

С. Е. Карапетян

Конфигурация L

Введение

В [3] было получено уравнение квадрики Ли для всех линейчатых поверхностей $(\omega_2^1 = \lambda \omega_1^2)$ конгруэнции. В [4], [10], [11] были рассмотрены гармонические линейчатые поверхности фокальных поверхностей конгруэнции. Как известно, на первой фокальной поверхности ее гармоническим линейчатым поверхностям соответствует сопряженная сеть $(\alpha(\omega_1^1)^2 - \gamma(\omega_2^1)^2 = 0)$, обе касательные которой составляют гармоническую четверку с двумя касательными первой фокальной сети. В соответствии с этим вышеупомянутая сопряженная сеть называется гармонической сетью первой фокальной поверхности (A_1) .

Гармоническую сеть поверхности (A_1) обозначим через Γ_1 . Гармонические линейчатые поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$, соответствующие сети Γ_1 , обозначаются той же буквой Γ_1 . Через Γ_2 обозначим гармоническую сеть фокальной поверхности (A_2) и гармонические линейчатые поверхности конгруэнции $(A_2 A_1)$, соответствующие этой сети.

В настоящей работе применяется метод внешних форм Карта-на [1]. В § 1 излагается аналитический аппарат (см. [2] стр. 344—356).

В § 2 доказывается, что четыре плоскости одного пучка, а именно: две фокальные плоскости конгруэнции и две касательные плоскости произвольных двух линейчатых поверхностей конгруэнции (с общей точкой касания), составляют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда эти линейчатые поверхности сопряжены в смысле Сания. Как следствие, получается, что как поверхности Γ_1 , так и поверхности Γ_2 , сопряжены в этом смысле.

Сложное отношение касательных плоскостей четырех поверхностей Γ_1 и Γ_2 не меняется, когда общая точка касания движется на луче конгруэнции. Это отношение равняется -1 тогда и только тогда, когда конгруэнция есть V. Поверхности Γ_1 и Γ_2 совпадают только при W конгруэнции, и наоборот.

Как известно, (A_1) является общей фокальной поверхностью двух конгруэнций последовательности Лапласа. Линейчатые поверхности, принадлежащие другой конгруэнции последовательности и соответ-

вующие линиям Γ_1 , обозначаются через Γ_1' . Аналогичные линейчатые поверхности, полученные на стороне фокальной поверхности (A_2), обозначим через Γ_2' .

В § 3 получены квадрики Ли для поверхностей Γ_1 , Γ_2 , Γ_1' и Γ_2' ; мы их обозначим соответственно теми же буквами.

В §§ 3 и 4 даются геометрические характеристики двух сопряженных (в смысле Сания) линейчатых поверхностей конгруэнции. Первая публикация одной из этих характеристик принадлежит Р. Н. Щербакову [9].

В работе [3] доказывается, что обе касательные прямые к фокальной сети поверхности (A_1) являются одновременно образующими для всех четырех квадрик Γ_1 и Γ_1' .

Если одна пара соответствующих квадрик Γ_1 и Γ_1' имеет общую касательную плоскость вдоль луча данной конгруэнции, то она имеет общую касательную плоскость вдоль луча последующей конгруэнции последовательности Лапласа (это условие характеризуется инвариантным уравнением (25)). Если каждая пара соответствующих квадрик из Γ_1 и Γ_1' удовлетворяет этому условию, то (A_1) есть поверхность второго порядка и наоборот.

В § 5 рассматривается случай, когда в каждой паре соответствующие квадрики из Γ_1 и Γ_1' совпадают (инвариантные уравнения (33)). В этом случае получаем: 1) последовательность, порождаемая конгруэнцией ($A_1 A_2$), есть R последовательность; 2) каждая пара соответствующих квадрик из Γ_2 и Γ_2' (и следовательно для каждой фокальной поверхности последовательности Лапласа) совпадает; 3) все фокальные поверхности последовательности являются поверхностями второго порядка; 4) такая конфигурация (для краткости обозначим ее через L) зависит только от десяти произвольных постоянных.

В § 6 рассматриваются новые свойства конфигурации L . Доказывается, что последовательность Лапласа замкнута и образует T конфигурацию. Доказывается, что (при совмещении A_3 и A_4 с третьей и четвертой вершинами конфигурации T) поверхность второго порядка (A_1) совпадает с поверхностью (A_1), а поверхность (A_2) — с поверхностью (A_3). Следовательно, конфигурация L образована из двух поверхностей второго порядка. Диагонали $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ сопряжены относительно этих двух поверхностей одновременно и описывают одну линейную конгруэнцию. Каждая директриса этой линейной конгруэнции пересекается со всеми касательными одной серии сетей Γ_1 и Γ_2 .

§ 1. Тетраэдр 1-го порядка конгруэнции

В этом параграфе дается основной аналитический аппарат, т. е. строится тетраэдр 1-го порядка конгруэнции и рассматриваются дифференциальные окрестности до 5-го порядка.

Инфинитезимальное перемещение тетраэдра $\{A_i\}$ в проективном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j, \omega_j^k]. \quad (2)$$

Семейство тетраэдров первого порядка $\{A_i\}$ выделяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим с помощью уравнений структуры (2) два квадратичных уравнения

$$[\omega_1^2, \omega_2^4] + [\omega_1^3, \omega_3^4] = 0, \quad [\omega_1^4, \omega_3^1] + [\omega_2^4, \omega_3^2] = 0. \quad (4)$$

Развертывая их в линейные уравнения с помощью леммы Картана, получим

$$\begin{aligned} \omega_2^4 &= \alpha \omega_1^3 - \beta \omega_3^4, & \omega_2^1 &= \gamma' \omega_1^3 + \beta' \omega_2^4, \\ \omega_1^4 &= \beta \omega_1^3 + \gamma \omega_2^4, & \omega_4^1 &= -\beta' \omega_1^3 + \alpha' \omega_2^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (5), получим

$$\begin{aligned} \alpha[\Delta \omega_1^3] - [\Delta \beta \omega_3^4] &= 0, & \gamma'[\Delta \omega_1^3] + [\Delta \beta' \omega_2^4] &= 0, \\ [\Delta \beta \omega_1^3] + \gamma[\Delta \omega_2^4] &= 0, & -[\Delta \beta' \omega_1^3] + \alpha'[\Delta \omega_2^4] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Развертывая квадратичные уравнения (6) по лемме Картана, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \alpha_1 \omega_1^3 - \beta_1 \omega_3^4, & \Delta \gamma' &= \gamma'_1 \omega_1^3 + \beta'_1 \omega_2^4, \\ \Delta \beta &= \alpha \beta_1 \omega_1^3 + \gamma \beta_2 \omega_2^4, & \Delta \beta' &= \gamma' \beta'_1 \omega_1^3 + \alpha' \beta'_2 \omega_2^4, \\ \Delta \gamma &= \beta_2 \omega_1^3 + \gamma_2 \omega_2^4, & \Delta \alpha' &= -\beta'_2 \omega_1^3 + \alpha'_2 \omega_2^4. \end{aligned} \quad (7)$$

Внешний дифференциал системы (7) приводит к квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} [\Delta \alpha_1 \omega_1^3] - [\Delta \beta_1 \omega_3^4] &= 0, & [\Delta \gamma'_1 \omega_1^3] + [\Delta \beta'_1 \omega_2^4] &= 0, \\ \alpha[\Delta \beta_1 \omega_1^3] + \gamma[\Delta \beta_2 \omega_2^4] &= 0, & \gamma'[\Delta \beta'_1 \omega_1^3] + \alpha'[\Delta \beta'_2 \omega_2^4] &= 0, \\ [\Delta \beta_2 \omega_1^3] + [\Delta \gamma_2 \omega_2^4] &= 0, & -[\Delta \beta'_2 \omega_1^3] + [\Delta \alpha'_2 \omega_2^4] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Применение леммы Картана к квадратичным уравнениям второй строки системы (8) дает

$$\begin{aligned} \Delta \beta_1 &= \beta_{11} \omega_1^3 + \gamma \beta_{12} \omega_2^4, & \Delta \beta'_2 &= \gamma'_1 \beta'_{12} \omega_1^3 + \beta'_{22} \omega_2^4, \\ \Delta \beta_2 &= \alpha \beta_{12} \omega_1^3 + \beta_{22} \omega_2^4, & \Delta \beta'_1 &= \beta'_1 \omega_1^3 + \alpha' \beta'_{12} \omega_2^4. \end{aligned} \quad (9)$$

Новое дифференцирование системы (9) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} [\Delta \beta_{11} \omega_1^2] + \gamma [\Delta \beta_{12} \omega_2^2] &= 0, & \gamma' [\Delta \beta_{12} \omega_1^2] + [\Delta \beta_{22} \omega_2^2] &= 0, \\ \alpha [\Delta \beta_{12} \omega_1^2] + [\Delta \beta_{22} \omega_2^2] &= 0, & [\Delta \beta_{12} \omega_1^2] + \alpha' [\Delta \beta_{12} \omega_2^2] &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Если закрепить луч конгруэнции, то все главные формы $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, ..., $\Delta \beta_{12}$ обратятся в нули, при этом закон вариации коэффициентов α , β , ..., β_{12} определяется формулами (см. [2], стр. 344–356)

$$\begin{aligned} \delta \ln \alpha &= 2\pi_3^2 - \pi_1^2 - \pi_4^2, & \delta \beta_2 &= \beta_2(\pi_3^2 - \pi_1^2) + \pi_1^2, \\ \delta \ln \gamma &= \pi_1^2 + \pi_4^2 - 2\pi_3^2, & \delta \gamma_{12} &= \gamma_{12}(\pi_1^2 - \pi_2^2) - 3\pi_4^2, \\ \delta \beta &= \beta(\pi_3^2 - \pi_2^2) - \pi_3^2, & \delta \beta_{11} &= \beta_{11}(\pi_3^2 + \pi_4^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2), \\ \delta \alpha_1 &= \alpha_1(\pi_3^2 - \pi_1^2) - 3\pi_3^2, & \delta \beta_{22} &= \beta_{22}(\pi_3^2 + \pi_4^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2), \\ \delta \beta_1 &= \beta_1(\pi_4^2 - \pi_2^2) - \pi_4^2, & \delta \beta_{12} &= \beta_{12}(\pi_4^2 - \pi_1^2) + \pi_1^2, \end{aligned} \quad (10')$$

и аналогичными формулами, полученными из (10') заменой указателей 1, 3 соответственно на 2, 4 и добавлением штрихов к коэффициентам α , β , γ с любыми указателями.

§ 2. Гармоническая сеть и гармонические линейчатые поверхности

Инвариантное уравнение квадрики Ли для линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda \omega_1^2$, относительно тетраэдра первого порядка конгруэнции имеет вид [3]

$$\begin{aligned} 2\lambda(x^1x^4 - \lambda x^2x^3) - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2)x^3x^4 + \\ + \lambda(\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta - \alpha)x^3x^3 + (\lambda^2\alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma')x^4x^4 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$d \ln \lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_4^4. \quad (12)$$

В заметке [3] было доказано, что две образующие поверхности (11) совпадают с двумя касательными фокальной сети (A_1) тогда и только тогда, когда эта поверхность является квадрикой Ли для линейчатых поверхностей $\alpha(\omega_1^2)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$.

Соответствующие этим линейчатым поверхностям линии на фокальной поверхности (A_1) являются сопряженными линиями. Для доказательства последнего допустим, что ребро A_1A_2 тетраэдра является второй касательной фокальной сети (A_1) , т. е. допустим, что $\beta = 0$. Тогда с помощью уравнения $dA_1 = \omega_1^1A_1 + \omega_2^2A_2 + \omega_3^3A_3$ мы покажем, что касательные к линиям $\alpha(\omega_1^2)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$ и асимптотическим линиям $\alpha(\omega_1^2)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$ пересекаются с прямой A_2A_3 в четырех точках $A_3 \pm \sqrt{\alpha\gamma}A_2$, $A_3 \pm \sqrt{-\alpha\gamma}A_2$. Сложное отношение этих четырех точек напишется в виде

$$\begin{aligned} (A_3 + \sqrt{\alpha\gamma}A_2, A_3 - \sqrt{\alpha\gamma}A_2, A_3 + \sqrt{-\alpha\gamma}A_2, A_3 - \sqrt{-\alpha\gamma}A_2) = \\ = (\sqrt{-\alpha\gamma} - \sqrt{\alpha\gamma})^2 : (\sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{-\alpha\gamma})^2 = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, касательные к асимптотическим линиям гармонически разделяют касательные к линиям $\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$, т. е. последние линии на поверхности (A_1) образуют сопряженную сеть.

Теперь докажем, что касательные этой сопряженной сети гармонически разделяют касательные фокальной сети (A_1) . Действительно, для тетраэдра $\beta=0$ прямые $A_1 A_2$ и $A_1 A_3$ совпадают с фокальными касательными и сложное отношение четырех точек $(A_1, A_3, A_2 + \sqrt{\alpha\gamma}A_2, A_3 - \sqrt{\alpha\gamma}A_2)$ тоже равняется -1 . Имея в виду эти два свойства линий $\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$, мы их в дальнейшем назовем гармонической сетью фокальной поверхности (A_1) , а соответствующие им линейчатые поверхности — гармоническими линейчатыми поверхностями.

