1\right)}{\dfrac{1}{p}B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}, \qquad (2.11)$$

а G_{13} и G_{23} — общепринятые обозначения модуля сдвига в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xoz и yoz.

Введем обозначение

$$\lambda_*=H_*\sqrt{G_*}. \qquad (2.12)$$

Здесь $H_*=\sqrt{\varepsilon\dfrac{a^2+aa_1+a_1^2}{b^2}}$ назовем приведенной геометрической толщиной профиля, а $G_*=\dfrac{G_{13}}{G_{23}}$ — приведенной физической толщиной профиля.

Тогда выражение (2.10) можно представить так

$$C_t^*=G_{13}\frac{b(a+a_1)^3 B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}{3p}\,\frac{1}{1+\lambda_*^2}. \qquad (2.13)$$

Если это выражение разложить в ряд по степеням $\lambda_*^{*)}$ (где $\lambda_* < 1$), то получим

$$C_t^* = G_{13} \frac{b(a+a_1)^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p} \left[1 - \lambda_*^2 + \lambda_*^4 - \lambda_*^6 + \cdots\right] \quad (2.14)$$

или

$$C_t^* = C_t^{(\text{прибл.})} + \zeta^*, \quad (2.14')$$

где введены обозначения

$$C_t^{(\text{прибл.})} = G_{13} \frac{b(a+a_1)^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p} \times$$

$$\times \left[1 - \varepsilon \frac{a^2 + aa_1 + a_1^2}{b^2} \frac{G_{13}}{G_{23}}\right], \quad (2.15)$$

$$\zeta^* = G_{13} \frac{b(a+a_1)^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p} \frac{\lambda_*^4}{1+\lambda_*^2}. \quad (2.16)$$

Докажем, что если в выражениях (2.14) или (2.14′) пренебречь четвертой и высшей степенью малого параметра λ_*, т. е. принять приближение с точностью $1 + \lambda_*^4 \approx 1$, то выражение (2.10) или, что то же, выражение (2.14) совпадает с формулой (2.9). Строго говоря, выражение (2.14′) эквивалентно формуле (2.9) с точностью малой величины $0(\lambda_*^4)$. Это станет очевидным, если нам удастся доказать, что выражение (2.15) совпадает с (2.9).

Для этой цели, учитывая соотношения (1.4) и (1.6), выражение (2.9) преобразуем так

$$C_t = \frac{b(a+a_1)^3}{3a_{22}} \frac{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{p} \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{a_{11}}{a_{22}} \frac{(a-a_1)^2 \delta_1 + 4aa_1\delta_3}{b^2} \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{4B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}\right\}. \quad (2.17)$$

Теперь, пользуясь формулой приведения бета-функции, выражение (2.11) представим в виде

$$\varepsilon = \delta_2 \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}. \quad (2.18)$$

---

*) Это легко сделать для удлиненных профилей за счет приведенной геометрической толщины H_* и приведенной физической толщины G_*.

Затем, имея в виду тождества

$$\delta_1(m, p, q) + 4\delta_2(m, p, q) = 0,$$
$$3\delta_1(m, p, q) - 4\delta_3(m, p, q) = 0,$$

можно написать

$$(a - a_1)^2\delta_1 + 4aa_1\delta_3 = -4\delta_2(a^2 + aa_1 + a_1^2). \tag{2.19}$$

Таким образом, учитывая (2.18) и (2.19), из выражения (2.17) окончательно получим

$$C_t = \frac{(a + a_1)^3 b}{3a_{22}} \frac{B\left(\dfrac{3m + 1}{p}, 3q + 1\right)}{3p}\left[1 - \varepsilon\frac{a^2 + aa_1 + a_1^2}{b^2}\frac{a_{11}}{a_{22}}\right]$$

или

$$C_t = G_{13}\frac{(a + a_1)^3 b\, B\left(\dfrac{3m + 1}{p}, 3q + 1\right)}{3p}\left[1 - \varepsilon\frac{a^2 + aa_1 + a_1^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}\right], \tag{2.20}$$

которое точно совпадает с формулой (2.15) для выражения жесткости кручения $C_t^{(\text{прибл.})}$, что и требовалось доказать.

Перейдем к оценке погрешности при сохранении двух членов формулы (2.14), т. е. оценим погрешность определения жесткости кручения выражением (2.15). Для этого определим относительную погрешность

$$\varepsilon^* = \frac{\zeta^*}{C_t^{(\text{прибл.})}} = \frac{\lambda_*^4}{1 - \lambda_*^4}. \tag{2.21}$$

Для того, чтобы при помощи (2.15) жесткость кручения ортотропного стержня сечением в виде авиационного профиля вычислять с точностью до одного процента, значения λ_* должны удовлетворять неравенству

$$\frac{\lambda_*^4}{1 - \lambda_*^4} < 0{,}01$$

откуда

$$\lambda_* < 0{,}3154. \tag{2.22}$$

Этот результат показывает, что при определении жесткости длинных и узких ортотропных авиационных профилей для практических целей вместо формулы (2.14) с большим успехом можно применять приближенную формулу (2.9). Обратное утверждение тоже верно. Более точные оценки для жесткости кручения неортотропного стержня получены в последнем параграфе.

§ 3. Определение касательных напряжений

Имея функцию напряжений $\Psi(x, y)$, для касательных напряжений получим следующие выражения

$$
\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\theta}{a_{22}}\left[-2y + \lambda c x^{m} (b^{p} - x^{p})^{q}\right] + \frac{\lambda \theta c x^{m-2} (b^{p} - x^{p})^{q-2} y}{2a_{22}^{3}} \times
$$

$$
\times \left[4 a_{22} a_{12} x (b^{p} - x^{p}) (r - x^{p} s) + y (4a_{12}^{2} - a_{11} a_{22}) \times \right.
$$

$$
\left. \times \left[(r - x^{p} s)(l - x^{p} u) - x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp\right]\right] +
$$

$$
+ \frac{\lambda^{2} \theta x^{2(m-1)} (b^{p} - x^{p})^{2(q-1)}}{a_{22}^{3}} \left\{ - a_{12} a_{22} c^{2} (b^{p} - x^{p}) (r - x^{p} s) x - \right.
$$

$$
- 2y \left(a_{12}^{2} c^{2} \left[(r - x^{p} s)(l - x^{p} u) - x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp\right] + a_{22}^{2} (r - x^{p} s)^{2} c^{2} - \right.
$$

$$
\left.\left. - a_{11} a_{12} d \left[(r - x^{p} s)(f - v x^{p}) - x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp\right] \right) \right\} +
$$

$$
+ \frac{\lambda^{3} \theta x^{3m-2} (b^{p} - x^{p})^{3q-2} c}{6a_{22}^{3}} \left\{ g (2a_{12}^{2} + a_{11} a_{22}) \left[(r - x^{p} s)(l - x^{p} u) - \right.\right.
$$

$$
- x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp] + 6 a_{12}^{2} c^{2} (r - x^{p} s)^{2} - 6 a_{11} a_{22} d \left[(r - x^{p} s)(f - x^{p} v) - \right.
$$

$$
\left.\left. - psx^{p} (b^{p} - x^{p})\right]\right\} + 0(\lambda^{4}), \tag{3.1}
$$

$$
\tau_{yz} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \frac{\lambda \theta c y x^{m-3} (b^{p} - x^{p})^{q-3}}{6a_{22}^{3}} \left\{ 6a_{22}^{2} x^{2} (b^{p} - x^{p})^{2} (r - x^{p} s) + \right.
$$

$$
+ 6 a_{12} a_{22} x y (b^{p} - x^{p}) \left[(r - x^{p} s)(l_{1} - x^{p} l_{2}) + b^{p} r + x^{2p} s (1 + 2p) - \right.
$$

$$
\left. - x^{p} (1 + p)(b^{p} s + r)\right] + y^{2} (4a_{12}^{2} - a_{11} a_{22}) \left[(l_{1} - l_{2} x^{p}) \times \right.
$$

$$
\left.\left. \times \Big((r - x^{p} s)(l - x^{p} u) - x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp \Big) - px^{p} (b^{p} - x^{p})(f_{1} - x^{p} v_{1})\right] \right\} +
$$

$$
+ \frac{\lambda^{2} \theta x^{2m-3} (b^{p} - x^{p})^{2q-3}}{a_{22}^{3}} \left\{ a_{22}^{2} d (b^{p} - x^{p})^{2} x^{2} \left[l - x^{p} (u + 2p + 2) + 2b^{p}\right] + \right.
$$

$$
+ a_{22} a_{12} c^{2} y \left[(l - x^{p} u)(r - x^{p} s) + b^{p} r + s x^{2p} (1 + 2p) - \right.
$$

$$
\left. - x^{p} (1 + p)(b^{p} s + r)\right] x (b^{p} - x^{p}) + y^{2} \Big(a_{12}^{2} c^{2} \left[\left[(r - s x^{p})(l - x^{p} u) - \right.\right.
$$

$$
\left. - x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp\right] (l - u x^{p}) - p x^{p} (b^{p} - x^{p})(f_{1} - x^{p} v_{1}) + (r - x^{p} s)^{2} \times
$$

$$
\left. \times (l - x^{p} u) - 2ps x^{p} (r - x^{p} s)(b^{p} - x^{p})\right] + a_{11} a_{22} d \left[\left[(r - x^{p} s)(f - x^{p} v) - \right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left. - x^{p} (b^{p} - x^{p}) ps\right] (l - u x^{p}) - p x^{p} (f_{2} - x^{p} v_{2})(b^{p} - x^{p})\right] \Big) \right\} -
$$

$$
- \frac{\lambda^{3} \theta c x^{3m-3} (b^{p} - x^{p})^{3q-3}}{6a_{22}^{3}} \left\{ 6 a_{12} a_{22} x d \left[(r_{1} - x^{p} u_{1})(r - x^{p} s) + \right.\right.
$$

$$
\left. + b^{p} r + s x^{2p} (1 + 2p) - x^{p} (1 + p)(b^{p} s + r)\right] (b^{p} - x^{p}) + 2a_{12}^{2} g y \times
$$

$$
\times \Big| (r_{1} - x^{p} u_{1}) \Big((r - x^{p} s)(l - x^{p} u) - x^{p} (b^{p} - x^{p}) sp \Big) -
$$

$$
- p x^{p} (f_{1} - x^{p} v_{1})(b^{p} - x^{p}) \Big| + 6 a_{12}^{2} c^{2} y \left[(r - x^{p} s)^{2} (r_{1} - x^{p} u_{1}) - \right.
$$

$$-2psx^p(r-x^ps)(b^p-x^p)\Big]-a_{11}a_{22}gy\Big[(r_1-x^pu_1)\Big(\big(l-x^pu\big)(r-x^ps)-$$

$$-x^p(b^p-x^p)sp\Big)-px^p(f_1-x^pv_1)(b^p-x^p)\Big]-6a_{11}a_{22}y\Big[(r_1-x^pu_1)\times$$

$$\times\Big((r-x^ps)(f-x^pv)-psx^p(b^p-x^p)\Big)-px^p(f_2-x^pv_2)\times$$

$$\times(b^p-x^p)\Big]\Big\}+0(\lambda^3). \tag{3.2}$$

Здесь

$$l_1=(m-2)b^p,\quad l_2=m+pq-2-2p,$$

$$f_1=b^p(2m^2+2pq-2m-pq-mp),\quad f_2=b^pm(4m+4pq-1-p),$$

$$v_1=m+pq-1,\quad v_2=2(m+pq)(2m+2pq-1),$$

$$r_1=(3m-2)b^p,\quad u_1=3m-2+3pq-2p.$$

Наибольшее напряжение сдвига получается в одной из точек P_1 или P_3, в которых касательная параллельна оси профиля ox (фиг. 1). Следовательно, из (3.1) будем иметь

$$|\tau_{xz}|^{\max}=\left|\tau_{xz}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=\lambda c_1\varphi(x_0)=h_1}}\right|=\left|\frac{h_1+h_2}{a_{22}}+\frac{\Delta_2(m,p,q)}{a_{22}^3}\times\right.$$

$$\times\left\{\lambda\frac{(h_1-h_2)(4a_{12}^2-a_{11}a_{22})h_1^2}{b(h_1+h_2)}-\lambda^2\frac{8h_1[a_{12}^2(h_1-h_2)^2+a_{11}a_{22}h_1h_2]}{(h_1+h_2)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\lambda^3\frac{4b(h_1-h_2)}{3(h_1+h_2)^3}[(2a_{12}^2+a_{11}a_{22})(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)+6a_{11}a_{22}h_1h_2]\right\}\right|\theta, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_2(m,p,q)=\frac{m^{\frac{p-2}{p}}(m+pq)^{\frac{2+p}{p}}}{q}.$$

Как известно, относительный угол кручения определяется формулой

$$\theta=\frac{M_t}{C_t}, \tag{3.4}$$

где M_t-скручивающий момент.

Подставив значение θ из (3.4) в (3.3) и учитывая выражение (2.7), после несложных преобразований, для наибольшего напряжения окончательно получим

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{b(h_1+h_2)^2}\,\frac{1-\lambda^2E_1\Delta_2}{1-\lambda^2E_2k_2} \tag{3.5}$$

или

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{b(h_1+h_2)^2}\left[1-\frac{\lambda^2(E_1\Delta_2-E_2k_2)}{1-\lambda^2E_2k_2}\right]. \tag{3.5'}$$

Здесь

$$E_1=\frac{2}{3}\,\frac{a_{11}a_{22}(2h_1^3+5h_1^2h_2+4h_1h_2^2+h_2^3)-2a_{12}^2(h_1^3+4h_1^2h_2-4h_1h_2^2-h_2^3)}{a_{22}^2(h_1+h_2)^3},$$

$$E_2=\frac{(h_1-h_2)^2\left[12a_{12}^2h_1h_2-a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2\right]\delta_1}{a_{22}^2(h_1+h_2)^4}-$$

$$-\frac{4(h_1-h_2)^2\left[(h_1-h_2)^2a_{12}^2\delta_2+h_1h_2a_{11}a_{22}\delta_3\right]}{a_{22}^2(h_1+h_2)^4},$$

$$k_1=\frac{3pm^{\frac{3m}{p}}(pq)^{3q}}{(m+pq)^{\frac{3(m+pq)}{p}}B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)},$$

$$k_2=\frac{\Delta^2B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}.$$

Из формулы (3.5′) видно, что первое слагаемое наибольшего напряжения не зависит от упругих постоянных и имеет такой же вид, как и в соответствующем изотропном стержне [1] и в стержне, обладающем анизотропией первого случая Сен-Венана [11], а второе слагаемое показывает влияние неортотропности материала стержня.

В частном случае из (3.5) или (3.5′) находим, что для неортотропного призматического стержня удлиненного симметричного авиационного профиля максимальное касательное напряжение имеет вид

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{bH^2}\frac{1-\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\Delta_2}{1+\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\delta_3k_2} \tag{3.6}$$

или

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{bH^2}\left[1-\frac{\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}(\Delta_2+\delta_3k_2)}{1+\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\delta_3k_2}\right], \tag{3.6′}$$

где $H=2h$ — высота профиля.

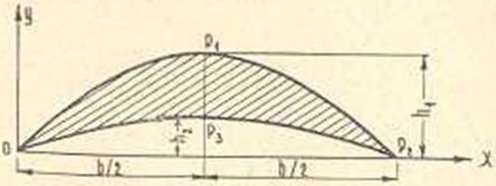
§ 4. Конкретные примеры

а) Кручение стержня с сечением в виде параболического серпа (фиг. 2). Для такого стержня имеем

$$\left.\begin{aligned}&m=p=q=1,\\&a=4h_1,\ a_1=-4h_2,\ \Delta=4,\\&\lambda=\frac{h_1-h_2}{2b},\qquad 0<\lambda<\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Внеся (4.1) в (1.7), для параболического серпа получим

$$
\begin{aligned}
y &= \lambda \frac{8h_1}{(h_1-h_2)\,b}\, x\,(b-x),\\
y &= \lambda \frac{8h_2}{(h_1-h_2)\,b}\, x\,(b-x).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$



Фиг. 2.

Из соотношений (1.17) и (4.1) легко получить выражение функции напряжений для анизотропного стержня с поперечным сечением в виде параболического серпа

$$
\begin{aligned}
\Psi(x, y) = &-\frac{\theta y^2}{a_{22}} + \lambda \frac{\theta c y}{3a_{22}^3}\left[3a_{22}^2 (b-x)\,x - 3a_{12}a_{22} y\,(b-2x) - \right.\\
&\left. - y^2 (4a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\right] + \lambda^2 \frac{\theta}{a_{22}^3}\left\{-a_{22} x\,(b-x)\left[d a_{22}(b-x)\,x + \right.\right.\\
&\left.\left. + y a_{12} c^2 (b-2x)\right] + y^2 (a_{11}a_{22} d - a_{12}^2 c^2)(b^2 - 6bx + 6x^2)\right\} + \\
&+ \lambda^3 \frac{\theta x\,(b-x)\,c}{3a_{22}^3}\left\{3a_{12}a_{22} d\,(b-x)(b-2x)\,x - \right.\\
&-y\left[a_{12}^2\left(3c^2b^2 + 2x\,(6c^2 - g)(x-b)\right) + a_{11}a_{22}\left(3b^2 d + (18d - g)\times\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\times x\,(x-b)\right)\right]\right\} - \lambda^4 \frac{\theta\,(b-x)^2 x^2 d}{3a_{22}^3}\left\{a_{12}^2 c^2 (3b^2 - 8bx + 8x^2) - \right.\\
&\left. - a_{11}a_{22}\left[3db^2 + x\,(c^2 - 18d)\,(b-x)\right]\right\} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где

$$
c = \frac{8\,(h_1 + h_2)}{(h_1 - h_2)\,b}, \qquad d = \frac{64 h_1 h_2}{(h_1 - h_2)^2 b^2}.
$$

Ниже приводятся значения некоторых величин, необходимых при определении жесткости кручения и максимального напряжения стержня.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta_1 = -\frac{4}{9}, \quad \delta_2 = \frac{1}{9}, \quad \delta_3 = -\frac{1}{3}, \quad \Delta_2 = 8,\\
&\qquad k_1 = \frac{105}{16}, \quad k_2 = 16.
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.4}
$$

Теперь, пользуясь формулой (2.7) и значениями (4.4), найдем величину жесткости кручения неортотропного призматического стержня сечением в виде параболического серпа

$$
\begin{aligned}
C_t = \frac{16}{105}\frac{(h_1 - h_2)^3 b}{a_{22}}&\left\{1 - \frac{16}{9}\frac{1}{a_{22}^2 b^2 (h_1 - h_2)^2}\left[(h_1 - h_2)^2 (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2)\,\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\, a_{11}a_{22} - (h_1 + h_2)^2 (14h_1h_2 - h_1^2 - h_2^2)\, a_{12}^2\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Для ортотропного стержня будем иметь

$$C_t = G_{13}\frac{16}{105}(h_1 - h_2)^3 b\left[1 - \frac{16}{9}\frac{h_1^2 - h_1h_2 - h_2^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}\right]. \tag{4.6}$$

Из выражения (3.5′) для максимального касательного напряжения неортотропного стержня сечением в виде параболического серпа получим

$$|\tau_{xz}|^{\max} = \frac{105}{16}\frac{M_t}{b(h_1 - h_2)^2}\left\{1 - \frac{\dfrac{4A_1}{9a_{22}^2(h_1 - h_2)^2 b^2}}{1 - \dfrac{16A_2}{9a_{22}^2(h_1 - h_2)^2 b^2}}\right\}, \tag{4.7}$$

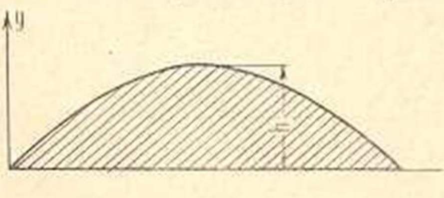
где

$$A_1 = a_{11}a_{12}(h_1 + h_2)(2h_1^3 - 31h_1^2h_2 + 28h_1h_2^2 + h_2^3) +$$
$$+ a_{12}^2(2h_2^4 - 10h_1^4 - 88h_1^2h_2^2 - 18h_1^3h_2 - 78h_1h_2^3),$$
$$A_2 = a_{11}a_{22}(h_1 - h_2)^2(5h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2) +$$
$$+ a_{12}^2(h_1 + h_2)^2(10h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2).$$

Для ортотропного стержня будем иметь

$$|\tau_{xz}|^{\max} =$$
$$= \frac{105}{16}\frac{M_t}{b(h_1 - h_2)^2}\left[1 - \frac{\dfrac{4(h_1 + h_2)(2h_1^3 - 31h_1^2h_2 + 28h_1h_2^2 + h_2^3)}{9(h_1 - h_2)^2 b^2}\dfrac{G_{13}}{G_{23}}}{1 - \dfrac{16(h_1 - h_2)^2(5h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2)}{9(h_1 - h_2)^2 b^2}\dfrac{G_{13}}{G_{23}}}\right]. \tag{4.8}$$

б) Кручение стержня сечением в виде параболического сегмента (фиг. 3). Настоящая задача является частным случаем предыдущей. Приняв $h_1 = h$, $h_2 = 0$, будем иметь



Фиг. 3.

$$\lambda = \frac{h}{2b}, \quad c = \frac{8}{b}, \quad d = 0. \tag{4.9}$$

Учитывая (4.9), из (4.3), (4.5) и (4.7) находим

$$\Psi(x, y) = -\frac{\theta y^2}{a_{22}} +$$
$$+ \lambda\frac{8\theta y}{3a_{22}^2 b}[3a_{22}^2(b - x)x + 3a_{12}a_{22}y(b - 2x) - y^2(4a_{12}^2 - a_{11}a_{22})] -$$
$$- \lambda^2\frac{64a_{12}\theta y}{a_{22}^3 b^2}[a_{22}x(b - x)(b - 2x) + ya_{12}(b^2 - 6bx + 6x^2)] -$$
$$- \lambda^3\frac{512x\theta(b - x)y}{3a_{22}^3 b^3}\{a_{12}^2[3b^2 + 10x(x - b)] - a_{11}a_{22}x(x - b)\}, \tag{4.10}$$

$$C_t = \frac{16h^3b}{105a_{22}}\left\{1 - \frac{16}{9}\frac{h^2}{b^2}\frac{a_{11}a_{22} + a_{12}^2}{a_{22}^2}\right\}, \tag{4.11}$$

$$|\tau_{xz}|^{\max}=\frac{105}{16}\frac{M_t}{bh^2}\left[1-\frac{\dfrac{8h^2}{9a_{22}^2b^2}(a_{11}a_{22}-5a_{12}^2)}{1-\dfrac{16h^2}{9a_{22}^2b^2}(a_{11}a_{22}+a_{12}^2)}\right]. \qquad (4.12)$$

Для ортотропного стержня из (4.10)–(4.12) находим

$$\Psi(x,y)=-\frac{\vartheta y^2}{a_{22}}+\lambda\frac{8\vartheta y}{3a_{22}^2b}\left[3a_{22}(b-x)x+y^2a_{11}\right]+$$

$$+\lambda^3\frac{512\vartheta(b-x)^2x^2ya_{11}}{3a_{22}^2b^3},$$

$$C_t=\frac{16h^3bG_{13}}{105}\left[1-\frac{16}{9}\frac{h^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}\right],$$

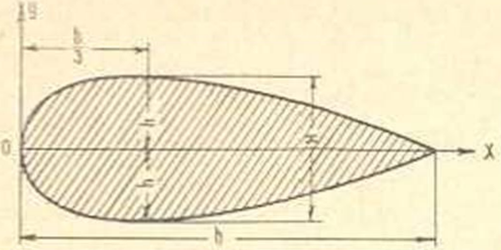
$$|\tau_{xz}|^{\max}=\frac{105}{16}\frac{M_t}{bh^2}\left[1-\frac{\dfrac{8}{9}\dfrac{h^2}{b^2}\dfrac{G_{13}}{G_{23}}}{1-\dfrac{16}{9}\dfrac{h^2}{b^2}\dfrac{G_{13}}{G_{23}}}\right].$$

в) Кручение стержня сечением в виде полукубической параболы (фиг. 4). Пусть сечение авиационного профиля ограничено дугами полукубических парабол

$$\left(m=\frac{1}{2},\ p=q=1\right)$$

$$y=\pm\lambda\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{x}{b}}(b-x),$$

где $\lambda=\dfrac{h}{b}$.



Фиг. 4.

Вычисление показывает, что

$$\left.\begin{aligned}&c_1=-c_2=\frac{\Delta}{\sqrt{b}},\quad c=0,\quad d=-\frac{\Delta^2}{b},\quad \Delta=\frac{3\sqrt{3}}{2},\\&\delta_3=-\frac{3}{13},\quad k_1=6{,}175,\quad k_2=24{,}750.\end{aligned}\right\}\qquad(4.13)$$

Имея в виду (4.13), из (2.8) для жесткости кручения находим*

$$C_t=0{,}162\frac{H^3b}{a_{22}}\left[1-1{,}428\frac{H^2}{b^2}\frac{a_{11}}{a_{22}}\right].$$

Максимальные напряжения возникают на контуре в самом широком месте сечения $\left(x=\dfrac{b}{3},\ y=\pm h\right)$

* Более точная формула жесткости кручения неортотропного стержня получена в работе [8], но там нет выражения максимального напряжения, которое здесь приводится.

$$|\tau_{xz}|^{\max} = 6{,}175\left[1 - \frac{0{,}235\dfrac{H^2}{b^2}\dfrac{a_{11}}{a_{22}}}{1 - 1{,}428\dfrac{H^2}{b^2}\dfrac{a_{11}}{a_{22}}}\right]\frac{M_t}{bH^2}.$$

§ 5. О точности приближенных форvул жесткости кручения

Пользуясь найденным выражением (2.7), докажем, что для неортотропных стержней, поперечное сечение которых ограничено кривой (1.7′),

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{T}{J} = \frac{(h_1 + h_2)^3}{h_1^3 + h_2^3}, \tag{5.1}$$

где J — момент инерции относительно оси x, $T = C_t a_{22}$ — назовем приведенной геометрической жесткостью при кручении анизотропных стержней.

Имеем

$$J = \int_0^b\int_{\lambda c_2\varphi}^{\lambda c_1\varphi} y^2 dxdy = \frac{\lambda^3(c_1^3 - c_2^3)}{3}\int_0^b x^{3m}(b^p - x^p)^{3q}dx$$

или учитывая (1.5), (2.2) и значения c_1 и c_2,

$$J = \frac{8\lambda^3 b^4\Delta^3}{3p}\frac{h_1^3 + h_2^3}{(h_1 + h_2)^3}B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right). \tag{5.2}$$

Следовательно, при помощи (2.7) и (5.2) находим

$$T = \frac{(h_1 + h_2)^3}{h_1^3 + h_2^3}J + 0(\lambda^5), \tag{5.3}$$

откуда и вытекает соотношение (5.1).

Соотношение (5.1) или (5.3), для тонких анизотропных профилей, эквивалентно следующему утверждению

$$T \approx \frac{8\lambda^3 b^4\Delta^3}{3p}B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right), \tag{5.4}$$

которое совпадает с формулой Гриффита [12]—Прескотта [13] для тонких изотропных профилей. Между прочим, формулу (5.4) можно получить иным путем, т. е. приближенно интегрируя уравнение мембранной аналогии для случая удлиненного поперечного сечения закручиваемой анизотропной призмы [14.7]. Точно такой же приближенный результат для жесткости кручения тонких изотропных и ортотропных стержней получен в работах [1, 15—18].

Из приближенной формулы (5.4) видно, что жесткость кручения для тонких анизотропных стержней совпадает с формулой для жесткости тонких изотропных и ортотропных стержней.

В частном случае, когда поперечное сечение представляет симметричную область, т. е. $h_1 = h_2$, из (5.3) получим выражение

$$T = 4J + 0(\lambda^5), \tag{5.5}$$

которое совпадает с результатом для изотропного симметричного стержня, полученным Д. Ю. Пановым [3].

Формулы жесткости кручения (2.7) или (5.4) получены для тонких стержней. Естественно возникает вопрос: для каких стержней эти приближенные формулы можно считать точными? Иначе говоря, какому условию должен удовлетворять параметр $\lambda = \frac{h_1 + h_2}{2b}$, чтобы выражение жесткости кручения неортотропного стержня (2.7) или (5.4) было бы точным?

С этой целью рассмотрим вопрос о точности приближенной формулы (2.7), когда в ней сохраняем один, два или более членов. Строго говоря, оценим погрешность, допускаемую нами при сохранении первых членов этой формулы.

Для этой цели напишем выражение приведенной геометрической жесткости кручения для неортотропного призматического стержня сечением в виде авиационного профиля

$$T = C_t a_{22} = \frac{2a_{22}}{\theta} \int_0^b \int_{\lambda c_2 \varphi}^{\lambda c_1 \varphi} \Psi(x, y)\, dxdy.$$

Внеся значение функции напряжений и учитывая выражения (1.10), (1.13), (1.16), из этой формулы находим

$$T = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p} B\left(\frac{3m+1}{p} \cdot 3q + 1\right) + \zeta_n. \tag{5.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\zeta_n = \frac{2a_{22}}{\theta} \iint\limits_{D_\lambda} \rho_n(x, y; \lambda)\, dxdy, \tag{5.7}$$

$$\rho_n(x, y; \lambda) = \Psi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda P_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) -$$

$$- \lambda^2 P_2\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda^3 P_3\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \cdots - \lambda^n P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right), \tag{5.8}$$

а область D_λ отличается от области авиационного профиля D только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении $1:\lambda$.

