

С. Е. Карапетян

Об одном преобразовании конгруэнций

1. Как известно, прямые трехмерного пространства P_3 отображаются в точки гиперквадрики Q_4^3 в пятимерном пространстве P_5 [1], [2]. Касательная гиперплоскость этой гиперквадрики пересекается с Q_4^3 по некоторому трехмерному конусу K_3^2 второго порядка, с вершиной в точке касания. Конус K_3^2 называется асимптотическим многообразием гиперквадрики Q_4^3 [3]. Линии на квадрике Q_4^3 называются асимптотическими, если их касательные принадлежат асимптотическому конусу K_3^2 . Соприкасающиеся плоскости асимптотических линий (и только этих линий) принадлежат касательной гиперплоскости квадрики Q_4^3 . Асимптотические линии на Q_4^3 определяются дифференциальными уравнениями (5). Квадратичная фундаментальная форма (5) устанавливает полярное соответствие многообразий на касательной гиперплоскости, инцидентных точке касания. Полиаритет [4], установленный гиперквадрикой Q_4^3 в P_5 для этих многообразий, по существу совпадает с соответствием квадратичной формы (5). Два многообразия L_m и L_{4-m} , инцидентных точке касания и касательной гиперплоскости, называются сопряженными многообразиями, если они соответствуют друг другу в полярном соответствии квадратичной формы (5).

В [3], с помощью этих сопряженных многообразий, был получен ряд теорем и геометрических образов, связанных с конгруэнциями и комплексами прямых обычного пространства P_3 .

В настоящей статье, с помощью тех же сопряженных многообразий, получается одно преобразование конгруэнций и, в связи с этим, доказывается ряд новых теорем из теории конгруэнций. В работе применен метод внешних форм Картана [5].

В пунктах 2 и 3, с помощью фундаментальной формы, рассматриваются сопряженные многообразия, которые коротко можно характеризовать следующим образом.

Пусть двухмерная поверхность (p_1) является образом нашей конгруэнции в P_5 и L_1 — касательная к (p_1) прямая вдоль линии $\omega_1^2 = \lambda \omega_1^3$. В полиаритете формы (5), прямой L_1 соответствует некоторое L_3 , которое пересекается с касательной 2-плоскостью поверхности (p_1) по некоторой L_1' . Направления L_1 и L_1' называются сопряженными в кон-

груэзии (P_1). Характеристика L_3 вдоль L_1 есть 2-плоскость L_2 , которая имеет с касательной 2-плоскостью (p_1) только одну общую точку p (15). Аналогичную точку p' мы получим, если переменим местами L_1 и L_2 . Способ построения точек p и p' в P_3 приведет к преобразованию Лапласа. Прямая pp' пересекается с Q_1^2 в точках p_1' и p_1'' (17). В P_3 каждая из прямых P_1', P_1'' лежит на одной фокальной плоскости и проходит через другой фокус конгруэзии (P_1). (p_1') и (p_1'') называются преобразованиями Π конгруэзии (p_1) по сопряженным направлениям $\omega_2^{\pm} = \pm \lambda \omega_1^{\pm}$.

В пунктах 4 и 5 рассматриваются некоторые частные случаи преобразований Π . В частности условия гармоничности и сопряженности преобразований Π и фокальных поверхностей (p_1), и в связи с этим доказывается несколько теорем.

В пунктах 6 и 8 рассматривается случай, когда развертывающиеся поверхности конгруэзий (p_1') и (p_1'') пересекаются с фокальными поверхностями (p_1) по асимптотическим линиям. Конгруэзия (p_1), допускающая такое преобразование Π , определяется уравнениями (40) и (49). Рассматриваются некоторые геометрические свойства этого нового класса конгруэзий.

В пункте 7 рассматривается случай, когда развертывающиеся поверхности конгруэзий (p_1'), (p_1'') пересекаются с фокальными плоскостями конгруэзии (P_3) по гармонической сети. В этом случае (p_1'), (p_1'') и (p_1) являются конгруэзиями W и асимптотические линии на всех их фокальных поверхностях соответствуют друг другу.

В пункте 9 рассматривается случай, когда прямые p_1' и p_1'' полярно сопряжены относительно обеих квадрик Ли фокальных поверхностей конгруэзии (p_1). Такая конгруэзия характеризуется инвариантными уравнениями (55). В этом случае дифференциальное уравнение интегрируется до конца и λ определяется уравнением (57). Доказывается, что при различных значениях постоянного интегрирования конгруэзии (p_1') и (p_1'') не меняются и, следовательно, остаются полярно сопряженными относительно обеих квадрик Ли.

2. Инфинитезимальное перемещение тетраэдра $A_1 A_2 A_3 A_4$ определяется дифференциальными уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства [5]

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]. \quad (2)$$

Из уравнений (1) непосредственно получим

$$dp_l = b_l^n p_n, \quad l, n = 1, 2, \dots, 6, \quad p_1 = (A_1 A_2),$$

$$p_2 = (A_3 A_4), \quad p_3 = (A_2 A_3), \quad p_4 = (A_1 A_4), \quad p_5 = (A_1 A_3), \quad p_6 = (A_4 A_2) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\theta_1^1 &= \omega_1^1 + \omega_2^2, & \theta_1^2 &= \theta_3^4 = \theta_5^6 = \theta_1^3 = \theta_4^3 = \theta_6^5 = 0, \\
\theta_4^2 &= -\theta_1^3 = \omega_1^1, & \theta_1^4 &= -\theta_3^2 = \omega_2^2, \\
\theta_1^5 &= -\theta_6^2 = \omega_2^3, & \theta_1^6 &= -\theta_3^2 = \omega_1^4, & \theta_2^2 &= \omega_3^3 + \omega_4^4, \\
\theta_4^3 &= -\theta_2^3 = \omega_4^2, & \theta_2^4 &= -\theta_3^1 = \omega_1^1, \\
\theta_6^1 &= -\theta_2^5 = \omega_4^1, & \theta_5^1 &= -\theta_2^6 = \omega_3^2, & \theta_3^1 &= \omega_2^2 = +\omega_3^3, \\
\theta_4^4 &= \omega_1^1 + \omega_4^4, & \theta_5^5 &= \omega_1^1 + \omega_3^3, & \theta_6^6 &= \omega_4^4 + \omega_2^2.
\end{aligned}$$

Дифференциальная окрестность до 3-го порядка луча конгруэнции $(A_1 A_2)$, отнесенной к тетраэдру первого порядка, определяется следующими дифференциальными уравнениями (подробности об этих формулах см. [1], стр. 344—349):

$$\omega_1^1 = 0, \quad \omega_3^1 = \alpha \omega_1^3 - \beta \omega_2^1, \quad \omega_1^2 = \beta \omega_1^3 + \gamma \omega_2^4, \quad (4)$$

$$\Delta \alpha = \alpha_1 \omega_1^3 - \beta_1 \omega_2^4, \quad \Delta \beta = \alpha_2 \omega_1^3 + \gamma_2 \omega_2^4, \quad \Delta \gamma = \beta_2 \omega_1^3 + \gamma_2 \omega_2^4$$

и формулами, полученными из этих заменой указателей 1 и 3 соответственно на 2 и 4 и добавлением штрихов к коэффициентам α, β, γ с любыми указателями.

Касательная гиперплоскость квадрики Q_4^2 в точке p_1 , согласно (3), определяется грасмановым произведением пяти точек $(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)$, а асимптотическое многообразие — дифференциальным уравнением $(d^2 p_1 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) = 0$, которое в силу (3) эквивалентно уравнению

$$\omega_1^3 \omega_2^4 - \omega_2^3 \omega_1^4 = 0. \quad (5)$$

Как уже было сказано, квадратичная форма, стоящая в левой части уравнения (5), устанавливает соответствие многообразий, инцидентных точке p_1 и касательной гиперплоскости. Такие многообразия называются сопряженными [3].

Каждая линейчатая поверхность L конгруэнции $(A_1 A_2)$ отображается в линию l двумерной поверхности (p_1) , принадлежащей Q_4^2 . Если линейчатая поверхность конгруэнции (4) определяется уравнением

$$\omega_2^4 = \lambda \omega_1^3, \quad (6)$$

то касательная прямая соответствующей линии l в P_5 в силу (3) определяется двумя точками

$$(p_1, \lambda p_4 - p_3). \quad (7)$$

Ее сопряженное многообразие есть трехмерная плоскость, которая является характеристикой касательных гиперплоскостей вдоль линии l . Это многообразие можно найти либо путем отыскания характеристик гиперповерхностей, либо с помощью формы, полярной к квадратичной форме (5), написанной для данного и искомого многообразий. Полярная форма (5) для данного одномерного и его сопряженного искомого трехмерного многообразий напишется в виде

$$\omega_1^3 \omega_2^4 + \omega_1^4 \omega_2^3 - \omega_2^3 \omega_1^4 - \omega_2^4 \omega_1^3 = 0, \quad (8)$$

где верхние индексы указывают на размерность многообразия.

Внося сюда значения (4) и (6), получим

$$\omega_2^4 = -\lambda \omega_1^3. \quad (9)$$

Это и есть уравнение сопряженного трехмерного многообразия. Для этого многообразия формы ω_1^3 , ω_2^3 , ω_1^4 следует считать независимыми формами. Касательная 3-плоскость к многообразию (9) определяется из уравнений (3). Она определяется грасмановым произведением четырех точек

$$(p_1, \lambda p_4 + p_3, p_5 p_6). \quad (10)$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что касательная 2-плоскость поверхности (p_1) пишется в виде

$$(p_1 p_2 p_4). \quad (11)$$

Плоскости (10) и (11) пересекаются по прямой $(p_1, p_3 + \lambda p_4)$, являющейся касательной к линии (принадлежащей поверхности (P_1))

$$\omega_2^4 = -\lambda \omega_1^3. \quad (12)$$

Линейчатые поверхности (6) и (12) в конгруэнции $(A_1 A_2)$ называются сопряженными друг с другом поверхностями и обладают известными геометрическими свойствами (см. [6] и [7]). Здесь мы имеем естественное обобщение понятия сопряженности на поверхности X_m в пространстве P_n [3].

3. В этом пункте мы приступаем к построению преобразования конгруэнции. Характеристика 3-плоскости (10) вдоль ее сопряженной линии (6) есть многообразие, инцидентное двум 3-плоскостям (10) и $d(p_1, \lambda p_4 + p_3, p_5 p_6)$ по mod $(\omega_2^4 - \lambda \omega_1^3)$. Она является двухмерной плоскостью

$$(\lambda_1 + \lambda \lambda_2) p_1 - 2(\lambda p_4 + p_3), \quad 2\lambda p_5 - (\alpha - 2\lambda\beta - \gamma\lambda^2) p_1, \quad (13)$$

$$2\lambda p_6 - (-\gamma' - 2\lambda\beta' + \alpha'\lambda^2) p_1,$$

где

$$d \ln \lambda + \omega_1^4 + \omega_2^4 - \omega_3^2 - \omega_4^3 = \lambda_1 \omega_1^3 + \lambda_2 \omega_2^3. \quad (14)$$

Двухмерная плоскость (13) является образом второй серии прямолинейных образующих квадрики Ли линейчатой поверхности (6) (см. [8], [9]). Она с касательной плоскостью (P_1) пересекается только в одной точке

$$p = (\lambda_1 + \lambda \lambda_2) p_1 - 2(\lambda p_4 + p_3). \quad (15)$$

Поверхность (p) , описанная точкой (15), является аналогом первого преобразования Лапласа поверхности (p_1) в сторону линии (12). Это преобразование не имеет всех тех свойств, которыми обладает преобразование Лапласа в трехмерном пространстве, но имеет с ним

много общего (в частности способ построения). Это обстоятельство объясняется тем, что некоторые свойства преобразования Лапласа характерны только для трехмерного пространства.

В этой работе мы не будем подробно излагать теорию преобразования Лапласа в P_3 , а дадим лишь один вид преобразования конгруэнции (в конгруэнцию), построенного с помощью первых преобразований Лапласа поверхности (p_1) в сторону двух сопряженных направлений (6) и (12).

Преобразование конгруэнций, которому посвящена эта работа, получается следующим образом: поверхность (p_1) двумя первыми преобразованиями Лапласа приводится в две поверхности, одна из которых описывается точкой p (15), когда ее преобразовываем в сторону линии (12), а другая — точкой

$$p'_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) p_1 - 2(-\lambda p_4 + p_3), \quad (16)$$

когда ее преобразовываем в сторону линии (6). Прямая pp' пересекается с гиперквадрикой Q_4^2 в двух точках

$$p'_1 = \lambda_1 p_1 - 2p_3, \quad p''_1 = \lambda_2 p_1 - 2p_4. \quad (17)$$

Эти точки являются образами прямых трехмерного пространства. Таким образом, данная конгруэнция $(A_1 A_2)$ с помощью сопряженных линейчатых поверхностей (6) и (12) преобразовались в две новые конгруэнции (17). Такое преобразование в дальнейшем обозначается буквой Π .

Уместно заметить, что с каждой линейчатой поверхностью конгруэнций связываются два новых инвариантных линейных комплекса (15) и (16), которые могут являться предметом исследования.

4. Очевидно, что прямая p'_1 проходит через первый фокус луча конгруэнции и принадлежит фокальной плоскости $A_1 A_2 A_4$, а прямая p''_1 — через второй фокус A_2 и лежит в фокальной плоскости $A_1 A_2 A_3$.

Так как точки A_3 и A_4 координатного тетраэдра выбираются произвольно на фокальных плоскостях конгруэнции (4), то их выберем так, чтобы прямая p'_1 совпала с ребром $A_2 A_4$, а p''_1 — с ребром $A_1 A_4$ тетраэдра. В результате такого выбора координатного тетраэдра из (17) получим

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \quad (18)$$

Таким образом, ребра p_3 и p_4 в силу (18) описывают два преобразования Π конгруэнций $(A_1 A_2)$. Так как точки A_3 и A_4 на лучах p_3 и p_4 произвольны, то мы их закрепим так, чтобы лучи p_5 и p_6 совпали со вторыми фокальными касательными конгруэнции $(A_1 A_2)$. В силу такого выбора в систему (4) надо внести

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0. \quad (19)$$

С помощью (2), (4), (18), (19) дифференцируя внешним образом уравнение (14) и раскрывая полученное квадратичное уравнение по лемме Картана [5], получим линейные уравнения

$$\begin{aligned} 2\omega_3^4 &= \lambda_{11}\omega_1^3 + \lambda_{12}\omega_2^4, & -2\omega_4^2 &= \lambda_{21}\omega_1^3 + \lambda_{22}\omega_2^4, \\ \lambda_{12} - \lambda_{21} &= 2(\alpha\alpha' + \gamma\gamma'). \end{aligned} \quad (20)$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнций $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$ соответствуют нулевым линиям фундаментальных форм точек P_3, P_4 . После подстановки значений (4) и (20) эти формы приравняются к нулю и уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнций $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$ напишутся в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{22}\omega_2^4\omega_1^3 + \lambda_{21}(\omega_1^3)^2 + 2\alpha'\gamma(\omega_1^4)^2 &= 0, \\ \lambda_{11}\omega_1^4\omega_2^3 + \lambda_{12}(\omega_2^4)^2 - 2\alpha'\gamma(\omega_2^3)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из этих уравнений непосредственно вытекает, что развертывающиеся поверхности конгруэнций $(A_2 A_3)$ и $(A_1 A_4)$ соответствуют сопряженным линейчатым поверхностям исходной конгруэнции $(A_1 A_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{22} = 0. \quad (22)$$

Если оба преобразования Π (конгруэнции $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$) имеют каждое по одной развертывающейся поверхности, соответствующей некоторым развертывающимся поверхностям исходной конгруэнции, то это требование, как следует из (21), эквивалентно уравнениям

$$\lambda_{21} = 0, \quad \lambda_{12} = 0. \quad (23)$$

Оба преобразования Π являются параболическими конгруэнциями тогда и только тогда, когда дискриминанты форм (21) равняются нулю

$$\lambda_{11}^2 + 8\alpha'\gamma\lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{22}^2 - 8\alpha'\gamma\lambda_{21} = 0. \quad (24)$$

Фокусами конгруэнции $(A_2 A_3)$ являются точки

$$F_i = A_2 + p_i A_3, \quad (25)$$

где p_i — являются корнями квадратного уравнения

$$\alpha\lambda_{12}p^2 - \lambda_{11}p - 2\gamma' = 0. \quad (26)$$

Если эти фокусы гармонически разделяются точками касательных фокальной сети поверхности (A_1) , то из уравнения (26) получим $\lambda_{11} = 0$, которое в силу (22) показывает, что развертывающиеся поверхности конгруэнции $(A_2 A_3)$ соответствуют сопряженным поверхностям конгруэнции $(A_1 A_2)$.

Линейчатые поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$, соответствующие развертывающимся поверхностям конгруэнции $(A_2 A_3)$, тоже удовлетворяют второму уравнению системы (21). Каждая из этих линейчатых поверхностей касается фокальной поверхности (A_1) вдоль некоторой линии

$$\omega_2^4 = k_i \omega_1^3. \quad (27)$$

где k_i являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda_{12}k^2 + \lambda_{11}k - 2\alpha\gamma' = 0. \quad (28)$$

Касательные к этим линиям в силу (1), (4) и (9) определяются грасмановыми произведениями двух точек

$$(A_1, \gamma k_i A_2 + A_3). \quad (29)$$

Эти две прямые пересекают луч A_2A_3 в фокусах (25) конгруэнции (A_2A_3) тогда и только тогда, когда $p_i = 1/\gamma k_i$, которое в силу (26) и (28) приводит только к одному уравнению

$$\lambda_{12} = 2\gamma\gamma'. \quad (30)$$

Если этому требованию удовлетворяет и вторая конгруэнция, то для нее мы аналогично получим $\lambda_{21} = -2\gamma\gamma'$. В силу этих двух уравнений из (20) получим

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0. \quad (31)$$

т. е. *исходная конгруэнция является W конгруэнцией*. Если фокусы луча A_1A_4 обозначим через F_3 и F_4 , то непосредственно заметим, что *полученная конфигурация содержит в себе четыре замкнутых цикла четырех конгруэнций* (см. [10], [11]).

Как известно, четыре конгруэнции составляют замкнутый цикл если луч каждой конгруэнции пересекает соответствующий луч последующей конгруэнции в его фокусе. Полученные здесь замкнутые циклы являются частными случаями наиболее общих замкнутых циклов, ибо одна диагональ (A_1A_2) каждого замкнутого цикла имеет фокусы в вершинах этого цикла. В работе [11] этот цикл был обозначен через θ_{12} .

Действительно, каждая четверка точек $A_1F_1A_2F_3$, $A_1F_1A_2F_4$, $A_1F_2A_2F_3$, $A_1F_2A_2F_4$ описывает замкнутые циклы с общей противоположной парой конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_4) . Прямая A_1A_2 является общей диагональю для всех циклов и, в силу уравнений (4), имеет фокусы в точках A_1 , A_2 , т. е. каждый замкнутый цикл является конфигурацией θ_{12} .

5. Теперь найдем условие, при котором развертывающиеся поверхности конгруэнции (A_2A_3) пересекаются с фокальной поверхностью (A_2) исходной конгруэнции по сопряженной сети. В этом случае говорят, что конгруэнция (A_2A_3) сопряжена с поверхностью (A_2) (см. [1], стр. 251—259). Как известно, асимптотические линии поверхности (A_2) определяются уравнением $\alpha'(\omega_2^1)^2 + \gamma'(\omega_1^1)^2 = 0$. (см. [1], стр. 351). Для нахождения сопряженных линий, как всегда, составим полярную форму последнего уравнения для двух сопряженных направлений d и δ

$$\alpha'\omega_2^2(d)\omega_2^1(\delta) + \gamma'\omega_1^2(d)\omega_1^1(\delta) = 0. \quad (32)$$

Если одна из сопряженных линий определяется дифференциальным уравнением

$$\omega_2^1 = k\omega_1^1, \quad (33)$$

то другая, в силу (32), будет иметь уравнение

$$\omega_2^4 = -\frac{\gamma'}{k\alpha'} \omega_1^3. \quad (34)$$

Согласно требованию, развертывающиеся поверхности конгруэнции $(A_2 A_3)$ должны пересекаться с поверхностью (A_2) по линиям (33) и (34), т. е. значения (33) и (34) должны удовлетворять второму уравнению системы (21), а последнее будет иметь место только при условии

$$\lambda_{12} = 2\alpha'. \quad (35)$$

Аналогичное требование для конгруэнции $(A_1 A_4)$ приведет к уравнению

$$\lambda_{21} = -2\alpha'. \quad (36)$$

Из уравнения второй строки системы (20), в силу (36), получим уравнение (31). Итак, *только конгруэнции W допускают преобразования Π , каждое из которых сопряжено с одной фокальной поверхностью этой конгруэнции, и если одно из преобразований Π , порожденное конгруэнцией W , сопряжено с одной фокальной поверхностью этой конгруэнции, то другое преобразование сопряжено с другой фокальной поверхностью.*

Развертывающимся поверхностям конгруэнции $(A_2 A_3)$ соответствует некоторая сеть линий на другой фокальной поверхности (A_1) . Если эта сеть сопряжена на поверхности (A_1) , то говорят, что конгруэнция $(A_2 A_3)$ гармонична поверхности (A_1) (см. [1], стр. 251—259).

Пусть конгруэнция $(A_2 A_3)$ сопряжена с поверхностью (A_2) и гармонична поверхности (A_1) . Тогда на каждой фокальной поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$ имеется сопряженная сеть (кроме фокальной сети), соответствующая развертывающимся поверхностям конгруэнции $(A_2 A_3)$, т. е. эти две сети на фокальных поверхностях соответствуют друг другу, и следовательно, согласно теореме Петерсона, $(A_1 A_2)$ является конгруэнцией W .

Таким образом, *если одно из преобразований Π сопряжено с одной фокальной поверхностью исходной конгруэнции и гармонично другой, то эта конгруэнция является конгруэнцией W .* Обратная теорема тоже справедлива, т. е. *если одно преобразование Π , порожденное W конгруэнцией, сопряжено с одной фокальной поверхностью этой конгруэнции, то оно гармонично другой фокальной поверхности.* Из этой и предыдущей теоремы вытекает также, что *если одно из преобразований Π сопряжено с одной фокальной поверхностью исходной конгруэнции и гармонично другой фокальной поверхности, то другое преобразование также удовлетворяет этим условиям.*

6) В этом пункте рассмотрим случай, когда развертывающиеся поверхности преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями исходной конгруэнции $(A_1 A_2)$ по асимптотическим линиям. Как известно [1], асимптотические линии поверхности (A_1) определяются уравнением

$$\alpha (\omega_1^3)^2 + \gamma (\omega_2^4)^2 = 0. \quad (37)$$

Согласно требованию, это уравнение должно совпадать со вторым уравнением системы (21), т. е. должны удовлетворяться следующие условия

$$\lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{21} = 2\alpha\alpha'. \quad (38)$$

Аналогичное требование для второго преобразования Π приводит к равенствам

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = -2\alpha\alpha'. \quad (39)$$

В силу (38) и (39) из последнего уравнения (20) получим

$$3\alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0. \quad (40)$$

Конгруэнция, удовлетворяющая уравнению (40), является новым частным случаем конгруэнций с постоянным инвариантом Вельши (см. [12], [13], [14]). Обозначая эту конгруэнцию через V_1 , мы можем сформулировать следующую теорему: *конгруэнции V_1 , и только они, допускают такие преобразования Π , обе развертывающиеся поверхности каждого из которых пересекаются с фокальными поверхностями этой конгруэнции по асимптотическим линиям.* Конгруэнция V_1 определяется произволом одной функции одного аргумента, т. е. одну ее фокальную поверхность можно задавать произвольно.

7. Рассмотрим случай, когда развертывающиеся поверхности преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями по гармонической сети. Гармоническая сеть фокальной поверхности характеризуется следующими свойствами: во-первых она на этой поверхности является сопряженной сетью, во вторых линейчатые поверхности конгруэнции, соответствующие гармонической сети, также являются сопряженными. Как известно [9], гармоническая сеть фокальной поверхности (A_1) определяется дифференциальным уравнением

$$\alpha (\omega_1^3)^2 - \gamma (\omega_2^4)^2 = 0. \quad (41)$$

Согласно требованию, это уравнение должно совпадать с первым уравнением системы (21). Эти условия и аналогичные условия для поверхности (A_2) и конгруэнции $(A_1 A_2)$ напишутся в виде

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{21} = -2\alpha\alpha', \quad \lambda_{12} = 2\alpha\alpha'. \quad (42)$$

В силу этих уравнений из последнего уравнения системы (20) получим уравнение (31), которое показывает, что $(A_1 A_2)$ есть конгруэнция W . Таким образом, *конгруэнции W , и только они, допускают такие преобразования Π , развертывающиеся поверхности которых пересекаются с фокальными поверхностями по гармоническим сетям.*

Внося значения (42) в уравнения (20), будем иметь

$$\omega_1^4 = \alpha\alpha'\omega_2^4, \quad \omega_2^3 = \alpha\alpha'\omega_1^3. \quad (43)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (31) и внося значения из (4), получим инвариантные уравнения

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_2 - 2\beta_2' &= 0, & \alpha_2 + \beta_1' - 2\beta_1 &= 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1' &= \beta_2 + \beta_2', & \alpha_2 - \gamma_2 &= \beta_1 + \beta_1'. \end{aligned} \quad (44)$$

Теперь покажем, что в силу системы (44) конгруэнции преобразования Π являются W конгруэнциями. Для доказательства этой теоремы мы будем ссылаться на другую теорему, а именно: касательная 2-плоскость двумерной поверхности гиперквадрики Q_4^2 имеет характеристическую прямую тогда и только тогда, когда эта поверхность является образом W конгруэнции. Причем только два направления допускают такую характеристику. Эти направления соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей W конгруэнции.