Касательная плоскость поверхности (11) вдоль луча $A_1 A_2$ имеет уравнение

$$x^1 x_4 - \lambda x^2 x_3 = 0, \quad (13)$$

где x_i являются координатами текущей точки плоскости, а x^1, x^2 — координатами точки касания. Если через эту точку касания мы проведем еще одну касательную плоскость к любой другой линейчатой поверхности $(\omega_1^4 = \lambda' \omega_1^3)$, то мы будем иметь четыре плоскости, принадлежащие одному пучку, а именно: эти две касательные плоскости и две фокальные плоскости конгруэнции. Сложное отношение этих плоскостей равняется $\lambda : \lambda'$ и, следовательно, не зависит от точки касания. Рассмотренные плоскости составляют гармоническую четверку, если $\lambda = -\lambda'$, и поверхности $\omega_1^4 = \lambda \omega_1^3$ и $\omega_1^4 = -\lambda \omega_1^3$ будут сопряжены в смысле Сания ([5], стр. 153). Так как гармонические линейчатые поверхности определяются уравнениями $\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$ ($\lambda = -\lambda'$), то касательные плоскости к гармоническим линейчатым поверхностям гармонически разделяют фокальные плоскости конгруэнции. Сложное отношение четырех плоскостей одного пучка, именно двух касательных плоскостей к гармоническим линейчатым поверхностям одной фокальной поверхности, и двух касательных плоскостей к гармоническим линейчатым поверхностям другой фокальной поверхности, равно инвариантному выражению $(\sqrt{\gamma\gamma'} - \sqrt{\alpha\alpha'})^2 : (\sqrt{\gamma\gamma'} + \sqrt{\alpha\alpha'})^2$. Последнее сложное отношение равняется -1 тогда и только тогда, когда выполняется условие $\alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0$. Итак, касательные плоскости к четырем гармоническим линейчатым поверхностям конгруэнции составляют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда конгруэнция является конгруэнцией V .

Нетрудно заметить, что для конгруэнций V , и только для них, асимптотическим линиям одной фокальной поверхности соответствует гармоническая сеть другой фокальной поверхности. Также можно заметить, что для конгруэнций W , и только для них, гармонические сети в обеих фокальных поверхностях соответствуют друг другу.

§ 3. Квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей

Найдем уравнение квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей первой фокальной поверхности. Уравнение этих линейчатых поверхностей, как известно, пишется в виде $\sqrt{\alpha} \omega_1^3 = \mathcal{E} \sqrt{\gamma} \omega_2^3$ ($\mathcal{E} = \pm 1$), следовательно,

$$\lambda = \mathcal{E} \sqrt{\alpha} : \sqrt{\gamma}. \quad (14)$$

Дифференцируя (обычным образом) уравнение (14), получим

$$d \ln \lambda + \omega_1^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^2 = \frac{\Delta \alpha - \Delta \gamma}{2}.$$

Внося в последнее уравнение значения $\Delta \alpha$ и $\Delta \gamma$ из уравнений (7), в силу уравнения (12) получим

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\beta_1 + \gamma_2}{2}. \quad (15)$$

После подстановки значений λ , λ_1 и λ_2 в уравнение (11), мы получим уравнение квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей первой фокальной поверхности конгруэнции. Оно будет иметь вид

$$2\alpha x^2 x^3 - 2\mathcal{E} \sqrt{\alpha \gamma} x^1 x^4 + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left[\mathcal{E} \sqrt{\gamma} (\alpha_1 - \beta_2) - \sqrt{\alpha} (\gamma_2 + \beta_1) \right] x^3 x^4 - \\ - (\alpha \alpha' - \gamma \gamma' - 2\mathcal{E} \beta' \sqrt{\alpha \gamma}) x^4 x^4 - 2\alpha \beta x^3 x^3 = 0. \quad (16)$$

Проделав те же выкладки для второй фокальной поверхности, получим уравнение квадрики Ли гармонических линейчатых поверхностей ($\sqrt{\gamma'} \omega_1^3 = \mathcal{E} \sqrt{\alpha'} \omega_2^3$)

$$2\alpha' x^1 x^4 - 2\mathcal{E} \sqrt{\alpha' \gamma'} x^2 x^3 + \frac{\sqrt{\alpha'}}{2} \left[\mathcal{E} \sqrt{\gamma'} (\alpha'_1 - \beta'_1) - \sqrt{\alpha'} (\gamma'_2 + \beta'_2) \right] x^3 x^4 - \\ - (\alpha \alpha' - \gamma \gamma' - 2\mathcal{E} \beta' \sqrt{\alpha' \gamma'}) x^3 x^3 - 2\alpha' \beta' x^1 x^4 = 0, \quad (\mathcal{E} = \pm 1). \quad (17)$$

Это уравнение можно получить также из уравнения (16) с помощью замены указателей 1 и 3 соответственно на 2 и 4, добавляя штрихи к коэффициентам α , β , γ .

Отнесем конгруэнцию $(A_1 A_2)$ к осям фокальной сети (A_1) (см. [2], стр. 360—361), т. е. допустим, что имеют место уравнения

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0 \quad (18)$$

и рассмотрим конгруэнцию $(A_1 A_3)$, которая в силу (18) теперь будет являться первым преобразованием Лапласа для конгруэнции $(A_1 A_2)$ в направлении от A_2 к A_1 . Выбранный тетраэдр является тетраэдром первого порядка для конгруэнции $(A_3 A_1)$, ибо вершины A_3 и A_1 — фокусы луча, а грани $A_3 A_1 A_4$ и $A_1 A_3 A_2$ — фокальные плоскости в силу уравнений (18). Чтобы написать уравнения квадрик Ли гармонических линейчатых поверхностей конгруэнции $(A_3 A_1)$, мы должны

сделать только пересчет. Обозначив новые вершины тетраэдра через B_i , получим компоненты $\bar{\omega}_i^k$ для конгруэнции $(A_3, A_1) = (B_1, B_2)$ из компонент ω_i^k первоначальной конгруэнции (A_1, A_2) подстановкой указателей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (см. [2], стр. 409—411).

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1^1 &= \omega_1^1, & \bar{\omega}_1^2 &= \omega_1^1, & \bar{\omega}_1^3 &= \omega_1^4, & \bar{\omega}_1^4 &= 0, \\ \bar{\omega}_2^1 &= \omega_1^3, & \bar{\omega}_2^2 &= \omega_1^1, & \bar{\omega}_2^3 &= 0, & \bar{\omega}_2^4 &= \omega_1^2, \\ \bar{\omega}_3^1 &= \omega_4^3, & \bar{\omega}_3^2 &= 0, & \bar{\omega}_3^3 &= \omega_4^4, & \bar{\omega}_3^4 &= \omega_4^2, \\ \bar{\omega}_4^1 &= 0, & \bar{\omega}_4^2 &= \omega_2^1, & \bar{\omega}_4^3 &= \omega_2^4, & \bar{\omega}_4^4 &= \omega_2^2,\end{aligned}$$

откуда в силу (18) и (7) следует

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1^3 &= \alpha \omega_1^3, & \bar{\omega}_2^4 &= \gamma \omega_2^4, & \bar{\omega}_2^1 &= \frac{1}{\alpha} \omega_1^3, & \omega_1^4 &= \frac{1}{\gamma} \omega_2^4, \\ \bar{\omega}_1^2 &= -\beta_{12} \bar{\omega}_1^3 - \frac{\beta_{22}}{\gamma} \bar{\omega}_2^4, & \bar{\omega}_3^4 &= \frac{\beta_{11}}{\alpha} \bar{\omega}_1^3 + \frac{\beta_{22}}{\gamma} \bar{\omega}_2^4.\end{aligned}\quad (19)$$

Если обозначим коэффициенты для конгруэнции (A_3, A_1) с чертой, то из (19) получим

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \frac{\beta_{11}}{\alpha}, & \bar{\beta} &= -\beta_{12}, & \bar{\gamma} &= -\frac{\beta_{22}}{\gamma}, & \bar{\alpha}' &= \frac{1}{\gamma}, & \bar{\beta}' &= 0, & \bar{\gamma}' &= \frac{1}{\alpha}, \\ \bar{\beta}_1 &= 0, & \bar{\beta}_2 &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Гармоническая сеть фокальной поверхности (A_1) конгруэнции (A_3, A_1) будет иметь уравнение $\bar{\alpha}' (\bar{\omega}_2^4)^2 - \bar{\gamma}' (\bar{\omega}_1^3)^2 = 0$. Подставляя в последнее уравнение значения (19) и (20), получим $\gamma (\omega_2^4)^2 - \alpha (\omega_1^3)^2 = 0$, которое показывает, что две конгруэнции (A_3, A_1) и (A_1, A_3) последовательности Лапласа на их общей фокальной поверхности (A_1) имеют общую гармоническую сеть. Эта теорема справедлива для любой фокальной поверхности последовательности Лапласа.

Уравнение квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей фокальной поверхности (A_1) конгруэнции (A_3, A_1) получится из уравнения (17), если в нем указатели преобразовать по закону $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, все коэффициенты написать с чертой и после этого в него внести значения (18) и (20). Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}2\alpha x^2 x^3 - 2\mathcal{E} \sqrt{\alpha \gamma} x^1 x^4 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\alpha_1 \sqrt{\gamma} - \mathcal{E} \gamma_{12} \sqrt{\alpha}) x^2 x^4 - (\beta_{11} + \beta_{22} + \\ + 2\mathcal{E} \beta_{12} \sqrt{\alpha \gamma}) x^1 x^4 = 0, \quad (\mathcal{E} = \pm 1).\end{aligned}\quad (21)$$

§ 4. Квадрики Ли с общими касательными плоскостями

1. Касательная плоскость линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda \omega_1^3$ в произвольной точке $F = x^1 A_1 + x^2 A_2$, как известно, определяется уравнением (13). Рассмотрим другую линейчатую поверхность $\omega_2^4 = \lambda' \omega_1^3$. Ее

касательная плоскость в каждой другой точке $F = y^1 A_1 + y^2 A_2$ будет иметь вид $y^1 x_4 - \lambda' y^2 x^3 = 0$. Эти две касательные плоскости совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{x^2}{x^1} = \frac{\lambda y^2}{\lambda' y^1}. \quad (22)$$

Это соотношение устанавливает проективное соответствие между двумя рядами точек (F) и (F') с общим носителем $A_1 A_2$. Такое соответствие будет инволюцией только при условии $\lambda = -\lambda'$, которое показывает, что линейчатые поверхности $\omega_2^1 = \lambda \omega_1^1$ и $\omega_2^1 = \lambda' \omega_1^1$ сопряжены. Таким образом, две сопряженные линейчатые поверхности имеют ∞^1 общих касательных плоскостей и точки касания каждой такой плоскости гармонически разделяются фокусами луча конгруэнции. И наоборот, если две линейчатые поверхности обладают общей касательной плоскостью и если точки касания гармонически разделяются фокусами луча конгруэнции, то эти линейчатые поверхности сопряжены.

2. В силу уравнений (18), ребро $A_1 A_3$ описывает первую конгруэнцию последовательности Лапласа. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что луч $A_1 A_3$ находится на поверхностях (6), и нетрудно заметить, что поверхности (11), удовлетворяющие этому требованию, определяются уравнениями (16).

Напишем уравнения касательных плоскостей для поверхностей (16) и (21) вдоль луча $A_1 A_3$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\alpha} x^3 x_2 - [2\mathcal{E}\sqrt{\gamma} x^1 - \frac{1}{2}(\mathcal{E}\sqrt{\gamma} x_1 - \sqrt{\alpha}\gamma_2) x^3] x_4 &= 0, \\ 2\sqrt{\alpha} x^3 x_2 - 2\mathcal{E}\sqrt{\gamma} x^1 x_4 &= 0, \quad (\mathcal{E} = \pm 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Эти две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathcal{E}\sqrt{\gamma} x_1 - \sqrt{\alpha}\gamma_2 = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) не инвариантно относительно преобразований тетраэдра первого порядка. Выражение $\mathcal{E}\sqrt{\gamma}(x_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}(\gamma_2 - 3\beta_1)$ в силу условий (18) совпадает с левой частью равенства (24) и является относительным инвариантом преобразований тетраэдра первого порядка*).

Следовательно, равенство

$$\mathcal{E}\sqrt{\gamma}(x_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}(\gamma_2 - 3\beta_1) = 0, \quad (\mathcal{E} = \pm 1) \quad (25)$$

есть инвариантное условие, в силу которого две плоскости (23) совпадают.

Аналогичное уравнение мы получим, если потребуем совпадения двух касательных плоскостей к гармоническим линейчатым поверхно-

*) Так как в силу (10') $\frac{1}{\theta} \{ \mathcal{E}\sqrt{\gamma}(x_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}(\gamma_2 - 3\beta_1) \} = \{ \mathcal{E}\sqrt{\gamma}(x_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}(\gamma_2 - 3\beta_1) \} \theta$, где θ зависит только от π_1^1 .

стям $\sqrt{\alpha'} \omega_1^2 = \mathcal{E}' \sqrt{\gamma'} \omega_2^2$, принадлежащим конгруэнциям $(A_1 A_2)$ и $(A_2 A_4)$. Это уравнение получится из (25) уже известной заменой указателей. Оно имеет вид

$$\mathcal{E}' \sqrt{\gamma'} (\alpha_2' + 3\beta_2') - \sqrt{\alpha'} (\gamma_1' - 3\beta_1') = 0, \quad (\mathcal{E}' = \pm 1). \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) равносильны (согласно (7)) двум квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \sqrt{\gamma} [\Delta x + 3\Delta \gamma, \omega_2^2] - \sqrt{\alpha} [\Delta \gamma + 3\Delta \alpha, \omega_1^2] &= 0, \\ \mathcal{E}' \sqrt{\gamma'} [\Delta x' + 3\Delta \gamma', \omega_2^2] - \sqrt{\alpha'} [\Delta \gamma' + 3\Delta \alpha', \omega_1^2] &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Система дифференциальных уравнений, определяющих нашу конгруэнцию, содержит уравнения Пфаффа (3) и (5) и квадратичные уравнения (6) и (27). Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Кроме форм (3) и (5), свободно определяемых на первом и втором интегральных элементах, и форм ω_1^2, ω_2^2 , линейно независимых на интегральном многообразии, характеристическая система содержит только шесть форм

$$\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma, \Delta \alpha', \Delta \beta', \Delta \gamma'. \quad (28)$$

На первом интегральном элементе они произвольны, на втором интегральном элементе формы (28) определяются из шести билинейных уравнений, присоединенных к квадратичным (6) и (27) (система квадратичных уравнений (6) и (27) правильная). Ранг полярной матрицы равен шести и не может быть меньше. Следовательно, цепь интегральных элементов регулярна и система находится в инволюции. Значит такая конгруэнция существует с произволом $S_1 = 6$ шести функций одного аргумента.