Составим выражение

$$R_n(x, y; \lambda) = a_{11} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2}. \tag{5.9}$$

Подставив значение ρ_n из (5.8) в (5.9) и имея в виду уравнения (1.14), после некоторых элементарных преобразований получим [8]

$$|R_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{n-1}\{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n\}, \tag{5.10}$$

где

$$p_{n-1} = \max_D \left| D^2_{xx} P_{n-1}\left(x, \frac{y}{\lambda}\right)\right|,$$

$$p_n = \max_D \left| D^2_{xx} P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right)\right|,$$

$$q_n = \max_D \left| D^2_{xy} P(x, \eta)\right|.$$

Введем новую функцию следующим образом

$$\rho_n'(x, y; \lambda) = \frac{\theta}{\lambda^{n-1}\{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n\}} \rho_n(x, y; \lambda). \tag{5.11}$$

Составим

$$R_n' = a_{11}\frac{\partial^2 \rho_n'}{\partial x^2} - 2a_{12}\frac{\partial^2 \rho_n'}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \rho_n'}{\partial y^2}.$$

Очевидно, подобно (5.10), будем иметь

$$|R_n'(x, y; \lambda)| = \left| -\frac{\theta}{\lambda^{n-1}\{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n\}} \lambda^{n-1} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{a_{11}\frac{\partial^2 P_{n-1}}{\partial x^2} - 2a_{12}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial \eta} + \lambda a_{11}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}\right\}\right| = \frac{\theta}{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n} \times$$

$$\times \left| a_{11}\frac{\partial^2 P_{n-1}}{\partial x^2} - 2a_{12}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial \eta} + \lambda a_{11}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{\theta}{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n} \times$$

$$\times \left\{\left|a_{11}\frac{\partial^2 P_{n-1}}{\partial x^2}\right| + 2\left|a_{12}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial \eta}\right| + \lambda\left|a_{11}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}\right|\right\} <$$

$$< \frac{\theta}{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n}\{a_{11} p_{n-1} + 2\lambda a_{12} q_n + \lambda a_{11} p_n\} = \theta < 2\theta. \tag{5.12}$$

Таким образом, условия леммы, которые сформулированы и доказаны в работе [8], удовлетворены. Следовательно,

$$|\rho_n'(x, y; \lambda)| < \Psi_1(x, y)$$

или, учитывая (5.11), будем иметь

$$|\rho_n| < \frac{\lambda^{n-1}[(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]}{\theta} \Psi_1(x, y). \tag{5.13}$$

Здесь $\Psi_1(x, y)$ — функция напряжений при кручении эллипса D^*

$$y^2 - 4\lambda^2 x(b - x) = 0,$$

который, легко видеть, охватывает область D, ограниченную кривой (1.7).

Функция напряжений для эллипса D^* имеет вид [8]

$$\Psi_1(x, y) = \frac{\theta b^2\lambda^2}{a_{22}+4\lambda^2 a_{11}}\left\{1-\frac{y^2}{b^2\lambda^2}-\frac{(2x-b)^2}{b^2}\right\}. \tag{5.14}$$

Оценим выражения (5.7) при помощи (5.13) и (5.14).

$$|\zeta_n| = \frac{2a_{22}}{\theta}\left|\iint\limits_{D_\lambda}\rho_n(x, y; \lambda)\,dxdy\right| \leqslant \frac{2a_{22}}{\theta}\iint\limits_{D_\lambda}|\rho_n(x, y; \lambda)|\,dxdy <$$

$$< \frac{2a_{22}}{\theta}\iint\limits_{D^*}|\rho_n(x, y; \lambda)|\,dxdy < \frac{a_{22}\lambda^{n-1}\left[(p_{n-1}+\lambda p_n)\,a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\right]}{\theta}\,T^*, \tag{5.15}$$

где

$$T^* = \frac{2}{\theta}\iint\limits_{D^*}\Psi_1(x, y)\,dxdy = \frac{\pi\lambda^3 b^4}{2(a_{22}+4\lambda^2 a_{11})}. \tag{5.16}$$

Таким образом, учитывая (5.16), будем иметь

$$|\zeta_n| < \frac{\lambda^{n+2}\pi b^4}{2}\,\frac{a_{22}\left[(p_{n-1}+\lambda p_n)\,a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\right]}{\theta\,(a_{22}+4\lambda^2 a_{11})} \quad (n=2, 4, \ldots). \tag{5.17}$$

Несколько увеличивая правую часть неравенства (5.17), находим

$$|\zeta_n| < \frac{\lambda^{n+2}\pi b^4}{2}\,\frac{\left[(p_{n-1}+\lambda p_n)\,a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\right]}{\theta}. \tag{5.18}$$

Чтобы оценить точность формулы приведенной геометрической жесткости кручения, вычислим относительную погрешность

$$|\varepsilon_n| = \left|\frac{T-T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}}{T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}}\right| = \frac{|\zeta_n|}{T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}} < \frac{\lambda^{n+2}\pi b^4}{2T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}}\,\frac{\left[(p_{n-1}+\lambda p_n)\,a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\right]}{\theta}. \tag{5.19}$$

Если мы хотим воспользоваться формулой (5.4), то относительная погрешность будет

$$\varepsilon_2 < \frac{\lambda^4\pi b^4}{2T^{(1)}_{\text{прибл.}}}\,\frac{\left[(p_1+\lambda p_2)\,a_{11}+2\lambda a_{12}q_2\right]}{\theta},$$

или, подставив значения $T^{(1)}_{\text{прибл.}}$ из (5.4), получим

$$\varepsilon_2 < \frac{3\pi p\lambda}{16\Delta^3 B\left(\dfrac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}\,\frac{\left[(p_1+\lambda p_2)\,a_{11}+2\lambda a_{12}q_2\right]}{\theta}. \tag{5.20}$$

Если при помощи (5.6) величину приведенной геометрической жесткости кручения анизотропного стержня желаем получить с точностью до 1%, то согласно (5.20) $\left(\text{учитывая, что } p_1 = \max\left\{\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right\} = 0\right)$ значения λ должны удовлетворять неравенству

$$\frac{3\pi p\lambda^2}{16\Delta^3 B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}\frac{a_{11}p_2+2a_{12}q_2}{\theta}<0{,}01,$$

откуда находим

$$\lambda<0{,}4\Delta\sqrt{\frac{\Delta\theta B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}{3\pi p\left(a_{11}p_2+2a_{12}q_2\right)}}. \tag{5.21}$$

Для наглядности рассмотрим численный пример. Пусть имеем $m=\frac{1}{2}$, $p=q=1$, т. е. сечение стержня ограничено дугами полукубической параболы (фиг. 4).

Вычисления показывают, что

$$p_2=\frac{27\theta}{a_{22}},\qquad q_2=0. \tag{5.22}$$

Тогда из (5.21) при помощи (5.22) находим

$$\frac{H}{b}<0{,}034\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{5.23}$$

или

$$\frac{H}{b}<\frac{0{,}034}{\sqrt{G_*}}. \tag{5.23'}$$

Таким образом получаем следующий результат. Для жесткости кручения рассматриваемого авиационного профиля можно пользоваться практически точным выражением

$$C_t=0{,}162\frac{H^3b}{a_{22}}, \tag{5.24}$$

если только имеет место (5.23).

Ниже, в таблицах 1 и 2, приведены некоторые значения $\frac{H}{b}$, подсчитанные по неравенству (5.23) при разных значениях коэффициентов деформации.

Таблица 1

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	0.5	0.4	0.25	0.10	0.05
$\frac{H}{b}<$	0.034	0.024	0.021	0.017	0.011	0.007

Таблица 2

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	9	16	25	40	50
$\frac{H}{b}<$	0.034	0.102	0.136	0.170	0.215	0.240

Из таблицы 1 видно, что если приведенная физическая толщина $G_* = \frac{G_{13}}{G_{23}}$ возрастает, то приближенная формула (5.24) применима для очень тонких удлиненных профилей, а из таблицы 2 видно, что если G_* убывает, то формулу (5.24) можно считать точной для достаточно тонких профилей.

Если принять

$$T = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3} \frac{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{p} + \frac{8\lambda^5 b^4 \Delta^5}{3a_{22}^2 p (h_1+h_2)^4} \times$$
$$\times \{(h_1-h_2)^2 [a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2] \delta_1(m, p, q) + 4(h_1+h_2)^2 \times$$
$$\times [(h_1-h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2(m, p, q) + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta_3(m, p, q)]\} B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right), \tag{5.25}$$

то относительная погрешность, согласно (5.19), будет

$$\varepsilon_4 < \frac{3\pi p \lambda^3}{16\theta\Delta^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \frac{(p_3+\lambda p_4) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_4}{1 + \frac{\lambda^2 \Delta^2 A_3}{a_{22}^2 (h_1+h_2)^4} \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}},$$

где

$$A_3 = (h_1-h_2)^2 [a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2] \delta_1 +$$
$$+ 4(h_1+h_2)^2 [(h_1-h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2 + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta_3],$$

откуда, потребовав, чтобы $\varepsilon_4 < 0{,}01$, получим, что значения λ удовлетворяют неравенству

$$\lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C < 0, \tag{5.26}$$

где

$$A = \frac{p_3 a_{11}}{p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4},$$

$$B = -\frac{0{,}16\Delta^5\theta B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{3\pi p a_{22}^2 (h_1+h_2)^4} \times$$
$$\times \left\{ \frac{(h_1-h_2)^2 [a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2] \delta_1}{p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4} + \right.$$
$$\left. + \frac{4(h_1+h_2)^2 [(h_1-h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2 + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta_3]}{p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4} \right\},$$

$$C = -\frac{0{,}16\Delta^3\theta}{3\pi p (p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4)} B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right). \tag{5.27}$$

Для иллюстрации полученного результата опять рассмотрим численный пример для того же авиационного профиля $\left(m=\frac{1}{2},\ p=q=\right.$ $\left.=1\right)$. Вычисления показывают, что

$$p_3=q_3=0,$$

$$p_4=637{,}875\,\frac{a_{11}b}{a_{22}^2},\quad q_4=40{,}5\,\frac{a_{11}b}{a_{22}^2}.$$

Тогда из (5.27) находим

$$A=0,\quad B=\frac{738\cdot 10^{-7}\cdot\frac{a_{22}}{a_{11}}}{1+0{,}129\cdot\frac{a_{12}}{a_{11}}},\quad C=-\frac{12922\cdot 10^{-9}\frac{a_{22}^2}{a_{11}^2}}{1+0{,}129\frac{a_{12}}{a_{11}}}.$$

Учитывая это, из (5.26) находим

$$\frac{H}{b}<2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}+0{,}129a_{12}}}\cdot\sqrt{-0{,}00004+0{,}00359\cdot\sqrt{1+0{,}129\cdot\frac{a_{12}}{a_{11}}}}$$

или, перейдя к общепринятым обозначениям, получим

$$\frac{H}{b}<0{,}0126\cdot\frac{\sqrt{89{,}75\cdot\beta-1}}{\beta\sqrt{G_*}},\tag{5.28}$$

где

$$\beta=\sqrt{1+0{,}129\cdot\mu_{zx,\,zy}},\qquad G_*=\frac{G_{13}}{G_{23}},$$

а $\mu_{zx,zy}$ — коэффициент Ченцова [19—21], который характеризует сдвиг в плоскости, параллельной zoy, вызванный напряжением τ_{xz}.

Для рассматриваемого стержня из (5.28) будем иметь

$$\frac{H}{b}<\frac{0{,}118}{\sqrt{G_*}},\tag{5.29}$$

так как $\beta=1$.

Таким образом, если имеет место (5.28) для неортотропного стержня или (5.29) для ортотропного стержня, то

$$C_t=0{,}162\cdot\frac{H^3b}{a_{22}}\left[1-1{,}428\cdot\frac{H^2}{b^2}\frac{a_{11}}{a_{22}}\right]\tag{5.30}$$

можно считать точной формулой для жесткости кручения авиационного профиля (ограниченного полукубической параболой).

В таблицах 3 и 4 приведены некоторые значения $\frac{H}{b}$, подсчитанные по неравенству (5.29), при разных значениях коэффициента деформации, а в таблицах 5 и 6 приведены значения $\frac{H}{b}$, вычисленные по (5.28).

$a_{12}=0$ *Таблица 3*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	9	16	25	40	50
$\frac{H}{b}<$	0.118	0.354	0.472	0.590	0.745	0.834

$a_{12}=0$ *Таблица 4*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	0,50	0,40	0,25	0,10	0,05
$\frac{H}{b}<$	0.118	0,083	0.074	0.059	0.037	0,026

$\mu_{zx, zy}=-0,4$ *Таблица 5*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	9	16	25	40	50
$\frac{H}{b}<$	0.120	0.261	0.481	0.601	0.760	0.850

$\mu_{zx, zy}=-0,4$ *Таблица 6*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	0,50	0,40	0,25	0,10	0,05
$\frac{H}{b}<$	0.120	0,085	0,076	0.060	0,038	0,017

Из этих таблиц видно, для каких анизотропных профилей верно выражение (5.30).

Ереванский государственный
университет

Поступила 22 XI 1960

Վ. Ս. Սարգսյան

ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ԱՎԻԱՑԻՈՆ ՊՐՈՖԻԼՆԵՐՈՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՐԻԶՄԱՅԱՁԵՎ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկված է երկարացված ընդհանուր տեսքի ավիացիոն պրոֆիլներով լայնական հատվածքներ ունեցող անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) պրիզմայաձև ձողերի ոլորման խնդիրը։

Լուծումը ներկայացված է շարքով ըստ փոքր՝ λ պարամետրի։ Ստացված են ամենաընդհանուր դեպքում լարումների ֆունկցիայի, շոշափող լարումների, մաքսիմում լարումների և ոլորման կոշտության համար արտահայտություններ։

Ուսումնասիրված է ոլորման կոշտության մոտավոր բանաձևի ճշգրտության հարցը։ Ստացված արդյունքների համար կազմված են աղյուսակներ։

Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов. Том 1, Изд. АН СССР, М., 1951.
2. *Duncan W. T.* Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes. „R. & M.", № 1444, 1932.
3. *Панов Д. Ю.* Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. „ДАН СССР, новая серия", **3** (VIII), № 12 (62), 1935, 63—66.
4. *Панов Д. Ю.* Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей. „Изв. АН СССР, серия математическая", 1937.
5. *Икуи.* Кручение стержней, имеющих авиационные профили „Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs", **20**, №95, 1951, 462—465.
6. *Ванторин В. Д.* О кручении анизотропной призмы, сечение которой ограничено кривой $y^2=k^2x(1-x)^2$. „ПММ", **3**, вып. 3, 1939.
7. *Локшин А. Ш.* К кручению анизотропных призм. „Записки Днепропетровского института народного образования", 1927.
8. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук" **12**, № 2, 1959.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.
10. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
11. *Ляв А.* Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1935.
12. *Griffith.* Preliminary Report on the twisting of Propeller Blades. „R. & M.", № 454, 1918..
13. *Prescott I.* Applied Elasticity, 1924.
14. *Olszak W.* Uogólnienie analogii membranowej do zagadnien ukladow anizotropowych., „Arch. mech. stosowanej", 1953, **5**, № 1, 89—106.
15. *Лехницкий С. Г.* Кручение многослойного прямоугольного стержня. „Инженерный сборник", **23**, 1956.
16. *Саркисян В. С.* Кручение многослойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с учетом линейной ползучести. „Известя АН АрмССР, серя физ.-мат., наук", **12**, № 4, 1959.
17. *Леонов М. Я.* и *Панасюк В. В.* О приближенном определении жесткости при кручении. „Научные записки ин-та машиновед. и автоматики АН УССР", 5, 1956, 46—50.
18. *Martin A. I.* On a formula for the torsional rigidity of thin—symmetrical—sections. „I. Math. and Phys", **36**, № 1, 1957, 10—25.
19. *Ченцов Н. Г.* Исследование фанеры, как ортотропной пластинки. „Технические заметки ЦАГИ", № 91, 1936.
20. *Рабинович А. Л.* Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. „Труды ЦАГИ", № 582, 1946.
21. *Митинский А. Н.* Упругие постоянные древесины, как ортотропного материала. „Труды Лесотехнической академии им. С. М. Кирова", № 63, 1948.
22. *Янпольский А. Р.* Расчет крутильной жесткости анизотропного стержня. „Труды МВМИ", вып. 11, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ФИЗИКА

Х. А. Симонян

Прохождение через квадратичный резонанс в синхротроне с жесткой фокусировкой

Полные уравнения бетатронных колебаний вокруг некоторой плоской периодической орбиты в синхротроне с жесткой фокусировкой даны в [1].

Здесь мы рассмотрим эффект совместного действия возмущений из-за флуктуаций квадратичной нелинейности и несимметрии поля относительно плоскости орбиты ($z=0$).

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{d\theta^2}-\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{n}{\rho^2}r=-\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{H\rho}\left[\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2H}{\partial r^2}\right)(r^2-z^2)+\frac{\partial^2H}{\partial r\partial z}rz\right],\\ &\frac{d^2z}{d\theta^2}+\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{n}{\rho^2}z=\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{H\rho}\left[2\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2H}{\partial r^2}\right)rz+\frac{1}{2}\frac{\partial^2H}{\partial r\partial z}(z^2-r^2)\right], \end{aligned}\tag{1}$$

где r — означает горизонтальное, а z — вертикальное отклонения частицы от периодической орбиты; ρ — радиус этой орбиты. „Угол" θ изменяется на длине периодического элемента l на величину 2π, $n=-\frac{\rho}{H}\frac{\partial H}{\partial r}$ — показатель спадания магнитного поля по радиусу; $\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2H}{\partial r^2}\right)$ — ошибка в квадратичной нелинейности; величина $\frac{\partial^2H}{\partial r\partial z}$ — описывает несимметрию поля относительно плоскости $z=0$.

Решение системы (1) ищем в виде

$$\begin{gathered} x_k(\theta)=a_k\varphi_k+a_k^*\varphi_k^*,\\ \frac{dx_k(\theta)}{d\theta}=a_k\frac{d\varphi_k}{d\theta}+a_k^*\frac{d\varphi_k^*}{d\theta},\\ (k=r,\ z\quad x_r=r\quad x_z=z), \end{gathered}\tag{2}$$

где φ_k и φ_k^*—суть два линейно независимых решения уравнений (1) без правой части, нормированных условием

$$\varphi_k \frac{d\varphi_k^*}{d\theta} - \varphi_k^* \frac{d\varphi_k}{d\theta} = -2iw \tag{3}$$

с известными свойствами

$$\varphi_k(\theta) = f_k(\theta)\, e^{i\int\limits_0^\theta \nu_k d\theta}, \qquad f_k(\theta + 2\pi) = f_k(\theta), \tag{4}$$

$\nu_k = \nu_k(\theta)$ — мгновенная квази-частота бетатронных колебаний.

Подставляя (2) в (1) и учитывая (3), получим уравнение для коэффициентов $a_k(\theta)$

$$\frac{da_r}{d\theta} = -\frac{\varphi_r^*}{2iw}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H\rho}\,[\Delta_1(a_r^2\varphi_r^2 + a_r^{*2}\varphi_r^{*2} + 2|a_r|^2|\varphi_r|^2 - a_z^2\varphi_z^2 - a_z^{*2}\varphi_z^{*2} - 2|a_z|^2|\varphi_z|^2) + \Delta_2(a_r a_z\varphi_r\varphi_z + a_r^* a_z^*\varphi_r^*\varphi_z^* + a_r a_z^*\varphi_r\varphi_z^* + a_r^* a_z\varphi_r^*\varphi_z)], \tag{5}$$

$$\frac{da_z}{d\theta} = \frac{\varphi_z^*}{2iw}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H\rho}\Big[2\Delta_1(a_r a_z\varphi_r\varphi_z + a_r^* a_z^*\varphi_r^*\varphi_z^* + a_r^* a_z\varphi_r^*\varphi_z + a_r a_z^*\varphi_r\varphi_z^*) + \frac{1}{2}\Delta_2(a_z^2\varphi_z^2 + a_z^{*2}\varphi_z^{*2} + 2|a_z|^2|\varphi_z|^2 - a_r^2\varphi_r^2 - a_r^{*2}\varphi_r^{*2} - 2|a_r|^2|\varphi_r|^2)\Big], \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\Delta_1 = \delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right), \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z}. \tag{7}$$

Правые части уравнений (5) и (6) являются малыми периодическими возмущениями, зависящими от частот $\nu_{r,z}$ и, несмотря на свою малость, при определенных резонансных значениях этих частот могут дать большой вклад в изменение величин $a_k(\theta)$.

Учитывая это, мы можем оставить в правых частях (5) и (6) только резонансные члены и в первом приближении отбросить нерезонансные. Полученные таким способом резонансные уравнения первого приближения совпадают с так называемыми укороченными уравнениями, полученными по методу Крылова и Боголюбова [2].

Учет нерезонансных членов и оценка их влияния проводится по резонансной теории возмущений, подробное изложение которой дано, в частности, в [1].

Из уравнений (5) и (6) видно, что резонансы (при которых правые части обращаются в постоянные, если $a_k = \text{const}$) могут возникнуть при соотношениях

$$
\begin{aligned}
&\nu_{r,z}=\frac{k}{M}, \qquad 3\nu_{r,z}=\frac{k}{M},\\
&\nu_{r,z}+2\nu_{z,r}=\frac{k}{M}, \qquad 2\nu_{r,z}-\nu_{z,r}=\frac{k}{M},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

т. к. функции Δ_1 и Δ_2 имеют период в один оборот

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1(\theta+2\pi M)=\Delta_1(\theta),\\
&\Delta_2(\theta+2\pi M)=\Delta_2(\theta),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

M — число периодических секторов.

Мы не будем рассматривать резонансы при $\nu_{r,z}=\frac{k}{M}$, т. к. частоты $\nu_{r,z}$ всегда выбираются в пределах

$$
\frac{k}{M}-\frac{1}{2M}<\nu_{r,z}<\frac{k}{M},
\tag{10}
$$

а также резонансы на разности $2\nu_{r,z}-\nu_{z,r}=\frac{k}{M}$, дающие, как известно, только связь колебаний.

Истинные резонансы при $3\nu_{r,z}=\frac{k}{M}$ и $2\nu_{r,z}+\nu_{z,r}=\frac{k}{M}$ (назовем их квадратичными) из-за синхротронных колебаний бетатронной частоты могут неоднократно проходиться. Оценим прирост амплитуды, например, радиальных колебаний при однократном прохождении через квадратичный резонанс.

Учитывая, что частоты обычно выбираются близкими —

$$
|\nu_r-\nu_z|\ll\nu_{r,z}=\nu,
\tag{11}
$$

получим резонансное уравнение для a_r

$$
\begin{aligned}
\frac{da_r}{d\theta}=-\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{2\,iw\rho}\left(a_r^{*2}g_1e^{i\gamma_1}+a_z^{*2}g_2e^{i\gamma_2}+a_r^{*}a_z^{*}g_3e^{i\gamma_3}\right)\times\\
\times\exp\left\{-3i\int_0^\theta\left(\nu-\frac{k}{3M}\right)d\theta\right\},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&g_1e^{i\gamma_1}=\frac{1}{2\pi MH}\int_0^{2\pi M}\Delta_1 f_r^{*3}e^{-i\frac{k}{M}\theta}\,d\theta,\\
&g_2e^{i\gamma_2}=\frac{1}{2\pi MH}\int_0^{2\pi M}\Delta_1 f_r^{*}f_z^{*2}e^{-i\frac{k}{M}\theta}\,d\theta,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$g_3 e^{i\gamma_3} = \frac{1}{2\pi MH} \int\limits_0^{2\pi M} \Delta_2 f_r^{*2} f_z e^{-i\frac{k}{M}\theta} d\theta. \tag{13}$$

Вблизи резонанса $\nu \approx \nu_{рез} = \dfrac{k}{3M}$ можно пользоваться разложением

$$\nu(\theta) = \nu_{рез} + \left(\frac{d\nu}{d\theta}\right)_{рез} (\theta - \theta_{рез}) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\nu}{d\theta^2}\right)_{рез} (\theta - \theta_{рез})^2 + \cdots \tag{14}$$

причем для случая $\nu'_{рез} \neq 0$ можно отбросить последний член в (14).

1) Рассмотрим этот основной случай. Тогда (12) примет вид

$$\frac{da_r}{d\theta} = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2iw\rho} (a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}) \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{3}{2} i\nu'_{рез} (\theta - \theta_{рез})^2\right\}. \tag{15}$$

Полагая резонанс достаточно тонким, получим

$$|\Delta a_r| \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2w\rho} \sqrt{\frac{2\pi}{3\nu'_{рез}}} |a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}|. \tag{16}$$

Фазы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ имеют самые различные значения, т. к. они получены в результате интегрирования разных величин.

Предполагая статистическую независимость возмущений в различных магнитах, получим

$$\overline{|\Delta a_r|^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2w\rho}\right)^2 \frac{2\pi}{3\nu'_{рез}} (|a_r|^4 \overline{g_1^2} + |a_z|^4 \overline{g_2^2} + |a_r|^2 |a_z|^2 \overline{g_3^2}), \tag{17}$$

где усреднение проведено по различным величинам

$$\left(\frac{H_2}{H}\right)_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H/\partial r^2}{H} \quad \text{и} \quad \left(\frac{H_2}{H}\right)_2 = \frac{\partial^2 H/\partial r\partial z}{H},$$

$$\overline{g_1^2} \approx \frac{1}{4\pi^2 M} \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)_1^2} \left\{\left|\int\limits_0^{\pi} \varphi_r^{*3} d\theta\right|^2 + \left|\int\limits_0^{2\pi} \varphi_r^{*3} d\theta\right|^2\right\},$$

$$\overline{g_2^2} \approx \frac{1}{4\pi^2 M} \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)_1^2} \left\{\left|\int\limits_0^{\pi} \varphi_r^* \varphi_z^{*2} d\theta\right|^2 + \left|\int\limits_0^{2\pi} \varphi_r^* \varphi_z^{*2} d\theta\right|^2\right\}, \tag{18}$$

$$\overline{g_3^2} \approx \frac{1}{4\pi^2 M} \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)_2^2} \left\{\left|\int\limits_0^{\pi} \varphi_r^{*2} \varphi_z d\theta\right|^2 + \left|\int\limits_0^{2\pi} \varphi_r^{*2} \varphi_z^* d\theta\right|^2\right\}.$$

Введя фазу $\psi_k(\theta)$ по формуле

$$a_k(\theta) = \frac{A_k e^{i\psi_k}}{2\,|\varphi|_{max}},$$

$$|\varphi_r|_{max} \approx |\varphi_z|_{max} = |\varphi|_{max}$$

и усредняя по этим фазам, получим

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2w\rho}\right)^2 \frac{2\pi}{3\nu'_{рез}} \frac{[A_r^4 \overline{g_1^2} + A_z^4 \overline{g_2^2} + A_r^2 A_z^2 \overline{g_3^2}]}{4\,|\varphi|^2_{max}}. \tag{19$_1$}$$

Вблизи центра области устойчивости выполняется соотношение

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{20}$$

где $\Delta\nu$ — отклонение частоты и $\Delta\varepsilon$ — отклонение энергии при синхротронных колебаниях.

В линейном приближении

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{max} \cos \Omega t, \tag{21}$$

где Ω — частота синхротронных колебаний.

Подставляя значение $\nu'_{рез}$ из (20) и (21) в (19$_1$), получим

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2w\rho}\right)^2 \frac{2\pi}{3} \frac{\omega_0 M}{4\,|\varphi|^2_{max} (\Delta\nu)_{max}\, \Omega \sin \Omega t_{рез}} \times$$

$$\times [A_r^4 \overline{g_1^2} + A_z^4 \overline{g_2^2} + A_r^2 A_z^2 \overline{g_3^2}], \tag{22$_1$}$$

где ω_0 — частота обращения.

При грубой оценке эффекта можно положить

$$\overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2_1} \sim \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2_z}, \quad A_r \sim A_z \sim A, \quad \sin \Omega t_{рез} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{g_1^2} \sim \overline{g_2^2} \sim \overline{g_3^2} \sim \left(\frac{l_M}{l}\right)^2 \frac{|\varphi|^6_{max}}{M} \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2_1}, \tag{23}$$

где l_M — длина магнита.

Тогда

$$\overline{\Delta A^2} \sim 0{,}5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{Il_M}{\rho}\right)^2 \frac{\omega_0\,|\varphi|^4_{max}}{\Omega w^2 (\Delta\nu)_{max}} A^4 \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2_1}. \tag{24$_1$}$$

2) В случае, когда $\nu'_{рез} = 0$ берем следующий член в разложении (14). Уравнение (12) приобретает вид

$$\frac{da_r}{d\theta} = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2w\rho} (a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} i \nu''_{рез} (\theta - \theta_{рез})^3\right\}. \tag{15$_2$}$$

При тех же предположениях, что и в пункте 1), получим

$$|\Delta a_r| \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2w\rho} |a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}| \times$$

$$\times \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{0.5\dot{\nu}_{рез}} \cdot \Gamma(^2/_3)}. \tag{16$_2$}$$

откуда

$$\overline{|\Delta a_r|^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2w\rho}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \frac{1}{\Gamma^2(^2/_3)(0{,}5\,\dot{\nu}_{рез})^{2/3}} \times$$

$$\times (|a_r|^4 \overline{g_1^2} + |a_z|^4 \overline{g_2^2} + |a_r|^2 |a_z|^2 \overline{g_3^2}). \tag{17$_2$}$$

Усредняя по фазам $\psi_k(\theta)$, получим

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\pi}{3w\rho}\right)^2 \left(\frac{1}{2|\dot{\varphi}|_{\max} \cdot \Gamma(^2/_3)}\right)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{1}{0{,}5\,\dot{\nu}_{рез}}\right)^{2/3} [A_r^4 \overline{g_1^2} + A_z^4 \overline{g_2^2} + A_r^2 A_z^2 \overline{g_3^2}]. \tag{19$_2$}$$

Подставим значение $\dot{\nu}_{рез}$ из (20) и (21) в (19$_2$)

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\pi}{3w\rho}\right)^2 \left(\frac{1}{2|\varphi|_{\max} \cdot \Gamma(^2/_3)}\right)^2 \left(\frac{(M\omega_0)^2}{0{,}5\,(\Delta\nu)_{\max}\,\Omega^2 \cos\Omega t_{рез}}\right)^{2/3} \times$$

$$\times [A_r^4 \overline{g_1^2} + A_z^4 \overline{g_2^2} + A_r^2 A_z^2 \overline{g_3^2}]. \tag{22$_2$}$$

При грубой оценке, согласно (23), получим

$$\overline{\Delta A^2} \sim 0{,}72 \cdot 10^{-3} \left(\frac{ll_M}{\rho}\right)^2 \frac{|\dot{\varphi}|^4_{\max}}{w^2} \frac{M^{4/3}}{(\Delta\nu)^{2/3}_{\max}} \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^{4/3} A^4 \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2_1}. \tag{24$_2$}$$

За все время ускорения, частица проходит через резонанс n раз (n — число фазовых колебаний за цикл ускорения). Поэтому полный прирост амплитуды за время ускорения равен

$$\overline{A_r^2} = \sum^{n} \overline{\Delta A_r^2}. \tag{25}$$

Принимая оценку (24$_1$), (24$_2$) и возлагая требования на $\overline{A_r^2}$, можно получить допуск на величину $\sqrt{\overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}}$.

В качестве примера найдем допуски на $\sqrt{\overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}}$ в электронном ускорителе с жесткой фокусировкой.

Полагая $A \sim (0{,}45 \div 0{,}56)$ *см* (в формулы входят амплитуды свободных колебаний вокруг периодической орбиты)

$$\frac{u_M}{\rho} \sim 130\, см, \quad M(\Delta\nu)_{\max} \sim 3 \cdot 10^{-2}, \quad |\varphi|^2_{\max} \sim 8{,}5, \quad \frac{\omega_0 M}{\Omega} \sim 25 \cdot 10^2,$$

$$w = 1, \quad n = 100 \div 300,$$

согласно (24_1) получим

$$\overline{\Delta A^2} \sim (2 \div 4{,}5) \cdot 10^6 \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}, \tag{26_1}$$

а согласно (24_2) —

$$\overline{\Delta A^2} \sim (0{,}4 \div 1) \cdot 10^5 \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}. \tag{26_2}$$

Полный прирост амплитуды за время ускорения соответственно равен

$$\overline{A^2} \sim (100 \div 1000) \cdot 10^6 \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}, \tag{27_1}$$

$$\overline{A^2} \sim (10 \div 100) \cdot 10^5 \overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}. \tag{27_2}$$

Потребуем, например, чтобы $\overline{\Delta A^2} < 10^{-2}\, см^2$.

