

Зрарца-ишрыйшт. артарлабыт. XIII, № 6, 1960 Физико-математические наукя

МАТЕМАТИКА

Ж. Н. Кешишян

Об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов

Определение. Обобщенным факториальным рядом называется ряд

$$a_0 + a_1 \frac{a_1}{z + a_1} + a_2 \frac{a_1 a_2}{(z + a_1)(z + a_2)} + \cdots,$$
 (1)

где a_n (n = 0, 1, 2,...) — комплексные числа, z — комплексная переменная, а числа a_n (n = 1, 2, 3, ...) удовлетворяют условням

$$= \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots, \qquad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} < \infty.$$
(A)

В частности, когда все $\alpha_n = n$, то обобщенный факториальный ряд (1) совпадает с обыкновенным факториальным рядом

$$a_0 + \frac{a_1}{1+z} + \frac{a_2}{(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)} + \cdots$$

Известно (см. [1]), что для каждого обобщенного факториального ряда существует вещественное число λ , которое называется абсциссой сходимости обобщенного факториального ряда, такое, что для $x = Re(z) > \lambda$ ряд (1) сходится (не считая точки $z = -\alpha_n$), а для $x = Re(z) < \lambda$ ряд (1) расходится. Причем возможно, что $\lambda = \infty$ и $\lambda = -\infty$.

Нахождение обсциссы сходимости ^λ ряда (1) связано со сходимостью числового ряда

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$
 (2)

Известно, что если ряд (2) расходится, то $\lambda > 0$ и

$$h = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right|}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}},$$
(3)

а если ряд (2) сходится, то $\lambda \ll 0$ и

$$= \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right|}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varphi_k}},$$

(4)

Ряд (1) в полуплоскости $x = Re(z) > \lambda + \delta$, где δ — произвольное положительное число, сходится равномерно (вне окрестности точек $z = -\alpha_n$). Следовательно, в полуплоскости $x = Re(z) > \lambda$ сумма ряда (1) f(z) является голоморфной функцией (за исключением точек $z = -\alpha_n$). Вообще говоря, на прямой $x = \lambda$ функция f(z) может не иметь особых точек (исключая точки $z = -\alpha_n$), следовательно, может быть аналитической в более широкой области, чем полуплоскость $x = Re(z) > \lambda$.

В настоящей статье изучается вопрос об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов.

В работе [2] Г. В. Бадалян, применяя несколько раз преобразование Абеля к введенным им обобщенным рядам Тейлора, получил средние суммирования нового вида, которые назвал обобщенными средними Чезаро.

В настоящей работе доказывается, что если аналогично применить преобразование Абеля относительно ряда (1) один или несколько раз, то получится ряд типа обобщенного факториального ряда, абсцисса сходимости которого не превосходит абсциссу сходимости λ ряда (1).

Настоящая статья состоит из двух параграфов. В § 1 доказывается несколько вспомогательных лемм. В § 2 доказываются две основные теоремы об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов.

Назовем обобщенный интерполяционный ряд Ньютона

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right), \tag{5}$$

общий ряд Дирихле

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}},$$
 (6)

и обобщенный факториальный ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{a_k}\right)}$$
(7)

ассоциированными.

В работе [1] доказано, что ряды (5), (6) и (7) имеют общую абсциссу сходимости, а в работе [3] доказано, что при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}}}{a_n^2} < \infty,$$
(8)

где α — некоторое положительное число, на общей прямой сходимости $x = \lambda$ особенности функций f(z), g(z) и $\varphi(z)$ совпадают.

В конце настоящей работы применяются результаты § 2 относительно обобщенных интерполяционных рядов Ньютона п общих рядов Дирихле и получается теорема об аналитическом продолжении функций f(z) и g(z) за прямую сходимости $x = \lambda$.

§ 1. Вспомогательные леммы

Введем следующие обозначения:

$$A_{n} = A_{n}^{(0)} = \sum_{k=0}^{n} a_{k} \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

$$A_{n}^{(p)} = \sum_{k=p-1}^{n} A_{k}^{(p-1)} \frac{\prod_{\substack{m=p \\ m=p+1}}^{n} (a_{m} - a_{p-1})}{\prod_{\substack{m=p+1 \\ m=p+1}}^{n+p} (a_{m} - a_{p})}$$

$$(p = 1, 2, 3, ...; \quad n = p - 1, p, p + 1, ...),$$

$$R_{n}^{(p)}(z) = A_{n}^{(p)} \frac{\prod_{\substack{k=p+1 \\ n+p \\ m=1}}^{n+p} (a_{k} - a_{p})}{\prod_{\substack{k=p \\ n+p \\ m=1}}^{n+p} (z + a_{k})}$$

$$(p = 0, 1, 2, ...; \quad n = 1, 2, 3, ...).$$

Лемма 1. Если последовательность чисел {a_n} удовлетворяет условням (A), то

$$\frac{\prod_{m=p}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} < \frac{B_p}{\alpha_k} \exp\left[(\alpha_p - \alpha_{p-1}) \sum_{m=p}^{k+p} \frac{1}{\alpha_m} \right]$$

$$(p = 1, 2, 3, ...; \quad k = p, p+1, p+2, ...),$$

где Bp — конечная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Так как по условню леммы $0 < \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m} < 1$ н $0 < \frac{\alpha_p}{\alpha_m} < 1$ при m > p, то имеем

$$\frac{\prod\limits_{m=p}^{k+p-1} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod\limits_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} = \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{k+p} - \alpha_{p-1}} \exp\left[\sum\limits_{m=p+1}^{k+p} \ln \frac{1 - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m}}{1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_m}}\right] =$$
$$= \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{k+p} - \alpha_{p-1}} \exp\left[(\alpha_p - \alpha_{p-1})\sum\limits_{m=p+1}^{k+p} \frac{1}{\alpha_m}\right] \times$$
$$\times \exp\left\{\sum\limits_{m=p+1}^{k+p} \sum\limits_{m=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_m}\right)^n - \left(\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m}\right)^n\right]\right\}.$$

Легко видеть, что

$$\exp\left\{\sum_{m=p+1}^{k+p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a_p}{a_m}\right)^n - \left(\frac{a_{p-1}}{a_m}\right)^n \right] \right\} < \\ < \exp\left[\sum_{m=p+1}^{k+p} \left(\frac{1}{2} \frac{a_p^2 a_{p+1}}{a_{p+1} - a_p} \frac{1}{a_m^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_{p-1}}{a_{p+1}}\right)^2 \right] < \\ < \exp\left[\frac{1}{2} \frac{a_p^2 a_{p+1}}{a_{p+1} - a_p} \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{1}{a_m^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_{p-1}}{a_{p+1}}\right)^2 \right] = B_p',$$

где B'_p - конечная постоянная, зависящая только от p, потому что ряд $\sum_{m=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2}$ по условиям леммы сходится.

Следовательно.

$$\frac{\prod\limits_{m=p}^{k+p-1}(\alpha_m-\alpha_{p-1})}{\prod\limits_{m=p+1}^{k+p}(\alpha_m-\alpha_p)} < \frac{\alpha_p-\alpha_{p-1}}{\alpha_{k+p}-\alpha_{p-1}} B_p^{'} \exp\left[(\alpha_p-\alpha_{p-1})\sum\limits_{m=p+1}^{k+p}\frac{1}{\alpha_m}\right] <$$

$$\leq \frac{B_p}{a_k} \exp\left[\left(a_p - a_{p-1}\right)\sum_{m-p}^{k+p} \frac{1}{a_m}\right],$$

гле

$$B_p = a_p B'_p e^{-\frac{a_p - a_{p-1}}{a_p}}$$

и зависит только от р.

Лемма 2. Если вещественное число х определяется формулой (3), а последовательность чисел (an) удовлетворяет условиям (A), то для произвольного положительного числа с существует натуральное чи сло $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех n > N

$$|A_n^{(p)}| < \mathcal{M}_p \exp\left[\left(\lambda + \alpha_p + \varepsilon\right) \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k}\right] \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}\right)^p (p=0, 1, 2, ...),$$

где M_p — конечная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции. По формуле (3) для произвольного положительного числа существует натуральное число N = N(z) такое, что

$$|A_n| < \exp\left[(\lambda + \varepsilon) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right], \quad \text{если } n > N.$$
(1.1)

Теперь оценим $A_n^{(1)}$. Учитывая (1.1) и лемму 1, когда p = 1, получим

$$|A_{n}^{(1)}| \leq |A_{N}^{(1)}| + \sum_{k=N+1}^{n} |A_{k}| \frac{\prod_{k=1}^{n} \alpha_{m}}{\prod_{m=1}^{n-1} (\alpha_{m} - \alpha_{1})} < |A_{N}^{(1)}| + B_{1} \exp\left[(\lambda + \alpha_{1} + \varepsilon)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_{k}}\right] \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}} = \exp\left[(\lambda + \alpha_{1} + \varepsilon)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_{k}}\right] \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}}\right) \times \\ \times \left\{ B_{1} + |A_{N}^{(1)}| \frac{\exp\left[-(\lambda + \alpha_{1} + \varepsilon)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_{k}}\right]}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}}} \right\}.$$

Так как по условиям леммы выражение

$$\frac{|A_N^{(1)}|}{\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}} \exp\left[-\left(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon\right)\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k}\right]$$

стремится к нулю, когда л стремится к бесконечности, то

$$|A_N^{(1)}| \ll \mathcal{M}_1 \exp\left[\left(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon\right) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k}\right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k},$$

где М1-конечная постоянная.

Предположим, что лемма верна для *p* — 1, и докажем, что она будет верна также для *p*.

Учитывая лемму 1 получим

$$|A_{n}^{(p)}| \leq |A_{N}^{(p)}| + \sum_{k=N+1}^{n} |A_{k}^{(p-1)}| \frac{\prod_{m=p}^{n+p-1} (\alpha_{m} - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{m+p-1} (\alpha_{m} - \alpha_{p})} \leq \\ \leq |A_{N}^{(p)}| + M_{p-1}B_{p} \exp\left[(\lambda + \alpha_{p} + \varepsilon)\sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_{k}}\right] \left(\sum_{k=p-1}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}}\right)^{p} \leq \\ \leq M_{p} \exp\left[(\lambda + \alpha_{p} + \varepsilon)\sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_{k}}\right] \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}}\right)^{p},$$

где M_p — конечная постоянная, зависящая только от p, потому чтовыражение

$$\frac{|A_N^{(p)}|}{\left(\sum\limits_{k=p-1}^n\frac{1}{\alpha_k}\right)^p}\exp\left[-\left(\lambda+\alpha_p+\varepsilon\right)\sum\limits_{k=p}^{n+p}\frac{1}{\alpha_k}\right]$$

стремится к нулю, когда п стремится к бесконечности.

Лемма доказана.

Лемма 3. Если последовательность чисел $[\alpha_n]$ удовлетворяет условиям (A), то для каждого z, отличного от $-\alpha_n$ (n = 1, 2, 3,...),

$$\left|\frac{\prod\limits_{\substack{k=p+1\\n+p}}^{n+p}(\alpha_k-\alpha_p)}{\prod\limits_{k=p}^{n+p}(z+\alpha_k)}\right| < C_p \exp\left[-(x+\alpha_p)\sum\limits_{k=p}^{n+p}\frac{1}{\alpha_k}\right] |F_n(z)|,$$

где

$$F_n(z) = \frac{1}{\prod_{k=p}^{n+p} \left(1 + \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_k}}}$$

 C_p — конечная постоянная, зависящая только от p, а x = Re(z). Доказательство. Имеем

$$\frac{\prod\limits_{\substack{k=p+1\\n+p}}^{n+p}(\alpha_k-\alpha_p)}{\prod\limits_{k=p}^{n+p}(z+\alpha_k)} = \frac{1}{\alpha_p}\prod\limits_{\substack{k=p+1\\k=p+1}}^{n+p}\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_k}\right)e^{-z\sum\limits_{\substack{k=p}}^{n+p}\frac{1}{\alpha_k}}\cdot F_n(z).$$

Из условий (А) получим, что

$$\prod_{k=p+1}^{n+p} \left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_k}\right) = \exp\left(-\alpha_p \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k}\right) \exp\left[-\sum_{k=p+1}^{n+p} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_k}\right)^m\right] < 0$$

Об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов

$$< \exp\left(-\alpha_p\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{\alpha_k}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}}\right)^2\right] = \alpha_p C_p \exp\left(-\alpha_p\sum_{k=p}^{n+p}\frac{1}{\alpha_k}\right)^{n+p}$$

где

$$C_p = \frac{1}{\alpha_p} \exp\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}}\right)^2\right]$$
 — конечная постоянная

Следовательно,

$$\left|\frac{\prod\limits_{\substack{k=p+1\\n+p}}^{n+p}(\alpha_k-\alpha_p)}{\prod\limits_{k=p}^{n+p}(z+\alpha_p)}\right| < C_p \exp\left[-(x+\alpha_p)\sum\limits_{\substack{k=p\\k=p}}^{n+p}\frac{1}{\alpha_k}\right] |F_n(z)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условням (A), то на всяком конечном замкнутом множестве в полуплоскости $x = Re(z) > \lambda$, которое не содержит окрестности точек $z = -\alpha_n$ (n = 1, 2, 3, ...), равномерно

$$\lim_{n \to \infty} R_n^{(p)}(z) = 0 \quad (p = 0, 1, 2, ...).$$

Доказательство. Пусть E— конечное замкнутое множество в полуплоскости $x = Re(z) > \lambda$, которое не содержит окрестности точек $z = -\alpha_n$ (n = 1, 2, 3, ...). Выберем положительное число є настолько малым, чтобы $x = Re(z) > \lambda + \varepsilon$ для всех точек множества E. Тогда из лемм (2) и (3) получим, что

$$\left| R_{n}^{(p)}(z) \right| \leq M_{p} C_{p} \exp\left[\left(\lambda - x + z \right) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_{k}} \right] \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}} \right)^{p} |F_{n}(z)|.$$

Из условий (А) следует, что $F(z) = \frac{1}{\prod_{k=p}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}}}$ — меро-

морфная функция, полюсы которой есть точки $z = -\alpha_n$ (n = 1, 2, 3,...). Следовательно, равномерно на множестве E

$$\lim_{n\to\infty}F_n(z)=F(z)$$

и, кроме того, F(z) на множестве E ограничена. Поэтому на множестве E равномерно

$$\lim_{n\to\infty}R_n^{(n)}(z)=0.$$

Лемма доказана.

Ж. Н. Кешишян

§ 2. Основные теоремы

Теперь докажем следующую основную теорему. Теорема 1. Пусть обобщенный факториальный ряд

$$f(z) = a_0 \frac{1}{z} + a_1 \frac{a_1}{z(z+a_1)} + a_2 \frac{a_1 a_2}{z(z+a_1)(z+a_2)} + \cdots$$
(2.1)

имеет неотрицательную абсциссу сходимости λ.

Тогда

1. Ряд

$$g(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \overline{A}_{n}^{(p)} \frac{\prod_{\substack{k=p+2\\n+p+1}}^{n+p+1} a_{k}}{\prod_{\substack{k=p+1\\k=p+1}}^{n+p+1} (z+a_{k})},$$
(2.2)

где

$$\overline{A}_n^{(p)} = A_n^{(p)} \frac{\prod\limits_{k=p+1}^{n+p} (a_k - a_p)}{\prod\limits_{k=p+2}^{n+p+1} a_k}$$

имеет абсциссу сходимости λ_{p+1} , не превосходящую абсциссу сходимости λ ряда (2.1).

2. Всюду в полуплоскости $x = Re(z) > \lambda$

 $f(z) = Q_p(z) + g(z),$ (2.3)

2n - 1

где

$$Q_{p}(z) = A_{0} \frac{1}{z + \alpha_{2}} + A_{1}^{(1)} \frac{\alpha_{3} - \alpha_{2}}{(z + \alpha_{3})(z + \alpha_{4})} + \dots + A_{p-1}^{(p-1)} \frac{\prod_{k=p+1}^{(\alpha_{k} - \alpha_{p})}}{\prod_{k=p+1}^{2p} (z + \alpha_{k})},$$
(2.4)

Доказательство. Сперва докажем первую часть теоремы. Если ряд

$$\sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n A_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{\substack{k=p+2\\k=p+2}}^{n+p+1} \alpha_k},$$
(2.5)

сходится, то обсцисса сходимости λ_{p+1} ряда (2.2) неположительна. Следовательно, в этом случае первая часть теоремы доказана.

Теперь предположим, что ряд (2.5) расходится. Тогда по формуле (3)

$$\lambda_{p+1} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \left| \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k} \overline{A}_{k}^{(p)} \right|}{\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{a_{k}}}.$$

Оценим числа $\overline{A}_{a}^{(p)}$. Учитывая лемму 2 и условия (A), получим

$$\begin{split} |\overline{A}_{n}^{(p)}| &= |A_{n}^{(p)}| \frac{a_{p+1}}{a_{n+p+1}} \exp\left(-\alpha_{p} \sum_{m=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_{m}}\right) \exp\left[-\sum_{m=p+1}^{n+p} \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j} \left(\frac{\alpha_{p}}{\alpha_{m}}\right)^{j}\right] < \\ &< |A_{n}^{(p)}| \frac{a_{p+1} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_{p}}{a_{p+1}}\right)^{2}\right]}{\alpha_{n}} \exp\left(-\alpha_{p} \sum_{m=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_{m}}\right) < \\ &\leq \frac{G_{p}}{\alpha_{n}} \exp\left[(\lambda+\varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_{k}}\right] \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\alpha_{k}}\right)^{p}, \end{split}$$

где с− произвольное положительное число, а n > N (ε). Следовательно,

$$\begin{split} \left|\sum_{k=p}^{n}(-1)^{k}\overline{A}_{k}^{(p)}\right| &\leqslant \left|\sum_{k=p}^{N}(-1)^{k}\overline{A}_{k}^{(p)}\right| + \sum_{k=N+1}^{n}|\overline{A}_{k}^{(p)}| <\\ &< \left|\sum_{k=p}^{N}(-1)^{k}\overline{A}_{k}^{(p)}\right| + G_{p}\exp\left[\left(\lambda+z\right)\sum_{k=p}^{n+p}\frac{1}{\alpha_{k}}\right]\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}\right)^{p+1}, \quad \text{если } n > N. \end{split}$$

Отсюда

$$\frac{\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=p}^{n}(-1)^{k}\overline{A}_{k}^{(p)}\right|}{\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}} < (\lambda+\varepsilon) \frac{\sum\limits_{k=p}^{n+p}\frac{1}{\alpha_{k}}}{\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}} + (p+1) \frac{\ln\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}}{\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}} + \frac{\ln\left\{G_{p}+\left|\sum\limits_{k=p}^{N}(-1)^{k}\overline{A}_{k}^{(p)}\right|\left(\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}\right)^{-p-1}\exp\left[-(\lambda+\varepsilon)\sum\limits_{k=p}^{n+p}\frac{1}{\alpha_{k}}\right]\right\}}{\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{1}{\alpha_{k}}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{p+1} \leqslant \lambda + \varepsilon.$$

Так как є произвольное число, то λ_{p+1} ≤ λ. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы применим p+1 раз преобразование Абеля относительно ряда (2.1).

Как мы знаем, преобразование Абеля относительно ряда

Ж. Н. Кешишян



нмеет вид

$$\sum_{n=0} u_n v_n = \sum_{n=0} U_n v_n + \lim_{n \to \infty} U_n v_n,$$

где

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

$$u_n = a_n, \quad v_n = \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=0}^n (z + \alpha_k)},$$

получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k}{\prod_{k=1}^{n+1} (z+\alpha_k)} + \lim A_n \frac{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k}{\prod_{k=0}^{n} (z+\alpha_k)}$$

По лемме 4 последний предел равен нулю для всех z, $Re\left(z\right)>\lambda$. Следовательно, для таких z

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^{n} z_k}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + a_k)},$$
(2.6)

Преобразуем ряд (2.6) следующим образом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n+1} (a_k - a_1)} \cdot \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (a_k - a_1)}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + a_k)}$$

Теперь применим преобразование Абеля относительно последнего ряда, принимая

$$u_n = A_n \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}, \quad v_n = \frac{\prod_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_1)}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов

Тогда получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}{\prod_{k=2}^{n+2} (z + \alpha_k)} + \lim_{n \to \infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)}.$$

Предел в последнем выражении по лемме 4 равен нулю для всех z, $Re(z) > \lambda$. Следовательно, для таких z

$$f(z) = A_{\mathbf{0}} \frac{1}{z + \alpha_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}{\prod_{k=2}^{n+2} (z + \alpha_k)},$$
(2.7)

Напишем ряд (2.7) в следующем виде

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (a_k - a_1)}{\prod_{k=3}^{n+2} (a_k - a_2)} \cdot \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (a_k - a_2)}{\prod_{k=2}^{n+2} (z + a_k)}.$$

Применим преобразование Абеля относительно этого ряда, принимая

$$u_{n} = A_{n}^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_{k} - \alpha_{1})}{\prod_{k=3}^{n+2} (\alpha_{k} - \alpha_{2})}, \quad v_{n} = \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (\alpha_{k} - \alpha_{2})}{\prod_{k=3}^{n+2} (z + \alpha_{k})} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Получим

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{\prod_{k=3}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_2)}{\prod_{k=3}^{n+3} (z + \alpha_k)} + \lim_{n \to \infty} A_n^{(2)k \to 3} \frac{\prod_{k=2}^{n+2} (\alpha_k - \alpha_2)}{\prod_{k=2}^{n+2} (z + \alpha_k)}$$

По лемме 4 предел в последнем выражении равен нулю для всех $x = Re(z) > \lambda$. Следовательно, для таких z

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + A_1^{(1)} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{(z + \alpha_3) \cdot (z + \alpha_4)} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{\prod_{k=3}^{n+2} (\alpha_k - \alpha_2)}{\prod_{k=3}^{n+3} (z + \alpha_k)}$$
(2.8)

Применяя преобразование Абеля p+1 раз относительно ряда (2.1) и каждый раз учитывая лемму 4, получим в полуплоскости $Re(z) > \lambda$

$$f(z) = Q_p(z) + \sum_{n=p}^{\infty} A_n^{(p)} \frac{\prod_{\substack{k=p+1\\n+p+1}}^{n+p} (a_k - a_p)}{\prod_{\substack{k=p+1}}^{n+p+1} (z + a_k)}.$$
 (2.9)

Но последний ряд можно преобразовать следующим образом

$$\sum_{n=p}^{\infty} A_n^{(p)} \frac{\prod\limits_{\substack{k=p+1\\n+p+1\\ k=p+1}}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod\limits_{\substack{k=p+1\\k=p+1}}^{n+p} (z + \alpha_k)} = \sum_{n=p}^{\infty} \overline{A}_n^{(p)} \frac{\prod\limits_{\substack{k=p+2\\k=p+2}}^{n+p+1} \alpha_k}{\prod\limits_{\substack{k=p+1\\k=p+1}}^{n+p+1} (z + \alpha_k)} = g(z).$$

Теорема доказана.

Если ряд (2.1) имеет неположительную абсциссу сходимости, то получается следующая основная теорема.

Теорема 2. Пусть обобщенный факториальный ряд

$$f(z) = a_0 \frac{1}{z} + a_1 \frac{\alpha_1}{z (z + \alpha_1)} + a_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{z (z + \alpha_1) (z + \alpha_2)} + \cdots$$
(2.1)

имеет неположительную абсциссу сходимости λ.

Тогда

1. Ряд

$$g(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \tilde{A}_{n}^{(p)} \frac{\prod_{k=p+2}^{n+p+1} (\alpha_{k} + \lambda - \delta)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_{k})}, \qquad (2.10).$$

где

$$\widetilde{A}_{n}^{(p)} = \widehat{A}_{n}^{(p)} \underbrace{\prod_{\substack{k=p+1\\n+p+1\\k=p+2}}^{n+p} (a_{k} - a_{p})}_{\substack{k=p+1\\k=p+2}}, \qquad \widehat{A}_{n}^{(p)} = \sum_{\substack{k=p-1\\k=p-1}}^{n} \widehat{A}_{k}^{(p-1)} \underbrace{\prod_{\substack{m=p\\k+p\\m=p+1}}^{n+p-1} (a_{k} - a_{p-1})}_{\prod_{\substack{m=p+1\\m=p+1}}^{n} (a_{k} - a_{p})},$$

а δ—произвольное положительное число, имеет абсциссу сходимости_с λ_{p+1}, не превосходящую абсциссу сходимости λ ряда (2.1).

2. В полуплоскости $x = Re(z) > \lambda$

$$f(z) = Q_p(z) + g(z),$$

где

$$Q_{p}^{*}(z) = \hat{A}_{0}^{(0)} \frac{1}{z + \alpha_{2}} + \hat{A}_{1}^{(1)} \frac{\alpha_{3} - \alpha_{2}}{(z + \alpha_{3})(z + \alpha_{4})} + \dots + \hat{A}_{p-1}^{(p-1)\underline{k} - p+1} \frac{\prod_{k=p+1}^{2p-1} (\alpha_{k} - \alpha_{p})}{\prod_{k=p+1}^{2p} (z + \alpha_{k})}.$$

Доказательство. Обозначим $z = w + \lambda - \delta$. Тогда ряд (2.1) преобразуется в следующий ряд

$$h(w) = f(w+\lambda-\delta) = \frac{a_0}{\lambda-\delta} \frac{\lambda-\delta}{w+\lambda-\delta} + a_1 \frac{a_1}{(\lambda-\delta)(a_1+\lambda-\delta)} \times \frac{(\lambda-\delta)(a_1+\lambda-\delta)}{(w+\lambda-\delta)(w+a_1+\lambda-\delta)} + a_2 \frac{a_1a_2}{(\lambda-\delta)(a_1+\lambda-\delta)(a_2+\lambda-\delta)} \times \frac{(\lambda-\delta)(a_1+\lambda-\delta)(a_2+\lambda-\delta)}{(w+\lambda-\delta)(w+a_1+\lambda-\delta)(w+a_2+\lambda-\delta)} + \cdots$$
(2.11)

Легко видеть, что абсцисса сходимости λ' ряда (2.11) равна $\lambda' = \delta > 0$. Следовательно, по первой теореме ряд

$$\psi(w) = \sum_{n=p}^{\infty} \widetilde{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{\substack{k=p+2\\n+p+1}}^{n+p+1} (\alpha_k + \lambda - \delta)}{\prod_{\substack{k=p+1}}^{n+p+1} (w + \alpha_k + \lambda - \delta)}$$

имеет абсциссу сходимости λ_{p+1} , не превосходящую абсциссу сходимости 8 ряда (2.11), и в полуплоскости Re(w) > 8

$$h(w) = Q_p(w) + \psi(w),$$

где

$$\tilde{Q}_{p}(w) = \hat{A}_{0}^{(0)} \frac{1}{w + \lambda - \delta} + \hat{A}_{1}^{(1)} \frac{\alpha_{3} - \alpha_{2}}{(w + \alpha_{3} + \lambda - \delta)(w + \alpha_{4} + \lambda - \delta)} + \dots + \\ + \hat{A}_{p-1}^{(p-1)} \frac{\prod_{k=p+1}^{2p-1} (\alpha_{k} - \alpha_{p})}{\prod_{k=p+1}^{2p} (w + \alpha_{k} + \lambda - \delta)} \cdot \dots$$

Следовательно, ряд

$$g(z) = \psi(z - \lambda + \delta) = \sum_{n=p}^{\infty} \widetilde{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+2}^{n+p+1} (\alpha_k + \lambda - \delta)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)}$$

имеет абсциссу сходимости λ'_{p+1} , не превосходящую абсциссу сходи-

мости λ ряда (2.1) (так как $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+1} + \lambda - \delta \ll \lambda$), и в полуплоскости $Re(z) > \lambda$

 $f(z) = Q_p^*(z) + g(z).$

Теорема доказана.