3. Как уже известно (§ 2), каждая фокальная поверхность имеет четыре гармонические линейчатые поверхности, две из которых принадлежат одной конгруэнции, две другие — соседней конгруэнции последовательности. Последние пары линейчатых поверхностей соответствуют друг другу, ибо определяются одним и тем же уравнением. Касательные плоскости этих двух пар поверхностей вдоль луча $A_1 A_2$ будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} 2\alpha x^2 x_3 - 2\mathcal{E} \sqrt{\alpha \gamma} x^1 x_4 &= 0, \\ 2\alpha x^2 x_3 - \left[2\mathcal{E} \sqrt{\alpha \gamma} x^1 - \frac{1}{2\gamma'} (\alpha_1 \sqrt{\gamma} - \mathcal{E} \gamma_1 \sqrt{\alpha}) x^2 \right] x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Условие совпадения этих двух плоскостей совпадает с уравнением (24) или инвариантным уравнением (25). Таким образом будем иметь теорему: Если в последовательности Лапласа две соответствующие гармонические линейчатые поверхности общей фокальной поверхности имеют общую касательную плоскость вдоль луча одной конгруэнции, то они имеют общую касательную плоскость и вдоль соответствующего луча соседней конгруэнции последовательности.

4. Допустим, что уравнение (25) не зависит от $\mathcal{E}$, тогда получим

$$\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad \gamma_2 - 3\beta_1 = 0. \quad (30)$$

Уравнения (30) суть необходимые и достаточные условия того, чтобы поверхность (A_1) была поверхностью второго порядка [2]. Таким образом получаем теорему: Квадрики Ли каждой гармонической линейчатой поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$ и ее соответствующей гармонической линейчатой поверхности конгруэнции $(A_1 A_3)$ касаются друг друга вдоль луча $A_1 A_2$ (следовательно, согласно предыдущей теореме, и луча $A_1 A_3$) тогда и только тогда, когда поверхность (A_1) есть поверхность второго порядка.

§ 5. Совпадение квадрик Ли соответствующих гармонических линейчатых поверхностей конгруэнций последовательности Лапласа

Как известно, квадрики Ли гармонических линейчатых поверхностей $(V\sqrt{\gamma} \omega_2^4 = \mathcal{E} V\sqrt{\alpha} \omega_1^3)$ конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_1 A_3)$ пишутся соответственно уравнениями (16) (где нужно внести значения (18) и (21)). В этом параграфе мы будем искать конгруэнции, для которых эти две квадрики Ли совпадают.

Условия совпадения квадрик (16) и (21) пишутся в виде

$$V\sqrt{\alpha} \gamma_2 - \mathcal{E} V\sqrt{\gamma} \alpha_1 = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} + 2\mathcal{E} V\sqrt{\alpha\gamma} \beta_{12} - \alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0. \quad (31)$$

Так как два выражения $V\sqrt{\alpha} (\gamma_2 - \beta_1) - \mathcal{E} V\sqrt{\gamma} (\alpha_1 + 3\beta_2)$ и $\beta_{11} + \beta_{22} + 2\mathcal{E} (\beta_{12} + \beta') - \alpha\alpha' + \gamma\gamma'$ являются относительными инвариантами, т. е. они пропорциональны своим дифференциалам по вторичным переменным (в этом можно убедиться непосредственным подсчетом с помощью формул (10')), и в силу условий (18) совпадают с левыми частями уравнений (31), то инвариантные (относительно тетраэдра первого порядка) условия совпадения квадрик (16) и (21) будут иметь вид

$$\begin{aligned} V\sqrt{\alpha} (\gamma_2 - 3\beta_1) - \mathcal{E} V\sqrt{\gamma} (\alpha_1 + 3\beta_2) &= 0, \\ \beta_{11} + \beta_{22} + 2\mathcal{E} (\beta_{12} + \beta') - \alpha\alpha' + \gamma\gamma' &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Если у каждой соответствующей пары гармонических линейчатых поверхностей конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_1 A_3)$ квадрики Ли совпадают, то уравнения (32) не зависят от $\mathcal{E}$ и такая конгруэнция будет характеризоваться инвариантными уравнениями

$$\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad \gamma_2 - 3\beta_1 = 0, \quad \beta_{12} + \beta' = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} = \alpha\alpha' - \gamma\gamma'. \quad (33)$$

Докажем теорему существования такой конгруэнции. Дифференцируя первые два уравнения системы (33), получим

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 + 3\Delta\beta_2 &= 4(\beta_2^2 - \beta'\gamma')\omega_1^3 - (3\alpha\alpha' + \gamma\gamma')\omega_2^4, \\ \Delta\gamma_2 - 3\Delta\beta_1 &= -(2\alpha\alpha' + 3\gamma\gamma')\omega_1^3 + 4(\beta_1^2 + \beta\alpha')\omega_2^4. \end{aligned} \quad (34)$$

Из этих уравнений определяя $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\gamma_2$ и подставляя в первое и третье уравнения первого столбца системы (8), получим

$$\begin{aligned} 3[\Delta\beta_2\omega_1^3] + [\Delta\beta_1\omega_2^4] + (3\alpha\alpha' + \gamma\gamma')[\omega_2^4\omega_1^3] &= 0, \\ [\Delta\beta_2\omega_1^3] + 3[\Delta\beta_1\omega_2^4] + (\alpha\alpha' + 3\gamma\gamma')[\omega_2^4\omega_1^3] &= 0, \end{aligned}$$

которые непосредственно приведут к двум квадратичным уравнениям

$$[\Delta\beta_2\omega_1^3] + \alpha\alpha'[\omega_2^4\omega_1^3] = 0, \quad [\Delta\beta_1\omega_2^4] + \gamma\gamma'[\omega_2^4\omega_1^3] = 0. \quad (35)$$

Внося в эти уравнения значения $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$ из системы (9), получим

$$\beta_{11} - \gamma\gamma' = 0, \quad \beta_{22} + \alpha\alpha' = 0, \quad (36)$$

откуда, в силу последнего уравнения системы (33), будем иметь

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0. \quad (37)$$

Следовательно, изучаемая нами конгруэнция входит в класс конгруэнций W .

Здесь мы попутно доказали теорему: Если общая фокальная поверхность двух последующих конгруэнций последовательности Лапласа есть поверхность второго порядка и одна из этих конгруэнций есть конгруэнция W , то другая конгруэнция тоже W и, следовательно, последовательность Лапласа является последовательностью R [6].

Действительно, из уравнений (36) и (37) вытекает соотношение

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0, \quad (38)$$

которое показывает, что конгруэнция $(A_1 A_3)$ тоже есть конгруэнция W ([2], стр. 396–398).

Дифференцируя уравнение (37) получим $\Delta\alpha + \Delta\alpha' + \Delta\gamma + \Delta\gamma' = 0$. Если сюда внести значения (7) и приравнять коэффициенты при ω_1^3 и ω_2^4 , получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \gamma_1' &= \beta_2 + \beta_2', \\ \alpha_2' - \gamma_2 &= \beta_1 + \beta_1'. \end{aligned} \quad (39)$$

Новое дифференцирование систем (39) и (34) дает

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_2' &= 4\Delta\beta_1 + \Delta\gamma_1' - 4\alpha\alpha'\omega_1^3 + 4(\beta_1^2 + \beta\alpha')\omega_2^4, \\ \Delta\gamma_1' &= -4\Delta\beta_2 - \Delta\alpha_2' + 4(\beta_2^2 - \beta\gamma_1')\omega_1^3 - 4\alpha\alpha'\omega_2^4. \end{aligned} \quad (40)$$

Внося эти значения в первое и третье уравнения второго столбца системы (8), в силу (35) будем иметь только одно квадратичное уравнение

$$[\Delta\beta_1\omega_2^4] - [\Delta\beta_2\omega_1^3] = 0, \quad (41)$$

которое равносильно одному конечному уравнению

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0. \quad (42)$$

Это уравнение показывает, что преобразование Лапласа в сторону поверхности (A_2) тоже есть конгруэнция W , что и понятно, ибо последовательность Лапласа есть последовательность R .

Дифференцируя конечные уравнения (36) и третье уравнение системы (33), получим

$$\begin{aligned}\Delta\beta_{11} &= (3\beta_1\alpha\beta' + 3\beta_1'\alpha'\gamma' - 3\alpha\alpha'\beta_2 - \alpha\alpha'\beta_2')\omega_1^2 + \alpha\alpha'(\beta_1 + \beta_1')\omega_2^2, \\ \Delta\beta_{22} &= \alpha\alpha'(\beta_2 + \beta_2')\omega_1^2 - (3\beta_2'\alpha'\gamma' + 3\beta_2'\alpha'\beta + 3\alpha\alpha'\beta_1 + \alpha\alpha'\beta_1')\omega_2^2, \\ \Delta\beta_{12} &= -\gamma'(\beta_1 + \beta_1')\omega_1^2 - \alpha'(\beta_2 + \beta_2')\omega_2^2.\end{aligned}\quad (42')$$

Внося эти значения в уравнения (10), получим два конечных уравнения

$$\beta_1 + \beta_1' = 0, \quad \beta_2 + \beta_2' = 0. \quad (43)$$

Из уравнений (33), (39) и (43) непосредственно получим условия

$$\alpha_2' + 3\beta_1' = 0, \quad \gamma_1' - 3\beta_2' = 0, \quad (43')$$

которые показывают, что поверхность (A_2) тоже является поверхностью второго порядка.

Дифференцируя уравнения (43), получим

$$\Delta\beta_1 + \Delta\beta_1' = -(\beta\alpha' + \beta'\gamma')\omega_2^2, \quad \Delta\beta_2 + \Delta\beta_2' = -(\alpha\beta' + \beta'\gamma')\omega_1^2. \quad (44)$$

Из этих уравнений определяя $\Delta\beta_1'$ и $\Delta\beta_2'$ и внося в уравнения (8), в силу формул (9) получим конечные уравнения

$$\beta_{12}' + \beta = 0, \quad \beta_{11}' + \alpha\alpha' = 0. \quad (45)$$

В силу последнего уравнения из (42) получим

$$\beta_{22}' - \alpha\alpha' = 0. \quad (46)$$

Уравнения (43') (45) и (46) показывают, что поверхность (A_2) удовлетворяет всем тем требованиям, которым удовлетворяет поверхность (A_1) . Следовательно, все фокальные поверхности последовательности Лапласа тоже будут удовлетворять этим требованиям. Дифференцируя уравнения (45), (46) и внося полученные значения $\Delta\beta_{11}'$, $\Delta\beta_{11}'$, $\Delta\beta_{22}'$ вместе со значениями (42') в квадратичные уравнения получим тождества. Все уравнения (33) — (46) и (3) — (9) замкнуты относительно операции внешнего дифференцирования, и система уравнений Пфаффа (3), (5), (7) и (9) вполне интегрируема. Ранг системы Пфаффа равен 14, число независимых конечных уравнений равно четырём (уравнения (33)), следовательно, интегральное многообразие зависит от десяти произвольных постоянных.

§ 6. Конфигурация L

Полученную конфигурацию назовем конфигурацией L и выясним некоторые ее свойства. Для этой цели отнесем нашу конфигурацию к тетраэдру, построенному на осях фокальной сети (A_1) (см. [2], стр. 360), т. е. будем выбирать точки A_3 и A_4 тетраэдра так, чтобы ребра $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$ были вторыми касательными фокальных сетей, точка A_3 была вторым фокусом луча $A_1 A_3$ и грань $A_1 A_3 A_4$ — была ее фокальной плоскостью.

Такой тетраэдр характеризуется уравнениями (18).

В силу этих уравнений из (43) получим

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0. \quad (47)$$

Отсюда следует, что наш тетраэдр является тетраэдром первого порядка и для конгруэнции $A_2 A_4$ (т. е. построен на осях фокальной сети поверхности (A_2)). Следовательно, конфигурация L является частным случаем конфигурации T (см. [7], стр. 229–236). Третье уравнение системы (33) и первое уравнение системы (45) показывают [4], что наша конфигурация T образована из четырех конгруэнций последовательности Лапласа [4]. Так как последовательность Лапласа образована из конгруэнций W , то линейчатая поверхность $\sqrt{\alpha} \omega_1^2 = \mathcal{E} \sqrt{\gamma} \omega_2^2$ конгруэнции $(A_1 A_2)$ и ее соответствующие линейчатые поверхности в других конгруэнциях последовательности будут гармоническими. Следовательно, эти четыре гармонические линейчатые поверхности, согласно условиям (33), имеют общую квадрику Ли.

Уравнение этой квадрики мы получим из (16) (или (17)) с учетом формул (18), (33) – (46). Оно будет иметь вид

$$\sqrt{\alpha} x^2 x^3 - \mathcal{E} \sqrt{\gamma} x^1 x^4 = 0, \quad (\mathcal{E} = \pm 1), \quad (48)$$

Так как все фокальные поверхности конфигурации L являются поверхностями второго порядка, то мы можем написать их уравнения относительно тетраэдра $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. В работе [8] А. М. Васильев получил инвариантное уравнение квадрики Ли для фокальных поверхностей конфигурации. В нашей конфигурации эти квадрики будут являться одновременно фокальными поверхностями и их уравнения напишутся в виде:

$$\begin{aligned} \text{уравнение поверхности } (A_1), & (x^2)^2 + \alpha \gamma (x^3)^2 - 2\gamma x^1 x^4 = 0, \\ \text{„ „ „ } (A_2), & (x^1)^2 + \alpha' \gamma' (x^4)^2 - 2\gamma' x^2 x^3 = 0, \\ \text{„ „ „ } (A_3), & (x^1)^2 + \alpha' \gamma' (x^4)^2 - 2\gamma' x^2 x^3 = 0, \\ \text{„ „ „ } (A_4), & (x^2)^2 + \alpha \gamma (x^3)^2 - 2\gamma x^1 x^4 = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что поверхность (A_1) совпадает с поверхностью (A_4) , а поверхность (A_2) – с поверхностью (A_3) .