Тогда в первом случае $\sqrt{\overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}} \sim (0{,}5 \div 0{,}7) \cdot 10^{-4}$, а во втором случае $\sqrt{\overline{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}} \sim (0{,}3 \div 0{,}5) \cdot 10^{-3}$.

Это является жестким допуском на флуктуации нелинейности второго порядка и поэтому необходимо соответствующим выбором рабочей частоты избегать прохождения через квадратичные резонансы.

Автор глубоко признателен Ю. Ф. Орлову за обсуждения, стимулирующие возникновению настоящей работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 26 V 1960

Խ. Ա. Սիմոնյան

ԱՆՑՈՒՄԸ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍԻ ՄԻՋՈՎ ԿՈՇՏ ՖՈԿՈՒՍԱՑՄԱՄԲ ՍԻՆԽՐՈՖԱԶԱՏՐՈՆՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ աշխատության մեջ քննարկված է քառակուսային ոչ-գծային ֆլյուկտուացիաներով և օրբիտի հարթության նկատմամբ մագնիսական դաշտի ոչ-սիմետրիկությամբ պայմանավորված գրգռումների համատեղ ազդեցության էֆեկտը։

Ստացված է և լուծված շառավղային տատանումների, այսպես կոչված, ռեզոնանսային հավասարումը։

Ուսումնասիրված են ռեզոնանսով անցնելու երկու հիմնական դեպքեր, որոնք պայմանավորված են բետատրոնային հաճախականության սինխրոտրոնային տատանումներով։

Գնահատված է ռեզոնանսով անցնելիս ստացված շառավղային տատանումների ամպլիտուդայի աճը։

Արդյունքները բերված են ֆորմուլաների տեսքով, որոնք պարունակում են արագացուցչի պարամետրները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов Ю. Ф.* Нелинейная теория бетатронных колебаний в ускорителе с жесткой фокусировкой. Диссертация, Ергосунт, 1958
2. *Крылов Н. М.* и *Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
3. *Рыжик И. М.* и *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Часть I. Издательство Иностранной литературы, М., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ФИЗИКА

В. А. Шахбазян

О радиационных поправках низших порядков в скалярной квантовой электродинамике

При рассмотрении ренормализационной группы в скалярной электродинамике [1]—[3] были использованы приближенные выражения радиационных поправок низших порядков к одночастичным функциям Грина и вершинным частям, справедливые в ультрафиолетовой и инфракрасной областях (см., например, ф-лы (16) в [1]). Представляют, однако, интерес также точные выражения указанных поправок. Ниже приводятся формулы радиационных поправок низших порядков к мезонной и фотонной функциям Грина, справедливые во всей области изменения импульсного аргумента, расчет дважды логарифмической ультрафиолетовой асимптотики вершинной части порядка e^2 и инфракрасной асимптотики четырехвершинной функции $\square_1$ (определение последней см. в [1]—[3]). В последнем разделе статьи излагается получение второго обобщенного тождества Уорда в скалярной электродинамике. Рассмотрение везде проводится в формализме Дэффина-Кеммера.

§ 1. Радиационные поправки низших порядков к мезонной и фотонной функциям Грина

Пользуясь методом, развитым в [4], для мезонной собственно-энергетической части получаем во втором порядке теории возмущений

$$\Sigma_M^{(2)}(p) = -\frac{3e^2}{8\pi^2} X \frac{M^2}{m} + \left(\frac{3e^2}{64\pi^2} - \frac{e^2 d_l^0}{64\pi^2}\right) \ln\left(\frac{M}{m}\right)^2 (\hat{p} - m) +$$

$$+ \left(\frac{5e^2}{64\pi^2} + \frac{e^2 d_l^0}{64\pi^2}\right) m \ln\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{3e^2 (d_l^0 - 1)}{64\pi^2} \ln\left(\frac{M}{m}\right)^2 \left(\frac{p^2 - m^2}{m}\right) X +$$

$$+ \frac{e^2}{64\pi^2} \left\{ -2 \frac{p^2 - m^2}{m^2} \left(\hat{p} \frac{p^2 + m^2}{p^2} + 2m\right) A(p) - 2 \frac{p^2 - m^2}{p^2} \hat{p} + \right.$$

$$+ \left[\hat{p} - m + \frac{3X}{m} (p^2 - m^2)\right] \frac{p^2 - m^2}{m^2} \left(\frac{p^2 + m^2}{p^2} A(p) + \frac{m^2}{p^2}\right) (d_l^0 - 1) +$$

$$+4m\frac{\hat{p}^2}{p^2}\cdot\frac{p^2-m^2}{p^2}[A(p)+1](d_l^0-1)+$$

$$+\left[2m\frac{\hat{p}^2}{m^2}\cdot\frac{p^2-m^2}{p^2}-\frac{2}{m}(\hat{p}^2-m^2)\right](d_l^0-1)\Big\}, \qquad (1.1)$$

где

$$A(p)=\begin{cases}\frac{m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|, & |p^2-m^2|\gg\lambda_0^2,\\ \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_0^2}{m^2}, & p^2=m^2,\end{cases}$$

λ_0—фиктивная масса фотона, введенная для устранения инфракрасной расходимости. Выражение для $A(p)$ получено с точностью до мнимой части. Из (1.1) следует, что при снятии промежуточной регуляризации Паули-Вилларса (т. е. при $M\to\infty$) $\Sigma_M(p)$ расходится. Как известно [4], после устранения расходимостей из S-матрицы, регулярные части диаграмм, содержавших особености, определяются с точностью до конечных полиномов по импульсам той же степени и операторной структуры, что и устраненные сингулярные члены. Поэтому регулярная часть (1.1) будет определяться с точностью до членов $\sim(\hat{p}-m)$, $\sim X\frac{p^2-m^2}{m^2}$, $\sim m$, $\sim Xm$ с произвольными коэффициентами. Определяя произвольные постоянные из условия обращения в нуль радиационных поправок во внешние линии, мы получим не содержащее произвола конечное выражение для $\Sigma(p)$.

Учитывая, что полная мезонная функция Грина определяется формулой

$$G(p)=\Delta^c(p)+\Delta^c(p)\Sigma(p)G(p), \qquad (1.2)$$

мы получим следующее выражение $G_{(2)}(p)$ с точностью до членов третьего порядка по e

$$G_{(2)}(p)=\frac{1}{m}\frac{m^2a_{(2)}(p)+(\hat{p}^2-p^2)b_{(2)}(p)+m\hat{p}d_M^{(2)}(p)}{m^2-p^2}-$$

$$-\frac{1}{m}Y\varphi_{(2)}(p), \qquad (1.3)$$

где

$$a_{(2)}(p)=1+\frac{e^2}{64\pi^2}\left|\left(4\frac{p^2-m^2}{p^2}-4\frac{m^2}{p^2}-12\right)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|+\right.$$

$$+\left(4\frac{p^4-m^4}{p^4}+4\frac{m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+ \qquad (1.4)$$

$$+4\frac{p^2-m^2}{p^2}(d_l^0-1)+4\frac{p^2+m^2}{p^2}(d_l^0-1)+$$

$$+ 2\frac{p^2+m^2}{p^2}(d_l^0-1)+2(d_l^0-1)\Bigg],$$

$$b_{(2)}(p) = 1+\frac{e^2}{64\pi^2}\Bigg[-4\frac{m^2-p^2}{p^2}\cdot\frac{m^2+p^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| -$$
$$-16\frac{m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| + 4\left(\frac{p^2-m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{m^4}{p^4}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+ \tag{1.5}$$
$$+4\left(\frac{p^2-m^2}{p^2}+\frac{m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)(d_l^0-1)+2\frac{p^2+m^2}{p^2}(d_l^0-1)+$$
$$+8(3-d_l^0)A(m^2)+4(4-3d_l^0)\Bigg],$$

$$d_M^{(2)}(p) = 1+\frac{e^2}{64\pi^2}\Bigg[-2\left(\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)^2\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| - 8\frac{m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| -$$
$$-2\frac{p^2+m^2}{p^2}+4\frac{p^2-m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+ \tag{1.6}$$
$$+8\frac{m^4}{p^4}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+\left(4\frac{p^2-m^2}{p^2}+8\frac{m^2}{p^2}\right)(d_l^0-1)+$$
$$+8(3-d_l^0)A(m^2)+4(3-d_l^0)\Bigg],$$

$$\varphi_{(2)}(p) = \frac{3e^2}{64\pi^2}\left[\frac{p^2-m^2}{p^2}\left(\frac{p^2+m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|+1\right)\right](d_l^0-1). \tag{1.7}$$

При $|p^2| \gg m^2$ нетрудно получить выражения для $a_{(2)}(p)$, $b_{(2)}(p)$, $d_M^{(2)}(p)$ и $\varphi_{(2)}(p)$, приведенные в [1].

В инфракрасной области, т. е. при $p^2 \to m^2$, имеем в согласии с [5] и [6]

$$a_{(2)}(p) = b_{(2)}(p) = d_M^{(2)}(p) = 1+\frac{e^2}{8\pi^2}(d_l^0-3)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|, \tag{1.8}$$

$$\varphi_{(2)}(p)\to 0.$$

Аналогично можно получить выражение для поперечной функции Грина фотона

$$D_{tr}^{C_{mn}}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{mn}-\frac{k^m k^n}{k^2}\right). \tag{1.9}$$

С точностью до члена $\sim e^4$

$$d_{(2)}(k^2) = 1+\frac{e^2}{16\pi^2}I(k^2), \tag{1.10}$$

где

$$I(k^2) = \int_0^1 dx\,[4x(1-x)-1]\ln\left|\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2}\right|. \tag{1.11}$$

Произведя те же преобразования, что и в [1], придем к следующему параметрическому представлению [7], [8] фотонной функции Грина

$$D^{C_{mn}}_{(2)_{tr}}(k) = -\left(g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2}\right)\left[\frac{1}{k^2+i\varepsilon} + \frac{e^2}{48\pi^2}\int_{4m^2}^{\infty} dM^2\,\frac{(1-4m^2/M^2)^{3/2}}{M^2(M^2-k^2+i\varepsilon)}\right] \tag{1.12}$$

При $|k^2| \gg m^2$

$$d(k^2) = 1 + \frac{e^2}{48\pi^2}\ln\left|\frac{k^2}{m^2}\right| + \cdots \tag{1.13}$$

§ 2. О радиационных поправках к вершинным частям

Рассмотрим радиационные поправки к вершинным частям Γ и $\Box$ (определение Γ и $\Box$ см. [1], [2]). При их вычислении в общем случае не удается избавиться от конечных интегрирований. Поэтому получающиеся выражения выписывать не будем. Ограничимся нахождением дважды-логарифмической асимптотики функции Γ порядка e^2 и инфракрасной асимптотики функции $\Box_1$ в низших приближениях по e^2 и h. Методика нахождения дважды-логарифмической асимптотики вершинной части порядка e^2 была разработана Судаковым [9] для спинорной электродинамики. Техника вычисления типового интеграла, дающего двойной логарифм, в скалярной электродинамике сохраняется без изменения. Различие возникает при исследовании матричных структур. Типовой интеграл имеет вид

$$J = \int \frac{d^4k'}{[(p-k')^2 + i\varepsilon]\,[(q-k')^2 + i\varepsilon]\,(k'^2 + i\varepsilon)}. \tag{2.1}$$

Асимптотика J при

$$|k^2| \sim |pq| \gg |q^2|, \quad |p^2| \gg m^2 \tag{2.2}$$

имеет вид [9]

$$J = -\frac{i}{8pq}\ln\left|\frac{pq}{q^2}\right|\ln\left|\frac{pq}{p^2}\right|. \tag{2.3}$$

В числителе подынтегрального выражения вершинной части

$$\sum_l g^{ll}\left\{\Gamma^l\left[(\hat{q}-\hat{k}') - \frac{1}{m}(q-k')^2 + \frac{1}{m}(\hat{q}-\hat{k}')^2\right]\Gamma^n \times\right.$$

$$\times\left[(\hat{p}-\hat{k}')-\frac{1}{m}(p-k')^2+\frac{1}{m}(\hat{p}-\hat{k}')^2\right]\Gamma^l$$

вклад в дважды-логарифмическую асимптотику дают члены

$$\sum_l g^{ll}\left\{\Gamma^l\hat{q}\Gamma^n\hat{p}\Gamma^l+\Gamma^l\left[-\frac{1}{m}(q^2-\hat{q}^2)\right]\Gamma^n\hat{p}\Gamma^l+\right.$$

$$\left.+\Gamma^l\hat{q}\Gamma^n\left[-\frac{1}{m}(p^2-\hat{p}^2)\right]\Gamma^l\right\}.$$

Пользуясь свойствами пятирядного представления матриц Кеммера [10], последнее выражение можно переписать в виде

$$\sum_l g^{ll}\Gamma^l\hat{q}\Gamma^n\hat{p}\Gamma^l+\frac{p^n+q^n}{m}Xpq$$

или

$$-\hat{q}\hat{p}\Gamma^n+\hat{q}p^n+\hat{p}\hat{q}\Gamma^n+\frac{p^n+q^n}{m}Xpq.$$

Так как справа и слева от вершинной части должны стоять функции Грина мезона, рассмотрим следующее выражение

$$\left[\hat{q}+\frac{1}{m}(\hat{q}^2-q^2)\right](-\hat{q}\hat{p}\Gamma^n+\hat{q}p^n+\hat{p}\hat{q}\Gamma^n)\left[\hat{p}+\frac{1}{m}(\hat{p}^2-p^2)\right].$$

Пользуясь неравенствами (2.2) и опять совершая преобразования с использованием свойств матриц Кеммера, получим

$$\left[\hat{q}+\frac{1}{m}(\hat{q}^2-q^2)\right](-\hat{q}\hat{p}\Gamma^n+\hat{q}p^n+\hat{p}\hat{q}\Gamma^n)\left[\hat{p}+\frac{1}{m}(\hat{p}^2-p^2)\right]\cong$$

$$\cong\left[\hat{q}+\frac{1}{m}(\hat{q}^2-q^2)\right]pq\cdot\Gamma^n\left[\hat{p}+\frac{1}{m}(\hat{p}^2-p^2)\right].$$

Так же, как и в [9], доказывается, что вклад недиагональной части функции Грина фотона $\sim(d_l^0-1)$ в дважды-логарифмическую асимптотику равен нулю.

Окончательно для вершинного оператора второго порядка получаем

$$\Gamma^n_{(2)}(p,q,k)=\Gamma^n\left(1-\frac{e^2}{32\pi^2}\ln\left|\frac{k^2}{p^2}\right|\ln\left|\frac{k^2}{q^2}\right|\right)-$$

$$-\frac{e^2}{32\pi^2}\frac{p^n+q^n}{m}X\ln\left|\frac{k^2}{p^2}\right|\ln\left|\frac{k^2}{q^2}\right|. \qquad (2.4)$$

Перейдем к рассмотрению инфракрасной асимптотики функции $\mathfrak{S}_1$. Таковая имеет место, когда квадраты четырех наружных импульсов стремятся к m^2. При этом, разумеется, существенно поведение тех диаграмм, которые имеют инфракрасные особенности. Таким особенностями обладают диаграммы б), в) и г) на фиг. 1.

Нахождение инфракрасных асимптотик значительно сложнее, нежели нахождение симметричных асимптотик в ультрафиолетовой области. Элементы S-матрицы, соответствующие диаграммам 1б), 1в) и 1г) и обладающие матричной структурой $X_{\alpha\beta}X_{\gamma\delta}$, обозначим через S_{he^2}, $S^{(1)}_{e^4}$, $S^{(2)}_{e^4}$ (α, β, γ, $\delta=0, 1, 2, 3, 4$). Тогда радиационные опе-

а б в г

Фиг. 1.

раторы [4], [11] четвертого порядка для рассеяния частиц одинакового знака имеют вид

$$\frac{1}{S_0}\left\langle \frac{\delta^4 S_{he^2}}{\delta\bar{\psi}_4(p')\,\delta\bar{\psi}_4(q')\,\delta\psi_4(-p)\,\delta\psi_4(-q)}\right\rangle_0 = -\frac{he^2}{(2\pi)^8}\left\{\frac{1}{2}\sum_{(p_1,p_2)=(p',q'),\,(q',p')}^{(q,p),\,(p,q)} J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2)+\right.$$

$$\left.+\sum_{(p_1,p_2)=(q',q),\,(q',p)}^{(p',q),\,(p',p)} J^{(2)}_{he^2}(p_1,p_2)\right\}\delta(p'+q'-p-q). \qquad (2.5)$$

$$\frac{1}{S_0}\left\langle \frac{\delta^4 (S^{(1)}_{e^4}+S^{(2)}_{e^4})}{\delta\bar{\psi}_4(p')\,\delta\bar{\psi}_4(q')\,\delta\psi_4(-p)\,\delta\psi_4(-q)}\right\rangle_0 = \frac{e^4\delta(p'+q'-p-q)}{4(2\pi)^8}\times$$

$$\times\left\{\sum_{(p_1,p_2,p_3)=(p',q',p'-p),\,(p',q',p'-q)}^{(q',p',q'-p),\,(q',p',q'-q)} J^{(1)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3)+\right.$$

$$\left.+\sum_{(p_1,p_2,p_3)=(p',q',p'-p),\,(p',p,p'-q)}^{(q,q',q'-p),\,(q',p,q'-q)} J^{(2)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3)\right\}. \qquad (2.6)$$

Здесь

$$J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2)=\int(p_1-k)(p_2+k)D^c(p_1-k)D^c(p_2+k)D^c_0(k)\,d^4k. \qquad (2.7)$$

$$J^{(2)}_{he^2}(p_1,p_2)=\int(p_1-k)(p_2-k)D^c(p_1-k)D^c(p_2-k)D^c_0(k)\,d^4k. \qquad (2.8)$$

$$J^{(1)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3)=\iint\left\{4m^2-3(p_1-k)^2-3(p_2+k)^2+\right.$$

$$\frac{1}{m^2}\left[2(p_1-k)^2(p_2+k)^2+|(p_1-k)(p_2+k)|^2\right]\bigg\}\times$$
$$\times D^c(p_1-k)\,D^c(p_2+k)\,D_0^c(p_3-k)\,D_0^c(k)\,d^4k, \tag{2.9}$$

$$J^{(2)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3)=\int\Big\{4m^2-3(p_1-k)^2-3(p_2-k)^2+$$
$$+\frac{1}{m^2}\left[2(p_1-k)^2(p_2-k)^2+|(p_1-k)(p_2-k)|^2\right]\Big\}\times$$
$$\times D^c(p_1-k)\,D^c(p_2-k)\,D_0^c(p_3-k)\,D_2^c(k)\,d^4k, \tag{2.10}$$

D^c—причинная функция мезона в формализме Клейна-Гордона, D_0^c—фотонная функция Грина. Использована стандартная калибровка $d_l^0=1$.

В формулах (2.5) и (2.6) суммирование производится по выписанным значениям групп импульсов. Например, сумма

$$\sum_{(p_1,p_2)=(p',q'),\,(q',p')}^{(q,p),\,(p,q)} J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2)$$

означает, что берется сумма величин $J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2)$, когда импульсы (p_1,p_2) принимают значения (p',q'), (q',p') (q,p), (p,q).

p, q — начальные импульсы частиц,

p', q' — конечные импульсы частиц.

Ищется поведение интегралов (2.7)—(2.10) при p^2, q^2, q'^2, $p'^2\to m^2$ одновременно в окрестности $k\sim 0$. Отбрасывая в числителях все малые члены, заметим, что для нахождения инфракрасных асимптотик интегралов (2.7)—(2.10) необходимо оценить интегралы следующих типов

$$\int\frac{d^4k}{(2p_1k-\alpha^2)(2p_2k+\alpha^2)k^2}, \qquad \alpha^2=p^2-m^2,$$

$$k^2=(k^0)^2-\vec{k}^2,$$

$$\int\frac{d^4k}{(2p_1k-\alpha^2)(\,.\,p_2k-\alpha^2)k^2}. \qquad p^2=q'^2=q^2=p'^2\to m^2$$

Вычисляя их обычным способом [12] в окрестности $k\sim 0$, получим следующее выражение для функции $\square_1^{(2)}$

$$\square_1^{(2)}\left(\frac{p^2-m^2}{m^2},\ s_1,s_2,s_3,e^2,h\right)=1+\Big[e^2f_1(s_1,s_2,s_3)+$$
$$+\frac{e^4}{h}f_2(s_1,s_2,s_3)\Big]\ln\frac{p^2-m^2}{m^2}. \tag{2.11}$$

где

$$f_1(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{ -\frac{s_1 - {}^1/_2}{\sqrt{s_1(s_1-1)}} \ln \frac{1+\sqrt{(s_1-1)/s_1}}{1-\sqrt{(s_1-1)/s_1}} + \right.$$

$$+ \frac{|s_2| + {}^1/_2}{\sqrt{|s_2|(1+|s_2|)}} \ln \frac{1+\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}}{1-\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}} + \tag{2.12}$$

$$\left. + \frac{|s_3| + {}^1/_2}{\sqrt{|s_3|(1+|s_3|)}} \ln \frac{1+\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}}{1-\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}} \right\},$$

$$f_2(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{16\pi^2}\left\{ -\frac{(s_1 - {}^1/_2)^2}{\sqrt{s_1(s_1-1)}} \cdot \frac{s_2+s_3}{4s_2 s_3} \ln \frac{1+\sqrt{(s_1-1)/s_1}}{1-\sqrt{(s_1-1)/s_1}} + \right.$$

$$+ \frac{(|s_2| + {}^1/_2)^2}{4s_3\sqrt{|s_2|(1+|s_2|)}} \ln \frac{1+\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}}{1-\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}} + \tag{2.13}$$

$$\left. + \frac{(|s_3| + {}^1/_2)^2}{4s_2\sqrt{|s_3|(1+|s_3|)}} \ln \frac{1+\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}}{1-\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}} \right\},$$

$$s_1 = \frac{(p+q)^2}{4m^2}, \quad s_2 = \frac{(p'-p)^2}{4m^2}, \quad s_3 = \frac{(p'-q)^2}{4m^2}, \tag{2.14}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1, \quad s_1 > 1, \quad s_2 < 0, \quad s_3 < 0. \tag{2.15}$$

Чтобы получить выражение $\square_1^{(2)}$ для рассеяния частиц с противоположными зарядами, в формулах (2.11)—(2.13) следует произвести замену

$$s_1 \rightleftarrows s_3, \quad s_2 \to s_2.$$

§ 3. Об обобщенных тождествах Уорда в скалярной электродинамике

Как об этом упоминалось в [1], при устранении расходимостей скалярной электродинамики, приходится пользоваться двумя тождествами Уорда—между мезонной собственно-энергетической частью и вершинной частью и между вершинной и комптоновской частями.

В работах [13] было получено, так называемое, обобщенное тождество Уорда в спинорной электродинамике. В скалярной электродинамике возможно получить соответственно два обобщенных тождества Уорда. Первое из них по своей форме в точности совпадает с таковым в спинорной электродинамике. Получим второе обобщенное тождество Уорда—между вершинной и комптоновской частями.

Для этого заметим, что соотношение для коэффициентных функций

$$\operatorname{div}_{\xi}^{(4)} K_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, \xi) = i\left[\sum_a \delta(\xi - x_a) - \sum_b \delta(\xi - x_b)\right] K_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.1}$$

полученное в [4], справедливо также и в скалярной электродинамике. Рассматривая его для комптоновской ($n+2$-го порядка) и вершинной ($n+1$-го порядка) частей, запишем (3.1) в импульсном представлении

$$\pi_2 K'_{n+2}(p_1, \cdots, p_n|\pi_1, \pi_2) = \Gamma'_{n+1}(p_1, \cdots, p_b + \pi_2, \cdots, p_n|\pi_1) -$$

$$- \Gamma'_{n+1}(p_1, \cdots, p_a + \pi_2, \cdots, p_n|\pi_1), \tag{3.2}$$

где π_1, π_2 — интересующие нас наружные фотонные линии. Штрихи означают, что из k и Γ выделены δ-функции суммарных импульсов. Проинтегрируем (3.2) по всем импульсам, кроме p_a, p_b, π_1, π_2. Надо заметить, что K_{n+2} (как и Γ_{n+1}) представляет собой сумму членов, соответствующих последовательным включениям вершины с внешним фотонным импульсом π_2 во все внутренние мезонные линии цикла. При этом, поскольку рассматривается комптоновская диаграмма, т. е. диаграмма с двумя внешними фотонными линиями и двумя внешними мезонными линиями, следует различать совокупность членов, в которых фотонная линия с импульсом π_2 расположена левее фотонной линии с импульсом π_1, от совокупности членов, в которых имеет место обратное. Поэтому при интегрировании комптоновского члена по всем внутренним линиям, получим

$$\int K'_{n+2}(p_1, \cdots, p_n|\pi_1, \pi_2)\, dp_1 \cdots dp_{a-1}\, dp_{a+1} \cdots dp_{b-1}\, dp_{b+1} \cdots dp_n =$$

$$= K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_1, \pi_2) + K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_2, \pi_1). \tag{3.3}$$

Здесь первый член представляет собой интеграл от суммы членов, в которых линия с импульсом π_1 расположена левее линии с импульсом π_2. Второй член соответствует обратному расположению внешних фотонных линий. Интегрируя вершинные части, из (3.3) получаем

$$\pi_2 K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_1, \pi_2) + \pi_2 K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_2, \pi_1) =$$

$$= \Gamma_{n+1}(p_a, p_b + \pi_2|\pi_1) - \Gamma_{n+1}(p_a + \pi_2, p_b|\pi_1). \tag{3.4}$$

Формулу (3.4) можно переписать в виде

$$\sum_l g^{ll} k'^l K^{ml}_{n+2}(p', p, k, k') + \sum_l g^{ll} k'^l K^{lm}_{n+2}(p', p, k', k) =$$

$$= \Gamma^m_{n+1}(p', p' - k) - \Gamma^m_{n+1}(p' + k', p), \tag{3.5}$$

где

$$K^{ml}_{n+2}(p', p, k, k') = K^{ml}_{n+2}(p, -p'|k, -k'),$$

$$K^{lm}_{n+2}(p', p, k', k) = K^{lm}_{n+2}(p, -p'|-k', k),$$

$$\Gamma^{m}_{n+1}(p', p-k') = \Gamma^{m}_{n+1}(p-k', -p'|k),$$

$$\Gamma^{m}_{n+1}(p'+k', p) = \Gamma^{m}_{n+1}(p, -p'-k'|k).$$

Формула (3.5) и представляет собой второе обобщенное тождество Уорда в скалярной электродинамике.

В заключение, пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Д. В. Ширкову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР Поступила 24 VI 1960

Վ. Ա. Շահբազյան

ՍԿԱԼՅԱՐ ԿՎԱՆՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ՑԱԾՐ ԿԱՐԳԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹԱՅԻՆ ՈՒՂՂՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ստացված են գրգռումների տեսության երկրորդ կարգում Գրինի մեզոնային և ֆոտոնային ֆունկցիաների ռադիացիոն ուղղումների արտահայտությունները, որոնք ճշմարտացի են իմպուլսային արգումենտների փոփոխության ամբողջ տիրույթում: Բերված է e^2 կարգի գագաթային մասի կրկնակի լոգարիթմական ասիմպտոտիկան և ցածր կարգերում ըստ e^2-ի ու h-ի միլերովյան փոխազդեցության Գրինի ֆունկցիայի ինֆրակարմիր ասիմպտոտիկայի հաշվարկը:

Դիտարկված է Ուորդի ընդհանրացված նույնությունը գագաթային և կոմպտոնյան մասերի միջև:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шахбазян В. А.* Об улучшении теории возмущений в квантовой электродинамике частиц со спином нуль. „Изв. АН АрмССР", **12**, № 6, 1959.
2. *Шахбазян В. А.* О двухзарядной ренормализационной группе в скалярной квантовой электродинамике. „ЖЭТФ", **37**, 1959, 1789.
3. *Шахбазян В. А.* Об инфракрасной катастрофе в скалярной квантовой электродинамике. „ЖЭТФ", **39**, 1960, 484.
4. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957.
5. *Логунов А. А.* Функция Грина в скалярной электродинамике в области малых импульсов. „ЖЭТФ", **29**, 1955, 871.

6. *Горьков Л. П.* Функции Грина заряженных частиц в области „инфракрасной катастрофы". „ЖЭТФ", **30**, 1956, 790.

7. *Källén G.* On the definition of the Renormalisation constants in Quantum Electrodynamics. „Helv. Phys. Acta", **25**, 1952, 417.

8. *Lehman H.* Über Eigenschaften von Ausbereitings funktionen und Renormierungs Konstanten quanti-ierter Felder. „Nuovo cimento", **11**, 1954, 342.

9. *Судаков В. В.* Вершинные части для сверхвысоких энергий в квантовой электродинамике. „ЖЭТФ", **30**, 1956, 87.

10. *Salam A.* Renormalization of scalar electrodynamics using β-formalism. „PROC. РОУ. Soc.", A **211**, 1952, 276.

11. *Боголюбов Н. Н. Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИТТЛ. М., 1958.

12. *Ахиезер А. Н., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. ГИТТЛ. М., 1959.

13. *Takahashi Y.* On the Generalized Ward Identity. „Nuovo Cimento", **6**, 1957, 371.
Ширков Д. В. Об обобщенном тождестве Уорда (неопубликовано).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ФИЗИКА

С. М. Дарбинян

Внутренняя конверсия с образованием пар на поляризованном ядре

После установления несохранения четности в β-распаде появилось несколько работ [1], [2], [3], посвященных корреляции поляризаций частиц внутренней конверсии с направлением вылета электронов, предшествующего β-распада. В силу несохранения четности в β-распаде, ядро, получающееся после β-распада, остается поляризованным по направлению вылета β-электрона. Поэтому и будут поляризованы частицы внутренней конверсии, следующей за β-распадом.

В настоящей работе рассматривается процесс внутренней конверсии с образованием электронно-позитронной пары на поляризованном ядре. Предполагается, что состояние поляризации начального ядра определяется средним моментом $\langle \vec{J} \rangle$. Вычисляются средние значения поляризаций электронов и позитронов конверсии и коэффициент конверсии с образованием пар на поляризованном ядре. Влияние кулоновского поля не учитывается. Однако до появления данной статьи вышла работа Лобова [3], где вычислены средние значения частиц пары внутренней конверсии, следующей за β-распадом. Поэтому мы здесь не приводим явные выражения для средних значений поляризаций.

