

МАТЕМАТИКА

В. С. Виденский

Вторая заметка о наименее уклоняющихся от нуля
многочленах, коэффициенты которых удовлетворяют
данной линейной зависимости

В заметке [1] рассматривались алгебраические многочлены с комплексными коэффициентами

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad (1)$$

удовлетворяющие условию

$$L[P_n] = \sum_{k=0}^n m_k a_k = 1, \quad (2)$$

где m_k — данные комплексные числа. Такие многочлены для краткости были названы многочленами вида (1). В предположении, что K — произвольный компакт в z — плоскости, исследовались свойства многочленов, удовлетворяющих условию (2) и наименее уклоняющихся от нуля на K . Из теоремы Л. Г. Шнирельмана [2] следует, что в K существует такая система $\{z_s\}_{s=1}^m$ из $m \leq 2n+1$ точек, что многочлен вида (1), наименее уклоняющийся от нуля на K , будет также наименее уклоняться от нуля на системе $\{z_s\}_{s=1}^m$. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением множеств, содержащих не более чем $2n+1$ точек. Множество точек максимального отклонения $\{z_s\}_{s=1}^m$ ($1 \leq m \leq 2n+1$) называется характеристическим, если для любого его подмножества существует такой многочлен вида (1), что уклонение его от нуля на этом подмножестве строго меньше, чем наименьшее уклонение на всем множестве $\{z_s\}_{s=1}^m$. В заметке [1] была доказана следующая теорема.

Теорема А. Пусть $\{z_s\}_{s=1}^m$ ($1 \leq m \leq 2n+1$) есть характеристическое множество. Для того, чтобы многочлен $M_n(z)$ в классе многочленов вида (1) был наименее уклоняющимся от нуля на $\{z_s\}_{s=1}^m$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$M_n(z_s) = \rho e^{-i\theta_s}, \quad \rho > 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

и существовала такая последовательность положительных чисел $\{d_s\}_{s=1}^m$, что

$$\sum_{s=1}^m d_s e^{i\theta_s} z_s^k = m_k \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (4)$$

Здесь будут установлены необходимые и достаточные условия в этих терминах, а также будет указана зависимость между числами $d_s e^{i\theta_s}$ и фундаментальными многочленами интерполяционной формулы Лагранжа.

Для вещественного случая, когда коэффициенты многочленов (1) и линейного функционала (2) вещественны, а K представляет собой конечный отрезок $[a, b]$ вещественной оси, задача впервые была исследована В. А. Марковым [3], а с новой точки зрения — Е. В. Вороновской [4]. В вещественном случае число точек m характеристического множества удовлетворяет неравенствам $1 \leq m \leq n+1$. Пусть $\{x_s\}_{s=1}^m$ — характеристическое множество. Результат В. А. Маркова состоит в следующем. Многочлен $M_n(x)$ будет наименее уклоняющимся от нуля в классе многочленов вида (1) тогда и только тогда, если каков бы ни был многочлен $G_n(x)$, для которого $L[G_n] = 0$,

$$\min_s |M_n(x_s) G_n(x_s)| \leq 0.$$

Это предложение может быть непосредственно обобщено для комплексного случая.

Теорема 1. Пусть $\{z_s\}_{s=1}^m$ ($1 \leq m \leq 2n+1$) есть характеристическое множество. Для того чтобы многочлен $M_n(z)$ был наименее уклоняющимся от нуля на $\{z_s\}_{s=1}^m$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (3) и чтобы для любого многочлена $G_n(z)$, для которого $L[G_n] = 0$, имело место неравенство

$$\min_s \operatorname{Re} \{ \overline{M_n(z_s)} G_n(z_s) \} \leq 0. \quad (5)$$

Теорема 1 аналогична теореме А. Н. Колмогорова [5] о многочленах, наименее уклоняющихся от данной функции.

Достаточность. Пусть имеет место (5) и пусть $P_n(z)$ произвольный многочлен вида (1). Покажем, что $\max_s |P_n(z_s)| \geq |M_n(z_s)| = \rho$.

Действительно, многочлен $G_n(z) = M_n(z) - P_n(z)$, очевидно, удовлетворяет условию $L[G_n] = 0$, и, следовательно, в силу (5) в некоторой точке характеристического множества, скажем, точке z_1 , выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \{ \overline{M_n(z_1)} G_n(z_1) \} \leq 0. \quad (6)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} |P_n(z_1)|^2 &= |M_n(z_1) - G_n(z_1)| \overline{|M_n(z_1) - G_n(z_1)|} = \\ &= |M_n(z_1)|^2 + |G_n(z_1)|^2 - 2 \operatorname{Re} \{ \overline{M_n(z_1)} G_n(z_1) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем $|P_n(z_1)| \geq |M_n(z_1)|$.

Необходимость. Предположим, что $M_n(z)$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на $\{z_s\}_{s=1}^m$, и что для некоторого определенного многочлена $G_n(z)$, удовлетворяющего условию $L[G_n] = 0$,

$$\min_s \operatorname{Re} \{ \overline{M_n(z_s)} G_n(z_s) \} = a > 0.$$

Это допущение немедленно приведет нас к противоречию. Выберем положительное число ε по условию

$$\varepsilon \max_s |G_n(z_s)|^2 < 2a.$$

Тогда многочлен вида (1) $M_n(z) - \varepsilon G_n(z)$ будет уклоняться от нуля на $\{z_s\}_{s=1}^m$ менее, чем многочлен $M_n(z)$. В самом деле, мы имеем

$$\begin{aligned} |M_n(z_s) - \varepsilon G_n(z_s)|^2 &= |M_n(z_s)|^2 + \varepsilon^2 |G_n(z_s)|^2 - 2\varepsilon \operatorname{Re} \{ \overline{M_n(z_s)} G_n(z_s) \} < \\ &< |M_n(z_s)|^2 + \varepsilon [\varepsilon \max_s |G_n(z_s)|^2 - 2a] < |M_n(z_s)|^2. \end{aligned}$$

Опираясь на теорему 1, мы можем теперь теореме А придать другую форму.

Теорема 2. Пусть $\{z_s\}_{s=1}^m$ есть характеристическое множество. Для того чтобы в классе многочленов вида (1) многочлен $M_n(z)$ был наименее уклоняющимся от нуля на $\{z_s\}_{s=1}^m$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (3) и чтобы существовала такая последовательность положительных чисел $\{d_s\}_{s=1}^m$, что для любого многочлена $G_n(z)$, для которого $L[G_n] = 0$, имеет место соотношение ортогональности

$$\sum_{s=1}^m d_s e^{i\theta_s} G_n(z_s) = 0. \quad (8)$$

Необходимость вытекает из условий (4), так как для произвольного многочлена $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ мы имеем

$$\sum_{s=1}^m d_s e^{i\theta_s} P_n(z_s) = \sum_{s=1}^m d_s e^{i\theta_s} \sum_{k=0}^n a_k z_s^k = \sum_{k=0}^n m_k a_k = L[P_n]. \quad (9)$$

Следовательно, для многочленов $G_n(z)$, для которых $L[G_n] = 0$, должно выполняться соотношение (8).

Достаточность вытекает из того, что благодаря (3), равенство (8) влечет за собой достаточное условие (5).

Формула (9) дает новое представление линейного функционала (2) и может служить для распространения этого функционала на множество произвольных конечных на $\{z_s\}_{s=1}^m$ функций.

Если характеристическое множество $\{z_s\}_{s=1}^m$ известно и число входящих в него точек $m < n + 1$, то числа $\{d_s\}_{s=1}^m$ и аргументы $\{\theta_s\}_{s=1}^m$ могут быть легко найдены. В самом деле, положим

$$Q(z) = \prod_{s=1}^m (z - z_s), \quad Q_s(z) = \frac{Q(z)}{z - z_s}.$$

Запишем теперь z^k по формуле Лагранжа

$$\sum_{s=0}^m z_s^k \frac{Q_s(z)}{Q'(z_s)} = z^k \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \quad (10)$$

и применяя к правым и левым частям (10) линейный функционал L , учитывая, что $L[z^k] = m_k$, получим

$$\sum_{s=0}^m z_s^k \frac{L[Q_s]}{Q'(z_s)} = m_k \quad (k=0, 1, \dots, m-1). \quad (11)$$

Сравнивая (11) с первыми m равенствами (4), и принимая во внимание, что соответствующий определитель отличен от нуля, находим, что

$$d_s e^{i\theta_s} = \frac{L[Q_s]}{Q'(z_s)} \quad (s=1, 2, \dots, m). \quad (12)$$

Если $m \leq n$, то из (11) и (4) следует, что числа $m_m, \dots, m_n$ зависят от $m_0, m_1, \dots, m_{m-1}$. Интересно отметить, что если мы продолжим линейный функционал по формуле (9), то формула (12) останется в силе и при $m \geq n+1$. Однако, в этом последнем случае формула (12), разумеется, не может служить для определения чисел $d_s e^{i\theta_s}$, так как сами эти числа входят в левую часть равенства (9).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила 31 X 1960

Վ. Ս. Վերդնակի

ԵՐԿՐՈՐԴ ՆՈՅ՝ ԶԵՐՈՅԻՑ ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԶԱՓՈՎ ՇԵՂՎՈՂ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ, ՈՐՈՆՑ ԳՈՐԾԱԿՑՆԵՐԸ ԲԱՎԱՐԱՐՈՒՄ ԵՆ ՏՐՎԱԾ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌՆՁՈՒԹՅԱՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում են կոմպլեքս գործակիցներով հանրահաշվական բազմադամներ (1), որոնք բավարարում են (2) պայմանին, որտեղ m_k -ն արված կոմպլեքս թվեր են: Այդպիսի բազմադամներն անվանվում են (1) տեսքի բազմադամներ: Դիցուք K -ն կամայական կոմպակտ բազմություն է z — հարթությունում: Հետադրում են K -ի վրա զերոյից նվազագույն չափով շեղվող (1) տեսքի բազմադամների հատկությունները: Լստ Լ. Գ. Շնիրելմանի [2] թեորեմի K -ում գոյություն ունեն m ($1 \leq m \leq 2n+1$) աչնախի $\{z_s\}_{s=1}^m$ կետեր, որ K բազմության վրա զերոյից նվազագույն չափով շեղվող

(1) տեսքի $M_n(z)$ բազմանդամը $|z_s|_{s=1}^m$ սիստեմի վրա h գերուլից կշիռվի նվազագույն չափով: Ապացուցվում է, որ որպեսզի (1) տեսքի $M_n(z)$ բազմանդամը $|z_s|_{s=1}^m$ բազմություն վրա գերուլից նվազագույն չափով շեղվող լինի, անհրաժեշտ և բավարար է, որ լուրացանչուր $G_n(z)$ բազմանդամի համար, որի համար $L[G_n] = 0$, տեղի ունենա (5) անհավասարությունը:

Եացի դրանից, հաստատվում է, որ որպեսզի $M_n(z)$ -ը գերուլից նվազագույն չափով շեղվող լինի $|z_s|_{s=1}^m$ -ի վրա, անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի կատարվեն (3) հավասարությունները և որպեսզի գոյություն ունենա օրինակի $|x_s|_{s=1}^m$ դրական թվերի հաջորդականություն, որ ամեն մի $G_n(z)$ բազմանդամի համար, որի համար $L[G_n] = 0$, տեղի ունենա (8) օրինակի հարաբերակցությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виденский В. С. О наименее уклоняющихся от нуля многочленах, коэффициенты которых удовлетворяют данной линейной зависимости. „ДАН СССР“, 26, 1959, 248—250.
2. Шнирельман Л. Г. О равномерных приближениях. „Известия АН СССР, серия матем.“, 2, 1938, 53—60.
3. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
4. Вороновская Е. В. Приложение функционального анализа к полиномам наименьшего отклонения. „ДАН СССР“, 99, 1954, 5—8.
5. Колмогоров А. Н. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции. „УМН“, 3, вып. 1, 1948, 216—221.

Г. Ц. Тумаркин

Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов

В работе [1] М. М. Джрбашян построил систему рациональных функций $\{M_n(z)\}$, являющуюся естественным обобщением хорошо известных полиномов Фабера. Было доказано, что при определенных ограничениях, налагаемых на односвязную область G , ограниченную жордановой спрямляемой кривой γ и на множество полюсов $\{a_j\}$, расположенных во внешности γ , любая аналитическая в G и непрерывная в $\bar{G}$ функция $f(z)$ разлагается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n M_n(z),$$

равномерно сходящийся внутри области G . При этом ограничения, накладываемые на расположение полюсов, носили очень общий характер: последовательность комплексных чисел $\{a_j\}$, в которых располагаются полюса системы $\{M_n(z)\}$, должна удовлетворять лишь требованию

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{|\beta_j|}\right) = +\infty, \quad (1)$$

где

$$\beta_j = \psi(a_j).$$

Здесь $w = \psi(z)$ — конформно отображает область G — компоненту дополнения к γ , содержащую ∞ , на $|w| > 1$ ($\psi(\infty) = \infty$). В то же время условия, наложенные на область G , были довольно обременительными. Требовалось, чтобы граница γ области G была спрямляемой жордановой кривой такой, что функция $\varphi'(w)$ [производная функции $\varphi(w)$, осуществляющей конформное отображение области $|w| > 1$ на $\bar{G}$, ($\varphi(\infty) = \infty$)] принадлежала классу H_2 , т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Заметим, что для произвольной жордановой спрямляемой кривой γ можно утверждать лишь, что $\varphi'(w) \in H_2$.

Целью настоящей работы является: во-первых, показать, что несколько модифицируя определение системы $\{M_n(z)\}$, предложенное М. М. Джрбашяном, можно получить систему $\{M_n^*(z)\}$ рациональных дробей с полюсами в тех же точках $\{z_j\}$, образующую базис в значительно более широком, чем это было у М. М. Джрбашяна, пространстве аналитических функций уже в произвольной области, ограниченной жордановой спрямляемой кривой γ ; во-вторых, установить необходимость выполнения условия (1) для возможности разложения в ряд любой функции из рассматриваемого класса.

Последнее непосредственно следует из приводимых в работе необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять аналитическая в области G функция $f(z)$, разлагающаяся в ряд рациональных дробей, когда для заданных полюсов не выполняется условие (1). Получающиеся результаты распространяются на произвольные конечно-связные области со спрямляемой границей. Перенесение цитированных результатов М. М. Джрбашяна на многосвязные области G было сделано Г. С. Кочаряном [2] в предположениях об области G и функции $f(z)$, аналогичных тем, которые фигурировали в [1]. Наши результаты носят в этом отношении, как и в односвязном случае, гораздо более общий характер. В заключение делаются некоторые замечания, касающиеся поведения на границе области G рядов рациональных дробей, получающихся в результате разложения функции $f(z)$.

Остановимся теперь более подробно на полученных в настоящей работе результатах.

В теореме 1 показывается, что для всякой аналитической в области функции, представимой интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2)$$

где $g(\zeta) \in L_2(\gamma)$, т. е. $\int_{\gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$, составленный для нее ряд

$\sum C_n M_n^*(z)$ по рациональным дробям с заранее заданными полюсами $\{z_j\}$, удовлетворяющими условию (1), будет равномерно сходиться внутри области G . Отсюда, в частности, следует возможность разложения в ряд по введенной системе рациональных дробей любой функции, входящей в класс $E_2(G)$.

Из приводимой далее теоремы 2 следует необходимость условия (1) для возможности разложения в рассматриваемый ряд любой функции класса $E_2(G)^*$.

* $f(z) \in E_p(G)$, если найдется последовательность замкнутых спрямляемых кривых $\gamma_n \subset G$, $\gamma_n \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|^p ds < C < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

В этой теореме рассматривается случай, когда точки, в которых находятся полюсы системы $\{M_n^*(z)\}$, не удовлетворяют условию (1).

В этом предположении устанавливается необходимое и достаточное условие для возможности разложения в рассматриваемый ряд функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2). Это условие заключается в том, что среди всевозможных представлений данной функции $f(z)$ в виде (2) существует такое, для которого функция $g(\zeta)$, фигурирующая в представлении (2), должна совпадать почти всюду на γ с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в G^- функции $f^*(z)$, обладающей свойством $f^*(z)B(z) \in E_2(G^-)$.

Здесь $B(z) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} G(z, \alpha_j) \right\}$, где $G(z, \alpha_j)$ — комплексная функция

Грина области G^- .

Так как любое представление данной функции $f(z)$ интегралом типа Коши (2) получается прибавлением к функции $g(\zeta)$ граничных значений $g^*(\zeta)$ некоторой, аналитической в области G^- , функции класса $E_1(G^-)$, то отсюда немедленно следует следующее утверждение. Если условие (1) не выполняется, то необходимым условием для возможности разложения в ряд будет совпадение почти всюду на γ функции $g(\zeta)$ любого представления $f(z)$ в виде (2) с граничными значениями мероморфной функции $g^*(z)$ такой, что $g^*(z)B(z) \in E_1(G^-)$. Заметим, что для областей класса В. И. Смирнова сформулированное выше необходимое и достаточное условие будет иметь место уже для любого представления $f(z)$ в виде (2). Легко видеть, что только что указанными свойствами обладает лишь довольно узкий подкласс функций. Например, всякая функция вида $\frac{1}{z-a}$, где

$a \in G^-$ (причем $a \neq \alpha_j$, $j=1, 2, \dots$), представима интегралом Коши с $g(\zeta) = \frac{1}{\zeta-a}$. Но очевидно, что $\frac{1}{\zeta-a}$ в результате умножения на $B(z)$

не будет делаться граничным значением аналитической в области G^- функции и поэтому заведомо не удовлетворяет указанному только что требованию. В теореме 3 установленные для односвязной области результаты распространяются на произвольные конечносвязные области, ограниченные спрямляемыми кривыми.

После того, как выяснена возможность разложения аналитических в области G функций класса E_2 в ряды по системе рациональных дробей с заранее заданными полюсами, удовлетворяющими условию (1), естественно поставить вопрос об исследовании граничных свойств получающихся рядов, точнее — вопрос: не будет ли иметь место сходимость в среднем частных сумм составленного ряда рациональных дробей к функции $f(\zeta)$ — граничным значениям функции $f(z)$? Однако, опираясь на ранее установленные нами результаты, мы показываем, что для области G , ограниченной произвольной спрямляе-

мой кривой, не являющейся областью, удовлетворяющей условию В. И. Смирнова, среди функций класса $E_2(G)$ имеются такие, для которых применение любого линейного перманентного метода суммирования к ряду рациональных дробей, соответствующему функции $f(z)$, приводит к ряду, частные суммы которого $S_n(z)$ не могут быть на γ даже равномерно ограничены ни в какой интегральной метрике

$$\int_{\gamma} |S_n(\zeta)|^p \rho(\zeta) ds, \text{ где } p > 0, \text{ а } \rho(\zeta) > 0 \text{ подчинено лишь требованию}$$

$$\int_{\gamma} \ln \rho(\zeta) |\psi'(\zeta)| d\zeta > -\infty \quad [w = \psi(z) - \text{функция, обратная к } z = \varphi(w)].$$

В заключение делаются некоторые замечания по поводу коэффициентов и единственности разложений функций в рассматриваемые ряды.

§ 1. Разложение аналитических в односвязной области функций, представимых интегралом типа Коши, в ряд по рациональным дробям

Определим систему рациональных дробей $\{M_n^*(z)\}$ полюсами которых являются заданные числа $\{\alpha_j\}$. Для этого возьмем систему $\{\Phi_n(w)\}$ рациональных дробей, рассматривавшуюся Уолшем [3], с полюсами в точках $\{\beta_j\}$, $[\varphi(\beta_j) = \alpha_j]$

$$\Phi_n(w) = \frac{(1 - |\beta_n^*|^2)^{1/2}}{1 - \beta_n^* w} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w - \beta_j^*}{1 - \beta_j^* w}, \quad \beta_j^* = \frac{1}{\beta_j}. \quad (1.1)$$

Система $\{\Phi_n(e^{i\theta})\}$ будет ортогональной на $|w|=1$ (см. [3] и [4]). Рассмотрим функцию $\Phi_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$. Так как $\sqrt{\psi'(z)}$ — аналитическая в области G^- функция, причем $\psi'(z) \neq 0$, то функция $\Phi_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ имеет полюсы только в полюсах функции $\Phi_n[\psi(z)]$, т. е. в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Поэтому, сумма главных частей разложений функции $\Phi_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ в окрестностях ее особых точек является рациональной функцией с полюсами в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Получающиеся таким образом рациональные дроби образуют систему $\{M_n^*(z)\}$, в ряды по которой, как сейчас будет показано, могут быть разложены аналитические в области G функции $f(z)$, удовлетворяющие довольно общим условиям.

Прежде чем переходить к точной формулировке теоремы 1, заметим, что все отличие системы $\{M_n^*(z)\}$, рассматриваемой нами, от системы $\{M_n(z)\}$ М. М. Джрбашяна сводится к появлению дополнительного множителя $\sqrt{\psi'(z)}$ в определении функций $\Phi_n[\psi(z)] \times \sqrt{\psi'(z)}$, которого не было у функций, главные части которых приводили к системе $\{M_n(z)\}$ [см. [1], формула (3)]. Подобный прием умножения порождающей функции применялся в теории полиномов Фабера.

Теорема 1. Пусть G — произвольная область, ограниченная жордановой спрямляемой кривой γ и $\{z_j\}$ — последовательность комплексных чисел $z_j \in G$, удовлетворяющих условию (1). Пусть, далее, $\{M_n^*(z)\}$ $n=1, 2, \dots$ есть система рациональных дробей, которая получается, если взять главные части функций $\Phi_n[\psi(z)]/\sqrt{\psi'(z)}$. Здесь $\{\Phi_n(w)\}$ — ортогональная на $|w|=1$ система рациональных дробей с полюсами в точках $\{\beta_j\}$ $\beta_j = \psi(z_j)$, определенная формулой (1.1) $\{w = \psi(z)$ дает конформное отображение G на $|w| > 1$, $\psi(\infty) = \infty\}$. Тогда для произвольной аналитической внутри области G функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши-Лебега (2) с суммируемой в квадрате на γ функцией плотности $g(\zeta)$, имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z),$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta) \Phi_n[\psi(\zeta)] / \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta, \quad (1.2)$$

а

$$\Phi_n^*(w) = \frac{(|\beta_n|^2 - 1)^{1/2} \prod_{j=1}^{n-1} (w - \beta_j)}{1 - \beta_n w}.$$

При этом, получающийся ряд будет абсолютно и равномерно сходиться внутри данной области G .

Доказательство. Возьмем какую-либо функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию (2). Тогда будет существовать $\int_{\gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$.

Поэтому $\int_0^{2\pi} |g[\varphi(e^{i\theta})]|^2 |\varphi'(e^{i\theta})| d\theta < \infty$. Функцию $g[\varphi(e^{i\theta})] / \sqrt{\varphi'(e^{i\theta})}$,

суммируемую с квадратом на $|w|=1$, можно, как известно, представить в виде суммы граничных значений функций $F_i(w)$ и $F_e(w)$ аналитических и входящих в класс H_2 соответственно в $|w| < 1$ и $|w| > 1$ *

$$g[\varphi(e^{i\theta})] / \sqrt{\varphi'(e^{i\theta})} = F_i(e^{i\theta}) + F_e(e^{i\theta}). \quad (1.3)$$

Согласно теореме Уолша (см. [3]), функцию $F_i(e^{i\theta})$, являющуюся граничными значениями функции $F_i(w)$, входящей в класс H_2 в

* Если $F(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\theta} \in L_2(0, 2\pi)$, то $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 < \infty$. Полагая тогда

$$F_i(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k e^{ik\theta}, \quad F_e(w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{ik\theta},$$

будем иметь $F_i(w) \in H_2$, так как для всех r ,

$$0 < r < 1, \quad \int_0^{2\pi} |F_i(re^{i\theta})|^2 d\theta < \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 r^{2k} < \infty. \quad \text{Аналогично и для } F_e(w).$$

$|w| < 1$, можно будет разложить в ряд по полной, в силу условия (1), ортогональной системе рациональных дробей с полюсами в точках $|\xi_j|$

$$F_i(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(e^{i\theta}). \quad (1.4)$$

Здесь

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_i(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} F_i(\xi) \Phi_n^*(\xi) d\xi, \quad (1.5)$$

где $\Phi_n^*(w)$ определяется формулой (1.2).

Ряд (1.4) будет сходиться в метрике L_2 к $F_i(e^{i\theta})$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \left| F_i[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} - \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} \right|^2 ds = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| F_i(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = 0. \end{aligned}$$

Откуда простые оценки покажут, что имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_i[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.6)$$

равномерно во всякой замкнутой подобласти $\bar{G}_1 \subset G$.

Примем теперь во внимание, что функция $F_e[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ будет входить в класс E_2 в области G^- (т. к. $F_e(w) \in H_2$ в $\{w | |w| > 1\}$; это немедленно следует из определения класса E_2 (см., например, [5])).

Но функция $F_e[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)} \in E_2 \subset E_1$, как и всякая функция, принадлежащая классу E_1 во внешности γ и обращающаяся в 0 при $z = \infty^*$, будет представляться во внешности γ интегралом Коши. Поэтому, если брать z внутри γ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_e[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in G. \quad (1.7)$$

Складывая (1.6) и (1.7) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta =$$

* Так как $F_e(\infty) = 0$, что сразу следует из определения $F_e(w)$ (см. сноску на стр. 13), а $\psi'(\infty) \neq \infty$.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_i[\psi(\zeta)] + F_e[\psi(\zeta)]}{\zeta - z} \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta.$$

Заметим, что интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$ определяет внут-

ри γ рациональную функцию, равную главной части мероморфной в области G^- функции $\Phi_k[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ с полюсами в точках α_j , $j = 1, \dots, k$.

Действительно, если использовать введенное ранее обозначение $M_k^*(z)$ для только что описанной рациональной дроби, то разность $\Phi_k[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)} - M_k^*(z)$ не будет иметь полюсов во внешности γ , а при $z = \infty$ имеет нуль по крайней мере 1-го порядка. Нетрудно видеть, что эта функция будет входить в класс $E_2(G^-)$ *. Но тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} - M_k^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in G.$$

Откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{M_k^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = M_k^*(z). \quad (1.8)$$

Учитывая далее равенство

$$[F_i[\psi(\zeta)] + F_e[\psi(\zeta)]] \sqrt{\psi'(\zeta)} = g(\zeta), \quad (1.9)$$

вытекающее из (1.3), а также возможность, согласно условию, представить внутри γ функцию $f(z)$ интегралом типа Коши (2), получим из (1.6), (1.7), (1.9) и (1.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k M_k^*(z) = f(z), \quad z \in G.$$

Причем ряд стоящий слева будет сходиться равномерно внутри G .

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь установить справедливость формулы (1.2) для коэффициентов ряда (1.2). Из (1.5) имеем

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F_i[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta. \quad (1.10)$$

Если теперь сложить (1.10) с равенством

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F_e[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta, \quad (1.11)$$

* Этим свойством обладает, как уже указывалось, функция $\sqrt{\psi'(z)}$, а функция $\Phi_k[\psi(z)]$ будет заведомо ограничена вблизи γ . Поэтому произведение $\Phi_k[\psi(z)] \cdot \sqrt{\psi'(z)}$ будет входить в класс $E_2(G^-)$.

то, принимая во внимание (1.9), получим формулу (1.2) для C_n . Равенство (1.11) будет справедливо, ибо функции $F_e[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}$ и $\sqrt{\psi'(z)}$, как уже отмечалось, входят в класс $E_2(G^-)$, а функция $\Phi_n^*[\psi(z)]$ будет аналитична и заведомо ограничена в области G^- , что видно из определения (1.2) функции $\Phi_n^*(w)$. Это позволяет сразу установить, что произведение $F_e[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}\Phi_n^*[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}$ входит в класс $E_1(G^-)$. Поэтому эта функция представима в области G^- интегралом Коши по своим граничным значениям. Убедимся теперь, что рассматриваемая нами функция имеет в ∞ нуль по крайней мере второго порядка. Действительно, ранее уже указывалось, что функция $F_e[\psi(z)]$ имеет при $z=\infty$ нуль по крайней мере 1-го порядка. Точно такое же положение будет и для функции $\Phi_n^*[\psi(z)]$, что сразу следует из (1.2).

Приравняв нулю коэффициент при $\frac{1}{z}$ в тейлоровском разложении в окрестности $z=\infty$, получим (1.11), что и требовалось доказать.

Так как всякая функция $f(z) \in E_2(G)$ представляется интегралом Коши через свои граничные значения

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

причем $\int_{\gamma} |f(\zeta)|^2 ds < \infty$, то из теоремы 1 немедленно вытекает:

Следствие. Для всякой аналитической в области G функции $f(z)$, входящей в класс E_2 , составленный для нее ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^(z)$, где $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta$, будет равномерно сходиться внутри области G .*

Мы сейчас покажем, что для произвольных областей со спрямляемыми границами, результат, установленный в теореме 1, является более общим по сравнению с результатом, содержащимся в следствии. В самом деле, если область G не удовлетворяет условию В. И. Смирнова, то из того, что аналитическая в G функция $f(z)$ представима интегралом типа Коши-Лебега (2) с суммируемой в квадрате на γ функцией $f(\zeta)$ [даже более того с ограниченной на γ функцией $f(\zeta)$] не следует вхождение функции $f(z)$ в $E_2(G)$. Отсюда видно, что результат, установленный в теореме 1, не может быть непосредственно выведен из результата, сформулированного в следствии. Действительно, рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(z) = \psi'(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + \psi(z)}{e^{i\theta} - \psi(z)} \ln |\varphi'(e^{i\theta})| d\theta. \quad (1.12)$$

Нами показано (см. [5], гл. III), что функция $\tilde{f}(z)$, входящая в класс $E_1(G)$ и имеющая угловые граничные значения по модулю равные 1 почти всюду на γ , не может входить ни в один из классов $E_p(G)$, $p > 1$. Из сказанного про функцию (1.12) следует, что она может быть взята в качестве примера функции $f(z)$ с описанными свойствами [за $g(\zeta)$ можно в данном случае принять $\tilde{f}(\zeta)$ — угловые граничные значения $\tilde{f}(z)$].

§ 2. Необходимые и достаточные условия для возможности разложения аналитической функции в ряд рациональных дробей в случае, когда заданные полюсы удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\varphi(z_j)|} \right) < \infty.$$

Теорема 2. Пусть $f(z)$ аналитична в области G и представляема интегралом типа Коши (2).

Пусть, далее, полюса системы рациональных дробей $\{M_n^*(z)\}$ таковы, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\varphi(z_j)|} \right) < \infty. \quad (2.1)$$

Для того чтобы ряд (1.2), составленный для $f(z)$ по системе $\{M_n^*(z)\}$, равномерно сходил к ней внутри G , необходимо и достаточно, чтобы среди различных представлений функции $f(z)$ интегралом типа Коши (2) нашлось такое, что функция $g(\zeta)$, фигурирующая в представлении (2), совпадала почти всюду на γ с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в области G^- функции $f^*(z)$ ограниченного вида, обладающей свойством $f^*(z)B(z) \in E_0(G^-)$.

Здесь $B(z)$ — пересаживаемое при помощи конформного отображения $w = \psi(z)$ в область G^- , сходящееся в силу (2.1) произведение Бляшке $b(z)$ с нулями в точках $\varphi(z_j)$, или, что то же самое, $B(z) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} G(z, z_j) \right\}$, где $G(z, z_j)$ — комплексная функция Грина области G^- с полюсом в точке z_j .

Доказательство. Докажем вначале достаточность. Сохраняем обозначения, использованные при доказательстве теоремы 1.