Как следует из (17) и (18), поверхность (p_3) является образом одного преобразования Π конгруэнции (A_1, A_2) . Касательная двумерная плоскость поверхности (p_3) , в силу уравнений (3), (19) и (43), определяется тремя точками

$$\pi = (p_3, \gamma' p_5 - \alpha p_6, p_2 + \alpha x' p_1). \quad (45)$$

Для нахождения характеристики необходимо найти общие точки этой плоскости и ее бесконечноблизкой плоскости, т. е. плоскости $d\pi$. В силу уравнений (3), (4) и первого уравнения (43) для $d\pi$ получим

$$\begin{aligned} d\pi = & \theta\pi + \{p_3, \gamma' \Delta \gamma' p_5 - \alpha \Delta x p_6 + 2\alpha \gamma' \omega_2^3 p_4 + (\gamma' \omega_3^2 - \alpha \omega_4^1) p_1, p_2 + \alpha x' p_1\} + \\ & + \left\{ p_3, \gamma' p_5 - \alpha p_6, \alpha x' (\Delta x + \Delta x') p_1 + 2\alpha x' \omega_2^4 p_4 - \left(\omega_4^1 + \frac{\gamma'}{\alpha} \omega_3^2 \right) p_3 \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Два многообразия (45) и (46) имеют общую прямую тогда и только тогда, когда дифференцирование берется по направлению, удовлетворяющему следующим двум уравнениям

$$\begin{aligned} \omega_1^3 (\alpha \omega_4^1 + \gamma' \omega_3^2) + \alpha x' \omega_2^4 (\Delta \gamma' - \Delta x) &= 0, \\ \gamma' \alpha \omega_1^3 (\Delta x + \Delta x') + \omega_2^4 (\alpha \omega_4^1 - \gamma' \omega_3^2) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

В силу системы (44) эти уравнения совпадают с одним уравнением (37), т. е. асимптотические линии фокальных поверхностей W конгруэнции (A_2, A_3) соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей исходной конгруэнции.

Точно так же можно доказать, что второе преобразование Π тоже является W конгруэнцией и асимптотические линии ее фокальных поверхностей соответствуют асимптотическим линиям исходной конгруэнции. Таким образом мы получаем следующую теорему.

Если развертывающиеся поверхности обоих преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями по гармоническим линиям, то оба преобразования Π являются W конгруэнциями, асимп-

тотические линии фокальных поверхностей которых соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей исходной конгруэнции.

8. Здесь возвращаемся к п. 6. Опять рассмотрим случай, когда развертывающиеся поверхности преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями исходной конгруэнции по асимптотическим линиям. Как мы увидели, такая конфигурация характеризуется равенствами (38), (39), (40). Внеся значения (38) и (39) в уравнения системы (20), получим

$$\omega_2^1 = -\alpha\alpha'\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = -\alpha\alpha'\omega_1^3. \quad (48)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (48) и обычным образом уравнение (40) и пользуясь системой (4), получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\beta_2 &= 0, \quad \alpha'_2 + 3\beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \gamma'_1 &= \beta_2 + \beta'_2, \quad \alpha'_2 - \gamma_2 = \beta_1 + \beta'_1. \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом конгруэнция V_1 характеризуется инвариантными уравнениями (40) и (49). Выясним некоторые геометрические свойства этой конгруэнции.

Соприкасающиеся плоскости гармонической сети $1 \quad \gamma \omega_2^4 = \varepsilon \sqrt{\alpha} \omega_1^3$ ($\varepsilon = \pm 1$) фокальной поверхности (A_1) относительно нашего тетраэдра напишутся в виде [14]

$$[A_1, A_2 + \varepsilon \sqrt{\alpha} \gamma A_2, (\alpha\beta_1 + 3\varepsilon \sqrt{\alpha} \gamma \beta_2 + \varepsilon \sqrt{\alpha} \gamma \alpha_1 + \alpha\gamma_2) A_2 + 4\varepsilon A_4]. \quad (50)$$

Эти две плоскости пересекаются по прямой, определяемой двумя точками

$$[A_1, (3\beta_2 + \alpha_1) A_3 - (\gamma_2 + \beta_1) A_2 - 4\varepsilon A_4]. \quad (51)$$

Если прямая (51) находится на фокальной плоскости точки A_2 и аналогичная прямая, полученная для гармонической сети фокальной поверхности (A_2) , находится на фокальной плоскости точки A_1 , то эти требования равносильны двум уравнениям первой строки системы (49).

Как известно, уравнение квадрики Ли фокальной поверхности (A_1) конгруэнции (A_1, A_2) напишется в виде ([1], [15])

$$x_2^2 + \alpha\gamma x_3^2 - 2\gamma x_1 x_4 - \frac{\beta_1 + \gamma_2}{2} x_2 x_4 + \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} x_1 x_4 + k x_4^2 = 0, \quad (52)$$

где x_i — координаты текущей точки квадрики относительно нашего тетраэдра, а k — некоторая (нас не интересующая) комбинация коэффициентов высшего порядка. Квадрика Ли второй фокальной поверхности (A_2) получается из (52) посредством перестановки индексов 1 и 2, с прибавлением штрихов к коэффициентам α , β , γ .

Инвариантные уравнения второй строки системы (49) показывают, что прямая (51) и ее аналогичная прямая для поверхности (A_2) являются общими полярно сопряженными прямыми относительно обеих

квадрик Ли фокальных поверхностей конгруэнции $(A_1 A_2)$ [14]. Итак, прямая пересечения соприкасающихся плоскостей гармонических линий каждой фокальной поверхности конгруэнции V_1 находится на фокальной плоскости другого фокуса и эта пара прямых является общей парой полярно сопряженных прямых относительно квадрик Ли фокальных поверхностей.

9. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда пара соответствующих лучей преобразований Π является общей полярно сопряженной парой относительно квадрик Ли фокальных поверхностей конгруэнции $(A_1 A_2)$. Так как для нашего тетраэдра соответствующие лучи преобразований Π совпадают с прямыми $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$, то легко увидеть, что эти две прямые полярно сопряжены относительно квадрики (52) тогда и только тогда, когда выполняются условия $\beta_1 + \gamma_2 = 0$, $\alpha_1 - \beta_2 = 0$. Та же пара прямых полярно сопряжена и относительно квадрики Ли поверхности (A_2) тогда и только тогда, когда выполняются условия $\beta'_2 + \gamma'_1 = 0$, $\alpha'_2 - \beta'_1 = 0$. Таким образом наше требование приведет к четырем уравнениям

$$\beta_1 + \gamma_2 = 0, \quad \alpha_1 - \beta_2 = 0, \quad \beta'_2 + \gamma'_1 = 0, \quad \alpha'_2 - \beta'_1 = 0. \quad (53)$$

Эти уравнения не инвариантны относительно преобразования тетраэдра (A_i) внутри тетраэдров первого порядка [1]. Чтобы в левых частях системы (53) получить инвариантные выражения, продифференцируем по вторичным параметрам уравнения (14)

$$\delta \lambda_1 = \lambda_1 (\bar{\omega}_3^2 - \bar{\omega}_1^4) - 2\bar{\omega}_2^1, \quad \delta \lambda_2 = \lambda_2 (\bar{\omega}_4^2 - \bar{\omega}_2^2) + 2\bar{\omega}_2^2, \quad (54)$$

где δ — символ дифференциала по вторичным параметрам, а $\bar{\omega}_i^j$ — выражения соответствующих ω_i^j при фиксированных главных параметрах. Теперь прямым подсчетом можно убедиться, что уравнения

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_2 - 2\lambda_1 &= 0, & \alpha'_2 - \beta'_1 + 2\lambda_2 &= 0, \\ \gamma_2 + \beta_1 + 2\lambda_2 &= 0, & \gamma'_1 + \beta'_2 - 2\lambda_1 &= 0, \end{aligned} \quad (56)$$

являются инвариантными уравнениями и эквивалентны системе (53).

Исключая из системы (55) λ_1 и λ_2 , получим уравнения второй строки системы (44), что и естественно было ожидать, ибо наше требование является условием задачи Бадаляна [12].

Внося значения λ_1 и λ_2 из системы (55) в уравнение (14), получим

$$2(d \ln \lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3) = (\alpha_1 - \beta_2) \omega_1^3 - (\gamma_2 + \beta_1) \omega_2^4, \quad (56)$$

или в силу системы (4) будем иметь

$$\begin{aligned} 2(d \ln \lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3) &= \Delta x - \Delta \gamma = \\ &= d \ln \frac{x}{\gamma} + 2(\omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\lambda^2 = c \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \left(\text{или } \lambda^2 = c_1 \frac{\gamma'}{\alpha'} \right), \quad (57)$$

где c — произвольная постоянная интегрирования.

Так как конгруэнция $(A_1 A_2)$ порождает (по сопряженным направлениям $\omega_2^4 = \pm \lambda \omega_1^3$) два преобразования Π , то согласно уравнению

$$(57) \text{ можно сказать, что только по направлениям } \omega_2^4 = \pm \int c \frac{\alpha}{\gamma} \omega_1^3$$

оба преобразования Π конгруэнции $(A_1 A_2)$ полярно сопряжены относительно двух квадрик Ли фокальных поверхностей этой конгруэнции. Как следует из выражений (14) и (17), умножение λ на c (c — постоянное) не меняет положения точек (17), т. е. Π преобразования конгруэнции $(A_1 A_2)$ по двум направлениям $\omega_2^4 = \pm \lambda \omega_1^3$ и $\omega_2^4 = \pm c \lambda \omega_1^3$ совпадают друг с другом.

Из этой теоремы следует, что Π преобразования конгруэнции $(A_1 A_2)$ по различным направлениям (57) (для различных постоянных значений c) приведут только к одной паре конгруэнций.

Из уравнения (57) следует, что для $c = 1$ получим линейчатые поверхности, соответствующие гармонической сети (41) первой фокальной поверхности, для $c = -1$ — линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям той же фокальной поверхности, для $c = (\varepsilon + \varepsilon_1 \sqrt{2})^2$ ($\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$) — линейчатые поверхности G_1 и т. д. В работе [9] нами было получено бесконечно много линейчатых поверхностей G_i конгруэнции $(A_1 A_2)$, обладающих известными геометрическими свойствами. Все эти линейчатые поверхности G_i получаются из (57) подходящим выбором постоянного.

Все линейчатые поверхности $\omega_2^4 = \lambda \omega_1^3$, где λ удовлетворяет уравнению (57), связаны с дифференциальной окрестностью второго порядка луча конгруэнции $(A_1 A_2)$. В дальнейшем мы их назовем *линейчатыми поверхностями окрестности второго порядка* луча конгруэнции.

Таким образом, все преобразования Π данной конгруэнции по различным линейчатым поверхностям окрестности второго порядка приводят только к одной паре конгруэнций.

Пара соответствующих лучей двух конгруэнций преобразования Π полярно сопряжена относительно обеих квадрик Ли фокальных поверхностей исходной конгруэнции тогда и только тогда, когда это преобразование осуществляется по направлению линейчатых поверхностей окрестности второго порядка.

Ս. Ե. Կարապետյան

ԿՈՆԳՐՈՒԵՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[3] աշխատության մեջ ներմտված է հիպերկվադրիկալի համալուծ րազմաձևությունների դադարաբեր P_3 -ում: Այդ րազմաձևությունների օգնությամբ այս աշխատությունում ստացվել են կոնգրուենցիալի նոր ձևափոխություններ, այսինքն՝ նոր երկու կոնգրուենցիաներ, որոնք ստացվում են տրբված կոնգրուենցիալից իրար համալուծ երկու դժավոր մակերևույթների ընտանիքների ուղղությամբ: Նոր կոնգրուենցիաների ճառագայթներն անցնում են հին կոնգրուենցիալի մի ֆոկալում և զտնվում են մյուս ֆոկալ հարթության վրա: Եթե այդ ձևափոխությունները նշանակենք Π գույքով, ապա ստացվում են հետևյալ հիմնական թեորեմները՝

1. Միայն W կոնգրուենցիան է թույլ տալիս արևայիսի Π գույք, որի կոնգրուենցիալից լուրարանչյուրը համալուծ է մի ֆոկալ մակերևույթի, և եթե Π գույքի կոնգրուենցիաներից մեկը (ստացացած W կոնգրուենցիալից) համալուծ է W կոնգրուենցիալի ֆոկալ մակերևույթներից մեկին, ապա մյուսը համալուծ է մյուս ֆոկալ մակերևույթին:

2. Եթե Π գույքի կոնգրուենցիաներից մեկը համալուծ է նախկին կոնգրուենցիալի ֆոկալ մակերևույթներից մեկին և հարմոնիկ մյուսին, ապա նախկին կոնգրուենցիան W է, հակառակը ես ճիշտ է:

Աշխատության մեջ ստացված է կոնգրուենցիալի նոր դաս (V_1), որը բնութագրվում է հետևյալ թեորեմով՝

3. V_1 կոնգրուենցիաները և միայն նրանք են թույլ տալիս արևայիսի Π գույք, որի փոփոգ մակերևույթները հարում են նախորդ կոնգրուենցիալի ֆոկալ մակերևույթներին վերջինների ասիմպտոտական դեկալի:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. Гостехиздат, М., 1956.
3. Карапетян С. Е. Сопряженные многообразия и их приложение. „ДАН СССР“.
4. Норден А. П. Пространства аффинной связности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. Шербаков Р. И. Проективная теория репера линейчатой поверхности конгруэнции. „Мат. сборник“, 46 (88), вып. 2, 1958.
7. Карапетян С. Е. Конфигурация L. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, 13, № 2, 1960.
8. Карапетян С. Е. Поверхности второго порядка Ли для линейчатых поверхностей конгруэнций. „ДАН СССР“, 117, № 2, 1957.
9. Карапетян С. Е. Гармонические кватрики и некоторые линейчатые поверхности конгруэнций. „ДАН СССР“, 122, № 3, 1958.
10. Карапетян С. Е. Конфигурация θ Попова. „Сб. научных трудов Арм. ПИ“, № 5, 1955.
11. Карапетян С. Е. Замкнутый цикл четырех конгруэнций. „Мат. сборник“, 41 (83), вып. 2, 1957.

12. Бадалян В. Х. Геометрическая характеристика конгруэнции с постоянным инвариантом Вельша. „ДАН СССР“, **33**, 1941.
13. Карапетян С. Е. Две конгруэнции с общими инвариантами F и F' . „Научные доклады ВШ“, физ.-мат., № 2, 1958.
14. Карапетян С. Е. Геометрическое значение некоторых инвариантов конгруэнций. „Научные доклады ВШ“, физ.-мат., № 1, 1958.
15. Васильев А. М. Об одном классе конгруэнций W . „Ученые записки МГУ“, серия матем., **7**, 1954.



ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях трансверсально-изотропной сферической оболочки

1. Рассмотрим тонкую сферическую оболочку толщиной h , изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Принимаем, что плоскости изотропии в каждой точке параллельны срединной поверхности оболочки.

За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки (сферическую поверхность радиуса R), которая отнесена к географическим координатам α и β (α —угол долготы, β —угол широты). Пусть γ предстает расстояние по нормали от точки (α, β) срединной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки, причем положительное направление γ совпадает с внешней нормалью срединной поверхности.

В основу настоящей работы кладется предложенная С. А. Амбарцумяном [1] общая теория анизотропных оболочек, которая опирается на следующие гипотезы:

- а) нормальный к срединной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины;
- б) нормальное напряжение σ_r пренебрегается по сравнению с прочими напряжениями;
- в) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \varphi(\alpha, \beta), \quad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \psi(\alpha, \beta), \quad (1.1)$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ —неизвестные функции координат α , β .

Эта теория дает возможность учитывать влияние поперечных сдвигов на напряженное и деформированное состояние оболочек. Она, как указывается в работе [2], улавливает главную часть поправки к классической теории.

Пользуясь выражениями для напряжений σ_α , σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$, данными в работе [1], а также известными формулами [3], для определения тангенциальных сил (T_1 , T_2 , S_1 , S_2), моментов (M_1 , M_2 , M_{12} , M_{21}) и перерезывающих сил (N_1 , N_2) получим*:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + T_1^*, \quad N_1 = \frac{h^3}{12} \varphi,$$

* В настоящей статье пренебрегаем величинами порядка h^2/R^2 по сравнению с единицей.

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + T_2^*, \quad N_2 = \frac{h^3}{12} \psi,$$

$$S_1 = S_2 = S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \omega + S^*, \quad (1.2)$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 + \frac{1}{R} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) \right] + M_1^*,$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[\mu \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{R} (\mu \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] + M_2^*,$$

$$M_{12} = M_{21} = H = \frac{Eh^3}{24(1+\mu)} \left(\tau + \frac{\omega}{R} \right) + H^*,$$

где

$$\begin{aligned} M_1^* &= \frac{16R}{9} T_1^* = \frac{Eh^5}{120(1-\mu^2)G'} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\mu}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \varphi + \frac{\mu}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right); \\ M_2^* &= \frac{16R}{9} T_2^* = \frac{Eh^5}{120(1-\mu^2)G'} \left(\frac{\mu}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \varphi + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right); \\ H^* &= \frac{16R}{9} S^* = \frac{Eh^5}{240(1+\mu)G'} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\varphi}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi}{B} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\omega}{R},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\omega}{R},$$

$$\omega = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right),$$

(1.4)

$$\varepsilon_1 = - \left[\frac{\omega}{R^2} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right],$$

$$\varepsilon_2 = - \left[\frac{\omega}{R^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right],$$

$$\tau = - \frac{2}{AB} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right);$$

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к плоскости изотропии; u, v — тангенциальные и ω — нормальное перемещения точек срединной поверхности; $A = R, B = R \sin \alpha$ — коэффициенты первой квадратичной формы.

Внутренние силы и моменты (1.2) должны удовлетворять следую-

щим дифференциальным уравнениям равновесия [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (BT_1) - T_z \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (AS) + \frac{AB}{R} N_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (BS) + S \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (AT_z) + \frac{AB}{R} N_2 &= 0, \\ -\frac{1}{R} (T_1 + T_z) + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (AN_2) \right] + Z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (BM_1) - M_z \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (AH) - ABN_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (BH) + H \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (AM_z) - ABN_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь предполагается, что тангенциальные составляющие поверхностной нагрузки равны нулю; Z — нормальная составляющая поверхностной нагрузки.

Отметим, что при рассмотрении задачи статической устойчивости, а также задач динамической устойчивости и колебаний (в случае пренебрежения тангенциальными силами инерции) замкнутой сферической оболочки под действием равномерной нормальной нагрузки, достаточно иметь одно разрешающее уравнение относительно прогиба w .

Приведем ход получения указанного разрешающего уравнения.

Из (1.7) в силу (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{h^2}{12R^3} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} \frac{1}{AB} L_1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta + 2) w \right] + (1 - \nu) \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} \frac{1}{AB} L_2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{h^2}{12R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{12R^4} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w + \\ + \frac{1 - \nu^2}{Eh} Z = - \frac{1 - \nu^2}{Eh} L_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (Bu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (Av) \right] + \frac{2w}{R}, \\ \chi = \frac{1}{2AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (Bv) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (Au) \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\Delta = \frac{R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right];$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left[B \left(T_1^* + \frac{M_1^*}{R} \right) \right] - \left(T_2^* + \frac{M_2^*}{R} \right) \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(S^* + \frac{H^*}{R} \right) \right],$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[B \left(S^* + \frac{H^*}{R} \right) \right] + \left(S^* + \frac{H^*}{R} \right) \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(T_2^* + \frac{M_2^*}{R} \right) \right],$$

$$L_3 = -\frac{1}{R} (T_1^* + T_2^*) + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (BM_1^*) - M_2^* \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (AH^*) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (BH^*) + H^* \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_2^*) \right] \right\}. \quad (1.10)$$

Исключив χ из уравнений (1.6) и (1.7), получим

$$(\Delta + 1 - \mu) \theta - \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{12R^2} \Delta + 1 - \mu \right) (\Delta + 2) \omega =$$

$$= -\frac{1 - \mu^2}{Eh} \frac{R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L_1}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{L_2}{B} \right) \right]. \quad (1.11)$$

Пользуясь (1.3), для выражений, стоящих в правых частях уравнений (1.8) и (1.11), получим

$$\frac{R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L_1}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{L_2}{B} \right) \right] =$$

$$= \frac{5h^5 E}{384R(1-\mu^2)G'} (\Delta + 1 - \mu) \left\{ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B\varphi) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\psi) \right] \right\},$$

$$L_3 = -\frac{3h^5 E}{640R^2(1-\mu)G'} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B\varphi) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\psi) \right] +$$

$$+ \frac{h^5 E}{120R^2(1-\mu^2)G'} (\Delta + 1 - \mu) \left\{ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B\varphi) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\psi) \right] \right\}. \quad (1.12)$$

Третье уравнение системы (1.5) с учетом (1.2) и (1.9) (пренебрегая членами порядка h^2/R^2 по сравнению с единицей) приводится к виду

$$\frac{h^3}{12} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B\varphi) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\psi) \right] = -Z + \frac{Eh}{R(1-\mu)} \theta. \quad (1.13)$$

Уравнения (1.11) и (1.8), в силу (1.12) и (1.13), принимают вид

$$(\Delta + 1 - \mu) \theta - \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{12R^2} \Delta + 1 - \mu \right) (\Delta + 2) \omega =$$

$$= \frac{5h}{32RG'} (\Delta + 1 - \mu) Z, \quad (1.14)$$

$$\left\{ \frac{1+\mu}{R} - \frac{h^2}{12R^3} \left[1 + \frac{6E}{5(1-\mu)G'} \right] \Delta \right\} \theta + \frac{h^2}{12R^3} (\Delta + 1 - \mu) (\Delta + 2) w =$$

$$= \frac{1-\mu^2}{Eh} \left[1 - \frac{Eh^2}{10R^2(1-\mu^2)G'} \Delta \right] Z.$$

Исключив θ из этих уравнений, окончательно получим следующее уравнение относительно w

$$[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - k\Delta] (\Delta + 2) w =$$

$$= \frac{R^2}{Eh} (1 - k\Delta) (\Delta + 1 - \mu) Z, \quad (1.15)$$

где

$$c^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)R^2}, \quad k = \frac{Eh^2}{10(1-\mu^2)R^2G'}. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.15) является исходным уравнением при рассмотрении задач устойчивости и колебаний замкнутой сферической оболочки.

2. Пусть замкнутая сферическая оболочка находится под действием равномерно распределенного по поверхности нормального внешнего давления $q = \text{const}$.

Учитывая, что оболочка до потери устойчивости находится в безмоментном напряженном состоянии, уравнение статической устойчивости получим, если в (1.15) примем [3]

$$Z = -\frac{q}{2R} (\Delta + 2) w, \quad (2.1)$$

где Δ — безразмерный обобщенный оператор Лапласа, определяемый на сфере в произвольных ортогональных координатах формулой (1.9), а в принятых здесь географических координатах имеющий вид

$$\Delta = \frac{1}{\sin \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right]. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (1.15), получим

$$[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - k\Delta] (\Delta + 2) w +$$

$$+ \frac{qR}{2Eh} (1 - k\Delta) (\Delta + 1 - \mu) (\Delta + 2) w = 0. \quad (2.3)$$

Следуя В. З. Власову [3], положим в этом уравнении

$$\Delta w = -\lambda w. \quad (2.4)$$

Тогда для характеристического числа λ получим следующее урав-

нение

$$[c^2(1-\lambda)^2 + 1 + k\lambda + \frac{qR}{2Eh}(1+k\lambda)(1-\mu-\lambda)](2-\lambda) = 0. \quad (2.5)$$

Отбрасывая тривиальное решение $\lambda=2$, получим

$$c^2(1-\lambda)^2 + 1 + k\lambda - \frac{qR}{2Eh}(1+k\lambda)(\lambda-1+\mu) = 0. \quad (2.6)$$

Отсюда критическая сила через параметр λ выразится следующим образом

$$q^* = \frac{2Eh}{R} \frac{c^2(\lambda-1)^2 + 1 + k\lambda}{(1+k\lambda)(\lambda-1+\mu)}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) наименьшее значение критической нагрузки будет

$$q_{\min}^* = \frac{2Eh}{R} \frac{2c - 2\mu c^2 + 3k}{1 + 2k/c}, \quad (2.8)$$

которое можно представить еще в следующем виде

$$q_{\min}^* = \frac{2Eh}{R} (2c - 2\mu c^2 - k). \quad (2.9)$$

В полученных формулах коэффициент k (1.16) дает поправку к классической теории оболочек. Этой поправкой и учитывается влияние поперечных сдвигов.

В (2.8) или (2.9) полагая $k=0$, получим формулу В. З. Власова

$$q_{\min}^* = \frac{2Eh}{R(1-\mu^2)} \left[\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} \frac{h}{R} - \frac{\mu h^2}{6R^2} \right]. \quad (2.10)$$

Из полученных формул, как и в случае пластинок [4], замечаем, что при увеличении коэффициента k увеличивается расхождение между найденной критической силой и критической силой, вычисленной по классической теории оболочек ($k=0$).