Ядро из состояния с квантовыми числами I_1, m_1 переходит в состояние с квантовыми числами I_2, m_2. Если состояние поляризации начального ядра определяется средним моментом $\langle \vec{J} \rangle$, то матрица плотности, определяющая распределение проекции момента m_1, будет [1]:

$$\rho_{m_1 m_1'} = \frac{1}{2I_1+1}\left(\delta_{m_1 m_1'} + \sum_{\mu=-1}^{1} \frac{3\langle J^\mu \rangle}{\sqrt{I_1(I_1+1)}}\, C^{I_1 m_1}_{I_1 m_1' \, 1\mu}\right), \qquad (1)$$

где $C_{\dots}^{\dots}$ — коэффициенты Клебша-Гордана, а $\langle J^\mu \rangle$ — сферические составляющие вектора $\langle \vec{J} \rangle$ [4].

Пользуясь результатами § 27 и § 40 [4], напишем матричный элемент конверсии в виде

$$M_{m_1m_2} = -i\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\sqrt{\frac{L+1}{L(2L+1)}}\frac{\omega^{L+1}}{(2L+1)!!}(I_1m_1|Q_{LM}^{(\lambda)}|I_2m_2)^*(B_{LM}^{(\lambda)})_{21}, \tag{2}$$

где α—постоянная тонкой структуры, L, M—квантовые числа момента и проекции момента фотона. $Q_{LM}^{(\lambda)}$ — оператор мультипульного момента ядра, $B_{LM}^{(\lambda)}$ — оператор взаимодействия электрона и позитрона с полем мультиполя, а $(B_{LM}^{(\lambda)})_{21}$ — матричный элемент этого оператора.

Вероятность конверсии будет [1]

$$W_{\text{конв.}} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{L+1}{L(2L+1)}\frac{\omega^{2(L+1)}}{[(2L+1)!!]^2}\sum_{\substack{m_1m_1'm_2\\MM'}}\rho'_{m_1m_1'}\times$$

$$\times(I_1m_1|Q_{LM}^{(\lambda)}|I_2m_2)^*(I_1m_1'|Q_{LM'}^{(\lambda)}|I_2m_2)(B_{LM}^{(\lambda)})_{21}(B_{LM'}^{(\lambda)})_{21}^*. \tag{3}$$

Матричные элементы мультипольного момента ядра можно написать в виде [1]

$$(I_1m_1|Q^{(\lambda)}|I_2m_2) = Q^{(\lambda)}C_{I_2m_2LM}^{I_1m_1}, \tag{4}$$

где $Q^{(\lambda)}$— не зависят от m-индексов.

Если пренебречь кулоновским полем ядра, то волновые функции электрона и позитрона можно написать в виде

$$\psi_{\text{эл.}} = N_-\begin{pmatrix} U \\ \dfrac{\vec{\sigma}\,\vec{p}_-}{\varepsilon_-+m}U\end{pmatrix}e^{-i\vec{p}_-\vec{r}}, \tag{5}$$

$$\psi_{\text{поз.}} = N_+\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\,\vec{p}_+}{\varepsilon_++m}V \\ V\end{pmatrix}e^{i\vec{p}_+\vec{r}}, \tag{6}$$

где $N_\pm = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_\pm+m}{2\varepsilon_\pm}}$ — нормирующий коэффициент, $\varepsilon_\pm$, $\vec{p}_\pm$—энергия и импульс позитрона и электрона, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}$—матрицы Дирака, U, V—спиноры.

Если подставить (4), (5), (6) в (3) и пользоваться следующими соотношениями

$$U_\alpha U_\beta^* = \frac{1}{2}(1+\vec{\xi}^{(-)}\vec{\sigma})_{\alpha\beta},$$

$$V_\gamma V_\delta = \frac{1}{2}(1+\vec{\xi}^{(+)}\vec{\sigma})_{\gamma\delta}, \tag{7}$$

то для вероятности конверсии получим выражение следующего вида

$$W_{\text{конв.}} = \frac{\alpha(L+1)}{8\pi\varepsilon_+\varepsilon_- L(2L+1)} \frac{\omega^{2(L+1)}|Q^{(\lambda)}|^2|R_L|^2}{[(2L+1)!!]^2}[A^{(\lambda)} + \vec{B}^{(\lambda)}\vec{\xi}^{(-)} + $$

$$+ \vec{C}^{(\lambda)}\vec{\xi}^{(+)} + D_{ij}^{(\lambda)}\xi_i^{(-)}\xi_j^{(+)}]. \tag{8}$$

Значения $A^{(\lambda)}$, $\vec{B}^{(\lambda)}$, $\vec{C}^{(\lambda)}$ и $D^{(\lambda)}$ приводятся ниже.

Отсюда можно получить выражения для средних значений поляризаций электрона и позитрона следующим образом

$$\langle \vec{\sigma}_{\text{эл.}} \rangle = \frac{\vec{B}^{(\lambda)}}{A^{(\lambda)}}, \quad \langle \vec{\sigma}_{\text{поз.}} \rangle = \frac{\vec{C}^{(\lambda)}}{A^{(\lambda)}}, \tag{9}$$

которые совпадают с приведенными в работе [3] значениями.

Коэффициент конверсии есть отношение вероятности конверсии к вероятности излучения. Пользуясь данными § 27 [4], напишем вероятность излучения в виде

$$W_{\text{излуч.}} = \frac{2(L+1)}{L(2L+1)} \frac{\omega^{2L+1}}{[(2L+1)!!]^2}|Q^{(\lambda)}|^2. \tag{10}$$

Из (8) и (10) дифференциальный коэффициент конверсии электрического или магнитного мультиполя с образованием электрона в интервале импульсов $d\vec{p}_-$ с поляризацией $\vec{\xi}^{(-)}$, и позитрона в интервале импульсов $d\vec{p}_+$ с поляризацией $\vec{\xi}^{(+)}$, будет

$$d\beta_L^{(\lambda)} = \frac{\alpha\omega}{16\pi\varepsilon_+\varepsilon_-}|R_L|^2[A^{(\lambda)} + \vec{B}^{(\lambda)}\vec{\xi}^{(-)} + \vec{C}^{(\lambda)}\vec{\xi}^{(-)} + D_{ij}^{(\lambda)}\xi_i^{(-)}\xi_j^{(+)}] \times$$

$$\times \frac{d\vec{p}_+ d\vec{p}_-}{(2\pi)^6}\delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-). \tag{11}$$

Магнитные переходы ($\lambda = 0$). Матричный элемент оператора взаимодействия электрона и позитрона с полем мультиполя будет (4)

$$(B_{LM}^{(0)})_{21} = -N_+N_-U^*\left(\vec{\sigma} + \frac{\vec{\sigma}\vec{p}_-}{\varepsilon_- + m}\vec{\sigma}\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_+}{\varepsilon_+ + m}\right)V\vec{Y}_{LLM}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right)R_L, \tag{12}$$

где $\vec{Y}_{LLM}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right)$ — шаровой вектор, $R_L = (-1)^L \frac{(4\pi)^2 i}{\omega^2(\omega^2 - q^2)}\left(\frac{q}{\omega}\right)^L$, $\vec{q} = \vec{p}_+ + \vec{p}_-$, $\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$.

Подставляя (4), (7) и (12) в (3) и учитывая следующие соотношения для шаровых функций

$$\sum_{\substack{\text{по всем } m \\ \text{индексам}}} \rho_{m_1m_1'} C_{I_2m_2LM}^{I_1m_1} C_{I_2m_2LM'}^{I_1m_1'} \left(\vec{Y}_{LLM}(\vec{n})\vec{Y}^*_{LLM'}(\vec{n})\right) = \frac{1}{4\pi},$$

$$i\sum \rho_{m_1m_1'} C_{I_2m_2LM}^{I_1m_1} C_{I_2m_2LM'}^{I_1m_1'} [\vec{Y}_{LLM}(\vec{n})\vec{Y}^*_{LLM'}(\vec{n})] = \frac{3}{8\pi}\frac{r}{L(L+1)}(\langle \vec{J} \rangle \vec{n})\vec{n}.$$

$$\sum \rho_{m_1 m_1'} C^{J_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{J_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} \left\{ \left(\vec{a}\vec{Y}_{LLM}(\vec{n})\right)\left(\vec{b}\vec{Y}^*_{LLM'}(\vec{n})\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\vec{a}\vec{Y}^*_{LLM'}(\vec{n})\right)\left(\vec{b}\vec{Y}_{LLM}(\vec{n})\right)\right\} = \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{a}\vec{b}) - (\vec{a}\vec{n})(\vec{b}\vec{n})\right], \tag{13}$$

получим следующие значения для коэффициентов $A^{(0)}$, $\vec{B}^{(0)}$, $\vec{C}^{(0)}$, $D^{(0)}_{ij}$

$$A^{(0)} = \varepsilon_+\varepsilon_- + m^2 - \frac{1}{q^2}(\vec{p}_+\vec{q})(\vec{p}_-\vec{q}),$$

$$\vec{B}^{(0)} = \frac{3r}{2L(L+1)}\frac{(\langle\vec{J}\rangle\vec{q})}{q^2}\left\{m\omega\vec{q} - \left[(\vec{p}_+\vec{q}) - \frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m}(\vec{p}_-\vec{q})\right]\vec{p}_-\right\},$$

$$\vec{C}^{(0)} = -\frac{3r}{2L(L+1)}\frac{(\langle\vec{J}\rangle\vec{q})}{q^2}\left\{m\omega\vec{q} - \left[(\vec{p}_-\vec{q}) - \frac{\varepsilon_- - m}{\varepsilon_+ + m}(\vec{p}_+\vec{q})\right]\vec{p}_+\right\},$$

$$D^{(0)}_{ij} = \left[1 - \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2 - \vec{p}_+\vec{p}_-}{q^2} - \frac{\vec{p}_+\vec{p}_-}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right]p_{+j}p_{-i} - \tag{14}$$

$$-\frac{1}{q^2}(\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2 - \vec{p}_+\vec{p}_-)p_{+i}p_{-j} + \frac{1}{q^2}\left[-\varepsilon_-\omega + \frac{\varepsilon_- - m}{\varepsilon_+ + m}(\vec{p}_+\vec{q})\right]p_{+i}p_{+j} +$$

$$+\frac{1}{q^2}\left[-\varepsilon_+\omega + \frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m}(\vec{p}_-\vec{q})\right]p_{-i}p_{-j} + \frac{p^2_+p^2_- - (\vec{p}_+\vec{p}_-)^2}{q^2}\delta_{ij},$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{q}}{q}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$,—векторы, которые составляют постоянный угол с $\vec{n}$, а $r = \frac{I_1(I_1+1) + L(L+1) - I_2(I_2+1)}{I_1(I_1+1)}$.

Запишем произведение дифференциалов в виде

$$d\vec{p}_+ d\vec{p}_- = d\vec{p}_+ d\vec{q} = q^2 dq d\Omega q p^2_+ dp_+ d\Omega_+.$$

Если выбрать ось z вдоль $\vec{q}$, то $d\Omega_+ = d\cos\vartheta d\varphi$, где ϑ угол между $\vec{p}_+$ и $\vec{q}$, тогда при интегрировании δ функцию можно заменить следующим образом (4)

$$\delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-)\,d\cos\vartheta \to \frac{\varepsilon_-}{p_+ q}$$

Таким образом, подставив (14) в (11) и проинтегрировав последнюю по $d\varphi_+$ и $d\Omega q$, получим

$$d\varphi^{(0)}_L(\varepsilon_+, q) = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{q^{2L+1}}{\omega^{2L+1}(\omega^2 - q^2)^2}\left\{\frac{(\omega^2 - q^2)^2}{q^2}\left[-\frac{1}{4} + \frac{\omega^2 m^2}{(\omega^2 - q^2)^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{p^2_+ + p^2_-}{2(\omega^2 - q^2)}\right] + \frac{r}{L(L+1)}(\langle\vec{J}\rangle\vec{\xi}^{(-)})\left[m\omega + \frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m}q^2 - \right.$$

$$-\frac{\varepsilon_+ + \omega - m}{\varepsilon_- + m} p_+ q \cos\vartheta + \frac{\omega}{\varepsilon_- + m} p_+^2 \cos^2\vartheta \Big] -$$

$$-\frac{r}{L(L+1)} (\langle \vec{J} \rangle \vec{\xi}^{(+)}) \left[m\omega - p_+ q \cos\vartheta + \frac{m p_+^2}{\varepsilon_+ + m} \cos^2\vartheta \right] + \qquad (15)$$

$$+\frac{1}{3} (\vec{\xi}^{(+)} \vec{\xi}^{(-)}) \Big[\Big(1 - \frac{\omega^2 - q^2}{q^2} + 2\frac{\varepsilon_+ \omega}{q^2} - \frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m} +$$

$$+\frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m} \frac{\varepsilon_-^2 + \varepsilon_+^2}{q^2} \Big) p_+ q \cos\vartheta - m^2 - \varepsilon_+ \varepsilon_- + \frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m} q^2 +$$

$$+\Big(-\frac{3}{q^2} + 2\frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_- + m} \frac{1}{q^2} - \frac{1}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} \Big) p_+^2 q^2 \cos^2\vartheta \Big\} dq d\varepsilon_+,$$

где

$$\cos\vartheta = \frac{2\omega\varepsilon_+ - (\omega^2 - q^2)}{2p_+ q}.$$

Подставив это значение и проинтегрировав (15) по dq в пределах от $q_{\min} = |p_+ - p_-|$ до $q_{\max} = p_+ + p_-$, напишем коэффициент конверсии в следующем виде

$$d\beta_L^{(0)}(\varepsilon_+) = \frac{\alpha}{\pi\omega^{2L+1}} \Big[a^{(0)} + \frac{r}{2L(L+1)} \frac{(\langle \vec{J} \rangle \vec{\xi}^{(-)})}{\varepsilon_- + m} b^{(0)} -$$

$$-\frac{r}{2L(L+1)} \frac{(\langle \vec{J} \rangle \vec{\xi}^{(+)})}{\varepsilon_+ + m} c^{(0)} + \frac{1}{3} (\vec{\xi}^{(+)} \vec{\xi}^{(-)}) d^{(0)} \Big] d\varepsilon_+, \qquad (16)$$

где

$$a^{(0)} = \omega^{2(L-1)} [p_+^2 + p_-^2 - 2(L-1)m^2] \ln \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- + p_+ p_- + m^2}{m\omega} -$$

$$-\frac{1}{4L} [(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L}] + \frac{1}{2} (\varepsilon_+ \varepsilon_- + p_+ p_- - m^2) \times$$

$$\times (p_+ + p_-)^{2(L-1)} - \frac{1}{2} (\varepsilon_+ \varepsilon_- - p_+ p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-1)} -$$

$$-\frac{1}{2} [p_+^2 + p_-^2 - 2(L-1)m^2] \sum_{n=1}^{L-1} \frac{\omega^{2(L-n-1)}}{n} \times$$

$$\times [(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n}],$$

$$b^{(0)} = \omega^{2L-1} [2(\varepsilon_-^2 - Lm^2) - \omega(\varepsilon_- - m)] \ln \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- + p_+ p_- + m^2}{m\omega} +$$

$$+\frac{1}{4L} (\omega - 2\varepsilon_- - 2m) [(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L}] +$$

$$+\frac{\omega}{2} (\varepsilon_+ \varepsilon_- + p_+ p_- - m^2)(p_+ + p_-)^{2(L-1)} -$$

$$-\frac{\omega}{2}(\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-1)} - \frac{\omega}{2}[2(\varepsilon_-^2 - Lm^2) -$$

$$-\omega(\varepsilon_- - m)]\sum_{n=1}^{L-1}\frac{\omega^{2(L-n-1)}}{n}[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n}],$$

$$c^{(0)} = \omega^{2L-1}[2(\varepsilon_+^2 - Lm^2) - \omega(\varepsilon_+ - m)]\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} +$$

$$+\frac{1}{4L}(\omega - 2\varepsilon_+ - 2m)[(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L}] +$$

$$+\frac{\omega}{2}(\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- - m^2)(p_+ + p_-)^{2(L-1)} -$$

$$-\frac{\omega}{2}(\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-1)} - \frac{\omega}{2}[2(\varepsilon_+^2 - Lm^2) -$$

$$-\omega(\varepsilon_+ - m)]\sum_{n=1}^{L-1}\frac{\omega^{2(L-n-1)}}{n}[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n}], \qquad (17)$$

$$d^{(0)} = 2\omega^{2(L-1)}\left[\frac{\omega^2}{2} + \varepsilon_+\varepsilon_- + Lm^2 + m\omega^2\frac{Lm - \omega}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right]\times$$

$$\times\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} + \frac{1}{4L}\left(1 - 4\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right)\times$$

$$\times[(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L}] - \frac{(p_+ + p_-)^{2(L+1)} - (p_+ - p_-)^{2(L+1)}}{4(L+1)(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right)[(\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- - m^2)(p_+ + p_-)^{2(L-1)} -$$

$$-(\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-1)}] -$$

$$-\left[\frac{\omega^2}{2} + \varepsilon_+\varepsilon_- + Lm^2 + m\omega^2\frac{Lm - \omega}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{L-1}\frac{\omega^{2(L-n-1)}}{n}[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n}].$$

Электрические переходы ($\lambda = 1$). Матричный элемент оператора $B_{LM}^{(1)}$ в этом случае имеет вид (4)

$$(B_{LM}^{(1)})_{21} = -N_+N_-\sqrt{\frac{L}{L+1}}U^*\left(\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_+}{\varepsilon_+ + m} + \frac{\vec{\sigma}\vec{p}_-}{\varepsilon_- + m}\right)VY_{LM}(\vec{n})R_L -$$

$$-N_+N_-\sqrt{\frac{2L+1}{L+1}}U^*\left(\vec{\sigma}\vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n}) +\right.$$

$$\left.+\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_-}{\varepsilon_- + m}\vec{\sigma}\vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_+}{\varepsilon_+ + m}\right)VR_{L-1}. \qquad (18)$$

Для шаровых функций в этом случае встречаются выражения следующего вида* (по всем m индексам производится суммирование)

$$\sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} Y_{LM}(\vec{n}) Y^*_{LM'}(\vec{n}) = \frac{1}{4\pi},$$

$$\sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} \left(\vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n}) \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n})\right) = \frac{1}{4\pi},$$

$$\sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} \left(Y_{LM}(\vec{n}) \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n}) + Y^*_{LM'}(\vec{n}) \vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{2L+1}}\, \vec{n}, \tag{19}$$

$$i \sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} \left(Y_{LM}(\vec{n}) \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n}) - Y^*_{LM'}(\vec{n}) \vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\right) =$$

$$= -\frac{3}{8\pi} \frac{r}{\sqrt{L(2L+1)}} [\vec{n} \times \langle \vec{J} \rangle],$$

$$i \sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} [\vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n}) \times \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n})] =$$

$$= \frac{3}{8\pi} \frac{r}{2L+1} \left(\langle \vec{J} \rangle - \frac{L-1}{L} (\langle \vec{J} \rangle \vec{n}) \vec{n} \right),$$

$$\sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} \left[\left(\vec{a} \vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\right) \left(\vec{b} \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n})\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\vec{a} \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n})\right) \left(\vec{b} \vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi(2L+1)} [(L+1)(\vec{a}\vec{b}) + (L-1)(\vec{a}\vec{n})(\vec{b}\vec{n})],$$

$$i \sum \rho_{m_1 m_1'} C^{I_1 m_1}_{I_2 m_2 LM} C^{I_1 m_1'}_{I_2 m_2 LM'} \left[\left(\vec{a} \vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\right) \left(\vec{b} \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n})\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\vec{a} \vec{Y}^*_{LL-1M'}(\vec{n})\right) \left(\vec{b} \vec{Y}_{LL-1M}(\vec{n})\right) \right] =$$

$$= \frac{3r}{16\pi} \frac{1}{L(2L+1)} \left[(L+1)(\langle \vec{J} \rangle [\vec{a}\vec{b}]) - (L-1)(\langle \vec{J} \rangle \vec{n})(\vec{n}[\vec{a}\vec{b}]) \right]$$

Подставляя (4), (7) и (18) в (3) и учитывая (19) получим следующие значения для $A^{(1)}$, $\vec{B}^{(1)}$, $\vec{C}^{(1)}$ и $D^{(1)}_{ij}$

$$A^{(1)} = \frac{L}{L+1} \left\{ \varepsilon_+ \varepsilon_- - m^2 + \frac{2L+1}{L} \frac{\omega^2}{q^2} (\varepsilon_+ \varepsilon_- + m^2) + \right.$$

$$+ \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) (\vec{p}_+ \vec{p}_-) - 2 \frac{\omega}{q^2} [\varepsilon_- (\vec{p}_+ \vec{q}) + \varepsilon_+ (\vec{p}_- \vec{q})] +$$

$$\left. + \frac{L-1}{L} \frac{\omega^2}{q^4} (\vec{p}_+ \vec{q}) (\vec{p}_- \vec{q}) \right\}.$$

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{r}{(L+1)} \frac{\omega}{q^2} \left\{ m(\omega^2 - q^2) \langle \vec{J} \rangle + \left(2\omega + \frac{\vec{p}_- \vec{q}}{\varepsilon_+ + m}\right) (\vec{p}_+ \langle \vec{J} \rangle) \vec{p}_- + \right.$$

* Значения этих выражений определяются непосредственным вычислением.

$$+\left(m+\omega\frac{\varepsilon_+-m}{\varepsilon_-+m}-\frac{\vec{p}_+\vec{q}}{\varepsilon_++m}\right)(\vec{p}_-\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_-+m(\vec{q}\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_++$$

$$+\frac{L-1}{L}\frac{\omega}{q^2}\left[-m\omega+(\vec{p}_+\vec{q})-\frac{\varepsilon_+-m}{\varepsilon_-+m}(\vec{p}_-\vec{q})\right](\vec{q}\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_--$$

$$-\frac{L-1}{L}\frac{m\omega^2}{q^2}(\vec{q}\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_+\Big\}, \tag{20}$$

$$\vec{C}^{(1)}=-\frac{3}{2}\frac{r}{(L+1)}\frac{\omega}{q^2}\Big\{m(\omega^2-q^2)\langle\vec{J}\rangle+$$

$$+\left(2\omega+\frac{\vec{p}_+\vec{q}}{\varepsilon_-+m}\right)(\vec{p}_-\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_++\left(m-\frac{\vec{p}_-\vec{q}}{\varepsilon_-+m}+\omega\frac{\varepsilon_--m}{\varepsilon_++m}\right)\times$$

$$\times(\vec{p}_+\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_++m\left(1-\frac{L-1}{L}\frac{\omega^2}{q^2}\right)(\vec{q}\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_-+$$

$$+\frac{L-1}{L}\frac{\omega}{q^2}\left[-m\omega+(\vec{p}_-\vec{q})-\frac{\varepsilon_--m}{\varepsilon_++m}(\vec{p}_+\vec{q})\right](\vec{q}\langle\vec{J}\rangle)\vec{p}_+\Big\},$$

$$D_{ij}^{(1)}=\frac{L}{L+1}\Big\{\Big[\varepsilon_-+m-(\varepsilon_-+3m)\frac{\omega^2}{q^2}+\frac{L-1}{2L}\frac{\omega^2}{q^4}\Big(m(\omega^2+q^2)+$$

$$+\varepsilon_-(\omega^2-q^2)\Big)\Big]\frac{p_{+i}p_{+j}}{\varepsilon_++m}+\Big[\varepsilon_++m-(\varepsilon_++3m)\frac{\omega^2}{q^2}+$$

$$+\frac{L-1}{2L}\frac{\omega^2}{q^4}\Big(m(\omega^2+q^2)+\varepsilon_+(\omega^2-q^2)\Big)\Big]\frac{p_{-i}p_{-j}}{\varepsilon_-+m}+$$

$$+\left[1+\frac{\omega^2}{Lq^2}+\frac{L-1}{2L}\frac{\omega^2(\omega^2-q^2)}{q^4}+\frac{L+1}{L}\frac{\omega^2}{q^2}\frac{(\vec{p}_+\vec{p}_-)}{(\varepsilon_++m)(\varepsilon_-+m)}\right]p_{-i}p_{+j}+$$

$$+\left(1-\frac{L-1}{2L}\frac{\omega^2}{q^2}\right)\frac{q^2-\omega^2}{q^2}p_{+i}p_{-j}+\Big[2\varepsilon_+\varepsilon_-\frac{\omega^2-q^2}{q^2}-\frac{(\omega^2-q^2)^2}{2q^2}-$$

$$-2m^2\frac{\omega^2}{q^2}+\frac{L-1}{L}\Big((\vec{p}_+\vec{p}_-)^2-p_+^2p_-^2\Big)\frac{\omega^2}{q^4}\Big]\delta_{ij}\Big\}.$$

Поступая далее также, как и в случае магнитных переходов, получим следующее выражение для дифференциального коэффициента конверсии

$$d\beta_L^{(1)}(\varepsilon_+,q)=\frac{2\alpha}{\pi(L+1)}\frac{q^{2L-1}}{\omega^{2L}(\omega^2-q^2)^2}\Big\{\frac{(\omega^2-q^2)^2}{\omega}\Big[\frac{L}{2}-\frac{L-1}{4}\frac{\omega^2}{q^2}+$$

$$+\frac{L+1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2-q^2}-2L\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^2-q^2}+(L+1)\frac{m^2\omega^2}{(\omega^2-q^2)^2}+$$

$$+(L-1)\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-\omega^2}{q^2(\omega^2-q^2)}\Big]+r(\langle\vec{J}\rangle\vec{\xi}^{(-)})\Big[(3\omega-m)(\varepsilon_+\varepsilon_-+m^2)+$$

$$+\frac{m^2\omega^2(\varepsilon_- - \varepsilon_+)}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \frac{1}{L}\frac{m^2\omega^2}{\varepsilon_- + m} + \left(\frac{5}{2}m - \frac{3L-1}{2L}\omega -\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\varepsilon_+ + m}\right)(\omega^2 - q^2) + \frac{L-1}{L}\frac{\omega^2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_- + m}\frac{\omega^2 - q^2}{q^2} + \frac{(\omega^2 - q^2)^2}{4(\varepsilon_+ + m)} -$$

$$-\frac{L-1}{4L}\frac{\omega^2}{\varepsilon_- + m}\frac{(\omega^2 - q^2)^2}{q^2}\Bigg] - r(\langle \vec{J}\rangle \vec{\xi}^{(+)})\Bigg[(3\omega - m)(\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2) +$$

$$+\frac{m^2\omega^2(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \frac{1}{L}\frac{m^2\omega^2}{\varepsilon_+ + m} + \left(\frac{5}{2}m - \frac{3L-1}{2L}\omega -\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\varepsilon_- + m}\right)(\omega^2 - q^2) + \frac{L-1}{L}\frac{\omega^2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_+ + m}\frac{\omega^2 - q^2}{q^2} + \frac{(\omega^2 - q^2)^2}{4(\varepsilon_- + m)} -$$

$$-\frac{L-1}{4L}\frac{\omega^2}{\varepsilon_+ + m}\frac{(\omega^2 - q^2)^2}{q^2}\Bigg] + \frac{2}{3}(\vec{\xi}^{(+)}\vec{\xi}^{(-)})\frac{L}{\omega}\Bigg[\frac{L+1}{L}m^2\omega^2 \times$$

$$\times\frac{m\omega + m^2 + \varepsilon_+\varepsilon_- - \omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \left(m^2 - \varepsilon_+\varepsilon_- + \frac{L+1}{2L}\omega^2\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - m\omega + m^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right) \times$$

$$\times(\omega^2 - q^2) - \frac{L-1}{L}m^2\omega^2\frac{\omega^2 - q^2}{q^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{L+1}{2L}\frac{\omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right) \times$$

$$\times(\omega^2 - q^2)^2 + \left(\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2 - \frac{L+1}{4L}\omega^2\right)\frac{(\omega^2 - q^2)^2}{q^2}\Bigg]\Bigg\} dq\, d\varepsilon_+. \qquad (21)$$

После интегрирования по dq запишем коэффициент конверсии в следующем виде ($L \neq 1$)

$$d\beta_L^{(1)}(\varepsilon_+) = \frac{\alpha}{\pi\omega^{2L+1}}\Bigg[a^{(1)} + \frac{r}{2(L+1)}(\langle \vec{J}\rangle \vec{\xi}^{(-)})\, b^{(1)} -$$

$$-\frac{r}{2(L+1)}(\langle \vec{J}\rangle \vec{\xi}^{(+)})\, c^{(1)} + \frac{L}{3(L+1)}(\vec{\xi}^{(+)}\vec{\xi}^{(-)})\, d^{(1)}\Bigg] d\varepsilon_+, \qquad (22)$$

где $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $c^{(1)}$, $d^{(1)}$ имеют следующий вид

$$a^{(1)} = \frac{1}{2(L+1)}[(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L}] - \left(\frac{(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2}{4(L+1)} + m^2\right) \times$$

$$\times[(p_+ + p_-)^{2(L-1)} - (p_+ - p_-)^{2(L-1)}] + \frac{\omega^2}{2}(\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- - m^2) \times$$

$$\times(p_+ + p_-)^{2(L-2)} - \frac{\omega^2}{2}(\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-2)} +$$

$$+\omega^{2(L-1)}(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 - 2(L-1)m^2)\Bigg\{\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{L-1}\frac{\omega^{-2n}}{n}[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n}]\Bigg\}.$$

$$b^{(1)} = \frac{\omega}{4L(\varepsilon_- + m)} \left[(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L} \right] +$$

$$+ \omega \left[(m - 3\omega) \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\omega^2} - m^2 \frac{\varepsilon_- - \varepsilon_+}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L} \frac{m^2}{\varepsilon_- + m} + \frac{1}{L} \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_- + m} - \frac{1}{4L} \frac{\omega^2}{\varepsilon_- + m} \right] \left[(p_+ + p_-)^{2(L-1)} - \right.$$

$$\left. - (p_+ - p_-)^{2(L-1)} \right] + \frac{\omega}{2m^2} \left[(3\omega - m)(\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2) + \right. \tag{23}$$

$$\left. + m^2\omega^2 \frac{\varepsilon_- - \varepsilon_+}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \frac{1}{L} \frac{m^2\omega^2}{\varepsilon_- + m} \right] \left[(\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- - m^2) \times \right.$$

$$\left. \times (p_+ + p_-)^{2(L-2)} - (\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-2)} \right] -$$

$$- 2(L-1)\,\omega^{2L-1} \times$$

$$\times \left[(3\omega - m) \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\omega^2} + m^2 \frac{\varepsilon_- - \varepsilon_+}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \frac{1}{L} \frac{m^2}{\varepsilon_- + m} - \right.$$

$$\left. - \frac{5m}{2(L-1)} + \frac{3L-1}{2L(L-1)}\,\omega + \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{(L-1)(\varepsilon_- + m)} - \frac{1}{L} \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_- + m} \right] \times$$

$$\times \left\{ \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{\omega^{-2n}}{n} \left[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n} \right] \right\},$$

$$c^{(1)} = \frac{\omega}{4L(\varepsilon_+ + m)} \left[(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L} \right] +$$

$$+ \omega \left[(m - 3\omega) \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\omega^2} - m^2 \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \frac{1}{L} \frac{m^2}{\varepsilon_+ + m} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L} \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_+ + m} - \frac{1}{4L} \frac{\omega^2}{\varepsilon_+ + m} \right] \left[(p_+ + p_-)^{2(L-1)} - (p_+ - p_-)^{2(L-1)} \right] +$$

$$+ \frac{\omega}{2m^2} \left[(3\omega - m)(\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2) + m^2\omega^2 \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L} \frac{m^2\omega^2}{\varepsilon_+ + m} \right] \left[(\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- - m^2)(p_+ + p_-)^{2(L-2)} - \right.$$

$$\left. - (\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-2)} \right] - 2(L-1)\,\omega^{2L-1} \times$$

$$\times \left[(3\omega - m) \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\omega^2} + m^2 \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} + \frac{1}{L} \frac{m^2}{\varepsilon_+ + m} - \right.$$

$$\left. - \frac{5m}{2(L-1)} + \frac{3L-1}{2L(L-1)}\,\omega + \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{(L-1)(\varepsilon_+ + m)} - \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{L(\varepsilon_+ + m)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{\omega^{-2n}}{n} \left[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n} \right] \right\},$$

$$d^{(1)} = \left[\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - (L-2)\,m^2}{L-1} + \frac{L+1}{L} \frac{m^2\omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} - \right.$$

$$\left. - \frac{L+1}{4L\,(L-1)}\,\omega^2 \right] \left[(p_+ + p_-)^{2(L-1)} - (p_+ - p_-)^{2(L-1)} \right] +$$

$$+ \frac{L+1}{L}\,\omega^2 \frac{m\omega + m^2 + \varepsilon_+\varepsilon_- - \omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} \left[(\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- - m^2)(p_+ + p_-)^{2(L-2)} - \right.$$

$$\left. - (\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- - m^2)(p_+ - p_-)^{2(L-2)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2L}\left(1 - \frac{L+1}{L} \frac{\omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\right) \left[(p_+ + p_-)^{2L} - (p_+ - p_-)^{2L} \right] -$$

$$- 2\omega^{2(L-1)} \frac{L+1}{L} \left[(L-1)\,m^2 - \frac{\omega^2}{2} - \frac{(L-1)\,m - \omega}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)}\, m\omega^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{m^2 - L\varepsilon_+\varepsilon_-}{L+1} \right] \left\{ \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{\omega^{-2n}}{n} \left[(p_+ + p_-)^{2n} - (p_+ - p_-)^{2n} \right] \right\}.$$

При $L = 1$ получим:

$$d\beta_1^{(1)}(\varepsilon_+) = \frac{\alpha}{\pi\omega^2} \left\{ (\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} + 2p_+p_- + \right.$$

$$+ r(\langle \vec{J} \rangle \vec{\xi}^{(-)}) \left[\left(\frac{3\omega - m}{m^2\omega} (\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2) + \frac{\omega}{\varepsilon_+ + m} \right) p_+p_- + \right.$$

$$\left. + \omega \left(\frac{5}{2} m - \omega - \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\varepsilon_+ + m} \right) \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} \right] -$$

$$- r(\langle \vec{J} \rangle \vec{\xi}^{(+)}) \left[\left(\frac{3\omega - m}{m^2\omega} (\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2) + \frac{\omega}{\varepsilon_- + m} \right) p_+p_- + \right.$$

$$\left. + \omega \left(\frac{5}{2} m - \omega - \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + m^2}{\varepsilon_- + m} \right) \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} \right] +$$

$$+ \frac{2}{3} (\vec{\xi}^{(-)} \vec{\xi}^{(+)}) \left[\frac{2\omega^2}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} p_+p_- + \right.$$

$$+ \left(m^2 - \varepsilon_+\varepsilon_- + \omega^2 \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + \omega^2 - m\omega}{(\varepsilon_+ + m)(\varepsilon_- + m)} \right) \times$$

$$\left. \left. \times \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{m\omega} - \frac{1}{2} (p_+^2 + p_-^2) \ln \left| \frac{p_+ + p_-}{p_+ - p_-} \right| \right] \right\} d\varepsilon_+.$$

Результаты интегрирования по $d\varepsilon_+$ в общем случае не выражаются через элементарные функции.

