ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, В. С. Тоноян

Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточками

Эллиптические координаты использовались для решения задачи о кручении призматических стержней А. Клебшем [1], А. Соколовым [2] и А. Гринхиллем [2], которые рассмотрели кручение полого стержня с поперечным сечением, образованным конфокальными эллипсами.

Ряд профилей, ограниченных двумя дугами эллипсов и ортогональными к ним гиперболами, при их кручении рассматривался Л. Файлоном [4].

В настоящей статье рассматривается кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные выточки.

Решение получено методом сведения задачи к бесконечным системам линейных уравнений [5, 6]. При решении задачи, ввиду симметричности области поперечного сечения, из нее выделяется криволинейный уголок, который представляется в виде двух налегающих друг на друга областей. Функция напряжений строится для каждой из этих областей отдельно. Для того, чтобы эти функции являлись непрерывным продолжением одна другой, на контуре общей части налегающих друг на друга областей они должны быть равными [7]. В такой постановке рассматривалась задача о кручении углового профиля в работе Н. Х. Арутюняна [5], предложившего в этой работе метод введения вспомогательных функций.

Определение постоянных интегрирования в рассматриваемой задаче сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Выведены формулы для определения жесткости при кручении и напряжений. Приведен численный пример.

§ 1. Постановка задачи

В эллиптических координатах α, β, связанных с декартовыми прямоугольными координатами x и y соотношениями

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \qquad y = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \tag{1.1}$$

где $2c$ — межфокусное расстояние, функция напряжений при кручении $U(\alpha, \beta)$ удовлетворяет в области поперечного сечения стержня уравнению

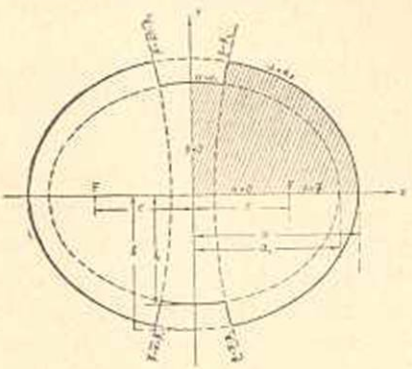
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = -c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta), \tag{1.2}$$

а на контуре области сечения принимает значение, равное нулю.

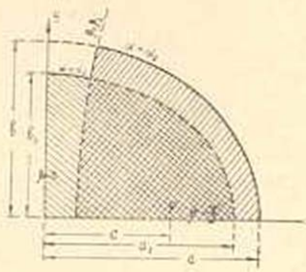
Рассмотрим кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные выточки (фиг. 1).

В силу симметрии области сечения, функцию $U(\alpha, \beta)$ определяем только в четвертой части области сечения. Чтобы, определенная в этой части области сечения, функция $U(\alpha, \beta)$ представляла решение для рассматриваемой задачи, согласно мембранной аналогии, на осях симметрии области нормальная производная функции $U(\alpha, \beta)$ должна равняться нулю.

Далее, выделенную область (фиг. 2) представляем в виде двух налегающих друг на друга областей Ω_1 и Ω_2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Полагаем, что

$$U(\alpha, \beta) = \begin{cases} U_1(\alpha, \beta) & \text{в области } \Omega_1, \\ & \text{где } \alpha < \alpha_1; \\ U_2(\alpha, \beta) & \text{в области } \Omega_2, \\ & \text{где } \beta > \beta_1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Функции U_1 и U_2 должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} = \left.\frac{\partial U_1}{\partial \beta}\right)_{\beta=\frac{\pi}{2}} = 0, \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0, \quad U_1(\alpha_1, \beta) = \begin{cases} 0, & \beta < \beta_1, \\ U_2(\alpha_1, \beta), & \beta > \beta_1, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = U_2(\alpha_2, \beta) = 0, \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial \beta}\right)_{\beta=\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad U_2(\alpha, \beta_1) = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_1, \\ U_1(\alpha, \beta_1), & \alpha \leqslant \alpha_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Функции U_1 и U_2 по методу Г. А. Гринберга [8] ищем в виде

$$U_1(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1), \quad (0 < \alpha < \alpha_1), \tag{1.8}$$

$$U_2(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha) \sin \mu_k (\beta - \beta_1), \qquad \left(\beta_1 < \beta < \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.9}$$

где

$$\gamma_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha_1}, \qquad \mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{\pi - 2\beta_1}, \tag{1.10}$$

$$f_k(\beta) = \frac{2}{\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} U_1(\alpha, \beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1)\, d\alpha, \tag{1.11}$$

$$\varphi_k(\alpha) = \frac{4}{\pi - 2\beta_1} \int_{\beta_1}^{\frac{\pi}{2}} U_2(\alpha, \beta) \sin \mu_k (\beta - \beta_1)\, d\beta. \tag{1.12}$$

§ 2. Определение функции напряжений

Умножив уравнение (1.2) для функции $U_1(\alpha, \beta)$ на $\frac{2}{\alpha_1} \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1)$ и интегрируя полученное выражение по α в пределах от нуля до α_1, для определения функции $f_k(\beta)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$f_k''(\beta) - \gamma_k^2 f_k(\beta) = \frac{2\gamma_k}{\alpha_1} U_1(\alpha_1, \beta) + \frac{2c^2\gamma_k}{\alpha_1(4+\gamma_k^2)} \operatorname{ch} 2\alpha_1 + \frac{2c^2}{\alpha_1\gamma_k} \cos 2\beta, \tag{2.1}$$

при этом использованы выражение (1.11) и первое из условий (1.5).

Учитывая второе условие из (1.5) и интегрируя уравнение (2.1), для функции $f_k(\beta)$ получим значения

$$f_k(\beta) = \begin{cases} f_k^{(1)}(\beta), & \beta < \beta_1, \\ f_k^{(2)}(\beta), & \beta > \beta_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$f_k^{(1)}(\beta) = A_k^{(1)} \operatorname{sh} \gamma_k \beta + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - \frac{2c^2(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\gamma_k \alpha_1 (\gamma_k^2 + 4)}, \tag{2.3}$$

$$f_k^{(2)}(\beta) = A_k^{(2)} \operatorname{sh} \gamma_k \beta + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\alpha_1 \gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} -$$

$$- \frac{2\gamma_k}{\alpha_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(\alpha_1) \sin \mu_p (\beta - \beta_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2}. \tag{2.4}$$

Согласно (1.4), (1.11) и (2.2), функции $f_k^{(1)}(\beta)$ и $f_k^{(2)}(\beta)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$f_k^{(1)'}(0) = f_k^{(2)'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad f_k^{(1)}(\beta_1) = f_k^{(2)}(\beta_1), \tag{2.5}$$

$$f_k^{(1)'}(\beta_1) = f_k^{(2)'}(\beta_1). \tag{2.6}$$

Удовлетворив условиям (2.5), найдем

$$A_k^{(1)} = 0, \quad B_k^{(2)} = B_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1 \operatorname{ch} \frac{\gamma_k \pi}{2}}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)},$$

$$A_k^{(2)} = - B_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma_k \pi}{2}}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}. \tag{2.7}$$

Подставляя эти значения в (2.3) и (2.4), будем иметь

$$f_k^{(1)}(\beta) = B_k^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\gamma_k \alpha_1 (4 + \gamma_k^2)}, \tag{2.8}$$

$$f_k^{(2)}(\beta) = B_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1 \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)} -$$

$$- \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\gamma_k \alpha_1 (4 + \gamma_k^2)} + \frac{2\gamma_k}{\alpha_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(\alpha_1) \sin \mu_p (\beta - \beta_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2}. \tag{2.9}$$

Удовлетворив теперь условию (2.6), получим следующую бесконечную систему линейных уравнений относительно двух неизвестных коэффициентов

$$B_k^{(1)} = - \frac{2 \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}{\alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma_k \pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p \varphi_p(\alpha_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2}. \tag{2.10}$$

Аналогичным образом для определения функции $\varphi_k(\alpha)$ получаем уравнение

$$\varphi_k''(\alpha)-\mu_k^2\varphi_k(\alpha)=-\frac{4\mu_k U_2(\alpha,\beta_1)}{\pi-2\beta_1}-\frac{4c^2\operatorname{ch}2\alpha}{(\pi-2\beta_1)\mu_k}+$$

$$+\frac{4c^2\mu_k\cos 2\beta_1}{(\pi-2\beta_1)(4-\mu_k^2)}. \tag{2.11}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_k(\alpha)=\begin{cases}\varphi_k^{(1)}(\alpha), & \alpha\geqslant\alpha_1,\\ \varphi_k^{(2)}(\alpha), & \alpha\leqslant\alpha_1,\end{cases} \tag{2.12}$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(\alpha)=C_k^{(1)}\operatorname{sh}\mu_k\alpha+D_k^{(1)}\operatorname{ch}\mu_k\alpha-\frac{4c^2\cos 2\beta_1}{(\pi-2\beta_1)\mu_k(4-\mu_k^2)}-$$

$$-\frac{4c^2}{(\pi-2\beta_1)\mu_k^2(4-\mu_k^2)}\left[\mu_k\operatorname{ch}2\alpha-2\operatorname{sh}2\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha-\alpha_1)-\right.$$

$$\left.-\mu_k\operatorname{ch}2\alpha_1\operatorname{ch}\mu_k(\alpha-\alpha_1)\right], \tag{2.13}$$

$$\varphi_k^{(2)}(\alpha)=C_k^{(2)}\operatorname{sh}\mu_k\alpha+D_k^{(2)}\operatorname{ch}\mu_k\alpha-$$

$$-\frac{4c^2(\operatorname{ch}2\alpha-\operatorname{ch}\mu_k\alpha+\cos 2\beta_1)}{(\pi-2\beta_1)\mu_k(4-\mu_k^2)}+\frac{4\mu_k}{\pi-2\beta_1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p(\beta_1)\sin\gamma_p(\alpha-\alpha_1)}{\mu_k^2+\gamma_p^2}. \tag{2.14}$$

Функции $\varphi_k^{(1)}$ и $\varphi_k^{(2)}$ должны удовлетворять условиям

$$\varphi_k^{(1)}(\alpha_2)=\varphi_k^{(2)\prime}(0)=0,\quad \varphi_k^{(1)}(\alpha_1)=\varphi_k^{(2)}(\alpha_1), \tag{2.15}$$

$$\varphi_k^{(1)\prime}(\alpha_1)=\varphi_k^{(2)\prime}(\alpha_1). \tag{2.16}$$

Удовлетворив условиям (2.15) и исключив из выражений (2.13) и (2.14) коэффициенты $C_k^{(2)}$, $C_k^{(1)}$ и $D_k^{(2)}$, будем иметь

$$\varphi_k^{(1)}(\alpha)=D_k^{(1)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha)}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}+\frac{4c^2\cos 2\beta_1}{(\pi-2\beta_1)\mu_k(\mu_k^2-4)}\left(1-\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}\right)+$$

$$+\frac{4c^2}{(\pi-2\beta_1)\mu_k^2(\mu_k^2-4)}\left[\mu_k\left(\operatorname{ch}2\alpha-\operatorname{ch}2\alpha_2\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{ch}2\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha)\frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_1}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}\right)+2\operatorname{sh}2\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha)\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}\right], \tag{2.17}$$

$$\alpha\geqslant\alpha_1,$$

$$\varphi^{(2)}(\alpha)=D_k^{(1)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{ch}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2\operatorname{ch}\mu_k\alpha_1}-\frac{4c^2\cos 2\beta_1}{(\pi-2\beta_1)\mu_k(4-\mu_k^2)}\left(1-\right.$$

$$\left.-\operatorname{th}\mu_k\alpha_1\frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}\right)-\frac{4c^2}{(\pi-2\beta_1)\mu_k^2(4-\mu_k^2)}\left[\mu_k\left(\operatorname{ch}2\alpha-\right.\right.$$

$$\left.-\operatorname{ch}2\alpha_2\operatorname{th}\mu_k\alpha_1\frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}-\operatorname{ch}2\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_2}\right)+$$

$$+ 2 \operatorname{sh} 2\alpha_1 \operatorname{sh} \mu_k (\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{th} \mu_k \alpha_1 \frac{\operatorname{ch} \mu_k \alpha}{\operatorname{sh} \mu_k \alpha_2} \Bigg] +$$

$$+ \frac{4\mu_k}{\pi - 2\beta_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\beta_1) \sin \gamma_p (\alpha - \alpha_1)}{\mu_k^2 + \gamma_p^2}, \qquad \alpha \leq \alpha_1. \tag{2.18}$$

Наконец, удовлетворив условию (2.16), получим вторую бесконечную систему

$$D_k^{(1)} = - \frac{4 \operatorname{ch} \mu_k \alpha_1 \operatorname{th} \mu_k \alpha_2}{\pi - 2\beta_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\beta_1) \gamma_p}{\mu_k^2 + \gamma_p^2} + \frac{4 c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k (4 - \mu_k^2) \operatorname{ch} \mu_k \alpha_2} +$$

$$+ \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k^2 (4 - \mu_k^2)} \Bigg[\mu_k \left(\frac{\operatorname{ch} 2\alpha_2}{\operatorname{ch} \mu_k \alpha_2} - \operatorname{ch} \mu_k \alpha_1 \operatorname{ch} 2\alpha_1 \right) +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} 2\alpha_1 \operatorname{sh} \mu_k \alpha_1 \Bigg]. \tag{2.19}$$

Введя новые неизвестные

$$\mu_p \varphi_p(\alpha_1) = \mu_p D_p^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \mu_p (\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_2} - \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1)(4 - \mu_p^2)} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_1}{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_2} \right) -$$

$$- \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_p (4 - \mu_p^2)} \Bigg[\mu_p \left(\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \operatorname{ch} 2\alpha_2 \frac{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_1}{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_2} \right) +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} 2\alpha_1 \operatorname{sh} \mu_p (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_1}{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_2} -$$

$$- \mu_p \operatorname{ch} 2\alpha_1 \operatorname{sh} \mu_p (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_p \alpha_1}{\operatorname{sh} \mu_p \alpha_2} \Bigg] = X_p \alpha_1, \tag{2.20}$$

$$\gamma_p B_p^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_p \beta_1 = - m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) Y_p \tag{2.21}$$

(где m — пока произвольное число, подлежащее определению в дальнейшем), бесконечные системы (2.10) и (2.19) приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + Q_k, \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p, \end{aligned} \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \infty) \tag{2.22}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2m \mu_k \operatorname{ch} \mu_k \alpha_1 \operatorname{sh} \mu_k (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \operatorname{ch} \mu_k \alpha_2 \cdot (\gamma_p^2 + \mu_k^2)}, \\ b_{kp} &= \frac{4\gamma_k}{m (\pi - 2\beta_1) \left[\operatorname{th} \gamma_k \beta_1 + \operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \right] (\mu_p^2 + \gamma_k^2)}. \end{aligned} \right| \tag{2.23}$$

$$Q_k = \frac{2c^2(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)}{\alpha_1(\pi - 2\beta_1)(\mu_k^2 - 4)}(\mu_k \operatorname{th} 2\alpha_1 - 2\operatorname{th}\mu_k\alpha_1)\frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_1 \operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_2} +$$

$$+ \frac{4c^2\cos 2\beta_1}{\alpha_1(\pi - 2\beta_1)(\mu_k^2 - 4)}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_1}{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_2}\right) +$$

$$+ \frac{4c^2}{\alpha_1(\pi - 2\beta_1)(\mu_k^2 - 4)}\left(\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \operatorname{ch} 2\alpha_2 \frac{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_1}{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_2}\right). \qquad (2.24)$$

Подставляя значения (2.20) и (2.21) в (2.8), (2.9), (2.17) и (2.18) и пользуясь соотношениями (1.3), (1.8) и (1.9), для функции напряжений $U(\alpha, \beta)$ получим следующие выражения

$$U(\alpha, \beta) = \frac{c^2}{4}(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)\left(1 - \frac{\operatorname{ch} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha_1}\right) -$$

$$-m\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k \operatorname{ch}\gamma_k\beta}{\gamma_k \operatorname{ch}\gamma_k\beta_1}\sin\gamma_k(\alpha - \alpha_1), \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1), \quad (2.25)$$

$$U(\alpha, \beta) = \frac{c^2}{4}(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)\left(1 - \frac{\operatorname{ch} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha_1}\right) -$$

$$-m\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k \operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\gamma_k \operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}\sin\gamma_k(\alpha - \alpha_1) +$$

$$+\alpha_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k \operatorname{ch}\mu_k\alpha}{\mu_k \operatorname{ch}\mu_k\alpha_1}\sin\mu_k(\beta - \beta_1), \qquad \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \quad \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.26)$$

$$U(\alpha, \beta) = \frac{c^2}{4}(\cos 2\beta - \cos 2\beta_1) +$$

$$+\alpha_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k \operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2 - \alpha)}{\mu_k \operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2 - \alpha_1)}\sin\mu_k(\beta - \beta_1) -$$

$$-\frac{4c^2\cos 2\beta_1}{\pi - 2\beta_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k(\beta - \beta_1)}{\mu_k(\mu_k^2 - 4)}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\mu_k}{2}(\alpha_2 + \alpha_1 - 2\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\mu_k}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)} +$$

$$+\frac{4c^2}{\pi - 2\beta_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k(\beta - \beta_1)}{\mu_k(\mu_k^2 - 4)}\left|\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha_1\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2 - \alpha_1)} -\right.$$

$$\left.-\operatorname{ch} 2\alpha_2\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2 - \alpha_1)}\right|, \qquad \left(\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2, \ \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.27)$$

§ 3. Исследование бесконечных систем (2.22)

Пользуясь выражениями (2.23), будем иметь

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{m \operatorname{sh} \mu_k \alpha_1 \operatorname{sh} \mu_k (\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{ch} \mu_k \alpha_2} < \frac{m}{2}, \\
&\sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| = \frac{\operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)}{m \left| \operatorname{th} \gamma_k \beta_1 + \operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \right|} < \frac{1}{m}.
\end{aligned}
\right| \tag{3.1}
$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$
\frac{m}{2} = \frac{1}{m}, \qquad m = \sqrt{2}. \tag{3.2}
$$

Тогда для систем (2.22) будем иметь следующие оценки

$$
\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| < \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3.3}
$$

Из (2.24) видно, что свободные члены систем (2.22) ограничены сверху и при $k \to \infty$ стремятся к нулю.

Таким образом системы (2.22) оказались вполне регулярными и имеют ограниченные сверху свободные члены. Это обстоятельство дает возможность определить все неизвестные X_k и Y_k с желаемой точностью [7].

§ 4. Определение жесткости при кручении

Жесткость при кручении сплошного стержня определяется по формуле

$$
C = Gc^2 \iint_{\Omega} U(\alpha, \beta)(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta)\, d\alpha d\beta =
$$

$$
= 4Gc^2 \iint_{\Omega^*} U(\alpha, \beta)(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta)\, d\alpha d\beta, \tag{4.1}
$$

где G — модуль сдвига, Ω — область поперечного сечения стержня, Ω^* — четвертая часть области Ω (фиг. 2).

Подставляя значения функции $U(\alpha, \beta)$ из (2.25)—(2.27) в (4.1) и произведя интегрирование, для определения жесткости получим следующую формулу

$$
C = 4Gc^2 \left[\frac{c^2}{16} (\pi - 2\beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{c^2}{32} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin 4\beta_1 - \right.
$$

$$
- \frac{c^2}{16} (\operatorname{sh} 2\alpha_2 - \operatorname{sh} 2\alpha_1) \left[\sin 2\beta_1 + (\pi - 2\beta_1) \cos 2\beta_1 \right] + \frac{c^2 \pi}{32} \frac{\operatorname{sh}^3 2\alpha_1}{\operatorname{ch} 2\alpha_1} -
$$

$$
\frac{8c^2 \cos^2 2\beta_1}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\mu_k}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)^2} + \frac{4c^2}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 (\mu_k^2 - 4)^2} \left[\frac{(\mu_k^2 - 4)(\alpha_2 - \alpha_1)}{2} + \right.
$$

$$
+\frac{\mu_k^2+4}{8}(\operatorname{sh}4\alpha_2-\operatorname{sh}4\alpha_1)+\frac{2\mu_k\operatorname{ch}2\alpha_1\operatorname{ch}2\alpha_2}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}-\mu_k(\operatorname{ch}^2 2\alpha_2+
$$

$$
+\operatorname{ch}^2 2\alpha_1)\operatorname{cth}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\Big]+\frac{2c^2\cos 2\beta_1}{\pi-2\beta_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2(\mu_k^2-4)^2}\Big[(\mu_k^2+4)(\operatorname{sh}2\alpha_2-
$$

$$
-\operatorname{sh}2\alpha_1)-4(\operatorname{ch}2\alpha_1+\operatorname{ch}2\alpha_2)\mu_k\operatorname{th}\frac{\mu_k}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\Big]+
$$

$$
+\alpha_1\cos 2\beta_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\mu_k(\mu_k^2-4)}\Big[\operatorname{th}\frac{\mu_k}{2}(\alpha_2-\alpha_1)+\operatorname{th}\mu_k\alpha_1\Big]+
$$

$$
+\alpha_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\mu_k(\mu_k^2-4)}\Big[\frac{\operatorname{ch}2\alpha_1\operatorname{ch}\mu_k\alpha_2}{\operatorname{ch}\mu_k\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}-\frac{\operatorname{ch}2\alpha_2}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}\Big]+
$$

$$
+m\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)(\operatorname{ch}2\alpha_1+\cos 2\beta_1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{\gamma_k(\gamma_k^2+4)}\times
$$

$$
\times\Big[\operatorname{th}\gamma_k\beta_1+\operatorname{th}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)\Big]\Big\}. \tag{4.2}
$$

Из (4.2), переходя к пределу при $\alpha_1=\alpha_2$, получим формулу для жесткости эллиптического профиля (фиг. 3)

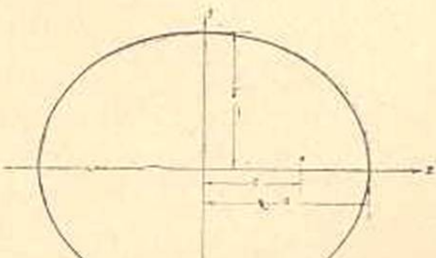
$$
C=\frac{Gc^4\pi}{8}\frac{\operatorname{sh}^3 2\alpha_2}{\operatorname{ch}2\alpha_2}=\pi G\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}. \tag{4.3}
$$

При этом использованы значения

$$
X_k=Y_k=0, \tag{4.4}
$$

которые получаются из систем (2.22) соответствующим предельным переходом, а также

$$
a=c\operatorname{ch}\alpha_2,\quad b=c\operatorname{sh}\alpha_2. \tag{4.5}
$$



Фиг. 3.

Из (4.2), переходя к переделу при $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, для жесткости полуэллипса (фиг. 4) получим следующую формулу

$$
C=Gc^4\Big\{\frac{\pi\alpha_2}{8}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sh}2\alpha_2+\frac{3\pi}{32}\operatorname{sh}4\alpha_2-
$$

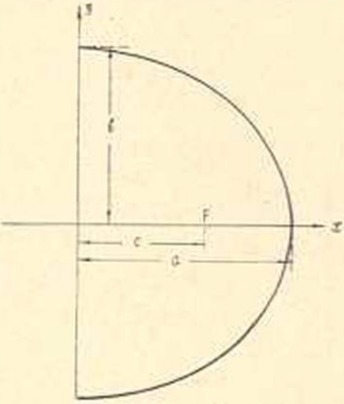
$$
-\frac{32}{\pi}\operatorname{ch}^4\alpha_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\mu_k\alpha_2}{\mu_k(\mu_k^2-4)^2}\Big\}. \tag{4.6}
$$

При этом использованы значения

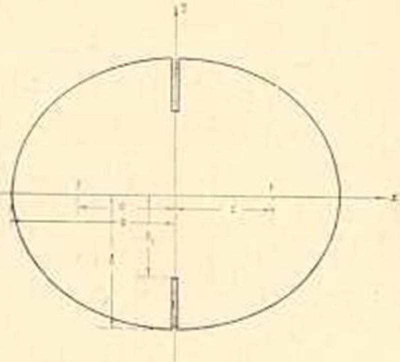
$$
Y_k=0,\qquad \alpha_1X_k=\frac{8c^2}{\pi(\mu_k^2-4)}-\frac{4c^2(1+\operatorname{ch}2\alpha_2)}{\pi(\mu_k^2-4)\operatorname{ch}\mu_k\alpha_2}. \tag{4.7}
$$

получаемые из систем (2.22) соответствующим предельным переходом.