В силу условия теоремы, функцию $f(z)$ можно представить интегралом типа Коши (2) так, что $g[\varphi(e^{i\theta})]/\varphi'(e^{i\theta})$ будет совпадать почти всюду на $|\varphi| = 1$ с угловыми граничными значениями меро-

морфной в $|\omega| > 1$ функции $f^e[\varphi(\omega)]\sqrt{\varphi'(\omega)}$, которая после умножения на $b(\omega)$ (произведение Бляшке с нулями в точках $\varphi(\alpha_j)$, $j=1, 2, \dots$) становится функцией класса H_2 . Но тогда подобным же свойством будет обладать и функция $F_l(e^{i\theta})$, ибо по определению $F_e(\omega) \in H_2$ в $|\omega| > 1$, а $F_l(e^{i\theta}) = g[\varphi(e^{i\theta})]\sqrt{\varphi'(e^{i\theta})} - F_e(e^{i\theta})$. Мероморфную в $|\omega| > 1$ функцию, угловыми граничными значениями которой является функция $F_l(e^{i\theta})$, будем в дальнейшем также обозначать $F_l(\omega)$. Так как по условию $f^e(\infty) = 0$, а $F_e(\infty) = 0$, то $F_l(\infty) = 0$.

Покажем теперь, что ряд Фурье функции $F_l(e^{i\theta})$ по ортогональной системе $\{F_n(e^{i\theta})\}$ (которая в рассматриваемом случае не является полной в пространстве граничных значений аналитических функций класса H_2) будет сходиться в метрике L_2 к $F_l(e^{i\theta})$. Для этого, очевидно, достаточно установить, что $F_l(e^{i\theta})$ принадлежит замыканию линейной оболочки системы $\left\{\frac{1}{e^{i\theta} - \beta_j}\right\}$, где $\beta_j = \varphi(\alpha_j)$.

Возьмем в пространстве L_2 какой-либо линейный функционал $y(F)$, обращающийся в нуль на функциях рассматриваемой системы. Тогда мы можем написать

$$y\left(\frac{1}{e^{i\theta} - \beta_j}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{q(\theta) d\theta}{e^{i\theta} - \beta_j} = 0, \quad \text{где } q(\theta) \in L_2. \quad (2.2)$$

Мы сейчас покажем, что отсюда следует равенство этого функционала нулю на функции $F_l(e^{i\theta})$. Действительно, рассмотрим интеграл типа Коши-Лебега

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} |q(\theta) e^{-i\theta}|}{e^{i\theta} - \omega} d\theta. \quad (2.3)$$

Определенные интегралом типа Коши-Лебега (2.3) аналитические внутри и вне $|\omega| = 1$ функции $Q^i(\omega)$ и $Q^e(\omega)$ принадлежат, соответственно в областях $|\omega| < 1$ и $|\omega| > 1$, классам H_2 . Причем $Q^e(\infty) = 0$, и почти для всех θ , $0 < \theta < 2\pi$, имеем

$$q(\theta) e^{-i\theta} = Q^i(e^{i\theta}) - Q^e(e^{i\theta})^*. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int_0^{2\pi} F_l(e^{i\theta}) q(\theta) d\theta$, выражающий интересующее нас значение взятого функционала. Учитывая (2.4), получаем

$$\int_0^{2\pi} F_l(e^{i\theta}) q(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^i(e^{i\theta}) d\theta - \int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^e(e^{i\theta}) d\theta. \quad (2.5)$$

* См. примечание на стр. 13.

Функция $F_l(w) Q^l(w)$ как произведение двух аналитических внутри круга $|w| < 1$ функций, входящих в класс H_2 , будет функцией класса H_1 . Поэтому

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^l(e^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (2.6)$$

Заметим теперь, что второй интеграл в правой части равенства (2.5) также равен нулю.

Действительно, как уже отмечалось в самом начале, произведение $F_l(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})$ является граничным значением аналитической в $|w| > 1$ функции класса H_2 . Но из равенства (2.2) и (2.3) следует, что $Q^j(\beta_j) = 0$ $j=1, 2, \dots$. Поэтому частное $\frac{Q^j(w)}{b(w)}$ будет аналитической в $|w| > 1$ функцией, входящей, так же как и $Q^j(w)$, в класс H_2 в $|w| > 1$ (см., напр., [5], гл II). Тогда функция

$$F_l(e^{i\theta}) Q^j(e^{i\theta}) = F_l(e^{i\theta}) b(e^{i\theta}) \frac{Q^j(e^{i\theta})}{b(e^{i\theta})},$$

как произведение граничных значений функций класса H_2 , является граничными значениями функции класса H_1 .

Ранее отмечалось, что $Q^j(\infty) = 0$ и $F_l(\infty) = 0$. Поэтому функция $F_l(e^{i\theta}) Q^j(e^{i\theta})$ будет граничными значениями аналитической в $|w| > 1$ функции, представимой интегралом Коши и имеющей в ∞ нуль по крайней мере второго порядка. Приравнявая нулю коэффициент при $\frac{1}{w^2}$ в тейлоровском разложении этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки, получаем

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^j(e^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (2.7)$$

Из равенств (2.6) и (2.7) следует, что $\int_0^{2\pi} F_l(e^{i\theta}) q(\theta) d\theta = 0$. Это доказывает принадлежность функции $F_l(e^{i\theta})$ замыканию линейной оболочки системы $\left\{ \frac{1}{e^{i\theta} - \beta_j} \right\}$, $j=1, 2, \dots$ и возможность, в силу этого, представить $F_l(e^{i\theta})$ в виде суммы ряда Фурье по ортогональной системе $\{\Phi_n(e^{i\theta})\}$. Далее, для завершения доказательства, надо повторить соответствующие рассуждения из теоремы 1.

Переходим к доказательству необходимости. Пусть известно, что для функции $f(z)$ ряд (1.2) сходится к $f(z)$ равномерно внутри

6. Заметим прежде всего, что для любой функции $f(z)$, представимой интегралом Коши (2), ряд из квадратов абсолютных величин коэффициентов должен сходиться

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta) \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \overline{\psi'(\zeta)} d\zeta.$$

В самом деле, функция $g[\varphi(e^{i\theta})] \overline{\varphi'(e^{i\theta})} \in L_2(0, 2\pi)$, так как $g(\zeta) \in L_2(\gamma)$, причем, ввиду (1.2), числа C_n можно рассматривать как коэффициенты Фурье разложения функции $g[\varphi(e^{i\theta})] \overline{\varphi'(e^{i\theta})}$ в ряд по системе $|\Phi_n(e^{i\theta})|$, ибо из (1.2) и (1.11) следует

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{2\pi} g[\varphi(e^{i\theta})] \overline{\varphi'(e^{i\theta})} \Phi_n^*(e^{i\theta}) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta}) \Phi_n^*(e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} d\theta. \end{aligned}$$

Составим теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(e^{i\theta})$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ сходится,

а $\int_0^{2\pi} |\Phi_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi$, то частные суммы $S_n(e^{i\theta})$ рассматриваемого ряда будут сходиться в среднем на $|w|=1$. Обозначим сумму этого ряда через $S(e^{i\theta})$. Из сказанного имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0. \quad (2.8)$$

Функции $S_n(z)$ представляют из себя рациональные дроби с полюсами в точках $\beta_1, \dots, \beta_n$ $[\beta_j = \varphi(\alpha_j)]$. Поэтому $S_n(e^{i\theta})$ можно, конечно, считать граничными значениями класса H_2 . Тогда равенство (2.8) позволяет сразу заключить, что $S(e^{i\theta})$ также является граничными значениями некоторой аналитической в круге $|w| < 1$ функции $S^*(z)$, входящей в класс H_2 , к которой будет сходиться равномерно внутри $|w| < 1$ ряд $\sum C_n \Phi_n(z)$. Это заключение можно сразу сделать, опираясь на доказанное нами дополнение к теореме Хинчина-Островского о связи предела граничных значений с граничными значениями предельной функции (см. [5]). То же самое можно легко доказать непосредственно.

Рассмотрим для этого неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S_{n+p}(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2 d\theta < \varepsilon, \quad (2.9)$$

которое имеет место при $n \geq N(\varepsilon)$ и любом $p \geq 1$. Учитывая, что для всякой аналитической в $|w| < 1$ функции $F(w)$ класса H_2

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta, \quad 0 < r < 1$$

опираясь на (2.9), получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S_{n+p}(re^{i\theta}) - S_n(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon, \quad (2.10)$$

$$0 < r < 1, \quad n \geq N(\varepsilon), \quad p \geq 1.$$

Элементарные оценки позволяют установить, используя (2.9) или (2.10), равномерную сходимость внутри $|w| < 1$ последовательности $|S_n(z)|$ к некоторой функции $S^*(z)$. Переходя к пределу в неравенстве (2.10) вначале при фиксированном r , $0 < r < 1$ и $p \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_0^{2\pi} |S^*(re^{i\theta}) - S_n(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon, \quad (2.11)$$

Отсюда уже видно, что $S^*(z) \in H_2$ в $|w| < 1$. Теперь достаточно в (2.11) r устремить к единице, чтобы получить неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S^*(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon). \quad (2.12)$$

Сравнивая (2.8) и (2.12) устанавливаем почти всюду на $|w| = 1$ следующее равенство, доказывающее наше утверждение

$$S^*(e^{i\theta}) = S(e^{i\theta}).$$

Повторяя далее рассуждение, применявшееся при доказательстве теоремы 1, мы установим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n/M_n^*(z)$ будет равномерно сходиться внутри G к функции, которая может быть представлена интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Мы докажем теперь, что функция $S[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}$ является угловыми граничными значениями мероморфной в области G^- функции, обладающей следующим свойством: произведение этой функции на функцию $B(z)$, описанную в условии теоремы, является аналитической в области G^- функцией, входящей в класс $E_2(G^-)$. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Нужное нам заключение о свойствах функции $S[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}$

вытекает из того, что $S(e^{i\theta})$ является не только, как отмечалось ранее, угловыми граничными значениями аналитической в $|w| < 1$ функции, но совпадает кроме того почти всюду на $|w| = 1$ также и с угловыми граничными значениями мероморфной в $|w| > 1$ функции, которая после умножения на $b(w)$ становится в $|w| > 1$ аналитической функцией класса H_2 . Для доказательства этого факта достаточно заметить, что из (2.8) вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta}) b(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0.$$

причем $S_n(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})$ можно рассматривать как граничные значения функций $S_n(w) b(w)$ аналитических и ограниченных в $|w| > 1$, $n = 1, 2, \dots$

Применяя к последовательности $\{S_n(w) b(w)\}$ рассуждения, аналогичные использованным для последовательности $\{S_n(w)\}$, получаем, что $S(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})$ есть граничные значения аналитической в $|w| > 1$ функции класса H_2 , обращающейся в 0 при $w = \infty$ [подобным свойством обладали все функции $S_n(w) b(w)$]. Отсюда немедленно выведем нужное нам заключение о свойствах функции $S[\psi(\zeta)] V \overline{\psi'(\zeta)}$.

Отмеченное в условии теоремы специальное представление функции $f(z)$ интегралом типа Коши сразу получается, если взять функцию $g^*(\zeta) = S[\psi(\zeta)] V \overline{\psi'(\zeta)}$. Тем самым наша теорема полностью доказана.

Сделаем некоторые замечания в связи с доказанной теоремой.

1. В случае, когда G — произвольная область, в формулировке теоремы 2 нельзя утверждать про любое (а не только про специальное) представление интегралом типа Коши (2) функции $f(z)$, раскладывающейся в ряд рациональных дробей (1.2), что $g(\zeta)$ является угловыми граничными значениями мероморфной в G^- функции $\tilde{g}(z)$, для которой $g(z) B(z) \in E_2(G^-)$. Действительно, пусть область G^- не удовлетворяет условию В. И. Смирнова. Тогда, имея одно представление (2) функции $f(z)$ с описанным свойством, мы добавим к $g(\zeta)$ какую-либо функцию $\tilde{g}(\zeta) \in L_2(\gamma)$, которая является угловыми граничными значениями функции $\tilde{g}(z) \in E_1(G^-)$, такой, что $\tilde{g}(z) \in E_2(G^-)$. Пример функции с подобными свойствами был приведен выше*. Тогда интеграл типа Коши с функцией плотности $g(\zeta) + \tilde{g}(\zeta)$ будет внутри области G изображать ту же самую функцию $f(z)$. Но, очевидно, функция $g(\zeta) + \tilde{g}(\zeta)$ уже не будет обладать требуемым свойством.

Приведем теперь необходимое условие, непосредственно вытекающее из теоремы 2 для возможности разложения функции $f(z)$ в

* Условие $\tilde{g}(\infty) = 0$ легко обеспечить, умножая на $\frac{1}{z}$.

рассматриваемый ряд рациональных дробей, относящееся уже к произвольному представлению функции $f(z)$ интегралом типа Коши.

Теорема 3. Для возможности разложения функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2), в ряд рациональных дробей при рассматриваемых в теореме 2 условиях, необходимо чтобы функция $g(\zeta)$ совпадала почти всюду на γ с угловыми граничными значениями мероморфной в G^- функции $g(z)$ такой, что $g(z)B(z) \in E_1(G^-)$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что согласно теореме 2 найдется функция $g^*(\zeta)$ такая, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{где} \quad \int_{\gamma} |g^*(\zeta)|^2 ds < \infty,$$

причем $g^*(\zeta)B(\zeta)$ является граничными значениями функции, входящей в класс $E_2(G^-)$. Так как по условию функция $f(z)$ допускает внутри области G представление интегралом типа Коши (2), то разность $g(\zeta) - g^*(\zeta)$ должна являться угловыми граничными значениями аналитической в области G^- функции класса $E_1(G^-)$. Отсюда сразу следует заключение теоремы.

Можно, однако, отметить очень важный случай, когда указанным свойством обладают уже все представления данной функции.

Теорема 4. Пусть область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова. Тогда для того, чтобы функция $f(z)$, представимая интегралом типа Коши (2), раскладывалась в ряд рациональных дробей, полюса которых удовлетворяют условию (2.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $g(\zeta)B(\zeta)$ являлась (почти всюду на γ) угловыми граничными значениями аналитической в области G^- функции класса E_2 .

Доказательство следует немедленно из доказательства теоремы 2, ибо теперь про разность $\tilde{\Phi}(\zeta) = g(\zeta) - S[\psi(\zeta)] \times V\overline{\psi'(\zeta)}$ можно утверждать, что это есть угловые граничные значения функции $\tilde{\Phi}(z) \in E_2(G^-)$. В самом деле, утверждение $\tilde{\Phi}(z) \in E_1(G)$ следует из того, что интеграл типа Коши с функцией $\tilde{\Phi}(\zeta)$ равен тождественно нулю внутри G . Но для областей G^- класса В. И. Смирнова известно, что если граничные значения функции $\tilde{\Phi}(z)$ класса E_1 суммируемы на γ в какой-то степени $p > 1$, то $\tilde{\Phi}(z) \in E_p$.

§ 3. Разложение аналитических функций в многосвязных областях в ряды рациональных дробей с заданными полюсами

Результаты, доказанные выше для односвязных областей, легко распространяются на многосвязные области.

Пусть G — многосвязная область с границей Γ , состоящей из m замкнутых жордановых спрямляемых кривых $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}$, причем считаем, что γ_0 содержит $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ внутри себя.

Обозначим через $w = \psi_k(z)$ функцию, осуществляющую конформное отображение области G_k — компоненты дополнения G , ограниченной кривой γ_k , либо на $|w| > 1$, если $k=0$ ($\psi_0(\infty) = \infty$), либо на $|w| < 1$, если $k=1, \dots, m-1$. Пусть в каждой из областей G_k задана последовательность точек $\{\alpha_{kj}\}$ $j=1, 2, \dots$, $k=0, 1, \dots, m-1$, в которых могут располагаться полюса дробей. Построим, аналогично тому, как это было сделано для односвязного случая, систему рациональных дробей $\{M_{kn}^*(z)\}$, полюсами которых будут заданные числа. Система $\{M_{kn}^*(z)\}$ строится в точности так же, как и раньше. При построении системы $\{M_{kn}^*(z)\}$, $n=1, 2, \dots$, где k — какое-либо число ($1 \leq k \leq m-1$), надо будет отправляться от ортогональной системы рациональных дробей $\{\Phi_{kn}^*(w)\}$ с полюсами в последовательности точек $\{\beta_{kj}\}$, $\beta_{kj} = \psi_k(\alpha_{kj})$, лежащих внутри $|w| < 1$. Такая система имеет вид

$$\Phi_{kn}^*(w) = \frac{(|\beta_{kn}|^2 - 1)^{1/2}}{1 - \bar{\beta}_{kn}w} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w - \beta_{kj}}{1 - \bar{\beta}_{kj}w}, \quad n=1, 2, \dots, \beta_{kj} = \frac{1}{\bar{\beta}_{kj}}. \quad (3.1)$$

Для определения $M_{kn}^*(z)$ мы рассматриваем затем, подобно тому, как это делалось ранее, сумму главных частей разложений функций $\Phi_{kn}^*[\psi_k(z)] \sqrt{\psi_k'(z)}$ в окрестности ее полюсов. Получающиеся рациональные дроби обозначаем $M_{kn}^*(z)$. Повторяя проводившиеся выше рассуждения, можно установить следующее. Пусть для рассматриваемого $k \geq 1$ заданные точки $\{\alpha_{kj}\}$ таковы, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\beta_{kj}|)$ расходится. Тогда для любой аналитической во внешности γ_k функции $f_k(z)$, представимой интегралом типа Коши-Лебега

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{где} \quad \int_{\gamma_k} |g(\zeta)|^2 ds < \infty, \quad (3.2)$$

составленный для функции $f_k(z)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} M_{kn}^*(z)$ будет равномерно сходиться к ней в любой замкнутой подобласти внешности G_k^- кривой γ_k

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} M_{kn}^*(z), \quad \text{где} \quad C_{kn} = \int_{\gamma_k} g(\zeta) \bar{\Phi}_{kn}^*[\psi_k(\zeta)] \sqrt{\psi_k'(\zeta)} d\zeta, \quad (3.3)$$

$$\bar{\Phi}_{kn}^*(w) = \frac{(1 - |\beta_{kn}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\beta}_{kn}w} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w - \beta_{kj}}{1 - \bar{\beta}_{kj}w}.$$

Если же при некотором $k \geq 1$ окажется, что $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\beta_{kj}|) < \infty$, то для равномерной сходимости внутри G_k^- ряда (3.3), составленного

для функции $f_k(z)$, представимой интегралом типа Коши (3.2), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое представление (3.2), в котором $g(\zeta)$ являлась угловыми граничными значениями мероморфной в G_k функции $g_k(z)$ ограниченного вида, для которой произведение $g_k(z)B_k(z)$ входило бы в класс $E_2(G_k)$. Здесь $B_k(z) = b_k[\psi_k(z)]$, а $b_k(w)$ — произведение Бляшке с нулями в точках $\{z_j\}$, $j = 1, 2, \dots$. [Если G_k — область В. И. Смирнова, то подобным свойством обладает функция $g(\zeta)$ в любом представлении $f_k(z)$ в виде (3.2)].

Пусть теперь в многосвязной области G с границей $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m-1} \gamma_k$ дана аналитическая функция $f(z)$, представимая интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{где} \quad \int_{\Gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty. \quad (3.4)$$

Разбивая интеграл (3.4) на сумму интегралов типа Коши, взятых по кривым γ_k , $k = 0, \dots, m-1$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

и применяя к $f_0(z)$ установленные ранее результаты, а для $f_k(z)$ $k=1, \dots, m-1$, сделанные только что замечания, получаем:

Теорема 5. Пусть G — произвольная конечно-связная область, ограниченная жордановым спрямляемым контуром Γ , состоящим из m кривых $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}$, причем γ_0 содержит $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ внутри себя. Пусть далее в каждой компоненте G_k дополнения области G задана последовательность точек $\{z_{kn}\}$ и $\{M_{kn}^*(z)\}$ — последовательность рациональных дробей с полюсами в точках $\{z_{kn}\}$, построенная по указанному выше правилу. Тогда, чтобы для любой аналитической в области G функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (3.4) с суммируемой в квадрате функцией плотности, составленный для $f(z)$ ряд по системе $\{M_{kn}^*(z)\}$ равномерно сходил к $f(z)$ внутри G

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} M_{kn}^*(z), \quad (3.5)$$

где C_{kn} определяются при $k=1, \dots, m-1$, $n=1, 2, \dots$, по формулам (3.3), а при $k=0$ по формулам (1.2), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\psi_0(z_{0n})|}\right) = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\psi_k(z_{kn})|) = \infty \quad k=1, \dots, m-1. \quad (3.6)$$

Если условия (3.6) не выполняются, то не все функции, представимые интегралами типа Коши (3.4) могут быть разложены в ряд

(3.5). Необходимые и достаточные условия для возможности разложения даются в следующей теореме:

Теорема 6. Пусть сходится хотя бы один из рядов (3.6). Тогда для того, чтобы функцию $f(z)$, представимую интегралом типа Коши-Лебега (3.4), можно было разложить в ряд (3.5), необходимо и достаточно, чтобы среди ее представлений (3.4) существовало такое, в котором на каждом контуре γ_k , $k = 0, \dots, m-1$, ограничивающем компоненту дополнения G_k , где соответствующий ряд (3.6) сходится, функция $g(\zeta)$ совпадала почти всюду с угловыми граничными значениями мероморфной в G_k функции $g_k(z)$ ограниченного вида. Причем произведение $g_k(z)B_k(z)$ обязано входить в класс $E_2(G_k)$.

Здесь $B_k(z) = b_k[\psi_k(z)]$, где $b_k(w)$ — произведение Бляшке с нулями $\psi_k(z_{kj})$, $j = 1, \dots$. На контурах γ_k , ограничивающих компоненты дополнения, содержащие внутри себя точки z_{kj} , для которых соответствующий ряд в (3.6) расходится, никаких дополнительных условий на функцию $g(\zeta)$ не накладывается, кроме оговоренного вначале требования $\int_{\gamma_k} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$.

Сделаем дополнительные замечания в связи с приведенной теоремой. Опираясь на теорему 4, доказываемся

Теорема 7. Пусть G_k — области класса В. И. Смирнова. Тогда установленное в теореме 6 свойство $g(\zeta)$ будет иметь место для любого представления данной функции $f(z)$ в виде (3.4), а не только для специального.

Для произвольной области G , для которой компоненты G_k не являются областями В. И. Смирнова, можно дать необходимое условие возможности разложения функции $f(z)$ в ряд, относящееся уже к любому представлению $f(z)$ в виде (3.4). Соответствующее распространение теоремы 3, имевшей место для односвязного случая, получается немедленно. И мы тогда имеем

Теорема 8. Пусть функцию $f(z)$, представимую интегралом типа Коши (3.4), можно разложить в ряд (3.5). Тогда на каждом из контуров γ_k , являющихся границами компоненты G_k дополнения G со сходящимся рядом из (3.6), функция $g(\zeta)$ совпадает с угловыми граничными значениями мероморфной в G_k функции $g_k(z)$ ограниченного вида, для которой произведение $g_k(z)B_k(z)$ является аналитической в G_k функцией класса E_1 .

§ 4. Исследование сходимости рядов по рациональным дробям на границе области

В предыдущих параграфах были приведены результаты, касающиеся сходимости, внутри области, рядов по построенной системе рациональных дробей с полюсами в заданных точках. Естественно после этого поставить вопрос о том, не будут ли получающиеся ряды

сходиться не только внутри области, но также и на границе? Однако мы сейчас покажем, что для произвольных односвязных областей (не являющихся областями В. И. Смирнова) даже среди функций $f(z)$ класса E_2 существуют такие, что соответствующие им ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(\zeta)$ не будут сходиться в среднем на границе γ области G .

Более того, какой бы перманентный метод суммирования мы не применили к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(\zeta)$, частные суммы $\tau_n(\zeta)$ получающегося ряда не могут быть равномерно ограничены в среднем в какой-либо интегральной метрике с весом $\rho(\zeta) > 0$, подчиненным лишь требованию

$$\int_{\gamma} \ln \rho(\zeta) |\psi'(\zeta)| d\zeta > -\infty.$$

При доказательстве только что сформулированного результата мы будем опираться на следующую теорему, ранее установленную нами (см. [6], теорема 10).

Теорема 9. Пусть для функции $f(z)$ существует последовательность $\{f_n(z)\}$, равномерно сходящаяся к $f(z)$ внутри G и такая, что $\int_{\gamma} |f_n(\zeta)|^p \rho(\zeta) ds \leq C < \infty$, $n=1, 2, \dots$, $p > 0$, где все $f_n(z)$

$n=1, 2, \dots$ входят в класс D в области G , а $\rho(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\gamma} \ln \rho(\zeta) |\psi'(\zeta)| d\zeta > -\infty. \quad (4.1)$$

Тогда и $f(z)$ входит в класс D в области G .

В работе [6] эта теорема была сформулирована в предположении, что все $f_n(z)$ многочлены. Однако, приведенное там доказательство годится и для общего случая.

Непосредственным следствием указанной сейчас теоремы является следующая теорема, из которой в качестве следствия мы сумеем вывести упомянутый выше результат.

Теорема 10. Предположим, что выполняется условие (1) для полюсов α_j . И пусть функция $f(z)$, представляемая интегралом типа Коши, такова, что частные суммы $\tau_n(z)$ ряда, полученного применением какого-либо перманентного метода суммирования к

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$, обладают свойством $\int_{\gamma} |\tau_n(\zeta)|^p \rho(\zeta) ds \leq C$, $n=1, 2, \dots$,

где для $\rho(\zeta)$ выполняется условие (4.1). Тогда $f(z)$ входит в класс D в области G .

Доказательство немедленно сводится к предыдущей теореме. Действительно, последовательность $\{\tau_n(z)\}$ в силу перманентности

рассматриваемого метода суммирования, будет сходиться к функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z). \text{ Остается заметить, что } M_n^*(z), \text{ как функции аналитические в замкнутой области } \bar{G}, \text{ входят, очевидно, в класс } D \text{ и, применив теорему 9, сразу можно получить нужное заключение.}$$

Теорему 10 можно, конечно, применять в частности к функциям $f(z)$, входящим в области G в класс E_2 . Здесь представляет интерес рассмотрение случая, когда область G не является областью В. И. Смирнова. Ибо в областях, удовлетворяющих условию В. И. Смирнова, всякая функция $f(z)$ из класса E_2 входит в класс D . В то же время, если область G не удовлетворяет условию В. И. Смирнова, то существуют функции $f(z)$ такие, что $f(z) \in E_2(G)$, но $f(z) \notin D(G)$ (см., напр., [4]). Учитывая это, мы получаем на основании теоремы 10 следующую теорему.

Теорема 11. Если область G не удовлетворяет условию В. И. Смирнова, то существуют аналитические в G функции $f(z)$, принадлежащие классу E_2 , для которых соответствующий ряд (1.2) таков, что применение к нему любого перманентного метода суммирования приводит к ряду, последовательность $\{\sigma_n(\zeta)\}$ частных сумм которого не может быть ограничена ни в какой интегральной метрике с весом $\rho(\zeta)$, удовлетворяющим лишь условию (4.1).

Приведем сейчас теорему, в которой дается достаточное условие, при выполнении которого будет иметь место сходимость в среднем на границе ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(\zeta)$ для любой функции из рассматриваемого класса.

Теорема 12. Пусть область G такова, что любой интеграл типа Коши-Лебега $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, где $\int_{\gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$, изображает внутри G аналитическую функцию $f(z)$ класса E_2 . Тогда, составленный для функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$ по системе рациональных дробей с полюсами, удовлетворяющими условию (1), будет сходиться на γ в метрике L_2 к $f(\zeta)$ — угловым граничным значениям $f(z)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^n C_k M_k^*(\zeta) \right|^2 ds = 0.$$

Доказательство этой теоремы немедленно следует из наших недавних результатов, касающихся интегралов типа Коши, которые будут приведены в другой статье.

В заключение сделаем некоторые замечания, касающиеся коэффициентов C_n и единственности разложения функций в ряды рациональных дробей с заданным множеством полюсов. Из доказанных ранее теорем следует, что для любой функции $f(z)$ представимой интегралом типа Коши (2), ряд из квадратов модулей коэффициентов

будет сходящимся: $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$. В самом деле, ведь C_n — это ко-

эффициенты Фурье по ортогональной системе $\{\Phi_n(\xi)\}$ для функции $F_1(\xi)$ с суммируемым квадратом модуля на $|\xi| = 1$. Естественно теперь поставить вопрос о том, имеет ли место в нашем случае теорема Фишера-Рисса, т. е. будет ли для произвольной последовательности

$\{C_n\}$, удовлетворяющей условию $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$ равно-

мерно сходиться внутри G к функции $f(z)$, изображаемой интегралом типа Коши (2)? Просматривая еще раз приведенные выше доказательства теорем, нетрудно видеть, что это действительно так. И мы получаем таким образом следующую теорему, аналогичную теореме Фишера-Рисса.

Теорема 12. Для всякой аналитической в области G функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2), коэффициенты, определяемые по формулам (1.2), удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$. Справедливо также и обратное: по всякой последовательности $\{C_n\}$, для которой выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$, мож-

но составить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$, который окажется равномерно сходящимся к некоторой функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2). При этом, если точки z_j таковы, что $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|z_j|}\right) < \infty$, то для функции $g(\zeta)$ имеют место заключения теорем 3 и 4.

Из сформулированной сейчас теоремы вытекает следующее замечание о единственности разложения.

Возьмем любую функцию $f(z)$, представимую интегралом типа Коши (2). Тогда кроме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$ с коэффициентами, определяемыми по формулам (1.2), не может существовать сходящегося к

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \int_0^{2\pi} [\varphi'(re^{i\theta})]^2 d\theta < \infty;$$

նկատենք, որ ժորդանյան ուղղելի կամայական γ կորի համար կարելի է պնդել միայն, որ $\varphi'(\omega) \in H_1$:

Ներկա աշխատության նպատակն է, առաջին՝ ցույց տալ, որ փոքր ինչ ձևափոխելով Մ. Մ. Զրբաշյանի կողմից $[M_n(z)]$ սխեմի մի համար առաջարկված սահմանումը, կարելի է ստանալ նույն $\{a_j\}$ կետերում բևեռներ ունեցող բացիորդ կոտորակների $[M_n^*(z)]$ սխեմ, որը բազիս է կազմում զգալիորեն ավելի լայն, քան դա Զրբաշյանի մոտ էր, անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության մեջ, արդեն ժորդանյան ուղղելի γ կորով սահմանափակված կամայական տիրույթում. երկրորդ՝ հաստատել (1) պայմանի կատարման անհրաժեշտությունը դիտարկված դասից ամեն մի ֆունկցիա շարքի վերածելու հնարավորության համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 10, № 1, 1957.
2. Кочарян Г. С. О приближении рациональными функциями в комплексной области. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук* 11, № 4, 1958.
3. Walsh J. L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York, 1935.
4. Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук*, 9, № 7, 1956.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Изд. 2-ое, М.—Л., 1950.
6. Тумаркин Г. Ц. Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых. Матем. сб.*, 42 (84):1, 1957.

Б. Л. Абрамян, Н. О. Гулканян

Кручение полой двухслойной полусферы

Задачу о кручении составных валов переменного диаметра при помощи функции напряжений рассмотрел К. С. Чобанян [1]. Кручение составного ступенчатого вала рассмотрено в работах Сайто [2] и Б. А. Костандяна [3].