В заключение выражаю благодарность профессору Берестецкому В. Б. за указание темы и за оказанную помощь.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 18 VIII 1960

Ս. Մ. Դարբինյան

ԶՈՒՅԳԻ ԱՌԱՋԱՑՈՒՄՈՎ ՆԵՐՔԻՆ ԿՈՆՎԵՐՍԻԱՆ ԲԵՎԵՌԱՑԱԾ ՄԻՋՈՒԿԻ ՎՐԱ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրված է էլեկտրոն-պոզիտրոնային զույգի առաջացումով ներքին կոնվերսիան բևեռացած միջուկի վրա։ Միջուկի կուլոնյան դաշտը անտեսվում է։

Եթե միջուկը բևեռացած է, ապա այդ միջուկի վրա առաջացած կոնվերսիոն էլեկտրոնի ու պոզիտրոնի միջին բևեռացումը տարբեր է զերոյից։ Համապատասխան արտահայտությունները մագնիսական ($\lambda=0$) և էլեկտրական ($\lambda=1$) տիպի անցումների համար բերված են (9) բանաձևերում։

Ստացված են արտահայտություններ ներքին կոնվերսիայի դիֆերենցիալ գործակցի համար (16), (22) (համապատասխանորեն մագնիսական ու էլեկտրական անցումների դեպքերում), երբ միջուկը, էլեկտրոնն ու պոզիտրոնն ունեն միջին բևեռացում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берестецкий В. Б., Рудик А. П.* Поляризация электронов внутренней конверсии следующей за β-распадом. „ЖЭТФ", **35**, 1 (7), 1958.
2. *Гешкенбейн Б. В.* Поляризация электронов внутренней конверсии следующей за β-распадом. „ЖЭТФ", **35**, 5 (11), 1958.
3. *Лобов Г. А.* Поляризация электронов и позитронов внутренней конверсии следующей за β-распадом ядра. „ЖЭТФ", **39**, 3 (9), 1960.
4. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ФИЗИКА

М. Л. Тер-Микаелян

Излучение фотонов быстрыми частицами в неоднородной среде*

В работе рассмотрено излучение, возникающее при прохождении заряженных частиц с постоянной скоростью через произвольную неоднородную среду.

Исходя из законов сохранения энергии и импульса, для периодической среды выведено необходимое условие возникновения излучения — условие резонанса (2.1). Полное излучение в периодической среде будет складываться из излучений различных порядков (гармоник). Для каждого порядка излучения имеется свой интервал излучаемых частот (2.6) и свой энергетический порог (2.10). Излучение каждого порядка концентрировано около нижней границы своего спектра. Окончательные формулы для интенсивности резонансного излучения и его спектра получены: а) для среды, меняющей свои свойства по закону косинуса (§ 4); б) для произвольной периодической среды, при слабом изменении плотности (§ 4), а также в) для слоистой среды (§ 5), наиболее пригодной, по-видимому, для целей эксперимента. В § 6 рассмотрены различные причины, влияющие на точность выведенных формул. Перечисленные свойства резонансного излучения могут быть использованы в экспериментах в области сверхвысоких энергий.

Последний параграф посвящен исследованию излучения, возникающего на случайных неоднородностях.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что электромагнитные процессы, происходящие при взаимодействии быстрых заряженных частиц с произвольной совокупностью неподвижных центров, обладают при сверхвысокой энергии характерной направленностью вперед. Из этого утверждения сразу следует, что в этих процессах могут играть роль большие и растущие с энергией продольные расстояния. Действительно, импульс $q_{\parallel}$, переданный среде вдоль направления движения первоначальной частицы, будет равен

* Первые шесть параграфов настоящей статьи печатаются одновременно в журнале Nuclear Physics.

$$q_{\parallel} = p_0 - \sum \frac{(\vec{p}_i \vec{p}_0)}{p_0}. \tag{1.1}$$

Здесь p_0 — импульс начальной частицы, $\vec{p}_i$ — импульсы частиц после реакции.

Учитывая закон сохранения энергии

$$E_0 - \sum E_i = 0, \tag{1.2}$$

мы видим, что при релятивистских энергиях и резкой направленности, т. е. когда $\frac{(\vec{p}_i \vec{p}_0)}{p_0} \approx p_i \approx E_i$, $q_{\parallel}$ становится малым и при дальнейшем увеличении энергий и направленности — уменьшается. Из соотношения неопределенности следует, что, эффективные в процессе, продольные расстояния

$$l_{эф} \sim \frac{h}{q_{\parallel}} \tag{1.3}$$

могут стать достаточно большими. Нетрудно догадаться, что на столь больших расстояниях различные внешние причины могут оказывать влияние на взаимодействие двух, отдельно взятых, центров и приводить к резкому изменению обычных поперечников. Эти рассуждения применялись автором при исследовании интерференционного рассеяния и излучения в кристалле [1] (см. также [3]), где, благодаря росту $l_{эф}$, соседние атомы в решетке начинают действовать когерентно*.

Настоящая работа посвящена исследованию излучения, которое образует равномерно движущаяся частица в неоднородной среде [4], [5]. Мы увидим, что интерференция излучения, возникающего на различных неоднородностях, будет существенной в силу малости $q_{\parallel}$. Кроме того, неоднородности будут приводить к излучению квантов, длина которых ничтожно мала по сравнению с размерами неоднородностей.

Известно, что в однородной среде равномерно движущаяся частица образует только излучение Вавилова-Черенкова. Ниже будут рассмотрены изменения, которые претерпевает это излучение в неоднородной среде. Но кроме того, мы увидим, что в случае неоднородной среды излучение будет существовать и в области частот, превышающих характерные атомные частоты, где диэлектрическая постоянная меньше единицы и излучение Вавилова-Черенкова невозможно. Резкая зависимость исследуемого ниже излучения от энергии частицы может быть использована для детектирования частиц сверхвысоких энергий.

Причину появления излучения в неоднородной среде легко выяснить, если заметить, что прохождение фотонов сквозь мут-

* В статье, которая в ближайшее время выйдет в „Успехах физических наук“, автором сделана попытка дать обзор работ по тормозному излучению в кристалле, а также изложить новые результаты по этому кругу вопросов.

ную среду всегда сопровождается рассеянием света. Поскольку поле заряженной частицы представляет из себя совокупность псевдофотонов, то рассеяние этих псевдофотонов на неоднородностях среды и есть интересующее нас излучение. Наиболее простым примером излучения в неоднородной среде является, так называемое, переходное излучение Гинзбурга-Франка [6], возникающее при пересечении заряженной частицей границы двух сред. Франк [6] рассмотрел вопрос о суммировании интенсивностей переходного излучения, возникающего на многих границах и показал, что простое суммирование интенсивностей возможно, если расстояние между границами превышает $l_{\text{эф}}$.

Неоднородность среды может быть либо периодической, либо случайной функцией пространства. Наличие периодически расположенных неоднородностей приводит к интерференции излучения, возникающего на различных участках неоднородной среды. В результате интерференционных явлений заметное излучение в периодической среде может появиться только тогда, когда выполняется определенное резонансное условие, к выводу которого мы перейдем. Рассмотрение излучения на случайно расположенных неоднородностях мы отложим до § 7.

2. Условие резонанса; угловое распределение и энергетический порог резонансного излучения

Будем считать, что среда изменяет свои свойства периодически только вдоль оси z, оставаясь однородной в плоскости x, y.

Пусть частица, скорость которой составляет угол ψ с направлением оси z, излучает квант с энергией $h\omega$ и импульсом $\frac{h\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$. Для данного конкретного случая закон сохранения энергии и продольного импульса (1.2) и (1.1) перепишем в виде

$$\delta E - h\omega = 0,$$

$$q_{\shortparallel} = \frac{\vec{v}\,\delta\vec{p}}{v} - \frac{h\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\theta' = \frac{2\pi h}{l} r\cos\psi$$

θ' — угол между направлением излученного кванта и скоростью $\vec{v}$, δE и δp — изменения энергии и импульса частицы, r — произвольное целое число, l — период среды.

Подчеркнем, что излучение порядка r в периодической среде возможно только, если импульс, переданный среде вдоль оси z, равен $\frac{2\pi h}{l} r$.

Поскольку для малых изменений энергии частицы $\delta E = \vec{v}\,\delta\vec{p}$, то из законов сохранения (1.1) и (1.2) мы сразу получаем основное условие излучения

$$\frac{\omega_{\text{эф}}}{v} = \frac{\omega}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta'\right) = \frac{2\pi r}{l}\cos\psi. \tag{2.1}$$

Условие резонанса (2.1) по своему физическому содержанию эквивалентно условию Брэгга-Лауэ-Вульфа в дифракции рентгеновских лучей (см. также [1], [7]). Из условия (2.1) вытекают интересные свойства исследуемого излучения. Прежде всего, угол излучения кванта дается выражением

$$\cos\theta' = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{2\pi rc\cos\psi}{l\omega\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{2.2}$$

При $l \to \infty$ (или для нулевого порядка $r = 0$) мы приходим к известному соотношению для угла Черенковского излучения. В отличие от случая $l \to \infty$, (2.2) может выполняться в области частот, значительно превышающих характерные атомные частоты. Для столь больших частот диэлектрическая постоянная имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1(z) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m_e\omega^2} - \frac{4\pi N'e^2}{m_e\omega^2}\varepsilon_1(z); \quad \Delta\cdot\varepsilon_1(z) \ll \varepsilon_0. \tag{2.3}$$

Здесь N — постоянная составляющая электронной плотности, а N' — переменная. Очевидно, что всегда выполнено неравенство $N'\varepsilon_1 \leqslant N$.

Из требования $|\cos\theta'| \leqslant 1$ мы получим

$$\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 + \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\right) \geqslant \frac{2\pi r\lambda}{l} \geqslant \left(1 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\right)\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}}, \tag{2.4}$$

где

$$\lambda = \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{2.5}$$

В случае излучения частот, для которых диэлектрическая постоянная задается формулой (2.3), правая часть неравенства (2.4) приводит сразу к двум условиям

$$\frac{E}{h} \gg \omega_{\max} = \frac{2b}{a}\left[1 - \sqrt{1 - 4\left(1 - \frac{v}{c}\right)\frac{b}{a^2}}\right]^{-1} \geqslant \omega \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2b}{a}\left[1 + \sqrt{1 - 4\left(1 - \frac{v}{c}\right)\frac{b}{a^2}}\right]^{-1} = \omega_{\min}, \tag{2.6}$$

где величины b, A и a равны

$$b = \frac{2\pi e^2}{m_e}N; \qquad a = \frac{2\pi c}{l}r; \qquad A = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\frac{b}{a^2}. \tag{2.7}$$

Неравенства (2.6) для энергий, значительно превосходящих пороговую [см. формулу (2.10)], можно упростить

$$\frac{E}{h} \gg \omega_{\max} \approx \frac{4\pi c}{l} r \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \gtrsim \omega \gtrsim \frac{Ne^2}{m_e} \frac{l}{cr} \approx \omega_{\min}. \tag{2.6}$$

Левая часть неравенства (2.4) приводит к условию

$$\omega \gg \frac{\pi c r}{l}. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.8) будет автоматически следовать из (2.6), если мы ограничимся излучением, порядок которого удовлетворяет условию

$$r \ll r_{\max} = \frac{l}{2\pi} \left(\frac{4\pi Ne^2}{m_e c^2}\right)^{1/2}. \tag{2.9}$$

Если (2.9) выполнено, то интервал излученных частот дается неравенствами (2.6), из которых вытекает условие на энергетический порог, при котором начинается излучение r-го порядка

$$\frac{E}{mc^2} = \left(\frac{E}{mc^2}\right)_{lr} \gg \frac{l}{2\pi c r} \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m_e}}. \tag{2.10}$$

Из (2.9) следует, что исследуемый случай может осуществляться только для релятивистских частиц, поэтому во всех формулах, начиная с (2.6), мы, где это возможно, положили $v = c$.

Условие на угол излучения (2.2) в рассматриваемом случае можно написать в виде

$$(\theta')^2 \approx \frac{4\pi r c \cos\vartheta}{l\omega} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{4\pi Ne^2}{m_e \omega^2}. \tag{2.11}$$

Отметим, что $\cos\vartheta'$ обращается в единицу для излучения как максимально, так и минимально возможной частоты [определяемой (2.6)]. Для излучения промежуточных частот, угол излучения увеличивается, достигая максимума, равного

$$\theta' \approx \frac{r}{l\left(\frac{Ne^2}{m_e \pi c^2}\right)^{1/2}} \ll 1 \tag{2.12}$$

для частот, всего в два раза превышающих $\omega_{\min}$.

Рассмотрим теперь излучение, порядок которого превышает $r_{\max}$. Интервал частот, излученных в переднюю полусферу, получается из условия (2.4)

$$\omega'_{\max} = \frac{2\pi v r}{l} \frac{1}{(1 - v/c)} \gg \omega \gg \frac{2\pi v}{l} r = \omega'_{\min}. \tag{2.13}$$

Излучение в этом случае будет направлено: при $\omega = \omega'_{\min}$ под прямым углом к траектории, а при $\omega = \omega'_{\max}$ — вдоль движения. Излучение, порядок которого превышает $r_{\max}$, резко уменьшается с увеличением r. Однако этот случай может осуществляться при произвольных скоростях. Как мы увидим ниже, интенсивность излучения высокого порядка мала, а влияние малых искажений периодичности, приводящее к уменьшению резонансного излучения, возрастает с порядком излучения. Резюмируя можно отметить, что излучение с упомянутыми выше свойствами (энергетический порог, резкая направленность и т. д.) можно наблюдать в том случае, если $r_{\max} \gg 1$, т. е. если период среды больше величины l_1

$$l \gg l_1 = \left(\frac{m_e \pi c^2}{e^2 N}\right)^{1/2}. \tag{2.14}$$

Для того чтобы избежать влияния фотоэффекта на область частот около $\omega_{\min}$, где, как мы увидим ниже, концентрируется резонансное излучение, необходимо в эксперименте с твердыми пластинами выбирать $l \lesssim 10^{-2}$ *см*. Поэтому (2.14) всегда выполняется с большим запасом. Детальное рассмотрение среды, для которой $l < l_1$, мы здесь опускаем ради краткости изложения.

§ 3. Квазиклассическое рассмотрение

Уравнения Максвелла для неоднородной среды сохраняют свой обычный вид и специфика будет заключаться в том, что теперь диэлектрическая и магнитная проницаемости будут функциями координат x, y, z. Мы будем писать уравнения Максвелла для Фурье компонент полей по времени, выбирая временные множители в форме $\exp(-i\omega t)$. Уравнения для векторного потенциала $\vec{A}$ можно записать в виде [8]

$$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} - \operatorname{div}\vec{A}\,\operatorname{grad}(\lg k^2) = -\frac{2\mu}{c}\int \vec{j}(t)e^{i\omega t}dt, \tag{3.1}$$

где

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1(z). \tag{3.2}$$

В дальнейшем положим $\mu = 1$. Будем считать, что свойства среды изменяются только в одном направлении—вдоль оси z. Примем, что ток направлен также по оси

$$j_z = e \cdot v_z(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta\,[z - z(t)]. \tag{3.3}$$

Рассмотрение для произвольно направленного тока можно провести аналогично описываемому ниже методу. При этом, в противоположность случаю тормозного излучения в кристалле [1], можно убедиться, что для малых углов влета и малых углов излучения интенсивность излучения меняется слабо и все изменение сводится к замене l на $l/\cos\psi$. В случае падения вдоль оси z, уравнение (3.1) превращается в уравнение для A_z. Компоненты A_x и A_y можно положить равными нулю. Этим, в частности, уже определяется поляризация исследуемого излучения, именно вектор $\vec{H}$ резонансного излучения перпендикулярен плоскости, содержащей ось z и вектор распространения волны $\vec{k}$.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде (индекс z в дальнейшем будем опускать)

$$A(x, y, z) = \int A(k_x, k_y, z) \exp(ik_x x + ik_y y)\, dk_x dk_y. \tag{3.4}$$

Уравнение для

$$A(k_x, k_y, z) = A(q, z), \tag{3.5}$$

где

$$q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \tag{3.6}$$

перепишем следующим образом

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial A(q, z)}{\partial z}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - q^2\right) A(q, z) =$$

$$= -\frac{e}{2\pi^2 c}\int v(z)\, \delta\,[z - z(t)]\, e^{i\omega t} dt. \tag{3.7}$$

При произвольной зависимости ε_1 от z, уравнение (3.7) может быть решено в общем виде в квазиклассическом приближении. Квазиклассические решения соответствующего однородного уравнения имеют хорошо известный вид (с точностью до двух первых членов в квазиклассическом разложении)

$$A_{1,2} = C_{1,2}\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{1/2} \exp\left\{\pm \int^{z} \varkappa\, dz\right\}, \tag{3.8}$$

где

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - q^2}\,. \tag{3.9}$$

Отметим, что возможность приведения уравнения (3.7) к цепочке уравнений для конечного числа функций в квазиклассическом разложении требует выполнения условия квазиклассики

$$\left|\frac{\varepsilon}{\varkappa^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon}\right)\right| \ll 1. \tag{3.10}$$

В действительности нам необходимо еще потребовать, чтобы на интересующих нас расстояниях изменение фазы векторного потенциала, вносимое следующими членами разложения в квазиклассическом приближении, было мало.

В случае среды, рассматриваемом ниже (§ 4), это требование легко выполнить, если потребовать выполнения более жесткого условия, чем (3.10), а именно

$$\lambda \ll l. \tag{3.11}$$

После нахождения двух линейно независимых решений (3.8), функция Грина уравнения (3.7) строится обычным образом [9]. Нужно только заметить, что $G(z, z')$ должно приводить к волнам расходящимся от точки $z = z'$, где находится источник. Для этого [поскольку временные множители у нас выбраны в виде $\exp(-i\omega t)$] $G(z, z')$ необходимо искать в форме

$$G(z, z') = \begin{cases} CA_1(q, z)\, A_2(q, z') & \text{при} \quad z > z', \\ CA_1(q, z')\, A_2(q, z) & \text{при} \quad z < z'. \end{cases} \tag{3.12}$$

Этим соотношением функция Грина определяется с точностью до постоянного множителя. Если, кроме того, мы потребуем, чтобы функция $G(z, z')$ удовлетворяла уравнению (3.7), в котором правая часть заменена на $-4\pi\varepsilon\delta(z-z')$, то тогда постоянный множитель определится из условия, чтобы скачок производной функции Грина в точке $z = z'$ был равен

$$G'(z'+0, z') - G'(z'-0, z') = -\varepsilon(z')\, 4\pi. \tag{3.13}$$

Следовательно, $C = 2\pi i$. Искомое решение уравнения (3.7) можно записать в виде

$$A(q, z) = \frac{ie}{4\pi^2 c} \left(\frac{\varepsilon(z)}{\varkappa(z)}\right)^{1/2} \int \frac{v(t) \exp\left(i\omega t + i \left| \int\limits_{z(t)}^{z} \varkappa(z)\, dz \right| \right)}{[\varkappa(t)\, \varepsilon(t)]^{1/2}}\, dt. \tag{3.14}$$

Модуль в экспоненте подинтегрального выражения означает, что, согласно определению функции Грина (3.12), мы должны брать только положительное значение интеграла по z. Мы увидим в дальнейшем, что в действительности нам придется использовать (3.14) только для вычисления интенсивности излучения в переднюю полусферу $z \to \infty$ и, поскольку, $\varkappa$ по определению положительно, то интеграл по z будет всегда положительным.

Вычислим поток энергии, проходящей через плоскость x, y, перпендикулярную траектории частицы (для простоты мы будем предполагать в дальнейшем, что частица движется равномерно и прямолинейно). Для этого необходимо подсчитать $[EH]_z$.

Потенциал φ определяется из обычного условия Лоренца и равен

$$\varphi = -\frac{ic}{\varepsilon\omega} \operatorname{div} A = \frac{c}{\omega\varepsilon} \varkappa A(q, z) \tag{3.15}$$

ибо, согласно условию квазиклассики (3.10), дифференцировать в (3.14) по переменной z нужно только экспоненту подинтегрального выражения.

Окончательное выражение для потока энергии через плоскость, расположенную на расстоянии z от начала координат и перпендикулярную траектории, за все время движения есть

$$S = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega\varepsilon} d\omega \int_0^\infty \varkappa q^3 dq \, | A(q, z) |^2. \tag{3.16}$$

В силу квазиклассичности мы можем считать, что изменение свойств среды мало сказывается на распространении кванта, поэтому мы можем ввести угол излучения кванта θ, согласно соотношению

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \theta,$$

$$\varkappa_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - q^2}.$$

Средние отклонения при распространении в периодической среде от направления, определяемого углом θ, равны нулю (средние квадраты на расстояниях порядка $l_{эф}$ ничтожно малы).

§ 4. Излучение в среде, изменяющей свои свойства по закону косинуса

Рассчитаем резонансное излучение в среде, диэлектрическая постоянная которой равна

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \Delta \cos \frac{2\pi z}{l}; \quad \Delta \ll \varepsilon_0(\omega). \tag{4.1}$$

Расчет интенсивности проводится с помощью (3.14) и (3.16). Величина $\varkappa$, входящая в (3.14), для упрощения последующих выкладок разлагается в ряд

$$\varkappa \approx \varkappa_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varkappa_0}. \tag{4.2}$$

Для рассматриваемой среды, при $z \to \infty$ и постоянной скорости, $A(q, z)$ дается выражением

$$A(q, z) = \frac{iev}{8\pi^3 c} \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{1/2} \int \frac{dt}{(\varepsilon\varkappa)^{1/2}} \exp\left\{ i\omega t + i\varkappa_0 (z - vt) + \right.$$
$$\left. + \frac{i\omega^2 \Delta l}{4\pi c^2 \varkappa_0} \left(\sin \frac{2\pi z}{l} - \sin \frac{2\pi vt}{l} \right) \right\}. \tag{4.3}$$

Если же (3.11) выполняется, то зависимостью от t знаменателя выражения (4.3) можно пренебречь и, воспользовавшись формулой известной из теории функций Бесселя [10]

$$\exp\left(-iB \sin \frac{2\pi vt}{l}\right) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} J_r(B) \exp\left(-i \frac{2\pi vrt}{l}\right), \tag{4.4}$$

представить (4.3) в виде суммы слагаемых, каждое из которых содержит дельта функцию вида

$$\delta\left(\omega - \varkappa_0 v - \frac{2\pi v}{l} r\right). \tag{4.5}$$

Легко видеть, что мы пришли к условию резонанса (2.1), из которого, в частности, следует выражение для косинуса угла излучения (2.2) и интервала излученных частот (2.4) Поскольку мы рассматриваем сейчас поток энергии через плоскость $z \to \infty$, то возможны только положительные углы излучения. Поэтому в (2.4) левую часть неравенства нужно заменить на $\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}}$. После подстановки квадрата модуля выражения (4.3) в (3.16) и интегрирования по всем углам, мы получим величину всей излученной энергии за время T

$$dI = \frac{e^2 v}{c^2} \omega d\omega T \sum_r J_r^2(B) \left[1 - \left(\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{2\pi rc}{l\omega\sqrt{\varepsilon_0}}\right)^2\right]. \tag{4.6}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть $\sin^2\theta$ [см. (2.2)]. Величина B, входящая в аргумент функции Бесселя, равна

$$B = \frac{l\Delta\omega}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0}\, c\cos\theta}. \tag{4.7}$$

Прежде чем перейти к анализу выражения (4.6) напомним, что квазиклассический расчет, использованный нами, теряет свою применимость около точек поворота $\varkappa = 0$. Используя формулы (3.10) и (2.2), получаем

$$-\frac{2\pi rc}{l\omega\sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}} \gg \delta, \tag{4.8}$$

где δ — малая величина, определяемая наименьшими допустимыми значениями $\cos\theta$ согласно квазиклассическому рассмотрению. Нужно, чтобы ограничение (4.8) не влияло на результаты. Заметим, что при $l \gg l_{эф}$ можно просуммировать ряд по r и придти к формуле Тамма—Франка.

а) Перейдем к анализу выражений (4.6), (4.7), (2.4), (2.2). Начнем с рассмотрения излучения частот, не превышающих атомные. Рассмотрим отдельные члены ряда (4.6). Если выполняется условие

$$\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon} > 1, \tag{4.9}$$

то член ряда (4.6) с $r = 0$ дает нам интенсивность черенковского излучения в периодической среде, а (4.8) и (2.4) выполняются автоматически. Формула (4.6) в этом случае отличается от формулы Тамма-Франка только тем, что вместо единицы стоит величина $J_0^2(B)$, уменьшающая интенсивность черенковского излучения. Величина B (напомним, что $\lambda \ll l$; $\Delta \ll \varepsilon_0$) зависит от скорости налетающей частицы.

Рассмотрим слагаемое $r=-1$. Угол излучения определяется условием (2.2) Интенсивность задается слагаемым с $r=-1$ в формуле (4.6). Для определения интервала излученных частот, помимо выполнения (4.9), необходимо учесть и правую часть (2.4), которое также накладывает ограничение на допустимый спектр излученных частот.

Рассмотрим слагаемое $r=+1$. Условие (4.8) будет налагать определенные ограничения на частоту излучения. В то же время (2.4) для $r=1$ дает нам интервал излученных частот. Сравнение двух условий показывает, что только малую часть спектра излученных частот около $\omega_{\min}$ нельзя описать формулой (4.6). Это может оказаться несущественным, так как при больших значениях B [т. е. когда (4.8) не выполнено] интенсивность из-за наличия $J_n^2(B)$ будет мала. Случай $r=+1$ интересен тем, что излучение может возникать и тогда, когда (4.9) не выполняется, т. е. до порога черенковского излучения. Рассуждения можно распространить на $r=\pm 2$ и т. д. Отметим, что излучение положительного порядка ($r>0$) может возникать до порога черенковского излучения.

Подчеркнем еще раз, что формулы (4.6) полностью описывают излучение при ограничении (4.8) для $\lambda \ll l$ и $\Delta \ll \varepsilon_0$; угол излучения для каждого порядка задается условием (2.2), а интервал излученных частот определяется условием (2.4).

А. Ц. Аматуни и Н. А. Корхмазяном [10] была получена формула для излучения порядка $r=0;\ \pm 1$ без допущения $\lambda \ll l$, но при $B \ll 1$ и $\Delta \ll \varepsilon_0$. Эти результаты (для $r=\pm 1$) легко проверить, используя методику расчета, развитую в § 7.