3. При рассмотрении свободных колебаний ненагруженной сферической оболочки пренебрегаем тангенциальными силами инерции. Тогда уравнение свободных колебаний ненагруженной сферической оболочки получим, если в (1.15) примем

$$Z = -\frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где γ_0 — удельный вес материала оболочки; g — ускорение силы тяжести.

Подставляя (3.1) в (1.15), получим

$$[c^2(\Delta+1)^2 + 1 - k\Delta](\Delta+2)w + \frac{\gamma_0 R^2}{gE}(1-k\Delta)(\Delta+1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2)$$

Принимая

$$w(\alpha, \beta, t) = W(\alpha, \beta) \sin \omega t$$

и подставляя в (3.2), получим

$$[c^2(\Delta+1)^2+1-k\Delta](\Delta+2)W - \\ - \sigma^2 \frac{\gamma_0 R^2}{gE} (1-k\Delta)(\Delta+1-\mu)W = 0. \quad (3.3)$$

Нахождение общего решения уравнения (3.3) весьма затруднительно. Поэтому ограничимся классом решений, являющихся решениями (собственными функциями) следующего дифференциального уравнения

$$\Delta W + \lambda W = 0 \quad (3.4)$$

удовлетворяющих граничным условиям для w — условиям непрерывности и однозначности на сфере.

Из (3.3), учитывая (3.4), для частот собственных колебаний получим

$$\sigma^2 = \frac{gE}{\gamma_0 R^2} (\lambda - 2) \frac{c^2(\lambda - 1)^2 + 1 + k\lambda}{(1 + k\lambda)(\lambda - 1 + \mu)}. \quad (3.5)$$

Как известно [5], решения уравнения (3.4) на сферической поверхности выражаются через сферические функции. Для того, чтобы эти решения были непрерывными и однозначными на сфере, необходимо и достаточно, чтобы параметр λ принимал значения

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.6)$$

представляющие собой собственные значения уравнения (3.4) при указанных граничных условиях.

Общий вид сферической функции порядка n , являющейся решением уравнения (3.4) и удовлетворяющей вышеуказанным граничным условиям, есть

$$W_n(\alpha, \beta) = b_n P_n(\cos \alpha) + \sum_{m=1}^n (b_m \cos m\beta - c_m \sin m\beta) P_{n,m}(\cos \alpha),$$

где b, c — некоторые постоянные; $P_n(x)$ — полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n];$$

$P_{n,m}(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра

$$\bar{P}_{n,m}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}}{n! 2^n} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^n].$$

Как известно, $\sin n\beta$ и $\cos n\beta$ обращаются в нуль на $2n$ меридианах, а $P_{n,m}(\cos \alpha)$ (в интервале $0 \leq \alpha \leq \pi$) — на $n - m$ широтах. Следовательно, этими меридианами и широтами (узловыми линиями) сфера разбивается на участки, внутри которых $W_n(\alpha, \beta)$ (тем самым и про-

гиб w) сохраняет постоянный знак. Это значит, что параметр λ (3.6) определяет вид формы колебаний.

В (3.5) полагая $k = 0$, получим собственные частоты рассматриваемой оболочки, вычисленные по классической теории оболочек.

4. Пусть внешнее нормальное давление, равномерно распределенное по поверхности замкнутой сферической оболочки, меняется периодически во времени

$$q = q_0 + q_1 \cos \theta t. \quad (4.1)$$

При рассмотрении вопроса динамической устойчивости рассматриваемой оболочки, как и в пункте [3], пренебрегаем тангенциальными силами инерции, а также предполагаем, что оболочка до потери устойчивости находится в безмоментном напряженном состоянии.

В силу сказанного, уравнение динамической устойчивости получим, если в (1.15) примем

$$Z = -\frac{q}{2R} (\Delta + 2) w - \frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (1.15), получим

$$[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - k\Delta] (\Delta + 2) w + \frac{R^2}{Eh} (1 - k\Delta) (\Delta + 1 - \mu) \left[\frac{q}{2R} (\Delta + 2) + \frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w = 0. \quad (4.3)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$w(\alpha, \beta, t) = T(t) W(\alpha, \beta), \quad (4.4)$$

где $T(t)$ — неизвестная функция времени, а $W(\alpha, \beta)$ является решением уравнения (3.4), удовлетворяющим граничным условиям для w — условиям непрерывности и однозначности на сфере.

Подставляя (4.4) в (4.3), при этом учитывая (3.4), (2.7), (3.5) и (4.1), относительно $T(t)$ получим следующее уравнение

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega^2 \left(1 - \frac{q_0 + q_1 \cos \theta t}{q^*} \right) T = 0. \quad (4.5)$$

Это уравнение перепишем в виде

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\gamma \cos \theta t) T = 0, \quad (4.6)$$

где

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - q_0/q^*}, \quad \gamma = \frac{q_1}{2(q^* - q_0)}. \quad (4.7)$$

Здесь Ω — частоты собственных колебаний рассматриваемой сферической оболочки, нагруженной постоянной составляющей внешнего

нормального давления (q_0).

Уравнение (4.6) представляет собой известное уравнение Матье, которое при некоторых соотношениях между его коэффициентами (в данном случае Ω , τ_1) имеет неограниченно возрастающие решения. Этим решениям будут соответствовать области динамической неустойчивости рассматриваемой оболочки.

Границы первых трех областей динамической неустойчивости могут быть определены по следующим приближенным формулам [6]:

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \tau_1} \quad (4.8)$$

для первой (главной) области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \tau_1^2} = \quad (4.9)$$

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2\tau_1^2}$$

для второй области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{9\tau_1^2}{8 \pm 9\tau_1}} \quad (4.10)$$

для третьей области неустойчивости.

Здесь θ^* — критические частоты внешней нагрузки, т. е. частоты внешней нагрузки, соответствующие границам областей неустойчивости.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступила 4 IV 1960

Ա. Ա. Խաչատրյան

ԳՆԴԱՅԻՆ ՏՐԱՆՍԿԵՐՍԱԼ-ԻՉՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են տրանսկերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված միակ զնդային թաղանթի տատանումների և տատակ ու դինամիկ կայունության խնդիրները:

Հետադոտության հիմքում ընկած են Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջադրված [1] հետևյալ հիպոթեզները՝

ա) թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ զծային էլեմենտը դեֆոր-

մացիայից հետո չի փոխում իր երկարությունը.

բ) թաղանթի միջին մակերևույթին զուգահեռ հարթակներում գործող σ_{τ} նորմալ լարումներն արհամարհվում են մյուս լարումների նկատմամբ.

գ) $\sigma_{\alpha\tau}$ և $\sigma_{\beta\tau}$ շոշափող լարումներն ըստ թաղանթի հաստության փոփոխում են պարարտական օրենքով (1.1):

Տվյալ տեսությունը հնարավորություն է տալիս հաշվի առնելու լայնական սահքերի ազդեցությունը թաղանթների լարվածային և դեֆորմացիոն վիճակի վրա:

Այս գրվածքով ստացված է ճկվածքի համար մի հավասարում (1.15), որը երկհետային հավասարում է հանդիսանում տատանումների և կալանության խնդիրներն առումնասիրելիս:

Էռված են հետևյալ խնդիրները՝ ա) ստատիկ կալանության խնդիրը, երբ գիտարկվող թաղանթը գտնվում է մակերևույթով հավասարաչափ բաշխված արտաքին ճնշման տակ, բ) գինամիկ կալանության խնդիրը, երբ վերոհիշյալ ուժի ժամանակի րնթացքում փոփոխվում է պարբերաբար (կոսինուսի օրենքով), գ) չրոնափոխված թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը: Այս վերջին երկու խնդիրները լուծելիս հաշվի են առնված միայն միջին մակերևույթի նորմալի ուղղությամբ գործող իներցիոն ուժերը:

Ստացված են բանաձևեր՝ կրիտիկական ուժի, սեփական տատանումների հաճախականության և գինամիկական անկալունությունից տիրույթների համար:

Ստացված արդյունքները տարրերվում են թաղանթների կլասիկ տեսությունով ստացվող համապատասխան արդյունքներից և գործակցի առկայությամբ, որի մեծացման հետ մեծանում է նաև այդ տարրերությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, **22**, 2, 1958.
2. Муштари Х. М., Терезулов И. Г. Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины. Известия АН СССР, ОТН, **6**, 1959.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластин, ДАН Арм.ССР, **29**, 4, 1959.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. Гостехиздат, 1950.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат 1956.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

У Жуй-фын

Температурные напряжения в арочных плотинах
с учетом ползучести бетона

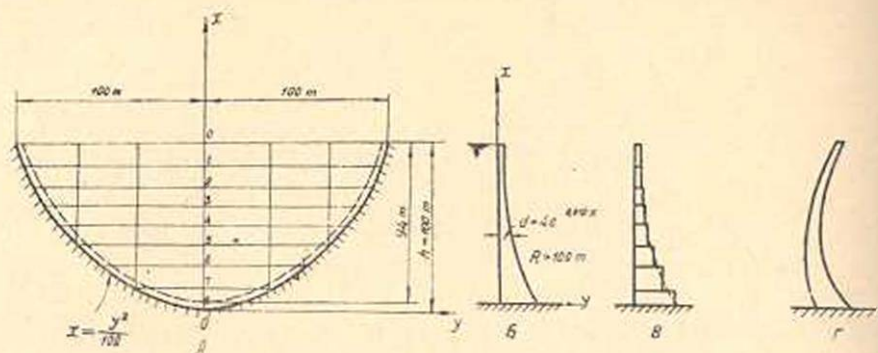
Метод расчета арочных плотин, когда последние рассматриваются как пространственные системы, за последнее время получает все более интенсивное развитие. Основы этого метода были разработаны и в дальнейшем усовершенствованы в работах [1—3]. Сущность этого метода заключается в следующем: арочную плотину разбиваем на систему горизонтальных арок и вертикальных консолей и рассматриваем их совместную работу. Это позволяет учесть влияние главных факторов, а именно: радиальные усилия и крутящие моменты, а также податливость упругого основания. При расчете арочных плотин по этому методу материал его, т. е. бетон, рассматривается как идеально-упругий. Однако, на основании данных многочисленных экспериментальных исследований установлено, что бетон обладает свойством ползучести, которое проявляется даже при малых напряжениях и нормальных температурах. При этом, как показывают опыты, деформации ползучести, развивающиеся в бетоне, могут внести существенное изменение в картину напряженного состояния сооружений.

В настоящей работе, на основании метода развитого в работах [1, 2] и линейной теории ползучести Маслова-Арутюняна [4], дается способ расчета температурных напряжений в арочных плотинах с учетом ползучести бетона.

§ 1. Постановка задачи

Арочная плотина рассматривается как система взаимно-поддерживающих горизонтальных арок и вертикальных консолей. В точках пересечения арок и консолей обеспечиваются условия совместности радиальных деформаций и углов поворота (фиг. 1).

При определении температурных напряжений в теле плотины учитываем только горизонтальные деформации, обусловленные изменением температуры. Предполагается, что напряжения, обусловленные вертикальными температурными деформациями, ничтожны и ими можно пренебречь. Далее, принимая гипотезу плоских сечений, предполагаем, что функция температуры зависит только от толщины плотины.



Фиг. 1.

тины. Тогда для рассматриваемой консоли можно записать связь между деформациями и напряжениями с учетом ползучести в следующем виде

$$y W''(t, x) - \alpha T(y) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \frac{1}{E(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (a)$$

где

$$K(t, \tau) = E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} \right],$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести, $E(t)$ — модуль упругости, α — коэффициент линейного расширения, $W(t, x)$ — прогиб.

Решая (a) относительно $\sigma(t)$, находим

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & [E(t) y W''(t, x) - E(t) \alpha T(y)] + \\ & + \int_{\tau_1}^t [E(\tau) y W''(\tau, x) - E(\tau) \alpha T(y)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Подставляя значение $\sigma(t)$ в уравнение равновесия

$$M = \int_{\omega} \sigma y d\omega,$$

где ω — площадь поперечного сечения консоли, получаем

$$\begin{aligned} M(t) = & E(t) I W''(t, x) - Q(t) + \\ & + \int_{\tau_1}^t [E(\tau) I W''(\tau, x) - Q(\tau)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (b)$$

или

$$E(t) I W''(t, x) - Q(t) = M(t) -$$

* Здесь и в дальнейшем штрихами обозначаются производные по x .

$$-\int_{\tau_1}^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (r)$$

где

$$\Omega(t) = E(t) \alpha \int_{\omega} T(y) y d\omega, \quad I = \int_{\omega} y^2 d\omega.$$

Если температура по высоте консоли не меняется, то имеем следующие соотношения

$$M'(t, x) = E(t) [I W''(t, x)]' + \\ + \int_{\tau_1}^t E(\tau) [I W''(\tau, x)]' R(t, \tau) d\tau = Q(t)$$

$$M''(t, x) = Q'(t) = q(t) = E(t) [I W'''(t, x)]'' + \\ + \int_{\tau_1}^t [E(\tau) I W'''(\tau, x)]'' R(t, \tau) d\tau$$

или

$$[E(t) I W'''(t, x)]'' = q(t) - \int_{\tau_1}^t q(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (d)$$

Так как арочная плотина подвергается только температурному воздействию, то взаимные действия между аркой и консолью можно выразить следующим образом

$$q_{\text{конс.}} = -q_{\text{арка}},$$

а

$$q_{\text{арка}} = -g_1(t, x) [W(t, x) - W_T(x)] + [g_2(t, x) W'(t, x)]', \quad (e)$$

где W_T — радиальное перемещение арки в месте рассматриваемой консоли от действия изменения температуры T , $g_1(t, x)$ — интенсивность равномерно распределенной радиальной нагрузки, вызывающей единичное перемещение в рассматриваемой точке арки, $g_2(t, x)$ — интенсивность равномерно распределенного крутящего момента, вызывающего единичный угол поворота рассматриваемого сечения вокруг оси арки.

Второй член в выражении (e) учитывает влияние кручения между аркой и консолью.

Таким образом, для определения прогиба консоли от воздействия температуры и сопротивления арок, получаем следующее интегродифференциальное уравнение

$$[E(t) I W'''(t, x)]'' = g_1(t, x) W_T(t, x) -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t g_1(\tau, x) W_\tau(\tau, x) K(t, \tau) d\tau - \\
& - g_1(t, x) W(t, x) - [g_2(t, x) W'(t, x)]' + \\
& + \int_0^t [g_1(\tau, x) W(\tau, x) + [g_2(\tau, x) W'(\tau, x)]'] K(t, \tau) d\tau. \quad (1)
\end{aligned}$$

§ 2. Решение уравнения (1)

Для решения уравнения (1) будем пользоваться методом Б. Г. Галеркина. Вначале рассмотрим несколько случаев стационарного потока тепла.

1°. Консоль постоянного сечения с жесткой заделкой.

В этом случае радиальное перемещение арки не зависит от x , y , а зависит только от t — $W_\tau = W(t)$, а $g_1(t)$, $g_2(t)$ вдоль высоты h консоли не меняются.

Будем искать $W(t, x)$ в виде ряда

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \varphi_n(x), \quad (2)$$

где $T_n(t)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению в дальнейшем, $\varphi_n(x)$ — фундаментальная балочная функция, представляемая в виде

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{\alpha_n x}{h} - \frac{\alpha_n x}{h} \sin \frac{\alpha_n x}{h} - \beta_n \left(\cos \frac{\alpha_n x}{h} - \frac{\alpha_n x}{h} \right). \quad (3)$$

$$\beta_n = \frac{\sin \alpha_n + \alpha_n \cos \alpha_n}{\alpha_n^2 + \cos \alpha_n}, \quad \alpha_1 = 1.875,$$

$$\alpha_2 = 4.694, \dots, \quad \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}. \quad (4)$$

Функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет всем граничным условиям:

$$\text{при } x=0 \quad W=W'=0,$$

$$\text{при } x=h \quad W''=W'''=0.$$

Подставляя (2) в уравнение (1), умножим обе части на $\varphi_n(x) dx$ и, интегрируя от 0 до h , получаем следующие интегральные уравнения для определения $T_n(t)$

$$T_n(t) \left\{ [E(t) I \alpha_n^4 + g_1(t)] \int_0^h \varphi_n^2(x) dx + g_2(t) \int_0^h \varphi_n'(x) \varphi_n(x) dx \right\} =$$

$$= \left[W_T(t) g_1(t) - \int_{\tau_1}^t W_T(\tau) g_1(\tau) K(t, \tau) d\tau \right] \int_0^h \varphi_n(x) dx + \\ + \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^h [g_1(\tau) \varphi_n^2(x) + g_2(\tau) \varphi_n'(x) \varphi_n(x)] dx \right\} T_n(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Уравнение (5) является линейным интегральным уравнением типа Вольтерра, которое нетрудно решается численным методом.

2. Консоль переменного сечения с жесткой заделкой.

Для первого приближения получаем

$$T_1(t) \left\{ E(t) \varphi_1^4 \int_0^h \varphi_1^2(x) l(x) dx + 2E(t) \int_0^h \varphi_1'''(x) \varphi_1(x) l'(x) dx + \right. \\ + E(t) \int_0^h l''(x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx + \int_0^h g_2(t, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx + \\ \left. + \int_0^h g_2'(t, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx + \int_0^h g_1(t, x) \varphi_1^2(x) dx \right\} = \\ = \int_0^h [W_T(t) g_1(t, x) - \int_{\tau_1}^t W_T(\tau) g_1(\tau, x) K(t, \tau) d\tau] \varphi_1(x) dx + \\ + \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^h [g_1(\tau, x) \varphi_1^2(x) + g_2(\tau, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) + \right. \\ \left. + g_2'(\tau, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x)] dx \right\} T_1(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (6)$$

и

$$W_1 = T_1(t) \varphi_1(x).$$

Для второго приближения получим систему двух интегральных уравнений, которая в общем случае решается только численным методом.

При решении конкретной задачи при помощи уравнения (6), можно функции g_1 , g_2 и l , с достаточной для практического приложения точностью, аппроксимировать простыми функциями вида $Ae^{-\lambda x}$.

3. Консоль постоянного сечения с упругой заделкой.

В этом случае у основания консоли изгибающий момент M и перерезывающая сила Q будут равны

$$\left. \begin{aligned} M(0) &= \int_0^h [g_1(t) W_T(t) - g_1(t) W(t, x) - g_2(t) W''(t, x)] x dx, \\ Q(0) &= \int_0^h [g_1(t) W_T(t) - g_1(t) W(t, x) - g_2(t) W''(t, x)] dx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя (2) в (7), получаем

$$\begin{aligned} M(t, 0) &= \frac{h^2}{2} g_1(t) W_T(t) - g_1(t) \left[W(t, 0) \cdot \frac{h^2}{2} + W'(t, 0) \frac{h^3}{3} \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [g_1(t) A_n + g_2(t) B_n], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Q(t, 0) &= h g_1(t) W_T(t) - g_1(t) \left[W(t, 0) h + W'(t, 0) \frac{h^2}{2} \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [g_1(t) C_n + g_2(t) D_n], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^h \varphi_n(x) x dx, & B_n &= \int_0^h \varphi_n'(x) x dx, \\ C_n &= \int_0^h \varphi_n(x) dx, & D_n &= \int_0^h \varphi_n'(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, следуя гипотезе Фогта, имеем

$$\begin{aligned} W(t, 0) &= \frac{k_5 M(t, 0)}{E_\Phi d} + \frac{k_3 Q(t, 0)}{E_\Phi}, \\ W'(t, 0) &= -\frac{k_1 M(t, 0)}{E_\Phi d^2} + \frac{k_5 Q(t, 0)}{E_\Phi d}, \end{aligned} \quad (11)$$

где k_1, k_3, k_5 — коэффициенты основания, E_Φ — модуль упругости основания, d — толщина консоли в месте заделки.

Из уравнений (8), (9) и (11) находим

$$\left. \begin{aligned} W(t, 0) &= b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \gamma_n, \\ W'(t, 0) &= b_2 - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \lambda_n, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_5 + a_2 a_6}{a_1 a_5 + a_2 a_4}, \quad b_2 = \frac{a_3 a_4 - a_1 a_6}{a_1 a_5 + a_2 a_4}$$

$$a_1 = 1 + \left(\frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_3}{E_\phi} h \right) g_1(t),$$

$$a_2 = \left(\frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{3} + \frac{k_3}{E_\phi} \cdot \frac{h^2}{2} \right) g_1(t),$$

$$a_3 = \left(\frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_3}{E_\phi} h \right) g_1(t) W_T(t),$$

$$a_4 = \left(\frac{k_1}{E_\phi d^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_5 h}{E_\phi d} \right) g_1(t),$$

$$a_5 = 1 - \left(\frac{k_1}{E_\phi d^2} \cdot \frac{h^2}{3} + \frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{2} \right) g_1(t),$$

$$a_6 = \left(\frac{k_1}{E_\phi d^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_5 h}{E_\phi d} \right) g_1(t) W_T(t),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{a_1 a_5 + a_2 a_4} \left\{ \left\{ a_5 \left[\frac{k_5}{E_\phi d} |g_1(t) A_n + g_2(t) B_n| + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_3}{E_\phi} [g_1(t) C_n + g_2(t) D_n] \right\} + a_2 \left[\frac{k_1}{E_\phi d^2} [g_1(t) A_n + g_2(t) B_n] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_5}{E_\phi} |g_1(t) C_n + g_2(t) D_n| \right\} \right\},$$

$$\lambda_n = \frac{1}{a_1 a_5 + a_2 a_4} \left\{ \left\{ a_4 \left[\frac{k_5}{E_\phi d} |g_1(t) A_n + g_2(t) B_n| + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_3}{E_\phi} [g_1(t) C_n + g_2(t) D_n] \right\} - \right. \\ \left. - a_1 \left[\frac{k_1}{E_\phi d^2} [g_1(t) A_n + g_2(t) B_n] + \frac{k_5}{E_\phi d} [g_1(t) C_n + g_2(t) D_n] \right] \right\}.$$

Тогда выражение (2) принимает следующий вид

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [\varphi_n(x) - \gamma_n - \lambda_n x] + b_1 + b_2 x, \quad (13)$$

которое удовлетворяет всем граничным условиям.

В первом приближении для определения $T_1(t)$ получаем интегральное уравнение

$$T_1(t) [x_1^4 E(t) I f_1(t) + g_1(t) f_2(t) + g_2(t) f_3(t)] = \\ = \int_0^h [W_T(t) g_1(t) - \int_0^t W_T(\tau) g_1(\tau) K(t, \tau) d\tau] [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx +$$

$$+ \int_0^t [g_1(\tau) \dot{f}_2(\tau) + g_2(\tau) \dot{f}_3(\tau)] T_1(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$\dot{f}_1(t) = \int_0^h \varphi_1(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx,$$

$$\dot{f}_1(t) = \int_0^h ([\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] + b_1 + b_2 x) [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx,$$

$$\dot{f}_2(t) = \int_0^h |\varphi_1^*(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx|.$$

4°. Консоль переменного сечения с упругой заделкой.

Здесь, подобно случаю 3, различие заключается только в том, что в данном случае g_1 , g_2 и W_T зависит как от x , так и от t , а l зависит от x . При этом имеем

$$\left. \begin{aligned} W(t, 0) &= b_1^* - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \gamma_n^*, \\ W'(t, 0) &= b_2^* - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \lambda_n^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [\varphi_n(x) - \gamma_n^* - \lambda_n^* x] + b_1^* + b_2^* x, \quad (16)$$

где

$$b_1^* = \frac{a_3^* a_5^* + a_2^* a_6^*}{a_1^* a_5^* + a_2^* a_4^*}, \quad b_2^* = \frac{a_3^* a_1^* - a_1^* a_6^*}{a_1^* a_5^* + a_2^* a_4^*},$$

$$a_1^* = 1 + \frac{k_5}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) x dx + \frac{k_3}{E_\Phi} \int_0^h g_1(t, x) dx,$$

$$a_2^* = \frac{k_5}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) x^2 dx + \frac{k_3}{E_\Phi} \int_0^h g_1(t, x) x dx,$$

$$a_3^* = \left(\frac{k_3}{E_\Phi d} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_2 h}{E_\Phi} \right) g_1(t, x) W_T(t, x),$$

$$a_4^* = \frac{k_1}{E_\Phi d^2} \int_0^h g_1(t, x) x dx + \frac{k_5}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) dx,$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_5^* &= 1 - \frac{k_1}{E_\Phi d^2} \int_0^h g_1(t, x) x^2 dx - \frac{k_3}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) x dx, \\
 \alpha_6^* &= \left(\frac{k_1}{E_\Phi d^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_3 h}{E_\Phi d} \right) g_1(t, x) W_T(t, x), \\
 \gamma_n^* &= \frac{1}{\alpha_1^* \alpha_3^* + \alpha_2^* \alpha_4^*} \left\{ \left[\alpha_5^* \left(\frac{k_3}{E_\Phi d} [A_n + B_n] + \frac{k_3}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \alpha_2^* \left(\frac{k_1}{E_\Phi d^2} [A_n + B_n] + \frac{k_3}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) \right] \right\}, \\
 \lambda_n^* &= \frac{1}{\alpha_1^* \alpha_3^* + \alpha_2^* \alpha_4^*} \left\{ \left[\alpha_4^* \left(\frac{k_5}{E_\Phi d} [A_n + B_n] + \frac{k_3}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \alpha_1^* \left(\frac{k_1}{E_\Phi d^2} [A_n + B_n] + \frac{k_3}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для первого приближения получаем следующее интегральное уравнение для определения $T_1(t)$

$$\begin{aligned}
 T_1(t) &\left\{ \alpha_1^* E(t) \int_0^h \varphi_1(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + 2E(t) \int_0^h I'(x) \varphi_1'''(x) \times \right. \\
 &\quad \times [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + E(t) \int_0^h [I''(x) + g_2(t, x)] \times \\
 &\quad \times [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] \varphi''(x) dx + \int_0^h g_2'(t, x) [\varphi_1'(x) - \lambda_1^*] [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + \\
 &\quad \left. + \int_0^h g_1(t, x) [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] [\varphi_1(x) + (b_1^* - \gamma_1^*) + (b_2^* - \lambda_1^*) x] dx \right\} = \\
 &= \int_0^h \left\{ W_T(t, x) g_1(t, x) - \int_{\tau_1}^t W_T(\tau, x) g_1(\tau, x) K(t, \tau) d\tau \right\} \times \\
 &\quad \times [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + \int_{\tau_1}^t \int_0^h \left\{ g_1(\tau, x) [\varphi_1(x) + (b_1^* - \gamma_1^*) + (b_2^* - \lambda_1^*) x] + \right. \\
 &\quad \left. + g_2'(\tau, x) [\varphi_1'(x) - \lambda_1^*] [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] + \right. \\
 &\quad \left. + g_2(\tau, x) \varphi_1''(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] \right\} dx T_1(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Для каждой конкретной задачи, как принято в пункте 2°, можно подобрать простые аппроксимирующие функции для $I(x)$, $g_1(t, x)$ и $g_2(t, x)$ относительно x . Нужно отметить, что если при определении

g_1 и g_2 примем арки с жестко заделанными пятнами, а учет влияния податливости основания произведем удлинением оси арки, то задача очень упростится. В этом случае, при интегрировании фундаментальных функций и их производных, можно пользоваться готовыми формулами, приведенными в работах [5, 6].