Прямая $A_2 A_3$ пересекается с поверхностью (A_1) в точках

$$A_3 \pm \sqrt{-\alpha \gamma} A_2. \quad (49)$$

Эти две точки гармонически разделяют пару точек A_2, A_3 . Фокусы луча $A_2 A_3$ определяются двумя точками

$$A_3 + \mathcal{E} \sqrt{\alpha \gamma} A_2, \quad (\mathcal{E} = \pm 1), \quad (50)$$

которые тоже гармонически разделяют пару точек A_2, A_3 . Фокусы луча $A_1 A_4$ напишутся в виде

$$A_4 + \mathcal{E} \sqrt{\alpha' \gamma'} A_1. \quad (51)$$

Аналитическая прямая $l_{\mathcal{E}}$, определяемая точками (50) и (51), удовлетворяет уравнению

$$dl_{\mathcal{E}} = (\omega_3^2 + \omega_4^2) l_{\mathcal{E}}.$$

Таким образом, две прямые $l_{\mathcal{E}}$ неподвижны, и следовательно, две диагонали конфигурации L описывают одну линейную конгруэнцию с директрисами $l_{\mathcal{E}}$.

Касательные к гармонической сети $\alpha(\omega_1)^2 - \gamma(\omega_2)^2 = 0$ поверхности (A_1) пересекаются с диагональю $A_2 A_3$ в фокусах последнего луча. Следовательно, одна серия гармонических касательных поверхности (A_1) и (A_2) пересекается с одним неподвижным лучом l_6 , другая серия — другим лучом l_6 .

Прямые $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ сопряжены относительно обеих поверхностей (A_1) и (A_2) .

Ереванский Арм. пед. институт им. Х. Абовяна.

Поступила 5 X 1959

Ս. Ե. Կարապետյան

Լ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունում հետազոտված են կոնգրուենցիայի հարմոնիկ զծավոր մակերևույթների լիի կվարդիկները: Ակզբում ստացված են մի քանի թեորեմաներ, որոնք բնութագրում են համալուծ զծավոր մակերևույթների ընտանիքները կոնգրուենցիայի մեջ:

Երբ պահանջում ենք, որ Լապլասի հաջորդականությունը երկու հարևան կոնգրուենցիաների համալուծ զծավոր մակերևույթների լիի կվարդիկները համընկնեն, ապա ստանում ենք մի փակ հաջորդականություն, որի բոլոր չորս կոնգրուենցիաները հավասարազոր են: Այդ կոնֆիգուրացիան, որը նշանակվում է L տառով, օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.

1. L կազմող Լապլասի հաջորդականությունը R հաջորդականությունն է:
2. Բոլոր ֆոկալ մակերևույթները Π կարգի են և համընկնում են մեկ առ մեկ, այսինքն L կոնֆիգուրացիան կազմված է երկու Π կարգի մակերևույթներից և նրա շոշափողներից:
3. Նախորդ երկու կվարդիկների նկատմամբ L կոնֆիգուրացիայի երկու անկյունագծերը բևեռա-համալուծ են իրար:
4. Այդ անկյունագծերը գծում են մի զծալին կոնգրուենցիա, որի երկու դիրեկտորիսները կարող են հիմք ծառայել խնդիրը հասցնելու մինչև սինթետիկ երկրաչափության:

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана, 1948.
2. Фиников С. П. Теория конгруэнции, 1950.
3. Карапетян С. Е. Квадрики Ли линейчатых поверхностей конгруэнций, ДАН СССР, 117, 2, 1957.
4. Карапетян С. Е. Геометрические значения некоторых инвариантов конгруэнций. Научн. Дока. ВШ, серия физ.-мат., № 1, 1958.
5. Sania G. Nuova esposizione delle geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee, Ann. di Matem. (III), 15, 1908, 143—185.
6. Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия, 1937.
7. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций, 1956.
8. Васильев А. М. Об одном классе конгруэнций W . Уч. записки МГУ, серия математ., 7, 1954.
9. Щербakov P. H. Проективная теория репера линейчатой поверхности конгруэнций. Мат. сборник, т. 46(88):2, 1958.
10. Карапетян С. Е. Две конгруэнции с общими инвариантами F и F' . Научн. Дока. ВШ, серия физ.-мат., № 2, 1958.
11. Карапетян С. Е. Гармонические квадрики и некоторые линейчатые поверхности конгруэнций. ДАН СССР, 122, 3, 1958.

С. О. Синамян

Восстановление аналитической функции ее
 асимптотическим рядом в области $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$

Пусть аналитическая в области $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$ функция в этой области имеет асимптотический ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$ посредством последовательности $\{m_n\}$

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \frac{m_n}{|z|^n}, \quad \operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Дадим следующее определение. Говорят, что последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию Карлемана C_{α} ($\alpha > 0$), если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty, \quad \beta_k = \inf_{n \geq k} \sqrt[n]{m_n}.$$

Известно, что если последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию C_{α} Карлемана, то асимптотический ряд единственным образом определяет функцию $f(z)$ в области $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$. В связи с этим возникает вопрос о представлении функции $f(z)$ посредством асимптотического ряда. В работе [1] дано интегральное представление для некоторого класса аналитических функций. В настоящей работе расширяется класс таких функций.

Теорема 1. Если аналитическая в области $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$ ($a > 0$), $0 < \alpha \leq 1$ функция $f(z)$:

- а) в этой области имеет асимптотический ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$ посредством последовательности $\{m_n\}$,
 б) последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию C_{α} Карлемана,



в) элементом $\Phi^{(n)}(0) = \frac{a_n \cdot n!}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, ($n=0, 1, 2, \dots$) определяет-

ся квазианалитическая функция $\Phi(t)$ на $[0, \infty)$, причем

$$|\Phi^{(n)}(t)| \leq \mu_n \cdot e^{\frac{1}{\sigma} t^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \geq 0, \quad \frac{1}{\alpha} > \sigma,$$

г) числа $m_n^* = \frac{\mu_n \cdot \Gamma(\alpha n + 1)}{n!}$ также удовлетворяют условию

C_α Карлемана, тогда

$$f(z) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} t} \Phi(t^{\alpha}) dt, \quad \operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Обозначим

$$f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} \tau} \cdot \Phi(\tau^{\alpha}) d\tau \quad (1)$$

и докажем, что $f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) \equiv f(z)$, $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$. Запишем формулу Тейлора для функции $\Phi(t)$ в интегральной форме

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{n!} \int_0^t \Phi^{(n+1)}(x) (t-x)^n dx.$$

Подставив это выражение в формулу (1) и совершив замену переменной, получим

$$f_1(s) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{s^{\alpha \cdot k}} + \frac{\alpha \cdot s}{n!} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \int_0^{\tau} \Phi^{(n+1)}(t^{\alpha}) (\tau^{\alpha} - t^{\alpha})^n \cdot t^{\alpha-1} dt, \quad s = z^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Положим

$$R_n(s) = \frac{\alpha \cdot s}{n!} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \int_0^{\tau} \Phi^{(n+1)}(t^{\alpha}) (\tau^{\alpha} - t^{\alpha})^n \cdot t^{\alpha-1} dt \quad (2)$$

и

$$\omega_n(t, \tau) = \frac{\tau^{\alpha n}}{2\pi i} \int_{\Gamma + C_n} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma + C_n} \frac{\tau^{\alpha n + \zeta} \cdot t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)}, \quad (3)$$

где l есть полуокружность $z = \frac{\alpha}{2} e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, а C_n является частью окружностей $z + \frac{1+\alpha n}{2} = \frac{1+\alpha n}{2} e^{i\theta}$ и $z = \frac{\alpha}{2} e^{i\varphi}$, определенной соответственно неравенствами $|\theta| \leq \theta_0$, $\frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \varphi_0$. θ_0 и φ_0 суть единственные корни уравнения $-\frac{1+\alpha n}{2} + \frac{1+\alpha n}{2} e^{i\theta} = \frac{\alpha}{2} e^{i\varphi}$ при условии $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

Из общей формулы Г. В. Бадаляна [2] следует, что

$$\omega_n(t, \tau) = \frac{(\tau^n - t^n)^n}{\alpha^n n!} \quad (4)$$

и, следовательно,

$$R_n(s) = \alpha^{n+1} \cdot s \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau \int_0^\tau \Phi^{(n+1)}(t^s) t^{s-1} \cdot \omega_n(t, \tau) dt. \quad (5)$$

Рассмотрим два случая: $\alpha=1$ и $\alpha<1$.

1. Случай $\alpha=1$. Имеем

$$R_n(z) = \frac{z}{n!} \int_0^\infty e^{-z\tau} d\tau \int_0^\tau \Phi^{(n+1)}(t) (\tau-t)^n d\tau.$$

Интегрируя $n+1$ раз по частям, получаем

$$R_n(z) = \frac{1}{z^n} \int_0^\infty e^{-z\tau} \Phi^{(n+1)}(\tau) d\tau.$$

В силу условия в) теоремы

$$|R_n(z)| \leq \frac{\mu_{n+1}}{|z|^n} \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{a^n} - \sigma)\tau} d\tau = \frac{\mu_{n+1} \Gamma(\frac{1}{a^n} - \sigma)}{a^{\frac{1}{n} - \sigma}}.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{z^k}$ единственным образом определяет именно функцию $f_1(z)$ в области $\operatorname{Re} z > a$ и поэтому $f_1(z) \equiv f(z)$ при $\operatorname{Re} z > a$.

2. Случай $\alpha < 1$. Рассмотрим выражение (5) для тех значений $n \geq n_0$, для которых $[\alpha n] < n-1$. Совершив интегрирование по частям $[\alpha n]$ раз, получим

$$R_n(s) = \frac{\alpha^{n+1} \cdot s}{s^{[an]}} \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau \int_0^\tau \Phi^{(n+1)}(t^\alpha) t^{\alpha-1} dt \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{l+C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + \alpha n - [an] + \nu + 1) \tau^{\alpha n - [an] + \zeta} \cdot t^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} d\zeta.$$

Оценим величину $\frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + \alpha n - [an] + \nu + 1)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)}$ на контуре $l+C_n$

$$\left| \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + \alpha n - [an] + \nu + 1)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} \right| < (1 + \alpha \cdot n)^{[an]},$$

$$\left| \frac{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)}{\prod_{\nu=[\frac{n}{2}]+1}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} \right| = \left| \frac{\prod_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\zeta + \alpha \cdot \nu)}{\prod_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\zeta + \alpha \cdot \nu)} \right| >$$

$$> \frac{\alpha}{2} \cdot \alpha^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \left[\frac{n}{2} \right]! \cdot \alpha^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \left[\frac{n}{2} \right]! = \frac{\alpha^{n+1}}{2} \left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2$$

и, значит,

$$\left| \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + \alpha n - [an] + \nu + 1)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} \right| < \frac{2(1 + \alpha n)^{[an]}}{\alpha^{n+1} \left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2} \text{ при } \zeta \in l+C_n.$$

Представим $R_n(s)$ в виде суммы двух слагаемых

$$R_n(s) = \frac{\alpha^{n+1} \cdot s}{s^{[an]}} \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau \int_0^\tau \Phi^{(n+1)}(t^\alpha) t^{\alpha-1} dt \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{l+C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + \alpha n - [an] + \nu + 1) \tau^{\alpha n - [an] + \zeta} \cdot t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} +$$

$$+ \frac{\alpha^{n+1} \cdot s}{s^{[an]}} \int_0^\infty e^{-s\tau} \tau^{\frac{\alpha}{2}} d\tau \int_0^\tau \Phi^{(n+1)}(t^\alpha) t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_l \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + \alpha n - [an] + \nu + 1) \tau^{\alpha n - [an] + \zeta - \frac{\alpha}{2}} t^{-\zeta + \frac{\alpha}{2}}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} d\zeta. \quad (6)$$

Заметив еще, что

$$\left| \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\zeta} \right| \leq 1 \text{ при } \zeta \in C_n$$

и

$$\left| \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\zeta + \frac{\alpha}{2}} \right| \leq 1 \text{ при } \zeta \in l,$$

будем иметь:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + an - [an] + \nu + 1) \tau^{\zeta - \frac{\alpha}{2}} \cdot t^{-\zeta + \frac{\alpha}{2}}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} d\zeta \right| < \frac{(1+an)^{an}}{\alpha^n \cdot \left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2}$$

и

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{[an]-1} (\zeta + an - [an] + \nu + 1) \tau^{\zeta} \cdot t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha \cdot \nu)} \right| < \frac{(1+an)^{an}}{\alpha^{n+1} \cdot \left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2}$$

при $n \geq n_0$.

Из формулы (6) окончательно получим

$$\begin{aligned} |R_n(s)| &< \frac{\alpha \cdot \mu_{n+1}}{|s|^{[an]-1}} \cdot \frac{(1+an)^{an}}{\left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2} \int_0^\infty e^{-a \frac{1}{\alpha} \tau} d\tau \int_0^\tau e^{\sigma t} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt + \\ &+ \frac{\mu_{n+1}}{|s|^{[an]-1}} \cdot \frac{(1+an)^{an}}{\left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2} \int_0^\infty e^{-a \frac{1}{\alpha} \tau} \tau^{\frac{\alpha}{2}} d\tau \int_0^\tau e^{\sigma t} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt < \\ &< A^n \cdot \mu_{n+1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha(n+1) + 1)}{(n+1)! |s|^{[an]-1}}, \end{aligned}$$

где A — некоторая достаточно большая константа.

Так как последовательность $\mu_n \frac{\Gamma(\alpha n + 1)}{n!}$ удовлетворяет условию C_α Карлемана, то из последнего неравенства следует, что $f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) = f(z)$ при $z \in \text{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

Этим доказательство теоремы завершается.