Одно применение основных теорем. В § 2 мы доказали, что посредством преобразования Абеля возможно получить аналитическое продолжение обобщенных факториальных рядов.

В начале настоящей работы мы заметили, что Г. В. Бадаляном было доказано, что при условии (8) на общей прямой сходимости $x = \lambda$ особенности функций (5), (6) и (7) совпадают. Но легко доказать, что для совпадения особенностей функций (5), (6) и (7) на общей прямой $x = \lambda$ достаточно только условия (A). Следовательно, когда выполняются условия (A), ассоциированные ряды (5), (6) и (7) имеют общую абсциссу сходимости λ , и на общей прямой сходимости $x = \lambda$ особые точки функций f(z), g(z) и $\varphi(z)$ совпадают.

Сопоставляя этот факт с результатом, сформулированным в начале замечания, можно доказать следующую теорему:

Теорема. Если

$$\lambda_{p+1} < \lambda$$
 или $\lambda_{p+1} < \lambda$,

то функции f(z) и g(z) аналитически продолжаются за прямую сходимости $x = \lambda$.

В заключение выражаю благодарность Г. В. Бадаляну за постановку задачи и оказанную помощь при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступнаа 24 Ш 1960

d. 6. Քեշիշյան

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ՖԱԿՏՈՐԻԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՇԱՐՈՒՆԱԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում՝ ուսումնասիրվում է ընդհանրացրած ֆակտորիալ շարջնըի անալիտիկ շարունակման հարցը։

Ապացուցվում է, որ ընդճանրացրած ֆակտորիալ չարջի նկատմամը մեկ կամ մի ջանի անգամ կիրառելով Արևլի ձևափոխությունը, կոտանանջ ընդճանրացրած ֆակտորիալ շարջ, որի դուդամիտության արսցիսը չի գերազանցում տրված ընդճանրացրած ֆակտորիալ շարջի դուդամիտության արսցիսին։

Ստացված արդյունընհրը հոդվածի վերջում կիրառվում են Նյուտոնի ընդհանրացրած ինտերպոլացիոն շարքերի ու Դիրիխլեի ընդհանուր շարքերի նկատմամբ և ստացվում է Թեորեմա՝ այդ շարքերի անալիտիկ շարունակման մասին։

ЛИТЕРАТУРА

- Бадалян Г. В. Обобщенные факториальные ряды. "Сообщение Института мат. и мех. АН АрмССР*, вып. 5, 1950.
- Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. "Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, № 2, 1958.
- Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы аналитических и квази-аналитических функций. "Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук". № 1, 1953.



2 Известня АН, серия физ.-мат. наук, № 6

b

20340406 000 эрбарозаровор 0.4036070035 больчор ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зрарци- dupbdum, артыральвье XIII, Nº 6, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. С. Космодамианский

Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий

Задача о напряженном состоянии анизотропной пластинки, ослабленной одним эллиптическим отверстием, имеет точное решение и хорошо изучена [1].

Однако, во многих отраслях промышленности инженеры имеют дело с пластинками, ослабленными не одним, а несколькими отверстиями, которые оказывают взаимное влияние друг на друга.

Целью данной работы является изучение влияния отверстий на напряженное состояние пластинки вблизи этих отверстий.

 Пусть анизотропная пластинка, ослабленная конечным числом эллиптических отверстий, дефформируется усилиями, действующими на контурах отверстий в ее срединной плоскости. Для простоты примем эллиптические отверстия одинаковыми. Центры их лежат на одной прямой, а расстояния между центрами также одинаковы и равны *l*. Полуоси эллипсов обозначим через *a* = 1 и *b*. При этом будем предполагать, что *l* > 2*a* и *l* > 2*b* (фиг. 1).

Задача о напряженном состояния такой пластинки сводится [1] к определению двух функций комплексных переменных $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ из граничных условий на контурах отверстий



$$2Re\left[\Phi_{1}(z_{1})+\Phi_{2}(z_{2})\right]=\int_{0}^{s}Y_{n}\,ds+c_{1k},$$

(1.1)

$$2Re\left[\mu_{2}\Phi_{1}(z_{1})+\mu_{2}\Phi_{2}(z_{2})\right]=-\int_{0}^{3}X_{a}ds+c_{2k},$$

где X_n и Y_n — проекции усилий, действующих на контурах отверстий, на осн x и y; k — номер контура; c_{1k} и c_{2k} — произвольные постоянные, не влияющие на напряженное состояние пластинки; µ₁ и µ₂ комплексные постоянные, которые характеризуют анизотропию пластинки. Функции Ф₁ (z₁) и Ф₂ (z₂) определены в областях S₁ и S₂, которые получаются из заданной области путем аффинного преобразования.

Остановимся на случае, когда комплексные параметры μ_1 и μ_1 являются чисто мнимыми ($\mu_1 = i\beta$, $\mu_2 = i\delta$). Тогда в области определения функции $\Phi_1(z_1)$ будем иметь плоскость с одинаковыми эллиптическими вырезами, причем полуоси эллипсов получатся равными 1 и βb . В области же определения функции $\Phi_2(z_2)$ аналогичные эллипсы имеют полуоси 1 и δb . При этом расстояния между центрами отверстий будут попрежнему равны l.

Аналитическую в области S₁ функцию Ф₁ (z₁) можно представить так [2]

$$\Phi_{1}(z_{1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k}(z_{1}).$$
(1.2)

Здесь $\varphi_k(z_1)$ (k = 0, 1, 2, ..., n-1) — функция, голоморфная вне контура L_k , полученного из контура L_k путем аффинного преобразования.

Отобразим конформно внешность единичного круга у на внешность контура L'я. Отображающая функция имеет вид

$$w(\zeta_k) = z_1 - kl = \frac{1 + \beta b}{2} \zeta + \frac{1 - \beta b}{2} \frac{1}{\zeta}.$$
 (1.3)

Функция

$$\varphi_k(z_1) = \varphi_k^*(\zeta_k) \tag{1.4}$$

будет голоморфной функцией вне единичного круга у в области (</br>
Поэтому ее можно представить в виде ряда

$$\varphi_k^*(\zeta_k) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_{mk}}{\zeta_k^m},\tag{1.5}$$

где

$$\zeta_k = \zeta \left(z_1 - kl \right). \tag{1.6}$$

Теперь функция Ф₁ (z₁) примет вид

$$\Phi_{1}(z_{1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{mk}}{\left[\zeta(z_{1} - kl)\right]^{m}}.$$
(1.7)

Перенесем начало координат в центр эллипса L' (v= = 0, 1, 2, ... n-1) положив

$$z_1 - vl = z_1^*. (1.8)$$

Тогда

$$\Phi_{1}(z_{1}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,\nu}}{[\zeta(z_{1}^{*})]^{m}} + \sum_{k=-\nu}^{n-1-\nu} \sum_{m=1}^{(*)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,k+\nu}}{[\zeta(z_{1}^{*}-kl)]^{m}},$$
(1.9)

где знак (*) означает отсутствие в сумме номера k = 0.

Последняя сумма в выражении (1.9) представляет из себя функцию, голоморфную в круге, который охватывает контур L'_{v} , не касаясь соседних контуров. В этом круге, а, следовательно, и на контуре L'_{v} , эту сумму можно разложить в ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{n-1-\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\varphi_{m,k+\infty}}{\left[\zeta \left(z_1^* - kl\right)\right]^m} = \sum_{t=0}^{\infty} A_t^{(s)} \left(z_1^*\right)^t,$$
(1.10)

где

$$A_t^{(s)} = \frac{1}{t!} \lim_{z_1^* \to 0} \frac{d^t}{dz_1^t} \left\{ \sum_{k=-s}^{n-1-s} {s \choose s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,k+s}}{[\zeta(z_1^* - kl)]^m} \right\}.$$
 (1.11)

Коэффициенты $A_t^{(*)}$ в качестве множителей будут иметь в различных степенях малый параметр $\varepsilon = 1/l$, т. к. $(\zeta)_{z^*=0} = -\frac{kl}{1+\beta b} \times (1+\sqrt{1-\frac{1-\beta^2 b^2}{b^2 l^2}}).$

$$\Phi_{1}(z_{1}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m*}}{[\zeta(z_{1}^{*})]^{m}} + \sum_{\ell=0}^{\ell} A_{\ell}^{(*)}(z_{1}^{*})^{\ell}, \qquad (1.12)$$

где г -- наперед заданное число.

Таким же образом на контуре L_{*}, который в плоскости (z₂) получился из контура L_{*} путем аффинного преобразования, будем иметь

$$\Phi_{2}(z_{2}) = \sum_{m=1}^{m} \frac{\psi_{mn}}{[\zeta(z_{2}^{*})]^{m}} + \sum_{t=0}^{r} B_{t}^{(v)}(z_{3}^{*})^{t}, \qquad (1.13)$$

где

 $z_2^* = z_2 - \forall l$

(1.14)

$$B_{t}^{(v)} = \frac{1}{t!} \lim_{z_{2} \to 0} \frac{d^{t}}{dz_{2}^{*t}} \left\{ \sum_{k=-s}^{n-1-s} \sum_{m=1}^{s} \frac{\psi_{m,k+s}}{[\zeta(z_{2}^{*}-kl)]^{m}} \right\}$$

Предположим, что коэффициенты $\varphi_{m,k+s}$ и $\psi_{m,k+s}$ при $k \neq 0$ нам известны. Тогда для определения функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ из граничных условий (1.1), заданных на контуре L_s , мы имеем задачу для ортотропной пластинки с одним эллиптическим отверстием, решение которой известно для общего вида загружения контура пластинки [1].

Проделав эту операцию для каждого отверстия, для определения коэффициентов ф_{m, k+x} и ф_{m, k+x} получим конечную алгебраическую си-

стему. Найдя эти коэффициенты, мы на основании формул (1.12) и (1.13) определим функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, зная которые найдем напряжения из следующих зависимостей

$$\begin{aligned} \sigma_{x} &= -2Re \left[\beta^{2} \Phi_{1}'(z_{1}) + \delta^{2} \Phi_{2}'(z_{2})\right], \\ \sigma_{y} &= 2Re \left[\Phi_{1}'(z_{1}) + \Phi_{2}'(z_{2})\right], \\ \tau_{xy} &= -2Rei \left[\beta \Phi_{1}'(z_{1}) + \delta \Phi_{2}'(z_{2})\right]. \end{aligned}$$
(1.15)

Таким путем решается задача о напряженном состоянии анизотропной пластинки и в том случае, когда отверстия не япляются одинаковыми и когда расстояния между центрами отверстий различны. В этом случае $\varepsilon = \frac{1}{l_1}$, где l_1 – наименьшее расстояние между отверстиями. Остальные расстояния выражаются в долях l_1 .

 Пусть имеем ортотропную пластинку с двумя эллиптическими отверстиями. Контуры этих отверстий свободны от усилий, а на бесконечности действуют растягивающие усилия интенсивности р вдоль линии центров отверстий и интенсивности q — перпендикулярно к линии центров (фиг. 2).



Решение задачи о напряженном состоянии этой пластинки проведем методом наложения. Сначала найдем поле напряжений в сплошной пластинке. Здесь

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = q, \ \tau_{xy}^0 = 0.$$
 (2.1)

На воображаемых контурах отверстий в данном случае проекции усилий на оси х и у будут иметь вид

$$X_n^0 = -p \frac{dy}{ds}, \quad Y_n^0 = q \frac{dx}{ds}. \tag{2.2}$$

Наложим, далее, на поле напряжений в сплошной пластинке поле напряжений, которое получится, если к контурам отверстий приложить усилия

$$X_n = -X_n^0, \quad Y_n = -Y_n^0.$$
 (2.3)

Эта задача приводится к определению функций Ф₁ (z₁) и Ф₂ (z₂) из граничных условий (1.1).

В силу геометрической и силовой симметрии, которая имеет место в нашей задаче, функции Ф₁ (z₁) и Ф₂ (z₂) можно представить в виде

$$\Phi_{1}(z_{1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k}}{[\zeta(z_{1}^{*})]^{k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_{k}}{[\zeta(z_{1}^{*}+2l)]^{k}}.$$

Равновесне анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями

$$\Phi_{2}(z_{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{k}}{[\zeta(z_{2}^{*})]^{k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \psi_{k}}{[\zeta(z_{2}^{*}+2l)]^{k}},$$
(2.4)

 ${\rm rge} \ z_1^* = z_1 - l, \ z_2^* = z_2 - l,$

Коэффициенты φ_k и ψ_k следует определять из граничных условий на контуре правого отверстия. Тогда на контуре левого отверстия они будут выполнены автоматически.

Разложим вторые суммы выражений (2.4) в степенные ряды, используя формулы (1.10)—(1.14), ограничившись членами, содержащими с в четвертой степени.

Тогда из граничных условий (1.1) для определения коэффициентов Ф. и Ф. получим следующую алгебраическую систему:

$$\begin{split} \varphi_{1}\left(1-\varepsilon^{2}m_{0}-6\varepsilon^{4}m_{0}^{2}m_{1}\right)+\psi_{1}\left(1-\varepsilon^{2}n_{0}-6\varepsilon^{4}n_{0}^{2}n_{1}\right)+2\varphi_{2}\varepsilon^{3}m_{0}^{2}+\\ &+2\psi_{2}\varepsilon^{3}n_{0}^{2}-3\varphi_{3}\varepsilon^{4}m_{0}^{3}-3\psi_{3}\varepsilon^{4}n_{0}^{3}=-\frac{q}{2},\\ \varphi_{2}\left(1-3\varepsilon^{4}d_{0}m_{0}^{2}\right)+\psi_{2}\left(1-3\varepsilon^{4}t_{0}n_{0}^{2}\right)+\varphi_{1}\varepsilon^{3}m_{0}d_{0}+\psi_{1}\varepsilon^{3}n_{0}t_{0}=0,\\ \varphi_{3}+\psi_{3}-\varphi_{1}\varepsilon^{4}m_{0}\left(m_{0}^{3}+m_{1}^{3}\right)-\psi_{1}\varepsilon^{4}n_{0}\left(n_{0}^{3}+n_{1}^{3}\right)=0,\\ \beta\varphi_{1}\left(1+\varepsilon^{2}m_{0}\beta c+6\varepsilon^{4}m_{0}^{2}m_{1}\beta c\right)+\delta\psi_{1}\left(1+\varepsilon^{2}n_{0}\delta c+6\varepsilon^{4}n_{0}^{2}n_{1}\delta c\right)-(2.5)\\ &-2\beta^{2}\varphi_{2}\varepsilon^{3}cm_{0}^{2}-2\delta\psi_{2}\varepsilon^{3}cn_{0}^{2}+3\beta^{2}\varphi_{3}\varepsilon^{4}cm_{0}^{3}+3\delta^{2}\psi_{3}\varepsilon^{4}cn_{0}^{3}=\frac{pc}{2},\\ \beta\varphi_{3}\left(1+3\varepsilon^{4}m_{0}^{2}\beta c\right)+\delta\psi_{2}\left(1+3\varepsilon^{4}n_{0}^{2}\delta c\right)-\beta^{2}\varphi_{1}\varepsilon^{3}m_{0}c-\delta^{2}\psi_{1}\varepsilon^{3}n_{0}c=0,\\ \beta\varphi_{3}+\delta\psi_{3}+\beta\varphi_{1}\varepsilon^{4}m_{0}\left(m_{0}^{3}-m_{1}^{3}\right)+\delta\psi_{1}\varepsilon^{4}n_{0}\left(n_{0}^{3}-n_{1}^{3}\right)=0,\\ \varphi_{4}=\psi_{3}=0\quad (k=4,5,\ldots). \end{split}$$

Здесь

$$c = \frac{b}{a}, \quad m_0 = 0.5 \, (1 + \beta c), \quad m_1 = 0.5 \, (1 - \beta c), \quad n_0 = 0.5 \, (1 + \delta c),$$
(2.6)

$$n_1 = 0.5 (1 - \delta c), \quad d_0 = 0.5 (1 + \beta^2 c^2), \quad t_0 = 0.5 (1 + \delta^2 c^2).$$

Найдя из этой системы коэффициенты φ_k и ψ_k , на основании формул (2.4) и (1.15) найдем напряжения.

В таблице № 1 приведены значения нормальных напряжений σ_x и σ_y в наиболее интересных точках для двух случаев загружения пластинки (1. $p = 0, q \neq 0$; 2. $p \neq 0$; q = 0). Для сравнения здесь же приведены значения аналогичных напряжений σ_x^* и σ_y^* , которые имеют место в пластинке с одним эллиптическим отверстием.

Касательные напряжения τ_{xy} в рассматриваемых точках равны нулю.

При проведении расчетов было принято, что пластинка изготовлена из CBAMa [3] (β = 1,89, δ = 0,531). Были рассмотрены различные отношения полуосей эллипса с при неизмечном расстоянии между отверстиями, которое равнялось а.

Таблица 1

с	Точки	$p = 0, q \neq 0$			$p \neq 0, q = 0$				
		\circ_x/q	°y/q	p/* 0	°*/q	a _x /p	°y/p	°*/p	°*/p
1	O A B C	0.32 0.004 -0.02 -0.94	2,08 3,51 3,71 -0,01	$0,32 \\ 0 \\ 0 \\ -1,00$	$1.49 \\ 3.42 \\ 3.42 \\ 0$	0,10 0,002 0,006 3,17	$0.03 \\ -0.48 \\ -0.91 \\ 0.02$	0,16 0 0 3,42	$-0.07 \\ -1.00 \\ -1.00 \\ 0$
0.5	O A B C	$0,82 \\ 0,02 \\ -0,01 \\ -0,92$	1,89 6,20 6,10 0,001	$0,46 \\ 0 \\ 0 \\ -1,00$	1,40 5,83 5,83 0	$0,13 \\ -0.02 \\ 0.01 \\ 2.03$	0,03 -0,60 -0,89 0,001	0,45 0 0 2,21	$^{0,01}_{\substack{-1,00\\-1,00\\0}}$
0.25	O A B C	$0,95 \\ 0,05 \\ -0.01 \\ -0.94$	1,78 11,53 11,15 0,001	0,47 0 0 -1,00	1,36 10,65 10,65 0	$ \begin{array}{c} 0,50 \\ -0.03 \\ 0.01 \\ 1.53 \end{array} $	0,02 0,83 0,94 0	0,73 0 0 1,61	${}^{0,01}_{-1,00}_{-1,00}_{0}$

 Пусть пластинка, рассмотренная в § 2, ослаблена тремя одинаковыми эллиптическими отверстиями (фиг. 3).



Фнг. 3.

В данном случае в силу силовой и геометрической симметрии функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ можно представить так

$$\Phi_{1}(z_{1}) = \sum_{k=1,3,5...}^{\infty} \frac{\varphi_{ko}}{[\zeta(z_{1})]^{k}} +$$

$$+\sum_{k=1,2,3...}^{n}\varphi_{k1}\bigg\{\frac{1}{[\zeta(z_{1}-l)]^{k}}+\frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta(z_{1}+l)]^{k}}\bigg\},$$

$$\Phi_{2}(z_{2}) = \sum_{k=1,3,5...}^{\infty} \frac{\Psi_{ko}}{[\zeta(z_{2})]^{k}} + \sum_{k=1,2,3...}^{\infty} \Psi_{k1} \left\{ \frac{1}{[\zeta(z_{2}-l)]^{k}} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta(z_{2}-l)]^{k}} \right\},$$
(3.1)

Коэффициенты φ_{k0} , φ_{k1} , ψ_{k0} и ψ_{k1} следует определять из граничных условий на контурах правого и среднего отверстий таким же образом, как это сделано в § 2 (граничные условия на контуре левого отверстия будут удовлетворены автоматически).

После их определения на основании (3.1) станут известными функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ и напряжения в пластинке определятся по формулам (1.15).

Результаты вычислений для напряжений, проведенных для тех же случаев, что и в § 2, приведены в таблице № 2.

На основании приведенных таблиц можно заметить, что

Равновесие анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями

	х		\$
14	4	ŧ.	r
0	Π.	0	
			-

11	1	5.02	2222	11.00
	00	12 11	11.23	18 - 2
*	uv.	4.44	4 1 4	-

-	Точки	$p = 0, q \neq 0$			$p \neq 0, q = 0$				
.c		σ_x/q	⇒y/q	$ \circ_x^* q$) */q	σ_{x}/p	⇒y/₽	°*/p	σ*/p
1	B ₄ A ₄ C ₁ C K	$- \begin{array}{c} -0.01 \\ \textbf{0.04} \\ 0.06 \\ -0.90 \\ -0.82 \\ 0.58 \end{array}$	3.71 4.04 3.87 -0.01 -0.03 2.13	0 0 -1,00 -1,00 0,32	3,42 3,42 3,42 0 0 1,49	0.03 -0.04 -0.06 3.18 2.95 0.08	$\begin{array}{c} -0.89 \\ -0.58 \\ -0.57 \\ -0.01 \\ 0.02 \\ 0.04 \end{array}$	0 0 3,42 3,42 0,16	$-1.00 \\ -1.00 \\ -1.00 \\ 0 \\ -0.07$
0.5	B ₁ A ₁ A C ₁ C K	$-0,02 \\ 0,10 \\ 0,08 \\ -0,87 \\ -0,77 \\ 0,88$	$\begin{array}{r} 6,26\\ 6,42\\ 6,61\\ 0,01\\ -0.004\\ 1,95\end{array}$	$0 \\ 0 \\ -1.00 \\ -1.00 \\ 0.46$	5,85 5,85 5,85 0 0 1,40	$\begin{array}{c} 0,02 \\ -0,09 \\ -0,08 \\ 1.99 \\ 1,79 \\ 0,09 \end{array}$	$-0.85 \\ -0.69 \\ -0.60 \\ -0.01 \\ -0.004 \\ 0.04$	0 0 2.21 2,21 0,45	$-1.00 \\ -1.00 \\ -1.00 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01$
0.25	B ₁ A ₁ A _C C _K	-0,02 0,07 0,07 -0,91 -0,87 1,01	$ \begin{array}{r} 11.44\\ 11.74\\ 12.01\\ 0.01\\ -0.01\\ 1.84 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1.00 \\ -1.00 \\ 0.47 \end{array} $	10.68 10.68 10.68 0 0	$ \begin{array}{r} 0.02 \\ -0.05 \\ -0.04 \\ 1.51 \\ 1.45 \\ 0.49 \end{array} $	$ \begin{array}{c} -0.90 \\ -0.84 \\ -0.79 \\ -0.001 \\ -0.002 \\ 0.03 \end{array} $	0 0 1,61 1,61 0,73	-1.00 -1.00 -1.00 0 0 0 0

 а) концентрация напряжений в пластинке понижается при увеличении количества отверстий, когда пластинка растягивается вдольлинии центров отверстий и увеличивается, когда пластинка растягивается поперек линии центров;

б) при растяжении пластинки поперек линии центров нармальиме напряжения σ_x и σ_y в точках между отверстиями значительно увеличиваются по сравнению со случаем, когда пластинка ослаблена только одним отверстием; это увеличение получается большим, если отношение полуосей эллипсов с будут уменьшаться; при растяжении же пластинки вдоль линии центров напряжения в точках между отверстиями уменьшаются.

Саратовский госуниверситет им. Чернышевского

Поступила 6 V1 1960

Ա. Ս. Կոսմոդամիանսկի

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԷԼԻՊՏԻԿ ԱՆ8ՔԵՐՈՎ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ԹԻԹԵՂԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Վերջավոր խվով էլիպտիկ անցընրով խիթնղը դեֆորմացիայի է հնթարկվում թիթնեղի միջին հարթությունում կիրառված ուժերով։

Առաջարկվում է մի հղանակ, որը ճնարավորություն է տալիս տվլալ Թի-Թեղի լարվածության վիճակի խնդիրը բերել մեկ անցքով ճամանման Թի-Թեղի մի շարք խնդիրների, որոնց լուծումներն ստացվում են ճալանի եղանակներով։ Որպես մասնավոր դեպը, դիտարկված է երկու և երեք էլիպտիկ անցքերով օրԹոտրոպ ԹիԹեղի ձգումը։

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.

 Шерман Д. И. К вопросу о напряженном состоянии междукамерных целиков. Улругая весомая среда, ослабленная двумя отверстнями эллиптической формы. "Изв. АН СССР, ОТН*, 7, № 6, 1952.

 Буров А. К., Андреевская Г. Д. Стекловолокнистые анизотропные материалы и их техническое применение. Изд. АН СССР, М.-Л., 1956.

20.340.405 ОВА ЭРЗАРРЗАРОБОРР ЦАЦАБИРИЗР SBQB40.9PP - НЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зрарци-бшрьбшив. ариппериябове XIII, Nº 6, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. М. Манукян

Пластическое кручение призматического стержня прямоугольного сечения со степенным упрочнением материала

В работе Дж. Г. Хута [1] решение задачи пластического кручения для стержня квадратного поперечного сечения дается с помощью численных методов. Л. М. Качанов [2], пользуясь разработанными им вариационными методами теории ползучести, дал приближенное решение задачи о ползучести скручиваемых стержней некоторых профилей.

Ниже рассматривается задача о пластическом кручении призматического стержия прямоугольного сечения со степенным упрочнением материала, выраженным зависимостью (1.15). Задача сводится к нелинейному дифференциальному уравнению эллиптического типа, содержащему параметр β, решение которого строится методом, данным в работе [3].

В качестве приложения приводится численный пример.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня с произвольным поперечным сечением. Пусть боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, а к торцам приложены силы, действующие в их плоскости, которые статически эквивалентны крутящему моменту *M*.

Поместим начало прямоугольной системы координат хуг в некоторой точке торцевого сечения, направив ось г параллельно образующим стержня.