§ 2. Метод преобразованных параметров

Разобьем консоль на n участков, число которых равно числу арок. Рассмотрим каждый участок как балку постоянного сечения с высотой h_i (фиг. 1 в). В каждом сечении имеем 4 неизвестных: изгибающий момент $M_i(t)$, перерезывающую силу $Q_i(t)$, радиальный прогиб $W_i(t)$ и угол поворота $\varphi_i(t)$.

Принимая гипотезу плоских сечений, с учетом воздействия теплового потока и ползучести материала, получаем следующее соотношение

$$E(t) I W''(t, x) - Q(t) = M(t) - \int_0^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (18)$$

где

$$Q(t) = E(t) \alpha \int_0^t T(\tau) y d\omega, \quad I = \int_0^t y^2 d\omega,$$

α — коэффициент расширения, T — функция изменения температуры, которая по высоте консоли не меняется.

Вдоль консоли еще действует сопротивление арок. Для простоты заменяем распределенные силы сопротивления сосредоточенными силами $R_i(t)$ и $S_i(t)$ (фиг. 2).

$$\left. \begin{aligned} R_i(t) &= r_i(t) W_i(t), \\ S_i(t) &= s_i(t) \varphi_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

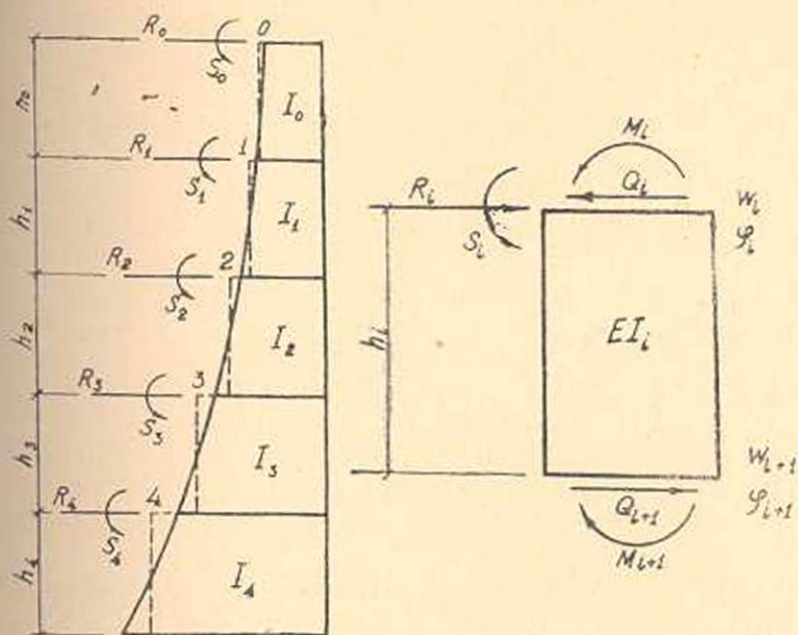
Пользуясь соотношениями (18), нетрудно записать следующие выражения:

$$Q_{i+1}(t) = Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iT}(t), \quad (20)$$

$$M_{i+1}(t) = M_i(t) + s_i(t) \varphi_i(t) + [Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iT}(t)] h_i, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(t) &= \varphi_i(t) + \frac{h_i}{E(t) I_i} Q_i(t) + \frac{h_i}{E(t) I_i} L [M_i(t) + s_i(t) \varphi_i(t)] + \\ &+ \frac{h_i^2}{2E(t) I_i} L [Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iT}(t)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$W_{i+1}(t) = W_i(t) + \varphi_i(t) h_i + \frac{h_i^2}{2E(t) I_i} Q_i(t) +$$



Фиг. 2.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_i^2}{2E(t)I_i} L [M_i(t) + s_i(t) \varphi_i(t)] + \\
 & + \frac{h_i^3}{6E(t)I_i} L [Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{ir}(t)], \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_i(t) &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \quad g_{11}(t) = \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \cdot \frac{1}{f_{13}(t)}, \\ s_i(t) &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \quad g_{21}(t) = \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_{13}(t)}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

L — интегральный оператор, $L[x(t)] = x(t) - \int_{\tau_1}^h x(\tau) K(t, \tau) d\tau$, f_{13} — радиальный прогиб сечения 0 арки под действием единичной равномерно распределенной нагрузки, γ_{13} — угол поворота сечения 0 арки под действием единичного равномерно распределенного крутящего момента.

Из соотношений (20) и (21) имеем

$$W_i(t) = \frac{1}{r_i(t)} Q_i(t) - \frac{1}{r_i(t)} Q_{i+1}(t) + W_{ir}(t), \quad (25)$$

$$\varphi_i(t) = -\frac{h_i}{s_i(t)} Q_{i+1}(t) - \frac{M_i(t)}{s_i(t)} + \frac{M_{i+1}(t)}{s_i(t)}, \quad (26)$$

Подставляя (25), (26) в (22), (23) и заменяя индексы $i+1$ на i , i на $i-1$, находим

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) = & \left[-\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} - \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \frac{M_{i-1}(t)}{s_{i-1}(t)} + \\ & + \left[\frac{1}{s_i(t)} + \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} L \right] M_i(t) + \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} W_i(t) = & \frac{Q_{i-1}(t)}{r_{i-1}(t)} - \left[\frac{1}{r_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{3E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \\ & - \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} M_{i-1}(t) + \left[\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] M_i(t) + \\ & + W_{i-1,r}(t) + \frac{h_{i-1}^3}{2E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Приравняв (25), (26) и (27), (28), получаем следующие основные уравнения метода преобразованных параметров

$$\begin{aligned} -\frac{Q_{i-1}(t)}{r_{i-1}(t)} + \left[\frac{1}{r_i(t)} + \frac{1}{r_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{3E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \\ - \frac{Q_{i+1}(t)}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} \cdot M_{i-1}(t) - \left[\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] M_i(t) = \\ = W_{i-1,r}(t) - W_{i,r}(t) + \frac{h_{i-1}^3}{2E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \frac{h_i}{s_i(t)} Q_{i-1}(t) + \frac{M_{i-1}(t)}{s_{i-1}(t)} - \\ - \left[\frac{1}{s_i(t)} + \frac{1}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}(t)} L \right] M_i(t) + \frac{M_{i+1}(t)}{s_i(t)} = \\ = \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь уравнениями (20) и (30), для каждого участка консоли можно написать следующие соотношения:

$$\text{при } i=1 \quad Q_1(t), M_1(t) = f[Q_0(t), M_0(t), Q_2(t), M_2(t)] \quad (31)$$

$$\text{при } i=2 \quad Q_2(t), M_2(t) = f[Q_3(t), M_3(t)], \quad (32)$$

$$\text{при } i=n-1 \quad Q_{n-1}(t), M_{n-1}(t) = f[Q_n(t), M_n(t)]. \quad (33)$$

Таким образом, получаем систему $2(n-1)$ рекуррентных интегральных уравнений. Параметры, входящие в эти уравнения, определяются из граничных условий консолей:

на гребне плотины

$$Q_0(t) = M_0(t) = 0, \quad (34)$$

у основания плотины для жестко защемленного контура

$$z_n(t) = W_n(t) = 0, \quad (35)$$

для упруго защемленного контура (по гипотезе Фогта)

$$\begin{aligned} W_n &= W_\Phi = \frac{k_3 M_n(t)}{E_\Phi d} + \frac{k_3 Q_n(t)}{E_\Phi}, \\ z_n &= z_\Phi(t) = -\frac{k_1 M_n(t)}{E_\Phi d^2} - \frac{k_3 Q_n(t)}{E_\Phi d}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя (27) и (28) в (35), для случая жестко защемленного контура, или в (36), для случая упруго защемленного контура, получим два уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= f[Q_{n-1}(t), Q_n(t), M_{n-1}(t), M_n(t)] = \begin{cases} 0, \\ z_\Phi, \end{cases} \\ W_n(t) &= f[Q_{n-1}(t), Q_n(t), M_{n-1}(t), M_n(t)] = \begin{cases} 0, \\ W_\Phi. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Совместно решая (33) и (37), определим $Q_{n-1}(t)$, $Q_n(t)$, $M_{n-1}(t)$, $M_n(t)$. Определив $Q_{n-1}(t)$, $Q_n(t)$, $M_{n-1}(t)$ и $M_n(t)$, в обратной последовательности находим все $Q_i(t)$ и $M_i(t)$. Значения остальных неизвестных $\varphi_i(t)$, $W_i(t)$, $R_i(t)$ и $S_i(t)$ можно определить по формулам (27), (28) и (19).

Нагрузка, приходящаяся на арку, равна

$$p_n(t) = \frac{2W_i(t)r_i(t)}{h_{i-1} + h_i}. \quad (38)$$

Воспользовавшись известным в теории ползучести методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, решение системы интегральных уравнений приведем к системе алгебраических уравнений следующего вида [7]

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{i-1}(t_n)}{r_{i-1}(t_n)} + \left[\frac{1}{r_{i-1}(t_n)} + \frac{1}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t_n)} \right] Q(t_n) + \\ & + \frac{h_{i-1}^3}{3I_{i-1}} [Q_i(t_n) \varphi_n - A_n] - \frac{Q_{i+1}(t_n)}{r_i(t_n)} + \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t_n)} M_{i-1}(t_n) - \\ & - \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t_n)} M_i(t_n) - \frac{h_{i-1}^2}{2I_{i-1}} [M_i(t_n) \varphi_n - B_n] = \\ & = W_{i-1,r}(t_n) - W_{i,r}(t_n) + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t_n)I_{i-1}} Q_{i-1}(t_n), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t_n)} Q_i(t_n) + \frac{h_{i-1}^2}{2I_{i-1}} [Q_i(t_n) \psi_n - A_n] - \frac{h_i}{s_i(t_n)} Q_{i+1}(t_n) + \\ & + \frac{1}{s_{i-1}(t_n)} \cdot M_{i-1}(t_n) - \left[\frac{1}{s_{i-1}(t_n)} + \frac{1}{s_i(t_n)} \right] M_i(t_n) - \\ & - \frac{h_{i-1}}{I_{i-1}} [M_i(t_n) \psi_n - B_n] + \frac{1}{s_i(t_n)} \cdot M_{i+1}(t_n) = \frac{h_{i-1}}{E(t_n) l_{i-1}} \cdot Q_{i-1}(t_n), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{E\left(\frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)} + C\left(t_n, \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right), \\ A_n &= \sum_{j=0}^n \frac{Q_j(t_{j-1})}{M_j(t_{j-1})} \left[\frac{1}{E\left(\frac{t_{j-1} + t_{j-2}}{2}\right)} - \frac{1}{E\left(\frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)} + \right. \\ & \left. + C\left(t_n, \frac{t_{j-1} + t_{j-2}}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right) \right], \\ \psi_0 &= \frac{1}{E(\tau_1)}, \quad A_0 = B_0 = 0, \\ t_{-2} &= t_{-1} = t_0 = \tau_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

§ 3. Метод эквивалентной нагрузки

Как показано в работе [1], при упругом расчете арочных плотин воздействие стационарного теплового потока можно заменить эквивалентным гидростатическим давлением по формуле

$$q_i = \mp \frac{\alpha E d \cdot \Delta T^*}{R_N},$$

где α — коэффициент линейного расширения, R_N — радиус средней осевой линии арки, d — толщина арки, ΔT^* — изменение температуры, определяемое метеорологическими и экспериментальными данными. Если годовая амплитуда температуры колеблется от $8^\circ \sim 12^\circ$, то можно принять [8]

$$\Delta T = \frac{57,47}{d + 2,44}.$$

В этом параграфе мы распространяем вышеуказанный метод на случай расчета арочных плотин с учетом ползучести бетона. Для этого, влияние податливости основания при расчете перемещений арки осуществим путем удлинения оси арки, т. е. пяты арки считаем жестко заделанными. При расчете напряжений в арке будем непосредственно учитывать податливость основания, что не только упро-

* Знак минус соответствует повышению температуры.

шает вычисление, но и удовлетворяет требованиям метода эквивалентной нагрузки.

Расчет консоли производим методом преобразованных параметров. При этом все формулы и ход расчета, изложенные в работе [7], будут полностью сохранены и нужно только в правой части, вместо гидростатической нагрузки, поставить эквивалентную нагрузку q_t . Основные уравнения для каждого участка консоли имеют вид

$$\begin{aligned} & -\frac{Q_{i-1}(t)}{r_{i-1}(t)} + \left[\frac{1}{r_{i-1}(t)} + \frac{1}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t)} \right] Q_i(t) + \frac{h_{i-1}^3}{3E(t)I_{i-1}} L [Q_i(t)] - \\ & -\frac{Q_{i+1}(t)}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} M_{i-1}(t) - \frac{h_{i-1}}{s_i(t)} M_i(t) - \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)I_{i-1}} L [M_i(t)] = \\ & = \left[\frac{h_{i-1}}{2r_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{6s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^4}{30E(t)I_{i-1}} L \right] q_{t,i-1} + \\ & + \left[\frac{h_{i-1}}{2r_{i-1}(t)} - \frac{h_i}{2r_i(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{3s_{i-1}(t)} + \frac{11h_{i-1}^4}{120E(t)I_{i-1}} L \right] q_{t,i} - \\ & - \frac{h_i}{2r_i(t)} q_{t,i+1}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} Q_i(t) + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)I_{i-1}} L [Q_i(t)] - \frac{h_i}{s_i(t)} Q_{i+1}(t) + \\ & + \frac{1}{s_{i-1}(t)} M_{i-1}(t) - \left[\frac{1}{s_{i-1}(t)} + \frac{1}{s_i(t)} \right] M_i(t) - \frac{h_{i-1}}{E(t)I_{i-1}} L [M_i(t)] + \\ & + \frac{M_{i+1}(t)}{s_i(t)} = \left[\frac{h_{i-1}^2}{6s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{24E(t)I_{i-1}} L \right] q_{t,i-1} + \\ & + \left[\frac{h_{i-1}^2}{3s_{i-1}(t)} - \frac{h_i^2}{6s_i(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{8E(t)I_{i-1}} L \right] q_{t,i} - \frac{h_i^2}{3s_i(t)} q_{t,i+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для решения этой системы, содержащей $2(n-1)$ интегральных уравнений, воспользуемся методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова и приведем ее к системе алгебраических уравнений, подобных (39) и (40). Нагрузку, приходящуюся на арку, определяем по формуле (38).

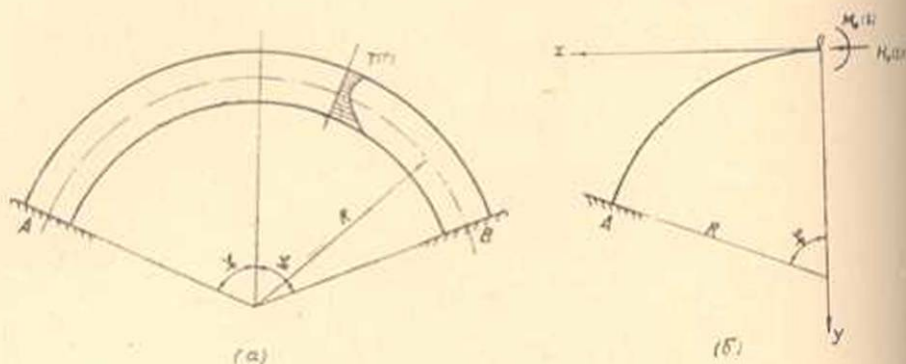
Нужно отметить, что на напряжения арки, вызванные нагрузкой вида (38), должны быть наложены напряжения от осевой силы

$$N_T = \pm \alpha E d \cdot \Delta T^*, \quad (43)$$

которая возникает при введении эквивалентной нагрузки, как это отмечается в работе [1].

§ 4. Определение радиального перемещения W_T круговой арки при воздействии стационарного потока тепла с учетом ползучести бетона и податливости основания

Принимаем схему арки, показанную на фиг. 3б за основную статически определимую систему. Напишем для нее канонические уравнения



Фиг. 3.

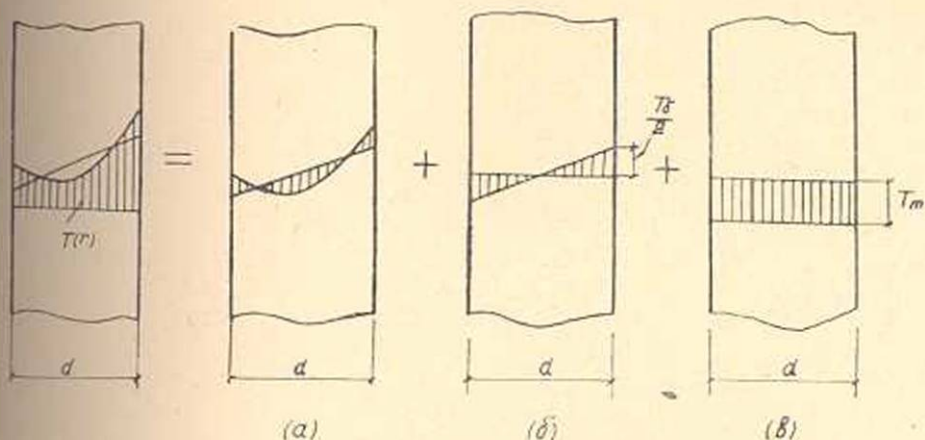
$$\begin{aligned} \delta_{11} L H_0(t) + \delta_{12} L M_0(t) + a H_0(t) + b M_0(t) + \Delta_T &= 0, \\ \delta_{12} L H_0(t) + \delta_{22} L M_0(t) + b H_0(t) + c M_0(t) + \theta_T &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где δ_{ij} — перемещения от $H_0(t)=1$ или $M_0(t)=1$ основной статически определимой системы в виде двух полуарок, свободных в замке. Эти перемещения не зависят от нагрузки. Первый индекс при δ указывает, по какому направлению происходит перемещение, второй — под действием какой силы. Δ_T , θ_T — тангенциальное перемещение и угол поворота в ключе от воздействия изменения температуры, L — интегральный оператор, a , b , c — перемещения от податливости основания.

Если принята мера ползучести $C(t, \tau) = \varepsilon(\tau) [1 - e^{-(t-\tau)}]$, то в общем случае, при учете изменения мгновенного модуля упругости $E(t)$ и старения бетона $\varepsilon(\tau)$, (44) в замкнутом виде не интегрируется. В этом случае интегрирование можно выполнить приближенным методом Ю. Д. Соколова, обобщенным нами на случай системы двух интегральных уравнений [7]. Предположим, что распределение температуры по толщине арки имеет вид, показанный на фиг. 4.

Представим график распределения температуры в виде трех составляющих: на графике (а) представлено распределение температуры между верхним и нижним бьефами в виде кривой, статический момент площади которой равен нулю; на графике (б) представлено распределение температуры по линейному закону, ординаты на бьефах равны $\frac{T_0}{2}$ и на графике (в) принята равномерная средняя температура T_m .

Распределение температуры по графику (а) не будет вызывать ин-



Фиг. 4.

каких перемещений в арке, распределение температуры по графику (б) вызывает радиальное перемещение и угол поворота, а распределение температуры по (в) вызовет только радиальное перемещение. При этом в ключе арки будут следующие перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_T &= \frac{\alpha R^2 T_0}{d} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) + \alpha T_m R \sin \varphi_0, \\ \theta_T &= \frac{\alpha I_0 R \varphi_0}{d}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Используя решение, приведенное в работе [7], для $H_0(t)$ и $M_0(t)$ в первом приближении получим

$$\left. \begin{aligned} H_0(t) &= \left[-C_1 \Delta_T + b_1 \theta_T + A_2 x_1 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau + A_3 x_2 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau \right] \frac{1}{A_1}, \\ M_0(t) &= \left[b_1 \Delta_T - a_1 \theta_T - A_4 x_1 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau + A_5 x_2 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau \right] \frac{1}{A_1}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где

$$\alpha_1 =$$

$$\left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{b_1(\tau) \theta_T - c_1(\tau) \Delta_T}{A_1(\tau)} d\tau -$$

$$\left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \left[t - \tau_1 + \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] +$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{c_1(\tau) \theta_T - b_1(\tau) \Delta_T}{A_1(\tau)} d\tau \\
& + \left[\int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{A_4(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \\
& \quad x_2 = \\
& = \frac{\left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_5(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{b_1(\tau) \Delta_T - a_1(\tau) \theta_T}{A_1(\tau)} d\tau - \\
& \quad \left[t - \tau_1 + \int_{\tau_1}^t \frac{A_5(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_2(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] + \\
& \quad - \left[\int_{\tau_1}^t \frac{b_1(\tau) \theta_T - c_1(\tau) \Delta_T}{A_1(\tau)} d\tau \right] \int_{\tau_1}^t \frac{A_4(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \\
& \quad + \left[\int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{A_4(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \\
& \quad A_1(t) = a_1(t) c_1(t) - b_1^2(t), \\
& \quad A_2(t) = a_2(t) c_1(t) - b_1(t) b_2(t), \\
& \quad A_3(t) = b_2(t) c_1(t) - b_1(t) c_2(t), \\
& \quad A_4(t) = a_2(t) b_1(t) - a_1(t) b_2(t), \\
& \quad A_5(t) = b_1(t) b_2(t) - a_1(t) c_2(t), \\
& \quad a_1(t) = \delta_{11}(t) + a, \quad a_2(t) = \delta_{11}(t), \\
& \quad b_1(t) = \delta_{12}(t) + b, \quad b_2(t) = \delta_{12}(t), \\
& \quad c_1(t) = \delta_{22}(t) + c, \quad c_2(t) = \delta_{22}(t).
\end{aligned} \tag{47}$$

В случае старого бетона, т. е. $E(t) = E = \text{const.}$, $C(t, \tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$, задача решается точно, в замкнутом виде. В самом деле, путем дифференцирования, систему (44) приводим в систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} M_0'(t) + UM_0'(t) + VM_0(t) = F_1, \\ H_0'(t) + UH_0'(t) + VH_0(t) = F_2, \end{cases} \tag{48}$$

где

$$\begin{aligned}
U = & \gamma \{ 2(\delta_{12} + b) [\delta_{12}(1 + EC_0) + b] - 2(\delta_{11} + a)(\delta_{22} + c) - \\
& - EC_0 [(\delta_{11} + a)\delta_{22} + (\delta_{22} + c)\delta_{11}] \} \Omega,
\end{aligned}$$

$$V = \gamma^2 \{ [\delta_{12}(1 + EC_0) + b]^2 - [\delta_{11}(1 + EC_0) + a][\delta_{22}(1 + EC_0) + c] \} \Omega,$$

$$\Omega = [(\delta_{12} + b)^2 - (\delta_{11} + a)(\delta_{22} + c)]^{-1}.$$

$$F_1 = \gamma^2 [(1 + EC_0) \delta_{11} + a] \theta_T - [(1 + EC_0) \delta_{12} + b] \Delta_T \Omega,$$

$$F_2 = \gamma^2 [(1 + EC_0) \delta_{22} + c] \Delta_T - [(1 + EC_0) \delta_{12} + b] \theta_T \Omega.$$

Решая (48), для $H_0(t)$ и $M_0(t)$ получим

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \frac{F_1}{m_1 m_2} + \frac{e^{-m_1(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_1} [-F_1 + m_1 m_2 M_0(\tau_1) + m_1 \dot{M}_0(\tau_1)] - \\ &\quad - \frac{e^{-m_2(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_2} [-F_2 + m_1 m_2 M_0(\tau_1) + m_2 \dot{M}_0(\tau_1)], \\ H_0(t) &= \frac{F_2}{m_1 m_2} + \frac{e^{-m_1(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_1} [-F_2 + m_1 m_2 H_0(\tau_1) + m_1 \dot{H}_0(\tau_1)] - \\ &\quad - \frac{e^{-m_2(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_2} [-F_2 + m_1 m_2 H_0(\tau_1) + m_2 \dot{H}_0(\tau_1)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Учитывая начальные условия, получим

$$M_0(\tau_1) = [\theta_T (\delta_{11} + a) - \Delta_T (\delta_{12} + b)] \Omega, \quad (50)$$

$$H_0(\tau_1) = [\Delta_T (\delta_{22} + c) - \theta_T (\delta_{12} + b)] \Omega, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_0(\tau_1) &= \gamma EC_0 \Omega^2 \{ \Delta_T [(\delta_{12} + b)^2 \delta_{12} - \delta_{12} (\delta_{11} \delta_{22} + ac) - \\ &\quad - b (2\delta_{11} \delta_{22} + a \delta_{22} + c \delta_{11})] + \\ &\quad + \theta_T [(\delta_{11} + a)^2 \delta_{22} - (\delta_{12} + b) (\delta_{11} b - 2\delta_{11} a - \delta_{11} \delta_{12})] \}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_0(\tau_1) &= \gamma EC_0 \Omega^2 \{ \Delta_T [\delta_{11} (\delta_{22} + c)^2 - \delta_{12}^2 (\delta_{22} + 2c) - \\ &\quad - b (2c \delta_{12} - \delta_{22} b)] + \theta_T [(\delta_{12} + b)^2 + \\ &\quad + \delta_{12} (ac - \delta_{22} \delta_{11}) - b \delta_{22} (\delta_{11} + a) - b \delta_{11} (\delta_{22} + c)] \}, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$m_1, m_2 = [U \pm \sqrt{U^2 - 4V}] \cdot \frac{1}{2}.$$

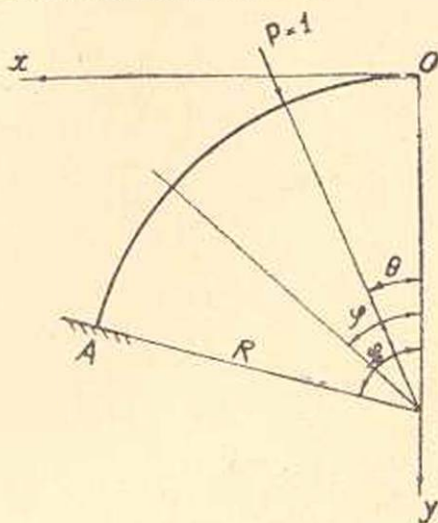
В случае жестко заделанных пят, когда $a = b = c = 0$,

$$\left. \begin{aligned} M_0(t) &= \frac{M_0(\tau_1)}{1 + EC_0} [1 + EC_0 e^{-\gamma(1+EC_0)(t-\tau_1)}], \\ H_0(t) &= \frac{H_0(\tau_1)}{1 + EC_0} [1 + EC_0 e^{-\gamma(1+EC_0)(t-\tau_1)}], \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где

$$M_0(\tau_1) = \frac{\delta_{11} \theta_T - \delta_{12} \Delta_T}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}}, \quad H_0(\tau_1) = \frac{\delta_{22} \Delta_T - \delta_{12} \theta_T}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}}.$$

Радиальное перемещение в сечении θ находим по формуле Максвелла-Мора (фиг. 5)



Фиг. 5.

$$W_{r\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_1}{EI} L M_2(t) ds + \int_0^{\pi/2} \frac{N_1}{EF} L N_2(t) ds + \Delta_{\phi}, \quad (5)$$

где

$$M_1 = -R \sin(\varphi - \theta),$$

$$N_1 = \sin(\varphi - \theta),$$

$$M_2 = H_0(t) y - M_0(t) = H_0(t) R (1 - \cos \varphi) - M_0(t),$$

$$N_2 = H_0(t) \cos \varphi,$$

F — площадь радиального сечения

Δ_{ϕ} — перемещение основания.