Теорема 2. Если выполнены первые два условия теоремы 1 при $\alpha > 1$ и, кроме того

в) элементом $\Phi^{(n)}(0) = \frac{\alpha_n \cdot n!}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ определяется

квазианалитическая функция $\Phi(t)$ на $[0, \infty)$, причем

$$|\Phi^{(n)}(t)| \leq \mu_n e^{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ при } 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{и } |\Phi^{(n)}(t)| \cdot t^n \leq \mu_n e^{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ при } t \geq 1, \quad \frac{1}{\alpha} > \sigma,$$

$$\text{г) числа } m_n^* = n^{\alpha n} \sum_{k=n}^{[z(n-1)]} \frac{\mu_{k+1}}{n^k} \text{ удовлетворяют условию } C_* \text{ Кар-$$

лемана, то тогда вновь

$$f(z) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} t} \cdot \Phi(t^{\alpha}) dt \text{ при } \operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Составим опять функцию

$$f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} \tau} \cdot \Phi(\tau^{\alpha}) d\tau$$

и докажем, что $f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) \equiv f(z)$ при $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

После замены переменной, формула (2) примет вид

$$R_n(s) = \frac{s}{\alpha \cdot n!} \int_0^{\infty} e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) (u-x)^n dx, \quad s = z^{\frac{1}{\alpha}}$$

мы будем иметь

$$f_1(s) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{s^{\alpha k}} + R_n(s). \quad (7)$$

Из формулы (4) следует

$$R_n(s) = \frac{s}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{u^{n+\zeta} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + v)}, \quad (8)$$

где контур интегрирования $l+C_n$ состоит из полуокружности $l: z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\alpha} + \varepsilon < 1$, а C_n является частью окружностей $z + \frac{1+n}{2} = \frac{1+n}{2} e^{i\vartheta}$ и $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, определенной соответственно неравенствами

$$|\vartheta| \leq \vartheta_0, \quad \frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \varphi_0, \quad \vartheta_0 \text{ и } \varphi_0 \text{ суть единственные корни уравнения}$$

$$-\frac{1+n}{2} + \frac{1+n}{2} e^{i\vartheta} = \varepsilon e^{i\varphi} \text{ при условии } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Докажем теперь справедливость формулы

$$R_n(s) = \frac{\alpha^{[n(n-1)]}}{s^{[n(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \left\{ \sum_{r=0}^{[n(n-1)]-n-1} J_r \frac{d_{\alpha}^{[n(n-1)]-n-r}}{du^{[n(n-1)]-n-r}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right] \right\} du +$$

$$+ \frac{\alpha^{[n(n-1)]}}{s^{[n(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{\prod_{v=0}^{[n(n-1)]} (n - \frac{v}{\alpha} + \zeta) u^{n-\frac{[n(n-1)]+\zeta-1}{\alpha}}}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)} \times$$

$$\times x^{-\zeta} d\zeta, \quad (9)$$

где

$$J_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{\prod_{v=0}^{n+r-1} (n - \frac{v}{\alpha} + \zeta) d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)}, \quad r=0, 1, \dots, [n(n-1)]-n-1,$$

а функции $\frac{d_{\alpha}^k(fu)}{du^k}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\frac{d_{\alpha}^0 f(u)}{du^0} = f(u), \quad \frac{d_{\alpha}^{k+1} f(u)}{du^{k+1}} = \frac{d}{du} \left\{ u^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{d_{\alpha}^k f(u)}{du^k} \right\}.$$

Формула (9) получается последовательным интегрированием по частям

$$R_n(s) = - \int_0^\infty \left\{ \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{u^{n+\zeta} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)} \right\} d e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} =$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{(n+\zeta) u^{n-\frac{1}{\alpha}+\zeta} \cdot x^{-\zeta}}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)} d\zeta =$$

$$= - \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty \left\{ \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{(n+\zeta) u^{n-\frac{1}{\alpha}+\zeta} \cdot x^{-\zeta}}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)} d\zeta \right\} d e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} =$$

$$= \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{(n+\zeta) (n-\frac{1}{\alpha}+\zeta) u^{n-\frac{2}{\alpha}+\zeta} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)} =$$

$$= \dots = \frac{\alpha^{n-1}}{s^{n-1}} \int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l+C_n} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (n - \frac{v}{\alpha} + \zeta) u^{n-\frac{n-1}{\alpha}+\zeta-1} \cdot x^{-\zeta}}{\prod_{v=0}^n (\zeta+v)} d\zeta.$$

При дальнейшем интегрировании по частям этим способом уже получатся новые слагаемые. Легко усмотреть, что на $[\alpha(n-1)]-n$ шаге получится формула (9).

Оценим теперь $R_n(s)$, пользуясь ее представлением формулой (9). Для этого сначала оценим $\frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m}$, где $\varphi(u)$ дифференцируемая, любое число раз, функция на полуоси $[0, \infty)$.

Докажем, что

$$\left| \frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m} \right| \leq \sum_{i=0}^m C_m^i \cdot m^i |\varphi^{(m-i)}(u)| \cdot u^{m-i-\frac{m}{\alpha}}. \quad (10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha \varphi(u)}{du} &= \varphi'(u) u^{1-\frac{1}{\alpha}} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \varphi(u) u^{-\frac{1}{\alpha}}, \\ \frac{d_\alpha^2 \varphi(u)}{du^2} &= \varphi''(u) u^{2(1-\frac{1}{\alpha})} + \left[2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right] \varphi'(u) u^{1-\frac{2}{\alpha}} + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \varphi(u) u^{-\frac{2}{\alpha}}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \left| \frac{d_\alpha \varphi(u)}{du} \right| &< |\varphi'(u)| u^{1-\frac{1}{\alpha}} + |\varphi(u)| u^{-\frac{1}{\alpha}}, \\ \left| \frac{d_\alpha^2 \varphi(u)}{du^2} \right| &< \sum_{i=0}^2 C_2^i \cdot 2^i |\varphi^{(2-i)}(u)| u^{2-i-\frac{2}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Предположим, что верна формула (10) и докажем ее справедливость при $m+1$.

Действительно,

$$\frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m} = \sum_{i=0}^m A_m^i \cdot \varphi^{(m-i)}(u) \cdot u^{m-i-\frac{m}{\alpha}}, \quad \text{где } A_m^i - \text{некоторые}$$

постоянные, и по определению

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha^{m+1} \varphi(u)}{du^{m+1}} &= \frac{d}{du} \left\{ u^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m} \right\} = \varphi^{(m+1)}(u) \cdot u^{(m+1)(1-\frac{1}{\alpha})} + \\ &+ (m+1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \varphi^{(m)}(u) u^{m-\frac{m+1}{\alpha}} + \sum_{i=0}^m A_m^i \cdot \varphi^{(m+1-i)}(u) \cdot u^{m+1-i-\frac{m+1}{\alpha}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^m \left(m+1-i - \frac{m+1}{\alpha} \right) A_m^i \varphi^{(m-i)}(u) u^{m-i-\frac{m+1}{\alpha}} = \\
 & = \sum_{i=0}^{m+1} A_{m+1}^i \varphi^{(m+1-i)}(u) \cdot u^{m+1-i-\frac{m+1}{\alpha}},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_k^0 &= 1, \quad k=0, 1, 2, \dots, \\
 A_{m+1}^1 &= (m+1) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) + A_m^1, \\
 A_{m+1}^2 &= A_m^2 + A_m^1 \cdot \left(m - \frac{m+1}{\alpha} \right), \\
 &\dots \dots \dots \\
 A_{m+1}^i &= A_m^i + A_m^{i-1} \cdot \left(m+2-i - \frac{m+1}{\alpha} \right), \\
 &\dots \dots \dots \\
 A_{m+1}^{m+1} &= \left(1 - \frac{m+1}{\alpha} \right) A_m^m.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Из формул (11) получим

$$\begin{aligned}
 |A_{m+1}^i| &< m^i \cdot C_m^i + m^{i-1} + (m+1) C_m^{i-1} < \\
 &< (C_m^i + C_m^{i-1}) (m+1)^i = C_{m+1}^i \cdot (m+1)^i, \quad |A_{m+1}^{m+1}| < (m+1)^{m+1}.
 \end{aligned}$$

Тем самым формула (10) доказана.

Наконец, для оценки остатка $R_n(s)$ представим его в виде суммы двух слагаемых

$$R_n(s) = R_n^*(s) + R_n^{**}(s),$$

где

$$R_n^*(s) = \frac{\alpha^{[a(n-1)]}}{s^{[a(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-su \frac{1}{\alpha}} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{[a(n-1)]-n-1} J_r \cdot \frac{d^{[a(n-1)]-n-r}}{du^{[a(n-1)]-n-r}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) \cdot u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right] \right\} du$$

и

$$\begin{aligned}
 R_n^{**}(s) &= \frac{\alpha^{[a(n-1)]}}{s^{[a(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-su \frac{1}{\alpha}} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \times \\
 &\times \int_{l+C_n}^{[a(n-1)]} \frac{\prod_{v=0}^{[a(n-1)]} \left(n - \frac{v}{\alpha} + \zeta \right) u^{n-\frac{[a(n-1)]}{\alpha} + \zeta - 1} \cdot x^{-\zeta}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + v)} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Согласно формуле (10)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}}{du^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right] \right| < \\ & < \sum_{i=0}^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r} C_{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}^i \times \\ & \times \left(\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r \right)^i \left| \frac{d^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}}{du^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}} \left\{ \Phi^{(n+1)}(u) u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right\} \right| \times \\ & \times u^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i - \frac{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} & \frac{d^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}}{du^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right] = \\ & = \sum_{p=0}^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i} C_{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}^p \cdot \Phi^{(\lfloor \alpha(n-1) \rfloor + 1 - r - i - p)}(u) \cdot \frac{d^p}{du^p} \left(u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right) \\ & \frac{d^p}{du^p} \left(u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right) = \left(n - \frac{n+r}{\alpha} \right) \left(n - 1 - \frac{n+r}{\alpha} \right) \dots \left(n - p + 1 - \frac{n+r}{\alpha} \right) u^{n-p - \frac{n+r}{\alpha}} \end{aligned}$$

и

$$\left| \frac{d^p}{du^p} \left(u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right) \right| < n^p \cdot u^{n-p - \frac{n+r}{\alpha}},$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}}{du^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right] \right| < \\ & < \sum_{p=0}^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i} C_{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}^p \cdot n^p \left| \Phi^{(\lfloor \alpha(n-1) \rfloor + 1 - r - i - p)}(u) \right| \cdot u^{n-p - \frac{n+r}{\alpha}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}}{du^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) u^{n - \frac{n+r}{\alpha}} \right] \right| < \\ & < \sum_{i=0}^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r} C_{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r}^i \cdot (\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r)^i \sum_{p=0}^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i} C_{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - n - r - i}^p \cdot n^p \times \\ & \times \left| \Phi^{(\lfloor \alpha(n-1) \rfloor + 1 - r - i - p)}(u) \right| \cdot u^{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor - r - i - p - \frac{\lfloor \alpha(n-1) \rfloor}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\left| \frac{\prod_{v=0}^{n+r-1} \left(n - \frac{v}{\alpha} + \zeta \right)}{\prod_{v=0}^n (\zeta + v)} \right| < A_1^n \frac{n^{n+r}}{\left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)^2} \quad \text{при } \zeta \in l + C_n,$$

где A_1 — некоторая постоянная, не зависящая от n и r , так что

$$|J_r| < A_2^n \cdot n^r.$$

Здесь также A_2 — есть некоторая достаточно большая постоянная, не зависящая от n и r .

Используя полученные неравенства для оценки $R_n^*(s)$, можем написать

$$\begin{aligned} |R_n^*(s)| &< \frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]} \cdot A_2^n}{|s|^{[\alpha(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-\alpha \frac{1}{u} \frac{1}{u}} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1} n^r \sum_{i=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r} C_{[\alpha(n-1)]-n-r}^i \times \right. \\ &\times ([\alpha(n-1)]-n-r)^i \sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r-i} C_{[\alpha(n-1)]-n-r-i}^p n^p |\Phi^{([\alpha(n-1)]+1-r-i-p)}(u)| \times \\ &\left. \times u^{[\alpha(n-1)]-r-i-p-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}} \right\} du. \end{aligned}$$

Дважды используя формулу

$$\sum_{p=0}^n \sum_{i=0}^p a_{i,p} = \sum_{i=0}^n \sum_{p=i}^n a_{i,p+i},$$

получим

$$\begin{aligned} |R_n^*(s)| &< \frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]} A_2^n}{|s|^{[\alpha(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-\alpha \frac{1}{u} \frac{1}{u}} \cdot \left\{ \sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1} \left(\sum_{r=0}^p \sum_{i=0}^{p-r} C_{[\alpha(n-1)]-n-r}^i \times \right. \right. \\ &\times C_{[\alpha(n-1)]-n-r-i}^{p-r-i} \cdot ([\alpha(n-1)]-n-r)^i \cdot n^{p-i} \cdot |\Phi^{([\alpha(n-1)]+1-p)}(u)| \times \\ &\left. \left. \times u^{[\alpha(n-1)]-p-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}} \right) \right\} du. \end{aligned}$$

Оценим сумму

$$\begin{aligned} b_{n,p} &= \sum_{r=0}^p \sum_{i=0}^{p-r} C_{[\alpha(n-1)]-n-r}^i \cdot C_{[\alpha(n-1)]-n-r-i}^{p-r-i} \cdot ([\alpha(n-1)]-n-r)^i \cdot n^{p-i}, \\ b_{n,p} &= n^p \sum_{r=0}^p C_{[\alpha(n-1)]-n-r}^{p-r} \sum_{i=0}^{p-r} C_{p-r}^i \left(\frac{([\alpha(n-1)]-n-r)^i}{n} \right) = \end{aligned}$$

$$= n^p \sum_{r=0}^p C_{[a(n-1)]-n-r}^{p-r} \left(1 + \frac{[a(n-1)]-n-r}{n}\right)^{p-r} < B^n \cdot n^p,$$

где B — постоянная, не зависящая от n и p .

Таким образом, имеем

$$|R_n^*(s)| < \frac{A_3^n}{|s|^{[a(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-a \frac{1}{\alpha} u} u^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \sum_{p=0}^{[a(n-1)]-n-1} n^p \times \right. \\ \left. \times \Phi^{[a(n-1)]+1-p}(u) |u|^{[a(n-1)]-p-\frac{[a(n-1)]}{\alpha}} \right\} du.$$

Окончательно получим

$$|R_n^*(s)| < \frac{A_3^n}{|s|^{[a(n-1)]}} \left(\sum_{p=0}^{[a(n-1)]-n-1} n^p \right) \int_0^\infty e^{-(a \frac{1}{\alpha} - s) u} u^{\frac{1}{\alpha}} du = \\ = \frac{A_3^n \cdot n^{[a(n-1)]}}{|s|^{[a(n-1)]}} \sum_{k=n+1}^{[a(n-1)]} \frac{1}{n^k} \int_0^\infty e^{-(a \frac{1}{\alpha} - s) u} u^{\frac{1}{\alpha}} du < \frac{C^n \cdot m_n^*}{|s|^{[a(n-1)]}},$$

где C — некоторая достаточно большая постоянная.