В качестве численного примера рассмотрены стержни с сечениями в виде эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные выточки (фиг. 1) или разрезы (фиг. 5).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

В таблице 1 приводятся жесткости для этих стержней, вычисленные по формуле (4.2) для различных значений параметров α_1, α_2 и β_1.

В первой строке таблицы 1 дается значение жесткости при кручении для призматического стержня с сечением в виде полного эллипса (фиг. 3).

Таблица 1

	Жесткость C/Gb^4		
	с недостатком	с избытком	средняя
Эллипс (фиг. 3) $b=5,\ c=3$	—	—	2,1113
Эллипс с выточками (фиг. 1) $\frac{b}{b_1}=\frac{5}{4},\ c=3$	1,7512	1,7952	1,7732
Эллипс с разрезами (фиг. 5) $\frac{b}{b_1}=\frac{5}{4},\ c=3$	1,7941	1,8149	1,8045
Эллипс с разрезами (фиг. 5) $\frac{b}{b_1}=2,\ c=3$	1,2591	1,3000	1,2796
Два полуэллипса $b=5,\ c=3$	—	—	1,1539

Во второй строке дается значение жесткости для стержня с сечением в виде того же эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные небольшие выточки (фиг. 1) при следующих значениях геометрических параметров сечения

$$\beta_1 = 0{,}0628\pi \approx 0{,}1975; \quad \alpha_1 = 1.1; \quad \alpha_2 = 1{,}2835, \tag{4.8}$$

что соответствует случаю, когда

$$\frac{b}{b_1} = \frac{5}{4}, \quad c = 3. \tag{4.9}$$

В третьей и четвертой строках этой таблицы даются значения жесткости эллиптического профиля, имеющего вдоль малой полуоси разрезы (фиг. 5):

в третьей строке при

$$\alpha_1 = 1{,}1; \quad \alpha_2 = 1{,}2835; \quad \beta_1 = 0. \tag{4.10}$$

в четвертой строке при

$$\alpha_1 = 0{,}7585; \quad \alpha_2 = 1{,}2835; \quad \beta_1 = 0. \tag{4.11}$$

В первом случае разрезы сделаны до глубины, равной одной пятой малой полуоси, а во втором случае глубина разрезов доходит до половины малой полуоси.

Наконец, в последней строке для сравнения приводится также и удвоенное значение жесткости для полуэллипса таких же размеров (фиг. 4), для которого

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 1{,}2835; \quad \beta_1 = 0. \tag{4.12}$$

§ 5. Определение касательных напряжений

Пользуясь соотношениями (2.25)—(2.27) и формулами

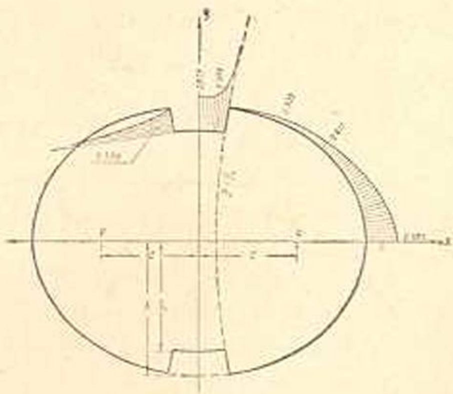
$$\left.\begin{aligned} \tau_{\alpha z}(\alpha, \beta) &= -\frac{G\theta}{c}\sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \beta}, \\ \tau_{\beta z}(\alpha, \beta) &= -\frac{G\theta}{c}\sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

где θ — угол закручивания на единицу длины стержня, можно определить касательные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

В качестве примера вычислены напряжения при кручении для эллиптического профиля с выточками (фиг. 1).

В таблице 2 даются значения напряжений, вычисленные для некоторых точек сечения стержня.

С целью наглядного представления закона распределения касательных напряжений, на фиг. 6 приводится эпюра этих напряжений для рассматриваемого сечения.



Фиг. 6.

Таблица 2

Напряжения	С недостатком	С избытком	Среднее
$\dfrac{\tau_{\beta z}(\alpha_1, 0)}{G\theta c}$	1,6829	1,7476	1,7152
$\dfrac{\tau_{\beta z}\left(\alpha_1, \frac{\beta_1}{2}\right)}{G\theta c}$	1,7553	1,8380	1,7966
$\dfrac{\tau_{\beta z}\left(\alpha_2, \frac{\pi-2\beta_1}{8}\right)}{G\theta c}$	0,1342	0,1849	0,1596
$\dfrac{\tau_{\beta z}\left(\alpha_2, \frac{\pi-2\beta_1}{4}\right)}{G\theta c}$	0,2882	0,3969	0,3426
$\dfrac{\tau_{\beta z}\left(\alpha_2, \frac{\pi}{2}\right)}{G\theta c}$	1,5441	1,5559	1,5500
$\dfrac{\tau_{\alpha z}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \beta_1\right)}{G\theta c}$	1,8626	1,9363	1,8995

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 VI 1960

Բ. Լ. Աբրահամյան, Վ. Ս. Տոնոյան

ՓՈՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է փոքր կիսառանցքի կողմից սիմետրիկ ձևով դասավորված փորվածքներով էլիպտական լայնական կտրվածքով պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը։

Խնդրի լուծման ընթացքում լայնական կտրվածքի տիրույթի սիմետրիկությունը նկատի առնելով, այդ տիրույթից անջատվում է մի կորագիծ անկյունակ։ Այդ անկյունակը իր հերթին ներկայացվում է իրար վրա դրված երկու տիրույթների տեսքով։

Լարման ֆունկցիան կառուցվում է այս տիրույթներից յուրաքանչյուրում առանձին-առանձին։ Որպեսզի այդ ֆունկցիաները հանդիսանան մեկը մյուսի անընդհատ շարունակությունը, իրար վրա դրված տիրույթների ընդհանուր մասի եզրագծի վրա այդ ֆունկցիաները հավասարեցվում են [7]։

Այդպիսի դրվածքով անկյունային պրոֆիլով ձողերի ոլորման խնդիրը դիտարկվել է Ն. Խ. Հարությունյանի աշխատությունում [5], որտեղ առաջարկված է երկու օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման եղանակը:

Խնդրի լուծման ընթացքում ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերվել է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծման:

Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները լիովին ռեգուլյար են: Արտածված են ոլորման կոշտությունը և լարումները որոշելու համար բանաձևեր:

Բերված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клебш А.* (Clebsch A.) Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig, 1862, §§ 33—35.
2. *Соколов А. П.* Задача о кручении призматических тел. „Математический сборник“, **9**, вып. II, отд. 1, 1878, 288—339.
3. *Гринхилл А.* (Greenhill A. G.) Fluid motion between confocal elliptic and confocal ellipsoids. „Quart. Journ. of Math.“, Vol. 16, 1879, 227—256.
4. *Файлон Л.* (Filon L. N. G.). On the Resistance to Torsion of Certain Forms of Shafting, with Special Reference to the Effect of Keyways. „Phil. Trans. Roy. Soc.“ London, A. 193, 1899, 309—352.
5. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „ПММ“, **13**, вып. 1, 1949, 107—112.
6. *Абрамян Б. Л.* Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде криволинейного уголка. „ДАН АрмССР“, **31**, № 1, 1960, 9—14.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950, 662.
8. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948. См. также „Известия АН СССР, серия физическая“, **10**, № 2, 1946.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян

Изгиб круглых стержней, имеющих продольные боковые выточки

Рассматривается задача об изгибе круглого призматического стержня с центрально расположенной круглой полостью и боковым внешним пазом в форме кольцевого сектора.

Точное решение рассматриваемой задачи получено методом приведения решения Сен-Венана к бесконечным системам линейных уравнений [1, 2]. Доказано, что полученные системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю (при $k \to \infty$) свободные члены. В числовых примерах вычислены координаты центра изгиба профиля и напряжения.

Подобные задачи для круглых и секториальных стержней рассматривались в работах Л. С. Лейбензона [4], Стивенсона [5], Н. В. Зволинского [6], Я. И. Бурака [9] и других [10].

Изгиб стержня с сечением в виде кольцевого сектора, когда изгибающая сила действует вдоль оси симметрии профиля, рассмотрен в работе Сигара и Пирсона [8].

§ 1. Постановка задачи

Пусть внешняя изгибающая сила Q приложена на свободном конце стержня параллельно оси y и проходит через центр изгиба, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [4]

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{Q\sigma(x - x_0)}{(1+\sigma) J} - \frac{Q}{2J} f(x) , \tag{1.1}$$

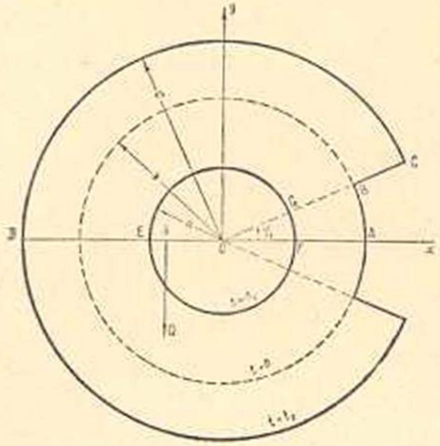
где x_0—координата центра тяжести сечения, J—момент инерции поперечного сечения относительно оси y, $f(x)$—произвольная функция, σ—коэффициент Пуассона.

На контуре сечения функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{Q}{2J} \left[y^2 - f(x) \right] \frac{dx}{dS}. \tag{1.2}$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть только область

$ABCDEGF$ (фиг. 1). Чтобы решение, определенное в этой части области, распространилось на всю область сечения, требуется, чтобы вдоль горизонтальной оси симметрии на линиях AF и ED нормальная производная функции $F(x, y)$ равнялась нулю.



фиг. 1

Положим

$$f(x) = b^2 - x^2 \tag{1.3}$$

и перейдем к новым координатам следующим образом [2, 3]

$$x = be^t \cos\varphi, \quad y = be^t \sin\varphi. \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.1) и условие (1.2) примут вид

$$\nabla^2 F(t, \varphi) = \frac{(1+2\sigma)\,Qb^3}{(1+\sigma)\,J} e^{3t} \cos\varphi - \frac{\sigma x_0 Qb^2}{(1+\sigma)J} e^{2t}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -\frac{Qb^3}{2J}(1 - e^{2t}) \frac{d(e^t \cos\varphi)}{dS}. \tag{1.6}$$

Напряжения $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$ выражаются через функцию напряжений $F(t, \varphi)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \tau_{z\varphi}(t, \varphi) &= -\frac{1}{be^t}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{Qb^2}{2J}(e^{2t} - 1)\cos\varphi, \\ \tau_{r\varphi}(t, \varphi) &= \frac{1}{be^t}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{Qb^2}{2J}(e^{2t} - 1)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Из граничного условия (1.6) следует

$$\begin{aligned} &F(0, \varphi) = 0, \\ &F(t, \varphi_1) = -\frac{Qb^3 \cos\varphi_1}{6J}(3e^t - e^{3t} - 2), \\ &F(t_2, \varphi) = \frac{Qb^3}{2J}(e^{3t_2} - e^{t_2})\cos\varphi - \frac{Qb^3 \cos\varphi_1}{3J}(e^{3t_2} - 1), \\ &F(-t_1, \varphi) = -\frac{Qb^3}{2J}(e^{-t_1} - e^{-3t_1})\cos\varphi + C, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$t_1 = -\ln\frac{a}{b}, \qquad t_2 = \ln\frac{c}{b}. \tag{1.9}$$

В области $ABCDEGF$ функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде [2, 3]

$$F(t,\varphi)=\begin{cases}F_1(t,\varphi) \text{ в области I},\\ F_2(t,\varphi) \text{ в области II},\\ F_3(t,\varphi) \text{ в области III}.\end{cases} \tag{1.10}$$

Пользуясь условием симметрии и граничными условиями (1.8), в в силу (1.10) для $F_i(t,\varphi)$ $(i=1,2,3)$ получим следующие условия

$$F_1(0,\varphi)=\left.\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial F_2}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\pi}=\left.\frac{\partial F_3}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\pi}=0,$$

$$F_3(t,\ \varphi_1)=-\frac{Qb^3\cos\varphi_1}{6J}(3e^t-e^{3t}-2),$$

$$F_2(t_2,\varphi)=\frac{Qb^3}{2J}(e^{3t_2}-e^{t_2})\cos\varphi-\frac{Qb^3\cos\varphi_1}{3J}(e^{2t_2}-1), \tag{1.11}$$

$$F_1(-t_1,\varphi)=F_2(-t_1,\varphi)=-\frac{Qb^3}{2J}(e^{-t_1}-e^{-3t_1})\cos\varphi+C,$$

$$F_1(t,\varphi_1)=F_2(t,\varphi_1),\quad F_2(0,\varphi)=F_3(0,\varphi),$$

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}=\left.\frac{\partial F_2}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1},\qquad \left.\frac{\partial F_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial F_3}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{1.12}$$

§ 2. Определение функции напряжения

Решая уравнение (1.5) методом разделения переменных и удовлетворив условиям (1.11) и (1.12), как это сделано в работе [3], для функций $F_i(t,\varphi)$ $(i=1,2,3)$ получим выражения

$$F_1(t,\varphi)=C_1\cos\varphi\left[e^{3t}-\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sh}t_1}+e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_1}\right]-C_2\Big[e^{2t}-$$

$$-\frac{t_1+t}{t_1}+\frac{t}{t_1}e^{-2t_1}\Big]+\frac{Qb^3}{J}e^{-2t_1}\operatorname{sh}t\cdot\cos\varphi-C\frac{t}{t_1}+$$

$$+\frac{2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{my_k}{\beta_k}\frac{\operatorname{ch}\beta_k\varphi}{\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1}\sin\beta_k t; \tag{2.1}$$

в области $(-t_1\leqslant t\leqslant 0;\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1)$

$$F_2(t,\varphi)=C_1\cos\varphi\left[e^{3t}-\frac{\operatorname{sh}(t_1+t)}{\operatorname{sh}t_1}+e^{-3t_1}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_1}\right]-$$

$$-C_2\left[e^{2t}-\frac{t_1+t}{t_1}+\frac{t}{t_1}e^{-2t_1}\right]+\frac{Qb^3}{J}e^{-2t_1}\operatorname{sh}t\cdot\cos\varphi-C\frac{t}{t_1}+$$

$$+\frac{2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{my_k}{\beta_k}\frac{\operatorname{ch}\beta_k(\pi-\varphi)}{\operatorname{ch}\beta_k(\pi-\varphi_1)}\sin\beta_k t-$$

$$-\frac{2}{\pi-\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\delta_k}\frac{\operatorname{sh}\delta_k(t_1+t)}{\operatorname{sh}\delta_k t_1}\sin\delta_k(\varphi-\varphi_1); \tag{2.2}$$

в области $(-t_1 \leqslant t \leqslant 0;\ \ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$

$$F_3(t,\varphi)=C_1\cos\varphi\left[e^{3t}-\frac{\operatorname{sh}(t_2-t)}{\operatorname{sh}t_2}-e^{3t_2}\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t_2}\right]-$$

$$-C_2\left[e^{2t}-\frac{t_2-t}{t_2}-\frac{t}{t_2}e^{2t_2}\right]+\frac{Qb^3}{J}e^{2t_2}\operatorname{sh}t\cdot\cos\varphi-$$

$$-\frac{Qb^3\cos\varphi_1}{3J}(e^{3t_2}-1)\frac{t}{t_2}+\frac{2}{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}E_k\frac{\operatorname{ch}\gamma_k(\pi-\varphi)}{\operatorname{ch}\gamma_k(\pi-\varphi_1)}\sin\gamma_k t-$$

$$-\frac{2}{\pi-\varphi_1}\sum\frac{x_k}{\delta_k}\frac{\operatorname{sh}\delta_k(t_2-t)}{\operatorname{sh}\delta_k t_2}\sin\delta_k(\varphi-\varphi_1), \tag{2.3}$$

в области $(0 \leqslant t \leqslant t_2;\ \ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$

где

$$\beta_k=\frac{k\pi}{t_1},\quad \delta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2(\pi-\varphi_1)},\quad \gamma_k=\frac{k\pi}{t_2},$$

$$C_1=\frac{(1+2\sigma)Qb^3}{8(1+\sigma)J},\quad C_2=\frac{\sigma x_0 Qb^2}{4(1+\sigma)J}, \tag{2.4}$$

$$E_k=8C_1\cos\varphi_1\frac{\gamma_k\left[1+(-1)^{k+1}e^{3t_2}\right]}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)}-4C_2\frac{1+(-1)^{k+1}e^{2t_2}}{\gamma_k(\gamma_k^2+4)}-$$

$$-\frac{Qb^3}{J}\cos\varphi_1\frac{(\gamma_k^2-3)\left[1+(-1)^{k+1}e^{3t_2}\right]}{\gamma_k(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)}, \tag{2.5}$$

$$x_0=-\frac{2}{3}b\frac{(e^{3t_2}-1)\sin\varphi_1}{(1-e^{-2t_1})\pi+(e^{2t_2}-1)(\pi-\varphi_1)}, \tag{2.6}$$

$$J=\frac{\pi b^4}{4}\left\{1-e^{-4t_1}+\left(1-\frac{\varphi_1}{\pi}\right)(e^{4t_2}-1)\left[1+\frac{\sin 2\varphi_1}{2(\pi-\varphi_1)}\right]\right\}. \tag{2.7}$$

Для определения постоянных x_k и y_k получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$y_p=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}\,x_k$$

$$(p=1,\ 2,\ 3,\cdots) \tag{2.8}$$

$$x_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp}\, y_k + Q_p,$$

где

$$a_{kp} = \frac{2}{m(\pi-\varphi_1)\left[\operatorname{th}\beta_p\varphi_1 + \operatorname{th}\beta_p(\pi-\varphi_1)\right]}\cdot\frac{\beta_p}{\beta_p^2+\delta_k^2},$$

$$b_{kp} = \frac{2m}{t_1\left[\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2\right]}\cdot\frac{\delta_p}{\beta_k^2+\delta_p^2}, \tag{2.9}$$

$$Q_p = \frac{1}{\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2}\left\{-\frac{C}{\delta_p t_1} + C_1\cos\varphi_1\left[\frac{8\delta_p^2}{(\delta_p^2-1)(\delta_p^2-9)}\left(\operatorname{cth}\delta_p t_2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh}\delta_p t_2}\right) - \frac{\delta_p}{\delta_p^2-1}\left(\operatorname{cth} t_1 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} t_1}\right) + \frac{3\delta_p}{\delta_p^2-9}\Bigg] - C_2\left[\frac{4}{\delta_p^2-4}\left(\operatorname{cth}\delta_p t_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh}\delta_p t_2}\right) + \frac{2\delta_p}{\delta_p^2-4} - \frac{1-e^{-2t_1}}{\delta_p t_1}\right] -$$

$$-\frac{Qb^3\cos\varphi_1}{J}\left[\frac{\delta_p^2+3}{(\delta_p^2-1)(\delta_p^2-9)}\left(\operatorname{cth}\delta_p t_2 - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh}\delta_p t_2}\right) + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{4\delta_p}{(\delta_p^2-1)(\delta_p^2-9)} - \frac{\delta_p e^{-2t_1}}{\delta_p^2-1}\right]\right\}. \tag{2.10}$$

Покажем, что системы (2.8) вполне регулярны. Действительно, для суммы модулей коэффициентов систем (2.8) имеют место следующие неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{1}{m}\,\frac{\operatorname{th}\beta_p(\pi-\varphi_1)}{\operatorname{th}\beta_p\varphi_1 + \operatorname{th}\beta_p(\pi-\varphi_1)} \leqslant \frac{1}{m},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{kp}| = m\,\frac{\operatorname{cth}\delta_p t_1 - \dfrac{1}{\delta_p t_1}}{\operatorname{cth}\delta_p t_1 + \operatorname{cth}\delta_p t_2} \leqslant \frac{m}{2}. \tag{2.11}$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{2}, \text{ т. е. } m = \sqrt{2}. \tag{2.12}$$

Тогда согласно (2.11) будем иметь

$$\sum_{-1}^{\infty} |a_{kp}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{kp}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. системы (2.8) оказались вполне регулярными.

Легко видеть из (2.10), что свободные члены системы (2.8) ограничены сверху и при $p\to\infty$ стремятся к нулю.

§ 3. Определение постоянной C

Для определения постоянной C пользуемся теоремой Лейбензона о циркуляции касательного напряжения при изгибе [4]

$$\int\limits_L \frac{\partial F}{\partial \nu}\, ds + \iint\limits_\Omega \left[-\frac{Q\sigma}{(1+\sigma)J}\,(x-x_0) + \frac{Q}{2J}\, f(x) + 2\mu\tau \right] dx dy = 0, \tag{3.1}$$

где L—внутренний контур сечения, Ω—площадь, ограниченная контуром L, ν—нормаль к контуру L.

В силу (1.3) это соотношение (3.1) упрощается

$$\int\limits_L \frac{\partial F}{\partial \nu}\, ds + \frac{Q\sigma x_0}{(1+\sigma)J}\,\Omega = 0. \tag{3.2}$$

Подставляя значения функций F_1 и F_2 из (2.1) и (2.2) в это соотношение и произведя интегрирование, после некоторого преобразования, для определения постоянной C получим следующую формулу

$$C + \frac{8(\pi-\varphi_1)}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{(2k-1)^2} - C_2(1-e^{-2t_1}) = 0. \tag{3.3}$$

Неизвестные коэффициенты x_k, входящие в соотношение (3.3), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений (2.8) и выражаются через постоянную C. Подставляя определенные из (2.8) значения неизвестных x_k в (3.3) и разрешая полученное соотношение относительно C, получим ее значение.

§ 4. Определение центра изгиба

Координата центра изгиба определяется по выражению

$$\bar{x} = -\frac{M}{Q}, \tag{4.1}$$

где M—момент от касательных напряжений, взятый относительно начала координат, т. е.

$$M = b^3 \iint \tau_{z\varphi}\, e^{3t}\, dt\, d\varphi. \tag{4.2}$$

Подставляя выражение $\tau_{z\varphi}$ из (1.7) в (4.2), произведя некоторое преобразование и пользуясь формулами (2.1)—(2.3), после интегрирования получим следующую формулу

$$\frac{M}{2}=\frac{Qb^5}{15J}\sin\varphi_1\left(e^{5t_1}+10e^{3t_1}-10e^{2t_1}-1\right)+Cb^2\pi\frac{1-e^{-2t_1}}{2t_1}+$$

$$+\frac{Qb^5\cos\varphi_1}{3J}(\pi-\varphi_1)\frac{(e^{3t_2}-1)(e^{2t_2}-1)}{2t_2}+\frac{4}{3}C_1b^2\sin\varphi_1\left[\frac{e^{5t_1}-1}{5}-\right.$$

$$\left.-e^{3t_1}+e^{2t_1}\right]-\frac{\pi}{2}C_2b^2\left\{\frac{(1-e^{-2t_1})^2}{t_1}-1+e^{-4t_1}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{\varphi_1}{\pi}\right)\left[\frac{(e^{2t_2}-1)^2}{t_2}-e^{4t_2}+1\right]\right\}+$$

$$+2b^2\left\{\frac{2}{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}E_k\frac{1+(-1)^{k+1}e^{2t_2}}{\gamma_k^2+4}\operatorname{th}\gamma_k(\pi-\varphi_1)-\right.$$

$$-\frac{2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{my_k\left[1+(-1)^{k+1}e^{-2t_1}\right]}{\beta_k(\beta_k^2+4)}\left[\operatorname{th}\beta_k\varphi_1+\operatorname{th}\beta_k(\pi-\varphi_1)\right]-$$

$$-\frac{2}{\pi-\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\delta_k(\delta_k^2-4)}\left(\operatorname{cth}\delta_k t_1+\operatorname{cth}\delta_k t_2-\frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh}\delta_k t_1}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh}\delta_k t_2}\right)\right\}. \tag{4.3}$$

§ 5. Числовой пример

В качестве числового примера рассмотрен изгиб круглого стержня с внешним продольным пазом секториальной формы с размерами $\frac{c}{a}=2{,}9359$, $2\varphi_1=\frac{\pi}{5}$, а глубина паза составляет $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ части толщины стержня, т. е. рассмотрены случаи:

I $t_1=0{,}3947$, $t_2=0{,}6823$;
II $t_1=0{,}677$, $t_2=0{,}400$;
III $t_1=0{,}8968$, $t_2=0{,}1801$.