После несложного вычисления имеем

$$\begin{aligned} W_{r\theta} = & \frac{R^2}{EI} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta)] L M_0(t) - \frac{R^3}{EI} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \\ & + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right)] L H_0(t) - \\ & - \frac{R}{EF} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] L H_0(t) - \\ & - \left[\frac{k_1 R}{E_{\phi} d^2} \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5}{E_{\phi} d} \cos(\varphi_0 - \theta) \right] M_0(t) + \\ & + \left[\frac{k_1 R^2}{E_{\phi} d^2} (1 - \cos \varphi_0) \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5 R}{E_{\phi} d} \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta) + \right. \\ & + \left. \frac{k_5 R}{E_{\phi} d^2} (1 - \cos \varphi_0) \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_3}{E_{\phi}} \sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \theta) \right] H_0(t). \quad (5) \end{aligned}$$

Радиальное перемещение в ключе будет равно

$$\begin{aligned} W_{r0} = & \frac{R^2}{EI} [1 - \cos \varphi_0] L M_0(t) - \frac{R^3}{EI} \left[1 - \cos \varphi_0 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right] L H_0(t) + \\ & + \frac{R}{EF} \left(\frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right) L H_0(t) - \left[\frac{k_1 R}{E_{\phi} d^2} \sin \varphi_0 + \frac{k_5}{E_{\phi} d} \cos \varphi_0 \right] M_0(t) + \\ & + \left[\frac{k_1 R^2}{E_{\phi} d^2} (1 - \cos \varphi_0) \sin \varphi_0 + \frac{k_5 R}{E_{\phi} d} \sin^2 \varphi_0 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_3 R}{E_\Phi d^2} (1 - \cos \varphi_0) \cos \varphi_0 + \frac{k_4}{E_\Phi} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \Big] H_0(t). \quad (57)$$

В случае жестко заделанных пят арки, при воздействии изменяющейся температуры учет ползучести не оказывает влияния на деформации арки и радиальные перемещения будут

$$W_{T3} = \frac{R^2}{EI} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta)] M_0(\tau_1) - \frac{R^3}{EI} \left[1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] H_0(\tau_1) - \frac{R}{EF} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] H_0(\tau_1), \quad (58)$$

$$W_{T0} = \frac{R^2}{EI} (1 - \cos \varphi_0) M_0(\tau_1) - \frac{R^3}{EI} \left(1 - \cos \varphi_0 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right) H_0(\tau_1) + \frac{R}{EF} \sin^2 \varphi_0 H_0(\tau_1). \quad (59)$$

Для отдельных арок, значения $g_1(t, x)$, $g_2(t, x)$ или $r_i(t, x)$, $s_i(t, x)$ в сечении θ получены в работе [7] в виде

$$\begin{aligned} f_1(t) = & \frac{R^2}{E(t)I} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta)] L M_0(t) - \frac{R^3}{E(t)I} \left[1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] L H_0(t) - \\ & - \frac{R}{E(t)F} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] L H_0(t) + \left(\frac{R^4}{E(t)I} + \frac{R^2}{E(t)F} \right) \left[1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] L q_a - \\ & - \left[\frac{k_1 R}{E_\Phi d^2} \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5}{E_\Phi d} \cos(\varphi_0 - \theta) \right] M_0(t) + \\ & + \left[\frac{k_1 R^2}{E_\Phi d^2} (1 - \cos \varphi_0) \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5 R}{E_\Phi d} \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta) + \right. \\ & + \frac{k_5 R}{E_\Phi d^2} (1 - \cos \varphi_0) \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_3}{E_\Phi} \sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \theta) \Big] H_0(t) - \\ & - \frac{q_a R^2 k_5}{E_\Phi d} [(1 - \cos \varphi_0) \cos(\varphi_0 - \theta) + \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta)] - \\ & - \frac{k_3 q_a R}{E_\Phi} \sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \theta), \quad (60) \end{aligned}$$

Для определения $f_0(t)$ в ключевом сечении арки нужно в формуле (60) подставить $\theta = 0$, а в случае жестко зашеченных плит $k_1 = k_3 = k_5 = 0$.

Если $k_1 = k_3 = k_5 = 0$ и $LM_0(t) = M_0(\tau_1)$, $LH_0(t) = H_0(\tau_1)$, что соответствует отсутствию податливости основания и ползучести бетона, то (60) совпадает с формулой, полученной Чен Лен-си в работе [1]

$$f_0 = \frac{q_a R^2}{Ed} \cdot \frac{1}{\left(\varphi_0 + \frac{\sin 2\varphi_0}{2}\right) - \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0 \left(1 + \frac{d^2}{12 R^2}\right)}} \left[\left(\frac{\sin 2\varphi_0}{2} + \varphi_0 \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - \cos \varphi_0 \cos \theta) - \cos \theta \sin^3 \varphi_0 - \theta \sin \theta \sin \varphi_0 \right]. \quad (61)$$

Для $\gamma_0(t)$ в сечении θ получена формула

$$\gamma_0(t) = \frac{R^2 [1 + E(t) C(t, \tau_1)]}{2GI_0} [(\varphi_0 - \theta) \sin \theta + \sin \varphi_0 \sin (\varphi_0 - \theta)] + \\ + k_5 R \sin \varphi_0, \quad (62) \\ GI_0 = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{d^3}{3},$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Найдя f_0 и γ_0 , значения $g_1(t, x)$ и $g_2(t, x)$ определяются по формуле (24).

§ 5. Численный пример

Чтобы сравнить результаты расчета арочных плотин данным способом с существующими решениями, возьмем арочную плотину, которая рассматривалась в работе [1]. Постоянный радиус этой плотины равен 100 м. Геометрические размеры показаны на развернутом профиле (фиг. 1). Поперечное сечение арочной плотины в действительности выгнуто к верхнему бьефу (фиг. 1г) и тогда изгибающий момент от собственного веса плотины направлен противоположно направлению изгибающего момента от давления воды. В расчетной схеме верхний бьеф принят прямолинейным, что идет в запас прочности.

Геометрические и статические данные приведены в таблице 1. Вдоль высоты плотины центральная консоль разбивается на 8 частей.

$$E = 1,6 \times 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad C_0 = 2,8 \times 10^{-6}, \quad \gamma = 0,03, \\ \mu = 0, \quad E_\Phi = E, \quad k_1 = 5,43, \quad k_3 = 2,80, \quad k_5 = 0,67.$$

Результаты расчетов для центральной консоли приведены в таблицах №№ 2—9.

Таблица 1

l	h_l м	d_l , м ²	F_l , м ²	$\frac{d_l^3}{12}$, м ³	I_l , м ⁴	α_l	Ключевая консоль		Давление воды	Эквивал. нагрузка
							$\frac{1}{r_l}$, м ⁻² /м	$\frac{1}{s_l}$, м ⁻¹ /м	q_l , т/м	qt_l , т/м
0	12,5	4,00	4,325	5,333	6,848	57°17'	752	53,107	0	5,039
1	12,5	4,65	5,025	8,364	10,741	53°38'	321,2	15,516	12,79	5,304
2	12,5	5,40	5,835	13,117	16,645	49°36'	274	8,850	25,675	5,550
3	12,5	6,27	6,780	20,573	26,419	45°17'	232,4	4,909	38,67	5,776
4	12,5	7,29	7,880	32,265	41,433	40°30'	194,4	2,614	51,82	5,975
5	12,5	8,47	9,155	50,601	64,980	35°12'	150,4	1,313	65,144	6,164
6	12,5	9,84	10,635	79,358	101,909	28°38'	96	0,579	78,68	6,320
7	6,5	11,43	12,355	124,46	140,906	24°14'	48,11	0,253	92,505	6,452
8	—	12,36	—	157,35	—	0	—	—	99,809	6,527

Таблица 2

Изгибающий момент (в т/м) под действием давления воды

$t - \tau_1$ (дней)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
0	-242,88	-1030,52	-1944,50	-2295,59	-832,35	4122,22	14228,45	19548,17
5	-243,03	-1032,66	-1948,06	-2295,62	-763,83	4292,52	14633,43	20227,32
15	-243,96	-1037,18	-1952,08	-2295,70	-730,03	4380,88	14880,46	20280,63
30	-244,35	-1040,29	-1955,15	-2296,03	-722,57	4523,50	15142,45	21114,33
60	-245,60	-1047,39	-1958,16	-2296,13	-710,60	4527,15	15287,70	21510,03
90	-248,80	-1051,59	-1968,62	-2296,33	-707,34	4559,64	15400,23	21712,92
135	-249,22	-1052,52	-1974,64	-2296,52	-707,21	4565,13	15438,16	21793,23
∞	-249,72	-1052,73	-1975,37	-2296,59	-706,90	4574,72	15442,76	21804,73

Таблица 3

Перерезывающая сила (в т) под действием давления воды

$t - \tau_1$ (дней)	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
0	30,04	59,20	130,06	269,97	538,78	991,75	1660,19	1991,07
5	29,89	58,86	129,83	270,12	542,90	1000,77	1677,94	2022,11
15	28,89	58,64	129,77	271,36	544,02	1002,52	1689,25	2045,14
30	28,21	58,21	129,48	271,90	547,35	1014,14	1702,71	2069,21
60	27,89	56,80	129,22	273,04	549,30	1017,53	1713,25	2091,90
90	27,23	55,60	128,10	273,28	550,67	1020,30	1719,35	2102,13
135	26,10	54,79	128,68	273,36	551,02	1021,39	1721,26	2107,05
∞	25,81	54,69	128,81	273,38	551,14	1021,50	1722,12	2107,66

Таблица 4

 EW_i (в m/m) под действием давления воды

i	$(t-\tau_1)$ (дней)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	37522,9	39984,9	44623,2	49239,5	53759,9	56199,1	58304,5	58942,3
1	67852,3	72149,5	78644,3	85648,0	92816,1	96566,9	98123,5	93795,5
2	90775,2	96409,2	105428,8	114769,2	124084,6	127683,5	129380,4	130150,4
3	98922,8	104999,9	114526,7	124482,1	134610,5	138853,4	140867,9	141668,9
4	89854,2	94786,5	103570,3	112107,8	121416,1	125038,1	126929,9	127590,3
5	67068,0	70470,7	76989,9	82267,0	88959,2	91541,4	92820,9	93327,0
6	38540,7	40054,8	42756,5	46341,4	49334,8	50481,1	51159,7	51334,2
7	14149,5	14353,6	15048,8	15742,1	16276,9	16522,2	16573,9	16682,7
8	6629,8	6758,4	6825,8	6938,4	7023,4	7063,0	7081,2	7083,5

Таблица 5

 $E\varphi_i$ (в m/m^2) под действием давления воды

i	$(t-\tau_1)$ (дней)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	2536,71	2792,71	3772,14	4649,34	5250,00	5795,22	6932,73	7215,79
1	2213,71	2388,22	2628,02	2934,10	3338,22	3795,44	4070,11	4126,02
2	1265,13	1357,93	1498,96	1673,55	1904,04	1906,21	1938,58	1954,78
3	-96,83	-94,43	-168,87	-208,75	-303,29	-262,41	-232,60	-230,89
4	-1383,10	-1422,10	-1585,47	-1740,56	-1932,70	-2045,96	-2093,20	-2108,93
5	-2163,73	-2313,97	-2481,25	-2719,74	-3042,15	-3150,83	-3215,95	-3218,23
6	-2199,75	-2316,75	-2523,17	-2783,52	-3012,34	-3106,92	-3148,68	-3178,79
7	-1430,48	-1476,47	-1716,42	-1736,33	-1848,01	-1899,01	-1925,41	-1926,16
8	-799,48	-828,50	-831,64	-862,58	-877,87	-885,63	-888,76	-889,20

Таблица 6

Изгибающий момент (в m/m) при воздействии температуры

$(t-\tau_1)$ (дней)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
0	17,23	22,15	28,42	88,23	294,91	749,87	1519,62	1824,71
5	18,12	23,33	27,19	85,20	276,64	721,18	1475,31	1777,37
15	19,80	25,08	26,53	75,76	262,85	686,84	1413,78	1705,91
30	21,91	29,05	29,55	76,24	247,99	651,56	1354,12	1637,08
60	24,61	36,08	39,01	77,93	240,05	624,37	1302,73	1576,03
90	25,12	36,97	39,86	77,52	236,53	615,41	1286,44	1556,58
135	25,59	37,65	40,22	77,36	235,33	612,41	1280,61	1549,38
∞	25,64	38,13	41,02	76,85	229,28	591,97	1226,75	1439,06

Таблица 7

Перерезывающая сила (в m) при воздействии температуры

$t - \tau_1$ (дней)	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
0	34,09	35,52	38,39	46,54	64,43	94,05	134,91	151,57
5	34,17	35,24	38,04	46,19	63,91	93,25	133,91	150,78
15	34,26	35,50	38,00	45,65	62,86	91,91	132,19	149,36
30	34,41	35,61	37,79	45,17	61,87	90,37	130,63	148,06
60	34,60	35,93	38,01	44,77	60,94	89,01	129,07	146,74
90	34,64	35,96	38,00	44,66	60,69	88,61	128,60	146,33
135	34,67	35,97	37,98	44,61	60,60	88,48	128,42	146,18
∞	34,67	36,00	37,98	44,46	60,06	87,21	125,97	142,53

Таблица 8

 EW_i (в m/m) при воздействии температуры

i	$t - \tau_1$ (дней)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	22979,1	22918,7	22848,7	22738,2	22591,1	22565,2	22540,7	22537,6
1	21333,14	21453,4	21400,5	21408,0	21370,2	21373,0	21378,9	21370,7
2	18607,2	18598,7	18709,9	18798,6	18826,5	18838,2	18846,9	18853,2
3	15173,8	15199,7	15289,9	15353,9	15497,6	15521,5	15526,4	15563,1
4	11271,8	11303,3	11403,1	11501,9	11605,3	11632,7	11640,6	11715,9
5	7280,3	7326,2	7369,5	7453,0	7516,9	7539,5	7546,1	7655,0
6	3740,8	3760,2	3796,1	3797,9	3748,0	3824,5	3828,7	3943,0
7	1225,1	1218,0	1204,0	1191,1	1214,3	1176,4	1175,3	1233,0
8	523,3	518,2	510,7	503,3	496,3	494,1	493,3	477,1

Таблица 9

 $E\varphi_i$ (в m/m^2) при воздействии температуры

i	$t - \tau_1$ (дней)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	-75,01	-79,29	-51,61	-37,13	-23,39	-19,49	-16,39	-16,46
1	-183,33	-175,24	-174,26	-168,55	-162,84	-161,91	-161,50	-160,53
2	-249,47	-233,28	-249,41	-235,04	-237,45	-236,93	-236,85	-234,75
3	-296,03	-293,32	-293,50	-291,29	-290,00	-289,41	-289,07	-286,16
4	-318,88	-341,91	-319,03	-318,98	-321,46	-321,38	-321,21	-336,04
5	-303,30	-303,83	-308,85	-310,34	-313,30	-313,85	-314,08	-312,01
6	-240,73	-242,64	-246,00	-248,81	-251,53	-252,35	-252,68	-254,28
7	-73,07	-71,34	-68,73	-66,21	-63,97	-63,25	-62,99	-58,87

Расчеты произведены по методу эквивалентной нагрузки.

В данном примере под действием давления воды изгибающий момент у основания плотины увеличивается со временем на 12%, перерезывающая сила — на 5,8%, а при воздействии изменения температуры изгибающий момент у основания уменьшается на 21,1% и перерезывающая сила — на 6%. Но отсюда нельзя поспешно сделать вывод о том, что учет ползучести мало влияет на напряженное состояние, так как это зависит от многих факторов: меры ползучести, коэффициентов основания, размеров плотины и т. д. Кроме того, если при расчете $r_i(t)$ и $z_i(t)$ непосредственно учитывать податливость основания, то напряженное состояние изменится.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 VI 1960

Ու ժողովրդ

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԿԱՍԱՐԱՅԻՆ ՊԱՏՎԱՐՆԵՐՈՒՄ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՇԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Սովորաբար, կամարային պատվարներում լարումները հաշվելիս, կամարային պատվարը բաժանվում է հորիզոնական կամարների և ուղղահիվ կոնսոլների, որոնք աշխատում են համատեղ: Այդ հնարավորություն է ապրիս հաշվի առնելու ինչպես շառավղային և ուղիղ ճիգերը, այնպես էլ հիմքի ղեկավարողները: Ներկա հոդվածում, հիմնվելով [1—2] աշխատություններում զարգացրած մեթոդի և Մասլովի-Հարուժյունյանի [4] դժային սողքի տեսության վրա, որոշվում են ջերմային լարումները կամարային պատվարներում՝ սողքի հաշվառումով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чен Лен-си. К расчету арочных плотин—метод арок-консоль с учетом влияния кручения. „Труды Дальневосточного политехнического института“, № 5, 1959.
2. Ганев Х. Г. К расчету арочных плотин как пространственных систем. „Сборник МИСИ“, № 29, 1959.
3. Розин Л. А. и Гримзе Л. Б. Расчет арочных плотин. Отчет Ленгидэна, 1960.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Д., 1952.
5. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Стройиздат, М., 1949.
6. Степанов Р. Д. О некоторых квадратурных балочных фундаментальных функциях. „Инженерный сборник ин-та Механики АН СССР“, 26, 1958.
7. У Жуй-фын. Расчет арочных плотин с учетом ползучести бетона. „ДАН АрмССР“, № 2, 1960.
8. Пан Цзя-цзин. Некоторые вопросы в проектировании арочной плотины № 502. Отчет Шанхайгидэи, 1957.

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Изэнтропическая задача для ударного давления

Рассматривается плоская задача о проникании давления в сжимаемую жидкость. Пусть в некоторой точке 0 границы полуплоскости, занятой сжимаемой жидкой средой, возникло давление, которое затем распространяется по границе ударной волной.

Уравнение состояния жидкости политропическое

$$P = B(S) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad (1)$$

где P — давление, ρ — плотность, S — энтропия жидкости, ρ_0 — невозмущенная плотность, n — показатель политропы. Найдем распределение давления в полуплоскости, считая движение изэнтропическим. Выберем ось Ox_1 по поверхности полуплоскости, ось Ox_2 — вглубь среды.

На границе полуплоскости возьмем автомодельное граничное условие

$$P(x_1, 0, t) = \begin{cases} P_1 f\left(\frac{x_1}{vt}\right) = P_0(x_1, t), & x_1 < vt \\ 0, & x_1 > vt \end{cases} \quad (2)$$

где $x_1 = vt$ координата давления на поверхности, $P_1 = \text{const}$. В силу изэнтропичности и (1) можно записать приближенное граничное условие для скорости звука в жидкости

$$a_1 = a(x_1, 0, t) = a_0 \left[1 + \frac{P_0(x_1, t)}{Bn} \frac{n-1}{2} \right], \quad (3)$$

где a_0 — невозмущенная скорость звука.

Пусть скорость давления по поверхности сверхзвуковая.

Для решения задачи используем простые волны [1]. В области, расположенной вне влияния точки 0 (вне дифракционной области), можно течение за ударной волной считать простой волной [1].

В силу автомодельности все параметры суть функции величин

$\xi = \frac{x_1}{t}$, $\eta = \frac{x_2}{t}$. Уравнение поверхностей уровня запишется [1] в

виде

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - a(\varphi) - \frac{2}{n-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos(s - \varphi) a'(S) dS = 0. \quad (4)$$

Для определения $a(\varphi)$ служит условие (3)

$$\xi' \cos \varphi - a_1(\xi') - \frac{2}{n-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos(S - \varphi) a_1'(S) dS = 0. \quad (5)$$

Из этого уравнения можно определить φ в функции ξ' и, следовательно, a в функции ξ .

Для простоты рассмотрим линейное условие (3) $a_1(\xi) = A\xi$. При этом поверхности уровня запишутся [1] в виде

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - a(\xi, \eta) = 0. \quad (6)$$

Граничное условие дает $\xi' \cos \varphi = a_1(\xi') = A\xi'$ или $\cos \varphi = A$. Для поверхности уровня $a(\xi, \eta) = a_1(\xi')$.

Теперь (6) переищется

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = \xi' \cos \varphi, \quad (7)$$

где $\cos \varphi = A$. Для определения ударной линии на глубине, запишем равенство для скорости D ударной волны

$$D = \frac{\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}. \quad (8)$$

В семействе простых волн (7) на ударной волне η будет функцией от ξ и следовательно ξ будет функцией от ξ' .

Поэтому имеем

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{d\xi'}{d\xi} - 1 \right) \operatorname{ctg} \varphi. \quad (9)$$

В изэнтропическом приближении для D имеем [2]

$$D = \frac{u_0 + a + u}{2} + \frac{1}{8a_0} (a + u - a_0)^2,$$

где u — скорость потока $u = \frac{2}{n-1} (a - a_0)$ [1], однако для нашей точности достаточна формула Пфрима [2].

Подставляя (9) в (8) и используя формулу Пфрима [2], имеем уравнение

$$D = \frac{a_0 + A\xi' + \frac{2}{n-1} (A\xi' - a_0)}{2} = \frac{\left(\xi \frac{d\xi'}{d\xi} - \xi' \right) \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}. \quad (10)$$

Уравнение (10) — дифференциальное уравнение для определения ξ в функции ξ . Если рассматривать пологие волны, что соответствует $V \gg a_0$, имеем

$$\frac{n+1}{2(n-1)} A \xi' + \frac{n-3}{2(n-1)} a_0 = -\xi \left(\frac{d\xi'}{d\xi} - \xi' \right) \operatorname{ctg} \varphi. \quad (11)$$

Граничное условие $\xi'|_{\xi=0} = V$.