Чтобы оценить $R_n^{**}(s)$, получим оценки для интегралов

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\prod_{\nu=0}^{[a(n-1)]} \left(n - \frac{\nu}{\alpha} + \zeta\right) u^{n - \frac{[a(n-1)]}{\alpha} + \zeta - 1} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \nu)}, \\ J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{[a(n-1)]} \left(n - \frac{\nu}{\alpha} + \zeta\right) u^{n - \frac{[a(n-1)]}{\alpha} + \zeta - 1} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \nu)}.$$

Заметив, что

$$\left| \left(\frac{x}{u} \right)^{-\zeta} \right| \leq 1 \quad \text{при } \zeta \in C_n$$

и

$$\left| \left(\frac{x}{u} \right)^{-\zeta} \right| \leq \left(\frac{x}{u} \right)^{-\zeta} \quad \text{при } \zeta \in I,$$

будем иметь

$$|J_1| < B_1^n \cdot n^{an-n} \cdot u^{n - \frac{[a(n-1)]}{\alpha} - 1 + \varepsilon} \cdot x^{-\varepsilon}, \\ |J_2| < B_2^n \cdot n^{an-n} \cdot u^{n - \frac{[a(n-1)]}{\alpha} - 1}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 |R_n^{**}(s)| &< \frac{\alpha^{n\pi} \cdot B_1^n \cdot B^{n\pi-n}}{|s|^{[n(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-\alpha^{\frac{1}{\pi}} u^{\frac{1}{\pi}}} \cdot u^{n-\frac{[n(n-1)]}{\pi}+z-1} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) x^{-z} dx + \\
 &+ \frac{\alpha^{n\pi} \cdot B_2^n \cdot n^{n\pi-n}}{|s|^{[n(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-\alpha^{\frac{1}{\pi}} u^{\frac{1}{\pi}}} \cdot u^{n-\frac{[n(n-1)]}{\pi}-1} du \int_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx < \\
 &< \frac{B_3^n \cdot n^{n\pi-n}}{|s|^{[n(n-1)]}} \cdot \frac{1}{\pi+1} \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha^{\frac{1}{\pi}} u^{\frac{1}{\pi}}} \cdot u^{n-\frac{[n(n-1)]}{\pi}+z-1} du \int_0^u e^{\alpha x^{\frac{1}{\pi}}} \cdot x^{-z} dx + \right. \\
 &\left. + \int_0^\infty e^{-\alpha^{\frac{1}{\pi}} u^{\frac{1}{\pi}}} \cdot u^{n-\frac{[n(n-1)]}{\pi}-1} du \int_0^u e^{\alpha x^{\frac{1}{\pi}}} dx \right\}, \quad B_3 = \alpha^{n\pi} \max(B_1, B_2).
 \end{aligned}$$

Легко доказать, что

$$|R_n^{**}(s)| < \frac{B_4^n \cdot n^{n\pi-n} \cdot \frac{1}{\pi+1}}{|s|^{[n(n-1)]}},$$

где B_4 — некоторое достаточно большое число.

Сопоставляя эту последнюю оценку с оценкой $R_n^*(s)$, наконец, будем иметь

$$|R_n(s)| < |R_n^*(s)| + |R_n^{**}(s)| < \frac{A^n \cdot m_n^*}{|s|^{[n(n-1)]}},$$

где $A = C + B_4$.

Полученная оценка и завершает доказательство теоремы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 VIII 1959

Ս. Հ. ՍԻՆԱՅԻԱՆ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՈՒՄԸ ՆՐԱ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՇԱՐՔՈՎ

$$\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\pi}} > a^{\frac{1}{\pi}} \text{ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ}$$

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան $\operatorname{Re} z^{\frac{1}{\pi}} > a^{\frac{1}{\pi}}$ տիրույթում ունի

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$ ասիմպտոտիկ շարքը $\{m_n\}$ հաջորդականությամբ միջոցով, և ավել

շարքը միակ ձևով է որոշում ավել ֆունկցիան նշված տիրույթում:

Ապացուցված է, որ եթե $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} t^k$ ֆունկցիան

նախորդ է $(0, \infty)$ կիսառանցքի վրա, ապա

$$f(z) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} t} \cdot \Phi(t^{\alpha}) dt, \quad \operatorname{Re} z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (U)$$

Այս աշխատության նպատակն է (Ա) ներկայացումն ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների դասն ընդլայնել:

Դիտարկվում է երկու դեպք՝ $\alpha \leq 1$, $\alpha > 1$:

Աշխատությունում $\Phi(t)$ ֆունկցիան ենթադրվում է քվադրանալիտիկ $\Phi(t)$ ֆունկցիալի և նրա ածանցյալների վրա ածի որոշ պայմաններ գնելու դեպքում ապացուցվում է (Ա) բանաձևի իրավացիությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Salinas Baltasar R. Los problemas de unicidad en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes. Rev. Real acad. cienc. exact., fís. y natur., Madrid, 1956, 50, № 2, 191—227.
2. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций. Известия АН Арм. ССР, том VI, 5—6, 1953.

А. А. Талалян

О сходимости и суммируемости почти всюду общих ортогональных рядов

В в е д е н и е

Настоящая работа содержит некоторые результаты, примыкающие к следующей задаче.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ полная $O. H$ система на $[a, b]^*$ и $f(x)$ произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$, которая может также обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Существует ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (1)$$

сходящийся почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$?

В такой общей постановке, когда представимая функция $f(x)$ может обращаться в ∞ на множестве положительной меры, этот вопрос не решен даже в том частном случае, когда система $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с тригонометрической системой.

Однако, если потребовать, чтобы представимая функция $f(x)$ была почти везде конечной, то вышепоставленный вопрос для тригонометрической системы имеет положительный ответ. А именно справедлива следующая теорема Д. Е. Меньшова.

Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0, 2\pi]$, существует ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ (см. [1]).

Неизвестно также, справедлива ли теорема Меньшова для произвольных полных $O. H$ систем?

Большой интерес сформулированной теоремы Меньшова отчасти заключается в том, что до сих пор неизвестно, обязан ли ряд Фурье

В дальнейшем будем говорить, что $\{\varphi_n(x)\}$ есть $O. H$ система на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

произвольной непрерывной функции сходиться хотя бы в одной точке, в то время, как любая функция представляется тригонометрическим рядом (не рядом Фурье), сходящимся к этой функции почти всюду?

В связи с этим нам представляется интересным выяснить следующий вопрос.

Существует ли полная $O.H$ система расходимости*, для которой верна теорема Меньшова?

Оказывается, что справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а I. Существует полная $O.H$ система $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$, такая, что разложение некоторой функции $f(x) \in L_2[a, b]$ по этой системе расходится почти всюду, но тем не менее для любой измеримой функции $F(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится к $F(x)$ почти всюду на $[a, b]$. При этом функция $F(x)$ может обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Отметим, что существование $O.H$ систем, для которых разложение некоторых функций из L_2 расходится почти всюду, было доказано Меньшовым в 1923 г. (см. [2]).

Далее, представляет интерес также ослабленная задача представления измеримых функций ортогональными рядами, когда вместо сходимости почти всюду этих рядов требуется суммируемость почти всюду некоторым регулярным линейным методом T .

Точная формулировка этой задачи может быть дана следующим образом.

Существует ли линейный регулярный метод T такой, чтобы для любой полной $O.H$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ и для любой измеримой функции $f(x)$ существовал ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

который суммировался бы методом T к $f(x)$ почти всюду?

По поводу этой задачи отметим следующий результат (доказательство этого результата несложно, оно будет проведено в дальнейшем).

* $O.H$ система $\{\varphi_n(x)\}$ называется системой расходимости, если ряд Фурье некоторой функции $\psi(x) \in L_2$ по этой системе расходится на множестве положительной меры.

Т е о р е м а II. Пусть дано счетное множество полных *О.Н.* систем $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$, $n=1, 2, \dots$ функций, определенных на $[a, b]$.

Тогда существует линейный регулярный метод *T*, матрица $\|a_{nk}\|$ которого состоит из нулей и единиц, такой, что для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, и для любой системы $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$, $n=1, 2, \dots$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x),$$

который суммируется почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$ методом *T*.

Если же при представлении измеримой функции рядом по системе $\{\varphi_n(x)\}$ допускать перемену порядка функций этой системы, то любую измеримую функцию можно представить рядом по переставленной системе, который суммируется почти всюду методами Чезаро.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а III. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированный базис пространства $L_p[a, b]$, $p > 1$ и $f(x)$ произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$.

Тогда в системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно изменить порядок функций таким образом, чтобы для полученной новой системы $\{\varphi_{n_n}(x)\}$ существовал ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{n_n}(x),$$

который суммируется почти всюду к $f(x)$ одновременно всеми методами Чезаро положительного порядка.

Отметим при этом, что в этой теореме представимая функция $f(x)$ может обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

При том предположении, когда представимая функция $f(x)$ почти везде конечна, аналогичная теорема без доказательства была сформулирована в работе [3].

Приведенное утверждение, а также указанное более слабое утверждение работы [3], доказываются методом Д. Е. Меньшова, примененным им в работе [4], где доказана следующая теорема.

В любой *О.Н.* системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно изменить порядок функций так, чтобы для полученной новой системы $\{\varphi_{n_n}(x)\}$, какова бы ни была последовательность $\{c_n\}$, где

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty,$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

суммировался почти всюду любым методом Чезаро положительного порядка.

Отметим, что в этой теореме перестановка функций зависит только от системы, в то время как в теореме III перестановка зависит и от базиса $\{\varphi_n(x)\}$ и от представимой функции $f(x)$.

Теорема III будет доказана в § 3 как следствие более общих теорем.

§ 1.

Сформулированная во введении теорема I является следствием следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть полная *О.Н.* система $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$, есть система расходимости, т. е. для некоторой последовательности $\{a_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad (1.1)$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (1.2)$$

расходится на некотором множестве $E \subset [a, b]$, где $\text{mes} E > 0$.

Тогда существует *О.Н.* система $\{\omega_n(x)\}$ функций, являющихся линейными комбинациями функций $\{\varphi_n(x)\}$, которая является системой расходимости и одновременно обладает следующим свойством.

Для любой измеримой $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x), \quad (1.3)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

При доказательстве этой теоремы нам будет нужна следующая лемма.

Л е м м а 1. Пусть ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_l(x) \quad (1.4)$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, расходится на некотором множестве E положительной меры.

Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел

$$0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots, \quad (1.5)$$

такая, что для любой последовательности $k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$ ряд

$$\sum_{i=N_{k_1}-1+1}^{N_{k_1}} u_i(x) + \sum_{i=N_{k_2}-1+1}^{N_{k_2}} u_i(x) + \dots + \sum_{i=N_{k_j}-1+1}^{N_{k_j}} u_i(x) + \dots, \quad (1.6)$$

рассматриваемый как ряд по функциям $u_i(x)$ с индексами i удовлетворяющими неравенствам $N_{k_{j-1}} < i \leq N_{k_j}$; $j=1, 2, \dots$, расходится почти всюду на множестве E .

Доказательство. Так как ряд (1.4) расходится на множестве E , то для любой точки $x \in E$ существует положительное число ε (ε зависит от x) такое, что выполняется условие:

Каково бы ни было натуральное число N , существуют и $p > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} u_i(x) \right| > \varepsilon. \quad (1.7)$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (1.8)$$

Обозначим через E_n множество тех точек x из E , для которых выполняется условие (1.7) при $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Очевидно, будем иметь

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E. \quad (1.9)$$

Обозначим через $E_{N,p}^{(n)}$ множество тех точек $x \in E_n$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=m}^l u_i(x) \right| > \varepsilon_n, \quad (1.10)$$

где m, l зависят от x и $N < m \leq l < N+p$.

В силу свойства (1.7), где $\varepsilon = \varepsilon_n$, имеем для любого натурального N

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} E_{N,p}^{(n)} = E_n. \quad (1.11)$$

Отсюда, в силу того, что $E_{N,p}^{(n)} \supset E_{N,p}^{(n)}$, при $p' > p$, имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{mes } E_{N,p}^{(n)} = \text{mes } E_n \quad (1.12)$$

для любых фиксированных N и n .

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\gamma_n\}$ такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty. \quad (1.13)$$

Полагая $N=0$ и $n=1$, в силу (1.12) мы можем определить $p=N_1$ настолько большое, что

$$\text{mes } E_{0,N_1}^{(1)} > \text{mes } E_1 - \gamma_1. \quad (1.14)$$

Пусть натуральные числа $N_1 < N_2 < \dots < N_{i-1}$ уже определены. Полагая $N=N_i$ и применяя (1.12), определим $p=N_i$ настолько большое, чтобы выполнялись неравенства

$$\text{mes } E_{N_{i-1},N_i}^{(n)} > \text{mes } E_n - \gamma_i, \quad 1 \leq n \leq i. \quad (1.15)$$

Таким образом, мы можем определить последовательность

$$0 = N_0 < N_1 < \dots < N_{i-1} < N_i < \dots, \quad (1.16)$$

для которой выполняются неравенства (1.15) для всех $i=1, 2, \dots$.

Легко видеть, что последовательность (1.16) будет удовлетворять условиям леммы 1.

В самом деле, пусть $k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots$ возрастающая последовательность натуральных чисел.

Для фиксированного n рассмотрим последовательность множеств

$$E_{N_{k_j-1}, N_{k_j}}^{(n)}; \quad j=1, 2, \dots$$

В силу (1.15), начиная с некоторого номера j_0 , будем иметь

$$\text{mes } E_{N_{k_j-1}, N_{k_j}}^{(n)} > \text{mes } E_n - \gamma_{k_j}; \quad j > j_0. \quad (1.17)$$

Обозначим через

$$E^{(n)} = \liminf_{j \rightarrow \infty} E_{N_{k_j-1}, N_{k_j}}^{(n)} \quad (1.18)$$

Из определения множеств $E_{N,p}^{(n)}$ (см. 1.10) видно, что ряд (1.16) расходится всюду на множестве $E^{(n)}$ для всех $n=1, 2, \dots$.