В таблице 1 для этих случаев приведены значения координаты центра изгиба с оценками сверху $\overline{x}^{+}$ и снизу $\overline{x}^{-}$ и их средние значения $\overline{x}$.

Для сравнения, в первой строке таблицы приведено значение координаты центра изгиба кольцевого сектора такого же размера.

Таблица 1

	$\frac{\overline{x}^{-}}{a}$	$\frac{\overline{x}^{+}}{a}$	$\frac{\overline{x}}{a}=\frac{\overline{x}^{-}+\overline{x}^{+}}{2a}$
Кольцевой сектор	—	—	−3,3102
I случай	−1,5153	−1,4820	−1,4987
II случай	−0,5080	−0,4837	−0,4959
III случай	−0,2058	−0,1911	−0,1985

Из таблицы 1 видно, что при увеличении глубины паза координата центра изгиба увеличивается.

В таблице 2 приведены значения $\dfrac{c^2 \tau_{z\varphi}(t, \varphi)}{Q}$ для некоторых точек, лежащих на линии $y=0$ при $\dfrac{c}{a}=2{,}9359$.

Таблица 2

Точки	$(0, 0)$	$(-t_1, 0)$	$(-t_1, \pi)$	$(0, \pi)$	(t_2, π)
Кольцевой сектор	—	—	2,0202	—	0,8592
I случай	−1,5276	−2,1324	1,2283	0,8334	0,5846
II случай	−1,0038	−1,2889	1,0537	0,6413	0,5239
III случай	−0,6592	−1,0783	0,9697	0,5459	0,5008
Кольцо	−0,5007	−0,9395	0,9395	—	0,5007

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступила 25 V 1960

Ա. Հ. Բաբլոյան

ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ԱԿՈՍ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԼՈՐ ՁՈՂԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում դիտարկվում է օղակային սեկտորի տեսքով կողմնային փորվածք ունեցող կլոր պրիզմատիկ ձողի ծաման խնդրի ճշգրիտ լուծումը։

Դիտարկված խնդիրը բերվում է գծային անվերջ հավասարումների սիստեմի լուծմանը։ Ապացուցվում է, որ ստացված սիստեմները լիովին ռեգուլյար են և ունեն վերևից սահմանափակ ու զերոյի ձգտող (երբ $k\to\infty$) ազատ անդամներ։ Բերված են թվային օրինակներ։

Նման խնդիրներ դիտարկված են Լեյբենզոնի, Ստիվենսոնի, Զվոլինսկու և ուրիշների աշխատություններում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „ПММ“, 13, . 1, 1949, 107—112.
2. *Абрамян Б. Л.* Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы. „ДАН АрмССР“, 28, № 3, 1959, 109—116.
3. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Кручение круглых стержней, имеющих продольные выточки. „ПММ“, 24, № 2, 1960, 341—349.
4. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. ОГИЗ—Гостехиздат, М., 1947.
5. *Stevenson A. C.* The centre of flexure of a hollow shaft. „Proc. of Lond. Math. Sos.“, (2), 50, 1949.
6. *Зволинской Н. В.* Некоторые случаи точного решения проблемы о центре изгиба. „Труды ЦАГИ“, вып. 249, 1936.

7. *Stevenson A. C.* Flexure with shear and associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross-sections. „Philosophical Transaction of the Royal Society of London", Ser. A, Vol. 237, 1939.

8. *Mary Seegar, Karl Pearson.* De Saint-Venant solution for the Flexure... „Proc. Roy. Soc.", Ser. A, Vol. 96, No. A, 676, 1919.

9. *Бурак Я. И.* Деякі задач кручения та згину призматичних стержнів. Изд. АН Укр. ССР, Киев, 1959.

10. *Young, Elderton* and *Pearson K.* On the torsion resulting from flexure in prismatic cross-sections of uni-axial symmetry only. „Drapers Company Research Memoirs", Tech. Series 7, 1918, 1—75.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ж. Е. Багдасарян, В. Ц. Гнуни

К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек вращения

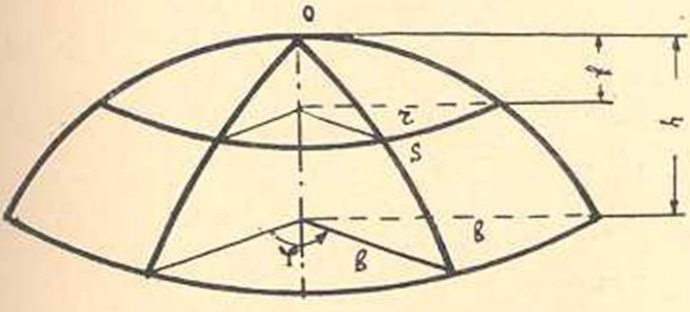
Рассматривается осесимметричная задача нелинейной динамической устойчивости слоистой ортотропной пологой оболочки вращения, имеющей замкнутую вершину.

Аналогичная задача для слоистой пологой оболочки решена в работе [4].

Задача нелинейных поперечных колебаний ортотропных оболочек вращения рассмотрена в работе [3].

1. Рассматриваемая оболочка собрана из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Пусть одна из плоскостей упругой симметрии материала каждого слоя оболочки параллельна срединной поверхности, а остальные две перпендикулярны к координатным линиям $\varphi = \mathrm{const}$, т. е. меридианам поверхности и $s = \mathrm{const}$ — параллельным кругам (фиг. 1).



Фиг. 1.

Считаем, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза Кирхгоффа-Лява [1].

Как известно [3], уравнения движения оболочек вращения, выведенные в предположении отсутствия инерционных сил в тангенциальном направлении, имеют вид [2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial r}(rT_1) - T_2 = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[rT_1\frac{\partial}{\partial r}(w+f)\right]+\frac{\partial}{\partial r}(rQ_1)-m^*r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+pr=0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_1)-M_2-rQ_1=0, \tag{1.3}$$

где m^* — приведенная масса, для которой имеем [4]

$$m^*=\frac{2}{g}\left[\gamma_{n+1}\delta_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(\delta_i-\delta_{i+1})\right]. \tag{1.4}$$

Здесь

γ_i — удельный вес i-ого слоя.

δ_i — расстояние i-ого слоя от срединной поверхности оболочки, которая одновременно является срединной поверхностью среднего $(n+1)$-ого слоя [1].

p — внешняя, нормально приложенная к срединной поверхности, нагрузка.

Для усилий и моментов имеем [1]

$$\begin{aligned} T_1&=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2, & M_1&=D_{11}\varkappa_1+D_{12}\varkappa_2,\\ T_2&=C_{12}\varepsilon_1+C_{22}\varepsilon_2, & M_2&=D_{12}\varkappa_1+D_{22}\varkappa_2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned} C_{jk}&=2\left[B_{jk}^{n+1}\delta_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}B_{jk}^{i}(\delta_i-\delta_{i+1})\right],\\ D_{jk}&=\frac{2}{3}\left[B_{jk}^{n+1}\delta_{n+1}^3+\sum_{i=1}^{n}B_{jk}^{i}(\delta_i^3-\delta_{i+1}^3)\right], \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} B_{11}^i&=\frac{E_1^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}, & B_{22}^i&=\frac{E_2^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i},\\ B_{12}^i&=\frac{\mu_1^iE_2^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}=\frac{\mu_2^iE_1^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}, & B_{66}^i&=G_{12}^{i}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для деформации срединной поверхности имеем [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1&=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2, & \varepsilon_2&=\frac{u}{r},\\ \varkappa_1&=-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, & \varkappa_2&=-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

которые должны удовлетворять следующему уравнению неразрывности

$$\varepsilon_1=\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_2)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2. \tag{1.9}$$

Посредством функции напряжений $\varphi=\varphi(r, t)$, представляя усилия T_1 и T_2 следующим образом

$$T_1 = -\frac{\varphi}{r}, \quad T_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{1.10}$$

тождественно удовлетворим первому уравнению равновесия (1.1). На основании (1.3) и (1.5) из уравнений (1.9) и (1.2) получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений (второе уравнение один раз проинтегрировано)

$$\begin{gathered} a_{11} r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + a_{11} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{22} \varphi - r \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{r}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = 0, \\ D_{11} r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - D_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (w + f) \cdot \varphi + \\ + \int_0^r \left(m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p \right) r dr = C. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Здесь

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad \Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2.$$

Постоянная интегрирования $C = 0$, так как на оболочку действует лишь нормально приложное распределенное давление.

В (1.11), заменив p выражением [5]

$$-T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - T_2^0 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \tag{1.12}$$

получим уравнения динамической устойчивости

$$\begin{gathered} a_{11} r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + a_{11} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{22} \varphi - r \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{r}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = 0, \\ D_{11} r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - D_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (w + f) \cdot \varphi + \\ + \int_0^r \left(m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_2^0 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr = 0. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Считаем, что край оболочки упруго защемлен и в осевом направлении не смещается. При этом угол поворота края пропорционален изгибающему меридиональному моменту, смещение в радиальном направлении пропорционально меридиональному растягивающему усилию т. е.

$$w(b, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = -\alpha M_1(b), \tag{1.14}$$

$$u(b) = -\tau_1 T_1(b), \quad \tau_1 = \left(a_{12} r - a_{11} r^2 \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=b}. \tag{1.15}$$

а у вершины оболочки имеем

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=0}=0, \tag{1.16}$$

где α и η коэффициенты пропорциональности, b — радиус края.

2. Из первого уравнения системы (1.11) можно найти

$$\varphi=C_1r^k+C_2r^{-k}+\frac{1}{a_{11}r^k}\int\left\{r^{2k-1}\int\frac{1}{r^k}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right]dr\right\}dr, \tag{2.1}$$

где

$$k=\frac{a_{22}}{a_{11}},$$

C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Будем решать задачу методом Бубнова-Галеркина.

Краевым условиям (1.14) и (1.16) удовлетворим пологая [2]

$$w=W_0(b^2-r^2)(b^2-nr^2)$$

$$\left(W_0=\frac{1}{b^4}w(0,\ t),\quad n=\frac{\alpha(D_{11}+D_{12})-1}{\alpha(5D_{11}+D_{22})-1}\right). \tag{2.2}$$

В зависимости от типа упругого защемления для коэффициентов α и n имеем:

для жестко защемленного края

$$w(b,\ t)=\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b}=0\cdot\qquad n=1,\ \alpha=0;$$

для жестко опертого края

$$w(b,\ t)=M_1(b)=0;\qquad n=\frac{D_{11}+D_{12}}{5D_{11}+D_{12}},\qquad \alpha=\infty.$$

Вводя выражение (2.2) в правую часть формулы (2.1), найдем силовую функцию φ. Из условия конечных значений нормальных усилий в вершине оболочки, постоянная интегрирования $C_2=0$.

При найденном значении φ второе уравнение системы (1.13) интегрируем методом Бубнова-Галеркина. При этом, поскольку это уравнение было получено из исходного уравнения равновесия путем однократного интегрирования, его нужно ортогонализировать не к прогибу w, а к его первой производной $\frac{\partial w}{\partial r}=2W_0\left[2r^3-(n+1)b^2r\right]$.

3. Сферическая оболочка. Для пологой сферической оболочки радиуса R и радиуса основания b, имеем [3]

$$f(r)=h\left(\frac{r}{b}\right)^2, \tag{3.1}$$

где h — высота подъема оболочки.

Из (2.1) с учетом (2.2) и (3.1) получим

$$\varphi = C_1 r^k + \frac{4h}{a_{11} b^2} \left[\frac{2}{25 - k^2} r^5 - \frac{(n+1) b^2}{9 - k^2} r^3 \right] W_0 +$$

$$+ \frac{2}{a_{11}} \left[\frac{4}{49 - k^2} r^7 - \frac{4(n+1) b^2}{25 - k^2} r^5 + \frac{(n+1)^2 b^4}{9 - k^2} r^3 \right] W_0^2. \qquad (3.2)$$

Постоянную C_1 находим из условия (1.15)

$$C_1 = \frac{4h}{a_{11} b^2} \frac{R_2}{R_0} W_0 + \frac{2}{a_{11}} \frac{R_1}{R_0} W_0^2,$$

где

$$R_0 = -b^k (a_{12} b - \gamma_1 - a_{11} k b),$$

$$R_1 = \frac{4b^7}{49 - k^2} (a_{12} b - \gamma_1 - 7 a_{11} b) - \frac{4(n+1) b^7}{25 - k^2} (a_{12} b - \gamma_1 - 5 a_{11} b) +$$

$$+ \frac{(n+1)^2 b^7}{9 - k^2} (a_{12} b - \gamma_1 - 3 a_{11} b),$$

$$R_2 = \frac{2b^5}{25 - k^2} (a_{12} b - \gamma_1 - 5 a_{11} b) - \frac{(n+1) b^5}{9 - k^2} (a_{12} b - \gamma_1 - 3 a_{11} b).$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{4h}{a_{11} b^2} \left[\frac{2}{25 - k^2} r^5 - \frac{(n+1) b^2}{9 - k^2} r^3 + \frac{R_2}{R_0} r^k \right] W_0 +$$

$$+ \frac{2}{a_{11}} \left[\frac{4}{49 - k^2} r^7 - \frac{4(n+1) b^2}{25 - k^2} r^5 + \frac{(n+1)^2 b^4}{9 - k^2} r^3 + \frac{R_1}{R_0} r^k \right] W_0^2. \qquad (3.3)$$

Вводя выражения (2.2), (3.3) во второе уравнение системы (1.13) и решая его по методу И. Г. Бубнова получим

$$l_{10} \frac{d^2 W_0}{dt^2} + [l_{11} + l_{14}(t) + l_{15}(t)] W_0 + l_{12} W_0^2 + l_{13} W_0^3 = 0, \qquad (3.4)$$

где

$$l_{10} = m^* \frac{5n^2 - 15n + 4}{120} b^{10},$$

$$l_{11} = \left\{ (n^2 - 8n + 3) D_{11} - \frac{3n^2 + 1}{3} D_{22} + \frac{8h^2}{a_{11}} \left[\frac{3 - 5n}{20(25 - k^2)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2n^2 + n - 1}{12(9 - k^2)} + \frac{R_2}{R_0} \left(\frac{2}{5 + k} - \frac{n+1}{3 + k} \right) b^{k-5} \right] \right\} b^6,$$

$$l_{12} = \frac{4h}{a_{11}} \left\{ \frac{4 - 6n}{15(49 - k^2)} + \frac{15n^2 - 6n - 1}{15(25 - k^2)} - \frac{10n^3 + 5n^2 - 4n + 1}{20(9 - k^2)} + \right.$$

$$+ \frac{2R_2}{R_0} \left[\frac{4}{7 + k} - \frac{4(n+1)}{5 + k} + \frac{(n+1)^2}{3 + k} \right] b^{k-5} +$$

$$\left. + \frac{R_1}{R_0} \left[\frac{2}{5 + k} - \frac{n+1}{3 + k} \right] b^{k-7} \right\} b^{10}, \qquad (3.5)$$

$$I_{13}=\frac{4}{a_{11}}\left\{\frac{42n^2-56n-22}{105(49-k^2)}-\frac{15n^3-3n^2-11n+7}{30(25-k^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{5n^4+5n^3-3n^2-n+2}{30(9-k^2)}+\frac{R_1}{R_0}\left[\frac{4}{7+k}-\frac{4(n+1)}{5+k}-\frac{(n+1)^2}{3+k}\right]b^{k-7}\right\}b^{14},$$

$$I_{14}(t)=2\int_0^b\left\{\int_0^r T_1^0(r,t)\left[6r^2-(n+1)b^2\right]rdr\right\}\left[2r^3-(n+1)b^2r\right]dr,$$

$$I_{15}(t)=2\int_0^b\left\{\int_0^r T_2^0(r,t)\left[2r^3-(n+1)b^2r\right]dr\right\}\left[2r^3-(n+1)b^2r\right]dr. \tag{3.6}$$

Если на оболочку действует постоянная по r нормальная нагрузка по закону

$$p=p_0+p_t\cos\theta t, \tag{3.7}$$

тогда

$$I_{14}(t)=-\frac{3n^2-4n+2}{12}\frac{Rb^8}{2}(p_0+p_t\cos\theta t),$$

$$I_{15}(t)=-\frac{n^2}{4}\frac{Rb^8}{2}(p_0+p_t\cos\theta t),$$

а уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{d^2W_0}{dt^2}+\omega^2\left(1-\frac{p_0+p_t\cos\theta t}{p_{kp}}\right)W_0+lW_0^2+dW_0^3=0, \tag{3.8}$$

$$\omega^2=\frac{I_{11}}{I_{10}},\qquad l=\frac{I_{12}}{I_{10}},\qquad d=\frac{I_{13}}{I_{10}},\qquad p_{kp}=\frac{2I_{11}}{RI_{16}},$$

где

$$I_{16}=\frac{6n^2-4n+2}{12}b^8.$$

Здесь ω — линейная частота собственных колебаний, p_{kp} — критическое значение давления p при его статическом действии.

Исходя из уравнения (3.8), для значения частоты собственных колебаний и критического значения интенсивности давления при его статическом действии, в нелинейной постановке получим [4]

$$\omega_{\text{н}}^2=\omega^2+lW_0+dW_0^2 \tag{3.9}$$

и

$$p_{kp}^{\text{н}}=p_{kp}\left(1+\frac{l}{\omega^2}W_0+\frac{d}{\omega^2}W_0^2\right). \tag{3.10}$$

Дадим уравнению (3.8) несколько иной вид

$$\frac{d^2W_0}{dt^2}+\Omega^2(1-2\mu\cos\theta t)W_0+lW_0^2+dW_0^3=0, \tag{3.11}$$

где

$$\Omega^2 = \omega^2\left(1 - \frac{p_0}{p_{kp}}\right), \qquad \mu = \frac{1}{2}\cdot\frac{p_t \cdot p_{kp}}{p_{kp} - p_0}. \tag{3.12}$$

4. Коническая оболочка. В этом случае уравнение срединной поверхности, отнесенное к вершине оболочки, имеет вид [2, 3]

$$f(r) = \frac{h}{b} r. \tag{4.1}$$

Здесь в качестве функции прогиба так же принимаем выражение (2.2). Подставляя (2.2) в (2.1) и используя (1.15), для функции φ получим

$$\varphi = \frac{2h}{a_{11}b}\left[\frac{2}{16-k^2} r^4 - \frac{(n+1)b^2}{4-k^2} r^2 + \frac{R_2}{R_0} r^k\right] W_0 +$$

$$+ \frac{2}{a_{11}}\left[\frac{4}{49-k^2} r^7 - \frac{4(n+1)b^2}{25-k^2} r^5 + \frac{(n+1)^2 b^4}{9-k^2} r^3 + \frac{R_1}{R_0} r^k\right] W_0^2, \tag{4.2}$$

где

$$R_0 = -(a_{12}b - \eta - a_{11}kb)\, b^k,$$

$$R_1 = b^7\left[\frac{4}{49-k^2}(a_{12}b - \eta - 7a_{11}b) - \frac{4(n+1)}{25-k^2}(a_{12}b - \eta - 5a_{11}b) + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)^2}{9-k^2}(a_{12}b - \eta - 3a_{11}b)\right],$$

$$R_2 = b^4\left[\frac{2}{16-k^2}(a_{12}b - \eta - 4a_{11}b) - \frac{n+1}{4-k^2}(a_{12}b - \eta - 2a_{11}b)\right].$$

Вводя (2.2) и (4.2) во второе уравнение системы (1.13), получим

$$l_{20}\frac{d^2 W_0}{dt^2} + [l_{21} + l_{24}(t) + l_{25}(t)]\, W_0 + l_{22} W_0^2 + l_{23} W_0^3 = 0, \tag{4.3}$$

где

$$l_{20} = l_{10},\ l_{23} = l_{13},\ l_{24}(t) = l_{14}(t),\ l_{25}(t) = l_{15}(t),$$

$$l_{21} = \left\{(n^2 - 8n + 3) D_{11} - \frac{1+3n^2}{3} D_{22} + \frac{2h^2}{a_{11}}\left[\frac{1-2n}{6(16-k^2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3n^2+2n-1}{12(4-k^2)} + \frac{R_2}{R_0}\left(\frac{2}{k+4} - \frac{n+1}{k+2}\right) b^{k-4}\right]\right\} b^6,$$

$$l_{22} = \frac{2h}{a_{11}}\left[\frac{28-44n}{99(49-k^2)} + \frac{26n^2+16n-20}{63(25-k^2)} + 2\cdot\frac{198n^2-220n+86}{693(16-k^2)} - \right.$$

$$- \frac{7n^3+11n^2+n-3}{35(9-k^2)} - 2\cdot\frac{63n^3+9n^2-31n+23}{315(4-k^2)} +$$

$$+\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{2}{k+4}-\frac{n+1}{k+2}\right)b^{k-7}+\frac{2R_2}{R_0}\left(\frac{4}{k+7}-\frac{4(n+1)}{k+5}\frac{(n+1)^2}{k+3}\right)b^{k-4}\Bigg]b^{10}. \quad (4.4)$$

Если на оболочку действует постоянная по r, нормально приложенная нагрузка по закону

$$p=p_0+p_t\cos\theta t, \quad (4.5)$$

то уравнение (4.3) можно записать в виде

$$\frac{d^2W_0}{dt^2}+\omega^2\left(1-\frac{p_0+p_t\cos\theta t}{p_{kp}}\right)W_0+lW_0^2+dW_0^3=0, \quad (4.6)$$

где

$$\omega^2=\frac{l_{21}}{l_{20}},\qquad l=\frac{l_{22}}{l_{20}},\qquad d=\frac{l_{23}}{l_{20}},$$
$$p_{kp}=\frac{2l_{21}\sin 2\alpha}{bl_{26}},\quad \text{где}\quad l_{26}=l_{16}. \quad (4.7)$$

Здесь 2α — угол раствора конуса.

Остальные выкладки получаются аналогичным образом, как в п°. 3.

5. Решение уравнения (3.11). Перепишем уравнение (3.11) в виде

$$\frac{d^2W_0}{dt^2}+2\lambda\frac{dW_0}{dt}+\Omega^2W_0+lW_0^2+dW_0^3=2\mu\Omega^2\cos\theta t\cdot W_0. \quad (5.1)$$

Член $2\lambda\frac{dW_0}{dt}$ в уравнении (5.1) характеризует затухание системы, где показатель затухания λ определяется из опытов.

Пусть

$$\theta=2\Omega+\varepsilon, \quad (5.2)$$

где ε — малая величина, определяющая область резонанса, т. е. мы находимся вблизи главного параметрического резонанса. Уравнение (5.1) в этом случае примет вид

$$\frac{d^2W_0}{dt^2}+2\lambda\frac{dW_0}{dt}+\Omega^2W_0+lW_0^2+dW_0^3=2\mu\Omega^2\cos(2\Omega+\varepsilon)t\cdot W_0. \quad (5.3)$$

Решение уравнения (5.3) в первом приближении напишем в виде [5, 6]

$$W_0=C\cdot\cos\left[\left(\Omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\nu\right], \quad (5.4)$$

где C — искомая амплитуда резонансных колебаний, ν — сдвиг фазы, который при соответствующем выборе начала отсчета времени может быть равен нулю.

Подставляя (5.4) в правую часть уравнения (5.3), и сохраняя лишь обычный резонансный член, получим [6]

$$\frac{d^2W_0}{dt^2}+2\lambda\frac{dW_0}{dt}+\Omega^2W_0+lW_0^2+dW_0^3=\mu\Omega^2C\cos\left[\left(\Omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\nu\right].\qquad(5.5)$$

(5.5) представляет собой уравнение обычного резонанса, где роль амплитуды внешней силы играет величина $\mu\Omega^2C$. Подставим вместо амплитуды внешней силы выражение $\mu\Omega^2C$ в формулу амплитуды обычных нелинейных резонансных колебаний [6]. Тогда для амплитуд установившихся колебаний в случае главного параметрического резонанса получим выражения [6]

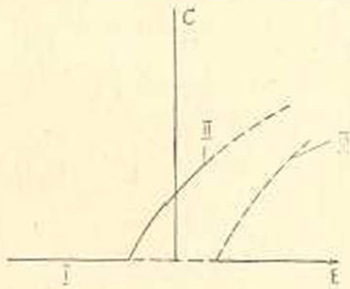
$$C=0,\qquad(5.6)$$

$$C^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\frac{\mu^2\Omega^2}{4}-\lambda^2}\right],\qquad(5.7)$$

где

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\frac{\mu^2\Omega^2}{4}-4\lambda^2},\qquad(5.8)$$

$$\varkappa=\frac{3d}{8\Omega}-\frac{5l^2}{12\Omega^3}.\qquad(5.9)$$



Фиг. 2.