Решение (11) имеет вид

$$\xi' = V \left(\frac{\xi}{v} \right)^{-\frac{n+1}{n-1} \frac{\sin \varphi}{2} + 1} + \frac{-a_0 \frac{n-3}{n-1} \sin \varphi}{2A \left(1 + \frac{n+1}{n-1} \frac{\sin \varphi}{2} \right)} \times \\ \times \left[\left(\frac{\xi}{v} \right)^{-\frac{n+1}{n-1} \frac{\sin \varphi}{2} + 1} - 1 \right]. \quad (12)_1$$

Теперь для скорости звука имеем $a = A \xi'$, а давление получится по приближенной формуле [3]

$$a = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{P(\xi, \eta)}{Bn} \right]. \quad (12)$$

Если взять воду ($n=7$, $B=3045 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ [3]) и сделать расчеты по формулам (12)₁ и (12), можно получить давление на ударной волне.

В частности, для $M = \frac{v}{a_0} = 6$ и $A = \frac{1}{3}$ в точке с абсциссой $\xi = 0,8V$ имеем $\xi' = 0,65V$

$$P(\xi, \eta) = 770 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

наибольшее давление на фронте $P = 7100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Для V близких к a_0 в (8) можно пренебречь единицей по сравнению с $\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2$ и также решить задачу на ударной волне.

Рассмотрим ту же задачу геометрическим методом [3].

В качестве элементарных возмущений на поверхности рассмотрим волны Римана; уравнение этих волн, возникших в момент t' в точке x' , имеет вид

$$(x_1 - x' - u_1 t + u_1 t')^2 + x_2^2 = a_1^2 (t - t')^2, \quad (13)$$

u_1 — скорость жидкости вдоль ox_1 , a_1 — скорость звука [3].

$$u_1 = a_0 \frac{P_a \left(\frac{x'}{t'} \right)}{Bn}; \quad a_1 = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_a \left(\frac{x'}{t'} \right)}{Bn} \right]. \quad (14)$$

Если ввести $\xi = \frac{x_1}{t}$, $\tau_1 = \frac{x_2}{t}$, $\xi' = \frac{x'}{t'}$ и написать огибающую волн, имеющих данное давление $P_a\left(\frac{x'}{t'}\right)$ или данное ξ' , легко найти

$$\frac{(\xi' - a_1) - (\xi - a_1)}{\sqrt{\frac{(\xi' - a_1)^2}{a_1^2} - 1}} = \tau_1. \quad (15)$$

В случае $a_1 = A\xi$ уравнение (15), после отбрасывания малых a_1 , совпадает с (7). Следовательно процедура определения параметров на ударной волне этим методом приведет к тем же результатам. Для произвольного закона $a_1(\xi)$, (15) должна являться в нашем приближении решением (5), в чем можно убедиться подстановкой. Подставляя (15) в (10), найдем ударную волну.

Если считать функцию f в (2) резко падающей, можно считать давление за ударным фронтом равным нулю. Тогда можно пользоваться результатами [3]. Приведенный метод годен для давления порядка нескольких тысяч $\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6.I.1960

Ա. Գ. Բագդոև

ԻՋԵՆՏՐՈՊԻԿ ԽՆԴԻՐ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է հասանքի որոշումը հիպերբոլական տիրույթում կիսատարածության կզրին կիրառված հարվածային ճնշման տեղեկության տակ:

Լուծումը դրսևում է պարզ ալիքների մեթոդով: Խնդիրը մեկնարկված է երկրաչափորեն և բերված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яненко Н. Н. Бегущие волны для квазилинейных уравнений. „ДАН СССР“, 199, № 1, 1956.
2. Станюкович К. П. Неуставовизшиесе движения силошной ереды. Гостехиздат М.—Л., 1954.
3. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Отражение ударной волны в волне от свободной поверхности. „ПММ“, № 20, вып. 4, 1956.

ФИЗИКА

П. А. Безирганян

Точность фокусировки рентгеновских лучей
изогнутыми кристаллами

(метод шлифованного кристалла)

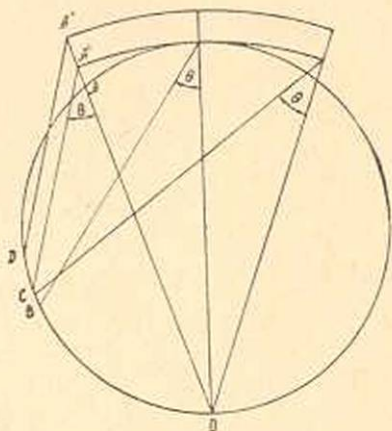
В работе [1], посвященной фокусировке отраженных от кристаллов рентгеновских волн, утверждается, якобы в так называемом Иогансоновском методе фокусировки ширина рентгеновских спектральных линий не зависит от длины участвующей в отражении части кристалла и что якобы этим методом добиваются точечной фокусировки отраженных от кристаллов рентгеновских волн.

В настоящей работе показано, что во всех случаях горизонтальной фокусировки рентгеновских лучей с помощью изогнутых кристаллов, в том числе и в случае фокусировки по Иогансону, ширина спектральных линий зависит от длины рабочей части кристалла и толщины его.

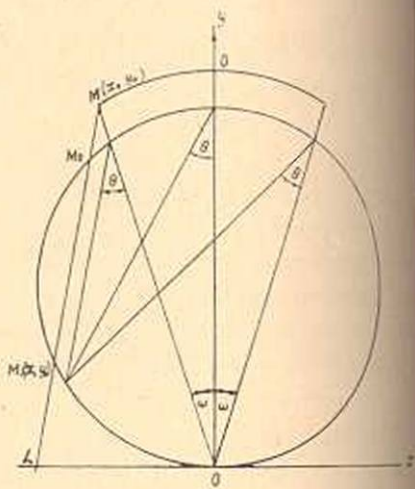
Методы Иоганна и Кошуа дают фокусировку отраженных рентгеновских волн в конечной области, размеры которой зависят от длины и толщины действующей части отражающего кристалла. С увеличением длины и толщины действующей части кристалла увеличивается ширина спектральных линий. Ширину спектральной линии, обусловленную размерами кристалла, можно представить из двух частей: одна из них отлична от нуля даже в случае бесконечно тонкого кристалла и зависит только от длины отражающего участка кристалла; другая, которая равна нулю при бесконечно тонком кристалле, зависит как от толщины, так и от длины кристалла и, при данной толщине действующей части кристалла, увеличивается с увеличением последнего. Эти утверждения легко проверить простыми геометрическими построениями, аналогично представленному на фиг. 1. Действительно, ширина спектральной линии $ВД$ (см. фиг. 1) состоит из двух частей $ВС$ и $СД$. $ВС$ зависит только от длины кристалла и отлична от нуля даже в случае одной отражающей плоскости, $СД$ исчезает при бесконечном уменьшении толщины кристалла и увеличивается с увеличением последней, однако, $СД$ при данной толщине кристалла увеличивается с увеличением длины кристалла.

Ширина спектральной линии, зависящая только от длины рабочей части кристалла, того же порядка, что и часть, зависящая только от

толщины кристалла при данной длине кристалла. Действительно, мерой ширины спектральной линии, при данной длине l кристалла, является отрезок AA' (см. фиг. 1), а мерой ширины спектральной линии, зависящей только от толщины при данной длине кристалла, является отрезок $A'A''$. Толщина фокусирующего кристалла в методах изогиготного кристалла (отрезок $A'A''$) обычно бывает порядка 0,1–0,3 мм. Величину отрезка AA' можно определить следующим образом (см. фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$AA' = 2R - 2R \cos \omega = 2R (1 - \cos \omega),$$

где R — радиус круга Роуланда, $2\omega = \frac{l}{2R}$ — угловой раcтвор кристалла, где l — длина действующей части кристалла.

Обычно, l порядка 20–40 мм, а R порядка 250–500 мм и, следовательно, $AA' \sim 0,2$ мм, т. е. того же порядка, что и $A'A''$.

Следовательно, указанные две части ширины спектральной линии тоже одного порядка.

Рассмотрим теперь случай фокусировки по Иогансону. Этот случай соответствует предварительной шлифовке кристаллической пластинки по цилиндрической поверхности радиуса R и последующему изгибу по поверхности цилиндра радиуса $R/2$. В этом случае точка пересечения продолжений радиальных атомных рядов не совпадает с центром кривизны поверхности кристалла и радиус кривизны атомных рядов будет в 2 раза больше радиуса кривизны поверхности кристалла.

Как показывают расчеты [2], [3], когда кривизна поверхности кристалла больше кривизны атомных плоскостей, величина интенсивности отраженной волны та же самая, что и в случае, когда кривизна поверхности кристалла равна кривизне атомных плоскостей. Однако преимущество рассматриваемого случая состоит в том, что для рас

ходящихся падающих пучков область сходимости волн, отраженных различными плоскостями (случай Кошуа), меньше, чем область этой сходимости в случае, когда кривизна поверхности равна кривизне атомных плоскостей.

В этом случае часть ширины спектральной линии, зависящей только от длины отражающего кристалла для внутренней поверхности кристалла (см. фиг. 2), равна нулю (точечная фокусировка). Однако, если кристалл, изогнутый по Иогансону, разбить на бесконечно тонкие полосы, параллельные цилиндрической поверхности, то точечная фокусировка получится только для первой (внутренней) полосы (фиг. 2). Лучи, отраженные от остальных полос, фокусируются в конечной области, размеры которой для данной полосы тем больше, чем больше длина кристалла.

Таким образом, часть ширины спектральной линии, которая одновременно зависит от длины и толщины части кристалла, принимающей участие в отражении, шлифовкой несколько не уменьшается. Покажем это аналитически.

Пусть луч MM_1 (фиг. 2), отраженный под углом θ от точки M внешней полосы кристалла, пересекается с окружностью радиуса R в точке $M_1(x_1, y_1)$. Найдем зависимость координат этой точки от угла ω , т. е. от длины дуги MO' . Для этого найдем сначала координаты x_0 и y_0 точки пересечения прямой MM_1 с окружностью радиуса $R+d$ (где d — толщина кристалла).

Уравнение прямой AO , проходящей через точки $M(x_0, y_0)$ и $O(0,0)$, будет

$$y = -\operatorname{ctg} \omega \cdot x, \quad (1)$$

а уравнение окружности радиуса $R+d$ будет

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 2Rd + d^2. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим координаты x_0 и y_0 точки M

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{2} R \sin 2\omega \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \sin^2 2\omega + (2Rd + d^2) \sin^2 \omega}, \\ y_0 &= -\operatorname{ctg} \omega \left[-\frac{1}{2} R \sin 2\omega \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \sin^2 2\omega + (2Rd + d^2) \sin^2 \omega} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для координат точки M перед радикалом надо взять знак минус. Действительно, для случая $\omega=0$ ордината точки M будет

$$y_0 = 2R + d, \quad (4)$$

с другой стороны, в случае $\omega=0$ для y_0 из (3) получим

$$\begin{aligned} y_0 &= - \left[-R \cos^2 \omega \pm \cos \omega \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)} \right] = \\ &= - \left[-R \pm (R + d) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, (4) и (5) совпадают только в том случае, если перед радикалом взять знак минус.

Таким образом, из (3) получим

$$\begin{aligned}x_0 &= -\sin \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}], \\y_0 &= \cos \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}].\end{aligned}\quad (6)$$

$M(x_1, y_1)$, есть точка пересечения прямой ML и окружности радиуса R .
Уравнение прямой ML будет

$$y - y_0 = k_1(x - x_0), \quad (7)$$

$$\text{где } k_1 = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} + (\omega - \theta) \right] = -\operatorname{ctg}(\omega - \theta) = \operatorname{ctg}(\theta - \omega). \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим

$$\begin{aligned}y - \cos \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}] &= \\&= \operatorname{ctg}(\theta - \omega) [x + \sin \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}]].\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}A &= \operatorname{ctg}(\theta - \omega), \\B &= [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}] [\cos \omega + \sin \omega \operatorname{ctg}(\theta - \omega)],\end{aligned}\quad (9)$$

Тогда уравнение прямой ML можем переписать в виде

$$y - Ax = B. \quad (10)$$

Уравнение окружности радиуса R будет

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), получим координаты точки $M_1(x_1, y_1)$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{A(R - B)}{1 + A^2} \pm \sqrt{\frac{A^2(R - B)^2}{(1 + A^2)^2} - \frac{B(B - 2R)}{1 + A^2}}, \\y_1 &= \frac{A^2(R - B)}{1 + A^2} \pm \sqrt{\frac{A^2(R - B)^2}{(1 + A^2)^2} - \frac{B(B - 2R)}{1 + A^2}} + B.\end{aligned}\quad (12)$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\frac{A}{1 + A^2} = \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega); \quad \frac{1}{1 + A^2} = \sin^2(\theta - \omega),$$

тогда из (12) получим:

$$\begin{aligned}x_1 &= \sin(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) \pm \\&\pm \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}], \\y_1 &= \cos(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) \pm \\&\pm \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}] + B.\end{aligned}\quad (13)$$

В этом случае нетрудно убедиться, что для точки $M_1(x_1, y_1)$ перед радикалом надо взять знак минус, а для точки M_2 — знак плюс. Действительно, из фиг. 2 видно, что

$$y_2 > y_1 \text{ и } |x_2| < |x_1| \text{ при } \theta > \omega, |x_2| > |x_1| \text{ при } \theta < \omega. \quad (14)$$

С другой стороны, в случае $\omega = 0$, неравенства (14) удовлетворяются только в том случае, если перед радикалом в (13) взять знак минус.

Таким образом, для координат точки $M_1(x_1, y_1)$ получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sin(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) - \\ &- \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}], \\ y_1 &= \cos(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) - \\ &- \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}] + B. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Как видно из (15), координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ зависят от угла ω , т. е. от длины кристалла. Значит лучи, отраженные от различных точек данной полосы, пересекутся с окружностью радиуса R в различных точках (не точечная фокусировка).

Легко показать, что с увеличением угла ω y_1 и $|x_1|$ увеличиваются (при $\theta > \omega$), т. е. точка $M_1(x_1, y_1)$ перемещается по окружности радиуса R и, таким образом, увеличивается область сходимости отраженных волн и ширина спектральной линии.

Вычислим, с помощью (15), численные значения координат x_1 и y_1 в случае $\theta = 30^\circ$, $d = 0,2$ мм, $R = 500$ мм для различных углов ω (для различных длин кристалла).

Численные значения $|x_1|$ и y_1 , приведенные в таблице, показывают, что с увеличением угла ω (при $\theta > \omega$) $|x_1|$ и y_1 увеличиваются, т. е. размеры области сходимости, следовательно, и ширина спектральной линии, увеличиваются с увеличением длины кристалла.

R в мм	d в мм	θ	ω	$ x_1 $	y_1
500	0,2	30°	0°	433,17	250,95
500	0,2	30°	1°	433,29	251,84
500	0,2	30°	2°	433,34	252,73
500	0,2	30°	3°	433,46	253,27

Как уже выше было сказано, в случае $d = 0$ получается точечная фокусировка. Действительно, в случае $d = 0$ из (15) получаем

$$x_1 = -R \sin 2\theta,$$

$$y_1 = 2R \sin^2 \theta,$$

т. е. координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ только в случае $d = 0$ не зависят от угла ω (от длины кристалла) и все лучи, отраженные от точек дуги, совпадающей с окружностью радиуса R , пересекутся точно в одной точке $M_1(x_1, y_1)$ окружности радиуса R .

Таким образом, и в случае фокусировки по Иогансону, ширина спектральной линии зависит от длины отражающего кристалла.

Ереванский государственный
университет

Поступила 9 X 1959

Պ. Ա. Բեզիրգյան

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՆԵՐԻ ՃՎԱԾ ԲՅՈՒՐԵՂՈՎ ՖՈԿՈՒՍԱՑՄԱՆ ՃՇԳՐՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մի քանի հեղինակների կողմից արտահայտված է այն միտքը, որ իբրև թե, ալպակո կոչված, Իոհանսոնի մեթոդով ֆոկուսացնելիս սենտրոնյան ալպակո տրալ գծերի երկարությունը կախված չի լինի բյուրեղի գործող մասի երկարությունից:

Տվյալ հոդվածում ապացուցվում է, որ հորիզոնական ֆոկուսացման բոլոր դեպքերում, նույն թվում և Իոհանսոնի ֆոկուսացման դեպքում, սենտրոնյան ալպակո տրալ գծերի լայնությունը կախված է անդրադարձնող բյուրեղի գործող մասի երկարությունից և հաստատվում է:

Ալպակո տրալ գծի լայնությունը պատկերացվում է երկու մասից բաղկացած:

Ոչ մասերից մեկը կախված է միայն բյուրեղի երկարությունից և չափանշանում նույնիսկ անսահման բարակ բյուրեղի դեպքում, իսկ մյուսը կախված է բյուրեղի և՛ երկարությունից, և՛ հաստությունից:

Ալպակո տրալ գծի լայնության ալգ վերջին մասը անհատանում է անսահման բարակ բյուրեղի դեպքում, իսկ վերջավոր հաստություն ունեցող բյուրեղի դեպքում մեծանում է բյուրեղի գործող մասի երկարության մեծացման հետ միասին: Հոդվածում տեսական հաշիվներով ցույց է տրվում, որ ալպակո տրալ գծի լայնությունը բյուրեղի վերջավոր հաստության դեպքում կախված է ֆոկուսացնող մասի երկարությունից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Исследование радиоактивных излучений кристалл-дифракционным методом (сборник статей под редакцией Боровского И. Б., Издат. ност. литер., Москва, 1949 г.), статья Д. Дю Монда, стр. 52—64.
2. Безиргян П. А. Диссертация, МГУ, 1953 г.
3. Боровский И. Б. и Безиргян П. А. Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. «Научные труды Ереванского университета», 48, 1956 г.

А. М. Резикийн, Ю. Г. Агбальян, К. А. Мадатян

Газоразрядный стабилизатор

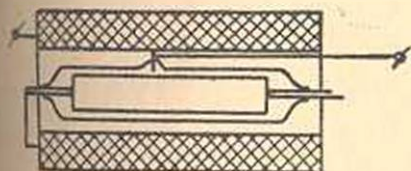
Как было выяснено в работе [1], возможно осуществление стабилизатора постоянного тока, основанного на некоторых свойствах тлеющего разряда в магнитном поле.

Напомним вкратце принцип действия такого стабилизатора.

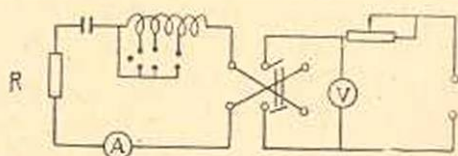
Газоразрядная трубка помещается в соленоид, соединенный последовательно с разрядным промежутком. Ось трубки параллельна магнитным силовым линиям. В разрядном промежутке анод-катод заряды движутся по спирали, т. е. имеют тангенциальную составляющую скорости. Под действием этой составляющей газ, находящийся в трубке начинает вращаться. При увеличении разрядного тока увеличивается величина магнитного поля—траектория заряда закручивается и в результате увеличения длины траектории, а следовательно и внутреннего сопротивления промежутка, ток уменьшается. При уменьшении тока весь процесс идет в обратном порядке.

Экспериментальная установка

Опыты по определению коэффициента стабилизации $K_{\text{ст}}$ проводились на установке (фиг. 1), которая состояла из газоразрядной трубки, подмагничивающей катушки (фиг. 2) и высоковольтного регулируемого выпрямителя. Газоразрядная трубка выполнена в виде двух коаксиальных цилиндров $r_1 = 2.5$ мм и $r_2 = 19$ мм. Длина внутреннего цилиндра 650 мм, внешнего—500 мм. Внешний цилиндр сделан меньше по длине для того, чтобы избежать пробоя на концах. Для работы трубка откачивалась до высокого вакуума, наполня-



Фиг. 1.

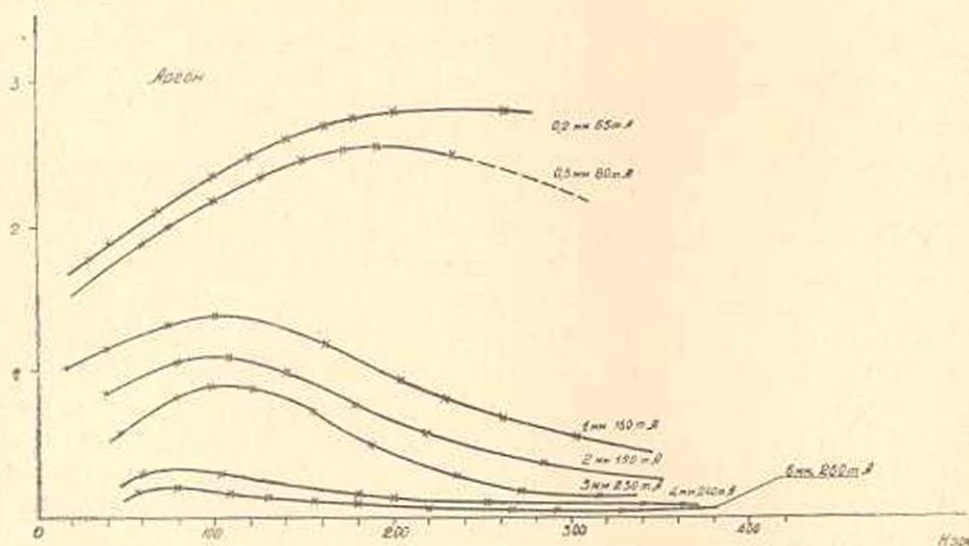


Фиг. 2.

лась газом и запаивалась. Предварительная чистка трубки производилась разрядом. Последовательно с газоразрядной трубкой соединялась подмагничивающая катушка, состоящая из 8—10 тысяч витков. От каждого из ее слоев были сделаны отводы для регулировки величины поля.

Результаты измерений

Результаты измерений приведены на фигуре 3. Они сняты при постоянных значениях разрядного тока и давления. Как видно из кривых, коэффициент стабилизации зависит от поля и имеет максимум при определенном его значении.



Фиг. 3.

Коэффициент стабилизации по току определяется по формуле:

$$K_{\alpha} = \frac{i}{U} \frac{dU}{di} \quad (1)$$

где i — ток через разрядный промежуток.

U — питающее напряжение.

Согласно теории (1), вольтамперная характеристика цепи с разрядным промежутком должна удовлетворять следующему уравнению:

$$U = Ai + \frac{iB^2 r_1}{4\pi\eta} \left(\frac{\rho_a^2 - 1}{4} - \frac{\rho_a^2}{\rho_a^2 - 1} \ln \rho_a \right) + V_0 \left[1 + \frac{b_1^2 b_2^2 B^4 + (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) B^2}{1 + b_1 b_2 B^2} \right], \quad (2)$$

где A — активное сопротивление катушки,

i — общий ток цепи,

U — напряжение источника питания,

B — индукция,

b_1, b_2 — подвижность положительных и отрицательных зарядов,

V_0 — напряжение на трубке при отсутствии поля,

$\rho_a = \frac{r_2}{r_1}$ — отношение радиусов электродов,

η — вязкость газа.

Так как катушка подмагничивания соединена последовательно с разрядным промежутком, величина магнитного поля пропорциональна току, а ток в (2) входит в степени выше первой (т. к. V пропорционально току i).

Отсюда видно, что приращение напряжения дает в несколько раз меньшее приращение тока, т. е. наблюдается токовая стабилизация. Однако коэффициент стабилизации невелик — даже теоретически вычисленное его значение не превышает трех [1].

Результаты эксперимента довольно-таки точно совпадают со значениями, полученными теоретическими расчетами, но не везде. Например связь между $K_{ст}$ и полем H не совсем соответствует теоретической — в нашем случае $K_{ст}$ падает после некоторого значения H . Это можно объяснить следующим образом. Во-первых, в процессе эксперимента может произойти изменение эмиссии электронов с катода, которая зависит от величины поля. Это происходит потому, что при изменении поля H изменяется угол падения ионов на катод. Во-вторых, при увеличении разрядного тока увеличивается скорость вращения газа. Начиная с некоторого значения скорости газа, вращение его переходит из ламинарного в турбулентное. Этому формула (2) не учитывает. Из работы (1) видно, что скорость вращения газа пропорциональна iH , а в нашем случае произведение iH (без учета изменения плотности газа) для разных кривых у максимумов почти одинаково. Это и подтверждает появление турбулентности. Произведения iH для разных токов и полей даны в таблице.

К сожалению не удалось определить ни скорость вращения, ни число Рейнольдса R_e . Эксперимент был также приведен при обратной полярности электродов (внутренний электрод-катод). В этом случае наблюдался стабильный нормальный разряд — аномальный разряд в этом случае нестабилен. При нормальном разряде получается большой коэффициент стабилизации по напряжению (около 500).

Таблица

i ма	65	80	160	190	230	240	260
H эр	260	200	100	96	104	80	66
iH	16900	16000	16000	18240	23920	19200	17160

Случай этот рассматривается здесь не будет. Все эксперименты были проведены дважды: один раз при заполнении газоразрядной трубки аргоном и второй раз — водородом. Разница получилась лишь в том, что в случае водорода стабилизация начиналась с несколько большего значения напряжения. Характер кривых в обоих случаях один и тот же.

В заключении авторы выражают благодарность коллективу лаборатории за помощь в работе.