Подожим, как и в случае кручения упругих стержней, что компоненты напряжений и деформаций, за исключением τ_{x2} , τ_{y2} , τ_{x2} и γ_{y2} , равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Тогда уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial z_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial z_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

и будут тождественно удовлетворены, если, как обычно, положить

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (1.3)$$

где функция напряжений U зависит только от x и y.

Пусть, далее, (Г) —контур, ограничивающий односвязную область Q поперечного сечения стержня, тогда

$$U|_{\Gamma} = 0$$
 (1.4)

так как боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий. При этом крутящий момент

$$M = 2 \iint_{\mathbb{Q}} U dx dy, \tag{1.5}$$

Условия неразрывности деформаций в силу (1.1) примут вид

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\theta, \tag{1.6}$$

где в - угол закручивания на единицу длины стержия.

В общем случае уравнение, связывающее интенсивность деформаций и интенсивность напряжений, можно написать в следующем виде

$$\varepsilon_{\ell} = F(\sigma_{\ell}) \sigma_{\ell}, \tag{1.7}$$

где

$$\epsilon_{i} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\epsilon_{x} - \epsilon_{y})^{2} + (\epsilon_{y} - \epsilon_{z})^{2} + (\epsilon_{z} - \epsilon_{x})^{2} + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^{2} + \gamma_{yz}^{2} + \gamma_{zx}^{2})},$$
(1.8)

$$\sigma_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{x} - \sigma_{y})^{2} + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{z} - \sigma_{x})^{2} + 6(\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{zx}^{2})}.$$
(1.9)

В рассмотренном случае (1.8) и (1.9) примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sqrt{\gamma_{xx}^2 + \gamma_{yx}^2}, \\ \varepsilon_i &= \sqrt{\gamma_{xx}^2 + \gamma_{yx}^2}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

Тогда основные уравнения, связывающие компоненты касательных напряжений и деформации, принимают следующий вид

$$\begin{split} \gamma_{xz} &= F\left(\sigma_{t}\right) \tau_{xz}, \\ \gamma_{yz} &= F\left(\sigma_{t}\right) \tau_{yz}. \end{split} \tag{1.11}$$

Внося эти выражения компонентов деформаций в уравнение неразрывности (1.6) и принимая во внимание соотношение (1.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ F\left(\mathbf{a}_{i}\right) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ F\left(\mathbf{a}_{i}\right) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = -2\mathbf{0}, \tag{1.12}$$

Пластическое кручение стержия со степенным упрочнением материала 29

тде

$$\sigma_i = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}.$$
 (1.13)

Таким образом, решение задачи пластического кручения призматического стержня приводится к решению дифференциального уравнения типа Монжа-Ампера (1.12) с граничным условием (1.4).

Положим, что F (о_l) имеет вид

$$F(\sigma_i) = \alpha + \beta \sigma_i^{m-1} \quad (m > 1), \tag{1.14}$$

где $\alpha = \frac{1}{G}$, G — модуль сдвига, β , m — числовые параметры.

Подставляя выражение F (о_i) из (1.14) в (1.7), получим

$$\varepsilon_i = \alpha \sigma_i + \beta \sigma_i^m \quad (m > 1). \tag{1.15}$$

Экспериментальные исследования, выполненные за последнее время, показывают, что для некоторых материалов, как, например, твердая хромоникелевая сталь [1], алюминиевый сплав [4] и др., связь между деформациями и напряжениями достаточно хорошо описывается зависимостью (1.15).

Внося выражение F (oi) из (1.14) в (1.12), найдем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \beta GL(U) = -2G\theta, \qquad (1.16)$$

m - 1

где

1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$
(1.17)

§ 2. Решение дифференциального уравнения (1.16)

Пользуясь методом, развитым в работе [3], будем искать решение уравнения (1.16) в виде ряда

$$V(x, y) = U_0(x, y) + \beta U_1(x, y) + \beta^2 U_2(x, y) + \cdots$$
(2.1)

Подставляя это выражение в уравнение (1.16) и приравнивая коэффициенты при одиноковых степенях 3, получим

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = -2G\theta, \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = -GL(U_0), \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = - GL(U_0, U_1), \qquad (2.4)$$

$$L\left(U_{0}, U_{1}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_{0}}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial y} \right)^{2} \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial U_{1}}{\partial x} + \right. \\ \left. + (m-1) \left[\left(\frac{\partial U_{0}}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial y} \right)^{2} \right]^{\frac{m-1}{2} - 1} \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial x} \frac{\partial U_{1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{0}}{\partial y} \frac{\partial U_{1}}{\partial y} \right) \frac{\partial U_{0}}{\partial x} \right\} + \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_{0}}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial y} \right)^{2} \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial U_{1}}{\partial y} + \right. \\ \left. + (m-1) \left[\left(\frac{\partial U_{0}}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial y} \right)^{2} \right]^{\frac{m-1}{2} - 1} \left(\frac{\partial U_{0}}{\partial x} \frac{\partial U_{1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{0}}{\partial y} \frac{\partial U_{1}}{\partial y} \right) \frac{\partial U_{0}}{\partial y} \right\}.$$
(2.5)

Таким образом, решение нелинейного дифференциального уравнения (1.16) сводится к решению некоторой совокупности линейных рекуррентных дифференциальных уравнений (2.2), (2.3), (2.4) с условием (1.4), причем крутящий момент *M* определяется формулой (1.5).

Теперь рассмотрим задачу о пластическом кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения.

§ 3. Кручение призматического стержня прямоугольного поперечного сечения

Рассмотрим задачу о кручении стержня прямоугольного поперечного сечения, стороны которого равны 2*a* и 2*b*. Начало координат совместим с центром прямоугольника.

Для определения функции U₀(x, y) нужно решить уравнение (2.2) с условиями

$$U_0(\pm a, y) = 0,$$

 $U_0(x, \pm b) = 0.$
(3.1)

Решение берется в следующем виде [5]

$$U_0(x, y) = \frac{5Gb}{4} \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{a^2 + b^2}.$$
 (3.2)

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Для этого подставим выражение U₀(x, y) из (3.2) в (2.3). Тогда дифференциальное уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y), \qquad (3.3)$$

$$\rho(x, y) = \frac{G}{4\pi} \left[\frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)} \right]^m \left[\left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right] \left[x^2(y^2 - b^2)^2 + \frac{G}{2(a^2 + b^2)} \right]^m \left[\left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right] \right] + \frac{G}{4\pi} \left[\frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)} \right]^m \left[\left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[\left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right] \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) \right]^m \left[(x^2 - a^2) + (y^2 - b^$$

где

Пластическое кручение стержия со степенным упрочнением материала

$$+ y^{2} (x^{2} - a^{2})^{2} \Big|^{\frac{m-1}{2}} + (m-1) \left[x^{2} (y^{2} - b^{2})^{2} + y^{2} (x^{2} - a^{2})^{2} \right]^{\frac{m-1}{2} - 1} \times \\ \times \left[x^{3} (y^{2} - b^{2})^{3} + y^{2} (x^{2} - a^{2})^{3} + 4x^{2} y^{2} (x^{2} - a^{2}) (y^{2} - b^{2}) \right] \right], \quad (3.4)$$

Для решения уравнения (3.3) при граничных условиях

$$U_1(\pm a, y) = 0,$$

 $U_2(x, \pm b) = 0$
(3.5)

умножим его на функцию $\frac{1}{b} \cos \lambda_k y dy$ (обращающуюся в нуль при $y = \pm b$) и проинтегрируем по частям получившееся выражение от

$$y = -b$$
 go $y = b$.

Получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \lambda_k^2 U_1(x) = -4\pi \rho_k(x), \qquad (3.6)$$

гле

$$U_{1,k}(x) = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} U_1(x, y) \cos \lambda_k y dy.$$
 (3.7)

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} \varphi(x, y) \cos \lambda_k y dy, \qquad (3.8)$$

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2b}.$$
(3.9)

Интеграл соответствующего однородного уравнения будет

$$C_{1,k}^{*}(x) = C_k \operatorname{sh} \lambda_k x + D_k \operatorname{ch} \lambda_k x, \qquad (3.10)$$

а общее решение уравнения (3.6), получившееся из (3.10) варьированием произвольных постоянных, можно записать в виде

$$U_{1,k}(x) = A_k \quad \operatorname{sh} \lambda_k x + B_k \operatorname{ch} \lambda_k x - \frac{8b}{2k-1} \int_{-a}^{a} \rho_k(z) \operatorname{sh} \lambda_k(x-z) dz, \qquad (3.11)$$

где Ak и Bk - произвольные постоянные.

Для определения A₂ и B₆ воспользуемся первым из граничных условий (3.5).

Из (3.7) и (3.5) следует, что

М. М. Манукян

$$(U_{1,k})_{x=-a} = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} U_1(x, y)_{x=-a} \cos \lambda_k y dy = 0,$$

(U_{1,k})_{x=a} = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} U_1(x, y)_{x=a} \cos \lambda_k y dy = 0.
(3.12)

Тогда получим

$$A_{k} = \frac{4b}{2k-1} \int_{-a}^{a} \rho_{k}(z) \frac{\sinh \lambda_{k}(a-z)}{\sinh \lambda_{k}a} dz,$$

$$B_{k} = \frac{4b}{2k-1} \int_{-a}^{a} \rho_{k}(z) \frac{\sinh \lambda_{k}(a-z)}{\cosh \lambda_{k}a} dz.$$
(3.13)

Подставляя значения A_k и B_k из (3.13) в (3.11), получим выражение $U_1(x, y)$ в следующем виде

$$U_{1,k}(x) = \frac{4b}{2k-1} \left\{ (\operatorname{sh} \lambda_k x + \operatorname{th} \lambda_k a \operatorname{ch} \lambda_k x \int_{-a}^{a} \rho_k(z) \operatorname{ch} \lambda_k z dz - (\operatorname{cth} \lambda_k a \operatorname{sh} \lambda_k x + \operatorname{ch} \lambda_k x) \int_{-a}^{a} \rho_k(z) \operatorname{sh} \lambda_k z dz - 2 \operatorname{sh} \lambda_k x \int_{-a}^{x} \rho_k(z) \operatorname{ch} \lambda_k z dz + 2 \operatorname{ch} \lambda_k x \int_{-a}^{x} \rho_k(z) \operatorname{sh} \lambda_k z dz \right\}.$$
 (3.14)

После этого из (3.7) найдем функцию U1 (x, y) по формуле

$$U_{1}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{1,k}(x) \cos \lambda_{k} y.$$
(3.15)

Если ограничиваться первыми двумя приближениями, то решение двфференциального уравнения (1.16) можно представить в следующем виде

$$U(x, y) = \frac{5G\theta}{4} \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} U_{1, k}(x) \cos \lambda_k y + 0 \ (\beta^2).$$
(3.16)

Из (1.3) и (3.16) для определения касательных напряжений получим формулы:

$$\tau_{xz} = \frac{5G\theta \left(x^2 - a^2\right) y}{2 \left(a^2 + b^2\right)} - \beta \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k U_{1,k} \left(x\right) \sin \lambda_k y + 0 \left(\beta^2\right),$$
(3.17)

$$\tau_{yz} = -\frac{5G\theta}{2} \frac{x (y^2 - b^2)}{a^2 + b^2} - \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d U_{1,k}(x)}{dx} \cos \lambda_k y + 0 \, (\beta^2).$$

Рассмотрим частный случай. Пусть *m* = 3. Тогда выраженню *p_k(x)* на основании (3.4) и (3.8) можно придать следующий вид

$$p_{k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}G}{4\pi b} \left[\frac{5G\theta}{2(a^{2}+b^{2})} \right]^{3} \left\{ \frac{a_{1}}{\lambda_{k}^{5}} x^{2} (x^{2}-a^{2}) + \frac{3a_{2}}{\lambda_{k}^{3}} (x^{2}-a^{2})^{3} + \frac{3a_{3}}{\lambda_{k}^{7}} x^{2} + \frac{a_{4}}{\lambda_{k}^{5}} (x^{2}-a^{2}) (9x^{2}-a^{2}) \right\}, \quad (3.18)$$

где

$$a_{1} = (-A_{4}^{2} + 2A_{2}^{1})(\lambda_{k}b)^{2} + A_{4}^{3},$$

$$a_{2} = (\lambda_{k}b)^{2} - A_{2}^{1},$$
(3.19)

$$a_{3} = (A_{6}^{4} - 3A_{4}^{3}) (\lambda_{k}b)^{2} - A_{6}^{5},$$

$$a_{4} = (-A_{4}^{2} + A_{2}^{1}) (\lambda_{k}b)^{2} + A_{4}^{3},$$

здесь

$$A_{k}^{n} = k \left(k - 1 \right) \cdots \left[k - (n - 1) \right].$$
(3.20)

Подставляя значение р_к(x) из (3.18) в (3.14), найдем

$$U_{1,k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}G}{\lambda_k^{11}b} \left[\frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)} \right]^3 [a_1h_1(x) + 3a_2h_2(x) + 3a_3h_3(x) + a_4h_4(x)],$$
(3.21)

где

$$h_{1}(x) = \varphi_{1}(x) + f_{1}(x) - f_{1}(a) \frac{\operatorname{ch} \lambda_{k} x}{\operatorname{ch} \lambda_{k} a}$$
$$\dot{h}_{2}(x) = \varphi_{2}(x) + f_{2}(x) - f_{2}(a) \frac{\operatorname{ch} \lambda_{k} x}{\operatorname{ch} \lambda_{k} a},$$

(3.22)

$$h_{3}(x) = \varphi_{3}(x) + f_{3}(x) - f_{3}(a) \frac{\mathrm{ch}\lambda_{k}x}{\mathrm{ch}\lambda_{k}a}$$

$$h_4(x) \equiv \varphi_4(x) + f_4(x) - f_4(a) \frac{\mathrm{ch}\lambda_k x}{\mathrm{ch}\lambda_k a},$$
$$\varphi_4(x) = (\lambda_k x)^4 - (\lambda_k x)^2 (\lambda_k a)^2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2}(x) &= (\lambda_{k}x)^{6} - (\lambda_{k}a)^{6} - 3(\lambda_{k}x)^{2}(\lambda_{k}a)^{2} \left[(\lambda_{k}x)^{2} - (\lambda_{k}a)^{8} \right] + \\ &+ A_{6}^{2}(\lambda_{k}x)^{4} - 3A_{4}^{2}(\lambda_{k}x)^{2}(\lambda_{k}a)^{2} + 6(\lambda_{k}a)^{4}, \end{aligned}$$
(3.23)

З Известна АН, серня физ.-мат. наук, № 6

$$\varphi_{3}(x) = 0,$$

$$\varphi_{4}(x) = 9 (\lambda_{k}x)^{4} - 10 (\lambda_{k}x)^{2} (\lambda_{k}a)^{2} + (\lambda_{k}a)^{4},$$

$$f_{1}(x) = A_{4}^{2} (\lambda_{k}x)^{2} - A_{2}^{1} (\lambda_{k}a)^{2} + A_{4}^{3},$$

$$f_{2}(x) = A_{5}^{4} (\lambda_{k}x)^{2} - 3A_{4}^{3} (\lambda_{k}a)^{2} + A_{5}^{5},$$

$$f_{2}(x) = (\lambda_{k}x)^{2} + A_{4}^{1},$$

$$(3.24)$$

$$f_4(x) = 9A_4^2 (\lambda_k x)^2 - 10A_2^1 (\lambda_k a)^2 - 9A_4^3.$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, для функции напряжений U(x, y) и компонентов касательных напряжении τ_{yx} и τ_{yx} при m = 3, получим следующие выражения:

$$U(x, y) = \frac{5G\theta}{4} \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \beta \frac{2G}{b} \left[\frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)} \right]^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k^{11}} [a_1h_1(x) + \frac{1}{2} + 3a_2h_2(x) + 3a_3h_3(x) + a_4h_4(x)] \cos \lambda_k y + 0 (\beta^2), \quad (3.25)$$

$$\tau_{xz} = \frac{5G\theta}{2} \frac{(x^2 - y^2)y}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2} - \frac{\beta \frac{2G}{b} \left[\frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)} \right]^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k^{10}} [a_1h_1(x) + \frac{1}{2} + 3a_2h_2(x) + 3a_3h_3(x) + a_4h_4(x)] \sin \lambda_k y + 0 (\beta^2), \quad (3.26)$$

$$\tau_{yz} = \frac{5G\theta}{2} \frac{x (y^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{\beta \frac{2G}{b} \left[\frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)} \right]^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k^{11}} [a_1h_1(x) + \frac{1}{2} + 3a_2h_2(x) + 3a_3h_3(x) + a_4h_4(x)] \cos \lambda_k y + 0 (\beta^2). \quad (3.27)$$

В качестве приложения рассмотрим кручение стержия квадратного поперечного сечения, сделанного из твердой хромоникелевой стали. Связь между деформациями и напряжениями представим в виде [1]

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{G} + \beta \sigma_i^3, \tag{3.28}$$

где[‡]

$$\begin{split} G = & 9,45 \cdot 10^{\circ} \ \kappa c/c m^{2}, \\ \beta = & 0.521 \cdot 10^{-18} \ c m^{6}/\kappa c^{3}. \end{split}$$

* Численные значения G и β взяты из вышеуказанной работы Дж. Г. Хута [1].

Пластическое кручение стержия со степенным упрочнением материала

В таблице 1 даются численные значения функции напряжений в точках $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$ и касательного напряжения т в точке x = a, y = 0 при условии $aGb = 22, 4 \cdot 10^4 \ \kappa z/c.m.$ Таблица составлена с точностью первых двух приближений.

		Таблица
Численные значения	функцин	напряжений и
Касательно	го напря:	кення
	0.0	I a la man ca ti

	0 = 0	b=0.351-10
$U\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)\kappa z/c.u$	7.73.10° a	4,90·10* a
$t(a, 0) \kappa c/cM^2$	-30.24.10*	-12,39.104

 Здесь значению β=0 соответствует решение упругой задачи, а значению β =0,921×
 × 10⁻¹⁸ соответствует решение задачи пластического кручения со степенным упрочнением материала.

Из этой таблицы следует, что в этом случае абсолютное значение касательного напряжения при пластическом кручении со степенным упрочнением материала в 2,5 раза меньше, чем при упругой деформации.

Наконец отметим, что численные значения функции напряжений и касательного напряжения очень близки к численным значенням для этой же задачи, полученным Дж. Г. Хутом [1] сеточным методом,

изпример, $U\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ отличается на 2,5%, a $\tau(a, 0)$ — на 4%,

Ипститут математики и механики АН Армянской ССР Ереванский госуниверситет

Поступила 4 VII 1960

Մ. Մ. Մանուկյան

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՀԱՏՈՒՅՔՈՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՆՅՈՒԹԻ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԱՄՐԱՊՆԴՄԱՄԲ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Վերջին ժամանակներս կատարված էջսպերիմենտալ հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ մի քանի նյութերի համար, ինչպես օրինակ, կրոմոնիկելային մետաղի [1], ալլումինային ձուլվածքի [4] և ալլն, լարումների և դեֆորմացիաների միջև կապն արտահայտվում է՝

$$\varepsilon_l = \alpha \sigma_l + \beta \sigma_l^m \quad (m > 1) \tag{1.15}$$

where a_{min} and $a = \frac{1}{G}$, G-b where f and f an

են, որոնք բնորոշում են դեֆորմացիայի և լարումների կորերի շեղման ասաիճանը գծալին օրենքից։

ծերկա աշխատունկան մեջ ըննարկվում է ուղղանկլուն հատույթով պրիզմատիկ ձողի պլաստիկական ոլորման խնդիրը, երբ դեֆորմացիայի և լարումծերի ինտենսիվությունների միջև դոլություն ունի (1.15) տեսքի կապ։

Խնդրի լուծումը բերվում է էլիպտիկ տիպի ոչ գծային դիֆերենցիալ ճավասարմանը, որի լուծման ճամար օդտադործվում է [3] աշխատության մեջ շարադրված մեթոդը։ Աշխատության վերջում ըննարկվում է թվային օրինակ

ЛИТЕРАТУРА

- Huth H. J. A note on plastic torsion. Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, №3, 1955, page 432-434.
- 2. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
- Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля в условиях неустановившейся ползучести. "Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение*, № 6, 1959, 82—92.
- Trifan D. On the plastic bending of circular plates under uniform transverse loads. .Quarterly of Appl. Math.*, vol. VI, № 4, 1949, page 417-427.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.-Л., 1950.

20340405 006 9580563055666 0409605035 553540966 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зрарца-ишрыйшт, артагранайы XIII, No 6, 1960 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Проникание ударного давления в несжимаемую жидкость

Пусть в некоторой точке *О* границы несжимаемой жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость, возникло некоторое давление, которое затем распространяется по границе с постоянным профилем за фронтом. Выберем ось *Ох* по невозмущенной поверхности полуплоскости, ось *Оу* направим вглубь ее. Выберем безразмерные коор-

динаты $\xi = \frac{x}{Vt}$, $\eta = \frac{y}{Vt}$, где t = время, V— постоянная скорость движения фронта давления p. Тогда на поверхности жидкости $\eta = \eta(\xi)$ имеем граничное условие

$$p = \begin{cases} p_1 & |\xi| < 1, \\ 0 & |\xi| > 1. \end{cases}$$
(1)

Поскольку безразмерный потенциал жидкости $\bar{\varphi} = \varphi/V^{2}t$ удовлетворяет уравнению Лапласа, его можно записать в виде логарифмического потенциала

$$\overline{\varphi}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi') d\xi' \ln \frac{1}{\sqrt[n]{(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2}}, \qquad (2)$$

здесь $\eta' = \eta'(\xi')$ -уравнение поверхности жидкой среды.

Используя (1), (2), интеграл Лагранжа и предельные значения для производных потенциала (2) [1], граничное условие на возмущенной поверхности можно записать в виде

$$\begin{split} & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\xi'\right) d\xi' \ln \frac{1}{(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2} - \\ & -\xi \left[\pi q\left(\xi\right) \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\xi'\right) d\xi' \frac{1}{\left[(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2\right]} 2\left(\xi-\xi'\right) \right] - \\ & -\eta \left\{ -\pi q\left(\xi\right) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\xi'\right) d\xi' \frac{1}{\left[(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2\right]} 2\left(\eta-\eta'\right) \right\} + \end{split}$$

А. Г. Багдоев

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \pi q\left(\xi\right) \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\xi'\right) d\xi' \frac{1}{\left[\left(\xi' - \xi\right)^{2} + \left(\eta' - \eta\right)^{2}\right]} 2\left(\xi - \xi'\right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ -\pi q\left(\xi\right) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\xi'\right) d\xi' \frac{1}{\left[\left(\xi' - \xi\right)^{2} + \left(\eta' - \eta\right)^{2}\right]} 2\left(\eta - \eta'\right) \right\}^{2} = \frac{\left\{ \frac{p_{1}}{\varrho V^{2}} \quad |\xi| < 1, \\ 0 \quad |\xi| > 1. \end{cases}$$
(3)

Для определения η (ξ) используем условия движения поверхности

$$-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}} + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}} = \frac{\eta-\xi\frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}.$$
 (4)

Уравнения (3) и (4) представляют систему для определения $q(\xi)$ и $\eta(\xi)$. Для решения этой системы интегродифференциальных уравнений ищем неизвестные функции в виде

$$\eta = \begin{cases} \sum_{0}^{\infty} c_{k} |\xi|^{k} & |\xi| < 1, \\ \sum_{0}^{\infty} d_{k} |\xi|^{-k-1} & |\xi| > 1, \end{cases}$$
$$q = \begin{cases} \sum_{0}^{\infty} a_{k} |\xi|^{k} & |\xi| > 1, \\ \frac{b_{0}}{|\xi|} + \sum_{0}^{\infty} \frac{b_{k}}{|\xi|^{k+2}} & |\xi| > 1. \end{cases}$$

(5)

Из условия сходимости интегралов следует, что b_0 должно равняться нулю. Из четности $\eta_1(\xi)$ и $q_1(\xi)$ имеем $a_1 = c_1 = 0$. Подставляя (5) в (3) и (4), разлагая эти уравнения в ряд Лорана относительно $|\xi|$ и приравнивая коэффициенты, имеем бесконечную систему нелинейных уравнений. В частности, для слагаемого с нулевой степенью $|\xi|$, приближенно имеем

$$\begin{split} a_0 2 + a_2 \frac{1}{9} 2 + a_0 \Big[-\ln\left(1 + c_2^2\right) + 2 - 2 \frac{1}{c_2} \arctan c_2 \Big] - \\ - a_2 \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{3} \ln\left(1 + c_2^2\right) - \frac{2}{c_2^2} \left(c_2^2 \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{c_2} \arctan c_2 \right] + \\ + c_0 \pi a_0 + c_0 \Big[- \frac{a_2}{c_2} + \frac{a_2}{c_2} \ln\left(1 + c_2^2\right) \Big] + \end{split}$$

Проникание ударного давления в несжимаемую жидкость

$$+ \frac{1}{2} \left\{ c_0 \pi a_0 + c_0 \left[-\frac{a_2}{c_2} + \frac{a_2}{c_2} \ln \left(1 + c_2^2 \right) \right] \right\}^2 = \frac{p_1}{\rho V^2},$$
(6)
$$a_2 2 + a_2 \frac{1}{3} 2 = 0,$$
$$\pi a_0 + \frac{a_2}{c_2} - \frac{a_2}{c_2} \ln \left(1 + c_2^2 \right) = c_0,$$
$$0 = d_0,$$
$$d_0 = c_0 + c_2.$$

Последнее уравнение (6) выражает непрерывность функции η (ξ). Решение (6) не представляет трудностей. Таким образом, можно приближению найти уравнение поверхности и потенциал возмущенного движения. Бесконечную систему (3) и (4) нужно решать с применением счетно-электронных машин. Аналогично решается пространственная задача для давления в несжимаемой жидкости.

В случае, когда граничное условие задано в виде произвольной функции от §, решение проводится точно так же.

Для аналитического граничного условия можно рассматривать комплексный радиус вектор z точки поверхности как функцию лагранжевой координаты на поверхности s

$$\frac{z}{Vt} = z_1 = z_1 \left(s_1 \right) = z_1 \left(\frac{s}{Vt} \right).$$

Теперь, с помощью уравнений движения и условия автомодельности, получим

$$s_1^2 \frac{\partial}{\partial s} |z_s| = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial s}$$

Итак, граничное условие для давлення даст условие для $|z_s|$. Если аналитически продолжать функцию $s_1 = s_1(z_1)$ в область комплексных значений $w = w(z_1)$ и ввести функцию $\ln w'(z_1) = \ln |w'(z_1)| - -i\alpha(z_1)$, где $\alpha(z_1)$ на поверхности представляет угол наклона касательной поверхности к осн Ox, легко найти угол $\alpha(z_1)$ и уравнение поверхности в виде ядра Шварца

$$\alpha(z_{1}) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{-\ln |z_{1s_{1}'}| ds_{1}'}{s_{1}' - s_{1}},$$

$$\beta = \int \cos \alpha(z_{1}) ds_{1}, \qquad \eta = \int \sin \alpha(z_{1}) ds_{1}.$$

Для аналитических степенных граничных значений $p(s_1)$ с большим показателем степени решение аппроксимирует истинное распределение давления.