Но в силу (1.13) и (1.18)

$$\text{mes } E^{(n)} = \text{mes } E_n \quad (1.19)$$

и тогда из равенства (1.9) следует, что ряд (1.6) расходится почти всюду на множестве E . Лемма 1 доказана.

При доказательстве теоремы 1 мы будем пользоваться следующей теоремой, доказанной в работе [5] (см. § 2, теорема 3).

Т е о р е м а А. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, полная в смысле сходимости почти всюду, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ существует последовательность $\{\Phi_k(x)\}$, где

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ik} f_i(x)$$

(c_{ik} постоянные) такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Тогда любая последовательность $f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \dots, f_{n+k}(x), \dots$ полученная из $\{f_k(x)\}$ после исключения из нее первых n функций, снова будет полной в смысле сходимости почти всюду.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть полная О.Н. система на $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) \quad (1.20)$$

расходится на множестве E положительной меры и кроме того

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty. \quad (1.21)$$

Применяя лемму 1, мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел

$$0 = N_0 < N_1 < \dots < N_k < \dots, \quad (1.22)$$

такую, что для любой последовательности $k_1 < k_2 < \dots < k_j, \dots$, ряд

$$\sum_{i=N_{k_1}-1+1}^{N_{k_1}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=N_{k_2}-1+1}^{N_{k_2}} a_i \varphi_i(x) + \dots + \sum_{i=N_{k_j}-1+1}^{N_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \dots \quad (1.23)$$

расходится почти всюду на множестве E .

Перенумеруем все полиномы с рациональными коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x), \dots \quad (1.24)$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (1.25)$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L_2[a, b]$, то легко видеть, что она будет полной также в смысле сходимости почти всюду.

Возьмем линейную комбинацию из функций системы $\{\varphi_n(x)\}$

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} c_{1i} \varphi_i(x) \quad (1.26)$$

такую, чтобы на некотором множестве $E_1 \subset [a, b]$, где

$$\text{mes } E_1 > b - a - \varepsilon_1, \quad (1.27)$$

имело место неравенство

$$|\Phi_1(x) - P_1(x)| < \varepsilon_1, \quad x \in E_1. \quad (1.28)$$

Далее предположим, что $m_2 > n_1$ выбрано настолько большим, что для некоторого натурального k_1 имеет место неравенство

$$n_1 < N_{k_1-1} < N_{k_1} < m_2. \quad (1.29)$$

При этом N_{k_1} некоторое число из последовательности (1.22).

Рассматривая последовательность $\varphi_{m_1}(x), \varphi_{m_1+1}(x), \dots$, в силу теоремы А), мы можем определить функцию $\Phi_2(x)$ вида

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=m_1}^{n_2} c_{2i} \varphi_i(x)$$

и множество E_2 такие, что

$$\text{mes } E_2 > b - a - \varepsilon_2 \quad (1.30)$$

и

$$|\Phi_2(x) - P_2(x)| < \varepsilon_2, \quad x \in E_2. \quad (1.31)$$

Ясно, что если мы неограниченно продолжим этот процесс с последовательным применением теоремы А), то можно определить последовательность натуральных чисел

$$1 = m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \dots < m_j < n_j < \dots, \quad (1.32)$$

последовательность множеств $\{E_j\}$, а также последовательность функций $\{\Phi_j(x)\}$ вида

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=m_j}^{n_j} c_{ji} \varphi_i(x) \quad (1.33)$$

такие, что

$$\text{mes } E_j > b - a - \varepsilon_j, \quad (1.34)$$

$$|\Phi_j(x) - P_j(x)| < \varepsilon_j \quad \text{при } x \in E_j. \quad (1.35)$$

При этом мы предполагаем, что последовательность (1.32) такова, что

для любого $j=1, 2, \dots$ существует натуральное число k_j , удовлетворяющее неравенству

$$n_j < N_{k_j-1} < N_{k_j} < m_{j-1}; \quad j=1, 2, \dots, \quad (1.36)$$

где N_{k_j} — некоторое число из последовательности (1.22).

В силу (1.32) очевидно будем иметь

$$N_{k_1-1} < N_{k_1} < N_{k_2-1} < N_{k_2} < \dots < N_{k_j-1} < N_{k_j} < \dots \quad (1.37)$$

Обозначим через $\omega_n(x)$ систему, которая образована из функций

$$\frac{\Phi_j(x)}{\|\Phi_j(x)\|} \quad j=1, 2, \dots,$$

и из функций $\varphi_n(x)$ с индексами n , удовлетворяющими неравенствам

$$N_{k_j-1} + 1 \leq n \leq N_{k_j}, \quad j=1, 2, \dots \quad (1.38)$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ есть $O.H$ система, то из (1.32), (1.33) и (1.36) видно, что система $\{\omega_n(x)\}$ также есть $O.H$ система на $[a, b]$.

Легко видеть, что $\{\omega_n(x)\}$ есть система расходимости. В самом деле, рассмотрим ряд (1.23), где числа N_{k_j} удовлетворяют неравенствам (1.36). Из определения системы $\{\omega_n(x)\}$ видно, что все функции ряда (1.23) входят в систему $\{\omega_n(x)\}$. Поэтому ряд (1.23) можно писать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n(x), \quad (1.39)$$

где $b_n=0$ для n , не удовлетворяющих неравенствам

$$N_{k_j-1} + 1 \leq n \leq N_{k_j} \quad (j=1, 2, \dots).$$

Ряд (1.39) расходится почти всюду на множестве E , так как этим свойством обладает ряд (1.23).

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k_j-1}+1}^{N_{k_j}} a_n^2 < +\infty$$

в силу (1.21).

Докажем теперь, что для любой измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(x), \quad (1.40)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (1.41)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\tau_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k < +\infty. \quad (1.42)$$

Так как последовательность (1.24) полиномов с рациональными коэффициентами такова, что она остается всюду плотной в $L_2[a, b]$ (а также в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций) после исключения из нее любого конечного числа функций, то ясно, что для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и натурального N существует полином $P_n(x)$ из последовательности (1.24) такой, что

$$\text{mes } E(|F(x) - P_n(x)| > \varepsilon) < \varepsilon \quad (1.43)$$

и при этом $n > N$.

Так как в силу (1.25) $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то из неравенств (1.34) и (1.35) следует, что последовательность $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ также будет обладать этим свойством, т. е.

для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и натурального N существует $\Phi_j(x)$ такая, что

$$\text{mes } E(|\Phi_j(x) - F(x)| > \varepsilon) < \varepsilon \quad (1.44)$$

и при этом $j > N$.

Применяя свойство (1.44) к функции $F(x) = f_1(x)$ при $\varepsilon = \tau_{j_1}$, мы можем определить множество B_1 и число j_1 такие, что

$$\text{mes } B_1 > b - a - \tau_{j_1}, \quad (1.45)$$

$$|\Phi_{j_1}(x) - f_1(x)| < \tau_{j_1} \text{ при } x \in B_1. \quad (1.46)$$

Предположим, что уже определены множества $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ и функции $\Phi_{j_1}(x), \Phi_{j_2}(x), \dots, \Phi_{j_{n-1}}(x)$, где $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1}$.

Положим

$$F(x) = f_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{j_k}(x) \quad (1.47)$$

и применим к этой функции свойство (1.44), полагая $\varepsilon = \tau_{j_n}$ и $N = j_{n-1}$. Тогда можно определить $j_n > j_{n-1}$ и множество B_n такие, что

$$\text{mes } B_n > b - a - \tau_{j_n}, \quad (1.48)$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) - f_n(x) \right| < \tau_{j_n} \text{ при } x \in B_n. \quad (1.49)$$

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{j_k}(x) \quad (1.50)$$

сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

В самом деле, положим

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} B_k. \quad (1.51)$$

В силу (1.42) и (1.48) имеем

$$\text{mes } B = b - a.$$

Пусть $x \in B$, тогда для некоторого целого n_x будем иметь

$$x \in B_n \quad \text{при} \quad n > n_x. \quad (1.52)$$

Тогда в силу (1.49)

$$\left| \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) - f_n(x) \right| < \eta_n \quad \text{при} \quad n > n_x. \quad (1.53)$$

Из (1.42) и (1.53) вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) - f_n(x) \right| = 0, \quad (1.54)$$

а из (1.41) и (1.54) следует что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in B. \quad (1.55)$$

Так как по нашему построению функции $\frac{\Phi_{j_k}(x)}{\|\Phi_{j_k}(x)\|}$ составляют часть системы $\{\omega_n(x)\}$, то ряд (1.50) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(x), \quad (1.56)$$

где $c_n = 0$, если $\omega_n(x)$ не совпадает ни с одной из функций $\frac{\Phi_{j_k}(x)}{\|\Phi_{j_k}(x)\|}$, а если $\omega_n(x) = \frac{\Phi_{j_k}(x)}{\|\Phi_{j_k}(x)\|}$, то $c_n = \|\Phi_{j_k}(x)\|$.

Так как ряд (1.50) почти всюду сходится к $f(x)$, то ряд (1.56) тоже будет сходиться к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Теорема 1 доказана.

Опираясь на теорему А), можно доказать также следующую теорему.

Теорема 2. Пусть дано счетное множество полных $O.H$ систем $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$, $n=1, 2, \dots$ функций, определенных на $[a, b]$.

Тогда существует последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$ такая, что для любой системы $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$ ($n=1, 2, \dots$), какова бы ни была измеримая функция $f(x)$ определенная на $[a, b]$, существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x) \quad (1.57)$$

для которого частные суммы с номерами k_j сходятся к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_j} c_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x) = f(x) \quad (1.58)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Доказательство. Положим $k_0=0$. Предположим теперь, что число k_{j-1} уже определено. Рассмотрим системы $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$ для $1 \leq n \leq j$. В силу теоремы А), если из каждой из этих систем отбросим первые k_{j-1} функций, то они останутся полными в смысле сходимости почти всюду. Поэтому легко видеть, что существует число $k_j > k_{j-1}$, множество B_j и функции

$$\Phi_j^{(n)}(x) = \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} c_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x) \quad 1 \leq n \leq j, \quad (1.59)$$

для которых выполняются условия

$$\text{mes } B_j > b - a - \varepsilon_j, \quad (1.60)$$

$$|\Phi_j^{(n)}(x) - P_j(x)| < \varepsilon_j, \quad x \in B_j, \quad 1 \leq n \leq j. \quad (1.61)$$

Таким образом мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$, последовательность множеств $\{B_j\}$ и функции $\Phi_j^{(n)}(x)$, $1 \leq n \leq j$, $j=1, 2, \dots$ вида (1.59), для которых будут выполнены условия (1.60) и (1.61), где $j=1, 2, \dots$, $1 \leq n \leq j$.

Пусть теперь $f(x)$ измеримая функция. Рассмотрим для фиксированного n систему $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$.

Так как для всех $j > n$ имеет место неравенство (1.61), где $\{P_j(x)\}$ суть полиномы с рациональными коэффициентами, а $\{\varepsilon_j\}$ удов-

летворяет условию (1.25), то точно так же, как и в предыдущей теореме, существует ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{j_l}(x), \quad (1.62)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x), \quad (1.63)$$

где коэффициенты $a_k^{(n)}$ определены следующим образом

$$a_k^{(n)} = c_k^{(n)} \quad \text{для} \quad k_{j_{l-1}+1} < k \leq k_{j_l}, \quad l=1, 2, \dots, \quad (1.64)$$

$$a_k^{(n)} = 0 \quad \text{для остальных } k.$$

Из (1.59) и (1.64) видно, что частные суммы $S_{k_j}^{(n)}(x)$ ряда (1.63), где

$$S_{k_j}^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{k_j} a_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x), \quad (1.65)$$

совпадают с частными суммами ряда (1.62). Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{k_j}^{(n)}(x) = f(x) \quad (1.66)$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Так как последовательность $\{k_j\}$ не зависит от n и $f(x)$ произвольная измеримая функция, то теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим бесконечную матрицу $\|a_{jk}\|$, элементы которой определяются следующим образом

$$a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq k_j \\ 1 & \text{при } k = k_j \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots), \quad (1.67)$$

где $\{k_j\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, фигурирующая в предыдущей теореме.

Таким образом, матрица $\|a_{jk}\|$ определяет некоторый линейный регулярный метод Т. Из (1.65), (1.66) и (1.67) следует, что ряд (1.63) суммируется методом Т почти всюду к $f(x)$.

Таким образом, сформулированная во введении теорема II справедлива.

§ 2.

В настоящем параграфе мы докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (2.1)$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, универсален, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ существует подпоследовательность частных сумм

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} f_n(x) \quad (2.2)$$

такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x) \quad (2.3)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Пусть, далее, существует подпоследовательность $\{f_{k_j}(x)\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) = 0 \quad (2.4)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Тогда ряд (2.1) будет универсальным относительно перестановок в классе всех измеримых функций в смысле суммируемости одновременно всеми методами Чезаро положительного порядка, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ члены ряда (2.1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x) \quad (2.5)$$

суммировался к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ всеми методами Чезаро положительного порядка.

Для доказательства этой теоремы мы будем рассматривать введенные Д. Е. Меньшовым Т методы суммирования (см. [6]), которые определяются следующим образом.

Линейный метод суммирования, определенный матрицей $\|a_{ik}\|$, называется методом Т, если удовлетворяются следующие условия:

1⁰ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ сходится для всех значений i , достаточно больших, и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1;$$

2°. для всех достаточно больших значений i имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < M,$$

где M не зависит от i ;

$$3^\circ. \lim_{i \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k < +\infty} |a_{ik}| = 0.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать положительные методы T' , т. е. мы будем предполагать, что, помимо условий 1°, 2°, 3°, имеет место также условие

$$4^\circ. a_{ik} > 0, \quad i = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко доказать, что все методы Чезаро положительного порядка являются положительными T' методами (см. [6]).

Очевидно, сформулированная выше теорема 3 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть ряд (2.1) почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, универсален и пусть для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_i\}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = 0 \quad (2.6)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Пусть, далее, задана последовательность положительных T' методов: $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

Тогда для любой измеримой функции $f(x)^*$ члены ряда (2.1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{k_i}(x) \quad (2.7)$$

суммировался почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

Теорема III, сформулированная во введении, будет следовать из теоремы 3 в силу следующей теоремы, сформулированной в [7].