Հ. Մ. Ռեզիկյան, Յու. Գ. Աղբալյան, Կ. Ա. Մադատյան

ԳԱԶԱՊԱՐՊՈՒՄԱՅԻՆ ՍՏԱԲԻԼԻԶԱՏՈՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ աշխատությունում ստուգվում են նախորդ [1] աշխատության մեկ բերված ստաբիլիզատորի տեսական հիմունքները:

Փորձը կատարված է զազապարպումային երկու համառանցք զլաններում էլեկտրական մարմանդ անոմալ պարպման դեպքի համար, երբ մագնիսական դաշտ առաջացնող կոճը հաջորդաբար միացված է զազապարպումային խողովակին: Ներքին զլանածև խողովակի երկարությունը 650 մմ էր, իսկ արամադիծը՝ 3 մմ: Արտաքին զլանածև խողովակն ունեւր 500 մմ երկարություն և 38 մմ արամադիծ:

Չափումները կատարված են արգոնի մեջ, 0,5—6 մմ սնդիկի սլան ճնշման պայմաններում: Փորձերը ցույց են տալիս, որ երբ ներսի էլեկտրոդը առնող է և պարպումը անոմալ մարմանդ, ստաբիլիզացիայի գործակիցն ընդունում է մինչև 3 արժեք, որը համապատասխանում է տեսական տվյալներին:

Հաստատուն հոսանքի և ճնշման դեպքում ստաբիլիզացիայի գործակիցը կախված է դաշտի մեծությունից և ունի մաքսիմում արժեք, որից հետո սկսում է փոքրանալ: Ստաբիլիզացիայի գործակիցի փոքրացումը մագնիսական դաշտի հետագա աճի հետ կապված, առաջանում է էլեկտրամագնիսական դաշտի աղդեցության տակ զլանների միջև պտտվող զազի տուրբուլենտության առաջացման հետ:

Երբ ներսի էլեկտրոդը կատող է, ստաբիլ անոմալ պարպում ստանալ էր հաջողվում: Սակայն ստացվում էր շատ ստաբիլ նորմալ պարպում 4—8 մմ սնդիկի սլան ճնշման տիրույթում: Այս դեպքում լարման ստաբիլիզացիայի գործակիցը հասնում էր մինչև 500-ի:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Резикийн А. М. Газоразрядный стабилизатор сильных постоянных токов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 5, стр. 99, 1957.
2. Энгель А. Ионизированные газы. Пер. с английского под редакцией М. С. Иоффе. М., Физматгиз, 1959.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՊԱՏՄԱՌԻՈՅՈՒՆ

Գ. Բ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՅԱՆՈՇ ԲՈՅԱՅԻ ԿՅԱՆՔԻ ՈՒ ԳՈՐԾՈՒՆԵՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ¹

(Խաճված 100-ամյակի առթիվ)

Գիտության պատմությանը, սկսած հին ժամանակներից, հայտնի են բազմաթիվ գիտնականների անուններ, որոնք խոշոր ներդրում են կատարել գիտության մեջ: XIX դարի առաջին կեսին Յանոշ Բոլայի հանդիսացավ այն հանճարեղ գիտնականը, որը Ն. Ի. Լորաշևսկուց հետո և նրանից անկախ, հիմք դրեց ոչ-էվկլիդեսյան երկրաչափության: Ոչ-էվկլիդեսյան երկրաչափության հայտնաբերումը Ն. Ի. Լորաշևսկու և Յանոշ Բոլայի կողմից՝ վճռական նշանակություն ունեցավ գիտության զարգացման համար:

Ոչ-էվկլիդեսյան երկրաչափության ստեղծումը, նշուառնի տիեզերական օրենքի հայտնաբերումից հետո, ճշգրիտ գիտությունների ընագավառում մարդկային հանճարի երկրորդ խորաթափանց հետազոտությունն էր տիեզերքի զաղտնիքները բացահայտելու գործում, որը արմատապես փոխեց մարդու պատկերացումը տարածության մասին:

Կոսպիտալիստական կապանքներից ազատազրկված հունգար ժողովուրդը, սոցիալիզմ կառուցող ժողովուրդը այսօր աշխարհի բոլոր ժողովուրդների հետ միասին մեծ հպարտությամբ է նշում իր հանճարեղ զավակ, գիտության կորիֆեյ Յանոշ Բոլայի մահվան 100-ամյակը:

Յանոշ Բոլայի այս տարեդարձը մի նոր խթան պիտի հանդիսանա ամբողջ աշխարհում ժողովուրդների ու նրանց գիտնականների միջև հաստատելու անբաժանելի հարաբերություններ: Աշխարհի գիտնականները համառոտ պետք է պայքարեն հանուն երկարատև խաղաղության, ընդդեմ պատերազմի բոլոր տեսակի հրձիգների, գիտության սվլալները պետք է օգտագործեն խաղաղ նպատակների համար, ժողովուրդների նյութական-կուլտուրական գրությունը բարելավելու համար:

¹ Զեկույցված է Երևանում, Յանոշ Բոլայի մահվան 100-ամյակին նվիրված գիտական սեմինարում, 1960 թ. հունվարի 27-ին:

Յանոշ Բոլայը իր սքանչելի հայտնագործումը կատարել է երկրաչափության ընդարձակումով: Նախքան նրա կյանքին ու գործունեության անցնելը, համառոտակի նշենք երկրաչափության զարգացման հիմնական շրջանները մինչև XIX դարի առաջին կեսը:

Ֆ. Էնգելսը իր «Անտի-Ղյուրինգ» աշխատության մեջ խոսելով մաթեմատիկայի մասին, գրում էր, «Զուտ մաթեմատիկայի առարկան կազմում են իրական աշխարհի տարածական ձևերը և քանակային հարաբերությունները, այսինքն՝ մի վերին աստիճանի իրական նյութ: Այն դաստը, որ այդ նյութը չափագանց վերացական ձև է բնորոշում, կարող է սոսկ թույլ կերպով սքողել նրա ծագումը արտաքին աշխարհից: Բայց որպեսզի հնարավոր լինի այդ ձևերն ու հարաբերությունները իրենց հոտակ միեմպում հետազոտել անհրաժեշտ է այդ ձևերն ու հարաբերությունները լիովին անցատկ իրենց բովանդակությանից, անհրաժեշտ է մի կողմ թողնել այդ բովանդակությունը իրրե կարևորություն չենթկոյացնող հանգամանք, այդ ձևով մենք ստանում ենք կիսեր առանց չափերի, դժեր առանց հաստատվան ու լայնության, դա նազան a և b , x և y հաստատուն ու փոփոխական մեծություններ, և միայն բոլորովին վերջը մենք հասնում ենք բուն քանակականության ազատ ստեղծագործության ու երևակայության արդյունքներին, այսինքն՝ երևակայական մեծություններին»:

Կիրառելով արտադրման մեթոդը, մարդիկ մեր թվականությունից հազարամյակներ առաջ ունեին երկրաչափական տարրական գիտելիքներ: XX դարից մինչև V դարը մեր թվականությունից առաջ, Բաբելոնում, Աֆրատում և Հին Հունաստանում մարդկանց երկրաչափական գիտելիքներն զգալի չափով հարստանում են: Անհրաժեշտություն է դառնում այդ բոլոր գիտելիքները սխառեմի բերել, հասցնելով այն իսկական գիտություն:

Այդ աշխատանքը կատարվում է Հունաստանում մի քանի սերունդների ջանքերով, սկսած V դարից (մ. թ. ա.), գրվում են երկրաչափության դիաբերյալ դասագրքեր:

Մեր թվականությունից առաջ III դարում հույն գիտնական Էվկլիդեսը գրում է իր «Մատիխիկո» (հայերեն նշանակում է «աարբեր» կամ «հիմունքներ») խորագիրը կրող աշխատությունը, բաղկացած է 13 գրքից, որը հրապարակից դուրս է մղում մինչև այդ գրված երկրաչափության բոլոր դասագրքերը: Իրենց հետազոտություններով երկրաչափությունն զգալի կերպով հարստացնում են Ապոլոնին և Արքիմեդը:

Էվկլիդեսի երկրաչափության հիմքում ընկած են սահմանումներ, պոստուլատներ, աքսիոմաներ: Իսկական ընթացքում տարբեր ժողովուրդների անվանի մաթեմատիկոսներ թե՛ Արևելքում և թե՛ Արևմուտքում աշխատել են ազդեցություն Էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատը, կենտրոնը նրա մյուս պոստուլատներից ու աքսիոմաներից, սակայն դրանից ոչինչ չի ստացվել: Նրանք, ովքեր կարծում էին, որ իրենց հաջողվել է ապացուցել այդ պոստուլատը, բառ էություն աննկատելի կերպով անում էին այնպիսի ենթադրություն, որը համարվեք է 5-րդ պոստուլատին: Մաթեմատիկական գիտության մեջ բնորոշության, երկրաչափության մեջ մասնավորապես, լուրջ տեղաշարժ տեղի ունեցավ վերածնության դարաշրջանում, կապիտալիզմի զարգացման շրջանում:

Կորեերի ուսումնասիրության ընդհանուր մեթոդի պահանջը XVII դարի առաջին կեսում հասցրեց վերլուծական երկրաչափության ստեղծմանը:

Աստղագիտության ու մեխանիկայի բարդ հարցերի ռուսումնասիրությունը հասցրեց այն արդյունքին, որ XVII դարի երկրորդ կեսում ստեղծվեց անվերջ փորձերի անալիզը՝ դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը: XVIII դարում Նյուտոնի մեխանիկան հանդիսանում էր հիմնական գիտություն: Նյուտոնի բացարձակ տարածությունը հանդիսանում է էվկլիդեսի տարածության ճիշտ դատձենը:

Ամենակարևոր գործոններից մեկը, որ ազդեցություն է էվկլիդեսի երկրաչափության բացառիկ դիրքը, դա չափումների պրակտիկան է, որպիսին ոչ մի առիթ չի տվել փոքր ինչ չափով կասկածելու երկրաչափության հիմքում բնկած զրույթների ու թևերեմանների մասին: Նման դրությունը խիստ նպաստել է մեխանիկիկական աշխարհայացքը, որը այդ ժամանակ ամրապնդող դիրք ուներ քնադիտության ու փելիսոփայության բնագավառում: Իտալացի մաթեմատիկոս Սակերին, ձգտելով ապացուցել զուգահեռ գծերի պոստուլատը, մոտեցել էր ու-էվկլիդեսյան երկրաչափությանը, սակայն նա ժխտեց զրա գոյություն հնարավորությունը:

XVIII դարի խոշորագույն մաթեմատիկոս է. Էյլերը գտնում էր, որ կարելի է ապացուցել էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատը: Նա որոշակի ընդգծում էր, որ եթե հնարավոր չլինի լուծել այդ խնդիրը, ախուամենայնիվ նպատակահարմար է կենել զուգահեռ գծերի պոստուլատից, որովհետև հակառակ են թաղրությունը տանում է դեպի հակասությունները:

Մաթեմատիկական գիտության դարգացման վերը նշված ժամանակաշրջանում է, որ հրապարակ է գալիս Յանոշ Բոլայի և խորաթափանց աշխատանքով պատկերված իր անունը բոլոր ժամանակների համար:

Յանոշ Բոլայը ծնվել է 1802 թվականին Տրանսիլվանիայի կենտրոնում, Կլուզենբուրգ քաղաքում (ներկայումս այդ քաղաքը կոչվում է Կլուժ):

Յանոշի հայրը՝ Պարկաշ Բոլայը մասնագիտությունը կրել է մաթեմատիկոս, իր կրթությունն ստացել է Գլոբինգենում, սրտեղ մտերիմ հարաբերությունների մեջ է կրել մաթեմատիկոս Գաուսի հետ: Համալսարանն ավարտելուց հետո նա 1804 թվականին փոխադրվում է Մարոշ-Վաչարդել (Տրանսիլվանիայում) և ստանձնում է մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի ու քիմիայի ամբիոնի վարիչի պաշտոնը սեղի միջնակարգ դպրոցում: Այդ աշխատանքում նա մնացել է ավելի քան 50 տարի:

Պարկաշը, մանկավարժական աշխատանքին զուգընթաց, ուժեղ կերպով զբաղվում է զուգահեռ գծերի պոստուլատով, որին նա չափազանց շատ ժամանակ է հատկացրել իր ուսանողական տարիներին: Համոզված լինելով, որ խնդիրը լուծել է, նա ձևակերպում է իր աշխատությունը և ներկայացնում Գաուսին, որը, ծանոթանալով աշխատությանը, մատնացույց է տնում մի հասարակ սխալի վրա, որ չէր նկատել Պարկաշը:

Իր ուժերը գրականության (գրել է հինգ ողբերկություն) և այլ առարկաներում փորձելով հանդերձ՝ Պարկաշը 20 տարի շարունակ իր ուշադրության հիմնական առարկան առաջիկա պես դարձնում է մաթեմատիկական դասընթացի պատրաստումն ու հրատարակումը:

Պարկաշը ինքը անձամբ է ղեկավարել իր որդի Յանոշ Բոլայի ուսումնական պարապմունքները. 13 տարեկան հասակում Յանոշը ամրապնդում էր դիֆերենցիալ և նույնիսկ ինտեգրալ հաշիվներին:

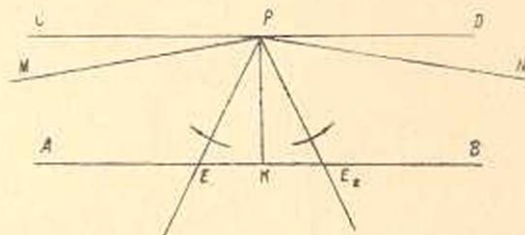
1817 թվականին 15-ամյա Յանոշը էքստերն կարգով քննություն հանձնելով՝ ստանում է հասունություն վկայական և մտածում բարձրագույն կրթություն ստանալու մասին:

Յանոշը 1818 թվականին մեկնում է Վիեննա և ընդունվում ռազմա-ինժեներական ակադեմիան: Նա չորս տարի սովորում է ակադեմիայում և զբաղվում է փալլոսն ընդունակություններ:

1823 թվականի սեպտեմբերին ստանալով սպայի կոչում (կրտսեր լեյտենանտ), աշխատանքի է ուղարկվում Տեմեշվար փոքրիկ ամրոց:

Ամրոցում Յանոշը իր ամբողջ ազատ ժամանակը նվիրում է էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատի ապացուցմանը. ի տարբերություն իր դասնոգական տատարիների, երբ նա իր ընկերոջ՝ Սոսի հետ զբաղվում էր զուգահեռ գծերի հարցով, Յանոշը այդ հարցի նկատմամբ ալտերնատիվ գրեցություն է ալլ մոտեցում:

Այդ նոր մոտեցումը խնդրի լուծման համար պարզելու նպատակով, ենթադրենք P կետից, որը գտնվում է AB ուղիղից դուրս, տարված են PE_1 և PE_2 ճառագայթները, որոնք AB գիծը հատում են E_1 և E_2 կետերում: Այդ ճառագայթները պատենք P կետի շուրջը աֆաֆա, որ E_1 և E_2 կետերը մնան AB ուղիղի վրա. կարող է պատահել, որ PE_1 և PE_2 ճառագայթները կձգտեն մի սահմանալին գրություն՝ CD գծին, որը չի հատում AB ուղիղը: Տրամաբանորեն բացատրված չէ, որ PE_1 և PE_2 ճառագայթները կձգտեն երկու տարբեր սահմանալին գրության, այսինքն՝ PM



և PN , որոնք չեն հատում AB ուղիղը: էվկլիդեսը կանգ է առել առաջին հնարավորության վրա:

Հաշվի առնելով 5-րդ պոստուլատն ապացուցելու բազմադարյան բոլոր փորձերը և դիտություն, առաջին հերթին Ֆիգիկայի, մեխանիկայի ու մաթեմատիկական անալիզի նոր տվյալները, որոնք ցույց տվեցին, որ իբրև նախադրյալներ կարող են ապահովել դիտության զարգացումը աֆաֆիի ճշմարտությունների ընտրությունը, որոնք ավելի լրիվ և բազմակողմանի կերպով նկարագրեն ուսումնասիրվող օբյեկտների հիմնական հարաբերություններն ու հատկությունները, Լոբաչևսկին ու Բոլայը եկան այն եզրակացության, որ հնարավոր է էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատը փոխարինել այլ պոստուլատով, այսինքն՝ արված ուղիղից դուրս գտնվող կետով կարելի է տանել ավելի ուղիղին ոչ թե մեկ զուգահեռ գիծ, ինչպես ընդունված էր էվկլիդեսի մոտ, այլ երկու և ավելի զուգահեռ գծեր, և որ դա կարող է տեղի ունենալ իրականություն մեջ:

Սկսած 1823 թվականից, Բոլայը հարմարում է հորը, որ իր հետազոտական աշխատանքներում հասնել է որոշակի արդյունքների և ոչնչից ստեղծել է

մի նոր աշխարհ: Երբ Ֆարկաշը իմանում է, որ իր որդին զբաղվում է գուգահեռ գծերի հարցով, խնդրում է որդուն՝ հրաժարվել գրանից:

Այս կապակցությամբ նա գրում է. «Ես չպետք է փորձես հաղթահարել զուգահեռ գծերի տեսությունը այդ ճանապարհին. ես գիտեմ այդ ճանապարհը, ես անցել եմ այն մինչև վերջ, ես սպրկել եմ այդ անշող գիշերը, և կյանքիս ամեն մի ջանք, ամեն մի հաճույք թաղել եմ նրա մեջ: Ազաչում եմ քեզ՝ հանգիստ թող զուգահեռ գծերի մասին ուսմունքը. դու պետք է սարսափես նրանից, ինչպես զգայական հրապուրանքներից. նա քեզ կզրկի առողջությունից, գլխավորությունից, հանգստից—նա քեզ համար կկործանի կյանքի ողջ բերկրանքը: Այդ անշող մշուշը կարող է հազար նյութաբանական աշտարակներ կյանքի, և երկրի վրա երբեք չի պարզվի. մարդկային դժբախտ ցեղը երբեք կատարյալ ճշմարտություն չի հասնի, նույնիսկ երկրաչափություն մեջ: Թող աստված հեռու պահի քեզ այդ հրապուրանքից, որը համակել է քեզ: Նա քեզ կզրկի աբսոլյուտությունից ոչ միայն երկրաչափության մեջ, այլև երկրային ողջ կյանքում: Ես պատրաստ էի դառնալու այդ ճշմարտության նահատակը, միայն թե երկրաչափությունը մաքրեի այդ բծից, միայն թե մարդկային ցեղին տալի անբասիր գիտություն: Ես զարհուրելի, հսկայական աշխատանք կատարեցի. ես հասա շատ ավելի լույսին, քան այն, ինչ ստացվել է ինձնից առաջ: Բայց կատարյալ բավարարություն ես չստացա»:

Յանոշը, սակայն, կյանքում էր այդ հարցով և ուշադրություն չի դարձնում հոր նամակի վրա, շարունակում է զբաղվել նրանով ևս մի շարք տարիներ և ստացված արդյունքները սեղմ կերպով շարադրում է որպես գիտական աշխատություն:

1832 թվականին Յանոշի հայրը, մեծ դժվարություններ հաղթահարելով, տպագրում է իր մաթեմատիկական գաղափարների առաջին հատորը, որը կրում էր «Ճենտամեն» (սփորձ) վերնագիրը:

Որպես այդ աշխատության հավելված տպագրվում է Յանոշ Բոլայի աշխատությունը:

Յանոշի նոր ուղի հարթող ոչ-էվկլիդեսյան երկրաչափությունը գիտության պատմության մեջ հայտնի է «Ապենդիքս» անունով:

Դիւքը լույս տնտնելուն պես մեկ օրինակ շտապ ուղարկվում է Գաուսին՝ նրա կարծիքն իմանալու:

Ֆարկաշը իր նամակում գրում է Գաուսին. «Իմ որդին քո կարծիքն ավելի է գնահատում, քան ողջ Եվրոպայինը»:

Գաուսը, ստանալով գիրքն ու նամակը, շատ շուտով գրում է իր ընկերոջը՝ Հելինդին, որ ինքը ստացել է Բոլայի ուշադրավ աշխատությունը և որ չրա հեղինակին համարում է «առաջին կարգի հոնճաք»:

Գաուսը Ֆարկաշին պատասխանում է մեկ ամիս հետո:

Ողջունելով իր անմոռանալի ընկերոջը և որոշ տեղեկություններ հաղորդելով իր կյանքի մասին, 15 տարի լույս թողնող պահպանելուց հետո Գաուսը անցնում է Յանոշի աշխատության: Բերում ենք այդ մասից մի հատված. «Այժմ մի երկու խոսք քո որդու աշխատության մասին: Եթե սկսեմ այն բանից, որ ես այդ աշխատությունը չպետք է զովարանեմ, ապա դու մի պահ կդարմանաս, բայց այլ կերպ վարվել չեմ կարող. եթե զովարանեմ այդ աշխատությունը, կնշանակի զովարանում եմ ինքս ինձ, քանի որ այդ աշխատության ողջ բովանդակությունը, այն ուղին, որով ընթացել է քո որդին, և

ալն արդյունքները, որ ստացել է նա, գրեթե ամբողջովին համընկնում են արանից 30—35 տարի առաջ իմ ստացած մասնակի արդյունքների հետ: Հիրավի, ես չափազանց զարմացած եմ այդ առթիվ:

Ես մտադրություն ունեի իմ սեփական աշխատությունների մասին, որից որոշ բան ես այժմ անցկացրի թղթի վրա, կենդանությունս օրով ոչինչ չհրապարակել: Մարդկանց մեծամասնությունը ճիշտ գաղափար չունի այն մասին, ինչի մասին խոսվում է այստեղ, ես հանդիպեցի միայն շատ սակավաթիվ մարդկանց, որոնք առանձին հետաքրքրություն ունեցան այն, ինչի մասին ես նրանց հաղորդում էի: Որպեսզի մարդ ի վիճակի լինի այդ հասկանալու, պետք է նախ որոշակի զգա այն, ինչը իսկապես պատահում է այստեղ, իսկ մարդկանց մեծամասնության համար այդ բոլորովին պարզ չէ: Բայց ես մտադրություն ունեի մի ժամանակի թղթի վրա անցկացնել բոլորը, որպեսզի այդ մտքերը, համենայն դեպս, չկորչեին ինձ հետ:

Ուստի ես շատ զարմացած եմ, որ ազդեցություն եմ ալդ անհրաժեշտությունից, և ինձ շատ ուրախացնում է այն հանգամանքը, որ իմ հին ընկերոջ որդին է հենց այդպիսի զարմանալի կերպով կանխել ինձ:

Ինչպես երևում է, Գառուր, փոխանակ հրապարակալի մասնում արժանի գնահատական տալու Բոլայի աշխատություններ և խրախուսելու նրան նոր սխրագործությունների, զերադասում է լսել, որով և ուժեղ հարկած է հասցնում Յանոշին: Այս կապակցությամբ, զգալի հետաքրքրություն են ներկայացնում Յանոշի արժարժած մտքերը Գառուր վարքագծի մասին ու դիտությունների առաջ ծառացած խնդիրների լուծման առնչությամբ:

Ե՛ւմ կարծիքով, ինչպես խորապես համոզված եմ, յուրաքանչյուր հասարակաշարված մարդու կարծիքով, այն բոլոր փաստարկները, որ Գառուր բերում է ի բացառություն այն բանի, թե ինչու նա ամենին չի ցանկացել սեփական աշխատություններից (այդ հարցի վերաբերյալ) որևէ բան հրապարակել իր կենդանության ժամանակ, թույլ են և աննշան: Զէ՛ որ գիտություն մեզ, ինչպես իրական կրանքում, բանն այն է, որպեսզի ամեն կերպ պարզաբանվեն անհրաժեշտ, հանրօգուտ, թեկուզ և զեռես ոչ պարզ բաները, և դրա հետ մեկտեղ արթնացվի ճշմարտության զեռես ներհող գիտակցությունը, ամբողջի ու ծավալի այն: Մաթեմատիկայի բժրահումը, դժբախտաբար, արթնացել է զեռես սակավաթիվ մարդկանց մոտ: Եվ այդ հիման վրա, ինչ պատրվակով կարող էր Գառուր միանգամայն հետևողական կերպով թաքցնել իր հրաշալի աշխատությունների մի զգալի մասը: Եվ այն հանգամանքը, որ դժբախտաբար, նույնիսկ մաթեմատիկոսների, այդ թվում նաև հուշակալոր մաթեմատիկոսների մեջ կան շատ մակերեսայիններ, — այդ հանգամանքը քննվել է չի կարող խելամիտ մարդու համար հիմք ծառայել տխուհուս էլ դրադիլու միայն մակերեսայինով ու միջակով, գիտությունը պահելու քնածություն մեջ, այն վիճակում, որ նա ժողովուրդ է: Այդպիսի մտատրամադրությունը արդարացի կերպով կարելի կլինի անխնայ հակաքնական և անխոհեմ, ուստի շատ անախորժ տպավորություն է ստացվում, որ Գառուր, փոխանակ ուղղակի, ազնիվ, անկեղծ կերպով ընդունելու «Աղենդիքսի» և ամբողջ «Տենամենի» բարձր նշանակությունը, փոխանակ ուրախությամբ մասնակցի ճանապարհ հարթելու նոր գիտություն համար և մտածի, թե ինչպես ավելի վարպետորեն շարադրի այդ գաղափարները, պատշաճ ճանապարհ բաց անի լավ մտքերի համար, բնդհակառակը, ջանում է դրանից խուսափել և դե-

գերում է բարեպաշտ ցանկությունների ու ամբողջականների մեջ այն առթիվ, թե ընթերցողները բավականաչափ կրթություն չունեն։ Դրա մեջ չէ, իհարկե, գիտնականի կյանքը, գործունեությունն ու ծառայությունը։