Кручение конуса, состоящего из двух различных материалов с конической поверхностью их раздела, ограниченного двумя закрепленными сферическими поверхностями и скручивающегося нагрузкой, приложенной на конической поверхности, рассмотрено Ч. Дасом [4]. Решение этой задачи получено при помощи конических функций. Ч. Дас рассмотрел также и кручение составного шара и эллипсоидов вращения [5].

В настоящей статье рассматривается кручение двухслойной полой полусферы, когда она скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой. Решение получено при помощи конических и присоединенных функций Лежандра.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим полусферу из двух различных материалов со сферической поверхностью их раздела, когда эта полусфера скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой.

Возьмем осевое сечение полусферы и обозначим области, занятые различными материалами, через D_1 и D_2 . В дальнейшем, все величины, относящиеся к областям D_1 и D_2 будем обозначать соответственно индексами 1 и 2.

Уравнение равновесия бесконечно малого элемента тела вращения в цилиндрических координатах r, z (где ось z — направлена по оси симметрии) можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rz}^i) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{rz}^i) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где касательные напряжения τ_{rz}^1 и τ_{rz}^2 определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi}^i &= G_i r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_i}{r} \right), \\ \tau_{z\varphi}^i &= G_i \frac{\partial v_i}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \text{ в области } D_i \quad (i=1, 2) \quad (1.2)$$

Здесь v_i — тангенциальное перемещение, а G_i — модуль сдвига материала в области D_i .

На свободной поверхности тела вращения должно быть задано напряжение

$$S_n(s) = \tau_{r\varphi} \cos(r, n) + \tau_{z\varphi} \cos(z, n), \quad (1.3)$$

где n — внешняя нормаль к контуру осевого сечения тела, s — расстояние точки поверхности тела, отсчитываемое вдоль образующей поллой полусферы, от точки A .

Из условия равновесия бесконечно малого элемента у поверхности раздела следует, что проекция касательного напряжения $S_n(s)$ на нормаль к линии раздела областей D_1 и D_2 должна быть непрерывной [1], то есть

$$\tau_{r\varphi}^{(1)} \cos(rn) + \tau_{z\varphi}^{(1)} \cos(zn) = \tau_{r\varphi}^{(2)} \cos(rn) + \tau_{z\varphi}^{(2)} \cos(zn). \quad (1.4)$$

Здесь $\cos(rn)$ и $\cos(zn)$ — направляющие косинусы нормали n к линии раздела областей D_1 и D_2 .

Если в выражения (1.1)–(1.3) ввести функцию перемещения $\Psi_i^*(r, z) = \frac{v_i}{r}$, тогда будем иметь соотношения

$$\tau_{r\varphi}^i = G_i r \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial r}, \quad \tau_{z\varphi}^i = G_i r \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial z}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_i^*}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i^*}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial r} = 0 \quad (1.6)$$

и

$$S_n(s) = G_i r \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial n}. \quad (1.7)$$

Условие непрерывности напряжения S_n на линии раздела областей D_1 и D_2 (1.4) приводится к виду

$$G_1 \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial n} = G_2 \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial n}, \quad (1.8)$$

а условие непрерывности перемещения на этой линии выразится равенством

$$\Psi_1^* = \Psi_2^*. \quad (1.9)$$

Переходя к координатной системе t, ξ [6]

$$\left. \begin{aligned} r &= ce^t \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \xi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \\ z &= ce^t \xi, \quad t = \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где c — радиус сферической поверхности раздела материалов (фиг. 1), уравнение (1.6) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} + (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - 4\xi \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi} = 0. \quad (1.11)$$

Здесь введено обозначение

$$\Psi_i^*[r(t, \xi), z(t, \xi)] = \Psi_i(t, \xi). \quad (1.12)$$

Условия сопряжения функций Ψ_1 и Ψ_2 на линии контакта областей D_1 и D_2 согласно (1.8) и (1.9) принимают вид

$$\Psi_1(0, \xi) = \Psi_2(0, \xi), \quad (1.13)$$

$$G_1 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right)_{t=0} = G_2 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right)_{t=0}.$$

Напряженное состояние полусферы при кручении осесимметричной нагрузкой будет определяться напряжениями $\tau_{\xi\varphi}$ и $\tau_{t\varphi}$ [6]

$$\tau_{\xi\varphi}^t = -G_i (1 - \xi^2) \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi}, \quad (1.14)$$

$$\tau_{t\varphi}^t = G_i \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}.$$

Представим граничные условия в виде

$$\tau_{\xi\varphi}(t, 0) = f_1(t), \quad (-t_1 < t < t_2) \quad (1.15)$$

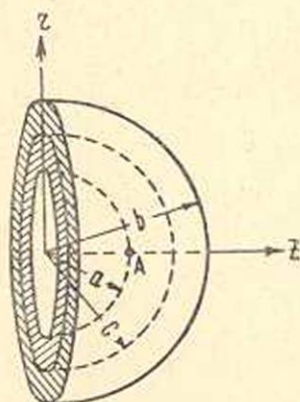
$$\left. \begin{aligned} \tau_{t\varphi}(-t_1, \xi) &= f_2(\xi), \\ \tau_{t\varphi}(t_2, \xi) &= f_3(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (0 < \xi < 1) \quad (1.16)$$

где $t_1 = \ln \frac{c}{a}$, $t_2 = \ln \frac{b}{c}$, функции f_i в указанных интервалах конечно непрерывны и имеют ограниченные изменения.

2. Определение функции перемещения

Решения для функций Ψ_1 и Ψ_2 берем в виде [6]

$$\Psi_1(t, \xi) = A_0^{(1)} e^{-3t} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}t} [A_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k t + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k t] \varphi_{2k+1}(\xi) +$$



Фиг. 1.

$$+ D_0^{(1)} e^{-\frac{3}{2}t} P_{-\frac{1}{2}+\mu_k t}^{(1)}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(1)} P_{-\frac{1}{2}+\mu_k t}^{(1)}(\xi) T_k^{(1)}(t),$$

$$(-t_1 < t < 0, \quad 0 < \xi < 1) \quad (2.1)$$

$$\Psi_2(t, \xi) = A_0^{(2)} e^{-3t} + B_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}t} [A_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k t +$$

$$+ B_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k t] \varphi_{2k+1}(\xi) + D_0^{(2)} P_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi) e^{-\frac{3}{2}t} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(2)} P_{-\frac{1}{2}+\gamma_k t}^{(2)}(\xi) T_k^{(2)}(t), \quad (0 < t < t_2, \quad 0 < \xi < 1) \quad (2.2)$$

где $\beta_k = \frac{4k+3}{2}$, функции $T_k^{(1)}(t)$ и $T_k^{(2)}(t)$ имеют значения

$$\left. \begin{aligned} T_k^{(1)}(t) &= e^{-\frac{3}{2}t} \cos \mu_k t, & \mu_k &= \frac{k\pi}{t_1}, \\ T_k^{(2)}(t) &= e^{-\frac{3}{2}t} \cos \gamma_k t, & \gamma_k &= \frac{k\pi}{t_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

функция $\varphi_{2k+1}(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_{2k+1}(\xi)$, $P_{2k+1}(\xi)$ — полином Лежандра первого рода, а $P_{-\frac{1}{2}+\mu_k t}^{(1)}(\xi)$ — первая производная конической функции от действительного аргумента ξ [7–9].

Функции $T_k^{(1)}(t)$ и $T_k^{(2)}(t)$ ортогональны с весом e^{3t} и для них имеют место соотношения

$$\int_{-t_1}^0 e^{3t} T_k^{(1)}(t) T_p^{(1)}(t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq p, \\ \frac{t_1}{2} & k = p, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\int_0^{t_2} e^{3t} T_k^{(2)}(t) T_p^{(2)}(t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq p, \\ \frac{t_2}{2} & k = p, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\int_{-t_1}^0 e^{-\frac{3}{2}t} T_k^{(1)}(t) dt = \int_0^{t_2} e^{-\frac{3}{2}t} T_k^{(2)}(t) dt = 0. \quad (2.6)$$

Функции же $\varphi_{2k+1}(\xi)$ ортогональны с весом $(1-\xi^2)$ и удовлетворяют равенствам

$$\int_0^1 (1-\xi^2) \varphi_{2k+1}(\xi) \varphi_{2p+1}(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & k \neq p, \\ \omega_p = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4p+3} & k = p. \end{cases} \quad (2.7)$$

Для удовлетворения граничным условиям (1.15) и (1.16) произвольные функции f_i представим в виде рядов

$$f_1(t) = \begin{cases} f_1^{(1)}(t) = g_0 e^{-\frac{3}{2}t} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k T_k^{(1)}(t) & (-t_1 < t < 0), \\ f_1^{(2)}(t) = q_0 e^{-\frac{3}{2}t} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k T_k^{(2)}(t) & (0 < t < t_2), \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} f_2(\xi) &= V \sqrt{1-\xi^2} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{2k+1}(\xi) \right] \\ f_3(\xi) &= V \sqrt{1-\xi^2} \left[b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_{2k+1}(\xi) \right] \end{aligned} \quad (0 < \xi < 1). \quad (2.9)$$

Согласно соотношениям (2.4)–(2.7), для коэффициентов разложений (2.8)–(2.9) будем иметь следующие значения

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{t_1} \int_{-t_1}^0 e^{\frac{3}{2}t} f_1^{(1)}(t) dt, & g_k &= \frac{2}{t_1} \int_{-t_1}^0 e^{\frac{3}{2}t} f_1^{(1)}(t) T_k^{(1)}(t) dt, \\ q_0 &= \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} e^{\frac{3}{2}t} f_1^{(2)}(t) dt, & q_k &= \frac{2}{t_2} \int_0^{t_2} e^{\frac{3}{2}t} f_1^{(2)}(t) T_k^{(2)}(t) dt, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{2} \int_0^1 V \sqrt{1-\xi^2} f_2(\xi) d\xi, & a_k &= \frac{1}{\omega_k} \int_0^1 V \sqrt{1-\xi^2} f_2(\xi) \varphi_{2k+1}(\xi) d\xi, \\ b_0 &= \frac{3}{2} \int_0^1 V \sqrt{1-\xi^2} f_3(\xi) d\xi, & b_k &= \frac{1}{\omega_k} \int_0^1 V \sqrt{1-\xi^2} f_3(\xi) \varphi_{2k+1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вычисляя при помощи выражений (2.1) и (2.2) напряжения τ_{rz}^i и $\tau_{\theta\theta}^i$ ($i=1, 2$), а затем составляя согласно (1.15) равенства

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(1)}(t, 0) &= g_0 e^{-\frac{3}{2}t} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k T_k^{(1)}(t) & (-t_1 < t < 0), \\ \tau_{rz}^{(2)}(t, 0) &= q_0 e^{-\frac{3}{2}t} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k T_k^{(2)}(t) & (0 < t < t_2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

найдем

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} &= -\frac{g_0}{G_1 P_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(0)}, & D_k^{(1)} &= -\frac{g_k}{G_1 P_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(\gamma_k)}, \\ D_0^{(2)} &= -\frac{q_0}{G_2 P_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(0)}, & D_k^{(2)} &= -\frac{q_k}{G_2 P_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(\gamma_k)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Составляя далее равенства (1.16) и (1.13) и учитывая разложения (2.9), для постоянных интегрирования $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$ и $B_0^{(2)}$ получим следующие значения

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &= -\frac{e^{-\frac{3}{2}t_1}}{3G_1} \left[g_0 + a_0 e^{-\frac{3}{2}t_1} - \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} g_k}{\frac{9}{4} + \mu_k^2} \right], \\ A_0^{(2)} &= -\frac{e^{\frac{3}{2}t_2}}{3G_2} \left[q_0 + b_0 e^{\frac{3}{2}t_2} - \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} q_k}{\frac{9}{4} + \gamma_k^2} \right], \\ B_0^{(2)} &= \frac{b_0 e^{3t_2}}{3G_2} - \frac{a_0 e^{-3t_1}}{3G_1} + \frac{3}{4G_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[2 + (-1)^{k+1} e^{-\frac{3}{2}t_1} \right] g_k}{\frac{9}{4} + \mu_k^2} - \\ &\quad - \frac{3}{4G_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[2 + (-1)^{k+1} e^{\frac{3}{2}t_2} \right] q_k}{\frac{9}{4} + \gamma_k^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

а для определения постоянных интегрирования $A_k^{(i)}$, $B_k^{(i)}$ ($i=1, 2$) получаем следующую систему четырех линейных уравнений

$$\begin{aligned} A_p^{(1)} (2\beta_p \operatorname{ch} \beta_p t_1 + 3 \operatorname{sh} \beta_p t_1) - B_p^{(1)} (3 \operatorname{ch} \beta_p t_1 + 2\beta_p \operatorname{sh} \beta_p t_1) &= M_p \frac{2}{G_1}, \\ B_p^{(1)} - B_p^{(2)} &= N_p \frac{2}{G_1}, \\ B_p^{(2)} (2\beta_p \operatorname{sh} \beta_p t_2 - 3 \operatorname{ch} \beta_p t_2) + A_p^{(2)} (2\beta_p \operatorname{ch} \beta_p t_2 - 3 \operatorname{sh} \beta_p t_2) &= R_p \frac{2m_0}{G_1}, \\ A_p^{(1)} 2\beta_p m_0 - 3m_0 B_p^{(1)} + 3B_p^{(2)} - 2\beta_p A_p^{(2)} &= Q_p \frac{2m_0}{G_1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где введены обозначения

$$m_0 = \frac{G_1}{G_2}, \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} M_p &= a_p e^{-\frac{3}{2}t_1} - \frac{3\varphi_{2p+1}(0)}{2\omega_p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} g_k}{\mu_k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)^2}, \\ N_p &= \frac{m_0 \varphi_{2p+1}(0)}{2\omega_p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\gamma_k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)^2} - \\ &\quad - \frac{\varphi_{2p+1}(0)}{2\omega_p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{\mu_k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} R_p &= b_p e^{\frac{3}{2}t_2} - \frac{3\tau_{2p+1}(0)}{2\omega_p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} q_k}{\tau_k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)^2}, \\ Q_p &= \frac{3\tau_{2p+1}(0)}{2\omega_p} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{\tau_k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\tau_k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Решив систему (2.15) относительно постоянных $A_p^{(i)}$ и $B_p^{(i)}$ ($i=1, 2$) получим их значения.

Подставив значения найденных коэффициентов в формулы (2.1) и (2.2), определим функции перемещения $\Psi_1(t, \xi)$ и $\Psi_2(t, \xi)$, представляющие решение задачи.

Наконец, пользуясь соотношением

$$M(s) = 2\pi c^2 \int_0^s e^{2t(s)} [1 - \xi^2(s)] S_h(s) ds \quad (2.18)$$

(где $M(s)$ — крутящий момент внешних сил, приложенных на части поверхности полой полусферы определяемой координатой s) и произведя интегрирование по всей длине образующей полой полусферы, получим равенство

$$\begin{aligned} a_0 e^{-3t_1} - b_0 e^{3t_2} - g_0 \left(1 - e^{-\frac{3}{2}t_1}\right) + q_0 \left(1 - e^{\frac{3}{2}t_2}\right) - \\ - \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k \left[1 + (-1)^{k+1} e^{-\frac{3}{2}t_1}\right]}{\tau_k^2 + \frac{9}{4}} + \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k \left[1 + (-1)^{k+1} e^{\frac{3}{2}t_2}\right]}{\tau_k^2 + \frac{9}{4}} = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

которое представляет собою уравнение равновесия скручивающих полусферу моментов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 XI 1960

Բ. Լ. ՅԵՐԱԽԱՆՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼԻԱՆՅԱՆ

ԵՐԿՇԵՐՏ ՍՆԱՄԵՋ ԿԻՍԱԳՆԴԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փոփոխական տրամադժով բաղադրվող լիսենների ոլորման խնդիրը լարումների ֆունկցիայի կիրառման օգնությամբ զիտարկել է Կ. Ս. Զորանյանը [1]: Բաղադրվող աստիճանային լիսենի ոլորումն աստիճանարկել է Սախոյի [2] և Բ. Ա. Կոստանդյանի [3] աշխատություններում:

Երկու տարրեր նյութերից կազմված կոնի ոլորումն ուսումնասիրել է 2. Դասը [4]: Այս աշխատության մեջ վերցրված կոնում նյութերը միմյանցից բաժանված են կոնական մակերևույթով: Կոնը սահմանափակված է ամբողջական գնդաձև մակերևույթներով և կոնական մակերևույթով, որի վրա կիրառված է ուղիղ բևեռ: Խնդրի լուծումն ստացված է կոնական ֆունկցիաների օգնությամբ:

2. Դասը [5] ուսումնասիրել է նաև բաղադրյալ գնդի և պտտման էլիպսոիդների ոլորումը:

Ներկա աշխատության մեջ գիտարկվում է երկշերտ սնամեղ կիսագնդի ոլորումը, երբ կիսագնդի ոլորվում է նրա մակերևույթի վրա կիրառված, առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ կամավոր բևեռով:

Խնդրի լուծումն ստացված է կոնական և էլիպսոիդի հարակից ֆունկցիաների օգնությամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К. С. Кручение составного вала переменного диаметра. „ДАН АрмССР“, 27, № 3, 1958, 139—144.
2. Сайто (Saito H.). Torsion of a Circular Shaft Press-fitted with a Disc. „Zeitschr. für ang. Math. und Phys.“, vol. VI, 1955, 498—503.
3. Костандия Б. А. Кручение вала с насаженным диском. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, 11, № 3, 1958, 63—77.
4. Дас Ч. (Das S. Ch.). On the Stresses in composite truncated cone due to shearing stresses on the curved surface. „Indian Journ. Theoret. Phys.“, 4, № 4, 1956, 89—92.
5. Дас Ч. (Das S. Ch.). On the Stresses in twisted composite spheres and spheroids. „Canad. Journ. Phys.“, 35, № 7, 1957, 811—817.
6. Абрамян Б. Л. Кручение тела вращения осесимметричной нагрузкой. „ПММ“, 25, вып. 6, 1960, 1047—1056.
7. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Иноиздат, М., 1952.
8. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 391, 404.
9. Кармазина Л. Н. Асимптотические формулы для функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

„Вычислительная математика“, № 6, 1960. 3—16.

Ж. Е. Багдасарян, В. Ц. Гюни

Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях слоистых анизотропных оболочек*

Рассматривается задача о резонансе в нелинейных колебаниях слоистых ортотропных оболочек.

Задача нелинейных поперечных колебаний ортотропных оболочек вращения рассмотрена в работе [3].

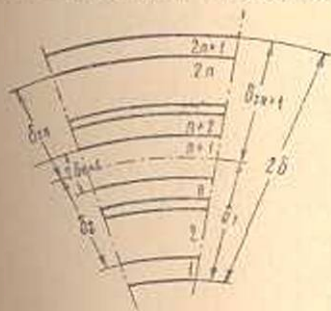
В работах [4, 6] рассматриваются задачи нелинейной динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек.

1. Рассматриваемые оболочки собраны из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки (фиг. 1) [1, 5].

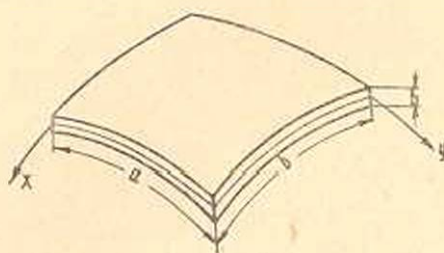
Предполагается, что одна из плоскостей упругой симметрии материала каждого слоя параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две — перпендикулярны к координатным линиям, совпадающим с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки.

Считается, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза Кирхгоффа-Лява [1, 5].

Рассматриваются два класса слоистых ортотропных оболочек: пологие оболочки двойкой кривизны (фиг. 2) [1, 6] и пологие оболочки вращения, имеющие замкнутую вершину (фиг. 3) [5, 3, 4].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

2. *Пологие оболочки.* Как известно [1, 6], основная разрешающая система дифференциальных уравнений движения слоистых ортотропных пологих оболочек, выведенная в предположении отсутствия инерционных сил в тангенциальных направлениях, имеет вид

* Работа доложена на Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек в г. Казани в октябре 1960 г.

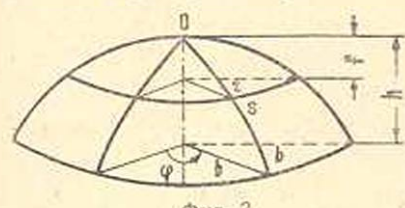
$$a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (a_{06} + 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - q(x, y, t) + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь w — прогиб оболочки, φ — функция напряжений, через которую усилия T_1 , T_2 и S представляются следующим образом



$$T_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2.2)$$

m^* — приведенная масса, которая для симметрично собранных слоистых оболочек имеет вид

Фиг. 3.

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{i=1}^n \gamma_i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

где γ_i — удельный вес i -ого слоя.

Для усилий и моментов имеем [1, 5, 7]

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2, & M_1 &= D_{11} \chi_1 + D_{12} \chi_2, \\ T_2 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2, & M_2 &= D_{12} \chi_1 + D_{22} \chi_2, \\ S &= C_{66} \omega, & H &= D_{66} \tau, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, & \chi_1 &= - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \chi_2 &= - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \tau &= - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$C_{jk} = 2 \left[B_{jk}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{i=1}^n B_{jk}^i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

$$D_{jk} = \frac{2}{3} \left[B_{jk}^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{i=1}^n B_{jk}^i (\delta_i^3 - \delta_{i+1}^3) \right],$$

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad B_{12}^i = \frac{E_1^i \mu_2^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i} = \frac{E_2^i \mu_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i},$$

$$B_{66}^i = G_{xy}^i.$$

причем

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_{\theta\theta} = \frac{1}{C_{\theta\theta}},$$

$$\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Представляя решение системы (2.1) в виде

$$\varphi = \Phi_{mn}(t) \sin \lambda_n x \sin \mu_m y,$$

$$\omega = f_{mn}(t) \sin \lambda_n x \sin \mu_m y,$$
(2.5)

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$, $\mu_m = \frac{m\pi}{a}$, тождественно удовлетворим условиям шарнирного опирания краев, а для определения $f_{mn}(t)$, аналогично [4], получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 f_{mn} - l_{mn} f_{mn}^2 + d_{mn} f_{mn}^3 = q_{mn}(t), \quad (2.6)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{m^*} \left[\frac{(k_y \lambda_n^2 + k_x \mu_m^2)^2}{a_{11} \lambda_n^4 + (a_{\theta\theta} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{22} \mu_m^4} + \right.$$

$$\left. + D_{11} \lambda_n^4 + 2(D_{12} + 2D_{\theta\theta}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + D_{22} \mu_m^4 \right],$$

$$l_{mn} = \frac{16}{m^* ab} \cdot \frac{\lambda_n \mu_m (k_y \lambda_n^2 + k_x \mu_m^2)}{a_{11} \lambda_n^4 + (a_{\theta\theta} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{22} \mu_m^4},$$

$$d_{mn} = \frac{512}{9} \cdot \frac{1}{m^* a^2 b^2} \cdot \frac{\lambda_n^4 \mu_m^2}{a_{11} \lambda_n^4 + (a_{\theta\theta} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{22} \mu_m^4},$$

$$q_{mn}(t) = \frac{4}{m^* ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \sin \lambda_n x \sin \mu_m y dx dy.$$

3. Оболочки вращения. Как известно [3, 6], основная разрешающая система дифференциальных уравнений движения пологих слоистых ортотропных оболочек вращения, выведенная в предположении отсутствия инерционных сил по образующим, имеет вид

$$a_{11} r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + a_{11} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{22} \varphi - r \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{r}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 = 0,$$

$$D_{11} r \frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + D_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - D_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\omega + f) \cdot \varphi +$$

$$+ \int_0^r \left(m^* \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - p(r, t) \right) r dr = \frac{P(r, t)}{2\pi}, \quad (3.1)$$

где $f = f(r)$ — уравнение срединной поверхности оболочки.

Рассматриваются следующие граничные условия

$$w(b, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = -\alpha M_1(b), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (3.2)$$

$$u(b) = -\eta T_1(b) \quad \left(\eta = \left[a_{12}r + a_{11}r^2 \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=b} \right). \quad (3.3)$$

Здесь α и η — коэффициенты пропорциональности.

Усилия T_1 и T_2 выражаются через φ следующим образом [3]

$$T_1 = -\frac{\varphi}{r}, \quad T_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (3.4)$$

Для деформации срединной поверхности имеем [3]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r}, \quad (3.5)$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \chi_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.6)$$

Вводим аппроксимирующее выражение для прогиба [6]

$$w(r, t) = w_0(t) (b^2 - r^2)(b^2 - nr^2), \quad (3.7)$$

где

$$w_0(t) = \frac{1}{b^4} w(0, t), \quad n = \frac{\alpha(D_{11} + D_{12}) - 1}{\alpha(5D_{11} + D_{12}) - 1},$$

которое тождественно удовлетворяет граничным условиям (3.2). Тогда, определив $\varphi(r, t)$ из первого уравнения системы (3.1) и подставив во второе уравнение, для определения $w_0(t)$ получим дифференциальное уравнение [6]

$$l_0 \frac{d^2 w_0}{dt^2} + l_1 w_0 - l_2 w_0^2 + l_3 w_0^3 = l_4 p(t) + l_5 P(t), \quad (3.8)$$

где для коэффициентов l_i имеем:

а) в случае сферической оболочки

$$\begin{aligned} l_0 &= m^* \frac{5n^2 - 15n + 4}{120} b^{10}, \\ l_1 &= \left\{ (n^2 - 8n + 3) D_{11} - \frac{2n^2 + 1}{3} D_{22} + \frac{8h^2}{a_{11}} \left[\frac{3 - 5n}{20(25 - k^2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2n^2 + n + 1}{12(9 - k^2)} + \frac{R_2}{R_0} \left[\frac{2}{5 + k} - \frac{n + 1}{3 + k} \right] b^{k-5} \right] \right\} b^6, \\ l_2 &= \frac{4h}{a_{11}} \left[\frac{4 - 6n}{15(49 - k^2)} + \frac{15n^2 - 6n - 1}{15(25 - k^2)} - \frac{10n^3 + 5n^2 - 4n + 1}{20(9 - k^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2R_2}{R_0} \left[\frac{4}{7 - k} - \frac{4(n + 1)}{5 + k} + \frac{(n + 1)^2}{3 + k} \right] b^{k-5} + \frac{R_1}{R_0} \left[\frac{2}{5 + k} - \frac{n + 1}{3 + k} \right] b^{k-7} \right] b^{10}, \end{aligned}$$

$$l_1 = \frac{4}{a_{11}} \left\{ \frac{42n^2 - 56n - 22}{105(49 - k^2)} - \frac{15n^3 - 3n^2 - 11n + 7}{30(25 - k^2)} + \right. \\ \left. + \frac{5n^4 + 5n^3 - 3n^2 - n + 2}{30(9 - k^2)} + \frac{R_1}{R_0} \left[\frac{4}{7+k} - \frac{4(n+1)}{5+k} - \frac{(n+1)^2}{3+k} \right] b^{k-7} \right\} b^{14}, \\ l_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{n+1}{4} \right) b^6, \quad l_5 = -\frac{n}{4\pi} b^4, \quad (3.9)$$

$$R_0 = -b^k (a_{12}b - \gamma - a_{11}kb),$$

$$R_1 = \frac{4b^7}{49 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 7a_{11}b) - \frac{4(n+1)b^7}{25 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 5a_{11}b) + \\ + \frac{(n+1)^2 b^7}{9 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 3a_{11}b),$$

$$R_2 = \frac{2b^5}{25 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 5a_{11}b) - \frac{(n+1)b^5}{9 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 3a_{11}b).$$

$$k^2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}; \quad (3.10)$$

в) в случае конической оболочки

$$l_1 = \left\{ (n^2 - 8n + 3) D_{11} - \frac{1 + 3n^2}{3} D_{22} + \frac{2h^2}{a_{11}} \left[\frac{1 - 2n}{6(16 - k^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3n^2 + 2n - 1}{12(4 - k^2)} + \frac{R_2}{R_0} \left(\frac{2}{k+4} - \frac{n+1}{k+2} \right) b^{k-4} \right] \right\} b^6, \\ l_2 = -\frac{2h}{a_{11}} \left[\frac{28 - 44n}{99(49 - k^2)} + \frac{36n^2 + 16n - 20}{63(25 - k^2)} + 2 \frac{198n^2 - 220n + 86}{693(16 - k^2)} - \right. \\ \left. - \frac{7n^3 + 11n^2 + n - 3}{35(9 - k^2)} - 2 \frac{63n^3 + 9n^2 - 31n + 23}{315(4 - k^2)} + \right. \\ \left. + \frac{R_1}{R_0} \left(\frac{2}{k+4} - \frac{n+1}{k+2} \right) b^{k-7} + \frac{2R_2}{R_0} \left(\frac{4}{k+7} - \frac{4(n+1)}{k+5} + \frac{(n+1)^2}{k+3} \right) b^{k-4} \right], \\ R_2 = \left[\frac{2}{16 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 4a_{11}b) - \frac{n+1}{4 - k^2} (a_{12}b - \gamma - 2a_{11}b) \right] b^4,$$

а остальные коэффициенты l_i и R_i совпадают с соответствующими коэффициентами сферической оболочки.

Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} + \omega^2 w_0 - l w_0^2 + d w_0^3 = q(t), \quad (3.11)$$

где

$$\omega^2 = \frac{l_1}{l_0}, \quad l = \frac{l_2}{l_0}, \quad d = \frac{l_3}{l_0}, \quad q(t) = \frac{l_4 p(t) + l_5 P(t)}{l_0}.$$

4. В п. п. 2 и 3 получили уравнение типа

$$f'' + \omega^2 f - lf^2 + df^3 = q(t). \quad (4.1)$$

Пусть

$$q(t) = q \cos \theta t. \quad (4.2)$$

Тогда (4.1) примет вид

$$f'' + 2\lambda f' + \omega^2 f - lf^2 + df^3 = q \cos \theta t. \quad (4.3)$$

Член $2\lambda \frac{df}{dt}$ в уравнении (4.3) характеризует затухание системы,

где показатель линейного затухания λ определяется из опытов [2].

Уравнение типа (4.3) исследовано в [8]. Ниже используются основные результаты, полученные в этой работе.