Решение (5.6) соответствует нерезонансному состоянию оболочки, а два других решения (5.7) — установившимся резонансным колебаниям. Эти решения изображены на фиг. 2.

Решение III, как видно из фиг. 2, неустойчиво. Затягивание колебаний происходит в сторону больших частот.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 IV 1960

Ժ. Ե. Բաղդասարյան, Վ. Ց. Գնունի

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է շերտավոր անիզոտրոպ պտտման թաղանթների ոչ-գծային դինամիկ կայունության խնդիրը։

Խնդրի հիմնական հավասարումը իրենից ներկայացնում է երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարում, որն ստացվում է Բուբնով-Գալյորկինի վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ։

Օգտագործելով [6]-ում առաջարկված մեթոդը, հաշվվում են կայունացված ամպլիտուդաները ռեզոնանսային գլխավոր տիրույթում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Расчет слоистых оболочек вращения. „Известия АН АрмССР", **11**, № 2, 1949.
2. *Григолюк Э. И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек. „Известия АН СССР", № 3, 1955.
3. *Бурмистров Е. Ф.* Нелинейные поперечные колебания ортотропных оболочек вращения. „Инженерный сборник", **26**.
4. *Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. „Известия АН АрмССР", **13**, № 1, 1960.
5. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М., 1956.
6. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика. Физматгиз, М., 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при некоторых нагрузках

1. В настоящей работе рассматривается устойчивость трансверсально-изотропной круговой цилиндрической оболочки средней длины при совместном действии осевого и равномерного поперечного давления и при кручении.

Эти задачи подробно рассмотрены многими авторами, однако все они исходят из классической теории оболочек, т. е. теории, которая опирается на гипотезы Кирхгоффа-Лява.

Здесь мы будем исходить из общей теории анизотропных оболочек, предложенной С. А. Амбарцумяном [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов на напряженное и деформированное состояние оболочек.

За координатную поверхность принимается срединная поверхность рассматриваемой оболочки, которая представляется координатами α, β (α — вдоль образующей, β — по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Координатная ось γ направлена по внешней нормали к срединной поверхности оболочки. Принимается также, что плоскости изотропии в каждой точке параллельны срединной поверхности оболочки.

В основу теории, данной в работе [1], кладутся следующие гипотезы:

а) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрегаются по сравнению с прочими напряжениями;

б) расстояния по нормали (γ) между двумя точками оболочки после деформации остаются неизменными;

в) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\varphi(\alpha, \beta), \qquad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\psi(\alpha, \beta), \tag{1.1}$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ — неизвестные функции, h — толщина оболочки.

Исходя из теории пологих цилиндрических оболочек, для тангенциальных сил (T_1, T_2, S), моментов (M_1, M_2, H) и перерезывающих сил (N_1, N_2) получим следующие выражения [2]:

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\nu}{R}w\right),$$

$$T_2=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{R}w\right),$$

$$S=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right),$$

$$N_1=\frac{h^3}{12}\varphi,\qquad N_2=\frac{h^3}{12}\psi, \tag{1.2}$$

$$M_1=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)w+\frac{h^2}{10G'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)\right],$$

$$M_2=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[-\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)w+\frac{h^2}{10G'}\left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)\right],$$

$$H=\frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\left[-2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{h^2}{10G'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\right],$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскостях изотропии; G' — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к срединной поверхности; u, v, w — перемещения точек срединной поверхности по направлениям соответственно α, β и γ.

Эти усилия и моменты при отсутствии тангенциальных составляющих внешней нагрузки должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_2}{\partial\beta}=0,$$

$$-\frac{T_2}{R}+\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial N_2}{\partial\beta}+Z=0,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\beta}-N_1=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{\partial M_2}{\partial\beta}-N_2=0,$$

где Z — интенсивность нормальной составляющей внешней нагрузки.

Подставляя (1.2) в (1.3), будем иметь:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)v+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}=0,$$

$$-\frac{hE}{R(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R}\right)+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)+Z=0,$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial\alpha}\Delta w+\frac{h^2}{10\,G'}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\varphi+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}\right]-\frac{1-\nu^2}{E}\varphi=0,\\
&-\frac{\partial}{\partial\beta}\Delta w+\frac{h^2}{10\,G'}\left[\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\psi\right]-\frac{1-\nu^2}{E}\psi=0,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где

$$
\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}.
$$

Из последних трех уравнений этой системы, исключив φ и ψ, окончательно получим следующую систему трех дифференциальных уравнений относительно перемещений u, v и w:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=0,\\
&\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)v+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}=0,\\
&\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta w+(1-k_0\Delta)\left[Z-\frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R}\right)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где

$$
k_0=\frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)G'}.
$$

При рассмотрении вопроса устойчивости, предполагаем, что рассматриваемая оболочка до потери устойчивости находится в безмоментном напряженном состоянии. Тогда уравнения устойчивости получим, если в (1.5) заменим Z выражением [3]

$$
Z=T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta},
\tag{1.6}
$$

где T_1^0, T_2^0, S^0 — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния оболочки. Причем уже под u, v, w нужно понимать дополнительные перемещения, получающиеся вследствие потери устойчивости.

Таким образом, подставляя (1.6) в (1.5), получим следующие три уравнения устойчивости относительно дополнительных перемещений u, v, w:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=0,\\
&\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)v+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}=0,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

$$
-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta w+(1-k_0\Delta)\left[T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}-\right.
$$

$$-\frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{w}{R}\right)\Bigg| = 0.$$

Поступая так, как в [4], эту систему представим в виде

$$\Delta\Delta u = -\frac{\nu}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+\frac{1}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2},$$

$$\Delta\Delta v = -\frac{2+\nu}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}-\frac{1}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3},$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta\Delta\Delta w+\frac{Eh}{R^2}(1-k_0\Delta)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}-$$

$$-(1-k_0\Delta)\Delta\Delta\left[T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right]=0. \qquad (1.8)$$

Уравнения (1.8) отличаются от соответствующих уравнений классической теории устойчивости цилиндрических оболочек наличием членов с коэффициентом k_0.

2. Рассмотрим случай, когда оболочка подвергнута одновременному действию осевого сжатия и равномерного поперечного давления. При этом имеем

$$T_1^0=-P,\quad T_2^0=-qR,\quad S^0=0. \qquad (2.1)$$

Первые два уравнения системы (1.8) остаются без изменения, а третье уравнение в силу (2.1) принимает вид

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta\Delta\Delta w+\frac{Eh}{R^2}(1-k_0\Delta)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+$$

$$+(1-k_0\Delta)\Delta\Delta\left(P\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+qR\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)=0. \qquad (2.2)$$

Принимая

$$u=A\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\sin\frac{n\beta}{R},$$

$$v=B\sin\frac{m\pi\alpha}{l}\cos\frac{n\beta}{R}, \qquad (2.3)$$

$$w=C\sin\frac{m\pi\alpha}{l}\sin\frac{n\beta}{R},$$

где A, B, C — некоторые постоянные, l — длина оболочки, удовлетворим условиям шарнирного опирания оболочки по краям.

Подставляя (2.3) в первые два уравнения (1.8), получим

$$A=\frac{\lambda(\nu\lambda^2-n^2)}{(\lambda^2+n^2)^2}C,\quad B=-\frac{[(2+\nu)\lambda^2+n^2]n}{(\lambda^2+n^2)^2}C, \qquad (2.4)$$

где

$$\lambda = \frac{m\pi R}{l}.$$

Далее, подставляя значения w из (2.3) в (2.2), из условия существования нетривиального решения ($C \neq 0$, т. к. при $C = 0$, в силу (2.4) имеем $A = B = 0$) получим уравнение для определения критических значений внешних сил

$$\frac{P\lambda^2 + qRn^2}{Eh} = c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{1 + k(\lambda^2 + n^2)} + \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2}, \tag{2.5}$$

где

$$c^2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \qquad k = \frac{k_0}{R^2} = \frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)R^2G'}. \tag{2.6}$$

Отметим, что формула (2.5) при $q = 0$, т. е. когда оболочка находится под действием только осевых сжимающих сил, совпадает с соответствующей формулой, полученной для трансверсально-изотропной цилиндрической панели [6], если только в (2.5) заменить n через $n\pi/\theta$ (θ — центральный угол поперечного сечения панели).

Дальнейшее исследование можно произвести методом, аналогичным методу, данному в книге С. П. Тимошенко [5]. А именно, при данных значениях коэффициента k, если известны размеры оболочки и приняты определенные значения для чисел m и $2n$, которые означают соответственно число полуволн в осевом и окружном направлениях, уравнение (2.5) представит некоторую линейную зависимость между величинами P/Eh и qR/Eh, определяющими внешние давления. Если принять эти величины за прямоугольные координаты, уравнение (2.5) определит прямую линию.

Каждый раз фиксируя m и давая n различные значения, получаем систему таких прямых. Части этих прямых, имеющих для данной обсциссы наименьшие ординаты, образуют ломаную линию, которую можно использовать для определения критических значений внешних сил.

Предположим, что внешние силы меняются так, что их отношение остается постоянным ($P/qR = \text{const}$). Тогда нужно построить прямую, представляющую данное отношение, точки пересечения которой с ломаными линиями определяют соответствующие критические значения внешних сил.

Примером такого отношения может служить, например, случай цилиндрической оболочки, закрытой по краям, подвергнутой действию равномерного внешнего давления. В этом случае $P/qR = 1/2$.

3. В случае кручения рассматриваемой оболочки моментами, приложенными на концах, имеем

$$T_1^0 = T_2^0 = 0, \quad S = \frac{M}{2\pi R^2}. \tag{3.1}$$

где M — приложенный крутящий момент.

При этом первые два уравнения системы (1.8) остаются без изменения, а третье уравнение в силу (3.1) принимает вид

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta\Delta\Delta w+\frac{Eh}{R^2}(1-k_0\Delta)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}-\frac{M}{\pi R^2}(1-k_0\Delta)\Delta\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}=0. \quad (3.2)$$

Относительно граничных условий отметим, что удовлетворить всем граничным условиям весьма затруднительно. С другой стороны, известно [4, 5], что при кручении не очень коротких оболочек замена заделки краев оболочки шарнирным закреплением мало сказывается на ее устойчивости. Поэтому здесь, как и в [4], будем удовлетворять только следующим граничным условиям

$$w=0 \quad \text{при} \quad \alpha=0 \quad \text{и} \quad \alpha=l. \quad (3.3)$$

Тогда решение уравнения (3.2) можно представить в виде

$$w=\sum_{i=1}^{2}C_i\sin\left(\mu_i\frac{\alpha}{R}-\frac{n\beta}{R}\right). \quad (3.4)$$

При этом условия (3.3) сводятся к следующим

$$C_1+C_2=0,$$

$$C_1\sin\left(\mu_1\frac{l}{R}-n\frac{\beta}{R}\right)+C_2\sin\left(\mu_2\frac{l}{R}-n\frac{\beta}{R}\right)=0.$$

Эти условия имеют место при любом β и отличных от нуля значениях C_i, если

$$\sin(\mu_2-\mu_1)\frac{l}{2R}=0,$$

т. е., когда

$$\mu_2-\mu_1=\frac{2m\pi R}{l} \quad (m=1,2,\ldots). \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) в (3.2), получим

$$\sum_{i=1}^{2}C_i\left\{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{(\mu_i^2+n^2)^2}{R^8}+\frac{Eh}{R^6}\mu_i^4\left[1+\frac{k_0}{R^2}(\mu_i^2+n^2)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{M}{\pi R^2}\left[1+\frac{k_0}{R^2}(\mu_i^2+n^2)\right]n\mu_i\frac{(\mu_i^2+n^2)^2}{R^6}\right\}\sin\left(\mu_i\frac{\alpha}{R}-n\frac{\beta}{R}\right)=0.$$

Отсюда для критического значения крутящего момента получим следующее выражение

$$M^*=\pi R^2Eh\left\{c^2\frac{(\mu_i^2+n^2)^2}{n\mu_i[1-k(\mu_i^2+n^2)]}+\frac{\mu_i^3}{n(\mu_i^2+n^2)^2}\right\}, \quad (3.6)$$

где c^2 и k определяются по формулам (2.6). Причем $\mu_i\,(i=1,2)$ удовлетворяют условию (3.5), кроме того они должны быть такими, чтобы выражение (3.6) принимало одно и то же значение при $i=1$ и $i=2$. Учитывая это, можно дальнейшее исследование произвести графическим методом, аналогичным методу, данному в [4].

Для этого заменим в формуле (3.6) величину μ_i на μ и рассмотрим при фиксированном n выражение

$$y=c^2\frac{(\mu^2+n^2)^2}{n\mu\left[1+k(\mu^2+n^2)\right]}+\frac{\mu^3}{n(\mu^2+n^2)^2} \tag{3.7}$$

как функцию μ. Так как эта функция нечетная относительно μ, то достаточно рассмотреть ее при $\mu>0$.

С целью исследования графика функции (3.7), представим ее в виде суммы $y=y_1+y_2$, где

$$y_1=c^2\frac{(\mu^2+n^2)^2}{n\mu\left[1+k(\mu^2+n^2)\right]},\qquad y_2=\frac{\mu^3}{n(\mu^2+n^2)^2}. \tag{3.8}$$

Рассматривая отдельно y_1 и y_2 замечаем, что, на всей положительной оси μ, y_1 имеет единственный экстремум-минимум при

$$\mu=\mu_{01}=\left[\frac{2(1+kn^2)}{3+\sqrt{9+4kn^2(1+kn^2)}}\right]^{1/2}n, \tag{3.9}$$

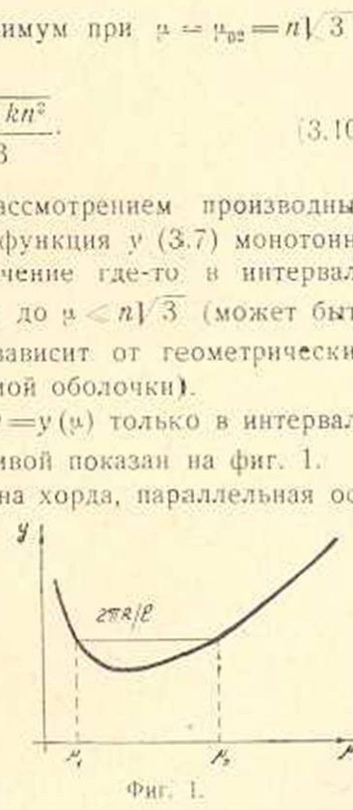
а y_2 имеет единственный экстремум-максимум при $\mu=\mu_{02}=n\sqrt{3}$; причем, как нетрудно показать,

$$\frac{n}{\sqrt{3}}<\mu_{01}<n\sqrt{\frac{1+kn^2}{3}}. \tag{3.10}$$

Из этих рассмотрений, а также рассмотрением производных функций (3.8) приходим к выводу, что функция y (3.7) монотонно убывает, принимая свое минимальное значение где-то в интервале $0<\mu<\mu_{01}$, а потом монотонно возрастает до $\mu<n\sqrt{3}$ (может быть и несколько больше, чем $n\sqrt{3}$, это уже зависит от геометрических и механических постоянных рассматриваемой оболочки).

Ограничимся рассмотрением кривой $y=y(\mu)$ только в интервале $0<\mu<n\sqrt{3}$. Примерный график этой кривой показан на фиг. 1.

Допустим, что в эту кривую проведена хорда, параллельная оси μ, длиной $2m\pi R/l$ (m — фиксированное натуральное число).



Фиг. 1.

Здесь предполагаем, что размеры рассматриваемой оболочки такие, что указанное построение возможно при некотором значении $m>1$.

Тогда ясно, что ордината этой хорды дает значение $M^*/\pi R^2Eh$, так как при этом удовлетворяются условия (3.5) и $y(\mu_1)=y(\mu_2)$. Но так как эта ордината зависит от чисел m и n, то она при различных значениях m и n может принимать различные значения. Наименьшее из этих ординат, соответствующих всевозможным натуральным m и n, определяет значение искомой критической нагрузки.

Исходя из этого и учитывая, что указанная выше хорда будет расположена тем ниже, чем меньше ее длина, принимаем $m=1$.

Таким образом, с целью определения критического значения крутящего момента (3.7) нужно построить графики функции (3.7) в рассматриваемом интервале для ряда натуральных n и, вкладывая в эти графики указанную хорду длиной $2\pi R/l$, выбрать из них тот, при котором ордината хорды будет наименьшей.

Естественно, что такой путь нахождения наименьшего значения критической силы потребует установления верхней границы числа n — некоторое число N. Определить такое N можно следующим образом.

Рассмотрим y_1 (3.8), которая, как указывалось выше, на всей положительной оси μ имеет единственный минимум при $\mu=\mu_{01}$ (3.9) равный

$$y_{1\min}=z(n)=c^2\frac{(\mu_{01}^2+n^2)^2}{n\mu_{01}[1+k(\mu_{01}^2+n^2)]}. \tag{3.11}$$

Нетрудно показать, что с возрастанием n μ_{01} и $z(n)$ монотонно возрастают.

Построим теперь при каком-нибудь значении n_1 кривую $y=y(\mu)$ (3.7) и вложим в нее горизонтальную хорду длиной $2\pi R/l$. Пусть ордината этой хорды будет y_0.

Определив n_0 из равенства

$$y_0=z(n_0) \tag{3.12}$$

и учитывая, что $z(n)$ возрастает с возрастанием n, можно n_0 принимать за искомую верхнюю границу числа n. Однако нахождение n_0 из (3.12) связано с большими затруднениями. Поэтому в (3.12) заменим $z(n_0)$ выражением

$$z_0(n_0)=\frac{16c^2n_0^2}{\sqrt{3}(3+4kn_0^2)}<z(n_0), \tag{3.13}$$

т. е. в (3.11) положим $\mu_{01}=n/\sqrt{3}$.

Тогда для n_0 получим

$$n_0=\frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}y_0}{4c^2-\sqrt{3}ky_0}\right)^{1/2}. \tag{3.14}$$

Ясно, что при такой замене (3.13) получим для n_0 несколько большее значение, чем оно могло получиться из (3.12).

Таким образом, учитывая свойства рассмотренных выше функций и их графиков, в качестве N можем взять ближайшее к n_0 (3.14) целое число.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 V 1960

Ա. Ա. Խաչատրյան

ԿԼՈՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՈՐՈՇ ԲԵՌԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունում դիտարկվում են տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված կլոր գլանային թաղանթի կայունության հետևյալ խնդիրները՝ ա) երբ թաղանթի վրա միաժամանակ ազդում են առանցքային սեղմող ուժը և հավասարաչափ բաշխված արտաքին ճնշումը, բ) երբ թաղանթը գտնվում է ոլորող մոմենտների ազդեցության տակ։

Հետազոտության հիմքում ընկած է Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջարկված անիզոտրոպ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը, որտեղ կատարվում են հետևյալ ընդունելությունները.

1) թաղանթի միջին մակերևույթին զուգահեռ հարթակներում գործող σ_γ նորմալ լարումները արհամարհվում են մյուս լարումների նկատմամբ։

2) թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտը դեֆորմացիայից հետո չի փոխում իր երկարությունը.

3) $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ըստ թաղանթի հաստության փոխվում են պարաբոլական օրենքով (1.1)։

Վերը նշված խնդիրներից ա)-ն լուծված է եզրերով հոդակապորեն ամրացված եզրային պայմանների դեպքում, իսկ ոլորման խնդրում բավարարված են միայն (3.3) եզրային պայմանները։

Ստացված են բանաձևեր կրիտիկական ուժերի համար, որոնք թաղանթների կլասիկ տեսությունով ստացվող համապատասխան մեծություններից տարբերվում են k գործակցի (2.6) առկայությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К общей теории анизотропных оболочек „ПММ“, 22, 1, 1958.
2. *Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В.* К теории ортотропных оболочек и пластинок. „Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)“, **12**, 1, 1959.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. *Даревский В. М., Карташкин Б. Д.* Руководство для конструкторов по расчету на прочность газотурбинного двигателя. Методика расчета на прочность и устойчивость корпусов турбореактивных двигателей. Вып. 5, Оборонгиз, М., 1956.
5. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
6. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной цилиндрической панели. „ДАН АрмССР“, **30**, 1, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-Մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

Ю. М. Айвазян

Уравнения движения заряженных тел в общей теории относительности

Как известно, в общей теории относительности уравнения движения не нужно добавлять к уравнениям поля, т. к. они уже содержатся в них. Однако, их получение из уравнений поля оказалось очень трудной задачей, которая впервые была решена в 1927 г. Эйнштейном и Громмером [1] для одной частицы с исчезающе малой массой. Задача двух тел оказалась значительно труднее и была решена Эйнштейном, Инфельдом и Гоффманом [2]. Независимо от них, уравнения движения для двух тел в ньютоновом приближении были получены Фоком [3]. Уравнения движения в посленьютоновом приближении, на основании работы Фока, были получены Петровой [4] и Папапетру [5].

Сравнительно недавно Инфельдом [6] было показано, что уравнения движения могут быть сравнительно просто получены из уравнений поля, если предположить, что тензор энергии-импульса пропорционален обобщенным δ-функциям.

Целью настоящей работы было обобщение метода Инфельда на случай заряженных тел. В работе получены уравнения движения ньютонова порядка для двух заряженных тел.

1. Уравнения гравитационного поля в нашем случае, т. е. при наличии заряженных тел и внешних электромагнитных полей, имеют следующий вид:

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{R} = -8\pi\,(\mathbf{T}^{\alpha\beta}_{\text{мех.}} + \mathbf{T}^{\alpha\beta}_{\text{эл. м}}). \tag{1}$$

Здесь, как и ниже, буквы, напечатанные жирным шрифтом, обозначают тензорную плотность. Кроме того, принята система единиц $\kappa=1$, $c=1$ (κ — гравитационная постоянная).

Как видно из (1), правая часть уравнений содержит тензор энергии-импульса электромагнитного поля, которое создается зарядами тел и внешними электромагнитными полями.

Для простоты, с самого начала считаем, что у нас имеются только два заряженных тела и нет внешних электромагнитных полей (обобщение на случай многих тел не представляет труда, а в ньютоновом приближении попросту тривиально).

Пусть эти тела движутся по мировым линиям, координаты которых обозначим через $\xi^{\alpha}(t)$ и $\eta^{\alpha}(t)$. Теперь, вслед за Инфельдом, предположим, что $T^{\alpha\beta}_{\text{мех.}}$ имеет δ-образные особенности, т. е. что

$$T^{\alpha\beta}_{\text{мех.}} = {}^{1}t^{\alpha\beta}\,{}^{1}\delta + {}^{2}t^{\alpha\beta}\,{}^{2}\delta, \tag{2}$$

где индексы слева вверху обозначают номера тел. Следует отметить, что стоящие здесь δ-функции не являются обычными δ-функциями Дирака. Помимо обычных свойств δ-функций они обладают еще дополнительным свойством

$$\int \frac{1}{\rho^{k}}\,\delta(x^{s} - \xi^{s})\,d^{3}x = 0, \qquad \rho^{2} = (x^{s} - \xi^{s})(x^{s} - \xi^{s}),$$

где k — целое число, а интегрирование производится по всему трехмерному объему (под повторными греческими индексами подразумевается суммирование от 0 до 3, а под латинскими — от 1 до 3).

Как было показано Тулкзуевым [7], выбор $T^{\alpha\beta}_{\text{мех.}}$ в виде (2) однозначно определяет вид $t^{\alpha\beta}$. Можно показать, что теорема Тулкзуева останется справедливой и при наличии электромагнитного поля, так что и в нашем случае мы будем иметь

$$t^{\alpha\beta} = \mu\,\xi^{\alpha'}\xi^{\beta'} = m\,\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}, \tag{3}$$

где

$$\xi^{\alpha'} = \frac{d\xi^{\alpha}}{\overline{ds}}, \qquad \dot{\xi}^{\alpha} = \frac{d\xi^{\alpha}}{dt},$$

а связь между μ и m дается уравнением

$$\frac{m}{\mu} = \frac{dt}{\overline{ds}}, \tag{4}$$

где $\overline{ds} = (\overline{g_{\alpha\beta}}\,d\xi^{\alpha}d\xi^{\beta})^{1/2}$. Здесь и ниже черта над выражением означает, что оно взято на мировой линии и выкинуты сингулярности. Мы покажем ниже, что $\mu = \text{const}$. Основываясь на этом и принимая во внимание соображения размерности, назовем μ массой покоя.