Б. Болотовский любезно обратил внимание на то, что полученные формулы имеют совершенно такой же вид, как и в эффекте, рассмотренном В. Л. Гинзбургом и В. Я. Эйдманом [12]. В упомянутой работе рассчитано излучение осциллятора, движущегося в однородной среде со сверхсветовой скоростью.

в) Перейдем теперь к рассмотрению частот, превышающих характерные атомные частоты. Тогда мы можем пользоваться предельными значениями ε и Δ в форме (2.3) и анализ формул может быть значительно продвинут вперед. Заметим, что здесь возможно излучение только положительного порядка ($r>0$).

В рассматриваемом случае правая часть неравенства (2.4) приводит сразу к двум неравенствам (2.6), если выполнено (2.9). Порог энергии, при которой начинается излучение данного порядка, определяется формулой (2.10), угол излучения дается формулой (2.11).

Если порядок излучения превышает $r_{\max}$ (2.9), то интервал излученных частот вместо (2.6) будет даваться неравенством (2.13). Это приведет к тому, что аргумент функции Бесселя [см. (4.6), либо (4.12)] будет для всех значений ω значительно меньше индекса r. Поэтому, поскольку индексы $r \gtrsim r_{\max}$ предполагаются большими, численные значения функций Бесселя будут приводить к ничтожной интенсивности.

Вернемся к случаю $r \ll r_{\max}$. Ввиду направленности излучения мы можем упростить квадратную скобку в (4.6) и переписать упомянутую формулу в переменных

$$y = \frac{b}{a\omega} \tag{4.10}$$

разделив предварительно dl на $\hbar\omega$ и на vT. Тогда для B получим выражение

$$B = \beta y, \qquad \beta = \frac{N'}{N} r, \tag{4.11}$$

а для числа излученных квантов на единицу пути из (4.6) будем иметь

$$m = \frac{4\pi}{137 l} \sum_{r=1} r \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2} J_r^2(\beta y) \{y - y^2 - A\}, \tag{4.12}$$

где

$$y_2 = \frac{b}{a\omega_{\min}}, \qquad y_1 = \frac{b}{a\omega_{\max}}. \tag{4.13}$$

Обратим внимание, что условие $A \leqslant \frac{1}{4}$ определяет пороговую энергию. Заметим, что значения y_1 и y_2 являются одновременно корнями выражения, стоящего в фигурных скобках в (4.12).

Перейдем к анализу формулы (4.12).

Используя асимптотическое представление Дебая для функций Бесселя, а также обычное разложение в степенной ряд, можно показать, что при $N' \ll N$ основной вклад в (4.12) дает только излучение первого порядка. При $N' \sim N$ становится существенным излучение высокого порядка.

Для выяснения спектра излучения вернемся к формуле (4.6) или (4.12), опуская интегрирование по ω. Исходя из свойств функций Бесселя легко заметить, что подавляющее число излученных квантов будет концентрировано около $\omega_{\min}$.

Рассмотренный выше пример среды, изменяющей свои свойства по закону косинуса, дает возможность получить результаты для произвольной периодической среды в случае $N' \ll N$.

Как и прежде, свойства среды мы будем описывать диэлектрической постоянной (2.3). Переменную часть ε разложим в ряд Фурье

$$\varepsilon_1(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r \cos \frac{2\pi z r}{l} + b_r \sin \frac{2\pi z r}{l} \right). \tag{4.14}$$

Опуская детали вычислений, мы приводим окончательную формулу для интенсивности излучения

$$dI=\frac{e^2v}{c^2}\omega d\omega T\sum_r\frac{B_r^2+B_{r'}^2}{4}\left[1-\left(\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}}-\frac{2\pi rc}{l\omega\sqrt{\varepsilon_0'}}\right)^2\right]. \qquad (4.16)$$

Величины B_r и $B_{r'}$ равны величине B [см. (4.7)], умноженной на $\frac{a_r}{r}$ и $\frac{b_r}{r}$ соответственно. Угловое направление излучения и интервал излученных частот даются для каждого порядка формулами § 2. Используя теорию возмущений (см. § 7), легко получить формулу аналогичную (4.16) для произвольного угла влета и без допущения $s\ll l$.

§ 5. Слоистая среда

Ввиду того, что слоистая среда является наиболее удобной с экспериментальной точки зрения для использования резонансного излучения в физике частиц высоких энергий, в настоящем параграфе приводятся вывод и исследование соответствующих формул в общем случае различных толщин и произвольных N'', N (сравни с [5], где имеются ссылки на работы других авторов). Ниже будем пользоваться формулами, полученными выше в квазиклассическом приближении. Применимость квазиклассики к слоистой среде требует сглаживания границ перехода между слоями. Это всегда возможно, так как для создания излучения важны большие расстояния пролета частиц и поэтому интересующий нас результат не зависит от резкости границ. Заметим далее, что поскольку квазиклассическое приближение приводит к неправильным результатам для отраженных волн, мы должны требовать, чтобы эффектами, связанными с отраженными волнами, можно было пренебречь. Это будет выполнено, если изменение диэлектрических свойств среды от слоя с диэлектрической постоянной ε_1 к слою ε_2 будет мало, т. е. $\left|\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right|\ll 1$. В области больших частот, которые и будут нас интересовать в дальнейшем, это условие выполнено всегда. Кроме (2.3) нам необходимо будет считать, что $v\approx c$ и углы излучения малы. Последнее условие окажется выполненным, если выполнено (3.11).

Энергия, излученная частицей, движущейся вдоль оси z через плоскость перпендикулярную к траектории частицы и отстоящую на расстоянии $z\to\infty$ от начала координат, дается выражением (3.16), $A(q, z)$ вычисляется по формуле (3.14).

Обозначим через I интеграл, входящий в (3.14)

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[\varepsilon(vt)\varkappa(vt)]^{1/2}}\exp\left(i\omega t+i\left|\int\limits_{vt}^{z}\varkappa dz\right|\right)dt. \qquad (5.1)$$

Вычисление S сводится к вычислению интеграла I для слоистой среды. Рассмотрим вначале конечное число чередующихся слоев из двух различных веществ с диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2

$$\varkappa_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta; \qquad \varkappa_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta \qquad (5.2)$$

Пусть слой из первого вещества ε_1, $\varkappa_1$ имеет толщину $\Delta z_1 = v\Delta t_1$, из второго вещества ε_2, $\varkappa_2$ — толщину $\Delta z_2 = v\Delta t_2$. Пронумируем слои числами, изменяющимися от 1 до n, пусть нечетные числа характеризуют первую среду, а четные—вторую. Выберем для удобства n четным числом, т. е. мы будем иметь $n/2$ слоев одной среды и $n/2$ слоев второй. В дальнейшем мы устремим n к бесконечности (фактически это будет означать, что множитель $\left[\sin\frac{n\gamma}{2}/\sin\gamma\right]^2$, входящий в I^2 [см. (5.5)] можно будет заменить на $\frac{n\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(\gamma-\pi r)$.

Обозначим через $t_1, t_2, \cdots t_n$ времена влета частицы в первый, второй и т. д. слои, t_{n+1} — время вылета из последнего слоя. Тогда интеграл можно разбить на сумму интегралов по t (от $-\infty$ до t_1, от t_1 до t_2 и т. д., от t_{n+1} до ∞), причем первым интегралом от $-\infty$ до t_1 и последним от t_{n+1} до ∞, мы интересоваться не будем, так как они связаны с переходными эффектами на первой и последней границах. Каждый интеграл легко вычислить, если точка z лежит дальше последнего слоя (в дальнейшем мы должны устремить z к бесконечности быстрее, чем число слоев). Суммирование вычисленных интегралов сводится к суммированию геометрической прогрессии. Для I получается окончательное выражение

$$I = \frac{1}{(\varepsilon_1\varkappa_1)^{1/2}}\frac{1}{(\omega-\varkappa_1 v)}\left\{\sum_{l=1}^{n-1} e^{ir_l}(-1)^l+1\right\} - \frac{1}{(\varkappa_2\varepsilon_2)^{1/2}}\frac{1}{(\omega-\varkappa_2 v)}\left\{\sum_{l=1}^{n-1} e^{ir_l}(-1)^l+e^{ir_n}\right\}, \qquad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= (\omega-\varkappa_1 v)\,\Delta t_1, \\ r_2 &= (\omega-\varkappa_2 v)\,\Delta t_2 + r_1, \\ r_3 &= (\omega-\varkappa_1 v)\,\Delta t_3 + r_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n &= (\omega-\varkappa_2 v)\,\Delta t_n + r_{n-1}. \end{aligned} \qquad (5.4)$$

При вычислении (5.3) мы считали, что $i^{\text{ая}}$ пластина имеет толщину $v\Delta t_i$. Выражение (5.3) мы используем в следующем параграфе для вычисления излучения с учетом случайных отклонений от средней толщины. Сейчас мы примем, что все нечетные слои имеют толщину Δz_1, а четные Δz_2. Тогда выражение (5.3) можно переписать

$$I = 2\sin\frac{(\omega - \varkappa_2 v)}{2}\Delta t_2 \left| \frac{1}{(\varepsilon_1 \varkappa_1)^{1/2}(\omega - \varkappa_1 v)} - \frac{1}{(\varepsilon_2 \varkappa_2)^2 (\omega - \varkappa_2 v)} \right| \frac{\sin\frac{n}{2}\gamma}{\sin\gamma}, \tag{5.5}$$

где

$$2\gamma = (\omega - \varkappa_1 v)\,\Delta t_1 + (\omega - \varkappa_2 v)\,\Delta t_2. \tag{5.6}$$

При достаточно больших n, величина I отлична от нуля там, где $\gamma = \pi r$, т. е. где выполняется условие резонанса (2.1), в котором $\vartheta = 0$ и

$$\sqrt{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_1^{1/2}\Delta z_1 + \varepsilon_2^{1/2}\Delta z_2}{l} = 1 - \frac{2\pi e^2}{m} N_{eff}, \tag{5.7}$$

$$N_{eff} = \frac{N_1 + N_2 \alpha}{1 + \alpha}. \tag{5.8}$$

Через l обозначена сумма толщин двух соседних пластин (период слоистой среды), а через α их отношение

$$\alpha = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}. \tag{5.9}$$

Интервал частот для каждого порядка излучения дается формулой (2.6). При условии (2.9) угол излучения каждого порядка определяется формулой (2.11) и (2.12). Энергетический порог излучения на каждой гармонике определяется формулой (2.10). Во всех перечисленных формулах под N нужно понимать N_{eff} (5.8). Отмеченный Франком [4] случай независимого суммирования от различных пластин соответствует резонансу высокого порядка. Если r достаточно велико, т. е. выполняется условие

$$\frac{\omega}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\right) l \gg 1,$$

то суммирование по r можно заменить интегрированием, или попросту говоря, заменить в формуле (5.5) $\sin\frac{n\gamma}{2}\Big|\sin\gamma$ просто на $\frac{n}{2}$. Подставив найденное таким образом I в формулы (3.14) и (3.16), получим угловое распределение излучения в случае выполнения вышеприведенного неравенства. Упомянутое условие эквивалентно одному из двух неравенств: $\omega \gg \omega_{1\max}$ или $\omega \ll \omega_{1\min}$, где $\omega_{1\max}$ и $\omega_{1\min}$ максимально и минимально возможная частота излучения на первой гармонике [см. (2.6) при $r = 1$]. Как видно из (5.5), поляризация среды (т. е. учет ε_1 и ε_2) влияет на формулы излучения только в том случае, когда выполнено соотношение [2]

$$\omega \ll \sqrt{\frac{4\pi N_1 e^2}{m}\frac{E}{mc^2}} = \omega_2, \qquad N_1 > N_2.$$

В противном случае величина I, а следовательно и интенсивность излучения, ничтожно малы.

Таким образом, для наличия заметного излучения в области частот $\omega \gg \omega_{1\max}$ необходимо выполнение условия $\omega_{1\max} \ll \omega_0$, которое сразу приводит к ограничению, накладываемому на энергию налетающей частицы. Именно энергия излучающей частицы должна быть значительно меньше порогового значения для первой гармоники, обозначаемой ниже через $\left(\frac{E}{mc^2}\right)_{1,tr}$. В этом случае первые гармоники излучения пропадают, а излучение на высоких гармониках, ввиду значительного их взаимного перекрытия, нужно просуммировать (т. е. проинтегрировать по r). Аналогичные формулы для интенсивности имеют место и в случае $\omega \ll \omega_{\min}$. В последнем случае энергия может быть произвольной. Приведем формулу для полного числа квантов на единицу пути в интервале частот $d\omega$ в исследуемом случае (сравни с формулой для переходного излучения на одной границе [13])

$$m = \frac{2}{137\pi l}\frac{d\omega}{\omega}\left[\ln\frac{2\pi N_1 e^2}{m\omega^2(1 - v^2/c^2)} - 1\right]. \tag{5.10'}$$

Во избежание недоразумений отметим также, что потери энергии согласно (5.10′) будут линейно расти с энергией вплоть до энергий $\left(\frac{E}{mc^2}\right)_{1,tr}$. При дальнейшем увеличении энергии, зависимость (5.10′) перестает быть справедливой. Исследуемые ниже формулы (5.10) и (5.13) показывают, что потери энергии перестают зависеть от энергии излучающей частицы и выходят на плато. Потери энергии на резонансное излучение составляют примерно $10^4\,\frac{ev}{г/см^2}$ в твердых пластинках, расположенных в газе с произвольным периодом.

Перейдем к исследованию произвольных энергий и порядков излучений.

Используя найденное значение I, мы по формуле (3.16) подсчитаем поток энергии через плоскость x, y на большом расстоянии от слоев. Проинтегрируем полученный результат по углам излучения. Тогда окончательная формула для интенсивности излучения релятивистской частицей частот, значительно превышающих атомные, на сантиметр слоистого вещества примет вид

$$m = \frac{4p^2(1+\alpha)^2}{137\pi l}\sum_{r=1}\frac{1}{r}\int_{y_1}^{y_2}\frac{[y - A - y^2]}{(1-py)^2(1+p\alpha y)^2}\sin^2\left[\frac{\alpha\pi r}{1+\alpha} - y\pi r\frac{\alpha p}{1+\alpha}\right]dy. \tag{5.10}$$

Здесь

$$p = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2\alpha}. \tag{5.11}$$

Переменная интегрирования y введена согласно формуле (4.10), пределы интегрирования по y определяются корнями выражения, стоящего в квадратных скобках в интеграле (5.10) и соответствуют ω_{min} и ω_{max}. При построении спектра излучения для каждого отдельного порядка удобнее исходить из уравнения (5.13), записанного в переменных

$$\omega' = \frac{\omega a}{rb} = \frac{1}{yr}. \tag{5.12}$$

Обратим внимание на то, что величина $\frac{rb}{a}$ для энергий значительно превышающих пороговое значение (2.10) есть минимально возможная излучаемая частота на первой гармонике

$$dm = \frac{4p^2(1+\alpha)^2}{137 l\pi} \sum_r \frac{d\omega'}{r^3\omega'^4} \frac{\left|1 - A\omega' r - \frac{1}{\omega' r}\right|}{\left(1 - \frac{p}{\omega' r}\right)^2 \left(1 + \frac{p\alpha}{\omega' r}\right)^2} \times$$

$$\times \sin^2\left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\pi r - \frac{\alpha\pi p}{\omega'(1+\alpha)}\right]. \tag{5.13}$$

Спектр для каждой гармоники будет описываться кривой, ордината которой обращается в нуль при $\omega' = \omega'_{min} \approx \frac{1}{r}$ и при $\omega' = \omega'_{max} \approx$ $\approx \frac{a^2}{br(1 - v/c)}$.

Подавляющее число излученных фотонов концентрируется вблизи левой границы спектра (при $\omega' \approx 1{,}5\omega'_{min}$). Приведем некоторые численные результаты для полного числа m резонансных квантов на единицу пути слоистых веществ. Пусть $p \approx 1$ ($\alpha N_2 \ll N_1$), а α меняется от единицы до десяти. Энергия частиц превосходит пороговую энергию для первой гармоники примерно в 2,2 раза, т. е. параметр A равен $A = \frac{1}{20r^2}$ [см. (5.8), (2.7), (2.10)]. Численные значения $\frac{ml}{1+\alpha} \cdot 10^3$ для различных порядков r и для различных α приведены в таблице. Отметим, что при увеличении энергии полное число квантов, излученных на первой гармонике, несколько увеличится (примерно на 30%) в то время, как число резонансных квантов на последующих гармониках не изменится так как для больших гармоник выбранное значение A соответствует энергиям, значительно превышающим соответствующие пороговые энергии. Для очень больших r полное число квантов уменьшается, примерно, как $1/r$. Для больших α полное число уменьшается также по закону $\frac{1}{\alpha}$. Для небольших значений α и r зависимость полного числа квантов, излученных на 1 *см*, от r и α представлена на фигурах 1 и 2. По оси ординат отложена величина $\frac{ml}{1+\alpha}$, по оси абсцисс, r и α соответственно. На остальных фигурах представлен спектр резонансного излучения для различных α и r. По оси абсцисс отложена частота излученного кванта в единицах минимально возможной излучаемой частоты на первой гармонике [см. формулу (5.12)]. По оси ординат отложена величина $\frac{ml}{1+\alpha}$. Полное число излученных фотонов, соответствующих каждой из кривых на фигурах 3—9, приведено в упоминавшейся выше таблице.

Пользуясь случаем, хотел бы поблагодарить Л. В. Парийскую за расчет кривых, приведенных в данной статье.

§ 6. Конкурирующие процессы

а) „Тепловой" фон

В настоящем параграфе мы приведем оценку различных причин, видоизменяющих приведенные в предыдущих параграфах выводы.

Прежде всего рассмотрим вопрос о том, как будут влиять на формулы резонансного излучения случайные отклонения от идеальной периодичности. Этот вопрос тесно связан с аналогичным рассмотрением теплового или диффузного фона в диффракции рентгеновских лучей. Близкое рассмотрение проводилось также при исследовании интерференционного излучения в кристалле [1].

Рассмотрение случайных отклонений мы приведем на примере слоистой среды, рассмотренной в предыдущем параграфе. Будем исходить из формулы (5.3). Величины r_l, входящие в (5.3), флуктуируют около своих средних значений благодаря флуктуациям толщин пластинок Δt_l. Поскольку слоистая среда, необходимая для эксперимента, создается искусственным образом, то вопрос о флуктуациях сводится к вопросу о флуктуациях толщин различных пластин. В случае среды, состоящей из твердых пластин (всего $n/2$ пластин), размещенных в газе на определенном расстоянии Δz_2 друг от друга, флуктуации Δz_2 будут соответствовать неточностям в расстановке пластинок, а флуктуации Δz_1 — неточностям толщин самих пластин. Поскольку мы имеем периодическую среду, в которой положения одинаковых пластин равноправны, то флуктуации r_l должны быть одинаковыми для эквивалентных точек. Это можно записать, например, в виде

$$r_l = r_{l0} + (\omega - \varkappa_l v)\,\xi_l \tag{6.1}$$

либо в виде

$$r_l = r_{l0} + (\omega - \varkappa_1 v)\,\xi_{l1} + (\omega - \varkappa_2 v)\,\xi_{l2}, \tag{6.2}$$

где для четных $l\,(\varkappa_l = \varkappa_2)$ средний квадрат случайных отклонений равен $\overline{\xi_2^2}$, а для нечетных l — равен $\overline{\xi_1^2}$. Пусть распределение различных значений ξ_l дается законом Гаусса

$$f_{1,2}(\xi_l)\,d\xi_l = \frac{d\xi_l}{\sqrt{\pi\overline{\xi_{1,2}^2}}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{\overline{\xi_{1,2}^2}}\right). \tag{6.3}$$

Рассмотрим для иллюстрации случай, когда отклонения от положений равновесия определяются условием (6.1). После усреднения модуля квадрата выражения (5.3) с помощью функции (6.3), для интенсивности излучения при прохождении n границ мы обычным образом получим следующую формулу

$$S = \frac{e^2}{2\pi c}\theta^3 d\theta d\omega \left| \frac{1}{\varepsilon_1^{1/4}\left(1 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta\right)} - \frac{1}{\varepsilon_2^{1/4}\left(1 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\right)} \right|^2 (A_1 + A_2), \tag{6.4}$$

$$A_1 = n\left\{1 - \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega - \varkappa_1 v)^2}{2}\overline{\xi_1^2}\right] - \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{(\omega - \varkappa_2 v)^2}{2}\overline{\xi_2^2}\right]\right\}, \tag{6.5}$$

$$A_2 = \frac{\sin^2\frac{n\gamma}{2}}{\sin^2\gamma}\left\{\exp\left[-\frac{(\omega - \varkappa_1 v)^2}{2}\overline{\xi_1^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega - \varkappa_2 v)^2}{2}\overline{\xi_2^2}\right] - \exp\left[-\frac{(\omega - \varkappa_1 v)^2}{4}\overline{\xi_1^2} - \frac{(\omega - \varkappa_2 v)^2}{4}\overline{\xi_2^2}\right] 2\cos(\omega - \varkappa_1 v)\Delta t_1\right\}. \tag{6.6}$$

Первое слагаемое определяет „тепловой фон". Второе слагаемое приводит к формулам резонансного излучения несколько отличающимся от формул для идеальной слоистой среды. Если

$$(\omega - \varkappa_1 v)^2\overline{\xi_1^2} \ll 2 \quad \text{и} \quad (\omega - \varkappa_2 v)^2\overline{\xi_2^2} \ll 2, \tag{6.7}$$

то тепловой фон обращается в ноль и формулы не отличаются от случая излучения в идеальной среде. В противоположном случае резонансный член исчезает и остается только „аморфная" часть. Интересно отметить, что рассматриваемый случай (6.1) допускает существование резонансного излучения, даже если одна из флуктуаций сколь угодно велика, т. е. условия (6.7) выполняются только для одного индекса.

б) Влияние многократного рассеяния, фотоэффекта и других причин

Формулы § 3 выведены для частиц, скорость которых может произвольным образом изменяться вдоль оси z. Это дает возможность оценить погрешность, связанную с торможением частицы, и показать, что если скорость частиц мало изменяется на длине, равной периоду среды, то торможением частиц можно пренебречь.

Влияние поглощения кванта является значительно более существенным. Легко понять, что поглощение должно быть пренебрежимо мало на расстояниях порядка периода среды. Это приводит к тому, что резонансные эффекты можно наблюдать в твердых пластинках помимо оптической области, начиная с частот, превышающих мягкие рентгеновские лучи. Поскольку в этой области частот поглощение обусловлено в основном фотоэффектом, резко зависящим от атомного номера слоистой среды, то последнюю предпочтительно изготовлять из легких веществ, тем более, что полное число резонансных квантов, образованных на одном сантиметре, слабо зависит от плотности вещества, входящей в формулы через величину p [см. (5.11), (5.10), (5.13)], когда $\lambda N_2 \ll N_1$.

Мы подчеркивали, что резонансные кванты концентрируются около нижней границы спектра. Максимум интенсивности приходится примерно при $\omega \approx 1.5\ \omega_{min}$. Из (2.6) видно, что фиксирование ω_{min} полностью определяет величину $\Delta z_1 (N_1 + N_2\alpha)$. Если $N_2\alpha \ll N_1$, то пороговую энергию [см. (2.10)] можно изменять произвольным образом, изменяя α.

Перейдем к рассмотрению влияния многократного рассеяния на резонансное излучение. Углы, характерные в излучении, даются выражением (2.11) и имеют порядок $\theta_1 \approx \left(\frac{4\pi r\lambda}{l}\right)^{1/2}$. Влиянием многократного рассеяния можно пренебречь, если углы отклонения частицы, на расстояниях порядка длины периода, значительно меньше θ_1, т. е.

$$\frac{E_s^2}{E^2}\frac{l}{L} \ll \frac{4\pi r\lambda}{l}. \tag{6.8}$$

Здесь L — радиационная длина для электрона в сантиметрах. Точнее говоря $\frac{l}{L} = \frac{\Delta z_1}{L_1} + \frac{\Delta z_2}{L_2}$; где L_1 и L_2 — соответствующие лавинные единицы в первой и второй средах.

Условие (6.8) можно переписать в виде

$$\omega \ll \left(\frac{E}{E_s}\right)^2 \frac{4\pi rcL}{l^2} = \omega_s. \tag{6.9}$$

Как мы неоднократно подчеркивали, на каждой гармонике излучение резко концентрируется около соответствующего ω_{min}, поэтому, если $\omega_{min} \ll \omega_s$, рассеяние несущественно отразится на результатах. Это приводит к условию

$$\frac{E}{mc^2} \gg \left(\frac{E}{mc^2}\right)_{tr} \sqrt{\frac{l}{L}} \left(\frac{E_s}{mc^2}\right), \tag{6.10}$$

налагаемому на энергию частиц.

Условие (9.10) практически всегда легко выполнить.

§ 7. Излучение на случайных флуктациях плотности

а) метод псевдофотонов

Настоящий параграф посвящен расчету излучения, возникающего при прохождении частиц с произвольной скоростью через среду со случайно расположенными неоднородностями. Фактически произвольная среда, ввиду наличия статистических флуктуаций плотности, будет подходить под рассматриваемый ниже случай. Поскольку флуктуации плотности не имеют выделенного направления, нам придется решать трехмерную задачу. Метод, изложенный в § 2, становится здесь неприменимым. Отметим большую аналогию, которая существует между явлением рассеяния света в мутных средах и рассматриваемым здесь явлением излучения. Поле движущейся частицы характеризуется электрическим и магнитным векторами. Прохождение частицы через вещество приводит к его поляризации (действием магнитного поля частицы, если мы отвлекаемся от специальных магнитных явлений, всегда можно пренебречь), т. е. к созданию вторичного поля. Среднее значение вторичного поля в однородной среде, благодаря интерференции волн, исходящих от различных участков среды, обращается в ноль (исключением является излучение Черенкова-Вавилова). Среднее значение же квадратов полей, которое важно для излучения, не исчезает, благодаря наличию флуктуаций плотности. Отличие от обычного рассеяния света заключается только в том, что первичная поляризация вещества создается заряженной частицей, а не электромагнитной волной. Однако, поскольку магнитные силы малы и в рассматриваемых ниже явлениях несущественны, мы всегда можем к электрическому полю движущейся частицы добавить такое магнитное поле, чтобы сумма была эквивалентна суперпозиции электромагнитных волн. Эти рассуждения справедливы для произвольной скорости при заданной траектории. Таким образом, чтобы найти полное число излученных квантов в неоднородной среде, мы должны подсчитать число эквивалентных псевдофотонов, соответствующих полю частицы, проходящих в данном интервале частот через 1 $см^2$ в данной точке вещества за все время пролета частицы. Эти псевдофотоны будут рассеиваться на неоднородностях среды, согласно известным законам рассеяния света [14]. Наиболее наглядным примером излучения в неоднородной среде будет случай излучения на флуктуациях в газе, который соответствует релеевскому рассеянию света.

Для определения потока псевдофотонов будем исходить из макроскопических уравнений Максвелла ($\mu = 1$) для потенциалов в случае равномерно движущейся частицы вдоль оси z.

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e\vec{v}}{c}\,\delta(z - vt),$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\,e\delta(z - vt),$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div} A = 0. \tag{7.1}$$

Разлагая в трехкратные интегралы Фурье по переменным x, y, z, мы находим решение в виде

$$\vec{E}(r, t) = \frac{i}{8\pi^3}\iiint dk_x dk_y dk_z\,\frac{4\pi e\left(\dfrac{\omega\varepsilon}{c^2}\vec{v} - \vec{k}\right)\exp\left(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t\right)}{\varepsilon\left[k^2 - \dfrac{\varepsilon}{c^2}(\vec{k}\,\vec{v})^2\right]}. \tag{7.2}$$

где

$$\omega = \vec{k}\vec{v}. \tag{7.3}$$

Использование макроскопических уравнений типа (7.1) предполагает, что, эффективные в процессе, расстояния должны превышать междуатомные расстояния. Другими словами это означает, что

$$k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} < \frac{h}{R_{\text{междуат.}}}. \tag{7.4}$$

Если бы мы учли пространственную дисперсию, то результаты были бы справедливы для произвольных k_ρ. Однако, ввиду логарифмической зависимости результата от k_ρ, приводимые ниже результаты существенным образом не изменяются.

Исходя из (7.2) вычислим поток вектора Пойтинга

$$S = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2 dt \tag{7.5}$$

через площадку, отстоящую от оси движения на расстоянии ρ. Для определения потока через всю плоскость, перпендикулярную скорости частицы, вектор Пойтинга необходимо проинтегрировать по всем x, y (т. е. по всем прицельным параметрам). Неприменимость макроскопических уравнений Максвелла на малых расстояниях будет означать, что результат интегрирования будет справедлив для значений k_ρ, удовлетворяющих (7.4). Тогда полное число псевдофотонов в интервале частот $d\omega$ окажется равным

$$S_\omega d\omega = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{137\pi} \frac{c^2}{v^2} \frac{d\omega}{\omega} \int\limits_0^{k_{\rho\max}} \frac{k_\rho dk_\rho \left| k_2^2 + \left|1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right| \frac{\omega^2}{v^2} \right|}{\left|\varepsilon(\omega)\right| \left| k_\rho^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\left(1 - \varepsilon\frac{v^2}{c^2}\right)\right|^2}. \tag{7.6}$$

Суммарное число фотонов всех частот дается интегрированием (7.6) по ω от 0 до ∞.

Число прошедших квантов в интервале $d\omega$, за все время движения частицы, слагается из суммы по различным k_ρ, т. е. по различным прицельным параметрам. Если мы умножим (7.6) на коэффициент экстинции, то получим полное число излученных квантов в интервале частот $d\omega$.

После интегрирования по k_ρ (нули знаменателя обходятся обычным образом и приводят к рассеянию черенковского излучения) и умножения на коэффициент экстинкции, для полного числа излученных квантов на единицу пути в интервале частот, мы получим выражение

$$m = \frac{1}{137} \frac{c^2}{v^2 \varepsilon^{3/2} \pi} \frac{d\omega}{\omega} \left[\ln \frac{k_{\rho\max}^2}{\left|1 - \varepsilon\frac{v^2}{c^2}\right| \frac{\omega^2}{v^2}} - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon \right] \dot{n}(\omega). \tag{7.7}$$

Формула (7.7) дает решение задачи на излучение в изотропной среде при произвольных неоднородностях, описываемых коэффициентом экстинкции электромагнитных волн. Коэффициент экстинкции определяется как отношение числа рассеянных фотонов в единицу времени и в единице объема к плотности потока фотонов в падающем пучке. Следовательно, коэффициент экстинкции имеет размерность $см^{-1}$. Поскольку поле частицы содержит большие частоты, нам нужно исследовать зависимость $h(\omega)$ от ω, т. е. исследовать возможность излучения квантов, длина волны которых значительно меньше размеров неоднородностей. В частном случае рассеяния в газе, формальная подстановка вместо h выражения Релея

$$h = \frac{2\omega^4}{3\pi c^4} \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2}{N}, \tag{7.8}$$

для излучения частот превышающих атомные, приводит к неправильному результату. Мы хотим подчеркнуть здесь, что, так же как и в случае периодически расположенных неоднородностей, основные результаты будут получены исходя из того факта, что в излучении существенны большие продольные расстояния, растущие с энергией частицы. Это дает нам возможность применять макроскопическую электродинамику в области очень жестких квантов. Мы увидим, что, в случае случайно расположенных неоднородностей, релятивистские частицы будут возбуждать излучение, длина волны которого ничтожно мала по сравнению с размерами неоднородностей.