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступила 10 111 1960
K. A. Buggabd

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիցուը որևէ ճնշում տարածվում է անսեղմելի Տեղուկով լցված կիսատարածունյան մակերեսով։ Ընդունելով շարժումը ավառմոդելային, լոդարինմական պոտենցիայի և շարըերի վերլուծման միջոցով որոշվում է Տեղուկի դրդուված շարժումը։

Վերջում, Շվարցի կորիզի օգնուԹլամբ ստացվում է խնդրի ճշգրիտ լուծումը անալիաիկ եզրալին ճնշման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н: М. Теория потенциала. Гостехиздат, М., 1953.

2113414416 UUR 915011050116011 ЦЧЦАВИТИВЕ БОДВИЦАНИ ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зрарца-ишрыйша. араппрульбар XIII, № 6, 1960 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. Саноян, М. Г. Хубларян

Теоретическое и экспериментальное исследование шахтного водосброса типа "маргаритка"

При проектировании шахтного водосброса плотины Сарно в бассейне реки Меккерра, Алжирским комитетом больших плотин был предложен новый тип водосброса, имеющий в плане вид цветка-маргаритки*, общий вид которого показан на фиг. 1. Как показали экспериментальные исследования [1], вышеупомянутый тип водосброса имеет ряд преимуществ, как например, значительно уменьшает толщину переливающегося слоя воды за счет соответствующего увеличения сливного фронта, уменьшает объем строительных работ, тем самым удешевляет стоимость головного узла, а также улучшает гидравлическую картину над водосбросом.



Фиг. 1.

Гидроэнергопроектом СССР [2] было рекомендовано применять. этот тип водосброса при проектировании гидроузлов в СССР.

В связи с постройкой Татевской гидроэлектростанции в Армянской ССР, учитывая отсутствие какого-либо теоретического метода для получения очертания водосброса типа "маргаритка", в институте Энергетики и Гидравлики АН Армянской ССР проводились как теоретические, так и экспериментальные исследования такого водосброса.

Подробное описание и схтма водосброса типа "маргаритка" приводятся в.
 и [2].

§ 1. Теоретическое очертание шахтного водосброса типа "маргаритка"

Целью теоретического исследования являлось определение очертания "маргаритки" в плане. Для того, чтобы обеспечить максимальный расход через водосброс, очевидно, его очертание надо выбирать так, чтобы в каждой его точке вектор скорости был перпендикулярен к контуру.

Решается плоская задача, рассматривается бесконечно большой водоем с идеальной, несжимаемой жидкостью.

Задача решается методом "особенностей" с помощью теории функции комплексного переменного. Каждый из лотков маргаритки принимается как отрицательный источник (сток).

Допустим, что имеем *п* источников с одинаковой мощностью *m*, расположенных по окружности радиуса *a* (фиг. 2).

Обозначим комплексную координату любой точки М пространства относительно начала координат через z, а координаты относи-



тельно отдельных источников через z_k (k = 1, 2, 3, ..., n). Тогда комплексный потенциял движения $w = \varphi + i\psi$ (где φ потенциал скоростей, а ψ функция тока) выразится следующим образом [3]

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^n \ln z_k, \quad (1.1)$$

или замечая, что

$$z_{k} = z - ae^{i\frac{2\pi k}{n}} = \rho e^{i\theta} - ae^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad (1.2)$$

согласно (1.1), будем иметь

$$w = \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\rho e^{i\theta} - a e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right) = \frac{m}{2\pi} \ln\prod_{k=0}^{n-1} \left(\rho e^{i\theta} - a e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right), \quad (1.3)$$

где р — модуль, а в — аргумент z.

Для определения потенциала скоростей с выделим действительную часть w.

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln \prod_{k=0}^{n-1} \left[\rho \left(\cos \theta + i \sin \theta \right) - a \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \right] =$$

= $\frac{m}{2\pi} \ln \prod_{k=0}^{n-1} \left(\rho \cos \theta - a \cos \frac{2\pi k}{n} \right) + i \left(\rho \sin \theta - a \sin \frac{2\pi k}{n} \right).$ (1.4)

Если обозначить выражение под знаком произведения через

$$\chi_{k} = u_{k} + i\upsilon_{k} = r_{k}e^{i\theta_{k}}, \qquad (1.5)$$

где

Исследование шахтного водосброса типа «Маргаритка» $r_k = |\chi_k|, \quad 0_k = arg\chi_k.$

получим

$$u_{k} = \rho \cos \theta - a \cos \frac{2\pi k}{n},$$

$$v_{k} = \rho \sin \theta - a \sin \frac{2\pi k}{n},$$
 (1.6)

43

$$z_{k} = \sqrt{u_{k}^{2} + v_{k}^{2}} = \left[\varphi^{2} + a^{2} - 2\rho a \cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) \right]^{1/2},$$

$$\theta_{k} = \arctan \left[\frac{\rho \sin \theta - a \sin\frac{2\pi k}{n}}{\rho \cos \theta - a \cos\frac{2\pi k}{n}} \right].$$
(1.7)

Учитывая (1.5), (1.6) и (1.7), выражение для комплексного потенциала (1.4) приводим к виду

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln \prod_{k=0}^{n-1} r_k \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\theta_k} = \frac{m}{2\pi} \ln e^{i \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k} \prod_{k=0}^{n-1} r_k = \frac{m}{2\pi} \left(i \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k + \ln \prod_{k=0}^{n-1} r_k \right).$$
(1.8)

Согласно (1.8) для потенциала скоростей с будем иметь следующее выражение

$$\varphi = \pi. \mathbf{u}. \mathbf{w} = \frac{m}{2\pi} \ln \prod_{k=0}^{n-1} r_k = \frac{m}{4\pi} \ln \prod_{k=0}^{n-1} \left[\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) \right].$$
(1.9)

Имея в виду, что [4]

$$\prod_{n=0}^{n-1} \left[p^2 + a^2 - 2p \, a \cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) \right] = p^{2n} + a^{2n} - 2p^n a^n \cos n\theta,$$

из (1.9) получим

$$\varphi = \frac{m}{4\pi} \ln \left(\rho^{2n} + a^{2n} - 2\rho^n a^n \cos n\theta \right). \tag{1.10}$$

Приравнивая потенциал скоростей к постоянной ($\varphi = \text{const}$), получим семейство линий равных потенциалов. Эти линии будут служить очертаниями маргариток, т. к. скорости в точках, расположенных на этих линиях будут перпендикулярны к ним. Таким образом, согласно (1.10) уравнение маргаритки представится следующим образом

$$a^{2n} + a^{2n} - 2p^n a^n \cos n\theta = \text{const.}$$
 (1.10')

Включая a²ⁿ в значение const и разделив полученное уравнение на a²ⁿ, будем иметь В. Г. Саноян, М. Г. Хубларян

$$a^{2n}-2a^n\cos n\theta=C,$$
 rge $a=\frac{\rho}{a}$. (1.11)

Решив уравнение (1.11) относительно соз пв, получим

$$\cos n\theta = \frac{\alpha^{2n} - C}{2\alpha^n}, \qquad (1.12)$$

представляющее уравнение очертания маргаритки в общем случае, которым в дальнейшем будем пользоваться для ее построения.

Перейдем к определению функции тока ф.

Согласно (1.8) и второму выражению из (1.7), будем иметь

$$\psi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \frac{m}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{\rho \sin \theta - a \sin \frac{2\pi k}{n}}{\rho \cos \theta - a \cos \frac{2\pi k}{n}}\right). \quad (1.13)$$

Но для получения более простого выражения ф, воспользуемся следующими известными соотношениями между ф и ф

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}. \quad (1.14)$$

Отсюда имеем

$$\psi = \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \, d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \, d\theta \right) = \int \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \, d\theta - \frac{\partial \varphi}{\alpha \partial \theta} \, d\alpha \right) \cdot \tag{1.15}$$

Интегрирование производим по следующему пути: сначала от начала координат идем по оси $\theta = 0$ до точки (α ; 0), затем от точки (α ; 0) до точки (α ; θ). Тогда последнее выражение примет вид

$$\psi = \int_{0}^{a} -\frac{\partial \varphi \left(\alpha; 0\right)}{\alpha \partial \theta} d\alpha + \int_{0}^{a} \frac{\partial \varphi \left(\alpha; \theta\right)}{\partial \alpha} d\theta, \qquad (1.16)$$

или принимая во внимание, что при $\theta = 0$ $\frac{1}{aa} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = v_0 a = 0$ (т. к. при $\theta = 0$ на условия симметрии $v_0 = 0$), получим

$$\psi = \int_{0}^{\theta} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \, d\theta. \tag{1.17}$$

Вычисляя производную $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ по (1.10) и подставляя в (1.17), после интегрирования будем иметь

$$\frac{4\pi\psi}{m} = \left\{ n\theta - 2 \arctan \left[\left(\frac{1+\alpha^n}{1-\alpha^n} \right) tg \frac{n\theta}{2} \right] \right\} \quad \text{для} \quad \alpha < 1 \tag{1.18}$$

н

$$\frac{4'\pi\psi}{m} = \left\{ n\theta + 2 \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}} \right) \operatorname{tg} \frac{n\theta}{2} \right] \right\} \quad \text{для} \quad \alpha > 1.$$
 (1.19)

Исследование шахтного водосброса типа «Маргаритка»

В выражениях (1.18) и (1.19) левые части приравнивая постоянной с и решая полученные уравнения относительно а, получим следующие уравнения для определения линий тока

$$\alpha = \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{n0-C}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{n0}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{n0-C}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{n0}{2}}\right]^{1/n} \cdot \operatorname{gag} \alpha < 1 \quad (1.20)$$

H

$$\alpha = \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{C+2\pi-n\theta}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{n\theta}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{C+2\pi-n\theta}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{n\theta}{2}}\right]^{1/n} \quad \text{для} \quad \alpha > 1. \quad (1.21)$$

Для иллюстрации расчета по полученным формулам, положим, что мы хотим найти семейство очертания четырехлоточных маргариток и соответствующие им линии тока.

В данном случае полагая n = 4, a = 1, а следовательно $\alpha = \rho$, и задавая в уравнении (1.12) для *С* различные значения, получаем различные очертания четырехлоточной маргаритки.



Эти очертания представлены на графике фиг. 3 (жирные линии). На том же рисунке проведены линии тока течения, рассчитанные по формулам (1.20) и (1.21).

В практических случаях обычно задаются либо внутренним и внешним радиусами маргаритки (назовем условно первым вариантом), либо внутренним радиусом и периметром маргаритки (назовем вторым вариантом). Для решения практических задач, уравнение (1.12) напишем в следующем виде

$$\cos n\theta = \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n} - C}{2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{n}},$$
 (1.22)

где через *n*, как уже было отмечено выше, обозначено количество лотков. Первоначально для обоих вариантов *n* задается с таким расчетом, чтобы при заданной толщине переливающегося слоя минимальная



ширина b (фиг. 4) получившегося очертания маргаритки была не меньше заданной (из условия захлебывания или из конструктивных соображений). Параметры C и a, входящие в (1.22), определим для задачи первого варианта так, чтобы маргаритка имела заданные внутренний и внешний радиусы.

Обозначим эти радиусы, соответственно, через ρ_{\min} и ρ_{\max} , а их отношения к *а* соответственно через α_{\min} и α_{\max} . Тогда из (1.11) определив производную $\frac{d\alpha}{d\theta}$ и приравняв ее нулю, получим, что α_{\min} соответствует значению $\theta = \frac{2\pi (k+1)}{n}$, а α_{\max} — значению $\theta = \frac{2\pi k}{n}$, где k — целые натуральные числа (k=0, 1, 2, 3...). Исходя из сказанного и уравнения (1.12), будем иметь

2²1 - C

$$-1 = \frac{a_{\min} - C}{2a_{\min}^a},\tag{1.23}$$

$$1 = \frac{\alpha_{\max}^{2n} - C}{2\alpha_{\max}^{n}}$$
 (1.24)

Отсюда

$$\alpha_{\min} = (\sqrt{1+C}-1)^{1/n}, \qquad (1.25)$$

$$\alpha_{\max} = (\sqrt{1+C}+1)^{1/n}$$
 (1.26)

нли

$$\frac{\rho_{\min}}{a} = (\sqrt{1+C}-1)^{1/n}, \qquad (1.25')$$

$$\frac{\rho_{\max}}{a} = (\sqrt{1+C}+1)^{1/n}.$$
 (1.26')

Исследование шахтного водосброса типа «Маргаритка»

При известном *n* и заданных р_{тіп} и р_{тах} из уравнений (1.25') и (1.26') определяем *a* и *C*, а по уравнению (1.22) строим очертание маргаритки. Таким образом, задача первого варианта разрешена.

Для решения задачи второго варианта приведем формулу для. определения периметра (длины сливного фронта) L маргаритки

$$L = 2n \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2} \, d\rho \qquad (1.27)$$

нлн

$$L = 2na \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{1 + \alpha^2 \left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)^2} d\alpha. \qquad (1.27')$$

Определив из уравнения (1.12) $\frac{d\theta}{d\alpha}$ п подставив найденное значение в (1.27'), после преобразований получим

$$\frac{L}{2naVC+1}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{da}{\sqrt{1-\left(\frac{a^{2n}-C}{2a^{n}}\right)^{2}}}.$$
 (1.28)

Интеграл в (1.28) в конечном виде не берется.

Учитывая, что выражение $\frac{a^{2n}-C}{2a^n} < 1$, подынтегральную функцию можно разложить в ряд по степеням этого члена и почленно интегрировать. Когда значение $\frac{a^{2n}-C}{2a^n}$ близко к единице, ряд сходится очень медленно из-за чего для таких значений мы прибегаем к особому способу. Часть кривой, начиная от координаты $a_0 = \frac{p_0}{a}$, с достаточной степенью точности, заменяем дугой окружности (фиг. 4)*. Тогда уравнение (1.28) примет вид

$$\frac{L}{2na\sqrt{C+1}} = \int_{a_{\min}}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha^{2n} - C}{2\alpha^n}\right)^2}} + l,$$
 (1.29)

где *l*—длина дуги окружности с раднусом r_o, заменившей определенную часть очертания маргаритки.

Ход решения следующий. Сперва строим очертаные маргаритки в безразмерных координатах (в координатах, отнесенных к а) по уравнению (1.12), одновременно полагая $C = 0^{**}$.

 Возможность такой замены доказывается и теоретически, по ввиду громоздкости выкладок вывод здесь не приводится.

** Величина С для маргаритки очень мало отличается от нуля.

На начерченной кривой маргаритки определяем точку с координатой а₀, от которой кривую можно считать дугой окружности.

Задавая р_{тіп} и L, из (1.25') и (1.29) определяются а и C, а имея их значения по (1.22) строится очертание маргаритки.

Задача первого варианта решается сравнительно легче, чем задача второго варианта. Для примера решим задачу второго варианта.

§ 2. Пример расчета

Даны внутренний радиус $\rho_{\min} = 2,85 \ \text{м}$ и длина маргаритки $L = 62,80 \ \text{м}$ (эти данные соответствуют обыкновенному круглому шахтному водосбросу с радиусами шахты $r = 2,60 \ \text{м}$ и воронки $R = 10,00 \ \text{м}$). Требуется построить очертание маргаритки с четырьмя лотками $(n = 4)^*$.

Сперва построим очертание маргаритки в безразмерных координатах (в координатах отнесенных к a) по уравнению (1.12), одновременно полагая C = 0.

Из начерченной кривой маргаритки определяем точку с координатой со от которой кривую можно считать дугой окружности.

Из уравнения (1.25') С выражаем через а, полагая n = 4

$$C = \left[\left(\frac{2,85}{a} \right)^4 + 1 \right] - 1.$$

Это значение С подставляем в левую часть (1.29), а правую разбиваем на две части.

Имея ввиду, что в данном случае (см. фиг. 4) $\alpha_0 = 0.965$ и l = 0.432 (что соответствует длине четверти окружности радиуса $r_0 = 0.275$) выражение (1.29) примет вид

$$\frac{62,80}{2\cdot 4\cdot a\left[\left(\frac{2,85}{a}\right)^4+1\right)}-0,432=\int_{\frac{2,85}{a}}^{0,965}\frac{da}{\sqrt{1-\left(\frac{a^8-C}{2a^4}\right)^2}}.$$

Теперь подынтегральную функцию разлагаем в ряд

$$\left[1-\left(\frac{\alpha^8-C}{2\alpha^4}\right)^2\right]^{-1/a} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^8-C}{2\alpha^4}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{\alpha^8-C}{2\alpha^4}\right)^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{\alpha^8-C}{2\alpha^4}\right)^6 + \cdots$$

в котором С заменяем его известным значением в функции от а и почленно интегрируем. После подстановки значений верхнего и нижнего пределов интегрирования получаем трансцендентное уравнение, левая и правая части которого становятся зависимыми только от а

 Маргаритка с такими данными применена как проектный вариант при проектировании Татевской ГЭС в Армянской ССР. Исследование шахтного водосброса типа «Маргаритка»

$$\begin{aligned} \frac{7,85}{a\left[\left(\frac{2.85}{a}\right)^4+1\right]} &-0.432 = \left\{0.965 + \frac{1}{72}\left(0.965\right)^9 - \frac{1}{4}\left(0.965\right)\left[\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + \frac{1}{2}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{128} \cdot 0.965\left[\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^4\right]^3 + \frac{1}{128} \cdot 0.965\left[\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^4\right] + \frac{1}{128} \cdot 0.965\left[\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^4\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8 + 2\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{2.85}{a}\right)^8\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{2.8$$

$$+\frac{3}{128}\left(\frac{12,85}{a}\right)\left[\left(\frac{2,85}{a}\right)^8+2\left(\frac{2,85}{a}\right)^4\right]^4\right].$$

Это уравнение решается подбором. Величине а задаются значения до тех пор, пока левая и правая части становятся равными друг другу.

Результаты вычислений приведены в таблице 1.

	аолица 1			
2 B .M	Левая часть	Правая часть	Разность	
7,30	0,618	0,598	0.020	
7,40	0,603	0.627	0.024	
7.35	0,610	0,610	0,000	

4 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 6

Из таблицы видно, что a=7,35 м. Имея a, сразу из (1.25') определяется C = 0,04598. Тогда по уравнению (1.22), в котором параметры a и C уже известны, вычисляются координаты кривой маргаритки. Координаты очертания маргаритки приведены в последних двух графах таблицы 2.

Таблина 2

₩ /11	a	cos 40	0	$\overline{x} = \alpha \cos \theta$	$\overline{y} = \alpha \sin \theta$	$x = a\bar{x}$	$y = a\overline{y}$
1	0,338	-1,000	45°00'	0,274	0.274	2.018	2,018
2	0,400	-0,882	37°58'	0,315	0,246	2,320	1,810
3,	0,450	-0,537	30°37'	0,387	0.229	2,840	1,680
4	0,500	-0,334	27°22'	0,444	0,230	3,260	1,690
5	0,550	-0,294	25°27'	0,497	0,236	3,650	1.730
6	0,600	-0.111	24°06'	0,547	0,245	4,025	1,800
7	0,700	0.025	22°08′	0,698	0,264	4,770	1.940
8	0,800	0.149	20°21'	0,750	0,278	5,520	2,040
9	0,900	0.292	18°15′	0,855	0,282	6,280	2,070
0	1,000	0,477	15°22'	0,964	0,265	7,080	1,950
1	1,100	0,713	11°08'	1,080	0,221	7,940	1.560
2	1,140	0,828	8°32'	1,128	0,169	8,300	1.240
3	1,180	0,958	4°13′	1,175	0.087	- 8,650	0,637
4	1,193	1,000	0°00′	1.193	0,000	8.750	0,000

Аналогичным образом можно построить очертания маргариток, имеющих любое количество лотков. На фиг. 5, наряду с обыкновенным круглым шахтным водосбросом, представлены очертания маргариток с количеством лотков равным трем, четырем и шести. Все они имеют одинаковый периметр ($L = 62,8 \, \text{м}$).



Фнг. 5.

Расчет и координаты маргариток с тремя и шестью лотками здесь не приводятся из-за экономии места.

§ 3. Экспериментальная проверка маргаритки с четырьмя лотками

В гидравлической лаборатории Института энергетики и гидравлики АН Армянской ССР была построена и экспериментально исследована маргаритка с четырьмя лотками, которая, как отмечалось выше, предусматривалась для Татевской ГЭС.

Отвод воды производился вертикальным шахтным водосбросом, который в меридиональном сечении имел как прямолинейное, так и криволинейное очертание.

На графике фиг. 6 показана зависимость толщины переливающегося слоя H от расхода Q. Величины приведены к их натурному



значению. Как видно из кривой, с увеличением расхода толщина переливающегося слоя монотонно растет, явление захлебывания ни при каких расходах не обнаруживается (расчетный расход равен 216 м³/сек, максимальный — 275 м³/сек).

Модельные исследования маргаритки показали, что линии тока практически были ортогональны к сливному фронту маргаритки. На фото фиг. 7 дан общий вид течения, снятого сверху. Как видно из фото, некоторое отклонение от ортогональности замечается. Это можно объяснить тем, что во-первых подходные скорости все же влияли на общее течение ($v = 25 \ cm/cek$). во-вторых непосредственно на кромке водослива траектории частиц жидкости становятся незаметными и, наконец, на отклонение от ортогональности может влиять также принятая схема расчета, где вместо действительного течения было принято плоское.

Интегральным доказательством того, что линии тока в целом были ортогональны к очертанию маргаритки, может служить тот факт, что коэффициент расхода для маргаритки с тонкой стенкой



Фиг. 7.

при расчетном расходе получился m = 0,495, что почти не отличается от такового для прямолинейного водослива с тонкой стенкой.

Институт энергетики и гидравлики АН Армянской ССР

Поступила 6 VI 1960

4. 9. Umfinjati, U. 2. Iompjarjati

«ՄԱՐԳԱՐԻՏԿԱ» ՏԻՊԻ ՇԱԽՏԱՅԻՆ ՋՐՀԵՌԱՑԻ ՏԵՍԱԿԱՆ ԵՎ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

«Մարդարիակա» նոր տիպի չախտալին չրչնռացը (ֆիդ. 1) ունի մի շարջ առավնլու վուններ, ինչպես, օրինակ, նկատելի չափով փոքրացնում է Թափվող շերտի հաստու վունը ի հաշիվ չրթափալին ճակատի երկարացման, պակասեցնում է շինարարական աշխատանջների ծավալը, ինչպես նաև լավացնում է հիդրավլիկական պատկերը չրչեռացի վրա։

Տանևի հիդրոէլեկտրակալանի կառուցման կապակցունլամը Էներդետիկալի և հիդրավլիկալի ինստիտուտում կատարվել են այդ կառուցվածքի տեսական ու փորձնական հետաղոտունլուններ։

Տեսական հետաղոտունկան նպատակն է եղել որոշել «մարդարիտկա»-ի պլանալին եղրագիծը։ Ելնելով կառուցված ջի մաջսիմալ ջրանողունակունլունից՝ ջրհեռացի պլանալին եղրագիծը որոշված է ալն պալմանից,՝որպեսզի նրա լուաջանչլուր կետում արադունյան վեկտորը ուղղահալաց լինի ալգ կետով եղրագծին տարված շոշափողին։ Բնական է, որ արդալիսի նգրագիծը՝ ջրենռացով

Դիտարկվում է անսահման մեծ ջրամբար՝ անսեղմելի-իդեալական հեղուկով, և լուծվում է հարթ խնդիր:

«Մարդարիակա»-լի լուրաջանչլուր թեը գիտվում է որպես բացասական աղբյուր։

Շարժման կոմպլեջս պոտենցիալը (W) արտահալտվում է (1.1) տեսջով։ Անջատելով իրական և կեղծ մասերը՝ ստացվում է (1.8) արտահալտությունը, որտեղ իրական մասն իրենից ներկալացնում է արադությունների պոտենցիալը (φ), իսկ կեղծ մասը՝ հոսջի ֆունկցիան (ψ)։

φ=const=C դծերը ծառալում են որպես «մարդարիակա»-լի պլանալին եզրագծեր։ Այդ կորերի հավասարունն արտահայտվում է (1.12) բանաձևով։

ζπυξή ֆունկցիայի համար ստացված են (1.20) և (1.21) արտահայտու-[σլունները: (1.12), (1.20) և (1.21) հավասարունների միջոցով որոշված է քառանե «մարդարիտկա»-լի եզրադժերի ընտանիջը, որոնք պատկերված են ֆիգ. 3-ի վրա (հոծ դծերով). այնտեղ էլ ցույց են տրված նրանց համապատասլսան հոսքի դծերու

Հոդվածում բերվում է պրակտիկ խնդիրների լուծման երկու դեպը, երբ արված են «մարդարիակա»-լի՝

m) supply a moumphy smamiltuter.

a) ջրնեն շատաղկեսն ր առանագեգն,

Առաջին դեպջում (1.25') և (1.26') արտահայտությունների միջոցով որոշվում են 8-ն և C-ն, իսկ ըստ (1.22) հավասարման կառուցվում է «մարդարիտկա»-լի եզրադիծը. երկրորդ դեպջում ըստ (1.25')-ի և (1.29)-ի որոշվում են 8-ն ու C-ն և «մարդարիտկա»-լի (1.22) հավասարման միջոցով կառուցվում է նրա եզրադիծը։

Հոդվածում բերված է քառանեւ «մարդարիտկա»-լի հաշվման օրինակ, որն ընդունված է որպես Տանեի հիդրոէլնկարակալանի նախագծալին վարիանա։

Ինստիտուտի լաբորատորիալում փորձնական ուսուննասիրության է ենթարկվել քառանեւ «մարդարիտկա»-ն, որի եզրադիծը կառուցվել է վերուիչյայ տեսական եղանակով։

Ֆիդ. 6-ում ցույց է տրված Թափվող շերտի հաստության և ելքի կախվածության կորը, իսկ ֆիդ. 7-ում՝ հոսանքի ընդհանուր պատկերը։

Ինչպես ցուլց տվին մոդելալին հետաղոտունլունները, հոսքի դծերը պրակտիկորեն ուղղահալաց էին «մարդարիտկա»-լի եզրադծին (այդ երևում է ֆիդ. 7-ից), ելքի դործակիցն ստացվում է m=0,495 (հաշվարկալին ելքի դեպgnւմ), որը համարլա Թե չի տարբերվում բարակ պատով ուղղադիծ չրնափի ելքի դործակցից։

ЛИТЕРАТУРА

1. Le barrage du Sarno. Comite algerien des grande barrages, 1951.

Гидроэнергопроект. Информационное сообщение, № 96, М., 1957.