Таким образом,

$$T^{\alpha\beta}_{\text{мех.}} = {}^{1}\mu\,\xi^{\alpha'}\xi^{\beta'}\,{}^{1}\delta(x^{s} - \xi^{s}) + {}^{2}\mu\,\eta^{\alpha'}\eta^{\beta'}\,{}^{2}\delta(x^{s} - \xi^{s}). \tag{5}$$

2. Как известно, десять дифференциальных уравнений второго порядка определяют десять неизвестных величин $g_{\alpha\beta}$, которые определяют поле. Однако эти десять уравнений удовлетворяют также и четырем тождествам, называемым свернутыми тождествами Бьянки

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}R\right)_{;\,\beta} = 0. \tag{6}$$

Эти тождества как бы переопределяют систему уравнений поля. В этом-то, в основном, и заключается причина того, что уравнения движения содержатся в уравнениях поля.

Из свернутых тождеств Бьянки следует, что должно тождественно выполняться соотношение

$$(T^{\alpha\beta}_{\text{мех.}} + T^{\alpha\beta}_{\text{эл. м}})_{;\beta} = 0. \tag{7}$$

Следующие соотношения, записанные в общековариантном виде и вытекающие непосредственно из свернутых тождеств Бьянки, мы назовем уравнениями движения для первого тела

$$\frac{dt}{ds}\int (T^{\alpha\beta}_{\text{мех.}} + T^{\alpha\beta}_{\text{эл. м}})_{;\beta} d^3x = 0. \tag{8}$$

Здесь интегрирование производится по всему трехмерному пространству по координатам первого тела.

Можно легко показать, что для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, определяемого выражением

$$T^{\alpha\beta}_{\text{эл. м}} = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\left(F^{\alpha}{}_{\gamma} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}\right), \tag{9}$$

в силу уравнений Максвелла, записанных в общековариантной форме

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} F^{\beta\alpha}) = F^{\beta\alpha}_{;\alpha} = 4\pi j^{\beta}. \tag{10}$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0, \tag{11}$$

где

$$j^{\beta} = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^{\beta}}{dt}, \tag{12}$$

следует, что

$$T^{\alpha\beta}_{\text{эл. м};\beta} = -F^{\alpha}{}_{\beta} j^{\beta} \sqrt{-g}. \tag{13}$$

Следовательно, уравнения движения для первого тела можно переписать в виде

$$\frac{dt}{ds}\int \{ ({}^1t^{\alpha\beta 1}\delta)_{;\beta} - {}^1F^{\alpha}{}_{\beta} {}^1j^{\beta} \sqrt{-g} \} d^3x. \tag{14}$$

Так как

$$({}^1t^{\alpha\beta 1}\delta)_{;\beta} = ({}^1t^{\alpha\beta 1}\delta)_{,\beta} + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} {}^1t^{\mu\nu 1}\delta \tag{15}$$

и

$$({}^1t^{\alpha\beta 1}\delta)_{,\beta} = ({}^1m\, \dot\xi^{\alpha} \dot\xi^{s\,1}\delta)_{,s} + ({}^1m\dot\xi^{\alpha 1}\delta)_{,0}, \tag{16}$$

то легко показать, что

$$\frac{dt}{ds}\int ({}^1t^{\alpha\beta 1}\delta)_{,\beta} d^3x = (\mu\dot\xi^{\alpha})'. \tag{17}$$

Примем теперь, что

$$\rho = e\delta\, (x^s - \xi^s). \tag{18}$$

Тогда, учитывая все последние соотношения, мы получим уравнения движения для первого тела

$$ {}^1\mu'\xi^{\alpha'} + {}^1\mu\xi^{\alpha''} + {}^1\mu\overline{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}\xi^{\mu'}\xi^{\nu'} - {}^1e\overline{F^{\alpha}{}_{\beta}}\xi^{\beta'} = 0. \qquad (19) $$

Напомним здесь, что

$$ \overline{A} = \int A\delta(x^s - \xi^s)\, d^3x. $$

Теперь, с помощью (19) можно показать, что $\mu = \text{const}$. Действительно, умножим (19) на $\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\tau'}$ и просуммируем по α. Получим

$$ {}^1\mu'\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\alpha'}\xi^{\tau'} + {}^1\mu\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\alpha''}\xi^{\tau'} + {}^1\mu\overline{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}\,\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\mu'}\xi^{\nu'}\xi^{\tau'} - {}^1e\overline{F^{\alpha}{}_{\beta}}\,\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\beta'}\xi^{\tau'} = 0. \qquad (20) $$

Примем здесь пока, что для $g_{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha}{}_{\beta}$ выполняются соотношения

$$ \overline{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}\,\overline{g_{\alpha\tau}} = \overline{[\mu\nu, \tau]} \qquad (21) $$

и

$$ \overline{F^{\alpha}{}_{\beta}}\,\overline{g_{\alpha\tau}} = \overline{F_{\tau\beta}}. \qquad (22) $$

Как было показано Инфельдом, соотношение

$$ \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB} $$

выполняется, если величины A и B не имеют на мировой линии особенностей четного порядка, т. е., например, если для величины справедливо вблизи мировой линии разложение

$$ A = \frac{{}^{-3}A}{\rho^3} + \frac{{}^{-1}A}{\rho} + \overline{A} + \overline{A_{,s}}\,(x^s - \xi^s) + \cdots, $$

где $\rho^2 = (x^s - \xi^s)(x^s - \xi^s)$.

Очевидно, что выполнение этого условия нужно будет каждый раз проверять.

Считая, что (21) и (22) выполняются, перепишем (20) в виде

$$ {}^1\mu'\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\alpha'}\xi^{\tau'} + {}^1\mu\overline{g_{\alpha\tau}}\,\xi^{\alpha''}\xi^{\tau'} + {}^1\mu\overline{[\mu\nu, \tau]}\,\xi^{\mu'}\xi^{\nu'}\xi^{\tau'} - {}^1e\overline{F_{\tau\beta}}\,\xi^{\beta'}\xi^{\tau'} = 0. \qquad (20a) $$

Принимая во внимание выражения

$$ g_{\mu\nu,\rho} = [\mu\rho, \nu] + [\nu\rho, \mu] \qquad (23) $$

и

$$ \overline{\varphi}_{,0} = \overline{\varphi_{,\alpha}}\,\xi^{\alpha'}, \qquad (24) $$

а также то, что последний член в (20а) равен нулю (так как там стоит произведение симметричного тензора на антисимметричный), из (20а) получим

$$\mu' + \frac{\mu}{2}\frac{d}{ds}\left(\overline{g_{\alpha\beta}\xi^{\alpha'}\xi^{\beta'}}\right) = 0. \tag{25}$$

Из последнего соотношения видно, что $\mu = \text{const}$.

Следовательно, уравнения движения несколько упрощаются и принимают вид

$$^1\mu\xi^{\alpha''} + {}^1\mu\overline{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}\xi^{\mu'}\xi^{\nu'} - {}^1e\overline{F^{\alpha}_{\beta}}\xi^{\beta'} = 0. \tag{26}$$

Легко проверить, что эти уравнения можно получить из вариационного принципа

$$\delta\int[\int(-{}^1\mu ds + {}^1eA_{\alpha}dx^{\alpha})\delta(x^s - \xi^s)\,d^3x] = 0. \tag{27}$$

где A_{α} — потенциалы электромагнитного поля. Очевидно, что результат такого варьирования при $\mu \to 0$ и $e = 0$ дает нам геодезическую линию, которая отличается от геодезической линии в общей теории относительности тем, что вместо x^{α} в ней стоят ξ^{α}.

Нас, однако, интересует лишь пространственная часть уравнений (26). Временная компонента этих уравнений есть

$$^1\dot{m} + {}^1m\overline{\left\{ {0 \atop \mu\nu} \right\}}\dot{\xi}^{\mu}\dot{\xi}^{\nu} - {}^1e\overline{F^{0}_{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} = 0. \tag{28}$$

Учитывая это, находим, что пространственная часть уравнений (26) имеет вид

$$^1m\ddot{\xi}^k + {}^1e\overline{F^{0}_{\beta}}\dot{\xi}^{\beta}\dot{\xi}^k - {}^1m\overline{\left\{ {0 \atop \mu\nu} \right\}}\dot{\xi}^{\mu}\dot{\xi}^{\nu}\dot{\xi}^k + {}^1m\overline{\left\{ {k \atop \mu\nu} \right\}}\dot{\xi}^{\mu}\dot{\xi}^{\nu} - {}^1e\overline{F^{k}_{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} = 0. \tag{29}$$

Из этих уравнений мы и получим, с помощью метода аппроксимации, уравнения движения в ньютоновом приближении.

3. Для получения уравнений движения нужно выбрать определенный метод аппроксимации, так как точное решение уравнений гравитационного поля оказывается невозможным.

Вслед за Инфельдом, мы будем разлагать величины в ряды по инвариантному параметру $\lambda = {}^1/c$. Например,

$$A = {}_0A + {}_1A + {}_2A + \cdots \tag{30}$$

Далее примем, что дифференцирование по времени увеличивает порядок на единицу. Символически это можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_lA = {}_{l+1}A. \tag{31}$$

Естественно принять, что разложение ξ^{κ} начинается с нуля. Тогда из соотношения

$$\frac{\text{масса} \times \text{масса}}{(\text{расстояние})^2} = \text{масса} \times \text{ускорение} \tag{32}$$

видно, что разложение массы начинается с двойки

$$m = {}_2m + {}_4m + {}_6m + \cdots \tag{33}$$

Из соотношения

$$\frac{\text{заряд} \times \text{заряд}}{(\text{расстояние})^2} = \text{масса} \times \text{ускорение} \tag{34}$$

видно, что порядок заряда нужно положить равным двум, т. е.

$$e = {}_2e. \tag{35}$$

Аналогично можно показать, что должны выполняться следующие разложения

$$\begin{aligned} T^{00}_{\text{мех.}} &= {}_2T^{00}_{\text{мех.}} + {}_4T^{00}_{\text{мех.}}, \\ T^{os}_{\text{мех.}} &= {}_3T^{os}_{\text{мех.}} + {}_5T^{os}_{\text{мех.}}, \\ T^{mn}_{\text{мех.}} &= {}_2T^{mn}_{\text{мех.}} + {}_4T^{mn}_{\text{мех.}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Получим теперь решения уравнений Максвелла во втором приближении. Из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta}) = 4\pi\rho\,\frac{dx^\beta}{dt},$$

$$\rho = {}^1_2e\delta(x^s - \xi^s) + {}^2_2e\delta(x^s - \eta^s),$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0$$

видно, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} F^{os} &= {}_2F^{os} + \cdots \\ F^{st} &= {}_3F^{st} + \cdots \end{aligned} \tag{37}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^s}F^{os} = 4\pi{}^1_2e\delta(x^s - \xi^s) + 4\pi{}^2_2e\delta(x^s - \eta^s). \tag{38}$$

Из этого уравнения находим

$$F^{os} = \frac{{}^1_2e(x^s - \xi^s)}{{}^1r^3} + \frac{{}^2_2e(x^s - \eta^s)}{{}^2r^3}. \tag{39}$$

Отсюда видно, что разложения $T^{\alpha\gamma}_{\text{эл. м}}$ начинаются минимум с четырех

$$T^{00}_{\text{эл. м}} = {}_4T^{00}_{\text{эл. м}} + \cdots \tag{40}$$

и т. д.

Для решения уравнений поля (1) положим

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\
g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — галлилеева метрика

$$
\eta_{00} = 1, \qquad \eta_{sn} = -\delta_{sn},
$$

а $h_{\mu\nu}$ — малые добавки к ней.

Подставим теперь (41) в уравнения поля и приравняем члены одинакового порядка. В ньютоновом приближении нам понадобится только лишь ${}_2h_{00}$. Для нее получается следующее выражение

$$
{}_2h_{00} = -\frac{2\,{}^1_2m}{{}^1r} - \frac{2\,{}^2_2m}{{}^2r}. \tag{42}
$$

Нетрудно заметить, что все условия, накладываемые на $g_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$, выполняются для ${}_2h_{00}$ и ${}_2F^{0s}$.

Приравнивая члены наинизшего порядка, из (29) получим уравнения ньютонова порядка

$$
{}^1_2m\, \ddot{\xi}^k = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\frac{{}^1_2m\,{}^2_2m}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\frac{{}^1_2e\,{}^2_2e}{r}\right), \tag{43}
$$

где r расстояние между телами. Как видно, они совпадают с классическими.

Аналогично можно получить и уравнения движения в постньютоновом приближении, которые мы здесь выписывать не будем.

Заметим еще, что уравнения (43) можно было бы получить из уравнений движения в лагранжевой форме

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\xi}^k} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial \xi^k} = 0, \tag{44}
$$

где

$$
\overline{L} = {}^1m\,(\overline{g_{\alpha\beta}}\,\dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta)^{1/2} + {}^1e\,\overline{A_\alpha}\,\dot{\xi}^\alpha,
$$

при дополнительных условиях

$$
\begin{gathered}
\overline{g_{\alpha\beta,\,\tau}} = \overline{g}_{\alpha\beta,\,\tau}, \\
\frac{\partial\, \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial \xi^\tau}, \qquad \frac{\partial \overline{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\tau} = 0, \\
\overline{A_{\alpha,\,\tau}} = \overline{A}_{\alpha,\,\tau}.
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 III 1960

Յ. Մ. Այվազյան

ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ ընդհանուր հարաբերականության տեսության դաշ… հավասարումներից և Մաքսվելի հավասարումներից, գրված ընդհանուր կով… րիանտ տեսքով, Նյուտոնյան մոտավորությամբ ստացված են շարժման հ… վասարումներ՝ երկու լիցքավորված մարմինների համար, ընդունելով, … $T^{\alpha\beta}_{նյ.}$ և մարմինների լիցքերը համեմատական են Դիրակի ընդհանրացվ… δ-ֆունկցիաներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein, Grommer*, Sit. Deut. Akad. Wiss. Berlin, 2. Matterie als Eigenpunkten d… Gravitationsgleichungen. 1927.
2. *Einstein, Infeld, Hoffman*, The gravitational equations and the problem of motio… Ann. Math. **39**. 65. 1938.
3. *Фок В. А.* О движении конечных масс в общей теории относительности. „ЖЭТФ… **9**, 375. 1939.
4. *Петрова Н.* Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечн… масс в общей теории относительности, „ЖЭТФ", **19**, 989, 1949.
5. *Papapetrou*. Equations of motion in general relativity. Pros. Phys. Sos. A **64**. … 1951.
6. *Infeld*. Equations of motion in general relativity theoru and the action princip… Rew. Mod. Phys. 29, 398, 1957.
7. *Tulkzyjew W*. Bull. Acad. Polon. III, 5, 279. 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

А. Ц. Аматуни и Н. А. Корхмазян

Излучение заряженной частицы в среде с периодически меняющейся плотностью

1. Потери заряженной частицы в среде с периодически меняющейся плотностью (и, следовательно, периодически меняющейся диэлектрической постоянной) рассмотрены в работах Я. Б. Файнберга и Н. А. Хижняка [1], Г. М. Гарибяна [2], М. Л. Тер-Микаеляна [3] и Г. М. Гарибяна и И. И. Гольдмана [4]. В настоящей работе методом, отличным от использованных в [1—4], рассмотрены потери энергии частицей на черенковское излучение.

2. Рассмотрим среду, плотность электронов в которой N периодически меняется вдоль оси z, оставаясь постоянной в направлениях перпендикулярных к этой оси

$$N = N_0\left(1 + k\cos\frac{2\pi z}{e}\right), \quad 0 < k < 1. \tag{1}$$

Тогда диэлектрическую постоянную такой среды можно записать в виде

$$\varepsilon = 1 + \alpha(\omega) + k\alpha(\omega)\cos\frac{2\pi z}{e} = \varepsilon_0 + k\alpha\cos\frac{2\pi z}{e} = \varepsilon_0\left(1 + \Delta\cos\frac{2\pi z}{e}\right),$$

$$\Delta = \frac{k\alpha}{\varepsilon_0}.$$

Поля заряженной частицы в рассматриваемой среде можно найти используя уравнение (6) работы [5]

$$u'' + \left[\frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \frac{3}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2\right]u = \frac{ie}{2\pi^2 c\sqrt{\varepsilon}}e^{i\frac{\omega}{v}z}, \tag{2}$$

где u определено соотношением

$$\vec{H}(\vec{\varkappa}, z, \omega) = \sqrt{\varepsilon}\,[\vec{n}\,\vec{\varkappa}]\,u(\vec{\varkappa}, z, \omega), \tag{3}$$

связывающим фурье-компоненту по x, y, t магнитного поля $\vec{H}(\vec{r}, t)$ и u. Зная $\vec{H}(\vec{\varkappa}, z, \omega)$ можно найти фурье-компоненту электрического поля $\vec{E}$ из уравнений Максвелла

$$E_z(\vec{\varkappa}, z, \omega) = -\frac{c\varkappa^2}{\omega\sqrt{\varepsilon}} u(\vec{\varkappa}, z, \omega) - \frac{ie}{2\pi^2\omega\varepsilon} e^{i\frac{\omega}{v}z}. \tag{4}$$

В уравнении (2) введем новую переменную $x = \frac{\pi z}{e}$ и разложим множитель стоящий перед u в ряд Фурье. Тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$u'' + J(x)u = \frac{il^2 e}{2\pi^4 c\sqrt{\varepsilon}} e^{i\frac{\omega l}{\pi v}x}, \tag{5}$$

$$J(x) = \Theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Theta_{2n} \cos 2nx, \tag{5^1}$$

где Θ_0 и Θ_{2n} при $|\Delta| \ll 1$ имеют значения

$$\begin{aligned}
\Theta_0 &= \left(\frac{\omega l}{\pi c}\right)^2 \varepsilon_0 - \left(\frac{\varkappa l}{\pi}\right)^2 - \frac{\Delta^2}{4} + O(\Delta^4) \equiv \nu^2 - \frac{\Delta^2}{4} + O(\Delta^4), \\
\Theta_2 &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega l}{\pi c}\right)^2 \varepsilon_0 - 1\right]\Delta + O(\Delta^5), \\
\Theta_{2n} &= (-1)^n \Delta^n \left(\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\right) + O(\Delta^{n+2}), \quad n > 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Однородная часть уравнения (5) есть уравнение Хилла, решения которого записываются в виде (см., например, [6])

$$\begin{aligned}
u_1 &= e^{\mu x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{2nix}, \\
u_2 &= e^{-\mu x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{-2nix}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Величина μ определяется как решение уравнения

$$\sin^2 \frac{1}{2} i\mu\pi = D(0) \sin^2 \frac{1}{2} \pi\Theta_0^{1/2}, \tag{8}$$

причем определитель Хилла $D(0)$, при Θ_2, $\Theta_4 \cdots$ малых по сравнению с Θ_0, можно записать в виде [6]

$$D(0) = 1 + \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi\Theta_0^{1/2}}{4\Theta_0^{1/2}} \left[\frac{\Theta_2^2}{1^2 - \Theta_0} + \frac{\Theta_4^2}{2^2 - \Theta_0} + \cdots\right]. \tag{9}$$

Решая уравнение (8) методом последовательных приближений (считая $|\Delta| \ll 1$), с точностью до членов $\sim \Delta^2$ включительно, получим

$$\mu=\mu_0+\mu_1=\pm i\Theta_0^{1/2}\pm\frac{i\Theta_2^2}{4\Theta_0^{1/2}(1-\Theta_0)}, \tag{10}$$

при $|\mu_0|\gg|\mu_1|$; знак $+$ берется при $\omega>0$, знак минус — при $\omega<0$.

В формуле (10) при $\Theta_0\to 1$ поправочный член может стать большим; на самом деле положение несколько иное, ибо при $\Theta_0=1+2\delta$, где $\frac{\pi}{2}|\delta|\ll 1$, вместо формулы (10) можно аналогичным образом получить, что

$$\mu=\mu_0+\mu_1=\pm i\pm\frac{1}{2}\Theta_2\left(1-\frac{1}{2}\delta\right), \tag{10^1}$$

т. е. в этом случае μ является комплексной величиной с малой действительной частью.

Коэффициенты c_{2n} в разложении (7) удовлетворяют бесконечной системе уравнений, однако при малых Θ_2, Θ_4 и т. д. можно найти приближенное решение этой системы, пренебрегая всеми коэффициентами c_{2n} за исключением $c_{\pm 4}$; $c_{\pm}$; c_0 [6]. При этом, полагая $c_0=1$, с точностью до величин $\sim\Delta^2$ включительно, получим

$$c_{\pm 2}=-\frac{\Theta_2}{\Phi_{\pm 2}};\qquad c_{\pm 4}=-\frac{\Theta_4}{\Phi_{\pm 4}}+\frac{\Theta_2^2}{\Phi_{\pm 4}\Phi_{\pm 2}},$$

$$\Phi_{\pm 2}=4(1\mp i\mu_0);\quad \Phi_{\pm 4}=-8(2\mp i\mu_0). \tag{11}$$

Заметим, что в рассматриваемом здесь и ниже приближении (учет членов, пропорциональных Δ^2 включительно) величина Θ_4 не войдет в окончательные результаты. Таким образом, с самого начало можно было бы исходить не из уравнения Хилла, а из его частного случая — уравнения Матьё.

Частное решение неоднородного уравнения (5) записывается в виде

$$u=\frac{b}{w}\left[u_1\int\frac{u_2}{\sqrt{\varepsilon}}e^{i\alpha x}dx-u_2\int\frac{u_1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{i\alpha x}dx\right], \tag{12}$$

где $\alpha=\frac{\omega l}{\pi v}$, $b=-\frac{iel^2}{2\pi^3 c}$, w — вронскиан системы, независящий в нашем случае от x

$$w=w(0)=u_1u_2'-u_1'u_2=-2\mu\left[1-\frac{\Theta_2^2(3+\mu^2)}{8(1+\mu^2)}\right]. \tag{13}$$

Разлагая в (12) $\varepsilon^{-1/2}$ в ряд по Δ, произведем интегрирование по x; затем, подставляя результат в (4), где снова производится разложение ε^{-1} и $\varepsilon^{-1/2}$ в ряд по Δ, получим выражение для $E_z(\vec{\varkappa}, z, \omega)$.

Далее, зная E_z, по формуле

$$dF = -ed\omega\sum\int E_z(\vec{\varkappa}, vt, \omega)\, e^{-i\omega t}\, d\vec{\varkappa} \tag{14}$$

найдем силу действующую на частицу (сумма взята по двум знакам частоты ω).