Из уравнения (4.3), пренебрегая нелинейными членами, находим

$$f'' + 2\lambda f' + \omega^2 f = q \cos \theta t, \quad (4.4)$$

решение которого имеет вид [8]

$$f = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \beta) + b \cos(\theta t + \delta), \quad (4.5)$$

где a и β произвольные постоянные, а

$$b = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\lambda^2 \theta^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\lambda \theta}{\theta^2 - \omega^2}. \quad (4.6)$$

В (4.5) существенным является второй член, т. к. первый экспоненциально убывает со временем, и решение (4.5) через достаточно большой промежуток времени фактически имеет вид

$$f = b \cos(\theta t + \delta). \quad (4.7)$$

Решение уравнения (4.3) в случае, когда $q = 0$ легко можно получить методом последовательных приближений. Имеем [8]

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots, \quad (4.8)$$

$$f_1 = b \cos \omega t,$$

$$f_2 = \frac{lb^2}{2\omega^2} - \frac{lb^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t,$$

$$f_3 = -\frac{b^3}{16\omega^2} \left(\frac{l^2}{3\omega^2} - \frac{d}{2} \right) \cos 3\omega t, \quad (4.9)$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots,$$

$$\omega_0 = \omega, \quad (4.10)$$

$$\omega_1 = 0,$$

$$\omega_2 = \left(\frac{3d}{8\omega} - \frac{5l^2}{12\omega^3} \right) b^2. \quad (4.11)$$

Пусть мы находимся вблизи обычного резонанса, т. е. $\theta = \omega + \varepsilon$. В формуле (4.6) заменив ω на нелинейное значение частоты $\bar{\omega}$, по формуле (4.10) получим [8]

$$b^2 [(z - zb^2)^2 + \lambda^2] = \frac{q^2}{4\omega^2}, \quad (4.12)$$

где

$$x = \frac{3d}{8\omega} - \frac{5l^2}{12\omega^3}.$$

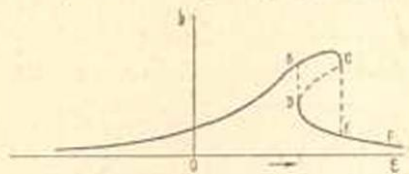
Уравнение (4.12), начиная с определенного значения $q_{kp} = \frac{8\omega^2\lambda^2}{|x|}$, имеет три вещественных корня для определенной области частот [8]. Границы этой области определяются условием

$$\frac{db}{dz} = \frac{-zb + \lambda^2}{z^2 + \lambda^2 - 4xz b^2 + 3x^2 b^4} = \infty$$

или

$$z^2 - 4xz b^2 + 3x^2 b^4 + \lambda^2 = 0. \quad (4.13)$$

Решая (4.13) совместно с (4.12), находим точки поворота кривой (4.12) C и D (см. фиг. 4). Отрезок CD соответствует неустойчивым колебаниям системы [9]. В точке C происходит срыв амплитуды, которая скачком падает до точки E ; при обратном процессе в точке D амплитуда скачком возрастает до точки B . Это явление сопровождается преодолением некоторого энергетического барьера [7].



Фиг. 4.

Следует отметить, что нелинейность не влияет на максимальное значение амплитуды b , равное $b_{max} = \frac{q}{2\omega\lambda}$.

Нелинейность колебаний приводит к появлению существенно новых типов резонансов, т. е. резонансов на обертонах и на кратных частотах собственных колебаний.

Следует отметить, что эти резонансы имеют автоколебательный характер и существенно отличаются от параметрически возбуждаемых колебаний, хотя и возникают на одних и тех же частотах.

Случай $\theta = \frac{\omega}{2} + \pi$ и аналогичные ему приводят к возникновению резонансов рассмотренного выше характера, но с меньшей интенсивностью [8, 9].

Пусть $\theta = 2\omega + \pi$. Тогда для амплитуд установившихся колебаний в областях неустойчивости получены следующие возможные значения [8]

$$b = 0, \quad (4.15)$$

$$b^2 = \frac{1}{x} \left[\frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{lq}{6\omega^2} \right)^2 - \lambda^2} \right], \quad (4.16)$$

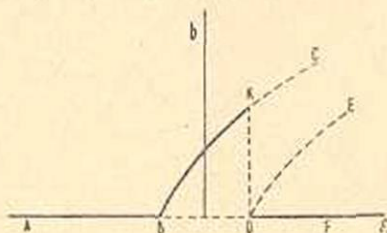
$$b^2 = \frac{1}{x} \left[\frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{lq}{6\omega^2} \right)^2 - \lambda^2} \right], \quad (4.17)$$

где

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{lq}{3\omega^2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (4.18)$$

Зависимость b от ε изображена на фиг. 5.

В интервале AB $b=0$, т. е. резонанс отсутствует. На участке BD значение $b=0$ неустойчиво, система находится в состоянии резонанса и получается процесс установления колебаний по линии BK .



Фиг. 5.

В точке K амплитуда скачком падает до значения $b=0$ и в дальнейшем устойчивым является эта ветвь. Решение DE всюду неустойчиво [2, 8, 9]. Исследование резонансов на других частотах не представляет трудностей.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 V 1960

ժ. Է. Բագդասարյան, Վ. Յ. Գուշկի

ՌԵԶՈՆԱՆՍ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՈՋ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐՈՒՄ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ռ. Ռ. Մ.

Հոդվածում դիտարկվում է շերտավոր անիզոտրոպ թաղանթների ու գծային տատանումներում անգոնանսի խնդիրը:

Ուսումնասիրվում են փոքր կորույթյան և պտտման թաղանթների դեպքերը: Երկու դեպքում էլ խնդրի հավասարումը բերվում է երկրորդ կարգի ու գծային դիֆերենցիալ հավասարման, որի աջ մասը մասնակից պարբերական ֆունկցիա է ընդունվում:

Սովորական անգոնանսից բացի, ուսումնասիրվում են պարամետրիկ տիպի անգոնանսներ և անգոնանսներ հիմնական հաճախականության օրերատոնների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. „Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук“, № 3, 1953.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем, ГИТТЛ, М., 1956.
3. Бурмистров Е. Ф. Нелинейные поперечные колебания ортотропных оболочек вращения. „Инженерный сборник“, 26, 1958.
4. Гвниш В. Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, № 1, 1960.

5. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. „Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук“, № 2, 1949.
6. Багдасарян Ж. Е., Гнуни В. Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек вращения. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, № 5, 1960.
7. Вольмир А. С. Гибкие пластики и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
8. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика, ГИФМЛ, М., 1958.
9. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИФМЛ—14, 1958.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

Изгиб полого прямоугольного стержня с тонким
усиливающим покрытием

Точное решение задачи об изгибе призматического стержня с усиливающим покрытием сводится к решению задачи об изгибе составного стержня [1, 2, 3, 4]. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Пуассона в каждой из областей D_1 и D_2 поперечного сечения D_0 , соответствующих основному материалу и материалу покрытия стержня, контурному условию на L_0 и двум условиям на линии раздела L_{12} областей D_1 и D_2 . Точное определение F , при решении конкретных задач, в большинстве случаев связано с математическими трудностями. Поэтому целесообразно воспользоваться малостью толщины покрытия по сравнению с поперечными размерами изгибаемого стержня и задачу определения F рассматривать в приближенной постановке. Этот вопрос освещен в работе [4], в которой показано, что с некоторым приближением функцию напряжений F можно определить только в области D_1 со смешанным контурным условием на L_2 или L_0 . В работе [4] показано, что это приближение эквивалентно предположению о линейности изменения F по малой толщине покрытия.

В настоящей статье рассмотрен изгиб поперечной силой призматического стержня прямоугольного поперечного сечения с прямоугольным симметричным вырезом. Боковая и внутренняя поверхности стержня предполагаются покрытыми тонкими усиливающими слоями постоянной толщины. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работах [7] и [8].

Рассматриваемая задача сведена к решению совокупности двух вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. При трех отношениях размеров квадратного сечения, с оценкой погрешности приближения, решена совокупность бесконечных систем. Рассмотрены частные случаи, соответствующие двум значениям коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$ и $\nu = 0$. Определены касательные напряжения в характерных точках сечения.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения изгибаемого стержня показаны на фиг. 1. Области, соответствующие уси-

$$+d_2(2a+b-d_1-d_2)] + \delta^2(6a+2b-d_1-3d_2)].$$

Здесь $\mu = \frac{G_2}{G_1} \delta$, δ — толщина покрытия, G_1 и G_2 — модули сдвига основного материала и материала покрытия.

Перейдем теперь к определению касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Ввиду симметричности области поперечного сечения, достаточно найти функцию напряжений $F(x, y)$ только в одной четвертой части области сечения (фиг. 2).

Для распространения решения на всю область поперечного сечения на основании мембранной аналогии [10] требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция $F(x, y)$ обратилась в нуль, а вдоль горизонтальной оси симметрии обратилась в нуль $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Функция напряжений $F(x, y)$, при решении задач об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, как известно [3, 4], удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = -\frac{\nu}{1+\nu} A_1 \cdot (y-b) \quad (1.8)$$

внутри области сечения и условию

$$F + \mu \frac{\partial F}{\partial n} = - \int \left(A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x \right) dy + C \quad (1.9)$$

на контуре области.

Здесь ν — коэффициент Пуассона, A_1 и B_1 — известные постоянные (1.7), C — постоянная интегрирования.

Касательные напряжения в области D_1 определяются формулами

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x, \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.10)$$

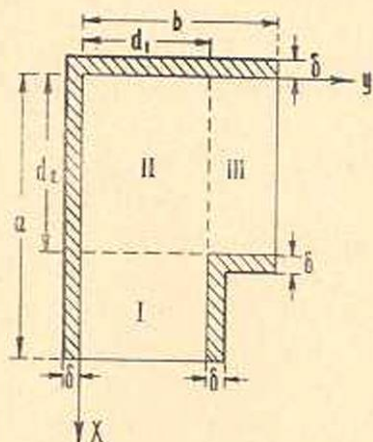
В области D_2 , соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение постоянно по направлению нормали n , направлено параллельно касательной l и определяется формулой

$$\tau_{xz}^* = \frac{C_0 - F}{\delta} + A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x. \quad (1.11)$$

Функцию $F(x, y)$ будем искать в виде

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) + S_1(y) & \text{в области I,} \\ F_2(x, y) & \text{в области II,} \\ F_3(x, y) + S_3(x, y) & \text{в области III,} \end{cases} \quad (1.12)$$

где



Фиг. 2.

$$S_1(y) = \frac{y + \mu}{d_1 + 2\mu} C_0, \quad S_3(x, y) = \frac{x + \mu}{d_2 + 2\mu} (C_0 + y r_0), \quad (1.13)$$

$$r_0 = - \left(A_1 \frac{d_2^2}{2} + B_1 d_2 \right) = \frac{d_2}{2} (2a - d_2) A_1,$$

C_0 — значение C на внутреннем контуре.

На основании (1.8), (1.9) и (1.12), для определения F_1 , F_2 и F_3 получаем следующие условия

$$\Delta F_i = - \frac{\nu}{1 + \nu} A_i (y - b) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.14)$$

$$F_1(x, 0) - \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_1(x, d_1) + \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0, \quad (1.15)$$

$$F_2(x, 0) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_2(0, y) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.16)$$

$$F_3(0, y) - \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F_3(d_2, y) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = 0, \quad (1.17)$$

$$F_2(d_2, y) = F_1(d_2, y) + S_1(y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=d_2}, \quad (1.18)$$

$$F_2(x, d_1) = F_3(x, d_1) + S_3(x, d_1), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \Big|_{y=d_1} + \frac{\partial S_3}{\partial y} \Big|_{y=d_1}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad F_3(x, b) + S_3(x, b) = 0. \quad (1.20)$$

Условия (1.20) выражают симметричность функции $F(x, y)$ относительно осей симметрии области прямоугольного сечения стержня.

Функции F_1 , F_2 и F_3 представим в виде рядов

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.21)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.22)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(y) \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \quad (1.23)$$

где

$$M_k = \sqrt{\mu + \frac{d_1}{2} (1 + \mu^2 \beta_k^2)}, \quad N_k = \sqrt{\mu + \frac{d_2}{2} (1 + \mu^2 \alpha_k^2)}, \quad (1.24)$$

α_k и β_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) являются корнями трансцендентных уравнений

$$1 - \mu^2 \alpha_k^2 + 2\mu \alpha_k \operatorname{ctg} d_2 \alpha_k = 0, \quad (1.25)$$

$$1 - \mu^2 \beta_k^2 + 2\mu \beta_k \operatorname{ctg} d_1 \beta_k = 0.$$

Последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, при k стремящемся к бесконечности, стремятся к последовательностям $\left[\frac{k\pi}{d_2}\right]$ и $\left[\frac{k\pi}{d_1}\right]$ [7, 8].

Системы функций

$$\frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1.26)$$

в интервалах $0 < y < d_1$ и $0 < x < d_2$ являются ортонормированными.

Разложим функции $S_1(y)$ и $x + \mu$ в ряды по функциям (1.26) в интервалах $0 < y < d_1$ и $0 < x < d_2$.

$$S_1(y) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\beta_k M_k} \cdot \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.27)$$

$$x + \mu = (d_2 + 2\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} \cdot \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}.$$

2. Подставляя (1.21) и (1.23) в (1.14) и используя условия (1.18)–(1.20), находим функции $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$. Используя полученные значения функций $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$, в силу (1.21) и (1.23), получим

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[B_k \frac{\operatorname{ch}(x-a) \beta_k}{\operatorname{ch} a \beta_k} + \frac{g_k}{\beta_k^2} \right] \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (2.1)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_k \frac{\operatorname{sh}(y-b) \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} - \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} (C_0 + b r_0) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} b \alpha_k} + \right. \\ \left. + \frac{h_k}{\alpha_k^2} (y-b) \right] \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.2)$$

Здесь B_k и E_k постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (1.18) и (1.19), а

$$g_k = -\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{A_1}{\beta_k M_k} [b + \mu + (-1)^k (b - d_1 - \mu)],$$

$$h_k = \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k N_k} A_1.$$

Для определения $\varphi_k(x)$ используем метод Г. А. Гринберга [11]. Из (1.22) имеем

$$\varphi_k(x) = \int_0^{d_1} F_2(x, y) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k} dy. \quad (2.3)$$

Умножив уравнение (1.14) на первую систему функций (1.26) и проинтегрировав его по y от нуля до d_1 , используя условия (1.16), (1.19), (1.25), (1.27), (2.2) и значения (2.3), для функции $\varphi_k(x)$ получим

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) - \beta_k^2 \varphi_k(x) = & -g_k - \frac{\sin d_1 \beta_k + \mu \beta_k \cos d_1 \beta_k}{\mu M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ E_p [\mu \alpha_p - \right. \\ & \left. - \operatorname{th}(b - d_1) \alpha_p] \frac{\operatorname{ch}(b - d_1) \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} + (-1)^p \frac{C_0 + (d_1 + \mu) r_0}{\alpha_p N_p} - \right. \\ & \left. - \frac{(-1)^p}{\alpha_p N_p} (C_0 + b r_0) (1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} d_1 \alpha_p) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} - \right. \\ & \left. - \frac{h_p}{\alpha_p^2} (b - d_1 - \mu) \right\} \frac{\sin \alpha_p x + \mu \alpha_p \cos \alpha_p x}{N_p}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решив уравнение (2.4) и удовлетворив граничным условиям, для $\varphi_k(x)$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & C_k \left[\operatorname{sh}(x - d_2) \beta_k + \frac{\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k} \operatorname{ch}(x - d_2) \beta_k \right] + \\ & + \frac{g_k}{\beta_k^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(x - d_2) \beta_k}{\operatorname{ch} d_2 \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{sh} d_2 \beta_k} \right] + \frac{\sin d_1 \beta_k + \mu \beta_k \cos d_1 \beta_k}{\mu M_k} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left\{ E_p [\mu \alpha_p - \operatorname{th}(b - d_1) \alpha_p] \frac{\operatorname{ch}(b - d_1) \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} + \right. \\ & \left. + (-1)^p \frac{C_0 + (d_1 + \mu) r_0}{\alpha_p N_p} - \frac{(-1)^p}{\alpha_p N_p} (C_0 + b r_0) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \times \right. \\ & \left. \times (1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} d_1 \alpha_p) - \frac{h_p}{\alpha_p^2} (b - d_1 - \mu) \right\} \frac{\sin \alpha_p x + \mu \alpha_p \cos \alpha_p x}{N_p}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где C_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условия (1.18).

На основании (1.22) и (2.5) получим

$$\begin{aligned} F_2(x, y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{N_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left\{ C_p \frac{(1 + \mu \beta_p^2) \operatorname{th} d_2 \beta_p + 2\mu \beta_p}{1 + \mu \beta_p \operatorname{th} d_2 \beta_p} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{g_p}{\beta_p^2} \left[1 + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \beta_k^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_2 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right] \right\} \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{M_p} + \right. \\ & \left. + \left\{ E_k [\mu \alpha_k - \operatorname{th}(b - d_1) \alpha_k] \frac{\operatorname{ch}(b - d_1) \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} + (-1)^k \frac{C_0 + (d_1 + \mu) r_0}{\alpha_k N_k} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} (C_0 + br_0) (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} - \frac{h_k}{\alpha_k^2} (b - d_1 - \mu) \left\{ \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + \mu \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k} \right\} \frac{\ln \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.6)$$

Здесь использована сумма ряда [13]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin d_1 \beta_k + \mu \beta_k \cos d_1 \beta_k) (\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y)}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2) M_k^2} = \\ = \mu \frac{\operatorname{sh} \alpha_p y + \mu \alpha_p \operatorname{ch} \alpha_p y}{(1 + \mu^2 \alpha_p^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_p + 2\mu \alpha_p \operatorname{ch} d_1 \alpha_p}. \quad (2.7)$$

Справедливость (2.7) проверяется разложением правой части в ряд по функциям (1.26).

Используя условия (1.18) и (1.19) и принимая во внимание (1.13), (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} Y_p + a_k, \quad Y_k = \sum_{p=0}^{\infty} b_{kp} X_p + b_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

где

$$a_{kp} = \left[1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k \right] \frac{m_k \alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2}, \quad (2.9)$$

$$b_{kp} = \left[(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k \right] \frac{n_k \beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p}, \quad (2.10)$$

$$a_k = -\frac{m_k}{\beta_k} \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k \left\{ C_0 \left[1 - \beta_k [\mu \beta_k - \operatorname{cth} (a - d_2) \beta_k] \times \right. \right. \\ \left. \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[1 - (1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} d_1 \alpha_p) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right] \right\} + \\ + \frac{(-1)^k}{\beta_k} \cdot \frac{g_k M_k}{\operatorname{ch} d_2 \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{sh} d_2 \beta_k} - \beta_k [\mu \beta_k - \operatorname{cth} (a - d_2) \beta_k] \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[r_0 \left(d_1 + \mu - b \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{sh} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right) - \right. \\ \left. - (-1)^p \frac{h_p N_p}{\alpha_p} (b - d_1 - \mu) \right] \left. \right\}, \quad (2.11)$$

$$b_k = -\frac{n_k}{\alpha_k} \left\{ C_0 (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k - \operatorname{sch} b \alpha_k \cdot \operatorname{sch} d_1 \alpha_k) + \right. \\ \left. + (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k) \left[r_0 d_1 - (-1)^k \frac{h_k N_k}{\alpha_k} (b - d_1) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\operatorname{sch} b x_k \cdot \operatorname{sch} d_1 x_k}{b} - \frac{\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k}{x_k} \left[r_0 + (-1)^k \frac{h_k N_k}{x_k} \right] - \\
& - x_k \left[(1 + \mu^2 x_k^2) \operatorname{th} d_1 x_k + 2\mu x_k \right] \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p g_p}{\beta_p (\beta_p^2 + x_k^2) M_p} \left[1 + \right. \\
& \left. + \frac{1 + (-1)^k \beta_p^2}{x_k^2} \beta_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_2 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right] \Bigg\}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$m_k = - \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k}{1 + \operatorname{th} d_2 \beta_k \cdot \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k + \mu \beta_k [\operatorname{th} d_2 \beta_k + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]}, \quad (2.13)$$

$$n_k = - \frac{1}{x_k} \cdot \frac{1 - \mu x_k \operatorname{cth} (b - d_1) x_k}{1 + \operatorname{th} d_1 x_k \cdot \operatorname{cth} (b - d_1) x_k + \mu x_k [\operatorname{th} d_1 x_k + \operatorname{cth} (b - d_1) x_k]}, \quad (2.14)$$

Коэффициенты C_k , E_k и B_k через X_k и Y_k определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{(-1)^k \beta_k}{M_k} \cdot \frac{1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k} \cdot X_k, \\
E_k &= \frac{(-1)^k x_k}{N_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} b x_k}{\operatorname{sh} (b - d_1) x_k} \cdot \frac{Y_k}{1 - \mu x_k \operatorname{cth} (b - d_1) x_k}, \\
B_k &= - \frac{(-1)^k}{M_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} a \beta_k}{\operatorname{sh} (a - d_2) \beta_k} \left\{ \frac{(1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k) \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k} \cdot X_k + \right. \\
& + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p^2}{(x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \cdot Y_p + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[(-1)^p \frac{h_p N_p}{x_p} (b - \right. \\
& - d_1 - \mu) - C_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} d_1 x_p + \mu x_p \operatorname{sh} d_1 x_p}{\operatorname{ch} b x_p} \right) - \\
& \left. - r_0 \left(d_1 + \mu - b \frac{\operatorname{ch} d_1 x_p + \mu x_p \operatorname{sh} d_1 x_p}{\operatorname{ch} b x_p} \right) \right] \Bigg\}. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Для определения C_0 пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при изгибе [4, 9]

$$\int_{L_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds + 2 \left[G_1 \vartheta + \frac{\gamma}{1 + \gamma} A_1 \cdot (y_0 - b) \right] \Omega_0 = 0, \quad (2.16)$$

где L_0 — внутренний контур сечения, Ω_0 — площадь, ограниченная этим контуром, y_0 — координата центра тяжести области Ω_0 , а ϑ — степень кручения изгибаемого стержня.

Так как изгиб стержня не сопровождается кручением, $\vartheta = 0$ и кроме того, вследствие симметрии, $y_0 = b$. Соотношение (2.16) примет вид

$$\int_{L_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds = 0. \quad (2.17)$$

Подставив в (2.17) значение

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} \quad (2.18)$$

и произведя некоторые преобразования, соотношение (2.17) приведем к виду

$$\int_{d_1}^a \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right)_{y=d_1} dx + \int_{d_1}^b \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)_{x=d_1} dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - d_1^2}{d_2 + 2\mu} r_0 - \left(\frac{a - d_2}{d_1 + 2\mu} + \frac{b - d_1}{d_2 + 2\mu} \right) C_0. \quad (2.19)$$

Используя условия (2.1), (2.2), (2.15) и (2.19), получим выражение, определяющее значение C_0 через искомые величины X_k и Y_k

$$\begin{aligned} C_0 = \frac{1}{I} & \left\{ \frac{1}{2} \frac{b^2 - d_1^2}{d_2 + 2\mu} r_0 - (a - d_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\beta_k M_k} + \right. \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N_k^2} \left[\frac{\operatorname{cth}(b - d_1) \alpha_k - \operatorname{csch}(b - d_1) \alpha_k}{1 - \mu \alpha_k \operatorname{cth}(b - d_1) \alpha_k} \cdot \alpha_k Y_k + \right. \\ & + \left. \frac{(-1)^k}{2} \cdot \frac{h_k N_k}{\alpha_k} (b - d_1)^2 + \frac{b r_0}{\alpha_k} \left(\operatorname{th} b \alpha_k - \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} \right) \right] + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k} \left\{ \frac{(1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k) \cdot \beta_k}{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k)} X_k + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} Y_p + \right. \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[(-1)^p \frac{h_p N_p}{\alpha_p} (b - d_1 - \mu) - \right. \\ & \left. \left. - r_0 \left(d_1 + \mu - b \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{sh} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right) \right] \right\}, \quad (2.20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I = & -\frac{a - d_1}{d_1 + 2\mu} - \frac{b - d_1}{d_2 + 2\mu} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k N_k^2} \left(\operatorname{th} b \alpha_k - \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{sh} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right). \end{aligned}$$

Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.8) при условии $\mu > \frac{2}{\pi} d_1$ вполне регулярна. Действительно, используя сумму

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 - \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k},$$

получаемую из (2.7), находим

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| &= \frac{1}{\mu \beta_k} \cdot \frac{|1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| (\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k)}{1 + \operatorname{th} d_2 \beta_k \cdot \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k + \mu \beta_k [\operatorname{th} d_2 \beta_k + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]} < \\ &< \frac{\operatorname{th} (a - d_2) \beta_k}{1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k} = 1 - \vartheta, \quad \vartheta = \frac{1}{1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k} > 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь использованы неравенства

$$|1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| < \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k, \quad (2.22)$$

$$1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k < \mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k. \quad (2.23)$$

Неравенство (2.23) доказывается при помощи неравенства $\mu \beta_k > 1$, которое следует из уравнений (1.25) при условии $\mu > \frac{2}{\pi} d_1$.

В случае, когда

$$|1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| < 1$$

имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{1}{\mu \beta_k [1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]} = 1 - \vartheta_1, \quad (2.24)$$

$$\vartheta_1 = 1 - \frac{1}{\mu \beta_k [1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]} < 1.$$

Согласно (2.10) и (2.14) точно такие же оценки получим для суммы абсолютных значений коэффициентов второй системы (2.8). Таким образом, на основании (2.21) и (2.24), совокупность бесконечных систем (2.8) при условии $\mu > \frac{2}{\pi} d_1$ вполне регулярна [12]. Ограниченность свободных членов (2.11) и (2.12) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.8) позволяет определить искомые коэффициенты с любой степенью точности и дать оценку погрешности приближенного решения.

3. Рассмотрим квадратное сечение с симметричным квадратным вырезом

$$a = b \quad \text{и} \quad d_1 = d_2 = d. \quad (3.1)$$

Для толщины усиливающего покрытия и механических характеристик материалов примем

$$\delta = 0,1 \cdot d, \quad G_1 = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad G_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2. \quad (3.2)$$

Тогда $\mu = d$.

На основании (1.12), (1.13), (2.1), (2.2), (2.6), (2.15), (3.1) и (3.2) для функции напряжений будем иметь

$$\begin{aligned}
 F_1(x, y) = & \frac{C_0}{3d}(y+d) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{g_k}{\alpha_k^2} - \frac{(-1)^k}{N_k} \cdot \frac{\operatorname{ch}(x-a)\alpha_k}{\operatorname{sh}(a-d)\alpha_k} \times \right. \\
 & \times \left\{ \frac{(1+d\alpha_k \operatorname{th} d\alpha_k) \cdot \alpha_k}{(1+d^2\alpha_k^2) \operatorname{th} d\alpha_k + 2d\alpha_k} X_k + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2} Y_p - \right. \\
 & - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2} \left[C_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} d\alpha_p + d\alpha_p \operatorname{sh} d\alpha_p}{\operatorname{ch} a\alpha_p} \right) - (-1)^p \frac{h_p N_p}{\alpha_p} (a-2d) + \right. \\
 & \left. \left. + r_0 \left(2d - a \frac{\operatorname{ch} d\alpha_p + d\alpha_p \operatorname{sh} d\alpha_p}{\operatorname{ch} a\alpha_p} \right) \right] \right\} \frac{\sin \alpha_k y + d\alpha_k \cos \alpha_k y}{N_k}, \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где $d \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq d$;

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} \left[\frac{(-1)^p \alpha_p}{N_p} X_p + \frac{g_p}{\alpha_p^2} \left[1 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \alpha_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d\alpha_p + d\alpha_p \operatorname{sh} d\alpha_p} \right] \right\} \frac{\sin \alpha_p y + d\alpha_p \cos \alpha_p y}{N_p} - \\
 & - \left[Y_k + (-1)^k \frac{h_k N_k}{\alpha_k^3} (a-2d) + \frac{C_0 + ar_0}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} d\alpha_k + d\alpha_k \operatorname{sh} d\alpha_k}{\operatorname{ch} a\alpha_k} - \right. \\
 & \left. - \frac{C_0 + 2dr_0}{\alpha_k^2} \right] \frac{\sin \alpha_k y + d\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + d^2\alpha_k^2) \operatorname{sh} d\alpha_k + 2d\alpha_k \operatorname{ch} d\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k x + d\alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

где $0 \leq x \leq d$, $0 \leq y \leq d$;

$$\begin{aligned}
 F_3(x, y) = & \frac{x+d}{3d} (C_0 + r_0 y) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \left[(-1)^k \frac{h_k N_k}{\alpha_k^3} (y-a) + \right. \\
 & + \frac{\operatorname{sh}(y-a)\alpha_k}{\operatorname{sh}(a-d)\alpha_k - d\alpha_k \operatorname{ch}(a-d)\alpha_k} Y_k - \frac{C_0 + ar_0}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} a\alpha_k} \left. \right] \times \\
 & \times \frac{\sin \alpha_k x + d\alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

где $0 \leq x \leq d$, $d \leq y \leq a$.

Решая трансцендентное уравнение (1.25) методом касательных, для его корней с точностью до 10^{-3} будем иметь

$$\begin{aligned}
 d\alpha_0 = 1,312; \quad d\alpha_1 = 3,670; \quad d\alpha_2 = 6,579; \quad d\alpha_3 = 9,627; \\
 d\alpha_4 = 12,72; \quad d\alpha_k = k\pi \quad (k=5, 6, 7, \dots).
 \end{aligned}$$

Обозначим значения неизвестных X_k и Y_k с избытком через X_k^+ , Y_k^+ , а с недостатком через X_k^- , Y_k^- . Пользуясь теорией вполне регулярных систем [12], для X_k и Y_k при трех отношениях $\frac{a}{d}$ и

двух значениях коэффициента Пуассона ($\nu = 0,3$; $\nu = 0$) получим оценки, которые зависят от C_0 . Используя эти значения X_k , Y_k с избытком и с недостатком и учитывая (3.1) и (3.2), при помощи (2.20) получим следующие оценки для C_0 :

$$C_0^- = 23,119 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 23,120 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,1 \text{ и } \nu = 0,3,$$

$$C_0^- = 29,362 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 29,364 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,5 \text{ и } \nu = 0,3,$$

$$C_0^- = 3,1765 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 3,1766 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 10 \text{ и } \nu = 0,3,$$

$$C_0^- = 31,854 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 31,855 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,1 \text{ и } \nu = 0,$$

$$C_0^- = 26,113 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 26,115 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,5 \text{ и } \nu = 0,$$

$$C_0^- = 2,9429 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 2,9443 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 10 \text{ и } \nu = 0.$$

Используя эти значения C_0 , окончательно для X_k^* и Y_k^* получим значения, которые приведены в таблице 1.

Внеся найденное значение функции напряжений $F(x, y)$ в формулы (1.10) и (1.11) и пользуясь данными таблицы 1, определим с избытком и недостатком значения напряжения τ_{xz} в трех характерных точках при трех отношениях размеров поперечного сечения. Эти значения напряжения приведены в таблице 2. Заметим, что в рассмотренных точках значения напряжения τ_{xz} с избытком и с недостатком с точностью до пяти знаков совпадают друг с другом.

Из непрерывности перемещений на контакте следует, что

$$\tau_{xz}^* = 10 \cdot \tau_{xz} \text{ при } y=0 \text{ и } y=d,$$

а из условия равновесия элемента линии раздела L_{12} следует, что

$$\tau_{xz}^* = \tau_{xz} \text{ при } x=0 \text{ и } x=d.$$

Для сравнения в последнем столбце таблицы 2 приведены значения касательных напряжений τ_{xz} на нейтральной оси $x=a$ при $\nu=0,3$, вычисленные по формуле (9.2) работы [5].