- Кочик Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. І, ГИТТЛ, М.-Л., 1948.
- Рыжик И. М. и Градишейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.



24344446 000 958058305666 4449605485 56964496 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Марца-бырьбыть, арыптериссые XIII, No 6, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

И. И. Гольдман

К теории тормозного излучения с учетом многократного рассеяния и оценка точности метода Фоккер-Планка

В работах [1-3], посвященных теоретическому изучению тормозного излучения в крайне релятивистском случае в среде, интегродифференциальное уравнение для функции распределения электронов решается в приближении Фоккер-Планка. Как известно, это приближение состоит в разложении $w(\vec{v'}) - w(\vec{v})$ под знаком интеграла в кинетическом уравнении

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial w}{\partial \vec{r}} = n \int \sigma(\vec{v} - \vec{v'}) \left[w(t, \vec{r}, \vec{v'}) - w(t, \vec{r}, \vec{v}) \right] d\vec{v'}$$
(1)

по степеням $\vec{v} - \vec{v}$ в ряд Тейлора, причем удерживаются члены вплоть до квадратичных в $\vec{v} - \vec{v}$. Получаемое в результате приближенное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка относительно \vec{v} . Такой способ рассмотрения имеет, однако, тот недостаток, что в предельном случае среды малой плотности приводит к неправильному результату (отличающемуся приблизительно в два раза от формулы Бете-Гайтлера). Мигдалу [3] удалось остроумно преодолеть эту трудность и интерполируя в окончательном результате под знаком логарифма получить формулы имеющие логарифмическую точность.

В настоящей работе исследуется непосредственно интегральное уравнение (1) без перехода к приближению Фоккера-Планка. Задача после ряда преобразований сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Анализ этого уравнения подтверждает процедуру Мигдала; в то же время оказывается возможным несложное интегрирование, уточняющее результаты.

После перехода к приближению малых углов и выполнения преобразования Фурье по координатам, задача сводится к решению следующего уравнения (обозначения см. [4])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{i\omega}{2} \left(\lambda^2 + \theta^2 \right) u = n \upsilon \int \sigma \left[u' - u \right] d\vec{\theta'}, \tag{2}$$

причем

$$u = \delta \left(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0 \right) \quad (t \to 0). \tag{3}$$

Тогда энергия, излучаемая в интервале частот dw в единицу времени, выразится через и следующим образом

$$\dot{E}_{\omega} d\omega = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi^2 c} d\omega Re \int_{0}^{\infty} td \int d\vec{\theta}_0 d\vec{\theta} \vec{\theta}_0 u (t, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}).$$
(4)

Введем

 $\vec{u} = \int d \vec{\theta}_0 \vec{\theta}_0 u, \qquad (5)$

подчиняющееся тому же уравнению (2), но с начальным условием

$$\vec{u} = \vec{\theta} \quad (t \to 0). \tag{6}$$

Положим далее

$$\int_{0}^{\infty} \vec{u} \, dt = \vec{\Phi}(\vec{\theta}) + \frac{2}{i\omega} \frac{\vec{\theta}}{\lambda^2 + \theta^2}$$
(7)

Для Ф получим неоднородное интегральное уравнение

$$\frac{i\omega}{2} \left(\theta^{2} + \lambda^{2}\right) \vec{\Phi} = nv \int \vec{d \, \theta' \sigma} \left(\vec{\theta'} - \vec{\theta}\right) \left[\vec{\Phi'} - \vec{\Phi}\right] + \frac{2nv}{i\omega} \int \vec{d \, \theta' \sigma} \left(\vec{\theta'} - \vec{\theta}\right) \left[\frac{\vec{\theta'}}{\lambda^{2} + \theta'^{2}} - \frac{\vec{\theta}}{\lambda^{2} + \theta^{2}}\right].$$
(8)

Произведем теперь двухмерное преобразование Фурье

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{r} \psi(r) e^{-i\vec{r} \cdot \vec{\theta}} d\vec{r}, \qquad (9)$$

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int S(r) e^{-i \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\theta}} d\overrightarrow{r}, \qquad (10)$$

$$\frac{2}{i\omega} \frac{\overline{\theta}}{\lambda^2 + \theta^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \overrightarrow{r} \psi_0(r) e^{-i\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\theta}} d\overrightarrow{r}.$$
(11)

Совершая обратное преобразование, найдем

$$\vec{r}\psi = \int \vec{\Phi} e^{i\vec{r} \cdot \vec{r} \cdot \vec{\theta}} d\vec{\theta}, \qquad (12)$$

откуда, в частности, следует

$$\int d\vec{\theta} \, \vec{\Phi} \, \vec{\theta} = -2i\psi \, (0). \tag{13}$$

Для ф получим уравнение

$$-\frac{i\omega}{2}\left(\Delta+\lambda^{2}\right)\vec{r}\psi = nv\left[S\left(r\right)-S\left(0\right)\right]\vec{r}\psi + nv\left[S\left(r\right)-S\left(0\right)\right]\vec{r}\psi_{0}.$$
(14)

Злесь Д-двухмерный лапласиан по переменной r.

Удобно теперь перейти к новой независимой переменной введя

$$\rho = \lambda r. \tag{15}$$

Положим также

$$\phi_0 = - \frac{4\pi\lambda^2}{i\omega} \phi_0(\rho), \qquad (16)$$

$$\psi = -\frac{4\pi\lambda^2}{i\omega} \,\varphi(\rho),\tag{17}$$

$$\frac{2nv}{\omega\lambda^{3}} \left[S(0) - S(r) \right] = \frac{1}{8s^{2}} V(\rho).$$
(18)

Уравнение для ф (р) примет тогда следующий вид

$$\varphi'' + \frac{3}{\rho} \varphi' - \varphi + \frac{i}{8s^2} V(\rho) \varphi = -\frac{i}{8s^2} V(\rho) \varphi_0 \equiv -4g.$$
(19)

Наконец, для $\chi = x \varphi$ ($x = \rho^2$) получаем окончательно

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{4x} \left[1 - \frac{i}{8s^2} V \right] \chi = -g.$$
 (20)

Преобразуем соответственно выражение для Е.

$$\dot{E}_{\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi^2 c} Re \int_0^{\infty} dt \int d \overrightarrow{\theta} \overrightarrow{\theta} u = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi^2 c} Re \int d \overrightarrow{\theta} \overrightarrow{\Phi} \overrightarrow{\theta} =$$
$$= \frac{e^2 \omega^2}{2\pi^2 c} Re \left[-2i\psi \left(0 \right) \right] = \frac{4e^2 \omega \lambda^2}{\pi c} Re\varphi \left(0 \right). \tag{21}$$

Пусть теперь χ_1 и χ_2 два решения однородного уравнения (20), причем χ_1 убывает при $x \to \infty$, а χ_2 обращается в нуль при $x \to 0$, причем при малых значениях x

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_2 = x.$$

Тогда решение неоднородного уравнения представится в виде

$$\chi = \chi_1(x) \int_0^{\infty} \chi_2(\xi) g(\xi) d\xi + \chi_2(x) \int_x^{\infty} \chi_1(\xi) g(\xi) d\xi.$$
(22)

Таким образом, при малых х имеем

$$\chi = x \int_{0}^{\infty} \chi_{1} g \, d\xi,$$

откуда

$$\varphi\left(0\right) = \int_{0}^{\infty} \chi_{1} g \, dx. \tag{23}$$

Задача определения \dot{E}_{w} свелась к квадратуре, если известны χ_1 и g

Перейдем к вычислению V(x) и g(x). Сечение рассеяния на атоме с учетом экранирования на малых углах можно принять в виде

 $\sigma_a\left(\theta\right) = \frac{A}{(a^2 + \theta^2)^2} \cdot$

Тогда

$$S_a(r) = 2\pi \int_0^\infty \sigma_a(\theta) J_0(r\theta) \, \theta d\theta = 2\pi A \frac{r}{a} K_1(ar).$$

Чтобы учесть конечные размеры ядра мы положим, что сечение расссяния

$$\sigma(\theta) = \sigma_a(\theta) - \sigma_b(\theta) \quad (b \gg a), \tag{24}$$

где b по порядку величины — угол диффракции на ядре. Эта формула хорошо описывает сечение рассеяния во всей существенной области углов и приводит к обрезанию как при $\emptyset \ll a$, так и при $\emptyset \gg b$. Тогда

$$S(r) = 2\pi A \left[\frac{r}{a} K_1(ar) - \frac{r}{b} K_1(br) \right].$$
⁽²⁵⁾

Пользуясь асимптотическим выражением для функции

$$K_{1}(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} \left[\ln \frac{2}{z} + \frac{\psi(1) + \psi(2)}{2} \right]$$
(малые z), (26)

$$K_1(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$
 (большие z), (27)

находны S(r)

$$S(r) = 2\pi A \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \pi A r^2 \ln \frac{b}{a} \quad \left(r \ll \frac{1}{b}\right),$$

$$S(r) = \frac{2\pi A}{a^2} - \pi A r^2 \left[\ln \frac{2}{ra} + \frac{\psi(1) + \psi(2)}{2}\right] \quad \left(\frac{1}{b} \ll r \ll \frac{1}{a}\right),$$

$$S(\infty) = 0, \ \tau. \ \kappa. \ \text{прн} \ r \gg \frac{1}{a} \quad S(r) = \frac{2\pi A}{a^2} \sqrt{\frac{\pi a r}{2}} e^{-ar}.$$

Заметим, что с таким ◦(в) имеем

$$\int \sigma (\vec{\theta}) d\vec{\theta} = 2\pi A \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \cdot$$
(28)

$$\int \sigma(\vec{\theta}) \, \theta^2 \, d\vec{\theta} = 4\pi A \, \ln \frac{b}{a} \, . \tag{29}$$

Теперь нетрудно найти

$$V(\rho) = \frac{16s^2 nv}{\omega \lambda^2} \left[S(0) - S\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right], \tag{30}$$

причем

К теории тормозного излучения с учетом многократного рассеяния

$$=\frac{\lambda^4\omega}{16\,n\upsilon\,\pi A\,\ln\frac{b}{a}}$$

S

Отсюда находим при $\rho = \infty$

$$V(\infty) = \frac{16s^2 nv}{\omega\lambda^2} 2\pi A \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),\tag{31}$$

при малых $\rho \ll \frac{\lambda}{h}$

и, наконец, в области

 $\lambda/b \ll \rho \ll \lambda/a$

 $V(\rho) = \rho^2$

$$V(\rho) = \rho^2 \frac{\ln 1.85\lambda/\rho a}{\ln b/a} \quad (<\rho^2).$$
(33)

Наконец, найдем g. Для этого заметим, что из формулы Фурье — — обращения следует

 $r \ll \lambda^{-1}$ $r^2 \psi_0(r) = 4\pi/\omega$.

$$\vec{r}\psi_0 = \frac{2}{i\omega} \int \frac{\vec{\theta} e^{i\vec{r}\cdot\vec{\theta}}}{\lambda^2 + \theta^2} d\vec{\theta},$$
(34)

откуда

$$r^{2}\psi_{0} = \frac{4\pi}{\omega} \lambda r K_{1}(\lambda r)$$
(35)

т. е. при Далее,

$$\varphi_0 = -\frac{i}{\rho} K_1(\rho) \tag{36}$$

и теперь находим

$$g(p) = \frac{1}{32s^2} \frac{V(p)}{p} K_1(p).$$
 (37)

Итак, мы свели задачу вычисления тормозного излучения в среде

$$\dot{E}_{\omega} = \frac{4e^2 \omega \lambda^2}{\pi c} Re \int_{0}^{\infty} \gamma_1(x) g(x) dx$$
(38)

к отыскачию решения уравнения

$$\chi'' - \frac{1}{4x} \left[1 - \frac{i}{8s^2} V \right] \chi = 0$$
(39)

с последующей квадратурой. При этом

$$g(x) = \frac{1}{32s^2} \frac{V}{\sqrt{x}} K_1(\sqrt{x}),$$
(40)

а функция V характеризуется следующим поведением

V/x = 1 при $x \ll (\lambda/b)^2$,

59

(32)

$$V/x = \frac{\ln 1.85 \,\lambda/\sqrt{x}a}{\ln b/a} \quad (\lambda/b)^2 \ll x \ll (\lambda/a)^2.$$

Рассмотрим прежде всего предельные случан. Пусть параметр s велик — $s \gg 1$; тогда можно упростить уравнение (39) и найти χ_1 из

$$\chi'' - \frac{1}{4x}\chi = 0 \quad (\chi(0) = 1).$$
(41)

При этом оказывается

$$\chi_1 = \sqrt{x} K_1(\sqrt{x}). \tag{42}$$

Заметим теперь, что

$$\int_{0}^{\infty} K_{1}^{2} \left(\sqrt{x} \right) x dx = \frac{2}{3}, \tag{44}$$

однако, под знаком интеграла (38) стоит медленно меняющаяся функция V/x, которую можно вынести из под знака интеграла в некоторой точке x ~ 1 (с логарифмической точностью). Итак, получим

$$\dot{E}_{w} = \frac{4e^{2}nv}{3\lambda^{2}c}\ln\lambda/a \tag{45}$$

- результат совпадающий с формулой Бете-Гайтлера.

Пусть теперь s << 1. Тогда у, находим из уравнения

$$\chi'' + \frac{i}{32s^2} \frac{V}{x} \chi = 0.$$
 (46)

Если выполнено более сильное условие $s \ll (\lambda/b)^2$, тогда V/x = 1 и

$$\chi_1 = \exp\left(-\frac{1-i}{8s}x\right),\tag{47}$$

откуда

$$\varphi(0) = \int_{0}^{\infty} \chi_{1} g dx \simeq \frac{1+i}{8s}$$

И

$$\dot{E}_{\omega} = \frac{4e^2\omega\lambda^2}{\pi c \cdot 8s} = \frac{2e^2\sqrt{\omega}q}{\pi c}, \quad \left(s = \frac{\lambda^2}{4}\sqrt{\frac{\omega}{q}}\right). \tag{48}$$

В случае $(\lambda/b)^2 \lesssim s \ll 1$ необходимо рассматривать уравнение (46). Если ограничиться логарифмической точностью, надо вместо функции *V*/*x* подставить ее значение при существенном аргументе т. е. при *x* ~ 8*s*. При этом сохраняется формула (48), только в *q* надо вместо ln *b*/*a* подставить ln λ/\sqrt{sa} . Это подтверждает процедуру интерполирования, примененную Мигдалом. Мы не будем останавливаться на уточнении полученных им формул. В случае необходимости это может быть сделано путем численного или приближенного аналитического решения уравнения (39).

Физический институт АН Армянской ССР

Поступила II VII 1960

Ի. Ի. Գոլգման

ԱՐԳԵԼԱԿՄԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՄԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ԲԱԶՄԱԿԻ ՑՐՈՒՄԸ ԵՎ ՖՈԿԿԵՐ-ՊԼԱՆԿԻ ՄԵՔՈԴԻ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Քննարկվում է միջավալրում էլեկտրոնների բաշխման ֆունկցիալի համար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը, առանց անցման Ֆոկեր-Պլանկի մոտավորունվան։ Արդելակման ճառադալինման վերաբերյալ խնդիրը հաջողվում է հանդեցնել սովորական երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման։ Այդ հավասարման վերլուծունյունը հաստատում է Միգդալի [3] արդլունջը, միամամանակ ոչ բարդ ինտեգրումը ճշգրտում է նրա ստացած բանաձևերը։

ЛИТЕРАТУРА

 Мигдал А.Б. Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение при больших энергиях. "ДАН СССР». 96, 49, 1954.

 Migdal A. B. Bremsstrahlung and pair production in condensed media at high energics, "Phys. Rev." 103, 1811, 1956.

 Мигдал А. Б. Тормозное излучение и образование пар при больших энергиях. "ЖЭТФ*, 32, 633, 1957.

 Гольдман И. И. Тормозное излучение при входе в среду с учетом многократногорассеяния. "ЖЭТФ•, 39, 203, 1960.

Зэдэра-атрыбина, артагранбавт XIII, No 6, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

А. М. Резикян

Ионообразование в катодной части тлеющего разряда

(теоретическая часть)

§ 1. Введение

В тлеющем разряде образованные ионы попадая на катод освобождают оттуда такое количество электронов, которое необходимо лля стационарности разряда. Часть указанных чонов приходит на катод из положительного столба, а другая часть образуется в катодной части разряда.

До настоящего времени экспериментально не было показано в каком месте катодной части образуются укязанные ионы. Эти ноны играют важную роль в процессе установления разряда. Поэтому выяснение механизма их образования является необходимым для теории катодной части тлеющего разряда.

Относительно катодной части тлеющего разряда существует ряд теорий, различающихся предположением о характере и месте возникновения именно тех ионов, которые доходят до катода и являются причиной освобождения катодных электронов. Поэтому нас не интересует место возникновения тех ионов, которые по какой либо причине не доходят до поверхности катода*. Теории катодной части тлеющего разряда в основном подразделяются на следующие группы.

 Теории, предполагающие, что приходящие на катод ионы обрязуются во втором катодном свечении [1], [2]. Полученная при этом теоретическая зависимость напряжения от плотности разрядного тока зерна при слабо аномальном разряде. В определенном интервале аноиального разряда, эти теории, с некоторой степенью точности, соответствуют экспериментам. Непонятным, однако, остается поведение пормального разряда.

 Теорин, предполагающие, что приходящие на катод ноны обпазуются только в области катодного падения потенциалов и не принимающие во внимание наличие второго катодного свечения [3], [4], [5], [6]. Результаты этих теорий хорошо согласуются с эксперимен-

 Если после исчезновения какого нибудь иона образуется другой заменяющий его и продолжающий путь, то они оба вместе считаются за одия ион. тальными данными в случае нормального разряда, но в интервале аномального разряда совпадение с экспериментом становится менее точным.

3. Теории, предполагающие, что приходящие на катод ноны образуются как во втором катодном свечении (тлеющем свечении), так и в области катодного падения потенциалов одновременно [7], [8], [9], [10]. Однако, ради упрощения задачи полагают, что и в тлеющем свечении лишь слой малой толщины является источником ионов. Эти теории согласуются с экспериментом в случае слабых и средне-аномальных разрядов.

Фактически, конечно, в тлеющем разряде имеет место одновременное образование ионов как в области катодного падения потенциалов, так и в тлеющем свечении. При этом, в зависимости от условия разряда, участвуют в эмиссии ионов даже те участки тлеющего свечения, которые очень удалены от начала. Отношение числа ионов, образующихся в тлеющем свечении, к числу ионов, образующихся в области катодного падения потенциала и доходящих до катода, зависит от условия разряда.

До настоящего времени неизвестно каким образом можно, в зависимости от условия разряда, экспериментально установить откуда и в каком количестве приходят ионы на катод, т. е. где и с какой вероятностью они образуются?

Из-за приближенного характера расчетов, аналитически очень трудно установить место возникновения нонов, доходящих до катода.

В данной статье излагается такой метод исследования, с помощью которого можно определить, независимо от теории катодной части, место возникновения ионов, доходящих до катода.

Излагаемый метод не может дать картину полного распределения вероятности возникновения нонов в зависимости от места в разряде, но достаточно точно может определить среднюю длину пути ионов, доходящих до катода. Средняя длина математически определяется, как линейное среднее путей всех ионов, которые возникают в разряде и доходят до катода.

В особенности нас будет интересовать средняя длина пути тех ионов, которые образуются в катодной части разряда и доходят до катода. Эта величина является вполне определенной, она достаточно хорошо показывает место возникновения указанных ионов. Можно утверждать, например, что если средняя длина пути ионов значительно меньше, чем ширина области катодного падения потенциалов, то почти все ионы возникают в области катодного падения потенциалов и наоборот.

§ 2. Метод определения места возникновения ионов

Среднюю дляну пути тех ионов, которые проходят через газ в разрядном промежутке и попадают на катод, можно определить исходя из следующих соображений. Заряженные частицы, двигаясь к

Ионообразование в катодной части тлеющего разряда

электродам, проходят через газ с трением, передавая газу импульсы приобретенные под действием электрического поля. Благодаря трению заряженных частиц с нейтральным газом, давление газа увеличивается по направлению их движения. Вследствие близости масс ионов и нейтральных частиц, обмен энергией между ионами происходит интенсивнее, чем между нейтральными частицами и электронами. При одиноковой плотности электронного и ионного токов, образование перепада давления нейтрального газа под действием электронов намного меньше, чем под действием ионов. Этот эффект электронов направлен обратно ионному. Компенсация разности давлений, вызванных электронным и ионным токами, будеть иметь место, когда плотность электронного тока относится к плотности ионного тока обратно пропорционально величинам их трений в газе. Это наблюдается в положительном столбе разряда.

Таким образом, в положительном столбе почти нет разности давлений нейтрального газа, поэтому разность давлений нейтрального газа между катодом и анодом разрядного промежутка создается в основном катодной частью. В катодной части действие электронов играет несущественную роль, т. к. здесь почти весь ток ионный. Это означает, что увеличение давления газа по направлению к катоду происходит благодаря трению ионов с газом. Увеличение давления газа на катоде пропорционально длине пути ионов, доходящих до катода. Следовательно, измеряя разность давлений нейтрального газа между катодом и анодом, можно определить среднюю длину пути ионов, доходящих до катода.

Как следует из приведенного рассуждения, образование перепада давления в газе в основном связано с движением (током) ионов независимо от того, происходит ли это движение вследствие диффузии ионов (в тлеющем свечении) или вследствие электрического поля (в области катодного падения потенцияла).

Обычно, в разряде как плотность тока электронов и ионов, так и плотность пространственного заряда создаваемая ими, зависит от места. Поэтому, в общем случае, в разряде имеется перепад давления не только нейтрального газа, но также перепад давления электронного и ионного "газов".

В теориях катодной части тлеющего разряда самым существенным является предположение о месте возникновения ионов, доходящих до катода, так как этот элемент входит в теорию в виде экспоненциальной функции*. Поэтому все остальные элементы теории по сравнению с этим не могут внести столь существенной ошибки, как это может быть от неточности предположения о месте возникновения ионов.

Строгость поиведенных ниже расчетов по сравнению с теорией

 По сравнению с этим изсуществению, подвижность берется пропорционально полю Е или VE.

5 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 6

катодной части тлеющего разряда заключается именно в том, что здесь нет никаких конкретных предположений относительно места возникновения ионов, доходящих до катода. Поэтому появляется возможность экспериментальной проверки теории.

§ 3. Средняя длина пути ионов, доходящих до катода

Рассмотрим следующую плоскую задачу. Предположим, что через газ, находящийся между двумя бесконечными параллельными пластинками, являющимися катодом и анодом, проходит электрический ток (фиг. 1).

Предположим также, что передача импульсов ионами на электрод отсутствует. Обозначим р плотность пространственных зарядов,





образованных вследствие прохождения через газ тока плотности *j*. Сила, действующая на заряды, находящиеся в единице объема, под действием электрического поля напряженностью *E*, будет равна *pE*. Эта сила уравновешивается градиентами давления газов, т. е. нейтрального газа, электронного и ионного газов.

$$-\frac{dP_g}{dx} - \frac{dP_e}{dx} - \frac{dP_i}{dx} + \rho E = 0, \quad (1)$$

гле P_g , P_e , P_i — суть, соответственно, давление нейтрального газа, электронного и ионного газов.

Из уравнения (1) применяя газокинетические соотношения

 $P_e = kT^- N^-, \quad P_l = kT^+ N^+$

$$\frac{kT^{+}}{e} = \frac{D^{+}}{b^{+}}, \quad \frac{kT^{-}}{e} = \frac{D^{-}}{b^{-}}, \quad \varphi = e(N^{+} - N^{-}),$$

где T^+ , T^- и N^+ , N^- — температура и число частиц в единице объема, D^+ , D^- и b^+ , b^- — коэффициент диффузии и подвижность для ионов и электронов соответственно, а k^- газокинетическая константа, получим

$$\frac{dP_g}{dx} = \frac{j^+(x)}{b^+} - \frac{j^-(x)}{b^-},$$
(2)

где $j^+(x)$ и $j^-(x)$ — плотность ионного и электронного токов.

Полученное выражение (2) не зависит от формы электрического поля, поэтому оно остается в силе для любого вида разряда. Един-

Ионообразование в катодной части тлеющего разряда

ственным ограничением является требование, чтобы газ не был слишком сильно нагрет.

Рассчитаем с помощью формулы (2) разность давлений нейтрального газа между катодом в анодом. Известно, что плотность ионного газа растет с приближением к катоду и на поверхности последнего становится равной j_k^+ . Если обозначить вероятность образования ионов в точке x через w(x) (фиг. 1), то доля ионов, образующихся в интервале dx в доходящих до катода, будет

$$w(x) dx = \frac{dj^+}{j_k^-}, \tag{3}$$

где dj^+ есть прирост плотности ионного тока на участке dx. Если принять, что эмиссия ионов из анода равна нулю, то из выражения (3) вадно, что (фиг. 1)

$$\int_{0}^{1} w(x) \, dx = 1. \tag{4}$$

Это означает, что все ионы, приходящие на катод, образуются в объеме газа.

Используя выражение (2) и очевидное соотношение

$$j = j^+(x) + j^-(x),$$

можем преобразовать выражение (2) и привести его к виду

$$\frac{dP_{g}}{dx} = \left(\frac{1}{b^{+}} + \frac{1}{b^{-}}\right) j_{k}^{+} \int_{0}^{\infty} w(x) \, dx - \frac{j}{b^{-}} \, . \tag{5}$$

Отсюда разность давлений нейтрального газа между точкой х и анодом получим интегрируя (5).

$$P(x) - P_{A} = \int_{0}^{x} \frac{dP_{g}}{dx} dx = j_{k}^{+} \left(\frac{1}{b^{+}} + \frac{1}{b^{-}}\right) \int_{0}^{x} \int_{0}^{x} w(x) dx dx - \frac{j}{b^{-}} x.$$
(6)

Преобразуя двойной нитеграл и выполнив интегрирование по частям, мы можем определить разность давлений нейтрального газа между катодом и анодом. Если расстояние между ними равно 1, то

$$P_{k} - P_{A} = j_{k}^{+} \left(\frac{1}{b^{+}} + \frac{1}{b^{-}}\right) \left[l - \int_{0}^{1} w(x) x \, dx \right] - \frac{j}{b^{-}} l.$$
(7)

На основании нормирования (4), скобка в выражении (7) может быть представлена в следующем виде

$$\left[l - \int_{0}^{l} w(x) x dx\right] = \int_{0}^{l} (l - x) w(x) dx = \frac{\int_{0}^{l} (l - x) w(x) dx}{\int_{0}^{l} w(x) dx} = \bar{S}.$$

Здесь дробь, обозначенная через S, представляет собой среднюю длину пути ионов, образующихся в газовом объеме и доходящих до катода.