Формулу (7.7) можно применять для расчета полного числа излученных фотонов, длина волны которых превышает междуатомные расстояния. Нужно отметить, что, по-видимому, наибольший интерес будет представлять экспериментальное изучение излучения в веществах с большими флуктуациями (критическая опалесценция; переход в сверхпроводящее и сверхтекучее состояние).

б) Излучение квантов произвольной частоты

Для детального расчета излучения мы будем пользоваться обычной теорией рассеяния света [14], заменяя в последней падающую электромагнитную волну суперпозицией электромагнитных волн, образующих поле движущейся частицы.

Будем исходить из макроскопических уравнений Максвелла

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} E_\omega = \frac{i\omega}{c} H_\omega,\\
&\operatorname{rot} H_\omega = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega) E_\omega + \frac{2ev}{c}\int \delta(z - vt)\,\delta(x)\,\delta(y)\, e^{i\omega t}\, dt,\\
&\operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_\omega = \frac{2e}{v}\,\delta(x)\,\delta(y)\, e^{\frac{i\omega z}{v}},\\
&\operatorname{div} H_\omega = 0.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Будем считать, что случайные изменения плотности мало сказываются на величине поля движущейся частицы. Используем теорию возмущений и найдем поля H' и E', связанные с флуктуациями диэлектрической постоянной ε'. В нулевом приближении уравнения (7.8) сохраняют свой вид. Будем обозначать все величины в нулевом приближении индексами ($H_{\omega 0}$, ε_0, $E_{\omega 0}$). Вводя величину

$$D'_{\omega} = \varepsilon_0 E'_{\omega} - \varepsilon' E_{\omega 0}, \tag{7.9}$$

уравнение для флуктуационных полей перепишем в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} E'_{\omega} = \frac{i\omega}{c} H'_{\omega}, \\ \operatorname{rot} H'_{\omega} = -\frac{i\omega}{c} D'_{\omega}, \\ \operatorname{div} D'_{\omega} = 0, \\ \operatorname{div} H'_{\omega} = 0. \end{gathered} \tag{7.10}$$

Из (7.10) найдем уравнение для D'

$$\Delta D'_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon D'_{\omega} = -\operatorname{rot}\cdot\operatorname{rot}(\varepsilon' E_{\omega 0}), \tag{7.11}$$

где $E_{\omega 0}$ дается выражениями (7.2) и (7.3). Решение (7.11) в виде запаздывающих потенциалов имеет вид

$$D'_{\omega}(r) = -\frac{1}{4\pi}\left\{k'\left[k'\int \frac{E_{\omega 0}(r_1)}{|r - r_1|}\varepsilon'(r_1)\, e^{i\vec{k}'(\vec{r}-\vec{r}_1)}\, dv_{r_1}\right]\right\}. \tag{7.12}$$

Через

$$\vec{k}' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\,\vec{n} \tag{7.13}$$

обозначен волновой вектор излученного кванта.

Для удобства дальнейших вычислений выделим из $E_{\omega 0}(r_1)$ множитель, зависящий только от переменной z

$$\vec{E}_{\omega 0}(r_1) = e^{i\frac{\omega}{v}z}\,\frac{ie}{2\pi^2 v}\int\left\{\frac{\omega\vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon(\omega)}\right\}\frac{\exp(ik_x x_1 + ik_y y_1)}{\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right]}\, dk_x dk_y =$$

$$= e^{i\frac{\omega}{v}z}\, E_{\omega}(x_1, y_1). \tag{7.14}$$

Исходя из (7.12), рассчитаем поле излучения на больших расстояниях от излучаемого объема*. Отметим, что $\varepsilon'(r_1)$ является случайной величиной, среднее значение которой равно нулю. При нахождении среднего значения квадрата поля $\overline{E'^2_{\omega}(r)}$, нам необходимо будет усреднить квадрат выражения (7.12), т. е. найти среднее от

* Я хотел бы поблагодарить С. П. Капицу, любезно информировавшего меня о том, что аналогичный метод расчета применялся им для данной задачи. Им было рассчитано полное сечение, угловое распределение и поляризация квантов, возникающих в среде со случайными флуктуациями при условии $\lambda \gg l$.

произведения двух ε' [умноженных на определенную экспоненциальную функцию см. (7.15)], взятых в разных точках.

Рассмотрим теперь такие флуктуации, для которых длина корреляции l порядка междуатомных размеров. Это означает, что $\overline{\varepsilon'(r_1)\varepsilon'(r_2)} \neq 0$ когда $|r_1 - r_2|$ порядка или меньше междуатомных размеров, обозначаемых ниже также через l. Поскольку выражение (7.14) справедливо для прицельных параметров, превышающих междуатомные расстояния, то мы можем брать различные $E_\omega(x_1, y_1)$ в одной и той же точке. Запишем среднее значение квадрата флуктуационного поля в виде

$$\overline{|E_\omega'^2|} = \frac{\overline{D_\omega'^2}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{16\pi^2R^2\varepsilon^2}\int\left\{\left[\vec{k}'\,[\vec{k}'\cdot\vec{E}_\omega(x_1, y_1)]\right]\right\}^2 dv_{r_1}\times$$

$$\times\int \overline{e^{i\vec{k}'(\vec{r}_1-\vec{r}_2)-i\frac{\omega}{v}(z_1-z_2)}\,\varepsilon'(r_1)\,\varepsilon'(r_2)}\,dv_{r_2}. \tag{7.15}$$

Экспонентой в последнем интеграле можно пренебречь при

$$\frac{\omega}{v}\left(1-\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\theta\right)l \ll 1, \tag{7.16}$$

$$l\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\sin\theta \ll 1. \tag{7.17}$$

При выполнении (7.16) и (7.17) мы будем пользоваться, хорошо известным из теории рассеяния света, выражением для величины $h \sim \int\overline{\varepsilon'(r_1)\,\varepsilon'(r_2)}\,dv_{r_2}$. В случае, если неравенства (7.16) или (7.17) нарушаются, величина (7.15) становится малой и излучение исчезает.

Условия (7.16) и (7.17) выполняются всегда, если длина излученной волны превышает междуатомные расстояния. В случае жестких квантов, когда

$$\lambda \ll l, \tag{7.18}$$

условие (7.17) будет выполнено для $\theta \ll \frac{\lambda}{l}$ (7.17'). Условие (7.16) может выполняться только для релятивистских частиц и при учете (7.17') приводит сразу к двум неравенствам

$$\begin{aligned} \omega &\ll \frac{2c}{l}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \\ \omega &\gg \frac{2\pi Ne^2}{m_e}\,\frac{l}{c} \end{aligned} \tag{7.16'}$$

[учитывая (7.18) мы видим что $\omega > \omega_{\text{ат.}}$], весьма напоминающим соответствующие неравенства для излучения на периодически расположенных неоднородностях. Интенсивность излучения в интервале частот $d\omega$ и интервале телесного угла $d\Omega$ равна

$$I = c\sqrt{\varepsilon}\,|E'_\omega|^2 R_0^2 d\Omega d\omega. \tag{7.19}$$

После подстановки (7.14) в (7.15) нам необходимо будет произвести интегрирование по k_x и k_y. Вначале произведем интегрирование по азимутальному углу φ, отсчитываемому от плоскости, содержащей векторы $\vec{k'}$ и $\vec{v}$. Тогда линейные члены по $\cos\varphi$ исчезнут и, воспользовавшись формулой

$$\int d\varphi \left[\vec{k'}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\vec{v} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon(\omega)}\right)\right]^2 = 2\pi\left(\frac{\omega}{c^2}v - \frac{\omega}{v\varepsilon}\right)^2(k_y'^2 + k_x'^2) + \frac{2\pi}{\varepsilon^2}k_z'^2 k_\rho^2 + \frac{\pi k_\rho^2}{\varepsilon^2}(k_x'^2 + k_y'^2), \tag{7.20}$$

для углового распределения флуктуационного излучения мы получим

$$I = \frac{Ze^2\omega^4}{24c^3\varepsilon^{1/2}\pi^3 v^2}\left[(1+\cos^2\theta)\left\{\ln\frac{k_{\rho\max}^2 v^2}{\omega^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right)} - 1\right\} + 2\sin^2\theta\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right)\right]\int \varepsilon'(r_1)\,\varepsilon'(r_2)\,dv_{r_1-r_2}. \tag{7.21}$$

Здесь Z есть длина пути частицы. После интегрирования по углам излучения (пусть $\lambda \gtrsim l$) мы получим для числа излученных квантов на единицу пути

$$m = \frac{I}{h\omega\cdot Z} = \frac{1}{137}\frac{c^2}{v^2\varepsilon^{3/2}\pi}\frac{d\omega}{\omega}\left\{\ln\frac{k_{\rho\max}^2 v^2}{|1-\varepsilon v^2/c^2|\,\omega^2} - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right\}h(\omega), \tag{7.22}$$

где

$$h(\omega) = \frac{\omega^4}{c^4\cdot 6\pi}\int \varepsilon'(r_1)\,\varepsilon'(r_2)\,dv_{r_1-r_2} \tag{7.23}$$

совпадает с обычным [14] определением коэффициента экстинкции.

Если имеет место условие (7.18), то интеграл по углам нужно распространить до углов порядка $\frac{\lambda}{l}$.

Обратим внимание на то, что для идеальных газов мы имеем

$$\int \varepsilon'(r_1)\,\varepsilon'(r_2)\,dv_{r_1-r_2} = \frac{4(\sqrt{\varepsilon}-1)^2}{N}. \tag{7.24}$$

Тогда для излучения частот бо́льших атомных, мы получим

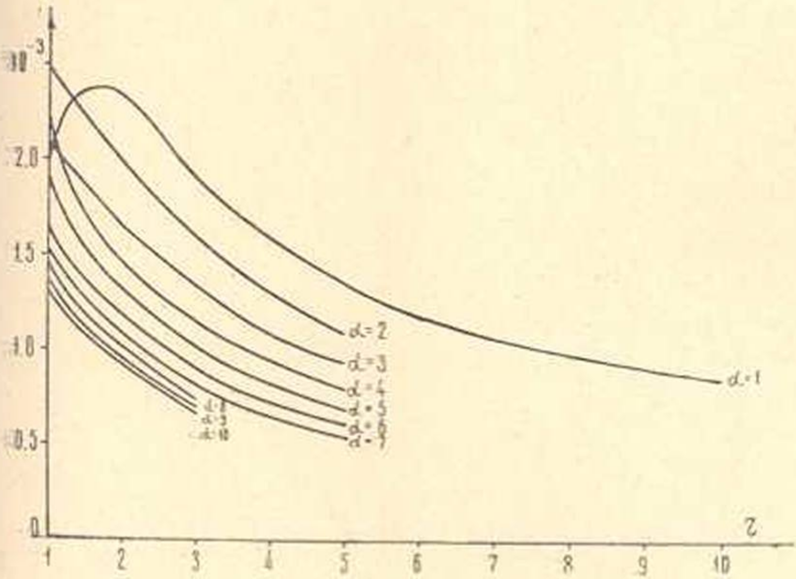
$$m \sim \frac{4r_0^2 Z^2 N}{137}\frac{d\omega}{\omega^3}\frac{c^2}{l^2}\left\{\ln\frac{k_{\rho\max}^2\cdot c^2}{\omega^2|1-v^2\varepsilon(\omega)|} - 1\right\}. \tag{7.25}$$

Здесь Z — атомный номер вещества, $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$, а N — число атомов в 1 $см^3$. Формула (7.25), как уже указывалось в [4], мало отличается от соответствующих формул для полного числа излученных квантов на 1 $см$ в среде с периодическими флуктуациями (при $N' \ll N$).

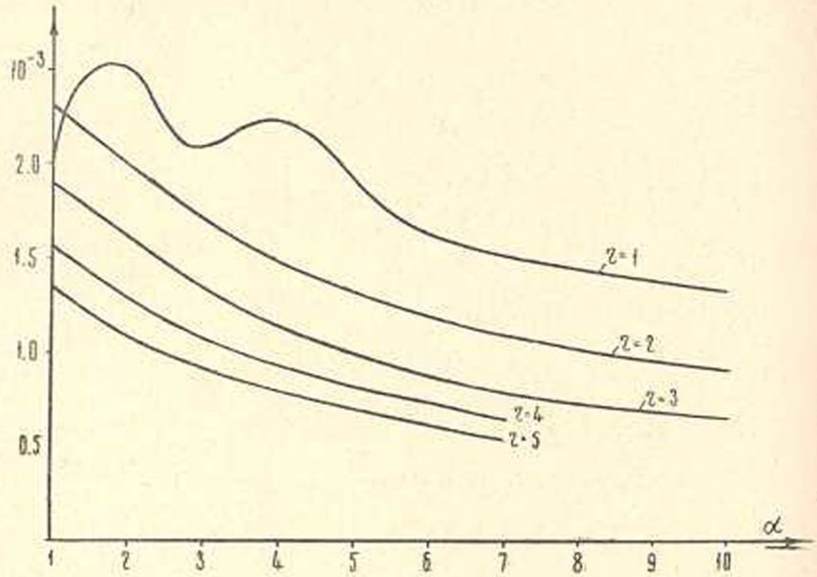
Таблица

Значения $\frac{ml}{1+\alpha}\cdot 10^3$

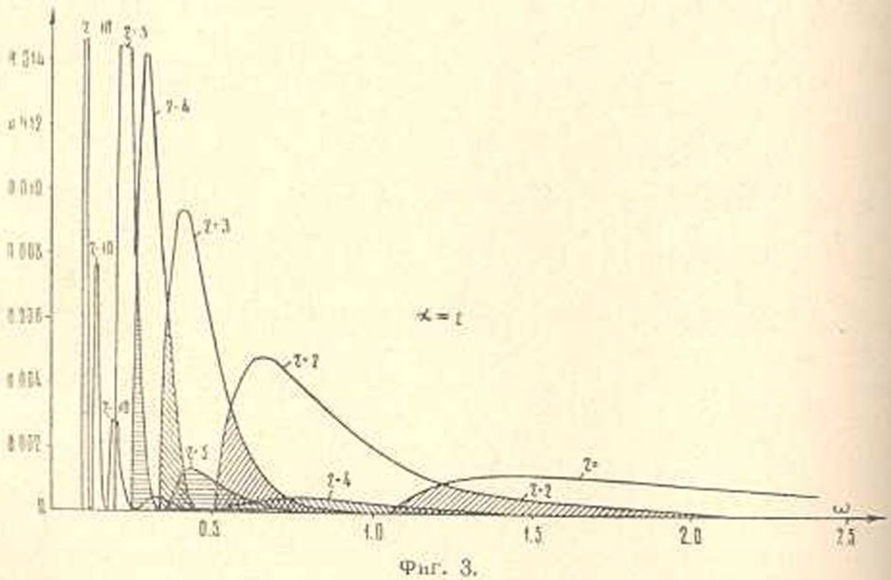
α \ r	1	2	3	4	5	10	20
1	1,94	2,34	1,89	1,57	1,35	0,86	0,54
2	2,51	1,96	1,62	1,26	1,09	—	—
3	2,09	1,63	1,34	1,08	0,95	—	—
4	2,24	1,47	1,15	0,95	0,81	—	—
5	1,93	1,33	1,01	0,82	0,68	—	—
6	1,63	1,19	0,88	0,74	0,61	—	—
7	1,53	1,10	0,80	0,64	0,54	—	—
8	1,44	1,02	0,74	—	—	—	—
9	1,38	0,95	0,69	—	—	—	—
10	1,33	0,91	0,66	—	—	—	—



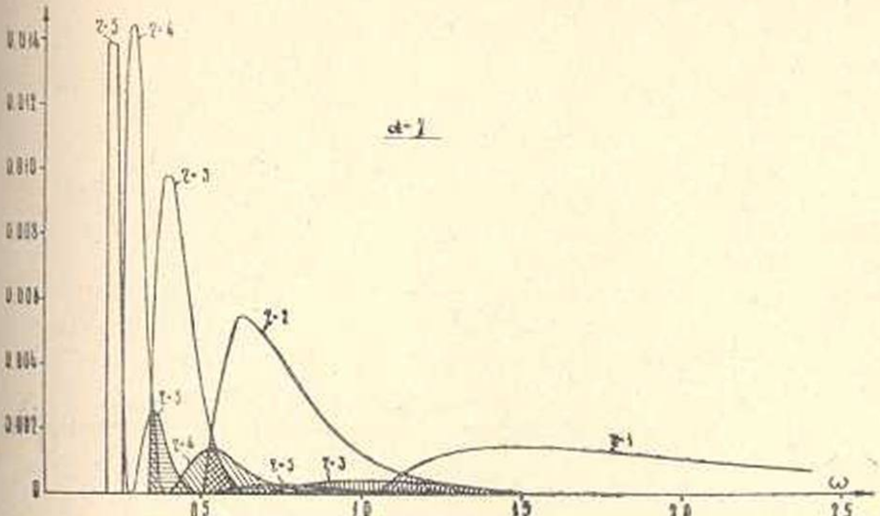
Фиг. 1.


10^{-3}
2.0
1.5
1.0
0.5
z=1
z=2
z=3
z=4
z=5
α
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

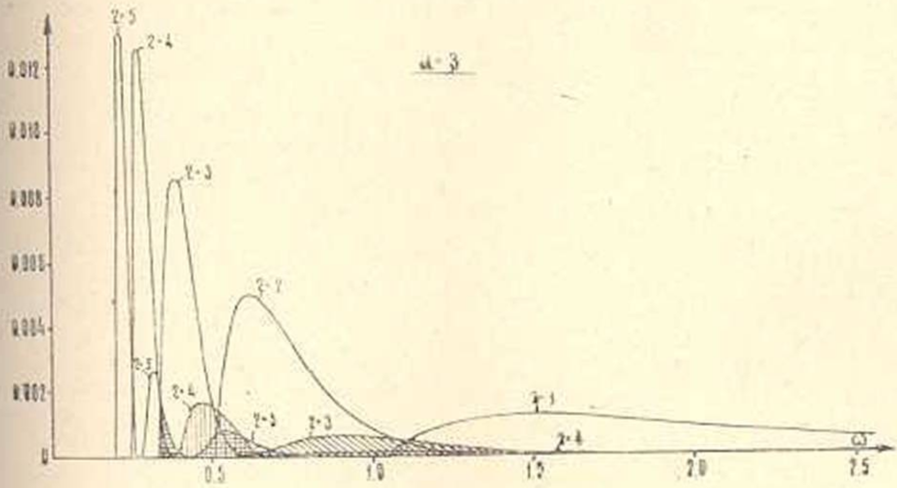
Фиг. 2.


z=4
z=3
z=2
z=5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
ω

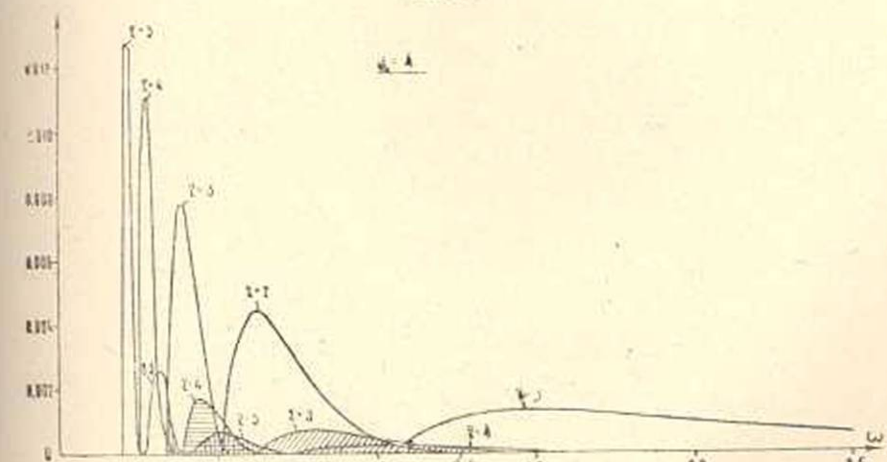
Фиг. 3.



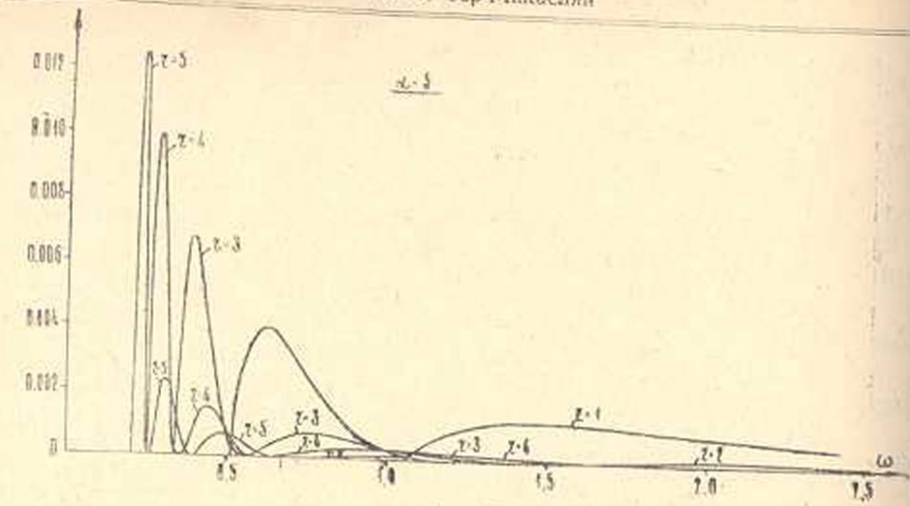
Фиг. 4.



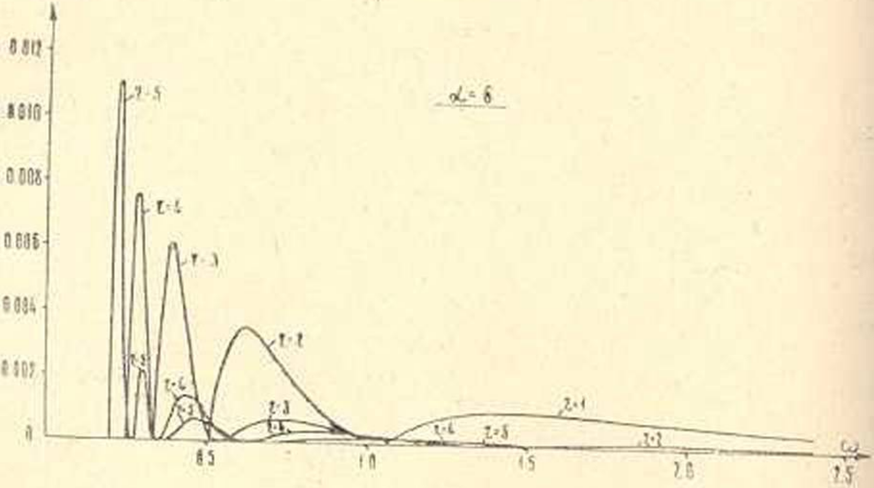
Фиг. 5.



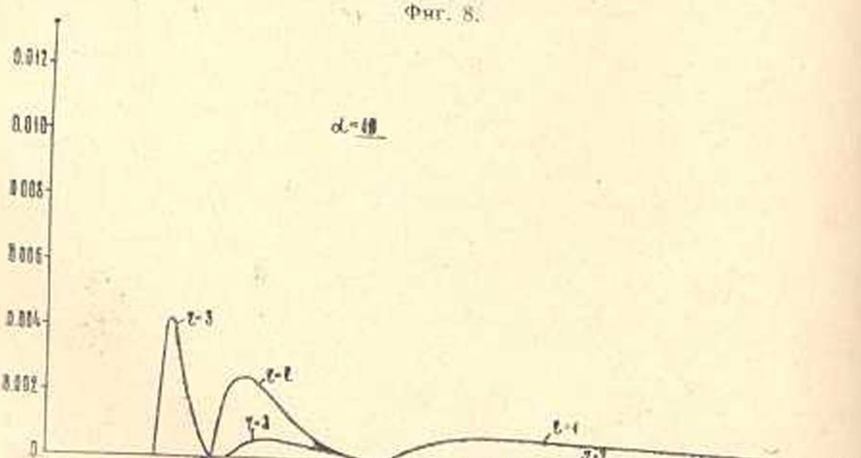
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Институт физики
АН Армянской ССР

Поступила 27 X 1960

Մ. Լ. Տեր-Միքայելյան

ԱՐԱԳ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ՈՉ-ՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում ուսումնասիրված է ճառագայթումը, որն առաջանում է, երբ լիցքավորված ուլտրառելյատիվիստիկ մասնիկը հաստատուն արագությամբ անցնում է կամայական ոչ-համասեռ միջավայրով։ Ելնելով էներգիայի և իմպուլսի պահպանման օրենքներից, պարբերական միջավայրերի համար ստացված է ճառագայթման առաջացման համար անհրաժեշտ պայմանը՝ ռեզոնանսի պայմանը (2.1)։ Պարբերական միջավայրում լրիվ ճառագայթումը հանդիսանում է տարբեր հարմոնիկների ճառագայթումների գումար։ Ճառագայթման յուրաքանչյուր հարմոնիկն ունի իր հաճախականությունների ինտերվալը (2.6) և իր էներգետիկ շեմքը (2.10)։ Յուրաքանչյուր հարմոնիկի ճառագայթումը համակենտրոնացված է իր սպեկտրի ցածր տիրույթում։ Ռեզոնանսային ճառագայթման ինտենսիվությունն ու սպեկտրը ստացված են տարբեր միջավայրերի համար։ 6-րդ պարագրաֆում հետազոտված են տարբեր պատճառներ, որոնք կարող են ազդել բանաձևերի ճշտության վրա։ Ռեզոնանսային ճառագայթման հատկությունները կարող են կիրառվել մեծ էներգիայի մասնիկների ուսումնասիրման էքսպերիմենտներում։ Վերջին պարագրաֆը նվիրված է պատահական ոչ-համասեռ միջավայրերում առաջացող ճառագայթմանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Микаелян М. Л.* Интерференционное излучение сверхбыстрых электронов. „ЖЭТФ“, **25**, 1953, 296.
2. *Тер-Микаелян М. Л.* Излучение и рассеяние быстрых частиц в среде. „Изв. АН СССР, серия физическая“, XIX, 1955, 657.
3. *Файнберг Е. Л.* Неупругие диффракционные процессы при высоких энергиях. „УФН“, **68**, 193, 1956.
4. *Тер-Микаелян М. Л.* Излучение быстрой частицы в неоднородной среде. „ДАН СССР“, **134**, 318, 1960.
5. *Тер-Микаелян М. Л., Гагазян А.* Резонансные эффекты при излучении в слоистой среде. „ЖЭТФ“, **39**, 1693, 1960.
6. *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* (см. нобелевскую лекцию Франка И. М.) Оптика источников света, движущихся в преломляющих средах. „УФН“, **18**, вып. 3, т. **17**, вып. 1.
7. *Файнберг Я. Б., Хижняк. Н. А.* Потери энергии заряженной частицы при прохождении через слоистый диэлектрик. „ЖЭТФ“, **32**, 883, 1957.
8. См., напр., *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Гостехиздат, 1957.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, том IV, М., Гостехиздат, 1957.
10. *Ватсон.* Теория бесселевых функций. М., Гостехиздат, 19 7.
11. *Аматуни А. Ц., Корхмазян Н. А.* Излучение заряженной частицы в среде с периодически меняющейся плотностью. „Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, **13**, № 5, 960.
12. *Гинзбург В. Л., Эйдман В. Я.* О силе реакции излучения при движении заряда в среде. „ЖЕТФ“, **35**, 1503, 1958.
13. *Гарибян Г. М.* К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицы. „ЖЕТФ“, **37**, 527, 1959.
14. См., напр., *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. Алоян

О динамической устойчивости параболической арки переменного поперечного сечения

Статической устойчивости и свободным колебаниям параболических арок посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных исследователей.

Сравнительно мало исследованы задачи о динамической устойчивости параболических арок. Насколько нам известно, единственной работой, посвященной решению этой задачи для пологих арок, является работа Н. Г. Бондаря [5], однако его решение содержит ошибки [2, 3].

В настоящей статье рассматривается динамическая устойчивость двухшарнирных и бесшарнирных параболических арок переменного сечения любого подъема, нагруженных вертикальной периодической нагрузкой, равномерно распределенной вдоль пролета арки.

Решение задачи дается применением приближенного метода Бубнова-Галеркина.

§ 1. Вывод основного дифференциального уравнения задачи и его решение

Рассмотрим тонкий, упругий криволинейный стержень (фиг. 1), ось которого и все приложенные к нему силы лежат в одной и той же плоскости xoy. Рассмотрим перемещения точек оси стержня в плоскости xoy. Обозначим через u и v проекции перемещения соответственно на оси x и y.

Координаты точек оси стержня после деформации будут

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + u, \\ y_1 &= y + v, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где $y = f(x)$ — уравнение осевой линии недеформированоого криволинейного стержня, x — абсцисса точки.

Рассмотрим такие отклонения от первоначальной недеформированной формы равновесия, при которых удлинение осевой линии стержня было бы малой величиной второго порядка. Это условие дает следующую зависимость между перемещениями u и v

$$u' = -y'v', \tag{1.2}$$

полученную Л. С. Гильманом в работе [6]. В этой же работе дано изменение кривизны осевой линии криволинейного стержня

$$\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho}=\frac{v''}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad (1.3)$$

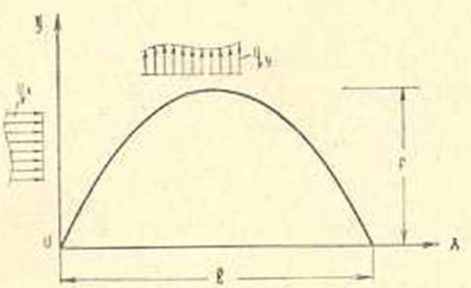
и условие, выражающее отсутствие поворота какого либо сечения

$$v'=0, \qquad (1.4)$$

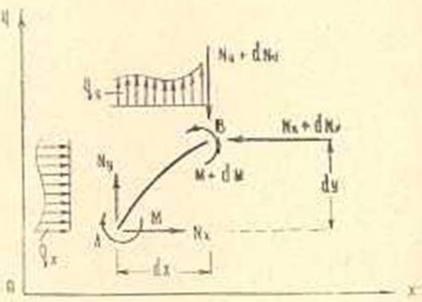
где ρ — радиус кривизны оси стержня в недеформированном состоянии, ρ_1 — радиус кривизны оси стержня после деформации.