Величина dF будет содержать слагаемые не зависящее от z и слагаемые, в которых зависимость от z определяется функциями типа $e^{\frac{2\pi i z}{l}}$, $e^{\frac{4\pi i z}{l}}$ и т. д., т. е. функциями с периодом кратным l. Постоянная слагаемая силы обусловливает систематические потери частицы, в том числе и потери на излучение. Необходимость наличия переменной составляющей силы легко понять, если учесть, что заряженная частица будет попеременно притягиваться индуцированным в горбах плотности среды, зарядом. Действие этой переменной силы при определенных условиях может привести к излучению частицей частот

$$\omega = \frac{2\pi v}{l} n; \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Займемся теперь рассмотрением постоянно действующей части силы dF из (14), которую обозначим dF^0, при этом мы будем интересоваться только той частью потерь, которая обусловлена черенковским излучением. Выделение этой части потерь осуществим следуя методу, изложенному в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [7]. Величина dF^0 с точностью до членов пропорциональных Δ^2 включительно есть

$$dF^0 = dF_0^0 + dF_1^0, \tag{15}$$

где

$$dF_0^0 = -\frac{ie^2 d\omega}{\pi}\sum\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\int\left(\frac{\varkappa l}{\pi}\right)^2\frac{\varkappa d\varkappa}{\sigma^2+\mu^2}\left\{1 - \frac{\Delta}{4}\frac{\Theta_2}{1+\mu^2} + \frac{3}{8}\Delta^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\Theta_2^2(3+\mu^2)}{8(1+\mu^2)^2}\right\}, \tag{15¹}$$

$$dF_1^0 = -\frac{ed\omega}{\pi}\sum\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\left[\int\left(\frac{\varkappa l}{\pi}\right)^2\frac{\varkappa d\varkappa(\mu+2i)\left(c_2 - \frac{\Delta}{4}\right)^2}{\mu\left[\sigma^2+(\mu+2i)^2\right]} + \right.$$

$$\left. + \int\left(\frac{\varkappa l}{\pi}\right)^2\frac{\varkappa d\varkappa(\mu-2i)\left(c_{-2} - \frac{\Delta}{4}\right)^2}{\mu\left[\sigma^2+(\mu-2i)^2\right]}\right]. \tag{15²}$$

Далее, следуя [7], при вычислении интегралов в (15¹) и (15²) вместо $\varkappa$ вводим новые переменные $\zeta = \sigma^2+\mu^2$ в (15¹) и $\zeta_1 = \sigma^2+(\mu+2i)^2$; $\zeta_2 = \sigma^2+(\mu-2i)^2$ (в первом и втором интегралах соответственно) в (15²). Поскольку ζ, ζ_1 и ζ_2 могут обращаться в нуль, вычисление выражений в (15¹) и (15²), введением малой мнимой части у ε_0 ($Jm\varepsilon_0>0$, $\omega>0$, $Jm\varepsilon_0<0$, $\omega<0$), сводится к взятию вычетов в полюсах подинтегральных выражений, так как после необходимого смещения путей интегрирования и суммирования интегралов с $\omega>0$ и $\omega<0$, остаются только интегралы по замкнутому контуру, охватывающему соответствующий полюс. В результате получим

$$dF_0^0=\frac{e^2}{c^2}\omega d\omega\left\{1-\frac{1}{\beta^2\varepsilon}\left[1+\frac{\Delta^2}{4\sigma^2}\left(1-\frac{2\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0-1\right)^2}{1-\sigma^2}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{3\Delta^2}{8}\left[1+\frac{\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0-1\right)\left[\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0\left(3-\sigma^2\right)+3\sigma^2-5\right]}{3(1-\sigma^2)^2}\right]\right\}. \quad (16)$$

Полагая $x=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta$, из условия обращения ζ в нуль получим выражение для косинуса угла излучения

$$0\leqslant\cos\theta=\frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_0}}\left[1+\frac{\Delta^2}{8\sigma^2}\left(1-\frac{2\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0-1\right)}{1-\sigma^2}\right)\right]\leqslant 1. \quad (17)$$

При вычислениях, приведших к формуле (17), учитывалась малость поправок и использовался метод последовательных приближений.

Формулы (16) и (17) при $\Delta\to 0$ переходят в формулы для черенковского излучения в однородной среде с $\varepsilon=\varepsilon_0$.

Дополнительный член dF_1^0 в формуле (15), после интегрирования по x (которое проводится указанным выше образом) дает с точностью до членов $\sim\Delta^2$ включительно

$$dF_1^0=dF_+ + dF_-, \quad (18)$$

$$dF_+=\frac{e^2}{16c^2}\omega d\omega\left[1-\left(\frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_0}}+\frac{\lambda}{l\sqrt{\varepsilon_0}}\right)^2\right]\frac{\Delta^2\sigma^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\sigma\varepsilon_0\right)^2}{(1+\sigma)^2}, \quad (19)$$

причем угол излучения определяется формулой

$$0\leqslant\cos\theta=\frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_0}}+\frac{\lambda}{l\sqrt{\varepsilon_0}}+\frac{\Delta^2}{8\beta\sqrt{\varepsilon_0}\sigma(\sigma+2)}\left[1+\frac{\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0-1\right)^2}{(1+\sigma)(3+\sigma)}\right]\leqslant 1. \quad (20)$$

Второе слагаемое в (18) имеет вид

$$dF_-=\frac{e^2}{16c^2}\omega d\omega\left[1-\left(\frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_0}}-\frac{\lambda}{l\sqrt{\varepsilon_0}}\right)^2\right]\frac{\Delta^2\sigma^2\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\sigma\varepsilon_0\right)^2}{(1-\sigma)^2} \quad (21)$$

и косинус угла излучения будет равен

$$0 \leqslant \cos\theta = \left|\frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{\lambda}{l\sqrt{\varepsilon_0}}\right| + \frac{\Delta^2}{8\beta\sqrt{\varepsilon_0}\,\sigma\,|\sigma-2|} \times$$

$$\times\left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0 - 1\right)^2}{(1-\sigma)(3-\sigma)}\right] \leqslant 1. \qquad (22)$$

Формулы (19) и (20) дают дополнительное черенковское излучение. характерное для периодической среды, ибо при $\Delta \to 0$ оно исчезает. Если основное черенковское излучение есть результат совпадения частоты „собственных колебаний" μ и частоты внешней силы σ, то дополнительные члены в излучении (19) и (21) обусловлены резонансом на комбинационных частотах.

Остановимся теперь на ограничениях, использованных при выводе приведенных выше выражений.

Необходимым условием достаточно хорошей сходимости рядов (7) и возможности обрезания бесконечной системы уравнений есть условие $|c_{2(n+1)}| \ll |c_{2n}|$; в частности, следовательно, $|c_2| \ll c_0 = 1$, т. е.

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0 - 1\right)\Delta}{4(1-\nu^2)}\right| \ll 1. \qquad (23)$$

Кроме того, при выводах предполагалось, что $|\Theta_0| \gg |\Theta_2|$ и $|\Theta_0| \gg |\Theta_1|$. т. е.

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0 - 1\right)\Delta}{\nu^2}\right| \ll 1; \qquad \frac{5\Delta^2}{2\nu^2} \ll 1. \qquad (24)$$

Метод определения μ из (8) требует чтобы $(\mu_0) \gg |\mu_1|$, т. е.

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\varepsilon_0 - 1\right)\Delta^2}{4(1-\nu^2)\,\nu^2}\right| \ll 1. \qquad (25)$$

В формулах (23)—(25) $\nu = \sigma$ в случае использования формулы (16) и $\nu = \sigma + 2$, $\nu = |\sigma - 2|$ в случае использования формул (19) и (21) соответственно.

3. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи полученных выражений для потерь энергии заряженной частицей на единицу длины пути.

Можно показать, например, что излучение, спектральная интенсивность которого описывается формулой (21), содержит в себе излучение на частотах, больших оптических в случае, если энергия релятивистской частицы больше некоторого порогового значения. Действительно, если частота ω больше оптических частот, то $\varepsilon = 1 -$

$-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, где $\omega \gg \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_0}{m}}$; тогда $|\Delta| = k^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll 1$ и $z = \frac{2}{\beta}\frac{l}{\lambda} \gg 1$.

В этом случае формулу (21) можно с учетом сделанных допущений переписать в виде

$$dF_- = \frac{e^2 k^2 l^2 \omega_0^4}{64\pi^2 c^4}\frac{d\omega}{\omega}\left[\frac{4\pi c}{3l\omega} - \frac{1}{\beta}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right]. \tag{26}$$

Из условия $0 < \cos\theta < 1$ (22), без учета поправок, которые в этом случае малы, получается, что $\frac{\lambda}{l} < \frac{1}{\beta}$ и при $\frac{\lambda_0}{l} > \sqrt{1-\beta^2} = mc^2/E$, $\left(\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}\right)$ имеет место излучение в определенном интервале частот; в случае $\left(\frac{\lambda_0}{l}\right)^2 \gg 1 - \beta^2$ этот интервал становится широким и определяется следующими соотношениями

$$\omega_1 = \frac{l\omega_0^2}{4\pi v} \leqslant \omega < \frac{4\pi v}{(1-\beta^2)l} = \omega_2. \tag{27}$$

Спектральное распределение излучения, даваемого формулой (26), начинается с частоты ω_1, достигает максимума на частоте $\omega_{max} = \frac{3}{2}\omega_1$ и затем быстро спадает до нуля на частоте ω_2. Угол излучения, на частотах близких к ω_{max}, $\theta \sim \lambda_0/l$.

Условие $\omega_1 \leqslant \omega < \omega_2$ имеет место, если требование $\lambda/l < 1/\beta$ не ограничивает интервала (27), т. е. в случае $l > \sqrt{2}\beta\lambda_0$. Если же $l < \sqrt{2}\beta\lambda_0$, то нижняя граница спектра излучения определяется условием $\omega > \frac{2\pi v}{l} = \omega_3$.

Полная интенсивность излучения получается из (26) и (27) интегрированием в пределах от ω_1 до ω_2. В результате имеем

$$W = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} dF_- \simeq \frac{e^2}{8c^2}k^2\omega_0^2; \qquad (k \leqslant 1). \tag{28}$$

Полное число излученных квантов (они испускаются в основном на частоте ω_{max}) определяется формулой

$$N \simeq \frac{\pi e^2 k^2 \beta}{6\hbar c\, l}. \tag{29}$$

Изложенный выше случай впервые исследован в работе Тер-Микаеляна [3]. Аналогичные результаты получены в работе Гарибяна и Гольдмана [4] (см. также [8]).

Любопытно отметить, что, как следует из формул (16) и (22), при $\beta\sqrt{\varepsilon_0} < 1$ обычное черенковское излучение (16) отсутствует, в то время как при определенных условиях излучение на следующей гармонике (21) и (22) может иметь место.

Заметим также, что если $\frac{1}{2}\beta^2\sigma\varepsilon_0 \sim 1$, то излучение, определяемое формумой (21) мало, в то время как излучение на симметричной гармонике [формула (19)] может быть заметным.

После выполнения настоящей работы, авторам стала известна заметка Смита и Пурселла [9], в которой сообщается о наблюдении оптического излучения при пролете электронов с энергитй 309—340 *кев* над поверхностью металлической дифракционной решетки перпендикулярно (и под другими углами) к ее линиям.

Условие излучения, полученное и экспериментально проверенное авторами работы [9] $\left(\cos\theta = \frac{1}{\beta} - \frac{\lambda}{l},\right.$ где l период решетки$\left.\right)$ и порядок интенсивности излучения, оцененный в [9], довольно близко подходят к величинам, даваемым формулами (21) и (22). В работе [9] возникновение излучения объяснено интерференцией излучений, обусловленных колебаниями индуцированных на выступах решетки поверхностных зарядов. Заметим, что аналогичное объяснение дополнительного излучения (18) может быть дано и в нашем случае, причем такая физическая интерпретация позволяет понять условия (20), (22) (без поправочных членов) как условия интерференции излучений от индуцированных в горбах плотности зарядов.

4. Остановимся теперь вкратце на вычислении переменной части силы, действующей на частицу. Для этого рассмотрим члены пропорциональные Δ в выражении для напряженности электрического поля частицы.

В нерелятивистском случае

$$E_z^1 = e^{2\pi i z/l}E^+ + e^{-2\pi i z/l}E^-, \tag{30}$$

где

$$E^\pm = \frac{ie}{2\pi\omega\varepsilon_0}\frac{\Delta}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\mu^2\left[\frac{\frac{3\pm\sigma}{1+\mu^2}+1}{\mu^2+(\sigma\pm2)^2} + \frac{\frac{1\mp\sigma}{1+\mu^2}+1}{\mu^2+\sigma^2}\right]\right\}. \tag{31}$$

В нерелятивистском случае и линейном по Δ приближении $\mu^2 \simeq \simeq \left(\frac{\varkappa l}{\pi}\right)^2$. Далее вычисляем силу по обычной формуле

$$F = -e\int E_z^1(z = vt)\, e^{-i\omega t}\, d\varkappa\, d\omega = F^+ + F^-,$$

где

$$F^\pm = -\frac{ie^2k}{8vl}e^{\pm\frac{2\pi i v t}{l}}\int\frac{(\varepsilon_0-1)}{\omega\varepsilon_0^2}\cdot\frac{(\sigma\pm2)}{(\sigma\pm1)}\left[(\sigma\pm2)\ln\left(\frac{\mu_0^2}{(\sigma\pm2)^2}+1\right) + \right.$$
$$\left. + \sigma\ln\left(\frac{\mu_0^2}{\sigma^2}+1\right)\right]d\omega. \tag{32}$$

Здесь $\mu_0 = \frac{\varkappa_0 l}{\pi}$ где $\varkappa_0 \ll \frac{1}{a}$, ($a$ — порядок межатомных расстояний) — верхний предел интегрирования по $\varkappa$, определяемый из условия применимости макроскопического рассмотрения.

Оценим интегралы в (32) в следующих интервалах частот:

а) $\omega \lesssim \omega_1 \ll \omega_0$; ω_0 имеет порядок оптических частот; в этой области ε_0 практически не зависит от частоты и имеет свое статическое значение; пусть l таково, что для $\omega < \omega_1$, $\sigma \ll 1$; в этом интервале частот подинтегральное выражение практически не зависит от частоты;

б) при частотах таких, что σ близко к единице, подинтегральное выражение стремится к нулю;

в) если в области $\omega_1 \ll \omega \lesssim \omega_0$ поглощение не существенно, то интегралы по положительным и отрицательным частотам взаимно уничтожаются;

г) при $\omega \gg \omega_0$ подинтегральное выражение стремится к нулю (в основном, из-за наличия фактора $\varepsilon_0 - 1$).

В итоге мы получим, что в указанных предположениях основной вклад в интегралы в (32) дают частоты из интервала а) и для величины переменной силы можно написать выражение

$$F = \frac{4\pi e^2 k}{l^2} \frac{\varepsilon_0^{\text{ст}} - 1}{(\varepsilon_0^{\text{ст}})^2} \ln \frac{\varkappa_0 l}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi v}{l} t. \tag{33}$$

Полученное выражение обладает свойствами, которые следуют и из простых физических соображений (пропорциональность $\sin \frac{2\pi z}{l}$, что согласуется с зависимостью ε_0 от $\cos \frac{2\pi z}{l}$, пропорциональность величине $\frac{e^2}{l^2}$, необходимость чего нетрудно усмотреть из механизма возникновения переменной силы).

Под действием силы (33) частица будет испускать дипольное излучение частоты $\omega = \frac{2\pi v}{l}$; средняя за период интенсивность которого находится по известным формулам

$$d\bar{I} = \frac{4\pi^2 e^6 k^2}{c^3 l^4 m^2} \frac{(\varepsilon_0^{\text{ст}} - 1)^2}{(\varepsilon_0^{\text{ст}})^4} \ln^2 \frac{\varkappa_0 l}{2\pi} \cdot \sin^3\theta d\theta, \tag{34}$$

где θ угол между осью z и направлением излучения. Приведенное в (34) выражение ничтожно мало для одной частицы; однако, если окажется возможным образовать сгустки заряженных частиц протяженностью много меньшей l (излученная энергия в этом случае будет пропорциональна четвертой степени числа частиц), причем величина l выбирается тоже малой, то излучение в (34) может оказаться заметным, например в микрорадиоволновой области.

В заключение авторы выражают свою признательность Г. М. Гарибяну и М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждения.

Физический институт АН Армянской ССР
Ереванский госуниверситет

Поступила 16 VI 1960

Ա. Ց. Ամատունի, Ն. Ա. Կորխմազյան

ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ՊԵՐԻՈԴԻԿ ԽՏՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա աշխատության մեջ Մատյեի հավասարման օգնությամբ քննարկված է լիցքավորված մասնիկի ճառագայթման խնդիրը $N = N_0\left(1 + k\cos\frac{2\pi z}{l}\right)$ *օրենքով փոփոխվող խտության ունեցող միջավայրում: Բացի սովորական չերենկովյան ճառագայթումից (որի ինտենսիվության արտահայտությունն ստացված է հաշվի առնելով միջավայրի խտության փոփոխությունը), ստացված են նաև բանաձևեր լրացուցիչ ճառագայթման համար, որը հատուկ է դիտարկվող միջավայրին: Ճառագայթման ինտենսիվությունը և տարածման ուղղությունը արտահայտող բանաձևերը ճիշտ են դիէլեկտրիկ հաստատունի կամայական* $\varepsilon(\omega)$ *ֆունկցիայի և մասնիկի կամայական* v *արագության համար: Հաշված է նաև մասնիկի վրա ազդող ուժի պերիոդիկ* $\left(\frac{2\pi v}{l}\right.$ *հաճախությամբ*$\left.\right)$ *բաղադրիչը, որը առաջանում է միջավայրի խտացումներում ինդուկված լիցքերի ազդեցությամբ: Գնահատված է լիցքավորված մասնիկի դիպոլային ճառագայթումը, որը պայմանավորված է այդ ուժի առկայությամբ*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Файнберг Я. Б., Хижняк Н. А.* Потери энергии заряженной частицы при прохождении через слоистый диэлектрик. „ЖЭТФ", **32**, 883, 1957.
2. *Гарибян Г. М.* Излучение заряженной частицы пролетающей через слоистую среду. „ЖЭТФ", **35**, 1435, 1958.
3. *Тер-Микаелян М. Л.* (в печати). „ДАН СССР".
4. *Гарибян Г. М.*, и *Гольдман И. И.* (в печати). „ЖЭТФ".
5. *Аматуни А. И.* и *Корхмазян Н. А.* Переходное излучение в случае размытой границы двух сред. (в печати) „ЖЭТФ".
6. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье, гл. VI, ИЛ, М., 1953.
7. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред, § 86. ГИТТЛ. М., 1957.
8. *Газазян А.* и *Тер-Микаелян М. Л.* „ЖЭТФ", (в печати).
9. *Smith S. J.* and *Purcell E. M.* Visible Light from Localizid Surfuce Charges Moving across a Grating „Phys. Rev.," **92**, 1069, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

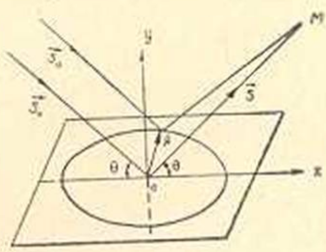
П. А. Безирганян, А. Г. Акритов

Зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от формы отражающего кристалла (случай поглощающего кристалла)

В статье [1] мы исследовали зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от ориентировки плоскости падения относительно поверхности кристалла (от формы кристалла) при данном угле Вульфа-Брегга и данной системе отражающих плоскостей для случая непоглощающего кристалла.

В данной статье рассматривается зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от ориентировки плоскости падения в случае поглощающего кристалла. Здесь, как и в [1], рассматривается случай, когда кристалл в одном направлении неограничен, а в остальных двух направлениях ограничен. В случае поглощающего кристалла функция атомного рассеяния, а, следовательно, и коэффициент преломления станут комплексными [2].

Пусть плоская монохроматическая волна, как и в [1], падает на кристалл в направлении единичного вектора $\vec{S}_0$, (фиг. 1) и точка наблюдения M из начала координат видна в напровлении $\vec{S}$. Размеры и формы зон Френеля можно определить следующим образом. Разность хода в точке наблюдения M между волнами, отраженными от точек O и A, если точка A расположена на границе первой зоны Френеля, с точностью до λ^2, равна (см. фиг. 1)



Фиг. 1.

$$\frac{x^2 \sin^2 \theta}{2R} + \frac{y^2}{2R} = \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

или

$$x^2 \sin^2 \theta + y^2 = \lambda R.$$

Размеры зон Френеля в направлениях x и y соответственно обозначим через $2a$ и $2b$, тогда получим

$$a = \frac{\sqrt{\lambda R}}{\sin \theta}, \qquad b = \sqrt{\lambda R}. \tag{2}$$

Имея в виду последнее, из (1) получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

т. е. уравнение эллипса. Таким образом, для рентгеновских волн, отраженных от атомной плоскости, первая зона имеет форму эллипса, а остальные-эллиптических полос. Для площади первой зоны получим

$$s_1=\pi ab=\frac{\pi\lambda R}{\sin\theta}\sim 10^{-8}\,см^2.$$

Для площадей остальных зон таким же образом получим (с точностью до λ^2)

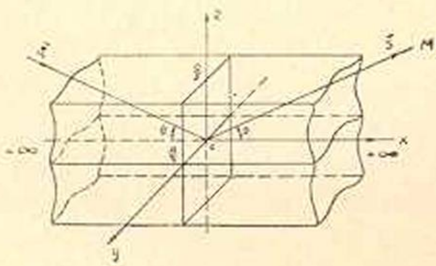
$$s_1=s_2=\cdots=s_n=\frac{\pi\lambda R}{\sin\theta}\sim 10^{-8}\,см^2$$

т. е. площади всех зон Френеля одинаковы. Как видно из (2), с уменьшением угла Вульфа-Брегга увеличивается большая ось первой зоны Френеля, тогда как малая ось не зависит от этого угла.

Следовательно, интенсивность отраженных волн при малых углах еще сильнее зависит от ориентировки плоскости падения относительно длины и ширины кристалла при данном угле падения.

Первый случай

Размеры кристалла в направлениях y и z соответственно равны B и C, а в направлении x не ограничены ($x=\pm\infty$, фиг. 2). В этом случае волна, отраженная от плоскости кристалла, совпадающей с плоскостью xoy, будет



Фиг. 2.

$$G=\frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\theta}\left[f'(2\theta,\ k)+if''(2\theta,\ k)\right]\times\left[1-i\right]\exp\left[ik(ct-R)\right]\times\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}y^2\right)dy,$$

вещественная и мнимая части которой выражаются следующим образом:

$$G_0'=\frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\theta}\left\{f'(2\theta,\ k)\left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy-\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]+\right.$$

$$\left.+f''(2\theta,\ k)\left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy+\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]\right\}.$$

$$G_0'' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\vartheta}\left\{f''(2\vartheta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right] - \right.$$

$$\left. - f'(2\vartheta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]\right\},$$

$$\Sigma_0' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\vartheta}\left\{f'(0,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right] + \right.$$

$$\left. + f''(0,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]\right\}, \qquad (3)$$

$$\Sigma_0'' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\vartheta}\left\{f''(0,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right] - \right.$$

$$\left. - f'(0,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]\right\},$$

где Σ_0' и Σ_0'' вещественная и мнимая части амплитуды волны, отраженной от этой же плоскости в направлении падающей волны.

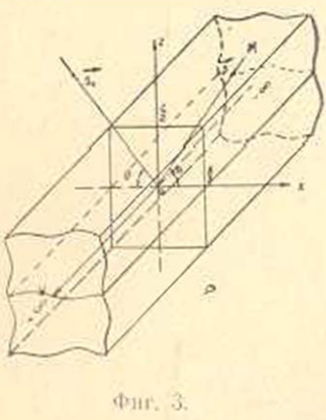
Второй случай

Во втором случае, т. е. когда размеры кристалла в направлении x и z соответственно равны A и C, а в направлении y не ограничены ($y = \pm\infty$ фиг. 3), для волны, отраженной от плоскости кристалла, совпадающей с плоскостью xoy, получим

$$G = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\vartheta}\left[f'(2\vartheta,\ k) + if''(2\vartheta,\ k)\right] \times$$

$$\times \left[1 - i\right] \exp\left[ik(ct - R)\right] \times$$

$$\times \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\vartheta\cdot A} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}x^2\right)dx.$$



Фиг. 3.