После такого преобразования выражение (7) упрощается и принимает вид

$$P_k - P_A = J_k^+ \left(\frac{1}{b^+} + \frac{1}{b^-}\right)\overline{S} - \frac{l}{b^-}j.$$
(8)

Средняя длина пути \overline{S} ионов, доходящих до катода, заключает в себе член, который зависит от длины всего разрядного промежутка, а следовательно, и от длины положительного столба. Это очевидно, т. к. мы учли полное количество ионов, образующихся во всем гозовом объеме. Из полученного выражения мы можем рассчитать ту часть ионов, которая образуется только в катодной области и доходит до катода.

Мы можем воспользоваться очевидным соотношением

$$\overline{S}j_{k}^{+} = j_{s}^{+}l + (j_{k}^{+} - j_{s}^{+})\overline{S_{k}}, \qquad (9)$$

которое гласит, что общая длина пути всех нонов слагается из общей длины пути ионов, образующихся в положительном столбе и общей длины пути ионов, образующихся в катодной части. Здесь через S_k обозначена длина пути ионов, образующихся только в области катодного падения потенциала, а j_s^+ – плотность нонного тока в столбе.

В выражении (9) не учтена сумма путей ионов, образующихся на незначительном участке анодного падения потенциалов.

Имея в виду так же, что в положительном столбе

$$\frac{j_s^+}{j_s^-} = \frac{b^+}{b^-}, \quad j = j_s^+ + j_s^-$$

и что на катоде

$$\gamma = \frac{j_k^-}{j_k^+}, \quad j = j_k^+ + j_k^-,$$

мы можем преобразовать выражение (8)

$$P_{k} - P_{A} = \frac{j}{b^{+}b^{-}} \left(\frac{b^{+} + b^{-}}{1 + \gamma} - b^{+}\right) \bar{S}_{k}$$

Ионообразование в катодной части тлеющего разряда

или, пренебрегая величиной ; которая мала по сравнению с единицей, получим

$$P_k - P_A = \Delta P = \frac{j}{b^+} \overline{S}_k. \tag{10}$$

Таким образом, мы получили простое соотношение для определения средней длины пути тех ионов, которые образуются в катодной части и доходят до катода.

Учитывая, что подвижность ионов b⁺ обратно пропорциональна давлению газа P, введем

$$b^+ = \frac{b_1^+}{P}$$
,

тде b_1^+ — подвижность ионов при давлении одного миллиметра ртутного столба, выраженная в $\frac{c_M}{ce\kappa} / \frac{soльm}{c_M}$. Далее выразим давление в миллиметрах ртутного столба, а плотность тока в $\frac{Ma}{c_M^2}$, тогда из (10)

будем иметь

$$\widetilde{S}_k = 0,133 \, \frac{\Delta P}{P} \, \frac{b_1^+}{j} \,. \tag{11}$$

Таким образом, с помощью легко измеряемых величин можно определить с какого среднего расстояния \overline{S}_k ноны доходят до катода, т. е. определить где находится центр тяжести образования этих ночов.

Все наши рассуждения были построены на том допущении, что ноны свой импульс полностью передают нейтральному газу. Однако, как известно, некоторую часть импульса ноны передают поверхности катода. Поэтому, в случае сплошного катода, измеренная разность давлений будет меньше расчетной.

Покажем, что в случае катода из сетки измеряется полная разность давлений и что передача импульса на поверхность катода, в местах где нет отверстия, не вносит ошибок в измерения.

Представим, что ион, пробегая катодную часть, полностью передает свою энергию газу до места, где напряженность поля равна E_1 (фиг. 2). От этого места, нахолящегося в непосредственной близости от поверхности катода, напраженность поля уже становится настолько большой, что полной передачи энергии не происходит, поэтому ион попадает на катод с некоторой энергией.

Уравнение движения иона от точки Е1 до точки Е2 будет

$$m\frac{dv}{dt}+rv=eE,$$

где *E* — напряженность поля в точке *x*, *v* — скорость нона, *e* — его заряд, *r* — коэффициент трения иона с газом.

Умножая обе части уравнения на N (число нонов в см³) получим



$$Nm\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + Nvr = \rho E,$$
(12)

где $\rho = Ne - плотность пространственного заряда, а <math>Nv r = \frac{dP}{dx}$

нли

$$m(Nv)\frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx} = \rho E.$$
 (13)

Фиг. 2.

Ε,

E,

 $\frac{dP}{dx}$ есть перепад давления нейтрального газа. Пренебрегая малым ко-

нообразованием в области E_1 E_2 , получим Nv = n = const.

Далее, пользуясь соотношением Пуассона

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi p$$

из уравнения (13) получим

$$\frac{1}{8\pi}\frac{dE^2}{dx} = mn\frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx}.$$
(14)

Интегрируя (14) с граничными условиями

$$E = E_1, \quad P = P_1, \quad v = v_1, \\ E = E_2, \quad P = P_2, \quad v = v_2,$$

получим

$$mn(v_2 - v_1) + (P_2 - P_1) = \frac{1}{8\pi} (E_2^2 - E_1^2).$$

До места в катодной области, где напряженность поля равна E_1 , ионы свою приобретенную энергию полностью передают газу, поэтому можно принять $v_1 = 0$.

Учитывая, что $\frac{1}{8\pi}(E_2^2-E_1^2)=\Delta P_{\tau}$ есть разность давлений в том

случае, когда *тл*v₁=0 (т. е. когда ионы всю свою энергию передают газу), уравнение (13) примет вид

$$\triangle P = \triangle P_{\tau} - \triangle P_{y}$$
, rac $\triangle P = P_{z} - P_{1}$.

Импульс ионов, соответствующий разности давлений △Р_у, передается не газу, а поверхности катода, вследствие чего измеряемая разность давлений уменьшается. Такой случай не соответствует предположению о полной передаче импульса ионов нейтральному газу.

Это условие может быть выполнено, если катод сделан из сетки. Ионы, приобретающие большую скорость в области $E_1 E_2$ и не успевшие передать всю свою энергию газу, попадая в отверстие где нет

Ионообразование в катодной части тлеющего разряда

электрического поля, продолжают передавать свою энергию газу до полной остановки, создавая там $\triangle P_y$ дополнительную разность давлений.

Таким образом, катод из сетки вполне удовлетворяет условиям полной передачи импульса ионов нейтральному газу и поэтому измеренная разность давлений нейтрального газа дает правильное значение средней длины пути ионов, образующихся в катодной части и доходящих до катода.

Заключение

Таким образом, полученное соотношение (11) дает возможность экспериментальным путем установить, где находится центр тяжести образования тех ионов, которые возникают в катодной части и доходит до катода. В заключение, для наглядности приводим некоторые результаты, полученные опытным путем для вугона, при давлении 5 мм ргутного столба. Средняя длина $\bar{S}_k = 0.08 \ c.м.$ а толщина области катодного падения потенциалов $d = 0.04 \ c.м.$ т. е. значительная часть нонов образуется в тлеющем свечении разряда ($\bar{S}_k > d$).

Физический институт АН Армянской ССР Поступнаа 1 1Х 1960

1. Մ. Ռեզիկյան

ԻՈՆՆԵՐԻ ԱՌԱՋԱՑՈՒՄԸ ՄԱՐՄԱՆԴ ՊԱՐՊՄԱՆ ԿԱՏՈԴԱՅԻՆ ՄԱՍՈՒՄ

(Shumhma dmu)

UUDAAANU

Մարմանդ պարպման կատողի վրա հղող իոնները առաջանում են ինչպես մարմանդ պարպման դրական սլան, այնպես էլ կատողալին պոտենցիալի անկման շերտում։ Սակայն մինչև հիմա պարղ չէ, նե պարպման մր մասում են ավելի մեծ ջանակով իոններ առաջանում։ Այս հարցի պարզարանումը մեծ նշանակություն ունի մարմանդ պարպման տեսությունների նշաման համար։ Այս աշխատության մեջ բերված է մի էրապերիմենտալ մեթողի տեսություն, որի օգնությամը հնարավոր է չափել դեպի կատող հկող րոլոր իոնների ծանրության կենտրոնը, այսինչն՝ նրանց ճանապարհների միջին հրկարությունը հւ

Sk-ի որոշումը հիմնված է հնանյալ նրևույնի վրա. դնպի կատող նկող իմնները նլեկտրական դաշտում ձնութ բերած իմպուլոր հաղորդում են դա. դին և իրենց շարժման ուղղունյամբ առաջացնում են դաղի ճեշման աճ։ Որբան երկար լինի իոնների անցած ճանապարհը, ալնւրան մեծ կլինի ճնշման աճը։ Այսպիսով, չափելով կատորի ու անոդի միջև եղած չեղոր գաղի ճընշունների տարբերու վունը, մենք կարող ենք գտնել իոնների ճանապարհի միջին երկարու վունը Š_k:

Lugiarthibpe multo be Shad pup

$$S_k = 0.133 \frac{\Delta P}{P} \frac{b_i^+}{i},$$

որտեղ P-ն ճնջունն է, ΔP-ն ճնջունների տարբերունվունն է անողի և կաաոդի միջև սնդիկի սլան բարձրունվամբ արտանալաված, Ե¦-ը դրական իոնների շարժունակունվունն է 1 մմ սնդիկի պան ճնշման դեպքում, իսկ j-ն նոսանքի խառւնվուն է միլիամպերներով։

Քանի որ նշված բանաձնն ընդունում է, որ կատողի վրա նկող իոնները իրենց իմպուլսը լրիվ տալիս են դազին, ուրենն ճիշտ չափումներ կատարելու համար, ինչպես ցուլց է տրված, անհրաժեշտ է էլեկտրոդները պատրաստել ցանցից, այդ դեպքում իոնի ննացած իմպուլսը հաղորդվում է գաղին, երբ նա անցնում է ցանցի միջով և, այսպիսով, բավարարվում է ընդունված պայմանը։

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Günterschulze A. Theorie der Glimmentladung "Zeit, f. Phys.", 33, 810-817, 1925.
- Kompton K. T., Morse P. M. Theory of normal cathode fail in glow discharges. Phys. Rev.*, 30, 305-317, 1927.
- Langmür J. The interaction of electron and positive ion spase charges in cathode sheaths. "Phys. Rev.", 33, 954—989, 1929.
- 4. Rogowski W. Zur Theorie der Glimmentladung, "Zeit, T. Phys.", 82, 473-488, 1933,
- Энгель А., Штенбек М., Физика и техника электрического разряда в газах. Том П. КОГИЗ, М.—Л., стр. 84—96, 1936.
- Steenbeck M. Die Feldstärke in normalen kathodenfall. "Zeit, f. Phys.", 72, 505-510, 1931.
- Weizel W., Rompe R., Schön M. Theorie der Kathodische Entladungsteile der Niederdrückentladung 1, "Zeit. f. Phys.", 112, 339-347, 1939.
- Weizel W., Rompe R., Schön M. Theorie der Kathodische Entladungsteile der Niederdrückentlandung 11, "Zeit. f. Phys.*, 113, 87-95, 1939.
- Weizel W., Rompe R., Schön M. Theorie der Kathodische Entladungsteile der Niederdrückentladung III. "Zeit. f. Phys.", 113, 730-739, 1939.
- Seeliger R. Zur Theorie des negativen Glimmlicths. "Zeit. f. Phys.", 115, 111-119, 1940.

20.340.405 ООА ЭРЗЛЕРЗЛЕБЬРЕ ОЧОЛЬТЕЛЗЕ ЗЫЗЬЦИЕР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Арара-duphdum, армагрупсавь XIII, No 6, 1960 Физико-математические науки

МЕХАНИКА ГРУНТОВ-

Н. Ф. Какоснмиди

Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

Под явлением ползучести обычно понимают деформирование материала во времени при неизменной внешней нагрузке.

Теория ползучести излагается в ряде работ [1, 2, 6] и др.

Помимо других материалов, свойством ползучести обладают также грунты [13-17].

Согласно Н. Я. Денисову [19], процесс деформирования водонасыщенного связного (глинистого) грунта включает в себя: 1) выжимяние из пор свободной воды; 2) вязкое перемещение структурных элементов относительно друг друга и 3) выжимание связанной водыиз контактов частиц грунта.

В соответствии с этим, деформации грунта при приложении внешней нагрузки расчленяются на: 1) упругие деформации (протекают мгновенно в момент загружения); 2) структурные деформации (появляются вслед за первыми и протекают во времени) и 3) структурноадсорбционные деформации (развиваются с течением времени).

Большую роль в развитии этих новых представлений о природе деформирования связных грунтов сыграли работы В. А. Флорина [16, 17], в которых впервые было введено понятие о ползучести скелета грунта.

Под ползучестью грунта по В. А. Флорину понимается деформация, обусловленная относительным вязким смещением твердых частиц и агретатов грунта, а также разрушением цементационных связей.

Иначе говоря, под деформацией ползучести грунта подразумевается суммарное значение структурных и структурно-адсорбционных деформаций [13].

Таким образом, процесс деформирования водонасыщенного грунта можно охарактеризовать двумя факторами, а именно: фильтрационным уплотнением и ползучестью скелета грунта.

В зависимости от значимости для данного грунта каждого из указанных факторов, следует различать следующие три случая.

 Связи между частицами грунта настолько прочны, что явление выжимания воды из пор не имеет существенного значения. В этом случае можно пренебрегать ролью фильтрации и использоватьдля решения задачи уплотнения теорию ползучести. Связи между частицами грунта слабы и процесс деформирования в основном обусловлен фильтрационными явлениями. На этог раз можно ограничиться теорией фильтрационного уплотнения, пренебрегая ролью ползучести скелета грунта [18].

3) Наконец, связи между частицами грунта таковы, что оба фактора деформирования выступают совместно. В таком случае следуе пользоваться совместным решением теории фильтрационного уплотие ния и теории ползучести [16, 17].

В дальнейшем будет рассматриваться первый случай.

Отметич, что для учета ползучести скелета грунта В. А. Флори предложил использовать теорию ползучести Г. Н. Масдова-Н. Х Арутюняна [1, 2].

Затем С. Р. Месчян [13-15] поставил экспериментальные иссле дования с целью выявления справедливости для связных грунтов ос новных предпосылок указанной теории ползучести, к которым отно сятся: 1) линейная зависимость между мгновенными деформациями и напряжениями; 2) линейная (в линейной теории) и нелинейная (в нели нейной теории) зависимость между деформациями ползучести и напряжениями; 3) наличие для деформации ползучести закона наложения и 4 изменяемость во времени модуля упруго-мгновенной деформации ма териала.

На основании экспериментальных исследований доказана приме нимость к связным грунтам отмеченных предпосылок. Причем, при нагрузках, не превышающих примерно 1,0 кг/см², получена линейна зависимость между деформациями ползучести и напряжениями, а при более высоких нагрузках—нелинейная зависимость. Соответствения этому должна быть и использована линейная или нелинейная теория ползучести.

После приложения внешней нагрузки, грунт со временем изме няет свои физико-механические свойства, т. е. имеет место старение грунта, что позволяет применять к последнему наследственную тео рию старения.

Между явленнями старения бетона и грунта имеется существен ная разница.

Старение бетона происходит без участия какого-либо внешнего силового воздействия и является результатом только внутренних фи зико-химических процессов, связанных с твердением цементного камия

Старение же грунта является результатом уплотнения его по дейстием внешней нагрузки, а также проявления сцепления упроч нения [19], обусловленного протеканием во времени физико-химиче ских процессов на контактах твердых и жидких фаз.

В отношении нагрузки на основание сооружения следует заме тить, что она обычно является нарастающей (переменной) во времени

Рост нагрузки практически можно представить в виде последо вательно приложенных ступеней через определенные (достаточно дли Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

тельные) интервалы времени. Приложение этих ступеней, в отличие от всей нагрузки, возможно считать мгновенным.

Внешняя нагрузка ниже понимается в изложенном здесь смысле.

Представление нагрузки в таком виде позволяет 1) распространить решение для мгновенной нагрузки на каждую ступень, соответствующую определенному возрасту грунта* и 2) использовать имеющиеся экспериментальные данные о характеристиках ползучести грунтов [13].

Решение для суммарной нагрузки легко получить, используя принцип наложения.

В связи со специфической особенностью старения грунта, величину модуля мгновенной деформации последнего целесообразно будет принять разной для каждой ступени нагрузки, но постоянной на интервале действия той или иной ступени. При этом, в качестве значения для модуля мгновенной деформации следует принять то значеные, которое соответствует возрасту грунта к моменту начала приложения данной ступени.

Это означает, что действительный график изменения модуля мгновенной деформации во времени заменяется ступенчатой кривой (подобно графику роста нагрузки).

По существу в таком представлении гипотеза о постоянстве модуля мгновенной деформации, применяемая при решении некоторых задач теории ползучести [2], приобретает новую, более приемлемую, форму в смысле приближения ее к реальной действительности.

В соответствии с приведенными выше замечаниями, в настоящей статье будет изложен практический способ расчета фундаментной полосы на упруго-ползучем основании, удовлетворяющем предпосылкам линейной теории Г. Н. Маслова-Н. Х. Арутюняна [1, 2].

Данной проблеме посвящены работы нескольких авторов.

В работе А. Р. Ржаницына [7] решена задача о расчете балки, лежащей на сплошном основании, в случае, когда балка и основание сложены из упруго-вязкого материала и подчиняются упрощенному закону деформирования, заданному в дифференциальной форме.

Позже И. Е. Прокопович [4] получил решение плоской контактной задачи с учетом ползучести и показал, что в случае жесткого фундамента ползучесть не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

В работе [5] того же авторя, при рассмотрении влияния ползучести на усилия краевого эффекта в ортотропных оболочках, получены формулы, которыми приближению решается задача о равновесии упруго-ползучей балки на упруго-ползучем основании.

Затем М. И. Розовский [8] дал решение интегро-дифференциального уравнения, к которому приводятся некоторые задачи линейной

Под возрастом грунта здесь условно понимается время, в течение которого грунт находияся под нагрузкой. Каждому возрасту грунта соответствуют определенвые его физико-механические своёства.

Н. Ф. Какосимиди

теории ползучести, в частности, задача о деформации фундаментной балки с учетом ползучести основания, если предположить, что последнее подчиняется известной гипотезе коэффициента постели, являющейся, однако, для грунтов часто несправедливой [10]*.

Позднее И. А. Кийсс [9], исходя из условия равенства кривизны балки и поверхности основания, разработал общий метод расчета и в качестве приложения рассмотрел основание, имеющее слоистый характер [12].

Наконец, недавно Н. Х. Арутюнян [3] получил решение плоской контактной задачи теории ползучести в нелинейной постановке.

В предлагаемом ниже решении, в отличие от указанных работ [7-9], для описания механических свойств основания используется модель упругого полупространства.

Изложение способа расчета проводится для случая плоской деформации.

 Согласно [4], вертикальные перемещения границы упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации под действием переменных во времени нормальных сил p (x, t), с учетом ползучести определяются формулой

$$v^{*}(x,t) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - v_{0}^{2}(t)}{E_{0}(t)} \int_{-1}^{t} \ln \frac{1}{|x-s|} p(s,t) ds - \frac{2}{\pi} \int_{\tau_{0}}^{t} \int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|x-s|} p(s,\tau) ds \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left[1 - v_{0}^{*2}(t,\tau) \right] \delta(t,\tau) \right\} d\tau + C^{*}(t),$$
(1.1)

где 21- ширина участка приложения усилий.

C*(t) - произвольная постоянная.

Кроме того, здесь τ_1 — время приложения нагрузки, t — момент времени, лля которого определяется деформация, $E_0(\tau)$ — модульупруго-мгновенной деформации, $v_0(t)$ — коэффициент Пуассона для упругой части деформации, $v_0^*(t,\tau)$ — то же при деформации ползучести,

$$\delta(t,z) = \frac{1}{E_0(z)} + C(t,z)$$

 полная относительная деформация при сжатии или растяжении, причем C (t, т)-мера ползучести основания.

Введя безразмерные координаты $\xi = \frac{x}{l}, \eta = \frac{s}{l}$ и переходя к отно-

сительным перемещениям v^* (i, t) (относительно начала координат-середины участка 2*t*), для последних получим выражение

 Известные решения зарубежных авторов [20] и [21], относящиеся к бесконечной балке и плите на упруго-вязком основании, базируются на указанной гипотезе,
Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

$$v^{*}(\xi, t) = v^{*}(\xi, t) - v^{*}(0, t) =$$

$$= -\frac{2l}{\pi} \frac{1 - v_{0}^{2}(t)}{E_{0}(t)} \int_{-1}^{1} \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} p(\eta, t) d\eta +$$

$$+\frac{2l}{\pi}\int_{\tau_{0}}^{t}\int_{-1}^{t}\ln\frac{|\xi-\eta|}{|\eta|}p(\eta,z)\,d\eta\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|1-s_{0}^{s_{2}}(t,z)\right|\delta\left(t,z\right)\right)\,dz,\qquad(1.2)$$

в котором v*(0, f) представляет собой перемещение точки основания, совпадающей с началом координат.

Должно быть выполнено тождество

$$v^*(\xi, t) \equiv y(\xi, t), \tag{1.3}$$

где у (ξ, f)-относительные прогибы полосы, определяемые зависимостью

$$\overline{y}(\xi, t) = y(\xi, t) - y(0, t).$$
(1.4)

Здесь у (ξ, t)-действительные порогибы, удовлетворяющие известному дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{l^4} \frac{\partial^4}{\partial_{\xi}^{\xi 4}} y(\xi, t) = q(\xi) - p^*(\xi, t), \tag{1.5}$$

rae

 q (ξ)—обобщенная интенсивность внешней нагрузки, постоянная во времени,

 $p^*(\xi, t)$ — реактивные давления на полосу с учетом ползучести основания,

 $D = \frac{EJ}{b' (1 - s^2)}$ — цилиндрическая жесткость полосы,

b', *l* — соответственно ширина и полудлина полосы, причем первая принимается равной 1 м.

Введя теперь обозначения

$$\vartheta(t) = \frac{1 - v_0^2(t)}{E_0(t)},$$
(1.6)

$$\overline{v}(\xi,t) = -\frac{2l}{\pi}\vartheta(t)\int_{-1}^{1}\ln\frac{|\xi-\eta|}{|\eta|}p^{*}(\eta,t)d\eta \qquad (1.7)$$

и используя (1.2), тождество (1.3) перепишем в виде

$$\overline{v}\left(\xi,t\right) = \int_{0}^{t} K\left(t,\tau\right) \, \overline{v}\left(\xi,\tau\right) \, d\tau \equiv \overline{y}\left(\xi,t\right), \tag{1.8}$$

в котором

Н. Ф. Какосимиди

$$K(t,\tau) = \frac{1}{\vartheta(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} + [1 - v_0^{*2}(t,\tau)] \tilde{v}(t,\tau)].$$
(1.9)

Уравнение (1.8) является исходным уравнением при расчете фундаментных полос с учетом ползучести основания.

2. Следуя [5], представим искомую функцию $p^*(\xi, t)$ в виде суммы

$$p^*(\xi, t) = p(\xi, \tau_1) + p_1(\xi, t), \tag{2.1}$$

где через $p(\xi, \tau_1)$ обозначены реактивные давления в момент приложения внешней нагрузки, через $p_1(\xi, t)$ —приращения реактивных давлений за счет ползучести основания.

Заметим, что поскольку упруго-мгновенное решение удовлетворяет условиям равновесия, давления $p_1(\varepsilon, t)$ должны быть самоуравновешенными и удовлетворять, в связи с этим, следующим очевидным условиям

$$\int_{-1}^{1} p_1(\varepsilon,t) d\varepsilon = 0,$$

 $\int_{-1}^{1} p_1(\xi, t) \,\xi d\xi = 0.$

Учитывая (2.1), а также (1.5) и (1.7), на основании (1.8), для определения $p(\xi, \tau_1)$ и $p_1(\xi, t)$, будем иметь следующие два уравнения

$$v\left(\xi,\tau_{1}\right) = y\left(\xi,\tau_{1}\right) \tag{2.3}$$

(2.2)

Н

$$\overline{\widetilde{v}}_{1}(\overline{z},t) - \int_{\overline{z}_{1}}^{t} K(t,\tau) \ \overline{\widetilde{v}}_{1}(\overline{z},\tau) \ d\tau =$$

$$= \overline{y}_{1}(\overline{z},t) + \overline{v}(\overline{z},\tau_{1}) \int_{\overline{z}_{1}}^{t} K(t,\tau) \ d\tau, \qquad (2.4)$$

где

$$\bar{v}_{1}(\xi,t) = -\frac{2l}{\pi} \vartheta(t) \int_{-1}^{1} \ln \frac{|\xi-\eta|}{|\eta|} p_{1}(\eta,t) \, d\eta.$$
(2.5)

Кроме того, входящая в (2.4) функция $\overline{y_1}(\bar{z}, t)$ находится с помощью дифференциальной зависимости

$$\frac{D}{l^4} \frac{\partial^4 y_1(\xi, t)}{\partial \xi^4} = -p_1(\xi, t).$$
(2.6)

Уравнение (2.3), служащее для определения давлений р (ξ, τ₁), яв-

ляется исходным уравнением соответствующей упруго-мгновенной задачи (при $t = \tau_1$), решение которой известно [10]. Поэтому разрешению подлежит уравнение (2.4) с учетом (2.5) и (2.6).

Следует отметить, что нахождение точного выражения для неизвестной функции $p_1(\xi, t)$ по указанным зависимостям (2.4)—(2.6) представляет большие математические трудности.

В связи с этим целесообразно эту функцию представить в виде [9]

$$p_1(\xi, t) = \sum_{i=1}^{l=n} \mathcal{H}_i(t) F_i(\xi), \qquad (2.7)$$

где H_i (t)-функция только времени t, подлежащая определению,

F_i(ξ)—функция только координаты ξ, выражением которой наперед задаемся так, чтобы удовлетворялись условия (2.2).