Выделим бесконечно малый элемент AB дуги стержня (фиг. 2) и составим уравнения его равновесия в декартовой системе координат. Отбрасывая малые величины высших порядков, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dx}-y'q_x=0,\\ &\frac{dN_y}{dx}-q_y=0,\\ &\frac{dM}{dx}-N_y+y'N_x=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Здесь N_x и N_y — проекции главного вектора внутренних сил в сечении A соответственно на оси x и y, M — изгибающий момент, q_x и q_y — проекции внешней нагрузки соответственно на оси x и y.

Если ось стержня совпадает с веревочной кривой данной нагрузки (мы в дальнейшем будем рассматривать именно такие стержни), то стержень будет испытывать только сжатие или растяжение, но не изгиб. Тогда во всех сечениях изгибающий момент $M=0$ и уравнения равновесия для такого стержня примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_x^0}{dx}-y'q_x=0,\\ &\frac{dN_y^0}{dx}-q_y=0,\\ &-N_y^0+y'N_x^0=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

где N_x^0 и N_y^0 — соответственно значения N_x и N_y в безмоментном состоянии равновесия.

Так например, если $q_x = 0$, $q_y = -q = \text{const}$, из (1.6) получаем $N_x^0 = \dfrac{ql^2}{8f}$, $N_y^0 = \dfrac{1}{2}ql - qx$ (l — расстояние между концевыми сечениями по горизонтали), а осевая линия — квадратная парабола.

Предположим, что внешняя нагрузка $q(x, t)$ есть некоторая периодическая функция времени t. Тогда невозмущенное безмоментное напряженное состояние можно определить из системы уравнений (1.6), которая примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} N_x^0(x, t) - y' q_x(x, t) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x} N_y^0(x, t) - q_y(x, t) = 0, \\ &- N_y^0(x, t) + y' N_x^0(x, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Это будет верно, если пренебречь силами инерции продольных колебаний (считаем, что стержень находится вне резонанса продольных колебаний).

Пусть теперь какой то внешний импульс отклонил стержень от его первоначального недеформированного состояния и заставил колебаться около этого состояния. Тогда во всех сечениях появятся изгибающие моменты, а $N_x^0(x, t)$ и $N_y^0(x, t)$ получат малые приращения. Приращения получат также координаты точек оси, которые могут быть определены из (1.1).

Уравнение изгибных колебаний стержня можно получить из уравнений равновесия (1.5) воспользовавшись методом кинетостатики. Для этого, кроме действующих на стержень сил следует учесть еще и силы инерции, вызванные поперечными смещениями точек оси стержня. Влияниями продольных сил инерции, а также сил инерции, связанных с вращением поперечных сечений относительно своих главных осей, будем пренебрегать.

После учета всех сделанных выше замечаний, система уравнений (1.5) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}(N_x^0 + \delta N_x) - (q_x + p_x)\, y_1' = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}(N_y^0 + \delta N_y) - (q_y + p_y) = 0, \\ &\frac{\partial M}{\partial x_1} - (N_y^0 + \delta N_y) + (N_x^0 + \delta N_x)\, y_1' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

где δN_x и δN_y — весьма малые приращения N_x и N_y,

$$p_x = -m\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad p_y = -m\sqrt{1 + y'^2}\, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1.9}$$

m — масса единицы длины стержня.

Имея в виду (1.1), получим

$$y_1' = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}}{1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}}{1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}}. \tag{1.10}$$

Подставляя (1.10) в (1.8), учитывая (1.7) и отбрасывая малые величины высших порядков, система уравнений (1.8) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \delta N_x}{\partial x} - q_x \frac{\partial v}{\partial x} - y' p_x = 0, \\ &\frac{\partial \delta N_y}{\partial x} - q_y \frac{\partial u}{\partial x} - p_y = 0, \\ &\frac{\partial M}{\partial x} + N_x^0 (1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} - \delta N_y + y' \delta N_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Исключив из (1.11) δN_x и δN_y, подставив значения p_x и p_y из (1.9) и значение изгибающего момента

$$M = B(x)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{B(x)}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{1.12}$$

получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[N_x^0 (1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x}\right] + \left(q_x y' \frac{\partial v}{\partial x} - q_y \frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$
$$+ m\sqrt{1 + y'^2}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v - y'u) + y'' \delta N_x = 0, \tag{1.13}$$

где $B(x)$ — жесткость изгиба в плоскости кривизны стержня.

Уравнение (1.13) и есть дифференциальное уравнение динамической устойчивости криволинейного стержня, очерченного по веревочной кривой данной нагрузки. При $y = 0$ (1.13) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x^0 \frac{\partial v}{\partial x}\right) + m(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

и представляет известное дифференциальное уравнение динамической устойчивости прямолинейного стержня.

Если $q_x = 0$, $q_y = -q(t)$ (случай неповорачивающихся сил), то из (1.7) будем иметь

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) \quad \text{и} \quad N_x^0 = \frac{l^2}{8f} q(t). \tag{1.14}$$

В этом случае (1.13) принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + q(t) \frac{\partial}{\partial x}\left[u + \frac{l^2}{8f}(1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x}\right] +$$
$$+ m(x)\sqrt{1 + y'^2}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v - y'u) = 0 \tag{1.15}$$

и представляет собой дифференциальное уравнение динамической устойчивости параболической арки нагруженной периодической, равномерно распределенной вдоль пролета вертикальной нагрузкой $q(t)$. Весьма малая величина $y''\delta N_x$ в (1.15) не учтена. В (1.14) f — стрела подъема, l — пролет арки.

Решение (1.15) ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} v(x, t) &= V(x)\,T(t), \\ u(x, t) &= U(x)\,T(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Нетрудно убедиться что точное разделение переменных подстановкой (1.16) невозможно. Поэтому задачу приходится решать приближенными методами, среди которых наиболее удобным является метод Бубнова-Галеркина.

Пользуясь этим методом (переменные разделяются приближенно [7]), для функции $T(t)$ получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2\left|1 - \frac{q(t)}{q_{kp}}\right|T(t) = 0, \tag{1.17}$$

где

$$\omega^2 = \frac{\int\limits_0^l \left\{\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{d^2V}{\partial x^2}\right]\right\}Vdx}{\int\limits_0^l m(x)\sqrt{1+y'^2}\,(V-y'U)\,Vdx} \tag{1.18}$$

есть приближенное значение квадрата частоты свободных плоских колебаний ненагруженной параболической арки, а

$$q_{kp} = -\frac{\int\limits_0^l \left\{\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{d^2V}{dx^2}\right]\right\}Vdx}{\int\limits_0^l \left\{\frac{d}{dx}\left[U + \frac{l^2}{8f}(1+y'^2)\frac{dV}{dx}\right]\right\}Vdx} \tag{1.19}$$

есть приближенное значение равномерно распределенной вдоль пролета критической нагрузки.

Если $q(t) = q_1 + q_0\cos pt$, то уравнение (1.17) приводится к известному уравнению Матье

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega_q^2(1 - \mu\cos pt)\,T(t) = 0, \tag{1.17*}$$

где

$$\omega_q^2 = \omega^2\left(1 - \frac{q_1}{q_{kp}}\right) \tag{1.20}$$

— квадрат частоты свободных плоских колебаний параболической арки нагруженной постоянной составляющей силы $q(t)$, а

$$\mu = \frac{q_0}{q_{kp} - q_1} \tag{1.21}$$

— коэффициент пульсации.

Известно, что при определенных соотношениях между коэффициентами ω_q и μ решение (1.17*) — $T(t)$ неограниченно возрастает. Тогда, согласно (1.16), неограниченно возрастут и перемещения. Поэтому первоначальная параболическая форма арки станет динамически неустойчивой. Совокупность всех тех точек в плоскости параметров $\left(\mu, \frac{2\omega_q}{p}\right)$, для которых $T(t)$ неограниченно возрастает, образует области динамической неустойчивости, наличие которых характерно для параметрического резонанса. Практически наиболее опасной является первая область динамической неустойчивости, границы которой определяются в [1]

$$1 - \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 - \frac{55}{512}\mu^3 + \cdots < \frac{4\omega_q^2}{p^2} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 + \frac{55}{512}\mu^3 + \cdots \tag{1.22}$$

В общем случае изменения внешней нагрузки по закону $q(t) = q_1 + q_0\Phi(t)$, где $\Phi(t) = \Phi(t+\tau)$ — периодическая функция с периодом τ, уравнение (1.17) приводится к уравнению Хилла

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega_q^2[1 - \mu\Phi(t)]\,T(t) = 0.$$

В этом случае уравнение можно решить методом разложения $T(t)$ по малому параметру μ. Условие отсутствия „вековых" членов в решении $T(t)$, т. е. требование периодичности решений, дает границы областей динамичкской неустойчивости.

Для определения областей динамической неустойчивости сначала необходимо в каждом частном случае определить ω_q^2 и μ из (1.18)—(1.21).

Перейдем к определению этих коэффициентов.

§ 2. Двухшарнирная параболическая арка переменного поперечного сечения

Граничные условия двухшарнирной арки имеют вид

$$u = v = M = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание (1.12) и (1.16) перепишем условия (2.1) в виде

$$U = V = V'' = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l. \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать кососимметричную форму отклонения арки от ее первоначального недеформированного состояния. Как показывают вычисления, эта форма хорошо аппроксимируется функцией [6]

$$V(x) = a \sin \frac{2\pi}{l} x, \tag{2.3}$$

удовлетворяющей (2.2).

С учетом (1.16) условие (1.2) примет вид

$$U'(x) = -y'V'(x). \tag{2.4}$$

Подставляя значения y' и $V'(x)$ соответственно из (1.14) и (2.3) в (2.4), интегрируя и учитывая, что $U(0) = U(l) = 0$, для $U(x)$ получим следующее выражение

$$U(x) = a\left[\frac{4f}{l}(2x-l)\sin\frac{2\pi}{l}x + \frac{4f}{\pi l}\left(\cos\frac{2\pi}{l}x - 1\right)\right]. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь два частных случая изменения поперечного сечения арки, которые с точки зрения их практического применения представляются наиболее важными.

а) *Первый случай.* Сечение арки прямоугольное; высота остается постоянной, а ширина меняется по закону

$$b = \frac{b_{кл}}{\cos\psi} = b_{кл}\sqrt{1 + y'^2},$$

где $b_{кл}$ — ширина ключевого сечения, ψ — угол наклона к горизонту касательной к оси арки.

Тогда для жесткости при изгибе и массы единицы длины арки в сечении с абсциссой x будем иметь

$$B(x) = \frac{B_{кл}}{\cos\psi} = B_{кл}\sqrt{1 + y'^2}; \quad m(x) = m_{кл}\sqrt{1 + y'^2},$$

где $B_{кл} = E\frac{b_{кл}h^3}{12}$ — жесткость при изгибе ключевого сечения, $h = \mathrm{const}$ — высота сечений, $m_{кл} = \frac{\gamma}{g}b_{кл}h$ — масса единицы длины в ключевом сечении, γ — объемный вес, E — модуль упругости материала арки, g — ускорение силы тяжести.

Для этого случая изменения поперечных сечений, выражение (1.18) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{B_{кл}\int\limits_0^l \frac{d^4V}{dx^4}V\,dx}{m_{кл}\int\limits_0^l (1 + y'^2)(V - y'U)\,V\,dx}, \tag{2.6}$$

а выражение (1.19), после интегрирования по частям его знаменателя с учетом (2.2), приводится к виду

$$q_{kp}=\frac{B_{кл}\int\limits_0^l \frac{d^4V}{dx^4}V\,dx}{\int\limits_0^l\left[U+\frac{l^2}{8f}(1+y'^2)\frac{dV}{dx}\right]\frac{dV}{dx}dx} \tag{2.7}$$

Подставляя $V(x)$, $U(x)$ из (2.3), (2.5) в (2.6) и (2.7), получаем приближенное значение квадрата частоты и значение критической нагрузки

$$\omega^2=\varphi_1^2\frac{B_{кл}}{m_{кл}l^4},\qquad q_{kp}=K_1\frac{B_{кл}}{l^3},$$

где

$$\varphi_1^2=\frac{8\pi^4}{\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{\pi^2}+\frac{10}{3}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2+16\left(\frac{8}{5}+\frac{4}{\pi^2}-\frac{78}{\pi^4}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^4},$$

$$K_1=\frac{96\pi^4\frac{f}{l}}{3\pi^2+(16\pi^2+48)(f/l)^2}.$$

Значения коэффициентов частоты φ_1 и устойчивости K_1 в зависимости от $\frac{f}{l}$ приведены в таблицах 1 и 2.

б) *Второй случай.* Сечение арки прямоугольное; ширина остается постоянной, а высота меняется по закону

$$h=\frac{h_{кл}}{\cos\varphi}=h_{кл}\sqrt{1+y'^2}.$$

Тогда для жесткости при изгибе и массы единицы длины арки в сечении с обсциссой x будем иметь

$$B(x)=\frac{B_{кл}}{\cos^3\varphi}=B_{кл}(1+y'^2)^{3/2},\quad m(x)=m_{кл}\sqrt{1+y'^2}. \tag{2.8}$$

Применяя двукратное интегрирование по частям к числителям выражений (1.18), (1.19), учитывая (2.2) и (2.8), получим

$$\omega^2=\frac{B_{кл}\int\limits_0^l(1+y'^2)\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)^2dx}{m_{кл}\int\limits_0^l(1+y'^2)(V-y'U)\,V\,dx}, \tag{2.9}$$

$$q_{kp}=\frac{B_{кл}\int\limits_0^l(1+y'^2)\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)^2dx}{\int\limits_0^l\left[U+\frac{l^2}{8f}(1+y'^2)\frac{dV}{dx}\right]\frac{dV}{dx}dx} \tag{2.10}$$

Подставив $V(x)$, $U(x)$ из (2.3), (2.5) в (2.9) и (2.10), получаем приближенное значение квадрата частоты и значение критической нагрузки

$$\omega^2 = \varphi_2^2 \frac{B_{кл}}{m_{кл} l^4}, \qquad q_{кр} = K_2 \frac{B_{кл}}{l^3},$$

где

$$\varphi_2^2 = \frac{\frac{8}{3}\pi^2 \left[3\pi^2 + (16\pi^2 - 24)\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]}{\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{16}{3}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2 + 16\left(\frac{8}{5} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{78}{\pi^4}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^4},$$

$$K_2 = \frac{32\pi^2 \left[3\pi^2 + (16\pi^2 - 24)\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]\frac{f}{l}}{3\pi^2 + (16\pi^2 + 48)\left(\frac{f}{l}\right)^2}.$$

Значения коэффициентов частоты φ_2 и устойчивости K_2 приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
φ_1	37,32	32,01	25,78	20,19	15,75	12,40	8,03	5,53
φ_2	38,16	34,79	30,58	26,51	23,00	20,11	15,86	12,99
φ_3	59,64	53,16	44,87	36,71	29,67	4,01	16,12	11,32
φ_4	61,28	58,77	54,96	50,46	45,88	41,60	34,41	28,97

§ 3. Бесшарнирная параболическая арка переменного поперечного сечения

Граничные условия бесшарнирной арки с учетом (1.4) и (1.16) можно написать в виде

$$U(x) = V(x) = V'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l. \tag{3.1}$$

Кососимметричную форму отклонения арки от ее первоначального недеформированного состояния аппроксимируем функцией [6]

$$V(x) = ax(l - x)\sin\frac{2\pi}{l}x, \tag{3.2}$$

удовлетворяющей (3.1). Подставив значения y' и $V'(x)$ соответственно из (1.14) и (3.2) в (2.4), проинтегрировав и учитывая, что $U(0) = U(l) = 0$, для $U(x)$ получим следующее выражение

$$U(x) = -a\frac{4f}{l^2}\left\{\left[\frac{l}{\pi}x(x - l) - \frac{l^3}{2\pi^3}\right]\cos\frac{2\pi}{l}x + \right.$$

$$+\left[2x^3-3lx^2+l^2\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)x+\frac{l^3}{2\pi^2}\right]\sin\frac{2\pi}{l}x+\frac{l^3}{2\pi^3}\Big\}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим опять вышеупомянутые два случая изменения поперечных сечений арки.

а) *Первый случай.* Здесь выражения (1.18) и (1.19) принимают вид, аналогичный (2.6) и (2.7). Подставляя $V(x)$ и $U(x)$ из (3.2), (3.3) в (2.6), (2.7), получим

$$\omega^2=\varphi_3^2\frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}}l^4},\qquad q_{kp}=K_3\frac{B_{\text{кл}}}{l^3},$$

где

$$\varphi_3^2=\frac{A}{B},\qquad K_3=\frac{A}{C}\frac{f}{l}.$$

$$A=\frac{3}{4}+4\pi^2+\frac{4}{15}\pi^4,$$

$$B=\frac{1}{60}+\frac{3}{64\pi^4}+\left(\frac{8}{105}+\frac{2}{15\pi^2}+\frac{11}{2\pi^4}-\frac{27}{8\pi^6}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{64}{315}+\frac{32}{35\pi^2}+\frac{76}{\pi^4}-\frac{486}{\pi^6}-\frac{2025}{\pi^8}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^4,$$

$$C=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{16\pi^2}+\frac{\pi^2}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}-\frac{3}{8\pi^2}+\frac{3}{4\pi^4}+\frac{2\pi^2}{105}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2.$$

Некоторые значения φ_3 и K_3 приведены в таблицах 1 и 2.

б) *Второй случай.* Здесь (1.18) и (1.19) принимают вид, аналогичный (2.9) и (2.10). Подставляя $V(x)$ и $U(x)$ из (3.2), (3.3) в (2.9), (2.10), получим

$$\omega^2=\varphi_4^2\frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}}l^4},\qquad q_{kp}=K_4\frac{B_{\text{кл}}}{l^3},$$

где

$$\varphi_4^2=\frac{D}{B},\qquad K_4=\frac{D}{C}\cdot\frac{f}{l},$$

$$D=\frac{3}{4}+4\pi^2+\frac{4}{15}\pi^4+\left(\frac{44}{3}+\frac{448}{15}\pi^2+\frac{64\pi^4}{105}-\frac{10}{\pi^2}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2,$$

а B и C имеют те же значения, что и в первом случае.

Некоторые значения φ_4 и K_4 приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 2

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1	
	29.50	49.00	—	57.00	52.00	41.00	37.0	1
K_1	29.53	49.42	58,27	59.80	54.0[illegible]	46.3[illegible]	39.70	2
	0.10	0.85	—	4.90	4.01	5.34	7.31	3
	30.70	59,80	81,10	101.00	142.00	[illegible]70.00	193.00	1
K_2	30.86	58 36	81,99	[illegible]03.0[illegible]	142.14	180.52	219.27	2
	0,53	−2,41	1,09	2.04	0.10	6.18	13,61	3
	62.30	[illegible]12.00	—	154.00	15[illegible].00	133.00	1[illegible]8.00	1
K_3	62.14	111.02	141,38	155.6[illegible]	155,73	141,65	125.[illegible]1	2
	−0,26	−0.87	—	[illegible].04	2,46	6.5[illegible]	6.53	3
	65,[illegible]0	134.00	204.00	277.00	444.00	[illegible]87.00	700.00	1
K_4	65,59	135,[illegible]9	212.06	293 91	467,21	645,[illegible]2	824.07	2
	0.14	1.26	3.95	6,10	5,22	9,93	17,72	3

Примечание. В строке 1 приведены значения коэффициентов устойчивости по А. Н. Диннику [8], в строке 2 приведены значения коэффициентов устойчивости, полученные в настоящей работе, в строке 3 — разность в процентах.

* * *

Таким образом, для нагрузки вида $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$ исследование динамической устойчивости параболической арки приближенно приводится [7] к уравнению (1.17*) типа Матье. Коэффициенты ω_q и μ уравнения (1.17*), необходимые для построения областей динамической неустойчивости по (1.22), определяются выражениями (1.20) и (1.21), в которые входят критическая нагрузка и частота свободных колебаний ненагруженной арки. Для рассмотренных двух случаев изменения поперечных сечений двухшарнирной и бесшарнирной параболических арок переменного поперечного сечения получены приближенные (в смысле метода Галеркина) выражения для частот основной кососимметричной формы собственных колебаний и критической нагрузки при кососимметричной форме потери статической устойчивости по двум полуволнам.

Чтобы судить о точности приближенных выражений для ω, в таблице 3 приведены значения коэффициента частоты, вычисленные в работе [4] по оценкам А. Ф. Смирнова для бесшарнирной параболической арки при первом случае изменения поперечных сечений.

Таблица 3

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
φ_3^+	63.0	56,1	46,5	36,7	29,6
φ_3^-	57,0	51,0	42,6	34,7	29,0
φ_3	59,6	53,2	44,9	36,7	29,7

В таблице 3 φ_3^+ и φ_3^- — оценки коэффициента частоты сверху и снизу, φ_3 — коэффициент частоты полученной в настоящей работе (см. таблицу 1). Табличные данные свидетельствуют об удовлетворительной точности выражения для φ_3. Точность приближенного выражения φ_3 является одновременно косвенной оценкой для остальных коэффициентов частоты.

При $\dfrac{f}{l}=0{,}1\div0{,}8$ отклонения значений коэффициентов устойчивости от точных, как это видно из таблицы 2, в большинстве случаев составляет менее $6{,}5\%$. Имея это в виду, можно сказать, что приближенные выражения для q_{kp}, полученные в настоящей работе, дают удовлетворительные для практических целей результаты.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 15 III 1961

Մ. Հ. Ալոյան

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ԿԱՄԱՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է պարաբոլական առանցք և փոփոխական կտրվածք ունեցող կամարների դինամիկ կայունության խնդիրը: Ստացված է խնդրի հիմնական (1.15) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի լուծումը Բուբնով-Գալյորկինի մոտավոր եղանակով բերվում է (1.17) դիֆերենցիալ հավասարմանը, իսկ վերջինս, կախված ազդող արտաքին, ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող բեռից, բերվում է Մատյեի կամ Խիլլի դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Երկհոդակապային և ամրակցված ծայրերով կամարների, նրանց կտրվածքի փոփոխման երկու հիմնական դեպքերի համար որոշված են՝ կրիտիկական ստատիկական բեռի մեծությունը, սեփական տատանումների հաճախականությունը, իսկ այնուհետև՝ Մատյեի դիֆերենցիալ հավասարման գործակիցները և տրված է դինամիկ անկայունության տիրույթը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боднер Б. А.* Устойчивость пластин под действием продольных периодических сил. „ПММ“, 2, вып. 1, 1938.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
3. *Болотин В. В.* Замечания к статье Н. Г. Бондаря „Динамическая устойчивость и колебания бесшарнирных параболических арок“. „Инженерный сборник“, **17**, 1953.
4. *Бондарь Н. Г.* О частоте плоских, свободных, незатухающих колебаний бесшарнирных параболических и цепных арок переменного сечения. „Инженерный сборник“, **11**, 1952.

5. *Бондарь Н. Г.* Динамическая устойчивость и колебания бесшарнирных параболических арок. „Инженерный сборник“, **13**, 1952.
6. *Гильман Л. С.* К вопросу об устойчивости параболических арок, нагруженных вертикальной равномерно-распределенной нагрузкой. „Известия Ленинградского политехнического института“, **33**, 1931.
7. *Джанелидзе Г. Ю.* Теоремы о разделении переменных в задачах о динамической устойчивости упругих систем. „Труды Ленинградского института инженеров водного транспорта“, выпуск XX, М.—Л., 1953.
8. *Динник А. Н.* Устойчивость арок. Гостехиздат, М.—Л., 1946.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

М. М. Манукян

Установившаяся ползучесть скручиваемого конического стержня

В. В. Соколовским [1] получено точное решение задачи о пластическом кручении конического стержня при степенном законе упрочнения материала, когда боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий.

В настоящей заметке дается точное решение задачи об установившейся ползучести скручиваемого конического стержня, когда на боковой поверхности стержня приложена нагрузка по степенному закону, а основание испытывает действие крутящего момента.

При решении этой задачи в качестве физической гипотезы принимаем степенной закон связи между скоростью деформации ползучести и напряжением [2].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим задачу о кручении стержней переменного диаметра, находящихся в условиях установившейся ползучести.

Пусть имеем круглый вал переменного диаметра, нижнее сечение которого закреплено, а верхнее—испытывает действие момента M. Предположим, что момент M направлен параллельно оси стержня. Направим ось z цилиндрических координат $r\theta z$ по оси стержня, а плоскость $z=0$ совместим с нижним сечением стержня.

Положим, как и при кручении упругих стержней, что компоненты напряжений и скорости деформаций, за исключением $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, $\gamma_{r\theta}$ и $\gamma_{\theta z}$, равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = 0, \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \gamma_{zr} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В силу теории установившейся ползучести, компоненты напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$ выражаются через компоненты скорости деформации следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} = f(T)\,\tau_{r\theta}, \\ \gamma_{\theta z} = f(T)\,\tau_{\theta z}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$T^2=\tau_{r\theta}^2+\tau_{\theta z}^2, \quad \Gamma^2=\gamma_{r\theta}^2+\gamma_{\theta z}^2, \tag{1.3}$$

где T и Γ — соответственно интенсивность касательных напряжений и скорости сдвига.

Здесь предположено, что материал скручиваемого стержня следует законам теории установившейся ползучести в наиболее общей форме, а именно: интенсивность скорости деформации Γ является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений T,

$$\Gamma=f(T)T, \qquad T=f^*(\Gamma)\Gamma, \tag{1.4}$$

где $f(T)$ или $f^*(\Gamma)$ — некоторая функция, характеризующая материал стержня.

В данном случае уравнение равновесия в цилиндрических координатах примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(r^2\tau_{\theta z})=0 \tag{1.5}$$

и будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, положить

$$\tau_{r\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad \tau_{\theta z}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{1.6}$$

где функция напряжений Φ зависит от r и z.

Уравнение неразрывности деформаций будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\gamma_{\theta z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\gamma_{r\theta}\right)=0. \tag{1.7}$$

Подставляя выражения $\gamma_{\theta z}$ и $\gamma_{r\theta}$ из соотношения (1.2) в (1.7) и пользуясь (1.6), получим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^3}f(T)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r^3}f(T)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]=0. \tag{1.8}$$

Пусть между интенсивностями касательных напряжений и скорости деформаций существует степенной закон зависимости, т. е.

$$T=K\Gamma^{\mu}, \tag{1.9}$$

где K, μ — числовые параметры, определяемые из опыта, причем $0<\mu<1$.

Тогда основные уравнения, связывающие компоненты касательных напряжений и скорости сдвига принимают вид

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\Gamma}{T}\tau_{r\theta}, \qquad \gamma_{\theta z}=\frac{\Gamma}{T}\tau_{\theta z}. \tag{1.10}$$

Вносся (1.10) в (1.7) и пользуясь соотношениями (1.3), (1.6) и (1.9), найдем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r^{\frac{2+\mu}{\mu}}}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1-\mu}{2\mu}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r^{\frac{2+\mu}{\mu}}}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1-\mu}{2\mu}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}=0. \quad (1.11)$$

Пусть боковая поверхность стержня находится под действием внешней нагрузки, закон распределения которой определяется следующей формулой

$$\tau_{r\theta}l+\tau_{\theta z}m=p\,[r,z(r)], \quad (1.12)$$

где l, m — направляющие косинусы внешней нормали к контуру, а p — проекция полного касательного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения вала.

На оси сплошного вала напряжения равны нулю. Поэтому функция на оси z должна быть постоянной. Не нарушая общности решения, можно принять, что на оси вала

$$\Phi(0,z)=0. \quad (1.13)$$

Таким образом, решение задачи установившейся ползучести скручиваемого вала переменного диаметра, по боковой поверхности которого приложены внешние силы, приводится к решению дифференциального уравнения (1.11) с условиями (1.12) и (1.13).

§ 2. Кручение конического стержня

Рассмотрим задачу о кручении конического стержня с углом раствора 2γ. Направим ось z цилиндрических координат $r0z$ по оси конического стержня, а центр координат поместим в вершине конуса.

Пусть боковая поверхность конуса нагружена по степенному закону, т. е.

$$\tau_{\theta z}m=ar^{\mu}, \quad (2.1)$$

где

$$a=-\frac{M}{2\pi}\frac{3+\mu}{R^{2+\mu}}\sin\gamma, \quad (2.2)$$

R — радиус основания.

Ищем решение уравнения (1.11) в виде

$$\Phi=\Phi(r). \quad (2.3)$$

Тогда (1.11) примет следующий вид

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^{\frac{2+\mu}{\mu}}}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]=0. \quad (2.4)$$

Интегрируя (2.4) и пользуясь условием (1.13), получим

$$\Phi = \frac{C}{3+\mu} r^{3+\mu}, \tag{2.5}$$

где C — постоянная интегрирования.

Крутящий момент M выражается формулой

$$M = 2\pi \int_0^R r^2 \tau_{\theta z} dr. \tag{2.6}$$

Подставляя значение Φ из (2.5) в (2.6) и пользуясь (1.6), найдем

$$C = \frac{M}{2\pi} \frac{3+\mu}{R^{3+\mu}}. \tag{2.7}$$

Тогда окончательно для функции напряжений получим

$$\Phi = \frac{M}{2\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^{3+\mu}. \tag{2.8}$$

Нетрудно убедиться, что решение (2.8) удовлетворяет контурному условию (2.1).

Подставляя значение Φ из (2.8) в (1.6), получим выражения компонентов касательных напряжений

$$\tau_{r\theta} = 0,$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{M}{2\pi} \frac{3+\mu}{R^{3+\mu}} r^{\mu}. \tag{2.9}$$

Институт математики и механики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 17 VI 1960

Մ. Մ. Մանուկյան

ՈԼՈՐՎՈՂ ԿՈՆԱԿԱՆ ՁՈՂԻ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է ոլորվող կոնական ձողի հաստատված սողքի խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ ձողի մակերևույթի վրա կիրառված է բեռ ըստ աստիճանային օրենքի, իսկ հիմքը ենթարկված է ոլորող մոմենտի ազդեցությանը։

Այս խնդրի լուծման ժամանակ որպես ֆիզիկական հիպոթեզ ընդունվում է, որ սողքի դեֆորմացիայի արագության և լարումների միջև գոյություն ունի աստիճանային օրենք։

Ստացված են լարումների ֆունկցիայի և շոշափող լարումների կոմպոնենտների արտահայտությունները վերջավոր տեսքով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.*, Теория пластичности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. *Патель С.*, *Венкатрман В.* и *Ходж Ф.* Кручение цилиндрических и призматических стержней при наличии установившейся ползучести. „Механика, периодический сборник переводов иностранных статей“, № 6, 1958, стр. 103—113.