Следовательно, в этом случае вещественные и мнимые части амплитуд могут выражаться следующими формулами:

$$G_0' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\theta}\left\{ f'(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \right.\right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right] +$$

$$\left.+ f''(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]\right\},$$

$$G_0' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\theta}\left\{ f''(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \right.\right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right] - \qquad (4)$$

$$\left.- f'(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]\right\},$$

$$\Sigma_0' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\theta}\left\{ f'(0,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \right.\right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right] +$$

$$\left.+ f''(0,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]\right\},$$

$$\Sigma_0' = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2\sin\theta}\left\{ f''(0, k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \right.\right.$$

$$-\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\Bigg]-$$

$$-f'(0,k)\Bigg[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx+\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}}\cdot\sin\theta\cdot A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\Bigg]\Bigg\}.$$

Вещественная и мнимая части функции атомного рассеяния определяются так же, как и в [2]. Повторяя все соответствующие выкладки, сделанные в [1] и [2], для интенсивности отраженных волн, в обоих рассмотренных здесь случаях, получим одно и то же выражение

$$\left|\frac{S_0}{T_0}\right|^2=\frac{[G_0']^2+[G_0'']^2}{U+V+W},$$

$$U=[dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0-\Sigma_0'']^2+[\Sigma_0']^2,$$

$$W=\sqrt{L_1^2+L_2^2},$$

$$V=2\sqrt{UW}\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 определяются из выражений

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\Sigma_0'}{dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0-\Sigma_0''},\qquad \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{L_1}{L_2},$$

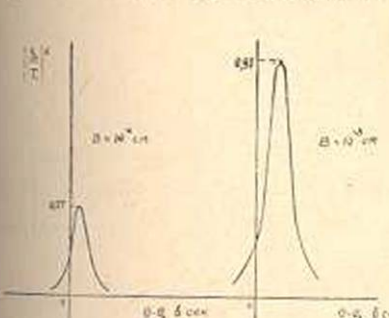
а L_1 и L_2 соответственно равны

$$L_1=2\Sigma_0'[dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0-\Sigma_0'']+2G_0'G_0'',$$

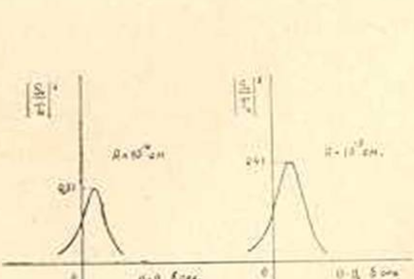
$$L_2=[dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0-\Sigma_0'']^2+[G_0']^2-[\Sigma_0']^2-[G_0'']^2.$$

Однако, в первом случае G_0', G_0'', Σ_0' и Σ_0'' определяются по (3), а во втором — по (4).

Результаты всех вычислений для кристалла кальцита в случае излучения M_0K_α представлены на фиг. 4 и 5.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Из результатов вычислений можно сделать следующие выводы:

1. как и в случае непоглощающего кристалла, в случае поглощающего кристалла, когда первая зона Френеля больше или порядка отражающих плоскостей (размеры крысталла $10^{-4} \div 10^{-5}$ *см*), интенсивность отраженных рентгеновских волн сильно зависит от ориентировки плоскости падения при данном угле Вульфа-Брегга и данной системе отражающих плоскостей (см. фиг. 4 и 5);

2. при вращении отражающих плоскостей вокруг их нормалей, интенсивность отраженных волн принимает максимальное значение, когда проекция направления падающей волны на отражающую плоскость параллельна длинному ребру кристалла;

3. зависимость интенсивности отраженных рентгеновских волн от ориентировки плоскости падения тем сильнее, чем меньше угол Вульфа-Брегга при данной длине волны и данном порядке отражения, т. е. эта зависимость выражается тем резче, чем больше межплоскостное расстояние отражающих плоскостей;

4. при поглощающем кристалле коэффициент преломления с приближением к краю поглощения уменьшается, а длина волны увеличивается, следовательно, площади зон Френеля увеличиваются. В зависимости от размеров кристалла, это может привести к усилению или к ослаблению зависимости интенсивности отраженных рентгеновских волн от ориентировки плоскости падения. В данном случае, так как длина волны M_0K_{α} излучения значительно больше даже длины волны края поглощения кальцита, то поглощение незначительное, следовательно, незначительно и изменение площадей зон Френеля.

Ереванский государственный университет,
Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 4 I 1960

Բեզիրգանյան Պ. Հ., Ակրիտով Ա. Գ.

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁԱԾ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՆՈՂ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ՁԵՎԻՑ (ԿԼԱՆՈՂ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ԴԵՊՔԸ)

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[1] հոդվածում քննարկված է ռենտգենյան անդրադարձած ալիքների ինտենսիվության կախումը բյուրեղի մակերևույթի նկատմամբ անկման հարթության ունեցած դիրքից (բյուրեղի ձևից)։ Վուլֆ-Բրեգի տվյալ անկյան և անդրադարձնող հարթությունների տվյալ սիստեմի համար չկլանող բյուրեղի դեպքում։

Տվյալ հոդվածում քննարկվում է ռենտգենյան անդրադարձած ալիքների ինտենսիվության կախումը անկման հարթության դիրքից կլանող բյուրեղի դեպքում։

Հաշվումների արդյունքներից արվում են հետևյալ եզրակացությունները.

1. Ինչպես չկլանող բյուրեղի, այնպես էլ կլանող բյուրեղի դեպքում, երբ Ֆրենելի առաջին զոնան մեծ է կամ անդրադարձնող հարթությունների կարգի է (բյուրեղի չափերը 10^{-4} — 10^{-5} սմ կարգի են) ռենտգենյան անդրադարձած ճառագայթների ինտենսիվությունը խիստ կերպով կախված է անկման հարթության դիրքից Վուլֆի-Բրեգի տվյալ անկյան և անդրադարձնող հարթությունների տվյալ սիստեմի դեպքում։

2. Անդրադարձնող հարթությունները իրենց նորմալի շուրջը պտտելիս անդրադարձած ճառագայթների ինտենսիվությունն ընդունում է մեծագույն արժեք այն դեպքում, երբ ընկնող ալիքի ուղղության պրոեկցիան անդրադարձնող հարթությունների վրա զուգահեռ է բյուրեղի երկար կողին։

3. Այդ կախումն այնքան ավելի խիստ է, որքան փոքր է Վուլֆի-Բրեգի անկյունը (տվյալ ալիքի երկարության և անդրադարձման տվյալ կարգի դեպքում)։

4. Կլանող բյուրեղի դեպքում կլանման եզրին մոտենալիս բեկման ցուցիչը փոքրանում է, իսկ ալիքի երկարությունը մեծանում է հետևապես Ֆրենելի զոնաների մակերեսույթները մեծանում են և կախված բյուրեղի չափերից դա կարող է բերել ռենտգենյան անդրադարձած ճառագայթների ինտենսիվության անկման հարթության դիրքից ունեցած կախման կամ ուժեղացման կամ թուլացման։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Безирганян П. А., Акритов А. Г.* Зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от формы отражающего кристалла. „Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)“, **13**, № 2, 1960.
2. *Безирганян П. А.* Динамичнская теория интерференции рентгеновских лучей для конечного кристалла. „ДАН АрмССР“, **29**, № 5, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 5, 1960 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

С. К. Всехсвятский

О возможном существовании кольца комет и метеоритов вокруг Юпитера

Резюме

1. Перечисляются аргументы теории извержения (невозможность объяснить малый возраст и особенности движения короткопериодических комет на основе захвата; существование астероидов и метеорных потоков в центральных областях Солнечной системы; существование кометных семейств Сатурна, Урана и Нептуна; соответствие кометных газов химизму планетных атмосфер; особенности системы параболических комет; присутствие льдов в кометах; данные изучения структуры и химизма метеоритов; явления вулканизма на планетных телах) на основе которой утверждается существование кометно-метеоритных масс, двигающихся вокруг планет.

2. Отмечены наблюдавшиеся значительные изменения в кольце Сатурна и на основе данных Отто струве (XIX столетие) и более поздних наблюдений, найдена скорость расширения колец и их приближения к поверхности планеты. Вычислено уменьшение общей энергии части кольца, составившее за 300 лет минимально $3 \cdot 10^{38}$ эргов. Устанавливается, что быстрая сравнительно с прежними оценками эволюция кольца, должна происходить в результате пополнения вещества кольца и вследствие соударений составляющих колец.

3. Обращено внимание на выдающиеся особенности экваториальной полосы Юпитера и дается обзор наблюдений этой полосы.

4. Показано, что сопостановление периодов наилучшей видимости экваториальной полосы Юпитера с зенографическим положением Солнца и Земли и рассмотрение положения полосы на диске—может служить доказательством того, что она является *тенью* кометно-метеоритного кольца, окружающего Юпитер и находящегося в плоскости его экватора.

5. Обсуждаются особенности гипотетического кольца Юпитера, оптическая толща которого в несколько десятков раз меньше, чем у кольца Сатурна и возможности наблюдения ушек кольца.

1. *Исходные положения*. Изучение системы комет и особенностей короткопериодических комет, не оставляет никакого сомнения в том, что их появление в Солнечной системе обязано мощным вулканическим катаклизмам на планетных телах [1,2].

При извержениях наряду с образованием периодических и долгопериодических комет, характерных наличием льдов, происходит образование метеоритов (обломков коры) и метеорного вещества (вулканический пепел), заполняющих пространство Солнечной системы. Не имея возможности возвращаться к неоднократно уже изложенным доказательствам, я кратко перечислю основные аргументы теории извержения:

а) Быстрая дезинтеграция короткопериодических комет и особенности их движения, исключают объяснение этих комет на основе „захвата" Юпитером (т. е. в предположении больших одиночных или ряда последовательных возмущений). Существование многочисленной группы юпитеровых комет (68) доказывает их выброс с поверхности спутников Юпитера и на протяжении не более 300—400 последних лет.

б) Существование астероидов, двигающихся в центральных областях Солнечной системы (Икар, Аполлон и др.) и недавно открытых короткопериодических метеорных потоков планетарного типа (О Цетиды, Ариетиды и др.), указывает на сравнительно недавнее их образование. Помимо представления о выбросе с поверхности планет земной группы, иные объяснения появления вблизи Солнца тел с короткопериодическими, но эксцентричными орбитами, встречает большие трудности.

в) Группы периодических комет Сатурна, Урана и Нептуна, говорят об эруптивной активности в системах других планет-гигантов.

г) Особенности газов светящихся в кометах находятся в хорошем соответствии с химизмом планетных атмосфер.

д) Особенности распределения орбит долгопериодических и параболических комет говорят об их образовании в области планет миллионы и десятки миллионов лет назад, при больших начальных скоростях, чем это имеет место в настоящее время.

е) Присутствие льдов в кометах прямо говорит об их отношении к планетам, поскольку льды нам известны лишь на поверхностях планетных тел.

ж) Все более выясняющееся единство природы и генетическая связь между различными группами малых тел (астероиды, метеориты, метеорное вещество, кометы как метеоритно-метеорные комплексы со включением льда), позволяет использовать данные всех групп для космогонических заключений. Изучение метеоритов, по структуре отвечающих туфовым породам вулканических районов Земли приводит к заключению об их вулканическом или взрывном происхождении (В. Н. Лодочников, А. Н. Заварицкий, В. Г. Фесенков) [3].

з) Фотографические и радиолокационные наблюдения метеоров доказывают связь метеорного вещества с комплексом короткопериодических комет. Поскольку существование метеорных частиц в центральных областях Солнечной системы, при значительных эффектах радиативного торможения, корпускулярной бомбардировки, магнитных и электрических полей, — не может быть длительно, их наличие можно объяснить лишь на основе космического вулканизма и предположения о „загрязненных льдах".

и) Непосредственные наблюдения поверхности планет, особенности их атмосфер и в последнее время — радионаблюдения, дают во многих случаях доказательства мощных вулканических процессов (Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, спутники Юпитера (?)). Несомненна в прошлом грандиозная эруптивная активность на Луне и продолжающееся на ее поверхности извержение газов.

й) Имена Лагранжа, Проктора, Кроммелина, В. Н. Лодочникова связаны с различными сторонами теории извержения; в пользу ее выступали Тиссеран, Шульгоф, Фламмарион и другие ученые.

2. *Кольца Сатурна.* Одним из выводов теории извержения было заключение о существовании вокруг некоторых планет метеорно-пылевого или кометного облака, которое должно пополняться за счет выбросов при скоростях, лежащих между круговым и параболическим пределом (1-я и 2-я космические скорости).

Еще в 1952 году высказано соображение, что кольца Сатурна и должны представлять собой подобные облака, поскольку у планет с заметным сжатием, движение частиц облака, вскоре после образования, должно прийти в плоскость экватора планеты. За эруптивное происхождение кольца Сатурна говорило и существование активности на поверхности планеты (белые пятна в 1876, 1891, 1895, 1933, 1946 годах) и голубой в сравнении с планетой цвет кольца (присутствие газа и льда) и значительные изменения в кольцах, отмечавшиеся на протяжении истории астрономии. На такие изменения указывал еще Трувело в 1891 г. В 1907 г. Фурнье и независимо в 1908 г. Шэр в Женеве обнаружили появление внешнего слабого кольца, которое еще в начале 1909 года наблюдалось гринвичскими астрономами, но позднее исчезло. Нечто подобное вновь наблюдалось в 1952—1953 гг. [4]. В моменты прохождения Солнца через плоскость кольца, при его исчезновении отмечались в 1907—1908 гг. (Барнард) и в 1921 г. сгущения, при других исчезновениях не отмечавшиеся. Многие другие случаи изменений приведены в книге Чэмберса (т. I) — например исчезновение делений Энке и др. Нельзя проходить мимо таких фактов как наблюдение Барнардом в 1908—1909 гг. необычной яркости крепового кольца. Естественно, объяснять эти изменения в кольце Сатурна новыми поступлениями продуктов вулканических извержений, происходящих как на спутниках Сатурна, так и на самой планете и за счет быстрой эволюции вещества колец в результате столкновений и сопротивления движению составляющих колец. При этом должна была изменяться установившаяся структура кольца.

Не менее важным для понимания природы кольца и его происхождения являются возможные систематические изменения ширины и расстояния от лимба кольца Сатурна, на что впервые обратил внимание Отто Струве в 1852 году [5]. На основании анализа первых описаний и измерений, О. Струве составил следующую таблицу расстояний кольца от лимба планеты (c) и ширины кольца (b) (c и b в секундах дуги отнесенные к средней оппозиции):

	Эпоха	c	b
Huyghens	1657	6″.5	4″.6
Huyghens, Cassini	1695	6.0	5.1
Bradley	1719	5.4	5.7
Herschel	1799	5.12	5.98
W. Struve	1826	4.36	6.74
Encke, Galle	1838	4.04	7.06
O. Struve	1851	3.67	7.43

Кажется несомненным расширение кольца и приближение его внутреннего края к планете. Были высказаны возражения против этого вывода, хотя такие выдающиеся наблюдатели как Секки и Хинд высказывались в пользу идеи изменения. Можно было дополнить данные таблицы О. Струве, измеряя рисунки, сделанные с мощными средствами, опытными наблюдателями. Измерялись расстояния от внутреннего края крепового кольца (C), которое иногда отмечалось почти такой же яркости, как и внешнее кольцо (A).

		c	b
Ranyard	1883	2″.9	8″6
Henry	1884	2.2	8.7
Terby	1887	2.7	10.8
(по Чемберсу, Хандбук - - - - 1,224)			
Rudaux, Vaucouleurs	1943	1.66	10.8
(Астрономия, 1948)			

На последнем рисунке расстояние границы яркого кольца от планеты $c' = 4''.54$ и ширина колец A и B без крепового $= 8''.2$; в то же время измерение репродукций ликских фотографий этого же 1943 года дает для расстояния яркого кольца от планеты 5″.4 и для ширины — 6″.9. Различие оказывается не столь большим и может быть отнесено за счет того, что на фотографиях не вышли более слабые внешние части внешнего кольца (A), а также за счет видимого уменьшения диска планеты на фотографии из-за потемнения к краю.

Повидимому, следует признать реальным расширение кольца вовнутрь и приближение его внутренних частей к планете, в то время, как расстояние внешних колец остается приблизительно неизменным. Такой процесс и должен иметь место в результате происходящих соударений частиц кольца, когда полная энергия уменьшается, так как расходуется на распыление и нагрев. Должно иметь значение и сопротивление испытываемое метеоритными массами в газовой и пылевой среде колец, вращение которой должно отражать влияние магнитного поля планеты и ее „короны“.

Используя данные О. Струве можно получить положение средней линии колец 300 лет назад на расстоянии приблизительно 9″ (c +

$+1/2b$), т. е. около радиуса над поверхностью планеты. В сороковых годах нашего столетия (рис. Рюдо и Вокулер) значение $(c+1/2b)$ составляет лишь около $7''.5$ или $0.83\,R$.

Полная механическая энергия $E = T + u$ кольца, считая массу сосредоточений на средней линии и движение частиц круговым, может быть оценена следующим образом.

Кинетическая энергия $T = \dfrac{GmM}{2(R+h)}$; G — гравитационная постоянная, m — масса кольца; M — масса планеты; R — радиус планеты; h — расстояние кольца от поверхности планеты.

Потенциальная энергия $u = \dfrac{GmM}{2}\left(\dfrac{2}{R} - \dfrac{2}{R+h}\right) = \dfrac{GmMh}{R(R+h)}$.

В этом случае $E = GmM\left|\dfrac{R+2h}{2R(R+h)}\right|$. С данными для Сатурна ($M = 5.7\cdot 10^{29}$ *гр.*; $m = 4\cdot 10^{-5}$; $M = 2.3\cdot 10^{25}$ *гр.*) получаем для эпохи Гюйгенса.

$$E = 4.75\cdot 10^{12}\cdot 2.3\cdot 10^{25} \text{ эрг. и для настоящего времени}$$

$$E = 4.60\cdot 10^{12}\cdot 2.3\cdot 10^{25} \text{ эрг.}$$

Изменение $\Delta E = 3\cdot 10^{36}$ эргов, должно было за 300 лет быть израсходовано на соударения и сопротивление движению, причем это минимальное значение, так как не учитываются возможные пополнения вещества кольца, которые могли иметь место на протяжении 300 лет. За это время частицы прошли в среднем путь $2.4\cdot 10^{16}$ *см*. Расход энергии на частицу в 1 *гр.* составил на *см* пути $6.3\cdot 10^{-6}$ *эрг./см*. Так как сила сопротивления $P = 6\pi\mu a v$, где μ коэффициент вязкости $= \frac{1}{3} m n \bar{u} \lambda$, a — радиус сферического метеора, v скорость тел в круговой орбите (($1.8\cdot 10^{6}$ *см*) для $h =$ радиусу планеты), то можно оценить концентрацию газовых частиц обуславливающих расширение кольца. Принимая $a = 1$ *см*; молекулярный вес $3\cdot 10^{-23}$ *гр*; $\bar{u}$ соответствующее равновесной температуре (127° K) на расстоянии Сатурна равно $3.2\cdot 10^{4}$ *см/сек*; λ — можно взять порядка 10^{3} *см* и тогда концентрация молекул оказывается порядка 10^{2}—10^{3} *см*$^{-3}$. Для всего объема кольца это составляет дополнительную массу газа порядка 10^{7}—10^{8} *гр*. Считая эту оценку в высокой степени приблизительной, я хочу лишь отметить, что процесс выпадения метеоритных масс кольца на поверхность планеты происходит, повидимому, значительно быстрее, чем это предполагалось ранее. Действительно в различных теоретических расчетах не принималось во внимание действие корпускулярных потоков на легкоплавкие (льды) и тугоплавкие составляющие кольца, действие соударений, тормозящего влияния магнитного поля планеты и действие ее „короны“, подобной земной.

Наши результаты и само существование плоского кольца независимо говорят о происходящем и в настоящую эпоху пополнении материи кольца, и, следовательно о мощных выбросах с поверхности планеты и ее спутников, в период значительно более поздний, нежели момент рождения планет. Является совершенно необходимым установить точную систему величин, характеризующих яркость и размеры всех составляющих кольца Сатурна и организовать службу наблюдений кольца в стандартных условиях.

3. *Экваториальная полоска Юпитера.* Существование активных процессов выбросов в системе Юпитера, доказываемое данными кометной астрономии, дает все основания предполагать, что вокруг Юпитера также движутся кометно-метеоритные массы в виде кольца, аналогичного кольцу Сатурна. То обстоятельство, что кольцо Юпитера не было открыто на протяжении более трехсот лет телескопических наблюдений, могло быть связано с малым раскрытием кольца, когда в подобных же условиях кольцо Сатурна также почти пропадает, и, конечно, с меньшей массой или плотностью материала в кольце. Угол наклона оси вращения Юпитера к плоскости орбиты i равен $3^\circ 7'$, долгота восходящего узла экватора на орбите $313^\circ 45'$ (1801); наклон плоскости орбиты к эклиптике $1^\circ 18' 21''$, и долгота восходящего узла орбиты на эклиптике $99^\circ 56' 36''$(1950).

В таком случае зенографические координаты Солнца:

$$\sin D_c = \sin i \sin (L_ю - 313^\circ.75)$$

$$\cos (A_c + 180^\circ) = \cos D_c \cos (L_ю - 313^\circ.75).$$

Положение Земли на зенографической сфере может быть задано значениями $D_з$ (зенографическая широта) и $A_з$ зенографическое прямое восхождение) Земли, которые находятся в некоторых ежегодниках и особенности расчета которых проводятся, например, в *Nautical Almanac* или в книге В. В. Шаронова [6].

Наибольший угол, под которым с Земли может наблюдаться плоскость гипотетического кольца Юпитера варьирует в пределах $-3^\circ.31$ до $+3^\circ.38$. Однако, только в течение 3 лет из 11,9 лет периода обращения Юпитера этот угол сохраняется в пределах 3° и большую часть времени бывает меньше 2°, причем около 4 лет — в пределах 1°. При этом ширина кольца (предполагаемого тонким) вблизи ушек не превышает $2''$, и большую часть времени должна быть порядка $1''$.

Сравнивая эти обстоятельства с условиями для Сатурна, устанавливаем следующее: при аналогичном наклоне ($D_з < 3^\circ$, и вообще $= 1 - 2^\circ$) кольца Сатурна не было видно в телескопы средней силы и только при использовании $36''$ и $40''$ и аналогичных по силе телескопов (Барнард, Слайфер, Данжон) можно было отметить слабую и часто прерывистую полоску. Ненаблюдаемость ушек у Юпитера указывает, что поверхностная яркость их должна быть по крайней мере в несколько раз меньше, чем яркость сатурновых колец при аналогичных условиях.

Естественно было искать других признаков существования кометно-метеоритного кольца вокруг Юпитера. Необходимо было искать присутствия тени кольца на диске планеты, поскольку тень кольца Сатурна, вблизи моментов его исчезновения, всегда была очень хорошо заметна.

Мною было просмотрено большое количество рисунков Юпитера, составленных в разное время наиболее опытными наблюдателями. Было установлено, что тонкая экваториальная полоса, пресекающая экваториальную зону планеты наблюдается еще с пятидесятых годов прошлого столетия, когда обсерватории стали вооружаться телескопами с отверстиями более 8—10", с хорошей разрешающей способностью.

Составленная к концу прошлого столетия постоянная схема деталей поверхности Юпитера содержит указание на экваториальную полосу. Однако, в настоящее время экваториальная полоса отмечается на рисунках не столь постоянно, как это было в прошлом. Особенности экваториальной полосы привлекают к ней пристальное внимание. Обычно она отмечается как тонкая полоска, шириной около 1/100 части диаметра планеты (т. е. $\sim 1/2''$) или точно на экваторе, или вблизи экватора; сравнение рисунков наблюдателей секции Юпитера Британской Астрономической Ассоциации показывает, что она отмечается лишь наиболее опытными наблюдателями и только в том случае, если отверстие телескопа превышает 15—20 *см*. Однако, отмечаются определенные периоды лучшей видимости экваториальной полоски.

Из длительных рядов наблюдений Лозе (11" рефрактор, $\times 250$) вытекает, что экваториальная тонкая полоса отмечалась в 1874—1875 гг. и ввиде обрывков — в 1876 г. В 1878 году она не указывается наблюдателем на затененной экваториальной зоне. Но в 1880 г. отмечена вблизи экватора, в 1881 г. когда красное пятно было в максимуме интенсивности, экваториальная полоска располагается на 2°—4° к югу от экватора планеты [7].

На рисунках Найланда (10 1/2" рефрактор, $\times 248$, 260) экваториальная полоса в первый период часто изображается широкой и размытой, она видна в 1896 г., почти не видна в 1897 г. и отчетливо просматривается в затененной дистурбированной экваториальной зоне в 1898 г. и временами в 1899 г., располагаясь севернее экватора приблизительно на 5°. В 1900 — отчетливо видна, чуть севернее центра диска. В 1902 г. в июле Найланд опять отмечает следы экваториальной полосы немного южнее центра диска [8].

Экваториальная полоска указана на сводных рисунках Фламмариона (см. Популярная астрономия), относящихся к каждому году с 1880 по 1909, хотя эти рисунки, повидимому, схематичны. Экваториальная полоса отмечена в 1881 г. и обрывками в 1882 г., хорошо показана в 1890; видна в 1895 и 1896 гг., затем вновь указана на рисунках 1899 и 1900 гг.; в виде обрывков отмечается в 1907 г., видна в 1908 и особенно в 1909 г. На рисунках наблюдателей секции Юпитера Британской Астрономической Ассоциации, тонкая экваториальная полоска отмечается неоднократно. Она указывается, как „*equatorial band*" на схемах каждого отчета по Юпитеру. С мая 1904 г. по февраль 1905 г. Малленсворс видит слабую прерывающуюся и трудную для наблюдений полоску. Однако она видна чаще, чем в 1903 г. В январе и феврале 1908 г. Филлипс отмечает тонкую экваториальную полосу. В 1922 г.* в июле экваториальная полоса отмечается несколько севернее центра диска на рисунках Дю Мартерей (8 1/2" рефлектор), хотя Атткинс и Ривес ее не указывают.