Для функции F_i(ξ) удобио принять предложенное Л. П. Винокуровым [11] выражение (в случае симметричного приложения внешней нагрузки)

$$F_i(\xi) = \cos \frac{(2i-1)\pi\xi}{2} + (-1)^i \frac{2}{(2i-1)\pi} \,. \tag{2.8}$$

Ограничиваясь в соотношении (2,7) одним первым членом ряда и принимая во внимание, что в формулах (2.5) и (2.6) время t является параметром, уравнение (2.4) перепишем в виде

$$\left[f(\xi) - \overline{u}(\xi)\frac{1}{\vartheta(t)}\right]H_{1}(t) - f(\xi)\int_{\eta}K(t,\tau)H_{1}(\tau)\,d\tau =$$

$$=\overline{v}(\xi,\tau_{1})\frac{1}{\vartheta(t)}\int_{\tau_{1}}^{t}K(t,\tau)\,d\tau.$$
(2.9)

Здесь

$$f(\xi) = -\frac{2l}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} F_1(\eta) \, d\eta, \qquad (2.10)$$

$$F_1(\xi) = \cos\frac{\pi}{2} \,\xi - \frac{2}{\pi} \,. \tag{2.8a}$$

Что же касается функции $\overline{u}(\xi)$, то она представляет собой относительные прогибы полосы от давлений $p_1(\xi, t)$ при $H_1(t) = 1$ и определяется с помощью уравнения

$$\frac{D}{l^{\prime}}\bar{u}^{IV}(\xi) = -F_{1}(\xi).$$
(2.11)

Опираясь на результаты исследования, приведенного в работе-

Н. Ф. Какосимиди

[11], где применено подобное представление искомой функции (в упруго-мгновенном решении), можно утаерждать, что точность расчета будет достаточной, если, вместо выполнения уравнения [2.9] по всей длине полосы или в отдельных контактных точках, допустить выполнение его в интегральной форме на отдельных участках контакта.

В соответствии с этим, разбив ширину контакта на два участка и проинтегрировав уравнение (2.9) в пределах одного из них, например, правого, получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции H₂(t)

$$\left[1 - \frac{B}{A} \frac{1}{\vartheta(t)}\right] H_1(t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) H_1(\tau) d\tau =$$
$$= \frac{C}{A} \frac{1}{\vartheta(t)} \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau, \qquad (2.12)$$

где

$$A = \int_{0}^{1} f(\xi) d\xi, \quad B = \int_{0}^{1} \overline{u}(\xi) d\xi, \quad C = \int_{0}^{1} \overline{v}(\xi, \tau_{1}) d\xi.$$
(2.13)

Согласно [14] выражение для меры ползучести C (t, т) можно принять в виде [2]

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\tau(t-\tau)} \right], \qquad (2.14)$$

где

ф (т) — предельная мера ползучести, у — некоторая постоянная.

Учитывая, что

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E_0(\tau)} + \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\tau (t-\tau)} \right]$$
(2.15)

и полагая для простоты

$$v_0^*(t,\tau) = v_0(t) = v_0 = \text{const},$$
 (2.16)

интегральное уравнение (2.12) запишем так

$$\left[\frac{1}{E_{0}(t)} - \frac{B}{A(1-v_{0}^{2})}\right] H_{1}(t) - \int_{\tau_{1}}^{t} H_{1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{\frac{1}{E_{0}(\tau)} + \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]\right\} d\tau = \\ = \frac{C}{A(1-v_{0}^{2})} \left\{ 1 - E_{0}(t) \left[\frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \varphi(\tau_{1}) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau_{1})}\right]\right] \right\}.$$
(2.17)

Дифференцируя уравнение (2.17) по t, будем иметь:

Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

$$\left[\frac{1}{E_{0}(t)} - \frac{B}{A(1-v_{0}^{2})}\right] H_{1}^{\prime}(t) + \gamma \left\{\varphi(t) H_{1}(t) - \int_{\tau_{1}}^{t} H_{1}(\tau) \left[\varphi^{\prime}(\tau) + \gamma \varphi(\tau)\right] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau\right\} = \\ = -\frac{C}{A(1-v_{0}^{2})} \left\{E_{0}^{\prime}(t) \left[\frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \varphi(\tau_{1})\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau_{0})}\right]\right] + \\ + E_{0}(t) \gamma \varphi(\tau_{1}) e^{-\gamma(t-\tau_{0})}\right\}.$$
(2.18)

Дифференцируя (2.18) еще раз по t и используя (2.17), после некоторых преобразований для определения $H_t(t)$ получим следующее линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$H_{1}^{*}(t) + H_{1}(t) \left\{ \gamma \left[1 + K_{0}(t) \varphi(t) E_{0}(t) \right] - K_{0}(t) \frac{E_{0}^{*}(t)}{E_{0}(t)} \right\} = \\ = -\frac{C}{A \left(1 - \gamma_{0}^{2} \right) - BE_{0}(t)} E_{0}(t) \left[E_{0}^{*}(t) \left[\frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \varphi(\tau_{1}) \left[1 - \frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \varphi(\tau_{1}) \left[1 + e^{-\gamma(t - \tau_{1})} \right] \right] \right\},$$

$$e^{-\gamma(t - \tau_{0})} \left[\frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \varphi(\tau_{1}) \left[1 + e^{-\gamma(t - \tau_{1})} \right] \right] \right\},$$

$$(2.19)$$

причем

$$K_{0}(t) = \frac{A(1-v_{0}^{2})}{A(1-v_{0}^{2}) - BE_{0}(t)}.$$
(2.19a)

Решение уравнения (2.19) с начальными условиями [согласно (2.17) в (2.18)]

$$H_{\mathbf{I}}(\tau_{\mathbf{I}}) = 0,$$

$$H_{\mathbf{I}}'(\tau_{\mathbf{I}}) = -\frac{C}{A\left(1 - v_{0}^{2}\right) - BE_{0}(\tau_{\mathbf{I}})}\left[E_{0}^{+}(\tau_{\mathbf{I}}) + \gamma\varphi\left(\tau_{\mathbf{I}}\right)E_{0}^{2}(\tau_{\mathbf{I}})\right]$$

выражается в квадратурах следующим образом

$$\begin{split} H_{1}(t) &= -C \left\{ \frac{E_{0}'(\tau_{1}) + \gamma \varphi(\tau_{1}) E_{0}^{2}(\tau_{1})}{A(1 - v_{0}^{2}) - BE_{0}(\tau_{1})} \int_{\tau_{1}}^{t} e^{-m(\tau)} d\tau + \\ + \int_{\tau_{1}}^{t} e^{-m(\tau)} d\tau \int_{\tau_{1}}^{\tau} \frac{E_{0}(z) e^{m(z)}}{A(1 - v_{0}^{2}) - BE_{0}(z)} \left\{ E_{0}^{*}(z) \left[\frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \right. \\ \left. + \varphi(\tau_{1}) \left[1 - e^{-\gamma(z - \tau_{1})} \right] \right] + E_{0}'(z) \gamma \left[\frac{1}{E_{0}(\tau_{1})} + \right. \\ \left. + \varphi(\tau_{1}) \left[1 + e^{-\gamma(z - \tau_{1})} \right] \right] \right\} dz \right\}, \end{split}$$
(2.20

6 Известия АН, серия физ, мат. ваук, № 6

где

$$m(z) = \int_{z_0}^{z} \left\{ \gamma \left[1 + K_0(z) \,\varphi(z) \,E_0(z) \right] - K_0(z) \,\frac{E_0(z)}{E_0(z)} \right\} dz, \tag{2.21}$$

Из выражения (2.20) очевидно, что для абсолютно жесткой полосы, т. е. при C = 0, функция $H_1(t)$ обращается в нуль и, следовательно, ползучесть не оказывает влияния на распределение реактивных давлений, что уже отмечалось [4].

Полученная формула $H_1(t)$ может быть упрощеня, если пренебречь изменяемостью во времени модуля упруго-мгновенной деформации $E_0(\tau)$.

В указанном случае будем иметь

$$H_{1}(t) = -\frac{\gamma C\varphi(\tau_{1}) E_{0}^{2}}{A\left(1 - \varphi_{0}^{2}\right) - BE_{0}} e^{\gamma \tau_{1}} \int_{\tau_{1}}^{t} e^{-\gamma (t - h_{0} E_{0}) \int_{\tau_{1}}^{\tau_{1}(t - \gamma)} d\tau} d\tau.$$
(2.22)

Принимая выражение для предельной меры ползучести с (т) в виде [2,14]

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau_1},$$
 (2.23)

для неизвестной функции окончательно получим следующую формулу

$$H_{1}(t) = -K \left(C_{0} + \frac{A_{1}}{\tau_{1}} \right) \tau_{1}^{p} e^{r \tau_{1}} r^{-(1-p)} \left[\Phi \left(rt, p \right) - \Phi \left(r\tau_{1}, p \right) \right],$$
(2.24)

где

$$K = \frac{\gamma C E_0^2}{A \left(1 - v_0^2\right) - B E_0}, \ r = \gamma \left(1 + K_0 C_0 E_0\right), \ p = \gamma A_1 K_0 E_0.$$
(2.25)

Кроме того в выражении (2.24) участвуют неполные гамма-функция.

$$\Phi(x, p) = \int_{0}^{x} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{p}} d\tau, \qquad (2.26)$$

разность которых представляется в виде

$$\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) = \int_{r\tau_1}^{\pi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau - \int_{rt}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau, \qquad (2.27)$$

причем входящие сюда интегралы вычисляются по асимптотической формуле [2]

$$\int_{x}^{z} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{p}} d\tau = \frac{e^{-\tau}}{x^{p}} \left[1 - \frac{p}{x} + \frac{p(p+1)}{x^{2}} - \frac{p(p+1)(p+2)}{x^{3}} + \cdots + \frac{p(p+1)(p+2)}{x^{3}} + \cdots +$$

Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

$$+ \frac{(-1)^{n-1} p \left(p+1\right) \cdots \left(p+n-2\right)}{x^{n-1}} + \cdots].$$
(2.28)

Из выражений (2.24) и (2.27) вытекает, что функция $H_1(t)$ минимальное значение, равное нулю, принимает в начальный момент $t = \tau_1$, а максимальное значение—при $t = \infty$, которое согласно (2.28) составляет

$$H_{1}(\infty) = -\frac{K}{r} \left(C_{0} + \frac{A_{1}}{\tau_{1}} \right) \left[1 - \frac{p}{r\tau_{1}} + \frac{p(p+1)}{(r\tau_{1})^{2}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}p(p+1)\dots(p+n-2)}{(r\tau_{1})^{n-1}} + \dots \right].$$
(2.29)

Отсюда следует, что с увеличением возраста грунта τ_1 предельное значение функции $H_1(t)$ убывает и при $\tau_1 \rightarrow \infty$ стремится к величине — $\frac{KC_0}{r}$.

Таким образом, функция $H_1(t)$, определяемая формулой (2.24), отражает влияние возраста и меры ползучести основания на характер изменения во времени реактивных давлений $p^*(\xi, t)$.

3. Перейдем теперь к определению вспомогательных величин А, В и С, представленных формулами (2.13).

Для этого врежде запишем выражения для функций $f(\xi)$, $u(\xi)$ и $\overline{v}(\xi, \tau_1)$, входящих в указанные формулы.

Подставляя (2.8a) в (2.10), после интегрирования получим следующее асимптотическое выражение для функции f(5)

$$f(\xi) = \frac{4l}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} \xi \left[-\cos \frac{\pi}{2} \xi \ln (1-\xi^2) + \pi - \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \frac{(1-\xi)^3 + (1+\xi)^3}{3.3!} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \frac{(1-\xi)^5 + (1+\xi)^5}{5\cdot5!} - \cdots \right] + \right. \\ \left. + \sin \frac{\pi}{2} \xi \left[\left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \xi \right) \ln (1-\xi) + \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \xi \right) \ln (1+\xi) - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{(1-\xi)^2 - (1+\xi)^2}{2\cdot2!} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{(1-\xi)^4 - (1+\xi)^4}{4\cdot4!} - \cdots \right] + \\ \left. + (1-\xi) \ln (1-\xi) + (1+\xi) \ln (1+\xi) + 2 \left[-\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \frac{1}{3\cdot3!} - \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \frac{1}{5\cdot5!} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n-1} \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} + \cdots \right] \right\}.$$
(3.1)

Для определения $\overline{u}(\xi)$ на основании (2.11) и (2.8а) имеем дифференциальное уравнение

Н. Ф. Какосимили

$$\int_{l^1} \overline{u}^{IV}(\xi) = -\left(\cos\frac{\pi}{2}\,\xi\,-\frac{\pi}{2}\right),\,$$

решением которого, удовлетворяющим условиям

$$\overline{u}(0) = \overline{u'}(0) = \overline{u''}(1) = \overline{u'''}(1) = 0,$$

будет

$$\overline{u}(\xi) = -\frac{l^4}{D} \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^4 (\cos \frac{\pi}{2} \xi - 1) + \frac{1}{\pi} \frac{\xi^2}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{\xi^4}{24} \right].$$
(3.2)

Функция $v(\xi, z_1)$, представяющая собой относительные упругомгновенные перемещения (осалки) основания, подлежит определению в каждом конкретном случае по известной формуле

$$\overline{v}(\xi,\tau_1) = -\frac{2I}{\pi} \frac{1-s_0^2}{E_0} \int_{-1}^{1} \ln \frac{|\xi-\eta|}{|\eta|} p(\eta,\tau_1) d\eta,$$
(3.3)

Подставляя (3.1) и (3.2) в соответствующие формулы (2.13) и выполняя интегрирование, получаем следующие значения для величин А н В

$$A = -0.177 \frac{4l}{\pi}, \ B = 0.0119 \frac{l^4}{D}.$$
(3.4)

При этом вычисление A произведено с использованием интегрирования по формуле трапеций.

Что касается величины C, являющейся ничем иным, как средней интенсивностью относительных упруго-мгновенных осадок основания на рассматриваемом участке (0,1), то определение ее удобно производить по формуле прямоугольников, принимая в соотношении (3.3) значения давлений $p(z, \tau_1)$ в выбранных точках по готовым таблицам [10]. Кроме того, можно использовать готовые значения безразмерных осадок, приведенные там же [10] для некоторых частных случаев.

Подставляя полученные значения (3.4) в формулы (2.25), последние перепишем в виде

$$K = -\frac{\pi\gamma CE_0^2}{0.708l\left(1 - v_0^2\right)\left(1 + 0.0672\lambda\right)},$$

$$r = \gamma \left(1 + \frac{C_0 E_0}{1 + 0.0672\lambda}\right),$$

$$p = \gamma \frac{A_1 E_0}{1 + 0.0672\lambda},$$
(3.5)

где через λ обозначен показатель гибкости полосы

$$\lambda = \frac{(1 - v^2) \pi E_0 b' l^3}{(1 - v_0^2) 4EJ} = \frac{1 - v^2}{1 - v_0^2} \frac{3\pi E_0 l^3}{Eh^3}.$$
(3.6)

Приводим окончательные выражения для величин: реактивных давлений Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

$$p^{*}(\xi, t) = p(\xi, \tau_{1}) + H_{1}(t) \left(\cos\frac{\pi}{2}\xi - \frac{2}{\pi}\right), \qquad (3.7)$$

поперечных сил

$$Q^{*}(\xi, t) = Q(\xi, \tau_{1}) + b' \, lH_{1}(t) \, \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \xi - \frac{2}{\pi} \xi\right) \tag{3.8}$$

и изгибающих моментов

$$\mathcal{M}^{*}(\xi, t) = \mathcal{M}(\xi, \tau_{1}) + b' l^{2} H_{1}(t) \left(-\frac{4}{\pi^{2}} \cos \frac{\pi}{2} \xi - \frac{1}{\pi} \xi^{2} + \frac{1}{\pi} \right).$$
(3.9)

Простота приведенных расчетных формул очевидна.

Напомним, что первые слагаемые в формулах (3.7)—(3.9) находятся из упруго-мгновенного решения, в качестве которого целесообразно использовать решение М. И. Горбунова-Посадова, поскольку по нему составлены обстоятельные таблицы [10], к которым мы уже обращались.

Отметим также, что в физическом отношении входящая в формулы (3.7)-(3.9) функция $H_1(t)$ характеризует перераспределение нормальных контактных усилий за счет ползучести основания.

При расчете балки, основание которой работает в условиях плоского напряженного состояния, во всех

выхладках следует положить у = v0 = 0. 4. Рассмотрим следующий конкретный пример. Пусть на железобетонную полосу, выполненную из бетона марки 150 (E = 1,65 · 10⁵ кг/см²) длиной 21 = 8,0 м и толщиной h=1,0 м действует центральная нагрузка в виде сосредоточенной силы Р (фиг. 1а), величина которой нарастает во времени по ступенчатому графику (фиг. 16), состоящему из четырех ступеней по 20 m каждая (на графике указанные ступени отмечены соответствующими значками I, II, III и IV). Основание сложено из пылеватого суглинка (грунт, применявшийся в опытах Р. С. Месчяна [13], лаб. № 2-57), для которого



$$C_0 = 0,0025 \frac{1}{\kappa \epsilon / c M^2}, A_1 = 0,044 \frac{c y m \kappa u}{\kappa \epsilon / c M^2}$$

сутки

юэффициенты Пуассона приняты равными
$$v = \frac{1}{6}$$
, $v_0 = 0.35$.

Требуется определять значения величин реактивных давлений p^* (ξ, t) и изгибающих моментов M^* (ξ, t) в момент времени $t = \infty$.

Соответственно графику роста нагрузки, график изменения во времени модуля упруго-мгновенной деформации $E_0(\tau)$ принимаем по ступенчатой кривой, приведенной на фиг. 1в. Там же пунктирной линией показана действительная кривая величины $E_0(\tau)$ [13], причем значение последней при $\tau_1 = 0$ (в момент загружения), равное 100 кг/см², принято ориентировочно^{*}. Величины λ , C, K, r, p и $H_1(\infty)$, изменяющиеся в зависимости от значения модуля мгновенной деформации E_0 и возраста грунта τ_1 , при котором приложена та или другая ступень нагрузки, принимают значения, сведенные в таблице 1. При этом в столбце для показателя гибкости λ в числителях даны значения, по-*Таблица 1*

№ ступени	λ	С см	$K \frac{\kappa z^3}{c s c^4 c y m \kappa u}$	$r \frac{1}{cymcu}$	p	$\begin{array}{c} H_1(\infty) \\ \kappa c/cM^2 \end{array}$
1	<u>0.40</u> 0	0			-	0
11	$\frac{3,24}{3}$	0,029	59,8	0,99	10.8	-0,19
m	4,86	-0,027	136,0	1,20	14.6	-0.31
IV	$\frac{5.06}{5}$	-0.027	148.0	1,24	15,2	-0,32

PEANTWONDIE AABAENNA D(E.C.) B T/N







лученные по формуле (3.6), в знаменателях—те же величины, но округленные до табличных значений [10] и принятые в дальнейшем расчете. Кроме того величины С определены с помощью эпюр относительных прогибов и безразмерных осадок, приведенных у М. И. Горбунова-Посадова [10].

На фиг. 2 даны эпюры реактивных давлений $p(\xi, \tau_1)$ и приращений давлений за счет ползучести основания $p_1(\xi, \infty)$, найденных от действия в отдельности стученей нагрузок I, II, III и IV. При этом приращения давлений от действия первой ступени нагрузки приняты равными нулю, поскольку соответствующий показатель гибкости полосы имеет значение, близ-

* Следует заметить, что ошибка до 50—100°/о в значении величним E₀ (т) в момент приложения первой ступени нагрузки практического влияния на окончательные результаты расчета не оказывает, поскольку при этом жесткость конструкции заметно не изменяется. Так, если в данном примере вместо значения 100 кг/см² принять 200 кг/см², вносимая этим в результирующие величины M_{max} погрешность составит 2,4 °/о. кое к нулю. Давления р (ξ, т₁) определены с помощью таблиц [10].

Затем были вычислены результирующие эпюры $p(\xi, \tau_1)$ и $p^*(\xi, \infty)$, отвечающие упругому решению при переменном $E_0(z)$ и решению с учетом ползучести. Первые определены путем суммирования отдельных эпюр $p(\xi, \tau_1)$, от каждой ступени нагрузки, а вторые—путем суммирования отдельных эпюр как $p(\xi, \tau_1)$, так и $p_1(\xi, \infty)$. Аналогичным путем произведено вычисление изгибающих моментов полосы $M(\xi, \tau_1)$ в $M^*(\xi, \infty)$. Помимо этого, с целью сопоставления различных решений, были найдены результирующие усилия по упругому расчету [10] при постоянном $E_0(\tau)$, который в этом случае принят равным установившемуся с течением времени значению 1250 $\kappa z/cm^2$.

Полученные таким образом результирующие эпюры показаны на фиг. 3, где сплошными линиями представлено решение с учетом ползучести, а пунктирными линиями 1 и 2—упругие решения, причем линия 1 соответствуют решению при переменном $E_0(\tau)$, а линии 2—решению при постоянном $E_0(\tau)$.

Как явствует из фиг. З, учет ползучести основания приводит к заметному перераспределению контактных усилий, а последнее-к возрастанию изгибающих моментов.

Приведем, для сравнения, значения максимального изгибающего момента:

по решению с учетом ползучести М_{тах} = 98,6 mм,

по упругому решению при переменном $E_0(z)$ $\mathcal{M}_{max} = 87,2$ *mм*,

по упругому решению при постоянном Е. (т) Мтах = 80,0 т.м.

Таким образом, в данном примере значение максимального изгибающего момента по решению с учетом ползучести больше, чем по учругим решениям при переменном и постоянном $E_0(\tau)$ соответственио на 13 н 23%. Если учесть также влияние ползучести от первой ступени нагрузки, которым мы пренебрегли, то разница в указанных величинах $M_{\rm max}$ будет примерно 15 п 25%.

5. Приведем теперь некоторый анализ полученного результата, в частности, рассмотрим вопрос о том, чем объясняется тот факт, что модуль міновенной деформации групта во времени растет, а фундамент в результате работает как более жесткий (см. фиг. 3), т. е. показатель гибкости его уменьшается.

Действительно, модуль мгновенной деформации повышается во времени, поскольку, при последовательном приложении ступеней внешней нагрузки, за счет уплотнения грунта мгновенные деформации уменьшаются [13].

Повышение модуля мгновенной деформации влечет за собой возрастание показателя гибкости фундамента в моменты загрузки, вследствне чего фундамент становится как-бы более гибким, что хорошо усматривается из эпюр реактивных давлений $p(\xi, \tau_1)$, представленных на фиг. 2.

Этот вывод на первый взгляд противоречит ранее высказанному положению об уменьшении, с течением времени, показетеля гибкости фундамента. Но данное противоречие является только кажущимся.

Дело в том, что модуль мгновенной деформации характеризует только деформацию упругую, появляющуюся в момент приложения той или другой ступени нагрузки, а не полную (общую) деформацию грунта в целом. Последняя состоит из упруго-мгновенной деформации и деформации ползучести. Первая составляющая полной деформации, как уже указывалось, уменьшается во времени, вторая же составляющая, наоборот, увеличивается, причем соотношение между этими составляющими во времени таково, что общая деформация на протяжении действия той или иной ступени нагрузки также увеличивается [13]-Вследствие этого модуль общей деформации грунта уменьшается, а



Фиг. 3.

потому и показатель гибкости фунламента с течением времени уменьшается.

Итак, модуль мгновенной деформации во времени растет, а модуль общей деформации убывает; показатель гибкости фундамента в моменты загрузки увеличивается, а вслед за ними уменьшается.

В связи с этим фундамент впоследствии становится как-бы более жестким* и поэтому эпюра реактияных давлений принимает характерный для подобных конструкций вид [10], причем давления под средней частью фундамента уменьшаются, а у краев увеличиваются (фиг. 3).

Отметим, что перераспределение давлений за счет ползучести протекает во времени следующим образом.

В момент приложения первой

ступени нагрузки показатель гибкости фундамента близок к нулю, так как соответствующая величина молуля мгновенной деформации грунта незначительна. Вследствие этого в данный момент фундамент перемещается, в основном, как одно целое, т. с. без упругих деформаций. При этом, согласно результатам работы [6], напряжения с учетом ползучести совпадают с соответствующими напряжениями упруго-мгновенной задачи. Поэтому, на протяжении действия первой ступени нагрузки, перераспределение давлений за счет ползучести практически не имеет места, хотя мера ползучести основания значительна.

90

В момент приложения второй ступени нагрузки показатель гибкости фундамента заметно больше нуля, т. е. фундамент приобрел

Этот факт является совершенно естественным, поскольку, аз счет ползуяссти групта, основание становится более податливым.

очределенную гибкость. Поскольку в этом случае последний претерпевает упругие деформации, перераспределение давлений за счет ползучести имеет место, несмотря на то, что мера ползучести основания меньше [6].

Далее, в момент приложения третьей ступени нагрузки значение показателя гибкости фундамента стало еще большим. Поскольку за счет ползучести основания фундамент впоследствии работает как жесткий и чем больше показатель гибкости, тем больше разница в характере распределения реактивных давлений гибкого и жесткого фундажентов [10], перераспределение давлений должно быть более значительным, что на самом деле и наблюдается.

При приложении четвертой, последней, ступени нагрузки, показатель гибкости фундамента увеличивается незначительно. В связи с этим перераспределение давлений по своей значимости практически совпадает с той, которая имела место при предыдущей ступени нагрузки.

Это означает, что грунт основания перешел в упруго-уплотненное состояние, вследствие чего процесс перераспределения давлений за счет ползучести принял затухающий характер, что и следовало ожидать.

Все сказанное здесь нетрудно усмотреть из эпюр приращений реактивных давлений, приведенних на фиг. 2.

Необходимо отметить, что за счет ползучести иногда может иметь место выравнивание эпюры реактивных давлений. Это зависит от категории фундамента, рода основания и т. п. Например, в [20] на стр. 1158--20 имеется такой случай, относящийся к бесконечной балке на, так называемом, максвелловском основании.

Выравнивание эпюры давлений, вообще, можно ожидать у тех балок или полос, которые относятся к категории "длинных" (по терминологии [10]). У этих фундаментов первоначальная эпюра давлений характеризуется большими ординатами в центре и меньшими—у краев. Поэтому, в результате перераспределения реактивных давлений за счет ползучести, разница между средними и крайними ординатами будет уменьшаться и эпюра давлений несколько выпрямится.

Рассмотренная же в нашем примере фундаментная полоса относится к категории "коротких" полос, у которых в первоначальной эвюре, согласно решению теорин упругости [10], превалирующими являются давления у краев, а не в центре. В связи с этим, в результате вышеуказанного перераспределения давлений, разница между средними и крайними ординатами будет увеличиваться и, следовательно, в таком случае выравнивания эпюры давлений быть не может.

Следует отметить, что полученные в настоящей работе результаты хорошо согласуются с результатами работ других авторов.

В работе И. А. Кийсс ([9], стр. 22) получен такой же характер перераспределения реактивных давлений, что и у нас (уменьшение давлечий в центре и увеличение их у краев фундамента). Аналогичный характер перераспределения давлений получен в работах зарубженых авторов ([20], стр. 1158—18 и [21], стр. 2195— —26).

Наконец, во всех указанных случаях имело место увеличение изгибающих моментов (см. [20], стр. 1158—18, 20 и [21], стр. 2195— —27). Этот факт легко усматривается также из этнор реактивных дзялений, приведенных в [9].