Таблица 1

$\frac{a}{d}$	$\nu = 0,3$			$\nu = 0$		
	1,1	1,5	10	1,1	1,5	10
$10^2 \frac{Pd}{E} X_0^+$	6,7888	16,277	2,1278	2,7407	13,591	1,9318
X_0^-	6,7748	16,272	2,1276	2,7239	13,586	1,9316
X_1^+	2,0213	6,1478	0,49216	3,0323	5,8494	0,45303
X_1^-	2,0189	6,1276	0,49135	3,0298	5,8302	0,45231
X_2^+	1,6092	3,9269	0,24783	2,6801	3,7775	0,22747
X_2^-	1,5949	3,8934	0,24657	2,6644	3,7458	0,22634
X_3^+	1,5404	3,0361	0,16828	2,3991	2,9243	0,15412
X_3^-	1,5172	2,9938	0,16671	2,3740	2,8843	0,15271
Y_0^+	-6,2974	-2,2660	-0,12140	-6,9292	-1,1130	-0,11375
Y_0^-	-6,3055	-2,2775	-0,12159	-6,9414	-1,1240	-0,11391
Y_1^+	4,2577	2,8124	0,01919	2,4607	2,4951	0,01039
Y_1^-	4,2446	2,7896	0,01821	2,4429	2,4732	0,00949
Y_2^+	4,1645	2,6556	0,05618	3,0767	2,4434	0,04759
Y_2^-	4,1364	2,6194	0,05456	3,0391	2,4088	0,04611
Y_3^+	3,0872	2,4302	0,06482	2,4826	2,2402	0,05655
Y_3^-	3,0547	2,3837	0,06272	2,4390	2,1957	0,05464

Значения $\frac{d^2}{P} \tau_{xz}(x, y)$

Таблица 2

x, y	$\frac{a}{d}$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0$	τ_{xz}
$a, 0$	1,1	0,06292	0,07743	0,36449
	1,5	0,04855	0,04433	0,25380
	10	0,006201	0,006013	0,02957
$a, \frac{d}{2}$	1,1	0,05978	0,07555	0,32481
	1,5	0,04846	0,04354	0,24165
	10	0,006088	0,006013	0,02931
a, d	1,1	0,11513	0,10607	0,39920
	1,5	0,05861	0,05998	0,25110
	10	0,005982	0,006013	0,02905

Сопоставляя первый и третий столбцы таблицы 2, замечаем, что, благодаря усиливающему покрытию, напряжение в приведенных характеристических точках уменьшается более, чем в три раза, при одной и той же изгибающей силе P . Например, в случае $\frac{a}{d} = 1,1$ максимальное касательное напряжение уменьшается примерно в 3,5 раза, в случае $\frac{a}{d} = 1,5$ — уменьшается в 4,3 раза, а когда $\frac{a}{d} = 10$ — уменьшается примерно в пять раз.

Из таблицы 2 видно, что касательные напряжения в рассматриваемых точках убывают с увеличением отношения $\frac{a}{d}$, при одной и той же изгибающей силе P , вместе с этим падает роль коэффициента Пуассона. Например, в случае $\frac{a}{d} = 1,1$ максимальные касательные напряжения при $\nu = 0,3$ и $\nu = 0$ отличаются друг от друга на 8%, когда $\frac{a}{d} = 1,5$, эта разница доходит до 2%, а когда $\frac{a}{d} = 10$, то отличие составляет десятые доли процента.

Сравнивая эти результаты с результатами, приведенными в [6], замечаем, что, как и двухсвязных областях без усиливающего покрытия и ослабленных симметричным отверстием, так и в стержне с усиливающим покрытием и симметричным отверстием, с увеличением отверстия (т. е. когда стержень становится тонкостенным) уменьшается роль коэффициента Пуассона. Полученные результаты все же говорят о том, что для профилей с отверстием коэффициент Пуассона, даже для его максимального значения ($\nu = 0,5$), играет незначительную роль и практически им можно пренебречь.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 IX 1960

Պ. 2. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՋՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուժեղացնող բարակ ծածկույթով ձողի ծոման խնդրի ճշգրիտ լուծումը համարվել է բազմադրյալ ձողի ծոման խնդրի լուծմանը [1—4]: Լարունյանների $F(x, y)$ ֆունկցիան D_1 և D_2 տիրույթների ներքին կետերում պետք է բավարարի համապատասխան աջ մասով Պուասոնի հավասարմանը, եզրագծի վրա՝ եզրային պայմանին և երկու տիրույթների բաժանման գծի վրա՝ կոնտակտի երկու պայմաններին: Այսպիսի դրվածքով լարունյանների F ֆունկցիան ճիշտ որոշելը կոնկրետ խնդիրների լուծելիս, մեծ մասամբ կապված է մաթեմատիկական դժվարությունների հետ: Այդ պատճառով նպատակահարմար է,

կենտրոնի ձողի հատվածքի չափումների նկատմամբ ուժեղացնող ծածկույթի հաստության փոքրությամբ, լարումների F ֆունկցիան որոշել խնդրի մոտավոր զրկվածքով: Այդ հարցը լուծարանված է [4] աշխատության մեջ, որտեղ ցույց է տրված, որ որոշակի մոտավորությամբ լարումների F ֆունկցիան կարելի է որոշել միայն հիմնական նյութին համապատասխանող D_1 տիրույթում (1.9) խտրելի կերպով պայմանով: Մոտավորությամբ ալն է, որ ծածկույթին համապատասխանող D_2 տիրույթում լարումների F ֆունկցիան ըստ ծածկույթի հաստության փոփոխվում է գծային օրենքով, որը մեխանիկորեն համարվել է ալն ընդունելությամբ, որ ծածկույթում շոշափող լարումները ըստ ծածկույթի հաստության չեն փոփոխվում, այսինքն մնում են հաստատուն:

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է սիմետրիկ ուղղանկյուն անցքով ուղղանկյուն լայնական հատվածք ունեցող պրիզմայաձև ձողի լայնական ուժով ծանր խնդիրը: Ձողի արագքին և ներքին մակերևույթները ծածկված են ուժեղացնող բարակ ծածկույթով:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [7, 8] աշխատություններում ստատիստիկա՝ օրիգինորմալ ֆունկցիաների սխեմով: Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների երկու անվերջ սխեմների լրիվ սեզուլյար համախմբի լուծմամբ:

Ձողի լարումների վերջնական հաշվումը կատարված է քառակուսի կարգվածքի համար: Ձողի լայնական հատվածքի մի քանի ընտրոշ կետերում հաշվված են լարումները, կախված հատվածքի լայնական չափերից և Պուասոնի գործակցից: Ստացված թվային արդյունքները համեմատված են [5] և [6] աշխատություններում ստացված արդյունքների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
2. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН АрмССР*, 23, № 3, 1956.
3. Чобанян К. С. Общая задача изгиба стержня, составленного из различных материалов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 11, № 5, 1958.
4. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 10, № 5, 1957.
5. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полой прямоугольным сечением. ПММ*, 12, вып. 3, 1950.
6. Шерман Д. И. Изгиб поперечной силой эллиптического бруса, ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью. Инженерный сборник*, 17, 1953.
7. Чобанян К. С., Галфаян П. О. Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 12, № 6, 1959.
8. Галфаян П. О. Изгиб прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 13, № 2, 1960.
9. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ—Гостехиздат, М.—Л., 1947.
10. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1934.
11. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1941.
13. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- 5 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Т. Т. Хачатурян

Об учете влияния касательных напряжений
 в теории изгиба плит

В работах [1, 2, 3, 4, 5, 6] предлагаются варианты уточненных уравнений классической теории изгиба плит, основанные на приближенном учете влияний касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} , нормального напряжения σ_z и удлинения нормального элемента e_{zz} . Некоторые из цитированных авторов ограничиваются только учетом влияний касательных напряжений, полагая, как и в классической теории, $\sigma_z = 0$, $e_{zz} = 0$ [3, 4, 5, 6]. В настоящей статье обсуждается этот последний вариант на том основании, что поправки, вносимые учетом σ_z и e_{zz} , малы по сравнению с поправками, вносимыми учетом τ_{xz} , τ_{yz} . Далее в статье приводится удобный прием решения конкретных задач, в котором уточненные расчетные величины (прогиб, напряжения) представляются в виде суммы двух слагаемых—решения по классической теории и члена корректива. Для ряда частных примеров показывается, что указанные слагаемые (основной член и член корректива) можно брать из известных результатов классической теории.

1°. Рассмотрим изотропную плиту постоянной толщины $2h$. Пользуясь общепринятыми обозначениями для перемещений, деформаций, напряжений, расположения координатных осей, и принимая параболический закон распределения касательных напряжений, имеем [4]

$$e_{xz} = \varphi_1(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \quad e_{yz} = \varphi_2(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \quad e_{zz} = 0. \quad (1.1)$$

Из (1.1) получим выражения для перемещений произвольной точки плиты

$$U = -z \left[\partial_1 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \varphi_1 \right]; \quad V = -z \left[\partial_2 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \varphi_2 \right], \\ W = w, \quad (1.2)$$

где w —прогиб срединной плоскости, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$.

Компоненты деформации будут

$$e_{xx} = -z \left[\partial_1^2 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \partial_1 \varphi_1 \right],$$

$$e_{yy} = -z \left[\partial_z^2 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \partial_z \varphi_2 \right], \quad (1.3)$$

$$e_{xy} = -z \left[2\partial_1 \partial_2 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1) \right].$$

Для основных напряжений получим выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot z \left[\partial_1^2 w + \mu \partial_2^2 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) (\partial_1 \varphi_1 + \mu \partial_2 \varphi_2) \right], \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot z \left[\partial_2^2 w + \mu \partial_1^2 w - \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) (\partial_2 \varphi_2 + \mu \partial_1 \varphi_1) \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\mu} \cdot z \left[\partial_1 \partial_2 w - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1) \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Моменты и усилия будут определяться формулами

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[\partial_1^2 w + \mu \partial_2^2 w - \frac{4}{5} (\partial_1 \varphi_1 + \mu \partial_2 \varphi_2) \right], \\ M_2 &= -D \left[\partial_2^2 w + \mu \partial_1^2 w - \frac{4}{5} (\partial_2 \varphi_2 + \mu \partial_1 \varphi_1) \right], \\ H &= -D(1-\mu) \left[\partial_1 \partial_2 w - \frac{2}{5} (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$N_1 = \frac{2Eh}{3(1+\mu)} \cdot \varphi_1, \quad N_2 = \frac{2Eh}{3(1+\mu)} \cdot \varphi_2, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}.$$

Внеся (1.5) в уравнения равновесия элемента плиты

$$\begin{aligned} \partial_1 M_1 + \partial_2 H &= N_1, \\ \partial_2 M_2 + \partial_1 H &= N_2, \\ \partial_1 N_1 + \partial_2 N_2 &= -q. \end{aligned} \quad (1.6)$$

получим следующие дифференциальные уравнения, содержащие искомые величины w , φ_1 и φ_2

$$\begin{aligned} \left(\partial_1^2 + \frac{1-\mu}{2} \partial_2^2 - \frac{1}{h} \right) \varphi_1 + \frac{1+\mu}{2} \partial_1 \partial_2 \varphi_2 - \frac{5}{4} \partial_1 \nabla^2 w &= 0, \\ \left(\partial_2^2 + \frac{1-\mu}{2} \partial_1^2 - \frac{1}{h} \right) \varphi_2 + \frac{1+\mu}{2} \partial_1 \partial_2 \varphi_1 - \frac{5}{4} \partial_2 \nabla^2 w &= 0, \\ \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 &= -\frac{3(1+\mu)}{2Eh} q. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\frac{1}{h} = \frac{4}{5} \cdot \frac{h^2}{1-\mu}, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2. \quad (1.8)$$

Таким образом, решение задач приводится к совместному интегрированию уравнений (1.7), после чего перемещения и напряжения будут определяться формулами (1.2) и (1.4).

Первые два уравнения системы (1.7) будут удовлетворены, если их частные интегралы примем в виде

$$\omega = \Phi - \lambda \nabla^2 \Phi, \quad \varphi_1 = -\frac{5}{4} \lambda \partial_1 \nabla^2 \Phi, \quad \varphi_2 = -\frac{5}{4} \lambda \partial_2 \nabla^2 \Phi, \quad (1.9)$$

где $\Phi(x, y)$ — вспомогательная функция.

Последнее уравнение системы (1.7) приведет к виду

$$\nabla^4 \Phi = \frac{q}{D}. \quad (1.10)$$

Внеся (1.9) в (1.5), для моментов и поперечных сил получим формулы, аналогичные соответствующим формулам классической теории изгиба плит

$$\begin{aligned} M_1 &= -D(\partial_1^2 \Phi + \mu \partial_2^2 \Phi), & N_1 &= -D \partial_1 \nabla^2 \Phi, \\ M_2 &= -D(\partial_2^2 \Phi + \mu \partial_1^2 \Phi), & N_2 &= -D \partial_2 \nabla^2 \Phi, \\ H &= -D(1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \Phi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Перемещения и напряжения будут определяться формулами

$$\begin{aligned} U &= -z \partial_1 \left[1 + \frac{1}{4} \lambda \left(1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} \right) \nabla^2 \right] \Phi, \\ V &= -z \partial_2 \left[1 + \frac{1}{4} \lambda \left(1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} \right) \nabla^2 \right] \Phi, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\omega = (1 - \lambda \nabla^2) \Phi,$$

$$\begin{aligned} \tau_x &= -\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot z (\partial_1^2 + \mu \partial_2^2) \left[1 + \frac{1}{4} \lambda \left(1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} \right) \nabla^2 \right] \Phi, \\ \tau_y &= -\frac{E}{1 - \mu^2} z (\partial_2^2 + \mu \partial_1^2) \left[1 + \frac{1}{4} \lambda \left(1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} \right) \nabla^2 \right] \Phi, \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1 + \mu} z \partial_1 \partial_2 \left[1 + \frac{1}{4} \lambda \left(1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{z^2}{h^2} \right) \nabla^2 \right] \Phi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Полагая в (1.9) $\lambda = 0$, получим $\Phi = \omega$, тогда (1.10)–(1.13) переходят в известные уравнения классической теории. Учитывая это обстоятельство и те выгоды, которые ниже мы будем извлекать из структурной аналогии (1.10)–(1.13) с уравнениями классической теории, поставим теперь такой вопрос. В каких случаях общие интегралы системы (1.7) могут быть представлены в виде (1.9), если Φ есть общий интеграл уравнения (1.10)? Для решения этого вопроса, очевидно, нужно составить общие решения уравнений системы (1.7) и потребовать их совпадения с (1.9).

При $q = 0$, из последнего уравнения системы (1.7) следует, что общим представлением для φ_1 и φ_2 будет

$$\varphi_1 = \partial_2 F, \quad \varphi_2 = -\partial_1 F, \quad (1.14)$$

где F — произвольная функция координат x, y .

Внеся (1.14) в первые два уравнения системы (1.7), получим

$$\begin{aligned} \partial_2 \left(\frac{1-\mu}{2} \nabla^2 F - \frac{F}{\lambda} \right) &= \frac{5}{4} \partial_1 \nabla^2 w, \\ -\partial_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \nabla^2 F - \frac{F}{\lambda} \right) &= \frac{5}{4} \partial_2 \nabla^2 w, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{5}{4} \nabla^2 w = F_1, \quad \frac{1-\mu}{2} \nabla^2 F - \frac{F}{\lambda} = F_2, \quad (1.15)$$

где F_1 и F_2 — произвольные сопряженные гармонические функции так как

$$\partial_2 F_2 = \partial_1 F_1, \quad \partial_1 F_2 = -\partial_2 F_1. \quad (1.16)$$

Из (1.15) имеем

$$w = \Phi_0, \quad F = -\lambda F_2 + \psi, \quad (1.17)$$

где Φ_0 — бигармоническая функция, а ψ является решением уравнения

$$\nabla^2 \psi - \frac{5}{2h^2} \psi = 0. \quad (1.18)$$

Из (1.17), (1.14) и (1.15) имеем следующие общие интегралы однородных уравнений системы (1.7)

$$\begin{aligned} w &= \Phi_0, \\ \varphi_1 &= -\lambda \partial_2 F_2 + \partial_2 \psi = -\frac{5}{4} \lambda \partial_1 \nabla^2 \Phi_0 + \partial_2 \psi, \\ \varphi_2 &= \lambda \partial_1 F_2 - \partial_1 \psi = -\frac{5}{4} \lambda \partial_2 \nabla^2 \Phi_0 - \partial_1 \psi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Сложив решения (1.19) с соответствующими решениями (1.9), получим полные решения системы (1.7) с правой частью. При этом члены содержащие Φ_0 и Φ можно объединить в одной функции Φ , получим

$$\begin{aligned} w &= \Phi - \lambda \nabla^2 \Phi, \\ \varphi_1 &= -\frac{5}{4} \lambda \partial_1 \nabla^2 \Phi + \partial_2 \psi, \\ \varphi_2 &= -\frac{5}{4} \lambda \partial_2 \nabla^2 \Phi - \partial_1 \psi, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где Φ и ψ являются общими решениями уравнений (1.10) и (1.18).

Внося (1.20) в (1.5), получим общие выражения для моментов и поперечных сил в таком виде

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[\partial_1^2 \Phi + \mu \partial_2^2 \Phi - \frac{4}{5} (1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \psi \right], \\ M_2 &= -D \left[\partial_2^2 \Phi + \mu \partial_1^2 \Phi + \frac{4}{5} (1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \psi \right], \\ H &= -D (1 - \mu) \left[\partial_1 \partial_2 \Phi + \frac{2}{5} (\partial_1^2 \psi - \partial_2^2 \psi) \right], \\ N_1 &= -D \left[\partial_1 \nabla^2 \Phi - \frac{1 - \mu}{h^2} \partial_2 \psi \right], \\ N_2 &= -D \left[\partial_2 \nabla^2 \Phi + \frac{1 + \mu}{h^2} \partial_1 \psi \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Заметим, что функции Φ и ψ имеют определенный геометрический смысл. Из (1.20) следует, что Φ , с точностью до числового множителя, представляет прогиб плиты. Геометрический смысл функции ψ выяснится, если мы составим выражение для элементарного нормального вращения ω_z .

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right).$$

Внося значения U и V из (1.2) и пользуясь соотношениями (1.20) и (1.18), найдем

$$\omega_z = \frac{5}{4} \cdot \frac{z}{h^2} \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \psi, \quad (1.22)$$

откуда следует, что ψ , с точностью до числового множителя, представляет нормальное вращение. При $z = \pm h$ $\omega_z = \pm \frac{5}{6} \cdot \frac{\psi}{h}$.

Вернемся к поставленному выше вопросу. Из (1.20), (1.21) и (1.18) следует, что (1.9) будут общими интегралами системы (1.7) и выражения (1.11) будут общими выражениями для моментов и усилий, когда $\psi = 0$. При этом из (1.22) следует, что это имеет место в тех задачах, в которых $\omega_z = 0$. К числу таких задач относятся, например, все осесимметричные задачи об изгибе круглой плиты.

Далее, из (1.17) следует, что если $\psi = 0$, то F будет гармонической функцией, т. е. наряду с общим представлением (1.14), искомые функции φ_1 и φ_2 должны допускать также представление

$$\varphi_1 = \partial_1 F, \quad \varphi_2 = \partial_2 F. \quad (a)$$

Допущение (a) равносильно условию $\omega_z = 0$.

В данной статье допущение (a) мы принимаем основываясь на следующих соображениях.

1. Из статических уравнений (1.5) следует, что допущение (а) равносильно соотношениям

$$N_1 = \partial_1 F_1, \quad N_2 = \partial_2 F_1. \quad (6)$$

Как известно, в классической теории эти равенства соблюдаются, причем $F_1 = -D\nabla^2 w_0$. Поскольку исходные допущения (1.1) о параболическом распределении касательных напряжений так же заимствованы из результатов классической теории, нам представляется возможным принять соотношения (6) так же и в уточненной теории, где теперь $F_1 = -D\nabla^2 \Phi$. В работе [5], и в других, ранее опубликованных работах С. А. Амбарцумяна (напр., [7]), указывается, что уточненная теория изгиба плиты на основе допущений (1.1) приводит к уравнению четвертого порядка, если принять дополнительные условия

$$N_1 = N_1^0, \quad N_2 = N_2^0, \quad (в)$$

где N_1^0 и N_2^0 — поперечные силы, вычисленные по классической теории.

Условия (в) и (б) совпадают, если $w_0 = \Phi$ будет гармонической функцией.

2. Числовые примеры, которые будут приведены ниже, показывают, что полученные из (1.9), (1.10) и (1.11) результаты [т. е. при соблюдении (а)] очень близки к результатам других авторов в том числе к некоторым точным результатам.

Переходим к формулировке краевых условий.

Таким образом, без дополнительного условия $\psi = 0$, решение задачи приводится к уравнениям шестого порядка, поэтому цитированные выше авторы пользуются статическими краевыми условиями Пуассона, и соответственно этому, тремя геометрическими условиями. Мы будем пользоваться краевыми условиями Кирхгоффа, поскольку решение задачи, при дополнительном допущении $w_2 = 0$, привелось к интегрированию уравнения четвертого порядка (1.10).

Для трех основных видов закреплений плиты на опорах, краевые условия для Φ запишутся следующим образом (для кромки $x = \text{const}$).

Свободная кромка. В этом случае краевые условия будут чисто статическими: $M_1 = 0$, $Q_1 = N_1 + \partial_2 H = 0$. Из (1.11) получаем

$$\partial_1^2 \Phi + \mu \partial_2^2 \Phi = 0, \quad \partial_1^3 \Phi + (2 - \mu) \partial_1 \partial_2^2 \Phi = 0. \quad (1.23)$$

Защемленная кромка. Краевые условия будут чисто геометрическими, причем одно из них, $w = 0$, будет вполне определенным. Что же касается способа „защемления кромки“, то последний может быть сформулирован различными способами, среди которых наиболее интересными являются

$$1) \quad w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad 2) \quad \bar{w}_y = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h w_y dz = 0,$$

$$3) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad 4) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad 5) U|_{z=-h} = 0. \quad (1.24)$$

В классической теории все условия (1.24) совпадают и приводятся к $\partial_z w = 0$. В данном случае такого совпадения не будет. Пользуясь выражениями (1.12), условия для защемленной кромки в общем виде можем записать так

$$\Phi - \lambda \nabla^2 \Phi = 0, \quad \partial_1 \Phi - f \cdot \lambda \partial_1 \nabla^2 \Phi = 0, \quad (1.25)$$

где f — числовой коэффициент, который для случаев (1.24) имеет значения

$$f_1 = \frac{3}{8}, \quad f_2 = \frac{4}{9}, \quad f_3 = 1, \quad f_4 = -\frac{1}{4}, \quad f_5 = \frac{1}{6}. \quad (1.26)$$

Ниже, при разборе числовых примеров и сопоставления с имеющимися точными решениями, будет указано, какие из формулировок (1.24) наилучшим образом характеризуют понятие заделки края.

Свободно опертая кромка. Здесь краевые условия будут смешанными, статическое $M_1 = 0$ и геометрическое $w = 0$. Получаем

$$\partial_1^2 \Phi + \mu \partial_2^2 \Phi = 0, \quad \Phi - \lambda \nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.27)$$

В соответствии с формулами (1.23) и (1.25) могут быть сформулированы и другие смешанные краевые условия, а так же и условия на других кромках.

2°. Приведем приложения изложенной выше теории к решению ряда конкретных задач.

Защемленная по контуру круглая плита при симметричной нагрузке.

Из (1.11) и (1.9) имеем

$$w = \Phi + \frac{\lambda}{D} M, \quad N = \partial M, \quad (2.1)$$

где

$$M = \frac{M_r + M_t}{1 + \mu}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.2)$$

Краевые условия (1.25) с учетом (2.1) могут быть записаны так

$$\begin{aligned} \Phi + \frac{\lambda}{D} M &= 0, \\ \partial \Phi + f \cdot \frac{\lambda}{D} N &= 0 \quad \text{при} \quad r = R. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку M и N на контуре имеют постоянные значения, решение уравнения (1.10) можем принять в виде

$$\Phi = w_0 + A_1 + A_2 r^2, \quad (2.4)$$

где w_0 — прогиб по теории изгиба тонких плит, A_1 и A_2 — произволь-

ные постоянные. Внеся (2.4) в (2.1) и (2.3), после определения коэффициентов A_1 и A_2 , получаем следующие общие решения

$$w = w_0 + \frac{\lambda}{D} \left[M_0 - M_0^{on} + \frac{1}{2} f R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) N_0^{on} \right], \quad (2.5)$$

$$\Phi = w_0 + \frac{\lambda}{D} \left[-M_0^{on} + \frac{i}{2} f R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - 3 \frac{\lambda}{R^2} \right) \right], \quad (2.6)$$

где M_0 — приведенный момент по классической теории, M_0^{on} — тот же момент на опоре, N_0^{on} — поперечная сила на опоре. Все эти величины известны для большого числа частных видов внешних нагрузок, следовательно, для этих же нагрузок (2.5) дает уточненный прогиб плиты с учетом влияния касательных напряжений. Имея (2.6), по формулам (1.13) можем определить напряжения в произвольной точке плиты.

Пользуясь (2.5) вычислим прогиб в центре плиты при действии равномерной нагрузки q , приложенной по площади малого концентрического круга радиуса $r=a$. Эта задача решена точно [8], в полном соответствии с уравнениями теории упругости, с удовлетворением граничных условий во всех точках защемленного края, поэтому мы будем иметь возможность сравнить приближенное решение (2.5) с точным, а также оценить, какая из формулировок (1.24) наилучшим образом характеризует понятие заделки.

Внеся известные решения

$$w_0 = \frac{q R^4 \beta^2}{64 D} (4 - 3\beta^2 + 4\beta^2 \ln \beta), \quad N_0^{on} = -\frac{1}{2} q R \beta^2, \\ M_0 = \frac{q R^2 \beta^2}{8} (\beta^2 - 4 \ln \beta), \quad M_0^{on} = -\frac{2 - \beta^2}{8} q R^2 \beta^2 \quad (2.7)$$

в (2.5), получим

$$w = \frac{q R^2 \beta^2}{64 D} \left[4 - 3\beta^2 + 4\beta^2 \ln \beta + \frac{12.8}{1 - \mu} (1 - f - 2 \ln \beta) \cdot \frac{h^2}{R^2} \right], \quad (2.8)$$

где $\beta = a : R$.

В нижеприведенной таблице 1 помещены значения $\gamma_i = w : w_0$ в зависимости от β и $h : R$, причем индексы под γ совпадают с соответствующими индексами коэффициентов f в (1.26), а γ без индекса есть точное решение ($\mu = 0.3$).

Из этой таблицы видно, что даже для толстой плиты, с отношением толщины к радиусу 1:3, формула (2.8) обеспечивает для прогиба значение, близкое к точному. Далее видно, что условия заделки

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

приводят соответственно к заниженному и завышенному значениям для w . Понятие заделки более точно характеризуют условия

Таблица 1

$a:R$	$h:R$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
1	1:6	1,32	1,32	1,28	1	1,64
	1:8	1,26	1,18	1,16	1	1,36
	1:10		1,11	1,10	1	1,23
	1:12		1,08	1,07	1	1,16
1:2	1:6	1,43	1,40	1,39	1,27	1,52
	1:8		1,22	1,22	1,15	1,29
	1:10		1,14	1,14	1,10	1,19
	1:12		1,10	1,10	1,07	1,11
1:4	1:6		1,51	1,48	1,40	1,59
	1:8		1,28	1,27	1,23	1,33
	1:10		1,18	1,17	1,15	1,21
	1:12		1,13	1,12	1,10	1,15
1:10	1:6		1,68	1,67	1,60	1,76
	1:8		1,38	1,38	1,34	1,43
	1:10		1,24	1,24	1,22	1,28
	1:12		1,17	1,17	1,15	1,18

$$w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad \text{и} \quad U|_{z=\pm h} = 0$$

причем, предпочтение следует отдавать первому из них. С уменьшением толщины плиты разница между ними уменьшается и при $h:R \leq 1:8$ практически они приводят к одинаковым результатам. При равномерной нагрузке по всей площади круга и условиях $w=0$, $\theta_z w=0$ на контуре, для прогиба получается решение, совпадающее с обычным решением ($\gamma_2=1$). Аналогичный результат получен в работах [9, 5].

Свободно опертая по контуру круглая плита. В этом случае уравнение (1.10) нужно интегрировать при краевых условиях (1.27). Для w и Φ получим решения:

$$w = w_0 + \frac{k}{D} (M_0 - M_0^{on}), \quad (2.9)$$

$$\Phi = w_0 - \frac{k}{D} M_0^{on}, \quad (2.10)$$

где M_0^{on} — приведенный момент на опоре, зависящий только от тангенциального опорного момента

$$M_0^{on} = \frac{1}{1+\mu} M. \quad (2.11)$$

Сравнивая решения (2.9) и (2.10) с решениями (2.5) и (2.6) заземленной плиты, замечаем, что они отличаются членами, содержащими, поперечные силы N_0^{on} .

При частичной постоянной нагрузке, приложенной по площади концентрического круга, из (2.9) получим следующее выражение для прогиба

$$w = \frac{qR^2\beta^2}{64D} \left[\frac{12 + 4\mu - (7 + 3\mu)\beta^2}{1 + \mu} + 4\beta^2 \ln \beta + \right. \\ \left. + \frac{12,8}{1 - \mu} \left(1 - 2(1 + \mu) \ln \beta \right) \frac{h^2}{R^2} \right], \quad (2.12)$$

При $\beta = 1$ имеем

$$w = \frac{qR^4}{64D} \left[\frac{5 + \mu}{1 + \mu} + \frac{12,8}{1 - \mu} \cdot \frac{h^2}{R^2} \right],$$

что совпадает с результатом работы [5].

В нижеприведенной таблице даны отношения $w:w_0$ для ряда $h:R$ и $\beta = a:R$ ($\mu = 0,3$).

$h:R \backslash a:R$	1	1:2	1:4	1:10
1:6	1,12	1,17	1,24	1,34
1:8	1,07	1,10	1,13	1,19
1:10	1,05	1,06	1,09	1,12
1:12	1,03	1,04	1,06	1,09

Свободно опертые прямоугольные плиты. Краевые условия (1.27) при помощи (1.11) могут быть представлены так

$$\Phi = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \text{ — на контуре.} \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что решением уравнения (1.10) будет $\Phi = w_0$, где w_0 — прогиб по классической теории. Для уточненного значения прогиба получим общее решение

$$w = w_0 + \frac{\lambda}{D} M_0, \quad (2.14)$$

где M_0 — приведенный момент по теории тонких плит

$$M_0 = \frac{M_1^0 + M_2^0}{1 + \mu}. \quad (2.15)$$

Представив известные решения по теории тонких плит в виде

$$w_0 = \alpha \frac{qa^4}{8Eh^3}, \quad M_1^0 = \beta_1 qa^2, \quad M_2^0 = \beta_2 qa^2, \quad (2.16)$$

для прогиба получим формулу

$$w = w_0 \left(1 + 9,6 \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2} \right), \quad (2.17)$$

которая очень близка к формуле, предложенной в работе [10] с приближенным учетом влияний σ_z и ϵ_{zz} .

Для сравнения, вычислим прогиб в центре свободно опертой плиты с размерами a , $b = \frac{a}{2}$ и $2h = a/4$ при равномерной нагрузке с интенсивностью $q = 2p$. Такой пример рассмотрен в работе В. М. Дева [11] в качестве числового расчета к предложенному им методу, основанному на развитии работы В. И. Блоха. Цитированный автор, выполняя громоздкие вычисления получает ($\mu = 0,3$)

$$w = 1,4944 \frac{p \cdot a}{E}$$

Пользуясь табличными значениями [12] $\alpha = 0,1106$, $\beta_1 = 0,1017$, $\beta_2 = 0,0464$, из (2.16) непосредственно получим

$$w = 1,5906 \frac{p a}{E}$$

Расхождение результатов составляет 6%. Классическая теория дает для коэффициента величину 0,8848.