В 1923 г. отдельными обрывками она представлена на рисунках Филлипса, Пика, Серджента, в мае также, располагаясь к северу от центра диска. Вместе с тем в апреле и июле 1923 г. эти наблюдатели не отмечают экваториальной полоски. В 1924 г. кусочки дужек, как обрывки полосы отмечаются Филлипсом в мае и июне (3—5° севернее центра диска). В 1925 г. в июле—августе отдельные обрывки полоски отмечаются на рисунках в 3—4° севернее центра диска.

В 1926 г. Филлипс в отчете указывает, что узкая экваториальная полоска видна в некоторых случаях, но не непрерывной во всех долготах. При этом она отмечается на рисунках в июле—августе чуть к северу и в сентябре через центр диска (Филлипс, Пик, Энсли). Полоска очень тонкая шириной не более —1 зенографического градуса. В 1928 году в сентябре—декабре на рисунках Филлипса, Харгривса и Пика представлена в виде вытянутых дужек или отдельных обрывков, проходящих заметно южнее центра диска. В 1929 году экваториальная зона сильно дистурбирована, наблюдатели не отмечают определенных деталей полосы. Интересно отметить, что в декабре 1928 г. английские наблюдатели видели экваториальную зону интенсивно голубой и даже блестяще голубой. У Рюдо на рисунке 1933 г. отмечается резкая граница экваториальной полоски, проходящая через центр диска, или чуть южнее... В 1936 г. в сентябре отмечается Роем (Тулуза) как слабая размытая полоска на дистурбированной зоне; проходит севернее центра диска на 2°,5—3,5°. Видна и на рисунках Рюдо. В 1938 году на рис. Рюдо видна сильной, проходящей точно через центр диска, с отдельными разрывами [9].

В 39 отчете секции Юпитера Александер отмечает видимость экваториальной полосы в 1952—1953 годах; в 1951 г. не была видна и на фотографиях не вышла.

По моим собственным наблюдениям Юпитера с 20 *см* менисковым телескопом АЗТ-7 кафедры Астрономии КГУ отмечались обрывки слабой экваториальной полоски в мае 1958 г.; полоса была смещена к северу относительно центра диска. Опыт моих визуальных наблю-

* В библиотеке КАО имеются лишь отчеты за 1922—1929 гг.

дений поверхности Юпитера, проводившихся с 1949 года главным образом с 10″ гидом астрографа Киевской обсерватории, показывает, что правильное отображение деталей поверхности планеты зависит не только от качества изображений и спокойствия атмосферы, но и от наблюдателя, его опыта, от умения видеть картину при возникающих изредка на малые доли секунды условиях наилучшей видимости, от умения правильно передать изображение на рисунке, от разделительной способности глаза.

Экваториальная полоска видна и на фотографиях, но повидимому, еще реже, чем при визуальных наблюдениях. Например, она видна на снимках со 100″ рефлектором 12.II и 15.III 1921 г. и 29.V 1922 г. (*Skilling, Richardson, Astronomy* стр. 248) смещенной на 2°.5—5°.5 к северу от центра диска. Экваториальная полоска кажется видимой и на некоторых киевских фотографиях 1951—1952 гг. Эти фотографии с 1948 г. получались с увеличенной камерой на фотографической трубе Киевского астрографа. Однако, экваториальная полоска не выделяется на репродукциях снимков Юпитера, полученных на Пик дю Миди и на Поломарском телескопе. Повидимому, экваториальная полоса может выйти на снимках лишь при оптимальных условиях в отношении экспозиции, подчеркивающей соответствующий контраст и моментов наилучшей видимости и спокойствия.

4. *Экваториальная полоса как тень кольца вокруг Юпитера*. Экваториальная полоса на рисунках этого столетия и на большинстве рисунков прошлого века изображается тонкой почти однородной линией. Лозе и Найланд в первый период наблюдений изображают ее широкой, но это может быть объяснено отсутствием в первый период необходимого опыта при наблюдениях и передаче изображений на бумагу. Просмотр рисунков Найланда, особенно 1896—1898 гг. показывает, что экваториальная полоса особым образом ведет себя на поверхности планеты, имея иной вид, чем другие детали и меняя положение относительно других полос. В то время как северная и южная экваториальные полосы Юпитера претерпевают значительные изменения в ширине и положении, экваториальная полоска остается неизменно слабой и тонкой, ее положение меняется совсем иначе, чем у других деталей планеты. Было произведено сопоставление периодов наилучшей видимости экваториальной полосы, описанных в разделе 4, с зенографическим положением Солнца и Земли. В табл. I приводятся моменты прохождения Солнца через плоскость экватора Юпитера.

Расхождение между моментами прохождения Солнца и Земли через плоскость экватора не превосходит 3 месяцев; расхождение в зенографической широте не более 0°.7.

Нельзя не отметить, что время наилучшей видимости экваториальной полосы соответствует у Лозе и Найланда моментам максимума зенографической широты Солнца и Земли; это же отмечается при анализе наблюдений Фламмариона, английских наблюдателей.

Таблица 1

Прохождение Солнца через экватор Юпитера	Положение Солнца относ. экватора планеты	Прохождение Солнца через экватор Юпитера	Положение Солнца относ. экватора планеты
1837 февраль 23	южное	1902 сентябрь 12	северное
1843 май 20	северное	1908 апрель 27	южное
1849 январь 3	южное	1914 июль 23	северное
1855 март 30	северное	1920 март 6	южное
1860 ноябрь 14	южное	1926 июнь 3	северное
1867 февраль 8	северное	1932 январь 18	южное
1872 сентябрь 25	южное	1938 апрель 13	северное
1878 декабрь 19	северное	1943 ноябрь 29	южное
1884 август 5	южное	1950 февраль 22	северное
1890 ноябрь 9	северное	1955 октябрь 9	южное
1896 июнь 17	южное	1962 январь 3	

Годы устойчивой водимости полосы следующим образом распределяются в зависимости от разности между годом максимума D_c, на основании указанных наблюдений.

Таблица 23

Разность между годами видимости полос и максимума D_c	0	1	2	3
Число лет с наблюдениями полосы	13	11	4	8

Вблизи моментов прохождения Солнца через плоскость экватора планеты, по английским наблюдениям полоса или ее обрывки оказывается особенно тонкой шириной не более $0''.5$. При этом она отмечается только с инструментами значительных размеров.

Указанные особенности и отвечают предположению, что экваториальная полоса является не деталью поверхности планеты, а тенью кольца. При максимальных значениях D_c, тень должна иметь максимальную ширину; в это время не происходит экранирования тени самим кольцом и она может быть доступна инструментам средней силы.

Однако, еще более неоспоримые доводы можно получить из рассмотрения положения полосы, на диске планеты. Мною была проведена оценка положения экваториальной полосы по рисункам относительно центра диска планеты и оценка ширины полосы; измерения производились в долях полярного диаметра планеты и выражались в зенографических градусах; $\alpha^\circ = 115.\ K$, где K—расстояние полосы от центра диска, положительное к северу. Были использованы наблюдения Лозе, Найланда, английских наблюдателей и некоторые другие. Данные находятся в таблице 3.

Учитывая возможные ошибки нанесения на рисунки деталей, не вызывавших особого внимания наблюдателей, необходимо признать поразительным согласие наблюдений, говорящих о систематических отклонениях полосы от экватора точно в том направлении, как это

Таблица 3

Наблюдатель	Момент	α°	D_c	d
Лозе	1881 II	—3, —4°	+2.°5	—
Найланд	1895 IV	—5	+2.0	2.°9
	V	—3.5	+1.9	2.5
	1896 I	—1.2	+1	4.3
	II	—1.5	+1.0	—
	III	—0.5	+0.7	3.8
	IV—V	+1.2	+0.3	2.5
	1897 II—III	+2.4	—0.5	7.1
	1898 III	+3+6	—2.5	2—1
	1898 IV—V	+3·6+4·8	—2.7	—
	1899 II, IV	+3.4	—3·0	2.6
	1900 IV	+1.2	—2.9	—
	1902 VII	+1.2	+0.2	3.6
Фотографии со 100"	1921 II	+2.4	—1.0	—
»	1922 V 29	+5.5	—2.5	—
Дю Мартерей	1922 VI	+3·9+5·2	—2.9	2.6
Филлипс	1923 IV—V	+3+5	—3.0	1.3
	1925 VI—VIII	+3.9	—1.7	—
Пик, Филлипс	1926 VII	—0.5	+0·2	0.8
Хегривс	1926 VIII	+2	+0.3	—
Пик	1926 IX	0	+0.4	—
Филлипс	1926 IX	+1	+0.4	0.6—0.8
Пик	1928 VIII	—5.2	+2.5	—
Филлипс	1928 IX	—3·4	+2.7	—
	В конце 1928 г. с января 1929 отдельные обрывки на дистурбированной зоне кажутся чуть южнее от центра диска			
Рюдо	1933	—1.1	—1.5	—
Рой	1936 VIII	+3.0	—2.1	—
Рюдо	1938	0	+0.7	—

должно быть в случае если она является тенью кольца Юпитера (фиг. 1). Для всех 27 наблюдений, решая систему уравнений

$$\alpha^\circ = \Pi \cdot D_c$$

можно найти, принимая все уравнения с равным весом:

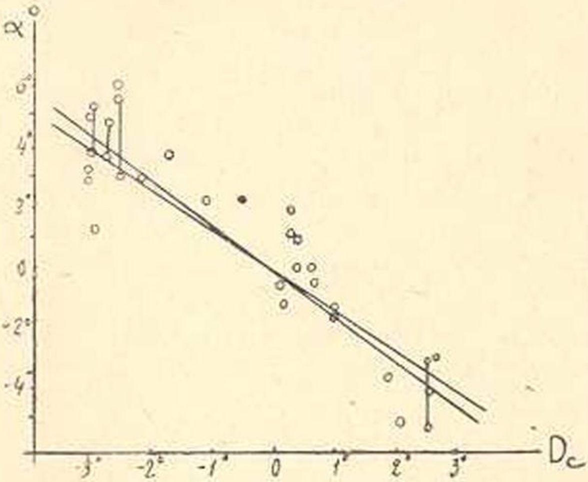
$\Pi = -1.38 \pm 0.27$, с другой стороны составляя средние для группы наблюдений.

Таблица 4

D_c	n	$\bar{D}_c$	$\bar{\alpha}°$	Π'
3.0—27	6	2°.83	3.47	1.23
2.6—2.0	6	2 .35	4.45	1.89
1.9—1.0	6	1 .37	1.90	1.38
0.9—0.0	9	0 .41	0.04	—

получаем: $= -1.50 \pm 0.3$.

Учитывая сугубо приближенные значения α^0 при этом мы считаем зенографическую широту центра диска приблизительно равной D_c. Необходимо таким образом признать, что данные рисунков наиболее опытных наблюдателей (несмотря на то, что здесь использованы лишь доступные в Киеве наблюдения) с большой убедительностью устанавливают отклонения середины экваториальной полосы до 2°.0—1°,6 от экватора в направлении противоположном зенографическому возвышению Солнца и Земли над экватором Юпитера.



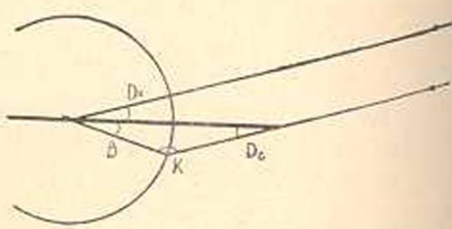
Фиг. 1. Соотношение между положением экваториальной полосы на диске Юпитера и зенографической широтой центра диска (D_c). α^0—расстояние полосы от центра диска по наблюдениям Лозе, Найланда, английских наблюдателей и др.

Этот факт может, повидимому, считаться одним из прямых доказательств того, что экваториальная полоса является тенью Юпитерова кольца. Среднее значение ширины тени оказывается (для D_c в пределах 2.0—3°.0) $\bar{d} = 2°.3$.

Для малых D_c, пренебрегая сжатием Юпитера и, считая радиус планеты малым в сравнении с расстоянием до Солнца, из фиг. 2 можно видеть:

$$\frac{\sin D_c}{R} = \frac{\sin K}{R+h} = \frac{\sin (D_c + B)}{R+h}.$$

Здесь R—радиус планеты, h=высота внешних частей кольца, которое считается расположенным в плоскости экватора; B—зенографическая широта внешнего края тени кольца. Задавая h—определенные значения, при известном D_c можно было найти B; результаты находятся в таблице 4.



Фиг. 2. Определение зенографической широты края тени (B) в зависимости от высоты кольца.

Таблица 4

h	$D_c = 3°.0$ B	$D_c = 2°.0$ B
0.1	14′	12′
0.4	1°12′	48
0.8	2 25	1°36′
1.2	3 37	2 24
1.6	4 49	3 12
2.0	6 5	4 6

Как показывает табл. 3 и значение $\bar{d}$, край тени располагается в среднем (при $D_c = 2^\circ - 3^\circ$) на расстоянии $3^\circ.1 - 2^\circ7$ от экватора; отсюда можно найти высоту наиболее плотных частей гипотетического кольца, дающих тень. Значения h—оказываются в пределах 1.0—0.3 (для периодов наблюдений когда D_c близко к 3°) и 1.4—0,6 (для наблюдений вблизи $D_c = 2^\circ$).

5. *Об особенностях кометно-метеорного кольца Юпитера.* Полученные данные позволяют высказать некоторые соображения об особенностях гипотетического кольца Юпитера. Плотность вещества в кольце можно было бы выяснить из сравнения ширины и плотности (черноты) тени колец Сатурна и Юпитера. Но, повидимому, нет сравнимых наблюдений, полученных в однородных условиях, так как изучение деталей поверхности Юпитера не проводилось наиболее выдающимися наблюдателями с самыми мощными телескопами. Но как вытекает из описаний и рассмотрения фотографий Сатурна, полученных в моменты исчезновения кольца, тень кольца постоянно значительно чернее основных полос на диске, и по крайней мере в 5 или более раз. Тень Юпитерова кольца даже в конце прошлого столетия была значительно меньшей плотности, по крайней мере в несколько раз, чем главные полосы в период наибольшего развития. Поглощающая способность или оптическая толщина кольца у Юпитера может быть поэтому в десятки раз меньше, чем у Сатурна*. При том же строении и объемной плотности как и у Сатурна (поскольку она определяется условиями постоянно происходящих соударений между частицами) кольца Юпитера должны быть соответственно тоньше.

Считая массу кольца Сатурна по Аллену равной $4 \cdot 10^{-5}$ массы планеты или по Боброву—($4 \cdot 10^{-7}$) можно принять для кольца Юпитера значение $10^{21} - 10^{23}$ *гр.*; объем кольца—порядка $10^{24} - 10^{25}$ *см*^{3}.

О меньшей толщине кольца Юпитера говорят и непосредственные наблюдения ширины экваториальной полоски в периоды вблизи $D_c = 0^\circ$ ($0''.5$).

Наблюдаемость тени (экваториальной полосы) по Найланду и др. наилучшая вблизи $D_c = 2^\circ,0 - 2^\circ,5$; повидимому это соответствует оптимальным условиям в отношении плотности тени и контраста с экваториальной зоной. При малых D_c ширина тени оказывается на грани разрешающей способности средних телескопов. Тень кроме того экранируется самим кольцом.

Именно в эти периоды отмечается неоднородность строения экваториальной полосы. Неравномерность тени и значительные неоднородности в кольце наблюдались неоднократно и у Сатурна, особенно вблизи времени исчезновения колец [11]. Измерение скорости перемещения деталей экваториальной полоски Юпитера может дать независимую проверку гипотезы кольца и оценку его размеров.

* Можно отметить, что до сих пор не использована возможность изучения природы колец Сатурна путем наблюдения плотности тени, при разных D_c.

Периоды обращения различных частей кольца, в предположении круговых орбит частиц, могут быть найдены (используя данные для V спутника Юпитера, $a = 2.535$ и $P = 11^{ч}57^{м}28^{с}$) по выражению:

$$P = 10590\,(1 + h)^{3/2}\ сек.$$

h—в радиусах планеты. Угловая скорость ω частицы с $h = 1$ равна $2{,}1 \cdot 10^{-4}\ сек^{-1}$, что в 1.2 раза превышает угловую скорость деталей на диске. При $h = 0{,}5$, $\omega = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ и при $h = 0$, $\omega = 5{,}9 \cdot 10^{-4}\ сек^{-1}$. Детали тени кольца в центре диска должны двигаться по крайней мере в полтора раза быстрее деталей поверхности; на краях диска скорость видимого перемещения должна еще значительно возрасти из-за эффектов проекции.

Наблюдения Лозе, Найланда, Фламмариона и других астрономов в прошлом столетии отмечают экваториальную полоску Юпитера значительно более часто, и указывают ее большей ширины, чем на рисунках двадцатых-сороковых годов нашего столетия. На современных фотографиях экваториальная полоска (тень кольца) выходит только в редких случаях. Это может говорить о быстрой эволюции кольца Юпитера; за последние 100—80 лет могло произойти падение на поверхность значительной доли материала кольца. Мы видели выше, что аналогичный процесс отмечается и в кольце Сатурна. Не исключена возможность, что пополнение кольца Юпитера, приведшее к появлению заметной тени, было связано с процессами в системе планеты определявшими и проявление красного пятна в 1873 г. Во всяком случае является необходимым, учитывая значение проблемы колец для вопросов планетной космогонии, создание систематической наблюдательной службы колец Юпитера и Сатурна.

Фиг. 3. Юпитер с экваториальной полосой (тенью кольца): рис. Найланда 23 января 1896 г.

Фиг. 4. Неоднородная структура экваториальной полосы; рис. Дю Мерсей, 12 июня 1922 г.

Яркость ушек кольца Юпитера, повидимому, в несколько десятков раз слабее, чем яркость кольца Сатурна при аналогичных условиях (малое D_3); в то же время ореол вокруг Юпитера больше. В результате снижения контраста все это должно затруднить обнаружение ушек.

Тем не менее, расчет проведенный М. С. Бобровым для Сатурна [10] показывает, что возможность такого обнаружения имеется при использовании самых больших современных телескопов. Должны быть использованы электронные устройства, повышающие контрастность или фотографические методы в инфракрасной области. При этом следует иметь ввиду возможную кометную природу материала кольца Юпитера. Службу тени (экваториальной полосы) наоборот следует, повидимому, вести в фиолетовых и ультрафиолетовых лучах. В периоды, когда D_3 близко к 0, в случае затенения экваториальной зоны возможно обнаружение яркого, освещенного ребра кольца на диске планеты.

Выводы

1. Отмечены особенности, наблюдавшиеся в кольцах Сатурна, говорящие о значительно более быстрой эволюции вещества кольца, чем это предполагалось различными исследователями.

2. Вытекающее из данных теории извержения предположение о существовании кометно-метеоритного кольца вокруг Юпитера проверяется путем рассмотрения моментов наилучшей видимости экваториальной полосы Юпитера и изменений ее положения на диске. Показано, что наилучшая видимость полосы совпадает с периодами наибольшей зенографической широты Земли и Солнца, а изменение положения говорит весьма определенно в пользу того, что экваториальная полоса является тенью кольца.

3. Высказано пожелание о проведении систематической наблюдательной службы кольца Сатурна в стандартных условиях, об изучении относительных особенностей тени колец Сатурна и Юпитера в близких условиях и делаются рекомендации в связи с возможностью наблюдений ушек гипотетического кольца Юпитера.

Киевский государственный университет
кафедра астрономии

Поступила 26 VII 1960

Ս. Կ. Վսեխսվյատսկի

ՅՈՒՊԻՏԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ ԳԻՍԱՍՏՂԵՐԻ ԵՎ ՄԵՏԵՈՐԻՏՆԵՐԻ ՕՂԱԿԻ ՀՆԱՐԱՎՈՐ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

1. Թվարկվում են ժայթքման տեսության փաստարկները (կարճ-պարբերական գիսաստղերի փոքր հասակը և շարժման առանձնահատկու-

թյունները բռնագրավման հիման վրա բացատրելու անհնարինությունը. աստերոիդների և մետեորիտային հոսքերի գոյությունը Արեգակնային համակարգի կենտրոնական տիրույթներում. Սատուրնի, Ուրանի և Նեպտունի գիսաստղային ընտանիքների գոյությունը. Գիսաստղային գազերի համապատասխանությունը մոլորակների մթնոլորտների քիմիզմին. պարբերական գիսաստղերի համակարգի առանձնահատկությունները. սառույցների առկայությունը գիսաստղերում. մետեորիտների կառուցվածքի ու քիմիզմի առանձնահատկության տվյալները. հրաբխային երևույթները մոլորակային մարմինների վրա), որի հիման վրա հաստատվում է մոլորակների շուրջը շարժվող գիսաստղա-մետեորիտային զանգվածների գոյությունը:

2. Նշված են Սատուրնի օղակում դիտված զգալի փոփոխությունները և Օտտո Ստրուվեի (XIX դար) տվյալների ու ավելի ուշ կատարված դիտումների հիման վրա գտնված է օղակների լայնացման և նրանց՝ մոլորակի մակերևույթին մոտենալու արագությունը: Հաշվարկված է օղակի մի մասի ընդհանուր էներգիայի նվազումը, որը 300 տարվա ընթացքում կազմել է առնվազն $3 \cdot 10^{36}$ էրգ: Պարզված է, որ օղակի՝ նախկին դիտումների համեմատությամբ արագ էվոլյուցիան պետք է տեղի ունենա օղակի նյութի համալրման և օղակների բաղադրիչների փոխարինումների հետևանքով:

3. Ուշադրություն է դարձված Յուպիտերի հասարակածային շերտի աչքի ընկնող առանձնահատկություններին և տրվում է այդ շերտի դիտումների ակնարկը:

4. Ցույց է տրված, որ Յուպիտերի հասարակածային շերտի լայնական տեսանելիության պարբերաշրջանների և Արեգակի ու Երկրի զենոգրաֆիական դիրքի համադրումը և սկավառակի վրա շերտի դիրքի դիտարկումը կարող են ապացույց ծառայել այն բանի, որ այդ շերտը հանդիսանում է Յուպիտերը շրջապատող և նրա հասարակածի հարթության մեջ գտնվող գիսաստղա-մետեորիտային օղակի ստվերը:

5. Քննության են առնվում Յուպիտերի հիպոթետիկ օղակի առանձնահատկությունները, որի հաստությունը մի քանի տասնյակ անգամ փոքր է, քան Սատուրնի օղակինը, և օղակի եզրերը դիտելու հնարավորությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Всехсвятский С. К.* Новые работы о происхождении комет и теория извержения. Публ. Киев. Обсерват. 5, 3, 1953; Астр. журн. 29, 63, 1952.
2. *Всехсвятский С. К.* Физические характеристики комет. Физматиздат, Москва, 1958, стр. 600.
3. *Лодочников В. Н.* Записки Вс. Минерал. О-ва, 68, 207 и 438, 1939. *Заварицкий А. Н.* Вестник АН СССР, № 8, 8, 1948; *Фесенков В. Г.* Вопросы космогонии, I, 92, 1952.
4. *Trouvelot E.* Bull. Astr. I, 527, 1884; MN 69, 39, 1908; MN 69, 621, 1909; Baum R. M. JBAA, 64, 192, 1954.
5. *Struve Otto.* Mem. d l'Ac. des Sc. de St. Petersbourg 6 ser. Math. et Phys. Vol. V, 1882; MN 13, 22, 1852.
6. *Шоронов В. А.* Природа планет. Физматиздат, 1958, 121.
7. *Lohse O.* Publ. Aph. Obs. zu Potsdam, I Band, № 2, 1878; III Band, №9, 1882.
8. *Nijland A. A.* Recherches astr. de l'obs d'Utrecht IV, 1911.
9. Memoirs of the B. A. A. Reports of the section for the Observations of Jupiter.
10. *Бобров М. С.* Астр. журнал, 33, № 2, 161, 1956.
11. *Chambers G. A.* Hanbbook of astronomy I. 212, 1889.