Заключая наше изложение следует констатировать, что учет ползучести основания при расчете фундаментных полос (а также балок) приводит к возрастанию расчетных усилий. Необходимо, однако, заметить, что при одновременном учете ползучести и самой полосы, полученная разница в усилиях будет уменьшена, но в малой степени, поскольку деформация ползучести полосы в отличне от соответствующей деформации основания имеет меньшее значение.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила З VII 1960

ъ. Ֆ. Կակարիքիգի

ՀԻՄՔԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

UUTOROPHU

Հողվածում դիտարկվում է առաձգական սող քային հիմնատակի վրա հիմքային շերտի հաշվարկը՝ ելնելով Գ. Ն. Մասլովի, Ն. Խ. Հարուխյունյանի սողքի տեսուխյան հիմնական նախադրյալներից։

անդրի բերված լուծման մեջ, ի ատրբերունլուն դոլունլուն ունեցող արիշ աշխատունյունների, օդտադործված է առաձդական կիստատրածունյան մոդելը։

Պարզված է, որ ճիմ քային շերտերի ճաշվարկման ժամանակ ճիմնատակի ոողքի ճաշվառումը բերում է կոնտակաային ճիդերի զգայի վերաբաշիմմանը։

ЛИТЕРАТУРА

- Маслов Г. Н. Термонапряженное состояние в бетопных массивах с учетом ползучести бетона. "Известия НИИГ*, 28, 1941.
- 2. Арутючин И. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат. М.-Л., 1952.
- Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. "ПММ". 23, вып. 5, 1959.
- Проколович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести-"ПММ", 20, вып. 6, 1956.
- Прохопович И. Е. О влияния ползучесть на распределение внутренних усилий в орготропных оболочках. "Инженерный сборник АН СССР», 24, 1956.

 Прокопович И. Е. Влияние длятельных процессов на напряженное и деформированное состояние некоторых сооружений. Лиссертация на степень доктора теха, наук, защищенияя в МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1960.

 Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, М.-Л., 1949.

Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

- Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теории ползучести. "Изв. АН АрмССР, физ-мат., естественные и тех. науки", 9, вып. 5-1956.
- Кийсе И. А. К расчету железобстонных фундаментных балок с учетом ползучести бетона и основания. Изд. Таллинского политехнического института, Таллин, 1958.
- Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. Госстройнздат, М., 1953.
- Винокуров Л. П. Прямые методы решения пространственных и контактных задач дая массивов и фундаментов. Изд. Харьковского университета. Харьков, 1956.
- Влисов В. З., Леонтьев Н. Н. Техническая теория расчета фундаментов на упругом основания. "Сборник трудов МИСИ*, № 14, М., 1956.
- Мосчин С. Р. О поязучести связного грунта при сжатни в условиях невозможности бокового расширения. "Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук". 11 вып. 4, 1958.
- Месчян С. Р. К вопросу об описании ползучести связных грунтов нарушенной структуры. "ДАН АрмССР», 21, № 2, 1955.
- Месчян С. Р. Деформации ползучести связных грунтов при сжатии (автореферат). Ленинградский политехнический институт, Л., 1956.
- Флорин В. А. Одномерная залача уплотнения сжимаемой пористой ползучей среды. "Иав. АН СССР, ОТН⁴, № 6, 1953.
- Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушечия структуры. "Изв. АН СССР, ОТН. № 9. 1953.
- 18. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, М.-Л., 1948.
- Денисов Н. Я. О природе деформации глипистых пород. Изд. Минречфлота, М., 1951.
- 20. Freudenthal A. M., Lorsch H. G. The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation. Jour. of the Eng. Mech. Div., "Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng.", vol. 83, No. EM1, p. 1158, Jan. 1957.
- Hoskin B, C., Lee E. H. Flexible Surfaces on Viscoelastic Subgrades., "Proc. of the Amer. Soc. of Cifil Fng.", vol. 85, No. EM4, p. 2195, Oct. 1959.

20340405 000 ФРЗАРИЗАНИЗИИ И ЦАЦАВИРИЗИ ВИДАЦАРР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зрарца-ишрыйша, артагрупсбан XIII, No 6, 1960 Физико-математические науки

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

И. И. Кандауров

О распределении напряжений в зернистых (грунтовых) средах

Известно, что вопрос о распределении напряжений в дискретных средах, также как и в континуальных, является центральным при расчете различных сооружений, ибо без знания характера распределения напряжений невозможно определить допускаемую нагрузку, коэффициент запаса, деформацию сооружения и т. д.

Использование грунтового полупространства в качестве основания под различные сооружения привело к необходимости создания ряда расчетных моделей грунтового основания (модель Фусса-Винклера, упругого основания П. Л. Пастернака, Уэрстергарда, М. М. Филоненко-Бородича, В. З. Власова, упругого слоя конечной мощности Г. К. Клейна, И. И. Черкасова и др.) [20, 26]. В каждой из этих моделей в явном или неявном виде принимается тот или иной характер распределения напряжений в грунтовом массиве.

Принятие в качестве расчетных различных моделей объясняется большим многообразием и сложностью процессов, протекающих в природных грунтах и зависящих от их структурных особенностей. Учет этих особенностей при расчете различных инженерных сооружений представляял и представляет собой актуальную проблему механики грунтов [10, 11, 14, 15, 9].

Поскольку грунт вообще, а зернистая среда в особенности, представляет физическое тело, образованное совокупностью различных по размеру и форме частиц, то решение вопроса о распределении напряжений в нем невозможно без применения теории вероятностей и математической статистики.

Идея применения к изучению напряженного состояния дисперсной грунтовой среды вероятностных методов впервые была высказана Г. И. Покровским [12]. О плодотворности этой иден свидетельствуют полученные в последние годы новые результаты в механике сыпучих и зернистых сред, обстоятельный обзор которых приведен в постановочной статье М. Н. Гольдштейна [1].

С другой стороны Г. К. Клейн, оценивая гипотезу сплошности в применении к строительной механике сыпучих тел, считает, что "создание дискретной теории является уже сейчас своевременным" [9]. Таким образом, применение вероятностных методов в сочетании с учетом дискретного строения грунта должно быть основой для дальнейшего изучения напряжениого состояния зернистых грунтовых сред. Распределение напряжений в таких средах необходимо рассматривать как направленный конкретно заданной нагрузкой стохастический процесс.

Используя указанные выше иден, дополняя и развивая их рядом новых гипотез, учитывающих более полно на базе математической статистики и теории вероятностей дискретное строение грунта, автором получены новые решения по распределению напряжений в зернистой грунтовой среде [23, 24]*.

Основные предпосылки построенной теории опубликованы в статье автора [25], поэтому в данной статье, опуская предпосылки и выводы, приводим окончательные решения.

Составляющие напряжения в случае плоского загружения зернистого грунтового массива вертикальной произвольно заданной нагрузкой имеют вид:

$$\sigma_z = \frac{2}{z} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\pi}} \int_{-b}^{+b} f(\xi) e^{-\frac{\mathcal{A}\mathcal{A}}{2\xi} (x-\xi)^2} d\xi,$$

$$\sigma_x = \frac{2}{z^3} \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \int_{-b}^{+b} f(\xi) (x - \xi)^2 e^{-\frac{4\pi}{z^3} (x - \xi)^2} d\xi,$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4z\sqrt{\pi \lambda}} \int_{0}^{+b} f(\xi) e^{-\frac{4z(x-\xi)!}{2^4}} d\xi,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{2}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \int_{-b}^{+b} f(\xi) (x-\xi) e^{-\frac{4\pi (x-\xi)^2}{z^4}} d\xi,$$

где о_г — вертикальные напряжения;

оу, ох — горизонтальные мапряжения;

*<i>
 т_{x2} = τ_{2x} − касательные напряжения;*

 л — коэффициент распределительной способности среды, определяемый по экспериментальным данным;

 f(x) — функция, описывающая распределение вертикальной нагрузки по полосе шириной 2b;

х; у; z - координаты рассматриваемой точки.

В случае пространственного загружения зернистого массива получены следующие выражения для составляющих напряжения:

Полученные автором решения докладывались на 1 Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в январе-феврале 1960 г.



$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{4\pi}{\pi z^3} \int_F f(\eta; \xi) \left(x - \xi\right) e^{-\frac{4\pi \left[(x - \xi)^3 + (y - \eta)^3\right]}{z^3}} dF,$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{4\pi}{\pi z^3} \int_{F}^{s} f(\eta; z) \left(y - \eta\right) e^{-\frac{4\pi \left[\left(x - z\right)^3 + \left(y - \eta\right)^3\right]}{z^3}} dF,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{4a}{\pi z^4} \int_F f(\eta;\xi) (y \to \eta) (x - \xi) e^{-\frac{4d((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}{z^4}} dF,$$

где F — площадь интегрирования ($dF = dz \cdot d\eta$);

ξ; η — переменные интегрирования;

f(η; ξ) - функция, описывающая характер нагрузки.

В таблице 1 приведены формулы, полученные для различных случаев плоского загружения массива, а в таблице 2 — для пространственного загружения.

Таблица Г

И. И. Кандауров

$$\begin{split} \mathfrak{s}_{z} &= \frac{1}{2m} \Big| \left(x + b \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x + b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] + \\ + \left(x - b \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x - b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] - 2x \Phi \left(\frac{2x}{z} V 2 \overline{x} \right) \Big] + \\ &+ \frac{z}{4m \sqrt{\pi x}} \Big[e^{-\frac{4x(x+b)^{\alpha}}{z^{\alpha}}} + e^{-\frac{4x(x-b)^{\alpha}}{z^{\alpha}}} - 2e^{-\frac{4x^{\alpha}}{z^{\alpha}}} \Big] \\ \\ \mathfrak{s}_{z} &= \frac{1}{2m} \Big\{ \left(x + b \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x + b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] + \\ &+ \left(x + b \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x - b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] - \\ &- \left(x + B \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x - b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] - \\ &- \left(x - B \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x - b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] - \\ &- \left(x - B \right) \Phi \left[\frac{2 \left(x - b \right)}{z} V 2 \overline{x} \right] \Big] + \\ &+ \frac{z}{4m \sqrt{\pi x}} \Big[e^{-\frac{4x(x+b)^{\alpha}}{z^{\alpha}}} + e^{-\frac{4x(x+b)^{\alpha}}{z}} - e^{-\frac{4x(x+b)^{\alpha}}{z^{\alpha}}} - e^{-\frac{4x(x-b)^{\alpha}}{z^{\alpha}}} \Big] \\ \\ \Phi_{\mathrm{H}r} \cdot 1 \\ \mathfrak{s}_{z} &= \frac{P_{1}}{\sqrt{1 + \frac{A^{2}z^{2}}{4x}}} \int_{-b}^{b} f(z) e^{-\frac{4x(x-b)^{\alpha}}{1 + \frac{Ax^{\alpha}z^{\alpha}}{4x}}} dz \\ \\ \Phi_{\mathrm{H}r} \cdot 1 \\ \mathfrak{s}_{z} &= \frac{P_{2}}{\sqrt{1 + \frac{A^{2}z^{2}}{4x}}} \int_{-b}^{b} f(z) e^{-\frac{4x(x-b)^{\alpha}}{1 + \frac{Ax^{\alpha}z^{\alpha}}{4x}}} dz \\ \\ \Phi_{\mathrm{H}r} \cdot 1 \\ \mathfrak{s}_{z} &= \frac{Qx}{2} \Big\{ \Phi \Big[\frac{2x}{z} V 2 \overline{x} \Big] - \Phi \Big[\frac{2 \left(x - b \right)}{z} V 2 \overline{x} \Big] \Big\} + \\ &+ \frac{Qz}{4 \sqrt{\pi x}} \Big(e^{-\frac{4x(x-b)^{\alpha}}{z^{\alpha}}} - e^{-\frac{4x(x-b)^{\alpha}}{2x}} dz \\ \end{array}$$

Tabanna 2

Характер нагрузки	Выражения для вертикальных напряжений при пространственном загружения массива
Фаг. 1 IX	$\sigma = \frac{4PA}{\pi z^{\alpha}} e^{-\frac{4Ar^{\alpha}}{z^{\alpha}}}$
Фиг. 1 XIII	$\sigma_{z_n} = P\left(1 - e^{\frac{4\beta R^2}{z^2}}\right)$
Фиг. 1 IX	$\sigma_{z_{2}} = 2P_{ep} \left[1 - \frac{z^{2}}{4AR^{2}} \left(1 - e^{-\frac{4AR^{2}}{z^{2}}} \right) \right]$
Фаг. 1 Х	$\sigma_{z_{\theta}} = 3P_{cp} \left[1 - \frac{z}{4R} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \Phi\left(\frac{2R\sqrt{2A}}{z}\right) \right]$
Фиг. 1. XII	$\sigma_{\varepsilon_s} = P\left[1 - 2R\int_{0}^{R} \frac{1}{(R+\eta)^2} e^{-\frac{4\pi}{2^k}\eta^s} d\eta\right]$
Фиг. 1 XIV	$ \begin{aligned} \sigma_{z} &= \frac{P}{4} \left\{ \Phi \left[\frac{2(x+b)}{z} \sqrt{2\pi} \right] - \Phi \left[\frac{2(x-b)}{z} \sqrt{2\pi} \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \Phi \left[\frac{2(y+w)}{z} \sqrt{2\pi} \right] - \Phi \left[\frac{2(y-w)}{z} \sqrt{2\pi} \right] \right\} \end{aligned} $
Фиг. 1 XV	$\begin{split} & \sigma_{z} \!=\! \frac{P}{4} \left\{ \! \left(1 \!-\! \frac{z^{2}}{8b^{2}A} \!-\! \frac{x^{2}}{b^{2}} \right) \! \left[\Phi \! \left(\frac{2\left(x+b\right)}{z} \sqrt{2A} \right) \! - \right. \\ & \left \Phi \! \left(\frac{2\left(x-b\right)}{z} \sqrt{2A} \right) \! \right] \! + \! \frac{z}{2b\sqrt{\pi A}} \left[\left(1 \!+\! \frac{x}{b} \right) \! e^{-\frac{4A\left(x-b\right)^{2}}{z^{4}}} \! + \right. \\ & \left. + \left(1 \!-\! \frac{x}{b} \right) \! e^{-\frac{4A\left(x+b\right)^{2}}{z^{4}}} \right] \! \right] \! \times \left\{ \! \left(1 \!-\! \frac{z^{2}}{8m^{2}A} \!-\! \frac{y^{2}}{m^{2}} \right) \! \times \right. \\ & \left. \times \left[\Phi \! \left(\frac{2\left(y+m\right)}{z} \sqrt{2A} \right) \! - \Phi \! \left(\frac{2\left(y-m\right)}{z} \sqrt{2A} \right) \! \right] \! + \right. \\ & \left. + \frac{z}{2m\sqrt{\pi A}} \! \left[\left(1 \!+\! \frac{y}{m} \right) \! e^{-\frac{4A\left(y-m\right)^{4}}{z^{4}}} \! + \left(1 \!-\! \frac{y}{m} \right) \! e^{-\frac{4A\left(y+m\right)^{4}}{z^{4}}} \right] \! \right] \! \end{split}$
Фяг, 1 XVI	$\sigma_z \approx \frac{p}{4} \left\{ \Phi\left[\frac{2}{z} \sqrt{s} \left(r + R\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right] - \Phi\left[\frac{2}{z} \sqrt{s} \left(r - R\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right] \right\}^2$

7 Известия АН, серия физ.-мат. наум, № 6

В таблицах 1 и 2

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{u^{2}}{2}} du,$$

На фиг. 2 сравниваются теоретические напряжения с опытными данными, полученными Гольдбеком [7] для разных размеров штампов при одинаковом среднем удельном давлении на штамп и для одинаковой глубины.



Фиг. 1.

Теоретические кривые построены для нагрузки, распределенной по подошве штампа по параболическому закону. Величины напряжений вычислены при л=0,91.

На фиг. З приведено сравнение теоретических напряжений с опытными данными специальной Комиссии по напряжениям в железнодорожном пути Американской ассоциации гражданских инженеров [7]. На верхнем чертеже сравниваются напряжения под одной шпалой и на нижнем чертеже – под тремя шпалами.

О распределении напряжений в зернистых (грунтовых) средах

Теоретические напряжения вычилены для параболической натрузки, распределенной по полосе, при л=1.

На фиг. 4 приведено сравнение опытных кривых линий равных напряжений, полученных Кеглером и Шейдигом [7], с теоретическими кривыми.

При построении теоретических кривых, величины напряжений, вычисленные для квадратного штампа, пересчитывались для круглого штампа умножением на соотзетствующий коэффициент. Коэффициент этот вычислялся как отношение напряжений на одной и той же глубине по оси загруженных одинаковой нагрузкой круглой и квадратной площадок.

На фиг. 5 представлено сравнение теоретических результатов с опытными данными, полученными для вертикальных напряжений по оси загруженного штампа различными исследователями.

$\frac{z}{R}$	Отношение $\frac{\sigma_z}{P}$ по теории автора при <i>л</i> равном				<u>баунр.</u> 19 по теории	Отношение $\frac{\sigma_{z}}{\sigma_{zyup}}$ при л равном			
	0,3763	1.5	0,75	1.0	упругости	0.3763	0,5	0.75	1.0
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1,0	1.0	1.0	1.0
0,2	1,0	1,0	1.0	1,0	0.993	1,01	1.01	1.01	1.01
0,4	0,9999	1.0	1.0	1.0	0,949	1.05	1.05	1,05	1,05
0,6	0.9837	0,9951	0.9999	1.0	0.864	1.14	1.15	1.151	1,156
0.7	0.9340	0,9820	0.9976	0,9997	0.810	1,151	1.21	1,23	1,24
0,8	0,8825	0,9317	0,9915	0,9980	0.755	1,16	1,23	1,31	1,32
0.9	0,8342	0.8821	0,9798	0,9925	0.701	1,19	1,25	1,39	1.41
1.0	0.7597	0,8301	0.9197	0,9817	0,646	1.17	1,29	1,42	1.52
1.5	0.4750	0.5520	0,7325	0,8297	0.426	1,11	1,80	1.72	1,95
2.0	0.3080	0,3790	0.5229	0.6321	0,285	1,08	1.33	1.83	2,22
2,5	0,2190	0.2850	0.3865	0.4727	0,210	1,03	1,36	1,84	2,25
3.0	0.1509	0,2012	0,2824	0.3592	0.146	1,03	1,38	1,93	2,46
3,5	0.1142	0,1560	0,2202	0,2790	0.112	1,02	1,39	1,97	2,5
4,0	0,0898	0,1240	6,1750	0,2212	0.088	1.02	1,41	1,98	2,5
5,0	0,0582	0,0816	0.1756	0.1479	0.057	1.02	1,43	2.04	2,6
6,0	0,0410	0,0572	0,0815	0,1050	0.040	1,02	1,43	2.04	2,63

Изображенный на фиг. 5 график без кривых автора составлен В. Ф. Бабковым [7]. Этим графиком и воспользовался автор для анализа полученных теоретических результатов.

Для оценки с количественной стороны результатов разработанной теории по отношению к результатам теории упругости, в таблице 3 приведено сравнение для напряжений по осн круга, загруженного равномерно распределенной нагрузкой. В таблице 4 сравнение результатов теории дискретного распределения напряжений с

Таблица З

теорией упругости произведено для сосредоточенной нагрузки в пространственной задаче, а в таблице 5-для сосредоточенной нагрузки в плоской задаче.



Фиг. 2. Сравнение теоретических результатов с опытными данными Гольдбека при удельном давлении по подошве штампз 2,43 кг/см² и разной величине штампа на глубине 137 см.

<u>_r</u>	$\frac{a_z}{P} z^3$ n	$\frac{\sigma_2}{P} z^2$ no			
2	- 1	0,75	0,5	0,3763	теории уп- ругости
0	1,2724	0,9541	0,6362	0,4775	0.4775
0.1	1,2228	0,9259	0,6236	0,4702	0,4657
0,2	1,0847	0,8462	0.5873	0.4497	0.4329
0.3	0,8877	0.7284	0,5314	0.4178	0,3849
0.4	0.6708	0.5904	0,462	0,3756	0.3294
0.5	0,4681	0.4507	0.3558	0,3298	0,2733
1.0	0.0233	0.0475	0.0861	0.1065	0,0844
1.5	0,0001	0,0011	0.0071	0,0164	0,0251
2.0	0.00001	0,00002	0:0001	0,0012	0,0085
2,5	0	0	0,00002	0.00004	0,0034
2,59	0	0	0	0,00002	0,0029
4,91	0	0	0	0	0,0001

Таблица 4



Фиг, 3. Сравнение теоретических результатов с опытными данными Комиссии Американской ассоциалии граждансках инженеров в песке на глубине 45 см. а) под одной шпалей; б) под тремя шпалами.



Par. 4



Фиг. 5. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными различных исследователей для напряжений по оси загруженной круглой площадки.

Tabanua 5

					and a summer la
$\frac{x}{z}$	$\frac{a_z}{P_1} z$ no	$\frac{\sigma_z}{P_1} z$ no			
	1	0,75	0,5	0,3763	ругости
ò	1,128	0,9768	0.7976	0.691	0,636
0,1	1,084	0,9479	0,7818	0,6804	0,624
0.2	0,9616	0,8663	0,7363	0,6508	0,588
0.3	0.787	0,7457	0.6663	0,6046	0.536
0,4	0.5947	0,6044	0,5792	0.5436	0,473
0.5	0.415	0.4614	0,4837	0,4773	0,406
1.0	0.0207	0.0486	0,1079	0,1541	0,159
1.5	0,0001	0,0011	0.0089	0.0237	0.0501
2.0	0.00001	0,00002	0,0002	0,0017	0.0254
2.5	0	0	0,00003	0,00006	0,0121
2.59	0	0	0	0,00003	0,0107
4,91	0	0	0	0	0.001

Выводы

 Подходя к зернистой среде как к статически определимой системе, автор на основе уравнений равновесия и статистического осреднения получил принципиально новые решения о распределении напряжений в сыпучей среде, не находящейся в предельном состоянии. О распределении напряжений в зернистых (грунтовых) средах

 Сравнение теоретических решений автора с экспериментальными данными рэзличных исследователей показывает хорошую их сходимость.

3. Из сравнения теоретических результатов автора с решениями теории упругости для аналогичных задач видно, что полученные автором решения дают большую, по сравнению с теорией упругостиконцентрацию напряжений к линии действия нагрузки, так как рассматриваемая автором среда не воспринимает растягивающих усилий.

Ленинград, Военная Академия Тыла и Транспорта Поступила 10 VIII 1960

b. b. hunfiquiniend

ՀԱՏԻԿԱՅԻՆ (ԳՐՈՒՆՏԱՅԻՆ) ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

UUTANANU

Հատիկալին միջավալրում լարումների բաշխման ճարցը լուծելու ճամար, ճողվածում այդ միջավալրը դիտված է որպես ստատիկորեն որոշակի սիստեմ և ստացված են պրինցիպիալ նոր լուծումներ։ Տեռական լուծումների և էջապերիմենտալ տվյալների ճամեմատությունը ցույց է տալիս, որ նրանց տարբերուն լունը մեծ չէ։

Հեղինակի տեսական արդյունընհրի և առաձգականության տեսության նման խնդիրների լուծման համեմատությունից պարզված է, որ հոդվածում բերված լուծման հիման վրա լարունների կոնցենտրացիան բեռի աղդման ուղղությամբ ավելի մեծ է, քան ըստ առաձգականության տեսության, քանի որ դիտվող միջավայրում չեն կարող առաջանալ ձգող ճիգեր։

ЛИТЕРАТУРА

- Гольдитейн М. Н. Некоторые вопросы развития механики груптов. .Основания, фундаменты и механика груптов*, № 1, 1960.
- Фрелих О. К. Распределение давления в групте, изд. Наркомхоза РСФСР, М., 1938.
- 3. Соколовский В. В. Статика сынучей среды. Изд. АН СССР, М., 1942.
- Березаниев В. Г. Осесниметричная задача предельного равновесия сыпучей среды. Гостехтеориздат, М., 1952.
- 5. Васильев Б. Д. Основания и фундаменты. Госстройиздат, М., Л., 1955.
- Флорин В. А. Расчеты оснований гидротехнических сооружений. Госстройиздат, М., Л., 1948. Основы механики грунтов. Госстройиздат, Л., М., 1959.
- Бабков В. Ф. Обзор экспериментальных работ по измерению напряжений в грунте. "Труды ДорНИИ", вып. 1, Гушосдор, М., 1938.
- 8. Цытович Н. А. Механика грунтов. Стройнздат, М., 1951.
- 9. Клейн Г. К. Стронтельная механика сыпучих тел. Госстройнадат, М., 1956.
- Снитко И. К. Теория прочности металлов с учетом внутрикристалянческой структуры, ВТА Л., 1946. Изв. АН СССР, ОТН, вып. 7—8, 1942, ЖТФ, XVIII, 6, 1948.

И. И. Кандауров

- Бируля А. К. Об упругих и пластических деформациях щебеночных покрытий, "Труды ХАДИ», сб. 6, 1939.
- 12. Покровский Г. И. Исследования по физике грунтов. ОНТИ, М., 1937.
- 13. Яропольский И. В. Основания и фундаменты. Водтрансиздат, Л., 1954.
- 14. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
- Черкасов И. И. Структурные и упругие деформации песчаных грунтов. НИИ АС ВВС, 1952.
- Горбунов-Посадов М. И. К решению смешанной задачи теории упругости и пластичности для песчаных оснований. "Сборник НИИ Оснований и фундаментов". № 21, 1953.
- Малышев М. В. Теоретические и экспериментальные исследования несущей способности песчаного основания, "ВОДГЕО, Лаборатория оснований и фундаментов, Информационные материалы", № 2, М., 1953.
- Материалы к IV Международному конгрессу по механике груптов. Изд. АН СССР, 1957.
- Липовецкая Т. Ф. Экспериментальные исследования распределения напряжений по полошие жестких штампов, расположенных на песчаном основания. "Известия ВНИИГ", 49, 1953.
- Горбунов-Посадов М. И. Осадки фундаментов на слое групта, подстилаемом скальным основанием. Стройнадат, 1946.
- Федоров И. С. Исследование распределения напряжений в грунте и осадок фундаментов при помощи модедей. "ЖТФ», 5, вып. 6, 1935.
- 22. Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности. Гостехтеоризлат, М., 1953.
- Кандауров И. И. Теория дискретного распределения вертикальных напряжений и деформаций сжатия в одвородных и многослойных грунтовых основаниях военно-транспортных и других сооружений. ВАТТ Л., 1959.
- Кандауров И. И. Основные предносыяки дискретной теории распределения напряжений и деформаций сжатия в грунтовых средах. "Информационный бюллетень ВАТТ", № 17, 1958.
- Кандауров И. И. К теории распределения напряжений в зернистых груптовых основаниях. "Основания, фундаменты, механика грунтов", № 4, 1960.
- 26. Кузнецов В. И. Упругое основание. Госстройиздат, М., 1952.