В работах [3, 4, 6], в качестве числового примера рассматривается свободно опертая квадратная плита с отношением $h:a = 1:6$ при нагрузке

$$q(x, y) = q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

и решается задача с удовлетворением трех граничных условий. Для отношения $w:w_0$ Б. Ф. Власов и С. А. Амбарцумян получают 1,62, Х. М. Муштари получает 1,57, точное решение дает 1,54. Из (2.14) получается

$$w:w_0 = 1 + \lambda \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) = 1 + \frac{8}{5} \cdot \frac{\pi^2}{1-\mu} \cdot \frac{h^2}{a^2} = 1,62.$$

Прямоугольная плита свободно опертая по некоторым краям при свободных других краях. Из (1.27) и (1.23) следует, что в этом случае решением уравнения (1.10) так же будет $\Phi = w_0$. Поэтому формулы предыдущего пункта остаются в силе и прогиб плиты можно определить по (2.17). В частности, для плиты свободно опертой по трем краям, свободной по краю $y=b$, и несущей равномерно распределенную нагрузку, максимальный прогиб и момент получаются в середине свободного края. Интересно отметить, что в этой точке, при изменениях отношения сторон $b:a$ от 0,5 до бесконечности, отношение коэффициентов $(\beta_1 + \beta_2):a$ имеет почти постоянное значение 0,8 (меняется в пределах от 0,775 до 0,8) [12],

поэтому для прогиба плиты в этой точке, независимо от отношений сторон имеем

$$w = w_0 \left(1 + 7,68 \frac{h^2}{a^2} \right).$$

Ереванский Политехнический
институт

Поступила 16 XI 1960

Թ. Թ. Խաչատրյան

ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՏԵՍՈՒՅՅԱՆ ՄԵՋ ՇՈՇԱՓՈՂ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒՅՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում քննարկվում է սալերի ծոման տեսության ճշտման հարցը երբ հաշվի է առնվում միայն պարարտական օրենքով բաշխված շոշափող լարումների լրացուցիչ աղդեցությունը: Բերվում է նաև խնդիրների լուծման մի հարմար եղանակ, որը կախնում է հետևյալում: Սալի ճշտված հաշվարկային մեծությունները (ճկվածքը, լարումը) ներկայացվում են որպես երկու գումարելիների գումար, որոնցից առաջինը՝ հիմնական անդամը, ներկայացնում է կլասիկ տեսությամբ ստացված մեծությունը, իսկ երկրորդը՝ լրացուցիչ անդամ է: Մի շարք մասնավոր խնդիրների համար ցույց է տրվում, որ ինչպես հիմնական անդամը, այնպես էլ լրացուցիչը կարելի է վերցնել կլասիկ տեսությամբ ստացված արդյունքներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. „J. Math. Phys“, v. 23, 1944.
2. Reissner E. On bending of elastic plates. „Quart. Appl. Math.“ v. V, 1947.
3. Власов Б. Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок. „Известия АН СССР, ОТН“, № 12, 1957.
4. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. „Известия АН СССР, ОТН“, № 5, 1958.
5. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К теории ортотропных оболочек и пластинок. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, № 1, 1959.
6. Муштару Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. „Известия АН СССР, ОТН, механ. и машиностр.“, № 2, 1959.
7. Амбарцумян С. А. К вопросу нелинейной теории анизотропных пластинок. „ДАН АрмССР“, 24, № 4, 1957.
8. Абрамян Б. Л., Бабоян А. А. К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, № 4, 1958, стр. 95—103.
9. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИЗ Техн.-теор. лит., 1955, стр. 222—223.
10. Алексеев С. А. Изгиб толстых плит. „Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского“, вып. 312, 1949.
11. Деев В. М. Расчет толстых упругих плит с помощью собственных функций полигармонических операторов. „Научн. сообщ. ХАДИ“, № 10, 1958.
12. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки. ОГКЗ, 1949, стр. 213.

И. И. Гольдман

Ионизационные потери и захват медленных тяжелых отрицательных частиц

Замедление заряженных частиц в веществе хорошо описывается формулой Бете-Блоха в области скоростей $v \gg v_0 = \frac{e^2}{h}$. Согласно этой формуле, потери энергии одинаковы для положительных и отрицательных частиц и возрастают, при уменьшении скорости, по закону $\frac{1}{v^2}$.

Эксперимент показывает, что при замедлении до скорости $v \approx 2v_0$ рост ионизационных потерь прекращается, а при $v < 2v_0$ потери резко уменьшаются. Как известно, уменьшение неупругих потерь в области $v \ll 2v_0$ обусловлено тем, что электроны атома успевают совершить много оборотов по орбитам за то время, пока частица заметно изменит свое положение. Вследствие такой адиабатичности, ионизация или возбуждение атомов становятся маловероятными.

Однако, для отрицательно заряженных частиц имеется дополнительный механизм потерь, эффективный в области даже очень малых скоростей и ответственный, повидимому, за захват частицы на одну из атомных оболочек [1].

Этот механизм связан с тем, что медленные отрицательные частицы должны втягиваться вглубь атома и ускоряться.

Будем предполагать, что отрицательная частица много тяжелее электрона. Тогда ее движение можно описывать согласно классической механике. Траектория частицы в поле атома определится из следующей формулы

$$\varphi = \int_{R_0}^R \frac{M \frac{dR}{R^2}}{\sqrt{2\mu(E + \Phi) - \frac{M^2}{R^2}}},$$

где φ , R — полярные координаты частицы в плоскости движения, μ — масса, M — момент количества движения, E — энергия частицы, Φ — потенциал атома, R_0 — ближайшее расстояние до ядра.

Вводя прицельный параметр $\rho = M/\sqrt{2\mu E}$, получаем

$$\varphi = \int_{R_0}^R \frac{\rho dR}{R^2 \sqrt{1 + \frac{\Phi(R)}{E} - \frac{\rho^2}{R^2}}}$$

Заметим, что вид траектории частицы зависит от E и ρ , но не зависит от массы μ .

Ближайшее расстояние частицы от ядра R_0 определяется из условия

$$1 + \frac{\Phi(R_0)}{E} = \frac{\rho^2}{R_0^2} \quad (1)$$

Анализ этой формулы показывает, что даже сравнительно большим прицельным параметрам могут соответствовать малые R_0 (если Z не очень мало).

В области малых скоростей становятся существенными свойства тормозящего вещества, обусловленные наиболее слабо связанными электронами.

Рассмотрим случай, когда торможение происходит в газе. В отношении свойств газа надо различать две возможности:

а) либо при любых положениях отрицательной частицы существует стабильное состояние атома (т. е. стабилен отрицательный ион предыдущего элемента с порядковым номером $Z-1$),

б) либо при расстояниях $R \leq R_1$ наружный электрон не удерживается атомом.

В последнем случае ионизация медленной отрицательной частицей происходит, очевидно, с большой вероятностью. Пользуясь (1), находим сечение ионизации

$$\tau = \pi \rho_1^2 = \pi R_1^2 \frac{\Phi(R_1) + E}{E} \quad (2)$$

(ρ_1 — прицельный параметр, которому соответствует ближайшее расстояние $R_0 = R_1$). При этом сечение не зависит от массы и частица теряет энергию, равную по порядку величины потенциалу ионизации I .

При очень малых энергиях сечение процесса

$$\sigma \sim \frac{1}{E} \quad (3)$$

Захват происходит, если $E \sim I$, причем вероятность захвата не очень чувствительна к Z [см. (1)].

Случай, когда отрицательный ион предыдущего элемента стабилен, имеет место в благородных газах (отрицательные ионы галоидов устойчивы и имеют энергию ионизации порядка нескольких эв).

Изменение состояния атома под действием медленной тяжелой частицы нельзя считать малым (это относится к валентным электронам, которые ответственны за ионизационные потери) и нельзя поль-

зоваться обычной теорией возмущений. Можно, однако, воспользоваться медленностью движения ионизирующей частицы и применить адиабатическую теорию возмущений.

Пусть ψ_n — волновая функция атомных электронов (независящая от времени) в поле ядра и покоящейся отрицательной частицы.

Тогда

$$[H + V(R)]\psi_n = E_n(R)\psi_n, \quad (4)$$

где $V(R)$ — энергия взаимодействия с тяжелой частицей, $E_n(R)$ — энергия n -го состояния, зависящая от R как от параметра.

Ищем решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [H + V(R(t))]\psi$$

в виде

$$\psi = \sum_n a_n(t) \psi_n[R(t)] e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n[R(\tau)] d\tau}$$

Для a_n получаем уравнения

$$\dot{a}_n = - \sum_n a_n \dot{R} e^{i \int_0^t \omega_{n'n}(\tau) d\tau} \int \psi_n^* \frac{\partial \psi_n}{\partial R} dr.$$

Здесь

$$\hbar \omega_{n'n}(t) = E_{n'}[R(t)] - E_n[R(t)].$$

Если уравнение (4) продифференцировать по R , умножить на ψ_n^* и проинтегрировать по координатам электронов dr , получим

$$\int \psi_n^* \frac{\partial V}{\partial R} \psi_n dr = - \hbar \omega_{n'n} \int \psi_n^* \frac{\partial \psi_n}{\partial R} dr.$$

Итак,

$$\dot{a}_n = \sum_n \frac{a_n(t)}{\hbar \omega_{n'n}(t)} \dot{R} e^{i \int_0^t \omega_{n'n}(\tau) d\tau} \int \psi_n^* \frac{\partial V}{\partial R} \psi_n dr.$$

Имея в виду, что все $a_{n'}$ малы, кроме относящегося к начальному состоянию $a_n \approx 1$, получаем

$$a_n(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\dot{R}}{\hbar \omega_{n'n}(t)} e^{i \int_0^t \omega_{n'n}(\tau) d\tau} \int \psi_n^* \frac{\partial V}{\partial R} \psi_n dr. \quad (5)$$

Если масса отрицательной частицы достаточно велика (точный критерий будет установлен позже), то в интеграле (5) существенна та область t , в которой R мало. При $R \ll a_0$ в качестве ψ_n , ψ_n^* и $\omega_{n'n}$ можно брать соответствующие величины, относящиеся к отрицатель-

ному иону предыдущего элемента, а также можно положить

$$\frac{\partial V}{\partial R} = e^2 \sum_i \frac{r_i}{r_i^3}.$$

Тогда (5) примет вид

$$a_n(\infty) = \frac{e^2}{\hbar \omega_{n'n}} R(\omega_{n'n}) \int \psi_{n'}^* \sum_i \frac{r_i}{r_i^3} \psi_n dr, \quad (6)$$

где $R(\omega)$ — Фурье-компонента скорости ионизирующей частицы.

Матричный элемент в формуле (6) легко связать с матричным элементом соответствующего оптического перехода. Действительно, имеют место следующие операторные уравнения

$$m \sum_i \ddot{r}_i = \sum_i \frac{Ze^2 r_i}{r_i^3}.$$

Отсюда беря матричный элемент, находим

$$\left(\sum_i \frac{r_i}{r_i^3} \right)_{n'n} = \frac{m \omega_{n'n}^2}{Ze^2} \left(\sum_i r_i \right)_{n'n}. \quad (7)$$

Далее, вероятность перехода $n \rightarrow n'$

$$\begin{aligned} w_{n'n} &= |a_n(\infty)|^2 = \frac{m^2 \omega_{n'n}^2}{Z^2 \hbar^2} \left| R(\omega_{n'n}) \left(\sum_i r_i \right)_{nn'} \right|^2 = \\ &= \frac{m^2 \omega_{n'n}^2}{3Z^2 \hbar^2} |R(\omega_{n'n})|^2 \left| \sum_i r_i \right|_{nn'}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем теперь вероятность оптического перехода

$$A_{n'n} = \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \omega_{n'n}^3 \left| \sum_i r_i \right|_{nn'}^2, \quad (9)$$

через которую вероятность возбуждения выражается следующим образом

$$w_{n'n} = \frac{m^2 c^3}{4Z^2 e^2 \hbar \omega_{n'n}} A_{n'n} |R(\omega_{n'n})|^2. \quad (10)$$

Это выражение зависит от прицельного параметра ρ через компоненты Фурье скорости. Для получения сечения надо $w_{n'n}$ умножить на $2\pi\rho d\rho$ и проинтегрировать по всем ρ

$$\sigma_{n'n} = \frac{m^2 c^3}{4Z^2 e^2 \hbar \omega_{n'n}} A_{n'n} \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho |R(\omega_{n'n})|^2. \quad (11)$$

Для движения в кулоновском поле притяжения Фурье-компоненты координат имеют следующий вид [2]

$$X_\omega = -\frac{a}{2\omega} H_{\frac{\omega}{\omega_0}}^{(1)*} \left(i \frac{\omega}{\omega_0} \right),$$

$$Y_w = - \frac{a \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{2\omega\varepsilon} H_{i \frac{\omega}{\omega_0}}^{(1)} \left(i \frac{\omega}{\omega_0} \varepsilon \right),$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{\mu a^3}} = \frac{\mu v^3}{Ze^2}, \quad a = \frac{Ze^2}{2E},$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu Z^2 e^4}} = \sqrt{1 + \frac{\rho^2 \omega_0^2}{4v^2}}.$$

Легко видеть, что при выполнении условий

$$E \lesssim Z^{2/3} \frac{me^4}{h^2}, \quad \frac{Z}{1/\sqrt{\mu/m}} \ll 1; \quad \left(\omega_{n'n} = \frac{me^4}{h^3} 1 \right), \quad (12)$$

параметр функции Ганкеля—большое мнимое число $\left(\frac{\omega_{n'n}}{\omega_0} \gg 1 \right)$.

В этом случае можно воспользоваться следующими приближенными выражениями

$$H_{i \frac{\omega}{\omega_0}}^{(1)} \left(i \frac{\omega}{\omega_0} \varepsilon \right) = - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\omega_0}{\omega} \right)^{1/2} \Phi \left[\left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)^{1/2} (\varepsilon^2 - 1) \right],$$

$$H_{i \frac{\omega}{\omega_0}}^{(1)} \left(i \frac{\omega}{\omega_0} \varepsilon \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\omega_0}{\omega} \right)^{1/2} \Phi' \left[\left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)^{1/2} (\varepsilon^2 - 1) \right],$$

где Φ —функция Эйри.

$\Phi(x)$ экспоненциально мала при $x \gg 1$, поэтому в интеграле (11) существенна область прицельных параметров ρ от 0 до некоторого ρ_m , определяемого по порядку величины из условия, чтобы аргумент функции Эйри был бы ~ 1

$$\rho_m^2 \sim \frac{1}{\omega^{1/2} E} \frac{(Ze^2)^{3/2}}{\mu^{1/2}}. \quad (13)$$

Необходимо потребовать, чтобы ближайшее расстояние, на которое частица подходит к ядру при таком прицельном параметре, было бы $\ll Z^{-1/3} a_0$. С помощью (1) и (13) получаем, что это условие совпадает со вторым условием (12).

Интегрирование по ρ выражения (9) производится при помощи формулы

$$\int_0^\infty dx [\Phi'^2(x) + x\Phi^2(x)] = -\Phi(0) \cdot \Phi'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

и приводит к следующему результату

$$2\pi \int_0^\infty \rho d\rho |\dot{R}|^2 = \frac{2Z^2 e^2}{\sqrt{3} \omega^2 \mu^2 v^2}, \quad (14)$$

$$\sigma_{n'n} = \frac{e^2 m^2 c^3}{2V 3\hbar \omega^3 \mu^2 v^2} A_{n'n}. \quad (15)$$

При переходе электрона $n \rightarrow n'$ ионизирующая частица теряет энергию ΔE , равную разности энергии атома в конечном и начальном состояниях, т. е. не $\hbar \omega_{n'n}$ (относящееся к отрицательному иону), если у него имеются возбужденные уровни, а $\hbar \omega_{n'n}^{(0)}$. Если электрон в конечном состоянии имеет положительную энергию E' , то

$$\Delta E = I_0 + E' = \hbar \omega_{n'n} + I_0 - I,$$

где I_0 — потенциал ионизации атома, I — потенциал ионизации отрицательного иона элемента $Z - 1$.

При расчете предполагалось, что выполняются следующие условия:

а) чтобы можно было пользоваться асимптотическими разложениями для функции Ганкеля, необходимо

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1, \quad \text{т. е. } E \ll (\mu Z^2 \omega^2)^{1/2};$$

б) экранированием поля ядра можно пренебречь. Существенные расстояния при интегрировании по прицельным параметрам определяются из условия, что аргумент функции Эйри ~ 1

$$\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{2/3} (\epsilon^2 - 1) \sim 1.$$

Отсюда находим

$$\frac{Z^2}{\omega \mu} \ll 1.$$

Итак, при выполнении этого условия, сечение зависит от Z лишь через $A_{n'n}$ и только этой зависимостью определяется относительная вероятность захвата на разные атомы, если торможение происходит в смеси.

При больших Z расчет должен быть модифицирован так, чтобы учесть экранирование поля ядра при вычислении Фурье-компонент. Необходимо при этом учитывать, что, при достаточно малых энергиях тормозящейся частицы, центробежный потенциал создает барьер и близкая к ядру область становится недоступной, так как проникновением через барьер, очевидно, можно пренебречь для частиц тяжелее электрона. Для выяснения этого вопроса надо исследовать положительные корни уравнения

$$f(R) = R^2 + \frac{\Phi(R)}{E} R^2 = \rho^2.$$

При достаточно больших E , $f(R)$ является монотонной функцией R , изменяющейся от 0 до ∞ и, следовательно, при любых ρ имеется только один корень этого уравнения. При некотором $E = E_0$ производная

$f'(R)$ обращается в нуль и при $E < E_0$ имеются три корня, т. е. появляется барьер, делающий внутреннюю часть атома недоступной для частицы. Значение E_0 равно максимуму выражения

$$-\frac{1}{2R} \cdot \frac{d}{dR} [\Phi(R) R^2].$$

В приближении Томаса-Ферми

$$\Phi = \frac{Z^{1/2}}{b} \frac{\chi(x)}{x}, \quad x = bRZ^{-1/2}$$

и, таким образом,

$$E_0 = \frac{Z^{1/2}}{b} \max \frac{1}{2} \left[-\chi' - \frac{\chi}{x} \right].$$

Значения выражения $-\frac{1}{2} \left(\chi' + \frac{\chi}{x} \right)$ приведены в следующей таблице.

Таблица

x	3	3,2	3,4	3,5	3,6	3,8
$-\frac{1}{2} \left(\chi' + \frac{\chi}{x} \right) \cdot 10^3$	4,855	5,050	5,135	5,145	5,135	5,055

Максимум достигается при $x = 3,50$ и равен

$$E_0 = \frac{Z^{1/2}}{b} 0,005145.$$

При этом

$$\rho \approx 10 \text{ м. ф. е.}$$

Итак, если

$$E < \frac{Z^{1/2}}{6,15} \text{ эв,}$$

частица не сможет подойти близко к ядру и вероятность захвата будет мала, причем расчет следует производить учитывая экранирование.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1960

Ի. Ի. Գուլամբ

ԻՈՆԻԶԱՑԻՈՆ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԸ ԵՎ ԴԱՆԴԱՂ ԾԱՆՐ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԳՐԱՎՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փոքր էներգիաների տիրույթում ոչ առաձգական կորուստների ամենա-
էֆեկտիվ մեխանիզմը կախնում է միջուկի զաշտում մասնիկների արագաց-
ման մեջ, որի ընթացքում խախտվում է պրոցեսի ադիաբատիկությունը:
Հաշվվում են բացասական մեզոնների և հիպերոնների համար իոնիզացիայի

դրաման կտրվածքները [(2) և (15) քանաձևերը]: Քոմաս-Ֆերմիի մոդելի հիման վրա վերլուծվում է ատոմի միջին մասը իոնիզացնող մասնիկի համար անմատչելի դարձնող կենտրոնախույս բարիերրի վերաբերյալ հարցը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольдман И. И., Хейфец С. А. Об остановке тяжелых частиц. «Известия АН СССР, серия физ.», **19**, 1955, стр. 665.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.

А. М. Резикян

Ионообразование в катодной части тлеющего разряда

(экспериментальная часть)

§ 1. Введение

В статье [1] было показано, что место образования ионов, возникающих в катодной части тлеющего разряда и доходящих до катода, можно определить экспериментально, независимо от имеющейся теории катодной части. Выражение, полученное для средней длины пути $\bar{S}_k$ всех ионов образующихся в катодной части и доходящих до катода, имеет вид

$$\bar{S}_k = 0,133 \frac{\Delta p}{p} \frac{b_1}{j}, \quad (1)$$

где p — давление в мм рт. ст., Δp — разность давлений нейтрального газа между катодом и анодом разряда в мм рт. ст., j — плотность разрядного тока в mA/cm^2 , а b_1 — подвижность положительных ионов при давлении 1 мм рт. ст.

Таким образом, измеряя p , j и Δp , мы можем определить $\bar{S}_k$. Однако нас больше интересует величина q , равная отношению средней длины пути всех ионов доходящих до катода $\bar{S}_k$ (т. е. центра тяжести их образования) к ширине области катодного падения потенциала d , т. е.

$$q = \frac{\bar{S}_k}{d} = 0,133 \frac{b_1}{jd} \frac{\Delta p}{p}. \quad (2)$$

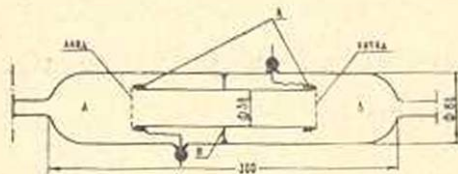
Величина q достаточно хорошо определяет место возникновения ионов. Если $q \ll 1$, т. е. $\bar{S}_k \ll d$, то почти все ионы возникают в области катодного падения потенциала, а при $q \gg 1$ ($\bar{S}_k \gg d$) подавляющая часть ионов возникает в области второго катодного свечения (тлеющее свечение).

Такой экспериментальный анализ изменения q в зависимости от условий тлеющего разряда, очевидно, представит интерес, он явится одним из критериев для проверки существующих теорий катодной части тлеющего разряда.

§ 2. Разрядная трубка

В статье [1] мы уже установили, что для измерения разности давлений Δp и определения q с помощью уравнения (2), необходимо иметь электроды газоразрядного промежутка из сетки.

Разрядный промежуток находился в стеклянном цилиндре (фиг. 1), электродами служили никелевые сетки густотой 10000 ячеек на квадратном сантиметре. Сетки на торцах внутреннего цилиндра зажимались стальными пружинками Л. Объем А от объема В был изолирован стеклянной перегородкой П.



Фиг. 1.

Принцип работы такой трубки следующий. В разряде ионы, передавая свой импульс газу, перекачивают газ из объема А в объем В до тех пор, пока возникающая разность давлений нейтрального газа не уравнивается электрическими силами, действующими в объеме разряда. Возникающая разность давлений между катодом и анодом измерялась стеклянным мембранным манометром.

Особым требованием должна удовлетворять сетка катода. Если по всей поверхности катода густота сетки и плотность разрядного тока постоянны*, то на катоде образованная область катодного падения потенциала будет всюду одинаковой ширины. В противном случае, ширина области катодного падения потенциала не будет одинакова по всей поверхности катода. Места, где сетка редкая, подобны отверстиям, через которые газ может течь обратно в объем разряда и этим уменьшать разность давлений, созданную ионами. Неравномерность плотности разрядного тока приведет к таким же явлениям.

Описанные сетки давали возможность получить равномерный разряд в интервале давления от 10^{-2} до 8 мм рт. столба при плотности тока в несколько миллиампер на квадратный сантиметр катода.

§ 3. Стеклянный мембранный манометр

Стеклянный мембранный манометр измеряет разность давлений газа с помощью изменения электроемкости. Изменение емкости происходит между неподвижным металлическим электродом и тонкой упругой посеребренной стеклянной мембраной (фиг. 2). Тонкая мембрана толщиной от 5 до 20 микрон натянута на стеклянном шарике.

Ошибка мембранного манометра доходила до $5 \div 7 \cdot 10^{-3}$ мм рт. столба.

При заданной толщине мембраны, расстояние между электродами выбиралось такое, чтобы достигалась необходимая чувствитель-

* Исключая искажение на краях катода около стен трубки.

ность. Это делалось на специальной установке, дающей возможность быстро проверять чувствительность при изменении расстояния. Электроды 1 и 2 соединялись с измерителем приращения емкости.

После градуировки манометра, его присоединяют к концам газоразрядной трубки, для измерения разности давлений в ней.

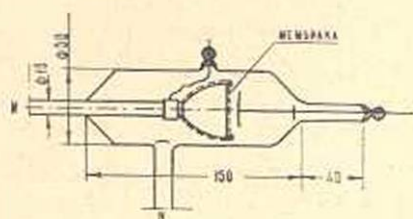
Установлено, что стеклянный мембранный манометр по сравнению с металлическими имеет некоторые преимущества.

1) При большом изгибе стеклянной мембраны толщиной в $7-15$ микронов не появляется заметной величины остаточной деформации. Этот предельный изгиб соответствует разности давлений $0,1$ мм рт. столба, при чувствительности равной $0,001$ мм рт. столба.

2) Мембранный манометр припаянный к стеклянной аппаратуре может быть откачен с помощью нагрева до 350°C , благодаря чему достижима большая степень очистки аппаратуры.

3) Указанным манометром можно измерить разность давлений в газах и парах таких веществ, которые реагируют с любыми другими веществами, кроме стекла. При этом газы и пары не имеют контакта с серебром, так как серебро нанесено на наружной поверхности шарика и мембраны.

4) Легко можно изготовить манометры с стеклянной мембраной, ошибки которых не превышают $5-7 \cdot 10^{-4}$ мм рт. столба.

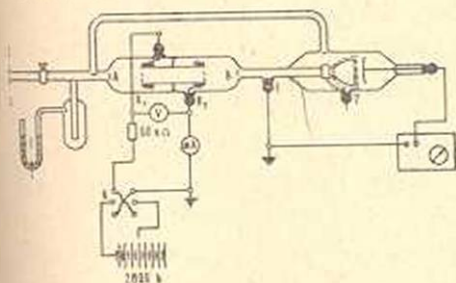


Фиг. 2.

§ 4. Экспериментальная установка

Для измерения разности давлений нейтрального газа между катодом и анодом, к концам разрядного промежутка соединялся мембранный манометр (фиг. 3). Напряжение на электроды разрядного промежутка подавалось от выпрямителя и могло регулироваться.

С помощью трехфазного переключателя можно было менять полярность электродов. Независимо от полярности, электрод K_2 всегда оставался заземленным. Это заземление избавляло от случайных разрядов между электродом K_2 и мембраной манометра. Для дальнейшего предостережения пробоя, на мембрану в суженной части вставлялась предохраняющая сетка. Сетка 1 и мембрана 2 также заземлялись.



Фиг. 3.

Для дальнейшего предостережения пробоя, на мембрану в суженной части вставлялась предохраняющая сетка. Сетка 1 и мембрана 2 также заземлялись.

Перед началом опытов вся система предварительно обезгаживалась в печи до температуры 350°C . Затем наполнялась исследуемым газом и долго тренировалась разрядом, после чего система откачивалась. Этот процесс несколько раз повторялся, пока во всей системе получалась необходимая чистота. После такой очистки, по всему объему газоразрядного цилиндра удавалось получить достаточно равномерный разряд.

Длина газоразрядного промежутка во всех опытах была одинакова и равнялась 55 мм, а диаметр — изменялся.

Основные измерения проводились после некоторых предварительных. Через разрядный промежуток, наполненный аргоном до давления 4 мм рт. столба, в течение одного часа протекал разрядный ток плотностью 2 мА/см². В течение такого большого промежутка времени определено было достигнуто тепловое равновесие. Образованная разность давлений нейтрального газа все время оставалась неизменной. С помощью рубильника *K* (фиг. 3), внезапно менялась полярность электродов разрядного промежутка, в связи с чем на приборе измерителя приращения емкости можно было наблюдать внезапное изменение направления роста давления газа. При этом абсолютное значение разности давлений оставалось постоянным и менялось только направление роста давления газа. Давление на катоде всегда было больше, чем на аноде. Это значит, что направление увеличения давления газа всегда совпадало с направлением положительных ионов, т. е. разность давлений нейтрального газа в основном создается положительными ионами. Это обстоятельство подтверждает предположение, высказанное в [1].

То обстоятельство, что разность давлений не меняется во времени при постоянной плотности разрядного тока, показывает, что нагрев электродов не влияет на измерения.

С другой стороны, так как при выключении разряда разность давлений сейчас же исчезает, можно утверждать, что никакие тепловые эффекты не влияют на измерения.

Зависимость разности давлений нейтрального газа от плотности разрядного тока и от давления газа изучена для аргона, азота и водорода. Ниже, в таблицах приведены результаты этих опытов. Они показывают, что

а) при постоянном давлении газа, плотность разрядного тока, протекающего через него, пропорциональна разности давлений газа между катодом и анодом,

б) при постоянной плотности разрядного тока, разность давлений газа между анодом и катодом для аргона пропорциональна, а для азота и водорода — обратно пропорциональна давлению газов.

Такая качественная разница между инертным и молекулярным газами, выявленная в пункте б) будет объяснена ниже.

Результаты измерений и вычислений приведены в таблицах 1—3.

Результаты измерений для аргона ($b_1^+ = 1 \times 10^3 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \frac{\text{вольт}}{\text{см}}$)

Таблица 1

Плотность разрядного тока j ма/см ²	$\Delta p \cdot 10^3$ мм рт. ст.	$\bar{S}_k$ см	d см	q	P мм рт. ст.	v вольт
0,5	0,90	0,095	0,080	1,18	2,5	237
1,0	1,40	0,075	0,057	1,30		270
1,5	1,65	0,059	0,050	1,18		320
2,0	1,80	0,048	0,040	1,20		380
2,5	1,90	0,041	0,030	1,38		450
0,5	1,90	0,100	0,037	2,70	5,0	247
1,0	2,90	0,076	0,036	2,10		250
1,5	3,45	0,061	0,034	1,80		255
2,0	3,70	0,048	0,033	1,46		260
0,5	2,90	0,098	0,024	4,10	8,0	244
1,0	4,40	0,074	0,023	3,10		246
1,5	5,20	0,058	0,023	2,50		250
2,0	5,85	0,047	0,021	2,20		256

Результаты измерений для азота

$$\left(b_1^+ = 9,7 \times 10^3 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \frac{\text{вольт}}{\text{см}} \right)$$

Таблица 2

j ма/см ²	$\Delta p \cdot 10^3$ мм рт. ст.	$\bar{S}_k$ см	d см	q	P мм рт. ст.	v вольт
0,2	2,00	0,850	0,074	11,4	1,5	1060
0,4	4,00	0,850	0,074	11,4		1560
0,6	6,20	0,880	0,073	11,2		2250
0,2	1,45	0,310	0,048	6,5	3,0	610
0,4	2,30	0,240	0,038	6,3		830
0,6	3,10	0,220	0,037	6,0		960
0,8	3,60	0,200	0,036	5,4		1100
0,2	1,20	0,154	0,034	4,5	5,0	470
0,4	1,90	0,120	0,033	3,6		530
0,6	2,45	0,104	0,032	3,3		580
0,8	2,95	0,083	0,027	3,1		650
1,0	3,20	0,078	0,025	3,1		710

Результаты расчетов, приведенных в таблицах, показывают, что положенным в основу теории [1] предположением о создании разности давлений газа положительными ионами, можно объяснить наблюдаемые физические явления.