Ամբողջի միապաղպղ կյանքը և ամբողջական վիճակը ստիպում են Յանոշին գիտնալու առաջին գիտնական ծառայությունից ազատվելու համար։

1833 թվականին հարգվում է նրա գիտումը և նշանակվում է 280 գուլդեն տարեկան թոշակ։

Հունգարիան XVIII դարի վերջին և XIX դարի սկզբին իրենից ներկայացնում էր հետաձուլող ազդարարին երկիր՝ ցայտուն կերպով արաճաչալիս ֆեոդալական-հարատիրական հարաբերություններով։ Գոյություն ունեցող կարգը չէր նպաստում գիտության զարգացմանը։ Չնայած արդ զգալիորեն պայթանքներին, այն ժամանակ, երբ Յանոշ Բոլայի խոշոր հայտնագործություններում էր աննկատելի, ինքը արհամարհված, առողջական ու տնտեսական դրությունը ծանր, գինվորական հրամանատարությունը ավելորդ կերպով միջամտում էր նրա անձնական-ընտանեկան գործերին, նա ներքին ուժ ունեւնդ էր զրսկորում զբաղվելու խորը մաթեմատիկական ուսումնասիրություններով։

1838 թվականին Յանոշը և իր հայրը առանձին-առանձին մասնակցում են կոմպլեքս թվերի երկրաչափական տեսության կատարելագործման առթիվ հայտարարված կոնկուրսին։

Ժլուբին չի արժեքավորել ներկայացված երեք աշխատություններից և ոչ մեկը, այդ թվում և Բոլայի աշխատությունը, չնայած որ, ինչպես պարզվել է հետագայում, Յանոշը զգալի չափով մշակել էր այդ խնդիրը։ Ժլուբին անդամներից և ոչ մեկը չի կարողացել հասկանալ նրա աշխատությունը։

1848 թ. հոկտեմբերի 17-ին Յանոշին հայտնի է դառնում 1840 թվականին գերմաներեն լեզվով տպագրված՝ Լորաշևսկու «Երկրաչափական հետադետություններ գուգանեո զմերի տեսության վերաբերյալ» աշխատությունը։ Այս փաստը մի նոր ծանր հարված էր Բոլայի համար։

Յանոշը, Լորաշևսկու աշխատությունը մոտիկից ծանոթանալուց հետո, սկզբում չէր ուզում համատալ, որ Լորաշևսկին իրապես գոյություն ունի, նա այն կարծիքն է հայտնում, որ արդ աշխատությունը գրել է Գաուսը և հրատարակել Լորաշևսկու անունով։ Այս ենթադրությունը հետագայում փոխվում է այլ ենթադրությունների։

Բերում ենք Յանոշի գիտողությունից մի հատված, որ հրատարակել է Նոտկերը. «Այդ աշխատության ողին ա արդյունքը այն չափով են համընկնում 1832 թվականին հրապարակված «Ճնշատման» աշխատության «Հավելվածին» (Appendix) հետ, որ չի կարելի չզարմանալ։ Արդեն Գաուսը, նրա ասելով, ծալր աստիճան դարձացած է կղզի մաշտական ու մոսկովյան մաթեմատիկոսների աշխատությունների սքանչելի համընկնման առթիվ։ Արդարև, ես այդ առթիվ զարմացած եմ ո՛չ ավելի պակաս։

Հարկավ, գուտ ճշմարտության էությունը ինչպես Մարտ-Վաշարյակում, այնպես էլ կամչատկալում և Նուշնիսկ Լուսնի վրա, կարճ տևած՝ ամբողջ աշխարհում, պետք է լինի միևնույնը։ Ինչ հայտնագործում է բանական մի արարած, նույնը կարող է հայտնագործել մեկ ուրիշը—այդ զուրկ չէ հնարավորությունից։ Բացի դրանից, մտքի ոտնգծագործությունը, ինչպես և բնության արգասիքները—բոտ մարդկության զարգացման ընթացքի—ունեն իրենց

ժամանակը, երբ նրաք երեւան են գալիս. աշուկա, երբեմն ցամաքի և ծովի վրա ուսումնասիրվում է նույն առարկան, և երեւան են գալիս ազգակից դադափարներ, ինչպէս այդ տեղի տնեցաւ, օրինակ, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվի դեպքում: Եվ վերջապէս, հենց այդ առարկան ինքը առանձնապէս դժվար չէ և աշնքան էլ թաքնված չէ: Բայց եթէ աշուկամենայնիվ մտածենք, թէ որքան քիչ են եղել խորամիտ մաթեմատիկոսներ, նույնիսկ նրանցից լատիստները չբռնում, որոնք հանգել են երկրաչափութեան մեջ այդ բացի լմբոնմանը և ձգտել են նրա լրացմանը.— որ էվկլիդեսի ժամանակներից և նույնիսկ մարգկութեան դոկտրինայի ժամանակից ի վեր, չնայած բազմաթիվ սքանչելի խորը հետազոտութեաններին (որոնց մեջ գաւառութեան խառութեան, պարզութեան ու խորութեան տեսակետից «Տեսնում ենք», որ անմիջականորեն նախորդում է «Ապենդիքսին», անվիճելիորեն զրաւում է առաջին տեղը), այդ անպարկեշտ, համեմատելի դեպք մամուլում, ոչ մի նշանակալի բան երեւան չի եկել, եթէ նկատի առնենք, որ աշնքան լուրջ էտախնդատուներ ի վիճակի չի եղել հասկանալու «Ապենդիքսը»:

Լորաշէսկու կողմից 1840 թվականին գերմաներեն լեզվով հրատարակված աշխատութեան ներածականում որոշակի նշվում է, որ աշխատութեան մեջ շարադրված արդշունքները նա դեռևս 1829 թվականին հրապարակել է «Kazanский Вестник»-ում, 3 տարի շուտ, քան Բոլայի աշխատութիւնը:

Յանոշ Բոլայը Լորաշէսկու աշխատութիւնն ուսումնասիրելուց հետո, գրում է գիտողութեանը: Նա պատշաճ գնահատութիւն է տալիս Լորաշէսկուն և նրա մի շարք եզրակացութիւնները համարում հանճարեղ:

Յանոշ Բոլայը իր կյանքի վերջին տարիներին շարունակում է դրադիկ մաթեմատիկական տարրեր խնդիրներով: Նա նպատակ է դնում կատարել լուրջ հայտնադործութիւններ և անցնել Գաուսից ու Լորաշէսկուց. սակայն ստեղծագործական տարիները արդեն անցել էին և այդ ցանկութիւնները մնային լոկ ցանկութիւններ:

Այդ ֆանտաստիկ խնդիրների թվին է պատկանում Յանոշի այն ցանկութիւնը, որ իր մեջ առաջացել էր դեռևս երիտասարդական տարիներին: Նա մտածում էր ստեղծելու ռուսումնաք ընդհանուր լարօրութեան համար: Ի՞նչն է դրդել Յանոշին մտածելու նման գիտութեան մասին. նախ և առաջ այն, որ նա տարել է գասակարգային հասարակութեան մեջ, տեսել է ցնցող անարդարութիւն և կամայականութիւն, նա սիրել է աշխատավոր ժողովրդին, ասելութեամբ է լրված եղել դեպի տիրող գասակարգի ներկայացուցիչները: Նա եղել է հայրենասեր, չի հանդուրժել ազգային խտրականութիւնը: 1848 թվականին Հունգարական ռեւոլյուցիայի ժամանակ, չնայած իր ծանր հիվանդութեան, նա դիմում է, որպէսզի իրեն, որպէս նախկին սպայի, օգտագործեն համապատասխան միջնորդութիւնում իրեն կոնսուլտանտ: Յանոշը մեծ հաւատ է ունեցել դեպի գիտութիւնը: Բարձր գնահատելով գիտութեան վերափոխիչ դերը հասարակութեան կյանքում, նա իր ժամանակակից գիտութեան մեջ վերափոխիչ դեր կատարեց:

Յանոշ Բոլայը իր կյանքի վերջին շրջանում մնաց բոլորովին միայնակ: Նա իր հօր մահից հետո տարեց ընդամենը երեք տարի:

Բոլայի մահից հետո գիտութիւնը խոշոր թփուք է կատարել դեպի առաջ: Ն. Ի. Լորաշէսկու և Յա. Բոլայի ոչ-էվկլիդեսյան կամ հիպերբոլիկ երկրաչափութեան հայտնադործումից հետո Ռիմանը հայտնադործում է էլիպտիկ եր-

կրաչափությունը: Այս նոր տեսակի երկրաչափությունները սգնում են էնշ-տեյնին ստեղծելու հարաբերականության ընդհանուր տեսությունը, որը մեծ դեր է խաղում ժամանակակից ֆիզիկայում ու աստրոֆիզիկայում:

Հունգարական Դեմոկրատական Ռեսպուբլիկայում՝ Յանոշի հայրենիքում, վերջին տասնամյակում գիտահետազոտական աշխատանքները լայն թափ են ստացել: Ժամանակակից գիտության ու տեխնիկական առաջադիմության բարձր աստիճանի վառ ապացույցներ են հանդիսանում սովետական գիտության փայլուն հաղթանակները, խաղաղ նպատակով ներատնային էներգիայի օգտագործումը, երկրի և Արեգակի արհեստական արբանյակների ստեղծումը, կոսմիկական տարածությունն ուսումնասիրելու նպատակով սովետական հրթիռների հաջող արձակումը:

Գիտության այս նվաճումները հիացմունք են առաջացրել ամբողջ աշխարհում: Բոլայի մահից հետո պատմական խոշոր իրադարձություններ են տեղի ունեցել ժողովուրդների հասարակական-քաղաքական կյանքում:

Հզոր սոցիալիստական լազերի պետությունների շարքում իր պատվազոր տեղն ունի հունգար ստեղծագործ ժողովուրդը, որի ազատագրության մասին միշտ երազել է Յա. Բոլայը:

1903 թվականին Հունգարիայի Գիտությունների ակադեմիան հանդիսավոր կերպով նշեց Բոլայի ծննդյան 100-ամյակը ու սահմանեց Յանոշի անվան մրցադաշտին մրցանակ:

1947 թվականին Հունգարիայում կադմակերպվեց Յանոշ Բոլայի անվան մաթեմատիկական ընկերություն, որը այլ մաթեմատիկական ինստիտուտների հետ միասին, դարձել է մաթեմատիկական գիտության հիմնական կենտրոն:

Յանոշի հիմնական աշխատությունը՝ «Ապենդիքսը» թարգմանվել է աշխարհի տարբեր ժողովուրդների լեզուներով:

Այս հանդիսավոր օրը ցանկանանք հունգար ժողովուրդին, նրա գիտնականներին նորանոր հաջողություններ գիտության բնագավառում, որին առանց մնացորդի նվիրեց իր ամբողջ կյանքը հունգարական ականավոր գիտնական Յանոշ Բոլայը:

Հայկական ՍՍԽ ԳԱ Բնագիտության և
տեխնիկայի պատմության հանձնաժողով

Ստացված է 26 IV 1960

Г. Б. Петросян

О жизни и деятельности Яноша Бойай (К столетию со дня рождения)

Р е з ю м е

В начале статьи кратко указывается огромное значение открытия неевклидовой геометрии в истории наук после открытия закона всемирного тяготения, затем характеризуются основные этапы развития геометрии с древнейших времен до начала XIX века. Далее излагается жизнь и деятельность выдающегося венгерского математика Яноша Бойай. Особо отмечается, что Янош Бойай независимо от выда-

ющего русского математика Н. И. Лобачевского открыл неевклидовую геометрию. В статье приводятся выдержки из писем Фаркаша Гаусса и из оставленных записей самого Бойай.

Своими трудами Бойай, как и Лобачевский, намного опередил свое время. Отмечается то громадное значение, которое имеет неевклидова геометрия в современной науке.

Статья заканчивается характеристикой достижений освобожденного венгерского народа, строящего социализм, о счастье которого всегда мечтал славный сын венгерского народа Янош Бойай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойай Ж. *Избранные труды*. Записки о неевклидовой геометрии. Бреша, 1832.
2. Лобачевский Н. И. Том первый. Государственное издательство, М.—Л., 1946.
3. Янош Бойай. Государственное издательство, М.—Л., 1950.
4. Историко-математические исследования. Выпуск I. Государственное издательство, М.—Л., 1948.
5. Ливановна Анна. Три судьбы. Издательство „Молодая гвардия“. 1959.

Г. В. Бадалян

Некоторые таубероновые теоремы для обобщенного ряда Тейлора

В настоящей работе уточняется теорема 11 работы [1], а также устанавливаются некоторые следствия, вытекающие из уточнения этой теоремы и теорем $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ работы [2].

Теорема 11 работы [1] утверждает, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу (A_1) (см. [1]) и

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \exp\left(-\delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i^2}\right)\right), \quad (1)$$

где $\delta > 0$ — произвольное число, а $0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} = \infty$,

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится (к той же сумме) в обычном смысле.

Эта теорема в [1] доказана при помощи нескольких лемм, причем условие (1) использовано только в лемме 3, где доказывается ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, а в остальных леммах использовано только условие $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$.

Что касается доказательства самой теоремы, то условие (1) использовано постольку, поскольку там использовано утверждение леммы 3.

Из вышесказанного следует, что уточнение леммы 3 повлечет за собой и уточнение теоремы 11.

Ниже мы приводим эти уточнения.

Лемма 3. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу (A_1) и

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i^2}}\right), \quad (2)$$

то

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| < A, \quad (3)$$

где $A > 0$ не зависящая от n постоянная.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) = s. \quad (4)$$

Это значит, что при достаточно малом $x = x(\varepsilon) > 0$ будет

$$|\varphi(x) - S| < \varepsilon. \quad (5)$$

Далее

$$\begin{aligned} S_m - S &= \varphi(x) - S + S_m - \varphi(x) = \\ &= \varphi(x) - S + \sum_{k=1}^m a_k [1 - \omega_k(x)] - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x) \end{aligned}$$

или

$$|S_m - S| \leq |\varphi(x) - S| + \sum_{k=1}^m |a_k| [1 - \omega_k(x)] + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot \omega_n(x). \quad (6)$$

В силу леммы 1 теоремы 11 работы [1] имеем

$$\sum_{k=1}^m |a_k| [1 - \omega_k(x)] < C \sum_{k=1}^m |a_k| \prod_{\nu=2}^k \frac{\gamma_{\nu}}{\gamma_{\nu} - \gamma_1} x^{\gamma_1}. \quad (7)$$

Остается нам оценить

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \omega_n(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \omega_n(x) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} \leq \\ &\leq C \frac{1}{\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}^2}} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \\ &= \frac{C}{\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}^2}} \cdot \prod_{\nu=1}^m \gamma_{\nu} \int_{C_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \sum_{\nu=0}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v^2}} \cdot \prod_{v=1}^m \gamma_v \left\{ \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \right\}, \quad (8)$$

где контур C'_m оставляет вне ограниченной им области точку $\zeta=0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{x^{-\zeta}}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{x^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \right)' = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-\zeta} \ln \frac{1}{x}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} - \frac{x^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \cdot \sum_{v=1}^m \frac{1}{\zeta + \gamma_v} \right], \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{x^{-\zeta}}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} = \frac{1}{\prod_{v=1}^m \gamma_v} \left(\ln \frac{1}{x} - \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right). \quad (9)$$

Полагая

$$x = \prod_{v=2}^m \left(\frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \quad (10)$$

получаем

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \ln \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} - \frac{\gamma_1^2}{2(\gamma_v - \gamma_1)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\left| \ln \frac{1}{x} - \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v} \right| < C \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2}. \quad (11)$$

Для последнего слагаемого правой части (8), в силу (9) и (11), имеем

$$0 < \frac{\prod_{v=1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} < C x^{\gamma_1} \prod_{v=2}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = C. \quad (12)$$

В силу (10), (11) и (12) из (8) получаем

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| w_n(x) < C_0, \quad (13)$$

где C_0 — абсолютная постоянная.

В силу (4), (5), (7) и (13) из (6) следует, что

$$|S_m| < A,$$

где A — абсолютная постоянная.

Этим лемма доказана.

Используя остальные леммы теоремы 11 и весь ход ее доказательства [1], доказывается следующее уточнение последней.

Теорема 1. Из суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по методу (A_r) и при условии

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma^n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right),$$

где $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$, следует его сходимости (к той же сумме) в обычном смысле.

Следует отметить, что вышеприведенная теорема не может быть существенно уточнена, так как в случае, когда

$$\gamma_v = \gamma, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

она совпадает с известной теоремой Литтльвуда (см. [3], стр. 196).

Отметим теперь результаты, которые вытекают из сочетания сформулированной здесь теоремы 1 с теоремами $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ работы [2].

Теорема 2. Пусть даны:

1. Ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(t), \quad 0 < t \leq 1,$$

2. $a_n = o\left(\frac{1}{\gamma^n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right),$

3. $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S$, где S — некоторое число, а последовательность $\{t_m\}$ обладает свойствами

$$(x) \begin{cases} t_m \downarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots \\ \frac{t_m}{t_{m-1}} \leq d, \quad d > 1 \text{ — любое конечное число.} \end{cases}$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

сходится к числу S в обычном смысле.

Теорема 2'. Пусть

1) последовательность чисел $\{t_m\} \in (0, 1)$ обладает свойствами

$$(\bar{\alpha}) \begin{cases} t_m \downarrow 0, m \rightarrow \infty, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty, \end{cases}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty,$$

тогда существует расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, такой, что

$$1) a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right),$$

$$2) \varphi(t_m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t_m) = o(1), \text{ когда } m \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Пусть даны:

1. Ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$2. a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i^2}}\right),$$

$$3. \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

где S — некоторое число, а последовательность $\{t_m\}$ удовлетворяет условиям

$$(\alpha') \begin{cases} t_m \downarrow 0 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = 1. \end{cases}$$

огда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к числу S в обычном смысле.

Теорема 3'. Пусть последовательность чисел $\{t_m\} \in (0, 1)$ обладает свойствами

$$\begin{cases} t_m \downarrow 0, m \rightarrow \infty \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = d, d > 1 \text{ любое число,} \end{cases}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty.$$

Тогда существует расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

такой, что

$$1) a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$$

$$2) \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S.$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 IV 1960

Հ. Վ. Բադալյան

ՏԱՌԻԲԵՐՅԱՆ ՈՐՈՇ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԹԵՅԼՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱՐՔԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ ճշտված է $|1|$ աշխատությունում շարադրված տատրերյան մի թեորեմ, որը վերջնական տեսքով ձևակերպվում է ապաևս.

$$\text{Եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ շարքը հանրադրամարելի է ըստ } (A_{\gamma}) \text{ մեթոդի}$$

և

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right),$$

որտեղ $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$, ապա արդ շարքը զուգամետ է

նաև սովորական խմատով, ըստ որում զուգամետում է նույն դրամարին:

Աշխատանքում նշված են նաև այս թեորեմի և $[2]$ աշխատության մեջ շարադրված A , $\overline{A}$, B , $\overline{B}$ թեորեմների բաղդատումից բխող հետևանքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, 11, № 2, 3, 1958.

2. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства функций, представленных обобщенным рядом Тейлора. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, 12, № 4, 1959.

3. Харди Г. Расходящиеся ряды. ИЛ, М., 1951.

Э. Р. Розендори

Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве

1. Как известно, плоскость Лобачевского не допускает регулярного вложения в E_3 [1] (через E_m обозначаем m -мерное евклидово пространство). Д. Блануша построил реализацию плоскости Лобачевского в E_6 в виде поверхности класса C^∞ , не имеющей самопересечений [2]. Покажем, что, если допускать самопересечения (точнее самоприкосновения), то, пользуясь методом Д. Блануши, можно построить в E_3 поверхность с метрикой

$$ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2, \quad (1)$$

где $f(u)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, определенная для всех значений u ($-\infty < u < +\infty$), причем указанная поверхность принадлежит к тому же классу C^n или C^∞ , что и $f(u)$. В частности, если $f(u) = \sinh u$, получим вложение плоскости Лобачевского в E_3 .

2. Используем функции:

$$\varphi_1(u) = \left(\int_0^u e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{u-1} e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_2(u) = \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^u e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\psi_1(u) = Na \left(\left| \max_{2n-1 < u < 2n+1} (|f|, |f'|) \right| + 1 \right), \text{ если } 2n-1 < u < 2n+1,$$

$$\psi_2(u) = Na \left(\left| \max_{2n-2 < u < 2n} (|f|, |f'|) \right| + \sqrt{2} \right), \text{ если } 2n-2 < u < 2n.$$

Здесь $| \cdot |$ обозначает целую часть, n принимает всевозможные целые значения, $N \geq 2$ — фиксированное целое число, $a = [\max |\varphi'_i|] + 2$. Функции φ_1 и φ_2 рассматривались в работе [2], ψ_1 и ψ_2 — аналог ступенчатых функций работы [2]. Для реализации важны следующие свойства φ_i , доказанные в [2]:

- а) $\varphi_i(u)$ — периодические функции класса C^∞ с периодом 2;
- б) $\varphi_1(1) = \varphi_1^{(k)}(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$;

при $u \neq 2n+1$ $\varphi_1(u) \neq 0$, при $u \neq 2n$ $\varphi_2(u) \neq 0$;

в) $\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1$.

Поверхность с уравнениями

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= f(u) \varphi_1(u) \frac{\cos v \psi_1(u)}{\psi_1(u)}, & x_2 &= f(u) \varphi_1(u) \frac{\sin v \psi_1(u)}{\psi_1(u)}, \\ x_3 &= f(u) \varphi_2(u) \frac{\cos v \psi_2(u)}{\psi_2(u)}, & x_4 &= f(u) \varphi_2(u) \frac{\sin v \psi_2(u)}{\psi_2(u)}, \\ x_5 &= \int_0^u \sqrt{1 - \left| \frac{1}{\psi_1(t)} \frac{d}{dt} (f(t) \varphi_1(t)) \right|^2 - \left| \frac{1}{\psi_2(t)} \frac{d}{dt} (f(t) \varphi_2(t)) \right|^2} dt \end{aligned} \right. \quad (2)$$

реализует метрику (1).

В этом можно убедиться, непосредственно вычисляя $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_5^2$ (учитывая, что $\psi_1'(u) = \psi_2'(u) = 0$).

Замечание. Подинтегральное выражение в формулах (2) имеет смысл, так как в силу построения ψ_i

$$\left| \frac{1}{\psi_i(u)} \frac{d}{du} (f(u) \varphi_i(u)) \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям Д. Блануши (см. [2]), можно установить, что x_i принадлежат к тому же классу C^n или C^∞ , к которому принадлежит $f(u)$.

3. Остановимся на расположении в E_5 поверхности, заданной уравнениями (2). Из (2), (3) и из свойств φ_i и ψ_i (в частности из не-соизмеримости $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ при всех значениях u) вытекает следующее:

а) Поверхность неограниченно простирается вдоль оси x_5 и заключена внутри цилиндра $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(Na)^{-1}$, радиус которого можно сделать как угодно малым за счет выбора N .

б) Линии $v = \text{const}$ однозначно проектируются на ось x_5 .

в) Различные линии $u = \text{const}$ не имеют общих точек. Каждая из них проектируется на плоскости (x_1, x_2) и (x_3, x_4) в окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(u)$ и $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(u)$ соответственно, где $r_i(u) = f(u) \varphi_i(u) (\psi_i(u))^{-1}$. Если u_0 — не целое, то на линии $u = u_0$ разным значениям v соответствуют разные точки.

г) Если k — целое число, то линии $u = 2k$ представляют собой окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(2k)$, $x_3 = x_3(2k)$, а линии $u = 2k+1$ — окружности $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(2k+1)$, $x_1 = x_1(2k+1)$. Эти окружности являются линиями самоприкосновения поверхности. В каждой точке такой окружности счетное число областей поверхности, соответствующих разным значениям v , касаются друг друга, причем имеют бесконечный порядок соприкосновения. Поверхность пересекается с под-

пространством (x_1, x_2, x_3) по последовательности линий $u = 2k$, с подпространством (x_3, x_4, x_5) — по последовательности линий $u = 2k + 1$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 16 XI 1959

Է. Ռ. ՌԱԳԵՆԳՐԵ

ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՀՆԳԱԶԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵԶ $ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ ՄԵՏՐԻԿԱՅԻ ՌԵԱԼԻԶԱՑԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դ. Հեյրեբարը ցույց է տվել [1], որ Լորանսկու հարթությունը թույլ չի տալիս սկզբնական պայմաններով էվկլիդեսյան հոռաչափ տարածության մեջ:
Դ. Բլանշան 1955 թ. կառուցել է այդ հարթության սկզբնական էվկլիդեսյան վեցաչափ տարածության մեջ C^∞ դասի մակերևույթի տեսքով [2]:

Այս աշխատանքում Բլանշանյան մեթոդի օգնությամբ ցույց է տրվում, որ հնդաչափ տարածության մեջ կարելի է կառուցել $ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ մետրիկա ունեցող մակերևույթ, վերջինի ինքնաշոշափման առկայության դեպքում: Ընդ որում $f(u)$ -ն դրական անընդհատ դիֆերենցիալի ֆունկցիա է, որոշված u -ի բոլոր արժեքների համար ($-\infty < u < \infty$): Մասնավոր դեպքում, երբ $f(u) = \cosh u$ ստանում ենք Լորանսկու հարթության սկզբնական հնդաչափ տարածության մեջ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гильберт Д. «Основания геометрии». Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Blauša D. «Monatshfte fur Mathematik». В. 59, Н. 3, 1955, 217—229.