Результаты измерений для водорода

$$\left(b_1^+ = 4,5 \cdot 10^2 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \frac{\text{вольт}}{\text{см}} \right)$$

Таблица 3

j ма/см ²	$\Delta p \cdot 10^3$ мм рт. ст.	S_k см	d см	q	P мм рт. ст.	U вольт
0.5	2.30	4.250	0.460	11.7	0.6	600
1.0	4.50	4.140	0.360	11.7		1400
1.5	6.50	4.000	0.345	11.5		1860
2.0	8.30	3.800	0.335	11.5		2200
0.5	1.20	0.550	0.120	4.6	2.5	770
1.0	2.50	0.600	0.110	5.4		855
1.5	3.60	0.520	0.097	5.3		1030
2.0	4.45	0.490	0.095	5.1		1130
2.5	5.20	0.470	0.087	5.3		1250
0.5	0.80	0.164	0.090	1.8	5.5	465
1.0	1.50	0.152	0.090	1.7		470
1.5	2.10	0.140	0.089	1.6		475
2.0	2.60	0.131	0.088	1.5		482
2.5	3.15	0.128	0.088	1.4		485
3.0	3.50	0.118	0.086	1.3	7.5	492
0.5	0.50	0.070	0.037	1.9		960
1.0	1.10	0.077	0.035	2.2		920
1.5	1.45	0.068	0.034	2.0		950
2.0	1.70	0.060	0.033	1.8		980
2.5	1.90	0.053	0.033	1.6		1025

Существует еще одна возможность для проверки принятого исходного предположения. Известно, что плотность разрядного тока на краях разрядного промежутка меньше, чем в середине разряда, так как около периферии существует потеря ионов и электронов на стенку разрядной трубки. Краевой эффект увеличивается с уменьшением диаметра и наоборот. В действительности мы измеряем только среднее значение плотности разрядного тока, поэтому, при постоянной величине средней плотности, эффективная плотность в середине тем больше, чем меньше диаметр разрядной трубки. Значит, чем меньше диаметр разрядной трубки, тем относительно большая доля зарядов попадает на стенку. Причиной, приводящей к увеличению разности давлений (или средней длины пути ионов) при уменьшении диаметра разрядной трубки, является потеря ионов на стенку у периферии разряда.

Не все ионы, движущиеся около периферии, попадают на катод, часть их попадает на стенку. Попадающая на стенку часть ионов создает разность давлений нейтрального газа, соответствующую своему

импульсу. Эту часть тока, однако, измерить невозможно. Поэтому, при уменьшении диаметра разрядной трубки (при неизменных прочих условиях), надо ожидать увеличения разности давлений.

Для проверки указанного эффекта были проведены опыты по измерению Δp при разных диаметрах разрядной трубки. Результаты приведены в таблицах 4 и 5.

Значения $\Delta P \cdot 10^3$ в мм рт. ст. для
азота при $P=3$ мм рт. ст.

Таблица 4

j $\frac{\text{ма}}{\text{см}^2}$	Диаметр трубки см		
	1,8	3,8	5,6
1,0	1,9	1,5	0,9
1,3	3,3	2,5	1,3
2,0	4,1	3,2	1,9

Значения $\Delta P \cdot 10^3$ в мм рт. ст.
для водорода

Таблица 5

j $\frac{\text{ма}}{\text{см}^2}$	P мм рт. ст.	Диаметр трубки см		
		1,8	3,8	5,6
1,0		3,1	2,4	1,6
1,5	2,5	3,8	3,9	2,2
2,0		4,7	3,7	2,7
1,0		1,3	1,0	0,5
1,5	7,5	1,9	1,4	0,8
2,0		2,5	1,8	1,3

Из приведенных таблиц видно, что, при постоянной средней плотности разрядного тока, увеличение диаметра разрядной трубки во всех случаях сопровождается уменьшением разности давлений нейтрального газа между катодом и анодом. Эти результаты также подтверждают правильность предположения о создании разности давлений газа положительными ионами. Привести количественную оценку этого эффекта почти невозможно, так как до сих пор недостаточно изучена поперечная зависимость плотности разрядного тока. Известно только, что плотность разрядного тока не постоянна по направлению радиуса трубы.

Расчеты, приведенные в работе [1], выполнены без учета радиальной зависимости плотности разрядного тока из-за непреодолимых математических трудностей. Это допустимо, так как порядок величины q не зависит от диаметра разрядной трубки.

В дальнейшем все наши рассуждения будут относиться к среднему диаметру разрядной трубки.

Таблицы 1, 2 и 3 дают величину q всегда большую единицы, даже если считать, что допущена ошибка порядка 25%. Это означает, что во всех случаях число ионов, идущих на катод из тлеющего свечения, больше, чем число ионов, идущих на катод из области катодного падения потенциала. К сожалению с нормальным разрядом измерение провести не удалось из-за малости разности давлений нейтрального газа.

Вероятно, что при нормальном разряде большая часть идущих на катод ионов образуется в области катодного падения потенциала. Иначе невозможно было бы понять механизм нормального разряда. Но уже при напряжениях незначительно больших нормального, число

ионов, идущих из тлеющего свечения на катод, возрастает по сравнению с числом ионов, поступающих из области катодного падения потенциала.

Средняя длина $\bar{S}_k$ должна расти пропорционально напряжению катода, так как чем больше напряжение, тем больше ускоряются электроны и тем дальше создают они ионы. С другой стороны, при увеличении напряжения уменьшается ширина области катодного падения потенциала. По этим двум причинам нужно было бы ожидать возрастания величины q с ростом напряжения, так как $q = \bar{S}_k/d$. Это было бы верно, если бы в местах образования ионов не было процессов потерь ионов, как это, в весьма значительной мере, имеет место в тлеющем свечении. Следовательно, без анализа поведения ионов в тлеющем свечении, нельзя утверждать, что величина q пропорциональна напряжению катода.

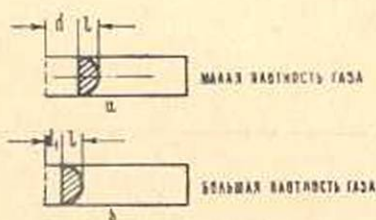
Средняя длина $\bar{S}_k$ определяется шириной слоя тлеющего свечения эмитирующего ионы, причем длина l растет с ростом ширины этого слоя.

Ширина слоя эмитирующего ионы и их количество сильно зависят от процессов потери ионов. Если бы не было потерь ионов, то все возникающие ионы доходили бы до катода. Однако, существует два известных процесса, которые приводят к потерям ионов: диффузия ионов на стенки и объемная рекомбинация их.

В зависимости от рода газа, потери определяются в основном одним из двух процессов.

Рассмотрим первый случай, случай с инертным газом. В инертных газах объемная рекомбинация незначительна, поэтому в этом случае потеря ионов идет, в основном, путем их диффузии на стенку разрядного объема.

Ширина слоя l (фиг. 4) тлеющего свечения эмитирующего ионы в область катодного падения потенциала (а значит и доходящих до катода), определяется только геометрической формой разрядного сосуда. Поэтому из областей, находящихся за указанной областью l ,



Фиг. 4.

ионы не могут попасть в область катодного падения потенциала. Вероятность диффузии их на стенку разрядного промежутка вне слоя l больше, чем вероятность диффузии их в область катодного падения потенциала. Ширина эмитирующего слоя l порядка величины радиуса разрядной трубки. Так как ширина l не зависит от давления газа (фиг. 4 а и в), а ширина области катодного падения потенциала d уменьшается с увеличением давления, то величина q растет (правда, незначительно) с возрастанием давления.

Что касается средней длины $\bar{S}_k$, то она должна с ростом давления очень незначительно уменьшаться, так как d уменьшается, а l — нет, затем d намного меньше l . Точно такой результат получен в аргоне (см. таблицу 1). Вероятно это правильно во всех случаях, когда отсутствует объемная рекомбинация. Если инертный газ не чистый (вследствие чего появляется объемная рекомбинация), то в этом случае не вся ширина l участвует в эмиссии ионов, доходящих до катода. Следовательно, незначительная примесь другого газа, приводящего к появлению объемной рекомбинации ионов, резко меняет вольтамперную характеристику разряда в инертных газах.

Во втором случае, когда газ молекулярный (H_2 , N_2) и поэтому существует объемная рекомбинация, поведение слоя l меняется.

При не очень маленьких плотностях плазмы тлеющего свечения, объемная рекомбинация становится настолько значительной, что вероятность рекомбинации ионов на стенку путем их диффузии становится пренебрежимо малой относительно вероятности объемной их рекомбинации. По этой же причине уменьшается диффузия ионов в область катодного падения потенциала.

Отсюда следует, что чем больше рекомбинация, тем меньше ширина слоя плазмы из которой ионы диффундируют в область катодного падения потенциала.

Объемная рекомбинация ионов растет с увеличением давления газа, вследствие этого ширина слоя l уменьшается. С ростом давления рекомбинация растет вследствие следующих причин:

1) коэффициент рекомбинации пропорционален минимум первой степени давления газа*,

2) известно, что с ростом давления P , при постоянной плотности разрядного тока вследствие уменьшения диффузии ионов, плотность плазмы увеличивается пропорционально P^2 , так как концентрация положительных (а также отрицательных) частиц увеличивается пропорционально первой степени давления газа.

Таким образом, рекомбинация заряженных частиц, примерно, пропорциональна не менее третьей степени давления. В действительности эта связь намного сложнее, так как при увеличении давления газа меняется, например, температура заряженных частиц. Отсюда видно, что ширина слоя l не только зависит от того, как глубоко в плазме генерируются ионы, но также зависит от величины диффузии и рекомбинации ионов. Поэтому увеличение напряжения (т. е. увеличение глубины ионогенерации в плазме) не приводит к увеличению q (или $\bar{S}_k$), как это следовало ожидать без учета потерь ионов.

* Первой степени, если рекомбинация идет между электронами и положительными ионами, при столкновении с нейтральной молекулой. Большая часть рекомбинаций, однако, идет путем соединения положительных и отрицательных ионов, поэтому коэффициент рекомбинации растет с давлением p больше, чем p в первой степени.

Так как в молекулярных газах рекомбинация растет пропорционально не менее третьей степени давления газа (вследствие чего уменьшается ширина слоя l), а ширина области катодного падения потенциала уменьшается пропорционально первой степени давления, то отсюда следует, что с увеличением давления газа как q , так и средняя длина пути $\bar{S}_k$ ионов, доходящих до катода, уменьшаются. Аналогичная картина наблюдается при разряде в азоте и водороде (см. табл. 2 и 3).

Приведенные выше рассуждения относительно изменения l в зависимости от рода газа можно получить из уравнения для тлеющего свечения, написанного для случая плазмы в цилиндрической трубке.

Таким образом, результаты, полученные относительно места возникновения ионов, объясняются качественно правильно и показывают, что уже при слабо аномальном тлеющем разряде большинство ионов идет на катод из области тлеющего свечения, и что характер разряда существенно зависит от рода газа — инертности и молекулярности.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 2 IX 1959

2. Մ. Ռեզիկյան

ԻՈՆՆԵՐԻ ԱՌԱՋԱՑՈՒՄԸ ՄԱՐՄԱՆԴ ԴԱՏՈՂԱՅԻՆ ՄԱՍԻՄ

(էքսպերիմենտալ մաս)

Ա Ս Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

էքսպերիմենտալ կերպով ուսումնասիրված է իոնների առաջացման տեղը մարմանը պարպման կատոդի շերտում՝ կախված նրա պարպման պայմաններից: Իոնների առաջացման տեղը որոշված է կատոդի և անոդի միջև ճնշումների տարբերությունը չափելու միջոցով, որը թույլ է տալիս բնութագրել q մեծությունը:

$$q = \frac{\bar{S}_k}{d},$$

որտեղ $\bar{S}_k$ -ն դեպի կատոդ եկող իոնների ճանապարհի միջին երկարությունն է, իսկ d -ն կատոդալին անոդին շերտի հաստությունն է:

Չափումները կատարված են իներտ (արգոն) և մոլեկուլյար (ջրածին և ազոտ) գազերում: Ստացված է, որ նույնիսկ թույլ անոդալ մարմանը պարպումների դեպքում q -ն մեծ է մեկից: Այդ նշանակում է, որ իոնների մեծ մասը գալիս է կատոդ մարմանը լուսավորման շերտից, ընդ որում q -ի փոփոխությունը, նախած գազի ճնշմանը, իներտ և մոլեկուլյար գազերի մեջ որակապես տարբեր է: Այս տարբերությունը բացատրվում է նրանով, որ իներտ գազերում զգալի դեր է խաղում մարմանը լուսավորման շերտից իոնների զիջուկիան դեպի խողովակի պատերը, իսկ մոլեկուլյար գազերի դեպքում՝ այդ իոնների տարածական չեզոքացումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Резикян А. М. Ионнообразование в катодной части тлеющего разряда. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 13, № 6, 1960.

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

**К вопросу о перераспределении напряжений между
 скелетом и поровой водой глинистого грунта**

В теории уплотнения земляных масс [1] принято было считать, что приложения к водонасыщенному глинистому грунту внешняя нагрузка в момент ее приложения полностью воспринимается поровой водой, и только в результате падения избыточных напоров в поровой воде указанная нагрузка постепенно передается на скелет грунта. В дальнейшем, после введения понятия о ползучести скелета грунта и ее учета при решении задач уплотнения, В. А. Флориным [2] было установлено, что, при конечной водопроницаемости грунта и весьма малой скорости нарастания деформации ползучести скелета, уплотнение происходит без ощутимого повышения давления в воде.

В целях уточнения основных предпосылок теории уплотнения, определения границ ее применимости и выяснения условий передачи внешней нагрузки на поровую воду, выполнен ряд экспериментальных работ по изучению порового давления [3, 4, 5].

В работе [3] показано, что, в результате влияния ползучести скелета, внешняя нагрузка не полностью передается на поровую воду, и чем плотнее грунт, тем меньше доля внешней нагрузки, воспринимаемой поровой водой. В работах [4, 5] (работа [5] была доложена на первом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Москве, 27 января 1960 г.) исследованы изменения порового давления во-время. Установлено, что в глинистых грунтах, после приложения внешней уплотняющей нагрузки, поровое давление достигает своего максимального значения не сразу, а спустя некоторое время. Время, необходимое для достижения поровым давлением своего наибольшего значения, зависит от плотности грунта; чем плотнее грунт, тем больше это время.

Следует, однако, отметить, что на первом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике при обсуждении доклада [5] было выражено сомнение относительно того, что для достижения поровым давлением наибольшего значения необходимо время. Было высказано мнение, что полученный экспериментальный результат является следствием трения образцов о стенки грунтовых колец (были испытаны образцы диаметром 100 и высотой 80 мм).

В целях изучения качественной картины перераспределения напряжений между поровой водой и скелетом грунта, а также проверки результатов экспериментов, приведенных в работах [4, 5], мы воспользовались результатами выполненных нами экспериментов по исследованию влияния высоты образцов на деформативные свойства связных водонасыщенных грунтов [6, 7].

В указанных работах [6, 7] было показано, что процесс деформирования связных водонасыщенных грунтов обусловлен двумя факторами: явлением фильтрации поровой воды и ползучестью скелета грунта (показатель консолидации n) и, что чем плотнее грунт, тем меньше продолжительность влияния явления фильтрации. При этом показатели консолидации были определены для произвольно взятых значений деформаций с учетом длительности их деформирования при высоте образцов 20 и 60 мм.

Если при помощи показателя n можно довольно просто определить границы и продолжительность влияния указанных выше факторов (при $n=0$ грунт деформируется длительно от ползучести скелета; когда $n=2$ — от явления фильтрации; когда $0 < n < 2$ — от совместного действия обоих факторов [10]), то при ее помощи можно проследить и за ходом перераспределения напряжений между поровой водой и скелетом грунта. Если окажется, что в самом начале загрузки $n = n_{\max}$, то доля внешней нагрузки, передаваемая на поровую воду, наибольшая в момент ее приложения, в противном случае поровое давление достигает наибольшего значения через некоторый промежуток времени. Разумеется, таким способом мы сумеем изучить качественную сторону явления.

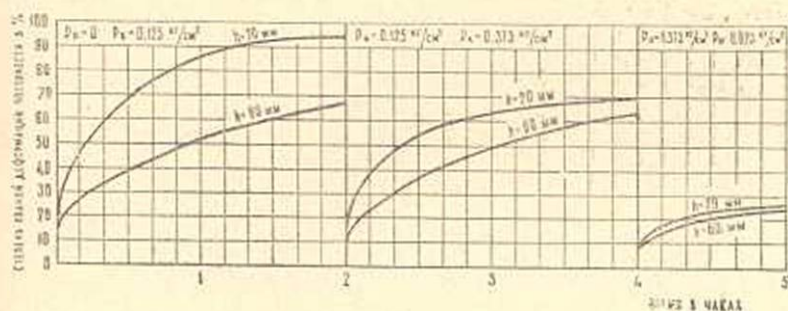
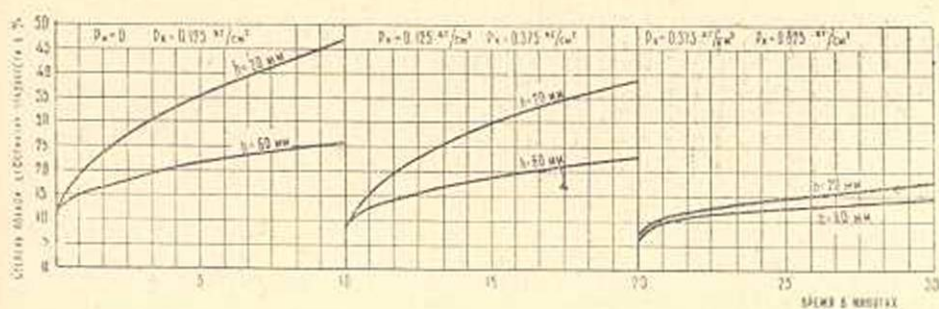
Изучение качественной картины перераспределения напряжений между скелетом и поровой водой указанной методикой целесообразно потому, что она очень проста и надежна, т. к. субъективные факторы, которые могут влиять на результаты экспериментов, доведены до минимума. Правда, в этом случае перераспределение напряжений мы не можем оценить количественно.

На примере исследования трех грунтов, проследим за изменением показателя консолидации n с самого начала загрузки образцов до достижения им наибольшего значения.

Данные об основных физических свойствах грунтов приведены в таблице 1, а на графиках фиг. 1, 2 и 3 приведены кривые ползучести грунтов для образцов толщиной 20 и 60 мм, диаметром 70 и 210 мм соответственно. Опыты проводились при одностороннем движении отжимаемой воды (снизу вверх).

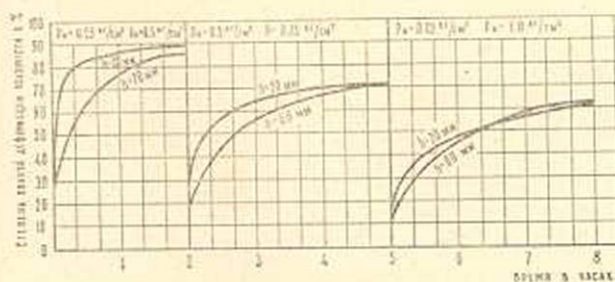
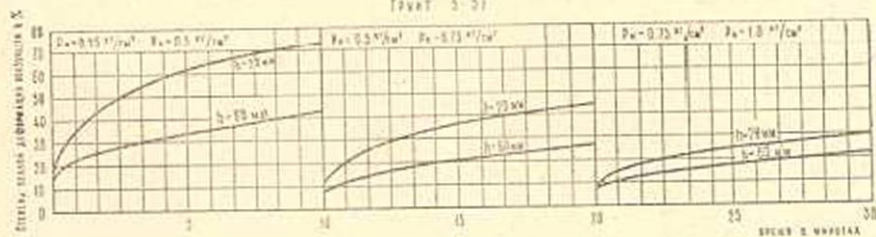
На приведенных графиках по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — степень ползучести $l(t)/l$ в $\%$, где $l(t)$ — деформация ползучести в момент времени t , l — полная конечная деформация.

График 7-57



Фиг. 1.

График 5-57



Фиг. 2.

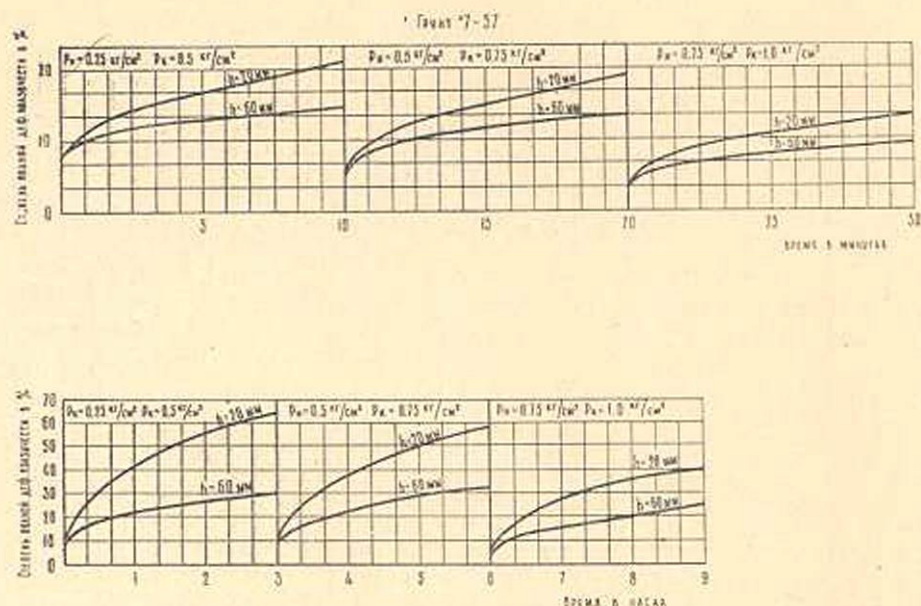


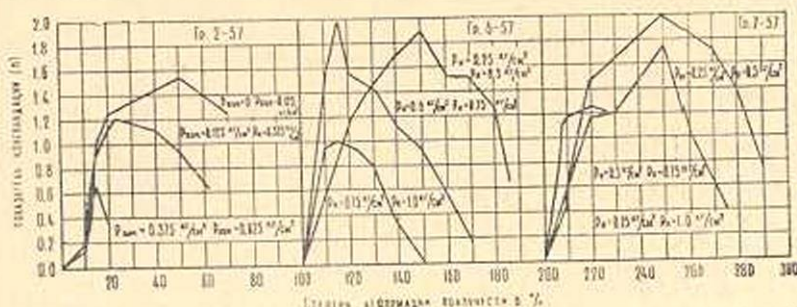
Таблица 1

Лаборат. №№ грунтов	Удельн. вес g/cm^3	Объемн. вес g/cm^3	Влажность $\omega, \%$	Пределы пластичности		
				Граница текучести	Граница пластичности	Число пла- стичности
2-57	2.66	1.81	34.4	31.3	18.6	12.7
5-57	2.59	1.59	56.9	58.1	32.2	25.9
7-57	2.63	1.56	61.45	64.4	30.5	33.9

Следует отметить, что под *ползучестью грунта* [8], в отличие от *ползучести скелета* [2], понимаем деформацию грунта за данной толщины во времени, которая протекает при совместном действии двух факторов: фактора фильтрации и фактора ползучести скелета. Ясно, что ползучесть грунта зависит от высоты образца, и при его небольшом значении (ввиду незначительности роли фактора фильтрации) ползучесть грунта равна ползучести скелета.

На основании приведенных на фиг. 1, 2 и 3 графиков кривых ползучести, вычислены значения показателя консолидации n для ряда значений $I(t)/I$ (таблицы 2, 3 и 4) указанных выше грунтов, а на фиг. 4 приведены кривые изменяемости показателя консолидации в зависимости от степени деформации $I(t)/I$.

Анализируя данные, приведенные в таблицах 2, 3 и 4, а также графики кривых изменяемости показателя консолидации, нетрудно заметить, что для достижения поровым давлением наибольшего значения необходимо определенное время. Чем плотнее грунт, тем меньше наибольшее значение показателя консолидации, следовательно,



Фиг. 4.

меньше величина порового давления и больше влияние ползучести скелета на процесс деформирования.

Необходимо обратить внимание и на то, что в ряде случаев в самом начале загрузки процесс уплотнения протекает в основном за счет ползучести скелета, т. е. без повышения давления в воде ($p_u = 0$).

Указанное выше поведение грунтов при уплотнении можно объяснить наличием структурных связей между частицами и агрегатами грунта: слабых—в начале уплотнения, более прочных—в конце уплотнения [9]. Время, необходимое на передачу внешней нагрузки на поровую воду, требуется для разрушения, или преодоления сопротивления процессу деформирования, указанных связей. В отношении продолжительности нарастания порового давления до максимума следует отметить, что она зависит от структурной прочности грунта и режима загрузки.

В зависимости от режима загрузки может случиться так, что один и тот же грунт в одном случае будет деформироваться без ощутимого повышения давления в воде, а в другом—с повышением. Причем, в зависимости от величины уплотняющей нагрузки и структурной прочности грунта, поровое давление может достичь своего максимума как сейчас же после приложения нагрузки, так и спустя некоторое время.

В первом случае величина нагрузки должна быть такой, при которой разрушение связей практически произойдет „мгновенно“, а во втором случае для разрушения или же преодоления сопротивления, оказываемого этими связями процессу деформирования, нужно время.

Если бы в наших экспериментах величины ступеней нагрузок были больше, чем те нагрузки, под которыми испытывались образцы, то, в отдельных случаях, повышение порового давления до максимума протекало бы настолько быстро, что этот процесс можно было бы считать „мгновенным“.

Резюмируя вышеизложенное, можно отметить, что в зависимости от соотношения структурной прочности грунта и величины уплотняющей нагрузки, уплотнение глинистых водонасыщенных грунтов может протекать как без заметного повышения давления в поровой воде, так и с повышением давления в ней. Причем продолжительность

Таблица 2

$I(t)/I$ $n \%$	Время деформирования		n
	Высота образца $h=20$ мм	Высота образца $h=6$ мм	
Грунт № 2			
P начальн. = 0 P конечн. = 0,125 кг/см ²			
12	5°	7°	0,301
14	13°	30°	0,76
15	18°	55°	1,01
20	1°	4°	1,26
25	2°	8,5°	1,30
50	10,5°	58°	1,55
66	28°	118°	1,30
P начальн. = 0,125 кг/см ² P конечн. = 0,375 кг/см ²			
10	5°	5,6°	0,16
12,5	22°	44°	0,63
15	47°	110°	0,88
20	105°	360°	1,12
23,5	160°	600°	1,20
40	11°	37°	1,11
50	22°	61°	0,92
64	60°	120°	0,63
P начальн. = 0,375 кг/см ² P конечн. = 0,625 кг/см ²			
8	10°	10°	0
9	20°	20°	0
10	30°	37°	0,188
12,5	2°	3,5°	0,51
15	5°	10°	0,63
20	15°	22°	0,34

Таблица 3

$I(t)/I_0$ $n \%$	Время деформирования		n
	Высота образца $h=20$ мм	Высота образца $h=60$ мм	
Грунт № 5			
P начальн. = 0,25 кг/см ²			
P конечн. = 0,5 кг/см ²			
20	7"	25"	1,16
25	17"	75"	1,34
30	30"	150"	1,46
40	90"	600"	1,72
50	2'	16'	1,9
60	5'	26'	1,5
70	8'	42'	1,5
80	18'	72'	1,26
86	60'	120'	0,63
P начальн. = 0,5 кг/см ²			
P конечн. = 0,75 кг/см ²			
11	5"	30"	1,63
15	10"	90"	2,0
20	45"	250"	1,55
30	2,4'	12'	1,42
40	7'	24'	1,12
50	16'	44'	0,92
60	40'	76'	0,58
70	118'	146'	0,188
P начальн. = 0,75 кг/см ²			
P конечн. = 1,0 кг/см ²			
9	5"	5"	0
10	7"	20"	0,95
15	50"	165"	1,08
23	265"	600"	0,93
30	9'	19'	0,79
40	29'	40'	0,29
45	48'	55'	0,12
50	72'	76'	0,045
54	1 ^h 36'	1 ^h 36'	0

Таблица 4

$t(t)/t$ в %	Время деформирования		n
	Высота образца $h=20$ мм	Высота образца $h=60$ мм	
P начальн. = 0,25 кг/см ² P конечн. = 0,5 кг/см ²			
8	5°	5°	0
10	25°	45°	0,535
15	190°	600°	1,04
30	26°	158°	1,64
50	1,8 ^h	17,4 ^h	2,0
70	5,6 ^h	37,2 ^h	1,72
80	12 ^h	55,2 ^h	1,38
90	42 ^h	96 ^h	0,75
P начальн. = 0,5 кг/см ² P конечн. = 0,75 кг/см ²			
6,5	5°	5°	0
9	40°	65°	0,44
10	65°	125°	0,395
20	11°	40°	1,17
30	33°	126°	1,21
50	1,2 ^h	8,4 ^h	1,77
60	4,2 ^h	14,4 ^h	1,08
75	18 ^h	28,8 ^h	0,42
P начальн. = 0,75 кг/см ² P конечн. = 1,0 кг/см ²			
4	5°	5°	0
6	30°	70°	0,765
8	93°	315°	1,11
10	3,3°	12°	1,17
15	13°	48°	1,19
20	26°	104°	1,26
25	46°	180°	1,24

времени, необходимого для достижения поровым давлением наибольшего значения, обусловлена структурной прочностью и ползучестью скелета.

Ս. Ռ. ՄԼՅԱՆԵ

ԿԱՎԱՅԻՆ ԳՐՈՒՆՏԻ ԿՄԱԽՔԻ ԵՎ ԾԱԿՈՏԿԵՆԱՅԻՆ ՋՐԻ ՄԻՋԵՎ
ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ՀԱՐՅԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Օգտագործելով տարբեր չափեր ունեցող կավային գրունտների նմուշների սողքի ուսումնասիրության արդյունքները սեղմման դեպքում, ինչպես և օգտվելով կոնսոլիդացիայի ցուցանիշից, պարզված է գրունտի կմախքի և ծակոտկենային ջրի միջև լարումների վերաբաշխման որակական կողմը:

Յուլց է արված, որ հակառակ գրունտների ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի տեսության, ծակոտկենային ջրում հափելիալ ճնշումը արտաքին բևռի ազդեցությունից իր ամենամեծ արժեքն է ստանում ոչ թե միանգամից, այլ ժամանակի ընթացքում: Պարզված է, որ հիշյալ ժամանակի տեղափոխված է ինչպես արտաքին բևռի մեծությունից, այնպես էլ գրունտի կմախքի կառուցվածքային ամրությունից:

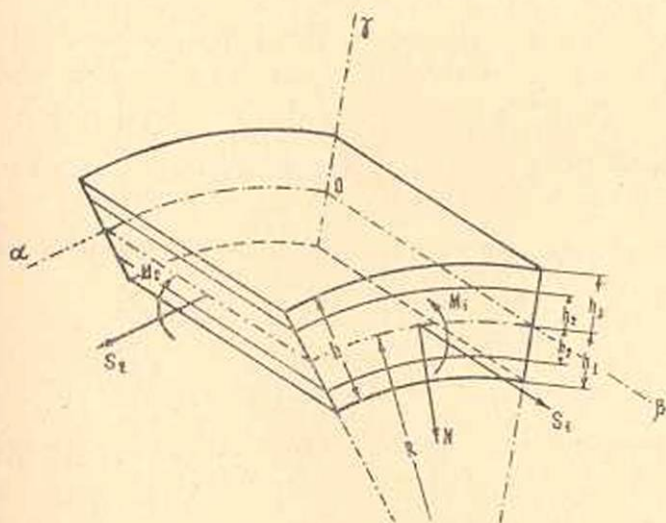
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, М., 1948.
2. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей земляной среды. Известия АН СССР, ОТН*, № 6, 1953.
3. Роза С. А. и Котов А. И. О явлениях ползучести скелета в процессе консолидации. Гид. стр.-во*, № 5, 1956.
4. Павлюнский В. М. Экспериментальные исследования порового давления в глинистых грунтах. Инф. мат. № 4, НИИ ВОДГЕО*, М., 1959.
5. Счадин В. П. О проявлении свойств ползучести при компрессионных испытаниях грунтов. ДАН АрмССР*, 31, № 5, 1960.
6. Месчян С. Р. О методике экспериментального исследования ползучести скелета связных грунтов. ДАН АрмССР*, 26, № 4, 1958.
7. Месчян С. Р. Исследование влияния высоты образца на деформативные свойства связных водонасыщенных грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ. мат. наук*, 12, № 3, 1959.
8. Месчян С. Р. К вопросу о ползучести связных грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и тех. наук*, 7, № 6, 1954.
9. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минрезфлота, М., 1951.
10. Маслов Н. Н. Условия устойчивости склонов и откосов в гидроэнергетическом строительстве. Госэнергоиздат, М.—Л., 1955.

С. А. Амбарцумян

Об осесимметричной задаче трехслойной цилиндрической оболочки, составленной из нелинейно-упругих материалов

Рассматривается трехслойная круговая цилиндрическая оболочка, составленная из нелинейно-упругих слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности радиуса R (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимается, что срединная поверхность отнесена к ортогональной системе координат α, β , совпадающей с линиями кривизны поверхности, т. е. с прямолинейными образующими ($\beta = \text{const}$) и с направляющими дугами ($\alpha = \text{const}$). Принимается также, что прямолинейная координата γ направлена по внутренней нормали срединной поверхности. Граничные условия осесимметричны, и оболочка несет лишь нормально приложенную осесимметричную нагрузку z .

В основу кладутся следующие гипотезы и предположения:

а) Гипотеза недеформируемых нормалей, данная для всего пакета оболочки в целом;

б) Несжимаемость материала каждого слоя оболочки;

$$S_2 = Bz_2 - 2b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_2-s)+1} \chi_1^{2s} \frac{h_2^{2s+1}}{2s+1} -$$

$$- 2b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_1-s)+1} \chi_1^{2s} \frac{h_1^{2s+1} - h_2^{2s+1}}{2s+1}, \quad (7)$$

$$M_1 = -D\chi_1 + \frac{8}{3} b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_2-s)+1} \frac{h_2^{2s+3}}{2s+3} +$$

$$+ \frac{8}{3} b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_1-s)+1} \chi_1^{2s+1} \frac{h_1^{2s+3} - h_2^{2s+3}}{2s+3}, \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} M_1, \quad (9)$$

где

$$B = 2[a_2 h_2 + a_1(h_1 - h_2)], \quad (10)$$

$$D = \frac{8}{9} [a_2 h_2^3 + a_1(h_1^3 - h_2^3)], \quad (11)$$

$$C_{k_i}^s = \frac{k_i!}{s!(k_i - s)!}. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид [1, 2, 3]

$$\frac{dN}{dx} + \frac{1}{R} S_2 + Z = 0, \quad N = \frac{dM_1}{dx},$$

или, после исключения N ,

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{1}{R} S_2 + Z = 0. \quad (13)$$

Подставляя значения S_2 и M_1 соответственно из (7) и (8) в (13), при этом учитывая (4), получим нелинейное разрешающее уравнение относительно искомой функции w

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{B}{D} \frac{w}{R^2} - \frac{8}{3} \frac{1}{D} \frac{d^2}{dx^2} \left[b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \times \right.$$

$$\times \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_2-s)} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s+1} \frac{h_2^{2s+3}}{2s+3} + b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \times$$

$$\times \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_1-s)} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s+1} \frac{h_1^{2s+3} - h_2^{2s+3}}{2s+3} \Big] +$$

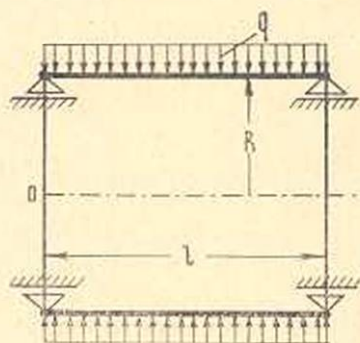
$$+ \frac{2}{R} \cdot \frac{1}{D} \left[b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_2-s)+1} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s} \frac{h_2^{2s+1}}{2s+1} + b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3} \right)^s \times \\ \times \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_1-s)+1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s} \frac{h_1^{2s+1} - h_2^{2s+1}}{2s+1} \Big| = \frac{Z}{D}. \quad (14)$$

Граничные условия ничем не отличаются от обычных [1, 2, 3].

Таким образом, задача осесимметричной деформации трехслойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, при отсутствии осевой силы S_z , сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения (14), при заданных граничных условиях.

Для иллюстрации рассмотрим свободно опертую по торцам трехслойную цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью q (фиг. 2).



Фиг. 2.

Пусть для рассматриваемой оболочки имеем

$$h_1 = h_3 = h/2, \quad a_1 = a_3 = 10^6 \text{ кг/см}^2, \\ b_1 = b_3 = 0, \quad h_2 = h/4, \quad a_2 = 10^6 \text{ кг/см}^2, \\ b_2 = 10^{11} \text{ кг/см}^2, \quad m_2 = 3,$$

$l = R = 100 h$ (l — длина оболочки), т. е. рассматривается оболочка, которая собрана из линейно-упругих несущих слоев и нелинейно-упругого заполнителя.

В этом случае разрешающее уравнение (14) существенно упрощается и принимает следующий вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{B}{D} \frac{w}{R^2} - \frac{8}{9} \frac{h_2^3}{R^3} \frac{b}{D} \frac{d^2}{dx^2} \left[w^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{s} h_2^2 R^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^3 \right] - 2 \frac{h_2}{R^4} \frac{b}{D} \left[w^2 + \right. \\ \left. + \frac{4}{9} h_2^2 R^2 w \cdot \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \right] = \frac{q}{D}. \quad (15)$$

Уравнение (15) решаем методом Бубнова-Галеркина [4]. Решение, которое удовлетворяет условиям свободного опирания по торцам, в первом приближении, представляется в виде

$$w = C \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (16)$$

Произведя известные [4] преобразования, для определения C получим следующее кубическое уравнение

$$C \left(\frac{\pi^4}{2l^3} + \frac{Bl}{2DR^2} \right) - C^3 \frac{b_2}{D} \left(\frac{2\pi^4 h_2^3}{3R^2 l^3} + \frac{4\pi^8 h_2^5}{15l^5} + \frac{3lh_2}{4R^4} \right) = \frac{2ql}{D\pi}. \quad (17)$$

или подставляя значения упругих постоянных, при этом учитывая (10) и (11), получим

$$450,5 \left(\frac{C}{h} \right) - 1688,4 \left(\frac{C}{h} \right)^3 = 5,73 q. \quad (18)$$

В нижеследующей таблице приведены результаты некоторых численных подсчетов. Для наглядности, в третьей строке таблицы даны результаты решения рассмотренной задачи, когда все слои линейно-упруги.

C/h	0.0	0.1	0.2	0.3
q	0.0	7.57	13.37	15.63
q линейная	0.0	7.86	15.72	23.58

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 XI 1960

Ս. Ս. Համբարձումյան

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՒՁԳԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԵՌԱՇԵՐՏ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս նոթում քննարկված է եզրերով ազատ հենված, եռաշերտ զլանալին թաղանթի խնդրի լուծումը, երբ թաղանթը կազմված է ոչ զծալին առաձգական նյութերից: Դիտարկվում է ալն դեպքը, երբ թաղանթը բեռնավորված է մակերևութին ուղղահայաց հավասարաչափ բաշխված ուժերով:

Ստացված ոչ զծալին չորրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը լուծված է Բուրնոլի-Գալլորիկի մեթոդով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
2. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. «ДАН АрмССР», 11, № 2, 1949.
3. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.

Ռ. Ս. Ղազարյան

ՏԱՌԵՐԻ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՅԵՐԵՆ ՏԵՔՍՏՈՒՄ

Հայերեն տեքստի էնտրոպիայի գնահատման հետ կապված աշխատանքների համար անհրաժեշտ եղավ հաշվել հալոց տառերի հաճախությունը իմաստավորված տեքստում: Նպատակահարմար ենք գտնում հրապարակել այդ աշխատանքը, քանի որ նրանք կարող են հետաքրքրություններ կալացնել ինքնուրույն:

Հաշվիչ մեքենաների օգտագործման հնարավորությունը բացառություններ պայմանավորեց վիճակագրական աշխատանքները կրճատելու բնական տեղեկները: Այդ նպատակով կիրառվել է հետևյալ մեթոդիկան՝ տեքստի համեմատարար փոքր ծավալի քաղվածքից (3—4 հազար նիշ) հաշվել է տառերի հաճախությունը: Այնուհետև, տառերի հաճախությունների այդ կոպիտ արժեքները օգտագործվել են (իրեն հավանականություններ) այն անհրաժեշտ քաղվածքի ծավալը որոշելու համար, որի դեպքում ապահովվում է հաճախության տրված ճշտությամբ մոտեցումը իր հավանականությունները: Վերջինն ստացվել է Մուավրի-Լապլասի բանաձևից, այն ենթադրությամբ (ինչպես այդ ընդունված է զործնական վիճակագրությունում), որ 0.9973 հավանականություն ունեցող դեպքը կտրելի է համարել ստույգ: Այն ժամանակ Մուավրի-Լապլասի բանաձևն ընդունում է հետևյալ պարզ տեսքը՝

$$|f_N - P| < 3 \sqrt{\frac{P(1-P)}{N}},$$

այսինքն գործնականորեն ստույգ է, որ N ծավալի քաղվածքից հաշված f_N հաճախության շեղումը իր P հավանականությունից չի գերազանցի

$$3 \sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}$$

արժեքը:

Քաղվածքի ծավալի (N) վերջնական կոնկրետ կատարվել է տառերը հաշվելու պրոցեսի ընթացքում:

Բերված աղյուսակը կաղծելիս, ընդունվել է, որ հավանականություն որոշման մաքրիմալ հարաբերական սխալները հավասար է 10^{-3} -ի:

Հետադրուկվել է ժամանակակից խառը գեղարվեստական արձակ տեքստը՝ Ինտերվալը հաշվված է ինչպես տաս:

* Օգտագործվել են «Սովետական զրահանություն» ամսագրի 1959 թ. 1—7 համարները:

Ավելորդ չէ նշել, որ անհրաժեշտ քաղվածքի ծավալը զգալիորեն տարբերվում է առանձին տառերի համար (մի քանի հազար նիշից, ամենահաճախակի տառերի համար, մինչև մի քանի հարյուր հազար և միլիոն նիշ հազվագյուտ տառերի համար):

Առաջին տողի տվյալները հնարավորություն են տալիս հաշվել ժամանակակից հայերեն բառի l_s միջին երկարությունը (տառերով) գեղարվեստական տեքստում՝

$$l_s = \frac{1}{0,177} - 1 \approx 4,7 \text{ տառ:}$$

Համեմատության համար ասենք, որ անգլերեն բառի միջին երկարությունը 4.5 տառ է, սուսերենինը՝ 5,1 տառ: Պետք է նշել, որ այդ մեծությունը զգալի տատանումների է ենթարկվում տարբեր ախպի տեքստերում և տարբեր ժամանակաշրջանների համար:

Մի առանձնահատկություն ևս, կթև դիտենք այբուբենը էֆեկտիվ կոդերի տեսանկյունից (ամենահաճախակի տառին՝ ամենակարճ և հասարակ նիշը), ապա պիտի ընդունենք, որ «ա» տառի նշանը հաջող չէ: Իրոք, կթև միայն «ա» տառի նշանակումը լինել կրկնակի ավելի կարճ (ասենք, «ո»-ի կամ «օ»-ի նման), ապա տեքստի միջին երկարությունը կնվազեր մոտավորապես $5-6\%$ -ով:

№	Տառը	Հաճախությունը	№	Տառը	Հաճախությունը	№	Տառը	Հաճախությունը	№	Տառը (նիշը)	Հաճախությունը
1	Ինտերվալ	0,177	13	ժ	0,017	25	բ	0,0088	37	փ	0,0021
2	ա	0,114	14	ց	0,016	26	պ	0,0082	38	ճ	0,0016
3	ն	0,083	15	լ	0,016	27	չ	0,0076	39	օ	0,00072
4	բ	0,075	16	դ	0,015	28	ծ	0,0073	40	Ֆ	0,00025
5	ե	0,054	17	հ	0,014	29	չ	0,0070	41	(.)	0,014
6	ի	0,048	18	ք	0,014	30	դ	0,0051	42	(:)	0,010
7	ո	0,033	19	զ	0,013	31	խ	0,0044	43	(')	0,0014
8	ու	0,030	20	թ	0,012	32	ե	0,0043	44	(.)	0,0012
9	մ	0,025	21	ը	0,012	33	ջ	0,0042	45	(...)	0,0011
10	կ	0,024	22	է	0,011	34	դ	0,0041	46	(")	0,0011
11	տ	0,024	23	դ	0,0094	35	ձ	0,0035	47	(')	0,00046
12	ս	0,020	24	ս	0,0090	36	յ	0,0033	48	(')	0,00040

Վիճակագրական աշխատանքը պրոֆ. Գ. Սեակի սիրալիի համաձայնությամբ կատարել են համալսարանի հայկական բանասիրական ֆակուլտետի IV կուրսի ուսանողները, որոնց և հեղինակը հալտնում է իր խորին շնորհակալությունը:

Р. А. Казарян

Частота букв в армянском тексте

Резюме

Подсчитаны частоты букв в современном армянском смешанном художественном тексте. В целях сокращения статистической работы, из выборки малого объема (3—4 тыс. знаков) подсчитаны грубые частоты, которые затем использованы как вероятности в формуле Муавра-Лапласа (по правилу трех сигма) для нахождения выборки, обеспечивающей заданное приближение частоты к вероятности.

Окончательная коррекция объемов выборок проводилась в процессе подсчетов. При составлении таблицы принято, что максимально возможное отклонение частоты от вероятности равно 10%.

М. М. Манукян

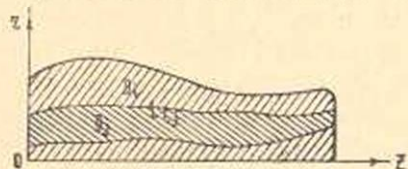
Кручение составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести

В работе К. С. Чобаняна [1] рассматривается задача о кручении круглых стержней переменного сечения, составленных из различных упругих материалов, спаянных по боковым поверхностям.

В настоящей заметке дается решение задачи об установившейся ползучести скручиваемых круглых составных стержней переменного сечения.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим тело вращения, которое состоит из различных материалов, расположенных симметрично относительно оси вращения. Область осевого сечения этого тела, которое в дальнейшем будем называть составным стержнем переменного сечения, состоит из ряда областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, соответствующих различным материалам, из которых составлено данное тело. Отнесем составной стержень переменного сечения к цилиндрической системе координат r, θ, z , направим ось z вдоль оси стержня (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть составной круглый стержень переменного сечения в условиях установившейся ползучести находится только под действием скручивающих внешних усилий, симметрично распределенных относительно оси вращения.

Предположим, что материал i -го слоя скручиваемого стержня следует законам теории установившейся ползучести в наиболее общей форме, а именно—интенсивность скорости деформации Γ является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений T

$$\Gamma = f_i(T) T, \quad T = f_i^*(\Gamma) \Gamma, \quad (1.1)$$

где $f_i(T)$ или $f_i^*(\Gamma)$ —некоторая функция, характеризующая материал i -го слоя стержня.

Уравнение равновесия будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, касательные напряжения $\tau_{r\theta}^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ представить через одну функцию $\Phi(r, z)$, называемую функцией напряжений, в виде

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}. \quad (1.2)$$

Здесь через $\Phi_i(r, z)$ обозначена функция $\Phi(r, z)$ в области D_i .

Дифференциальное уравнение для функции напряжений $\Phi(r, z)$ будет [2]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^3} f_i(T_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r^3} f_i(T_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right] = 0. \quad (1.3)$$

Если обозначить интенсивность усилия, действующего на поверхности составного стержня, через $p(s)$, где s —длина дуги контура осевого сечения, отсчитываемая от произвольно выбранной на контуре точки, то контурное условие будет [1]

$$\Phi_i(r, s) = - \int_0^s r^2 p(s) ds + C_0, \quad (1.4)$$

где C_0 —постоянная интегрирования.

Условия непрерывности на линиях раздела L_{ij} можно представить в следующем виде [1]

$$\Phi_i - \Phi_j = C_{ij} \quad \text{на } L_{ij}, \quad (1.5)$$

$$f_i(T_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = f_j(T_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.6)$$

Если линия раздела L_{ij} пересекается с контуром L_0 , то постоянная C_{ij} будет нулем, а если линия раздела целиком лежит внутри контура L_0 , то функция Φ в области, ограниченной L_{ij} , будет определяться с точностью до постоянной C_{ij} , которая не влияет на величины напряжений. Поэтому все постоянные C_{ij} можно принять равными нулю.

На оси сплошного вала напряжения равны нулю, поэтому функция Φ на оси z должна быть постоянной

$$\Phi = \text{const} \quad \text{при } r=0. \quad (1.7)$$

Таким образом, при установившейся ползучести скручиваемых симметричных составных стержней переменного сечения, функция напряжений $\Phi(r, z)$ в каждой из областей D_i осевого сечения вала должна удовлетворять уравнению (1.3), контурному условию (1.4), условию (1.7) на оси z и условиям (1.5), (1.6) на линиях раздела L_{ij} .

В случае полого вала, на внутренней поверхности должно выполняться условие (1.4), где $p(s)$ —скручивающее внешнее усилие, действующее на этой поверхности.

Пусть между интенсивностями касательных напряжений и скоростью сдвига имеет место степенной закон зависимости вида

$$T_i = K_i \Gamma_i^{\mu_i}, \quad (1.8)$$

где K_i, μ_i — некоторые физические константы, определяемые из опыта, причем $0 < \mu_i < 1$.

Тогда уравнение (1.3) и условие (1.6) примут следующий вид [2]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_i}{2\mu_i}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_i}{2\mu_i}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right\} = 0, \quad (1.9)$$

$$K_i - \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \frac{1}{2(1-\mu_i)} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_i}{2\mu_i}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} =$$

$$= K_j - \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_j}{\mu_j}}} \frac{1}{2(1-\mu_j)} \left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_j}{2\mu_j}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.10)$$

Как пример решения этой задачи, рассмотрим кручение цилиндрического и круглого конического стержней.

§ 2. Кручение конического стержня

Рассмотрим задачу о кручении составного круглого конического стержня с углом раствора 2γ . Направим ось z цилиндрических координат $r\theta z$ по оси конического стержня, а центр координат поместим в вершине конуса (фиг. 2).

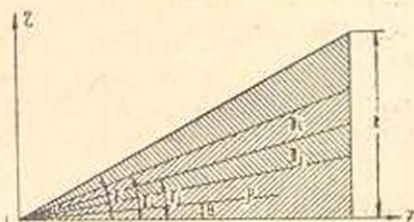
В этом случае, для решения задачи удобно перейти к сферическим полярным координатам. Возьмем сферическую систему координат $\rho\theta\varphi$, центр которой находится в вершине конуса. Полагая

$$r = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (2.1)$$

для компонентов касательных напряжений в сферических координатах будем иметь формулы

$$\tau_{\theta\varphi}^{(i)} = - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho},$$

$$\tau_{\varphi r}^{(i)} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}. \quad (2.2)$$



Фиг. 2.

Допустим, что боковая поверхность стержня свободна от внешних сил. Тогда контурное условие (1.4) примет вид [1]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \quad (2.3)$$

При решении этой задачи примем, что связь между интенсивностью касательных напряжений и скоростью сдвига выражается степенной зависимостью

$$T_i = K_i \Gamma_i^p. \quad (2.4)$$

Решение задачи о кручении конического стержня ищем, принимая компоненты напряжения $\tau_{\rho\varphi}^{(i)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(i)}$ в виде [3]

$$\tau_{\rho\varphi}^{(i)} = \tau_{\rho\varphi}^{(i)}(\rho, \theta), \quad \tau_{\theta\varphi}^{(i)} = 0, \quad (2.5)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} = 0, \quad \Phi_i = \Phi_i(\theta). \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (1.9) в сферических координатах примет вид

$$\frac{d^2 \Phi_i}{d\theta^2} - (2 + \mu) \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{d\Phi_i}{d\theta} = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда найдем

$$\frac{d\Phi_i}{d\theta} = C_i (\sin \theta)^{2+\mu}, \quad (2.8)$$

где C_i — постоянные интегрирования. Пользуясь условием (1.7), можно окончательно написать

$$\Phi_i = C_i \int_{\gamma_{i-1}}^{\theta} (\sin \beta)^{2+\mu} d\beta \quad (\gamma_0 = 0). \quad (2.9)$$

Здесь, на оси вала, вместо постоянной взят нуль, что не влияет на общность решения.

Остается определить постоянные интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_n$. Для этого воспользуемся условием (1.10) и выражением крутящего момента.

Условие (1.10) в сферических координатах при условии (2.6) примет следующий вид

$$K_i^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{d\Phi_i}{d\theta} \right)^{\frac{1}{p}} = K_j^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{d\Phi_j}{d\theta} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (2.10)$$

Подставляя значение Φ из (2.9) в (2.10), получим

$$\left(\frac{C_i}{K_i} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{C_j}{K_j} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.11)$$

Приравняв главный момент усилий, действующих в любом сечении конуса сферической поверхности $\rho = \text{const}$, заданному значению крутящего момента M в вершине, будем иметь

$$M = 2\pi \sum_{i=1}^n C_i \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (\sin \theta)^{2+\mu_i} d\theta \quad (\gamma_0 = 0). \quad (2.12)$$

(2.11) и (2.12) составляют систему n уравнений, из которых можно определить $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Нетрудно видеть, что решение (2.9) удовлетворяет всем условиям, т. е. контурному условию (2.3), условию (1.7) на оси и условиям (1.5) и (1.10) на линиях раздела L_{ij} .

Подставляя значение Φ из (2.9) в (2.2) получим выражения компонентов касательных напряжений в сферических координатах

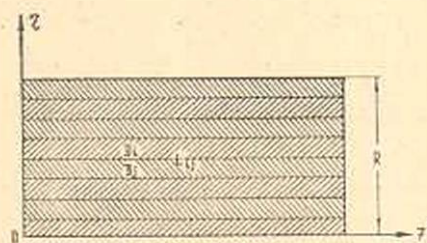
$$\begin{aligned} \tau_{\theta\varphi}^{(i)} &= 0, \\ \tau_{r\varphi}^{(i)} &= C_i \frac{(\sin \theta)^{\mu_i}}{\rho^3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

§ 3. Кручение круглого стержня

Рассмотрим задачу о кручении составного круглого стержня, когда торцы стержня нагружены. Направим ось z цилиндрических координат r, θ, z по оси стержня, а центр координат поместим в центре одного основания цилиндра (фиг. 3).

Связь между интенсивностью касательных напряжений и скоростью сдвига примем в виде (1.8).

Пусть боковая поверхность стержня не нагружена, а на торцах действуют касательные напряжения, распределенные по степенному закону вида



Фиг. 3.

$$p_i = -\tau_{\theta z}^{(i)} = -A_i r^{\mu_i}, \quad (3.1)$$

где A_i — неизвестны.

В этом случае ищем решение уравнения (1.9) в виде

$$\Phi_i = \Phi_i(r). \quad (3.2)$$

Тогда уравнение (1.9) примет следующий вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \left(\frac{d\Phi_i}{dr} \right)^{\mu_i} \right] = 0. \quad (3.3)$$

Интегрируя это уравнение и пользуясь условием (1.7), получим

$$\Phi_i(r) = \frac{B_i}{3+\mu_i} r^{3+\mu_i}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i=1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

где B_i — постоянные интегрирования. Здесь, на оси вала, вместо постоянной взят нуль, что не влияет на общность решения.

Остается определить постоянные интегрирования $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Для этого воспользуемся условием (1.10), которое в данном случае примет вид

$$K_i^{-\frac{1}{\mu_i}} \frac{1}{r^{\frac{1}{2(1-\mu_i)}}} \left(\frac{d\Phi_i}{dr} \right)^{\frac{1}{\mu_i}} =$$

$$= K_j^{-\frac{1}{\mu_j}} \frac{1}{r^{\frac{1}{2(1-\mu_j)}}} \left(\frac{d\Phi_j}{dr} \right)^{\frac{1}{\mu_j}} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (3.5)$$

Подставляя значения $\frac{d\Phi_i}{dr}$ из (3.4) в (3.5) получим

$$\left(\frac{B_i}{K_i} \right)^{\frac{1}{\mu_i}} = \left(\frac{B_j}{K_j} \right)^{\frac{1}{\mu_j}}. \quad (3.6)$$

Из (1.2), (3.1) и (3.4) следует, что

$$A_i = B_i. \quad (3.7)$$

С другой стороны, из выражения крутящего момента имеем

$$M = 2\pi \sum_{i=1}^n B_i \frac{1}{3 + \mu_i} r_i^{3+\mu_i} \frac{r_i}{r_{i-1}}, \quad (3.8)$$

где $r_0 = 0$, $r_n = R$, R — радиус круга.

(3.6) и (3.8) составляют n уравнений, из которых можно определить неизвестные $B_1, B_2, \dots, B_n$. Тогда $A_1, A_2, \dots, A_n$ определим из (3.7).

Нетрудно видеть, что решение (3.4) удовлетворяет всем условиям, т. е. контурному условию (3.1), условию (1.7) на оси z и условиям (1.5) и (1.10) на линиях раздела L_{ij} .

Подставляя значение Φ_i из (3.3) в (1.2), получим выражения компонентов касательных напряжений в цилиндрических координатах

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = 0,$$

$$\tau_{rz}^{(i)} = B_i r^{\mu_i}. \quad (3.9)$$

Մ. Մ. Մանուկյան

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԼԻՍԵՌՆԵՐԻ
ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է կողմնային մակերևույթներով իրար հետ զոդված և առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված տարրեր նյութերից կազմված փոփոխական տրամագծով կլոր լիսեռի ոլորման խնդիրը, երբ ակց նյութերը գտնվում են հաստատված սողքի պայմաններում և արտաքին ուժերը առանցքի նկատմամբ ունեն սիմետրիկ դասավորություն:

Այս խնդրի լուծման ժամանակ ընդունվում է, որ սողքի գեֆորմացիայի արագության և լարվածության ինտենսիվությունների միջև գոյություն ունի աստիճանային կապ:

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է լարումների ֆունկցիայի որոնմանը, որը լիսեռի առանցքային հատույթի լուրաքանչյուր D_i տիրույթում բավարարում է (1.9) հավասարմանը, (1.4) եզրային պայմանին, (1.7) առանցքային պայմանին, իսկ տիրույթների բաժանման L_{ij} դժերի վրա՝ (1.5) և (1.10) պայմաններին:

Աշխատության վերջում, որպես կիրառություն տրվում է հետևյալ երկու խնդիրների ճշգրիտ լուծումը՝ 1. Կոնական բաղադրյալ ձողի ոլորումը 2. Կլոր բաղադրյալ ձողի ոլորումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Кручение составного вала переменного диаметра. Доклады АН Армянской ССР, 27 № 3, 1958, 139—144.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Э. Б. Аджимамудов

О книге П. Ф. Шокина

„Гравиметрия (приборы и методы измерения силы тяжести)*“

Книга П. Ф. Шокина „Гравиметрия“ является учебником для студентов астрономо-геодезической специальности геодезических вузов. В книге излагаются, в основном, вопросы теории и практики различных методов измерения силы тяжести. Глава I состоит из введения и краткого исторического очерка развития гравиметрии. Главы II и III посвящены маятниковым методам определения силы тяжести и определениям силы тяжести с помощью гравиметров. Последняя, IV глава, посвящена измерению вторых производных потенциала силы тяжести.

Автором очень обстоятельно и детально описываются аппаратура для измерения силы тяжести, способы ее исследования, методика полевых работ и обработки наблюдений. При этом широко использована имеющаяся по этим вопросам литература, а в ряде случаев учтены также новые, еще не опубликованные, данные и результаты. Все это делает книгу очень ценным пособием при изучении гравиметрии. Книга может служить не только учебником для студентов, но и ценным справочным пособием для всех лиц, занимающихся вопросами практической гравиметрии.

Таким образом, книга безусловно достигла своей цели,—восполнила пробел, который образовался в гравиметрической литературе в течение последних 20 лет, со времени выхода в свет курса проф. А. А. Михайлова в 1939 году.

Однако, следует отметить, что рассматриваемая книга уступает книге А. А. Михайлова в отношении четкости и строгости изложения. Это относится в первую очередь к „общим местам“ — к первой (вводной) главе и к вводным частям отдельных глав и параграфов. Ниже приводятся несколько примеров различного рода неточностей и нечетких формулировок.

Из определения уровенной поверхности, даваемого уравнением $w = \text{const}$, вытекает как следствие перпендикулярность силы тяжести

* П. Ф. Шокин — Гравиметрия (приборы и методы измерения силы тяжести). Издание геодезической литературы, М., 1960, 316 стр., цена 93 к.

к этой поверхности, но не ее постоянство на всей поверхности. Однако это вовсе не означает, что „напряжение силы тяжести G различно в каждой данной точке уровенной поверхности $w = \text{const}$ “, как это сказано на стр. 6. Например, на уровенной поверхности поля однородной сферы, или поля однородных concentрических сферических слоев, сила тяжести постоянна. Для нормального земного эллипсоида сила тяжести равна во всех точках, удовлетворяющих условию $|\varphi| = \text{const}$.

На стр. 187 говорится об отсчетах S_i и S_0 , выраженных в делениях шкалы и предварительно исправленных поправками (в частности поправкой за приливные влияния Луны и Солнца). Однако, эта поправка должна вводиться уже после перевода отсчетов в миллигалы (по таблицам и номограммам, составленным автором книги).

На стр. 268 сказано, что „продолжительность рейса, количество пунктов и очередность наблюдений их в этом рейсе зависят от многих конкретных условий работы“, среди которых упоминается точность измерений. Принципиально более правильным было бы сказать, что точность измерений зависит от всех перечисленных условий.

Неточным является утверждение (стр. 280), что уравнением $\text{tg } 2\varphi_0 = -\frac{2w_{xy}}{w_{xx}}$ определяется нормальное сечение с максимальной кривизной. Этим уравнением определяются два взаимно перпендикулярных направления, соответствующие главным нормальным сечениям. Вопрос о том, какое из них соответствует максимальной кривизне, а какое — минимальной, решается дополнительно.

При определении единицы измерения вторых производных потенциала силы тяжести (стр. 282) сказано, что этвешем называют „одну 10^{-9} долю“ единицы CGS $\left(\frac{1}{\text{сек}^2}\right)$. При такой форме выражения следует писать не „одна 10^{-9} доля“, а „одна 10^9 доля“, т. е. $\frac{1}{10^9}$.

Целесообразно выделить в отдельную главу или параграф все вопросы, касающиеся поправок и ошибок, не связанных непосредственно с приборами и с процессами измерений. Если включение вопроса о поправках за приливные влияния в главу о гравиметрах имеет свое оправдание, то вопросы редукций и вычисления ошибок аномалий силы тяжести, включенные в главу о маятниковых методах, относятся в равной степени как к маятниковым, так и к гравиметровым определениям.

Отмеченные недочеты являются легко исправимыми и могут быть устранены во втором издании, которое, по-видимому, понадобится в ближайшем будущем, учитывая небольшой тираж книги (2500 экземпляров).

Книгу желательно снабдить предметным указателем.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

По поводу работы „Кручение многослойных призматических
стержней прямоугольного поперечного сечения
с учетом линейной ползучести“

В статье, цитированной в заглавии, опубликованной в № 4, тома XII (1959 г.) автором ошибочно было указано, что в работе С. Г. Лехницкого «Кручение многослойного прямоугольного стержня» (Инженерный сборник, 23, 1956 г.) формула, полученная для жесткости трехслойного стержня с узким прямоугольным сечением, неверна.

В действительности же в работе проф. С. Г. Лехницкого имеется лишь опечатка. В формуле (5.14) вместо цифры 26 (внутри скобок) написана цифра «2».

В. С. САРКИСЯН