Теорема.** Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть нормированный базис пространства $L_p[a, b]$, $p > 1$. Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (2.8)$$

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

** Доказательство теорем, сформулированных в [7], изложено в статье „О рядах, универсальных относительно перестановок“, которая сдана в печать в Известиях АН СССР.

с коэффициентами a_n , стремящимися к нулю, который универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере.

В [7] была сформулирована также теорема о том, что если функциональный ряд универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере, то после некоторой перестановки его членов он становится универсальным относительно сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм.

Таким образом получаем, что для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ существует универсальный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \quad (2.9)$$

и при этом $a_{n_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Но так как система $\{\varphi_n(x)\}$ нормирована, т. е.

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^p dx = 1, \quad (2.10)$$

то ясно, что некоторая последовательность $a_{n_{k_l}} \varphi_{n_{k_l}}(x)$ будет сходиться к нулю почти всюду на $[a, b]$.

Следовательно, для ряда (2.9) будут выполнены все предположения, сделанные в теореме 3.

Отсюда ясно, что сформулированная во введении теорема III следует из теоремы 3 и из существования универсального ряда (2.9).

С другой стороны, как уже отмечалось выше, теорема 3 является следствием теоремы 4. Итак, остается доказать теорему 4. Эта теорема доказывается методом Д. Е. Меньшова, примененным им в работе [4].

Доказательство теоремы 4. Прежде всего отметим, что в силу условия (2.6) из последовательности $\{k_l\}$ можно выбрать возрастающую последовательность $m_1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ такую, что ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{m_p}(x) \quad (2.11)$$

почти всюду на $[a, b]$ абсолютно сходится.

В самом деле пусть $\varepsilon_p > 0$, $p = 1, 2, \dots$ и пусть

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p < +\infty. \quad (2.12)$$

В силу условия (2.6) существует возрастающая последовательность $\{m_p\}$, $\{m_p\} \subset \{k_l\}$ и последовательность множеств $\{E_p\}$ такие, что

$$|f_{m_p}(x)| < \varepsilon_p \quad \text{при} \quad x \in E_p, \quad (2.13)$$

$$\text{mes } E_p > b - a - \varepsilon_p. \quad (2.14)$$

Положим

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{p=n}^{\infty} E_p. \quad (2.15)$$

Ясно, что на множестве E ряд (2.11) абсолютно сходится и что

$$\text{mes } E = b - a. \quad (2.16)$$

Обозначим через $p_s, s=1, 2, \dots$ последовательность целых положительных чисел, отличных от чисел $m_p, p=1, 2, \dots$ и перенумерованных в порядке возрастания. Легко видеть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_{p_s}(x) \quad (2.17)$$

универсален. В самом деле, пусть $f(x)$ произвольная измеримая функция. Обозначим через $\varphi(x)$ сумму ряда (2.11) и положим

$$F(x) = f(x) + \varphi(x). \quad (2.18)$$

В силу универсальности ряда (2.1) существует возрастающая последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_r < \dots$ такая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{i_r} f_k(x) = F(x) \quad (2.19)$$

почти всюду на $[a, b]$.

В силу определения ряда (2.17) мы можем написать

$$\sum_{k=1}^{i_r} f_k(x) = \sum_{s=1}^{i_{q_r}} f_{m_s}(x) + \sum_{s=1}^{i_{l_r}} f_{p_s}(x). \quad (2.20)$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{i_{q_r}} f_{m_s}(x) = \varphi(x)$$

почти всюду на $[a, b]$, то в силу (2.18), (2.19) и (2.20) будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{i_{l_r}} f_{p_s}(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$. Тем самым универсальность ряда (2.17) доказана.

Пусть $\{T_n\}$ есть последовательность положительных T'' методов,

т. е. каждый метод T_n определяется матрицей $\|a_{ik}^{(n)}\|$, обладающей следующими свойствами:

$$1^{00}. a_{ik}^{(n)} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots; \quad k=1, 2, \dots;$$

$$2^{00}. \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} \text{ сходится для всех значений } i \text{ и}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} = 1;$$

$$3^{00}. \text{ для всех значений } i \text{ имеет место неравенство}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} < M_n,$$

где M_n не зависит от i^* ;

$$4^{00}. \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ik}^{(n)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

$$5^{00}. \text{ если обозначить через } \gamma_i^{(n)} = \max_{1 \leq k < \infty} |a_{ik}^{(n)}|, \text{ то}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i^{(n)} = 0.$$

Пусть $f(x)$ произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$, и $\varphi(x)$ есть сумма ряда (2.11).

Положим

$$F(x) = f(x) - \varphi(x). \quad (2.21)$$

Так как ряд (2.17) универсален, то некоторая подпоследовательность частных сумм этого ряда будет сходиться почти всюду на $[a, b]$ к $F(x)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{l_j}(x) = F(x) \quad (2.22)$$

почти всюду на $[a, b]$, где

$$S_{l_j}(x) = \sum_{l=1}^{l_j} f_{p_l}(x). \quad (2.23)$$

Сначала мы докажем, что между членами ряда (2.17) можно вставить нули таким образом, чтобы полученный новый ряд суммировался бы почти всюду на $[a, b]$ к $F(x)$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

* Ясно, что условие 3^{00} следует из 1^{00} и 2^{00} , но для дальнейшего удобно сформулировать его отдельно.

Пусть A , B и C те множества, лежащие на отрезке $[a, b]$, где $F(x)$ принимает соответственно конечные значения, значение $+\infty$ и значение $-\infty$:

$$A = E(|F(x)| < +\infty), \quad (2.24)$$

$$B = E(F(x) = +\infty), \quad (2.25)$$

$$C = E(F(x) = -\infty). \quad (2.26)$$

Очевидно,

$$A + B + C = [a, b] \quad (2.27)$$

и

$$\text{mes } A + \text{mes } B + \text{mes } C = b - a. \quad (2.28)$$

В наших дальнейших рассуждениях не исключается также случай, когда одно или два из этих множеств пусты или имеют меру нуль.

Через E обозначим множество тех точек, где выполняется равенство (2.22). Так как (2.22) имеет место почти всюду на $[a, b]$, то

$$\text{mes } E = b - a. \quad (2.29)$$

Очевидно, для каждого значения j можно определить положительное число L_j и множество G_j , которые удовлетворяют условиям

$$1 < L_j < L_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

$$\max_{1 \leq l \leq l_j} |S_l(x)| < L_j \quad \text{при } x \in G_j(B + C), \quad (2.31)$$

$$\max_{1 \leq l \leq l_j} (|S_l(x)| + |F(x)|) < L_j \quad \text{при } x \in G_j A, \quad (2.32)$$

$$G_j \subset (a, b), \quad \text{mes } G_j > b - a - \frac{1}{j^2}. \quad (2.33)$$

В условиях (2.31) и (2.32) $S_l(x)$ есть частная сумма ряда (2.17)

$$S_l(x) = \sum_{s=1}^l f_{\varepsilon_s}(x). \quad (2.34)$$

Пусть

$$G = \liminf G_j. \quad (2.35)$$

Тогда из (2.33) следует, что

$$G \subset (a, b), \quad \text{mes } G = b - a. \quad (2.36)$$

Положим

$$\gamma_l^{(n)} = \max_{1 \leq s \leq n} \gamma_s^{(n)}. \quad (2.37)$$

Из условия 5^{00} следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_l^{(n)} = 0 \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots. \quad (2.38)$$

Определим две последовательности целых чисел λ_j и μ_j следующим образом.

Положим $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

Далее берется λ_j таким образом, что

$$\lambda_{j-1} < \lambda_j, \quad \gamma_{\lambda_j}^{(n)} L_j \mu_{j-1} < \frac{1}{j}; \quad 1 \leq n \leq j. \quad (2.39)$$

В силу 2^{00} ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)}$ сходится для каждого значения i и для каждого $n=1, 2, \dots$, поэтому можно определить целое число μ_j так, чтобы выполнялись также неравенства

$$\mu_{j-1} + l_{j+1} < \mu_j, \quad L_j \delta_j^{(n)} < \frac{1}{2^j}; \quad 1 \leq n \leq j, \quad (2.40)$$

где

$$\delta_j^{(n)} = \max_{1 \leq i < \lambda_j} \sum_{k=\mu_j}^{\infty} a_{ik}^{(n)}. \quad (2.41)$$

Таким образом определены целые числа λ_j и μ_j для всех значений индекса j и неравенства (2.39) и (2.40) имеют место для всех $j > 1$.

Положим

$$l_0 = 0, \quad \mu'_j = \mu_j + l_j - l_{j-1}. \quad (2.42)$$

Из первого неравенства (2.40) имеем

$$\mu_j < \mu'_j < \mu_{j+1} \quad (j=1, 2, \dots). \quad (2.43)$$

Кроме того из $\mu_1 = 0$ вытекает

$$\sum_{r=1}^j (\mu'_r - \mu_r) = l_{j-1} + \mu'_j - \mu_j = l_j. \quad (2.44)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \psi_v(x) \quad (2.45)$$

члены которого определены следующим образом

$$\psi_v(x) = 0 \quad \text{при} \quad \mu'_j < v \leq \mu_{j+1}, \quad (2.46)$$

$$\psi_v(x) = f_{\mu'_j}(x) \quad \text{при} \quad \mu_j < v \leq \mu'_j, \quad (2.47)$$

где

$$l = \sum_{r=1}^{j-1} (\mu'_r - \mu_r) + v - \mu_j = l_{j-1} + v - \mu_j \quad (2.48)$$

Другими словами ряд (2.45) получается из ряда (2.17), если в последнем после члена $f_{ij}(x)$ прибавить $\mu_{j+1} - \mu_j$ нулей для каждого j .

Докажем, что ряд (2.45) суммируется всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ к $F(x)$ в каждой точке множества

$$G \cdot E \cdot (A + B + C) = G \cdot E \cdot A + G \cdot E \cdot B + G \cdot E \cdot C. \quad (2.49)$$

Положим

$$S_k^*(x) = \sum_{v=1}^k \psi_v(x) \quad (2.50)$$

и рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x), \quad (2.51)$$

где $a_{ik}^{(n)}$ являются элементами матрицы, соответствующей методу T_n .

Чтобы доказать, что в любой точке x множества (2.49) ряд (2.45) суммируется к $F(x)$ методом T_n , нужно доказать, что в этой точке ряд (2.51) сходится для всех достаточно больших значений i и обладает суммой, которая стремится к $F(x)$, если $i \rightarrow \infty$.

Сначала предположим, что x принадлежит множеству $G \cdot E \cdot A$ (конечно, мы предполагаем, что это множество не пусто; в том случае, когда это множество пусто, нечего доказывать).

В силу регулярности и положительности метода T_n , в данном случае достаточно доказать, что в рассматриваемой точке x ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} |S_k^*(x) - F(x)| \quad (2.52)$$

сходится для всех достаточно больших значений i и обладает суммой, которая стремится к нулю вместе с $\frac{1}{i}$.

В силу (2.46), (2.47), (2.48) и (2.50) будем иметь

$$S_k^*(x) = S_{l_j}(x) \quad \text{для} \quad \mu_j^* < k \leq \mu_{j+1}^*, \quad (2.53)$$

$$S_k^*(x) = S_l(x) \quad \text{для} \quad \mu_j < k \leq \mu_j^*, \quad (2.54)$$

где

$$l = l_{j-1} + k - \mu_j^* \quad (\text{очевидно } l_{j-1} < l \leq l_j). \quad (2.55)$$

Предположим, что

$$\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.56)$$

Рассмотрим суммы вида

$$\sigma_{ir}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} |S_k^*(x) - F(x)|. \quad (2.57)$$

В силу (2.53), (2.54) и (2.55) будем иметь

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_r} a_{lk}^{(n)} |S_l(x) - F(x)| + |S_{l_r}(x) - F(x)| \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{lk}^{(n)}, \quad (2.58)$$

где

$$r=1, 2, \dots, \quad l=l_{r-1}+k-\mu_r \text{ (ясно, что } l_{r-1} < l \leq l_r).$$

Если $x \in G \cdot E \cdot A$, то в силу определения множества G существует индекс j_x такой, что $x \in G_j$ для всех $j > j_x$.

С другой стороны, так как $x \in E \cdot A$, будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |S_{l_r}(x) - F(x)| = 0. \quad (2.59)$$

Предположим, что

$$j > n, \quad j-1 > j_x \text{ и } \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}. \quad (2.60)$$

Если теперь $r=j-1$ или $r=j$, то $x \in G_r$ и из (2.58) и (2.32) получаем

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_r} a_{lk}^{(n)} + |S_{l_r}(x) - F(x)| \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{lk}^{(n)}. \quad (2.61)$$

Отсюда, в силу определения чисел $\gamma_l^{(n)}$ (см. 5⁰⁰) и в силу условия 3⁰⁰, будем иметь

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_r \gamma_l^{(n)} (\mu_r - \mu_r) + M_n |S_{l_r}(x) - F(x)|.$$

Следовательно,

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_j \gamma_l^{(n)} (\mu_r - \mu_r) + M_n |S_{l_r}(x) - F(x)|. \quad (2.62)$$

Из (2.37), (2.40), (2.42) и (2.56) получаем

$$\gamma_l^{(n)} \leq \gamma_{\lambda_j}^{(n)}; \quad \mu_r - \mu_r < l_r < l_j < \mu_{j-1}. \quad (2.63)$$

В силу (2.63), (2.62) и (2.39), учитывая первое неравенство (2.60), будем иметь

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq \frac{1}{j} + M_n |S_{l_r}(x) - F(x)| \quad (2.64)$$

$$(r=j-1 \text{ или } r=j, \quad j-1 > j_x, \quad j > n, \quad \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}).$$

Когда $r > j > j_x + 1$, $\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$, имеем $i \leq \lambda_r$.

Кроме того из $x \in G_r$ и из неравенств (2.61), (2.32) получаем

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{lk}^{(n)}.$$

Отсюда, в силу (2.40), будем иметь

$$\sigma_{ir}^{(n)}(x) < L_r \cdot \delta_r^{(n)} < \frac{1}{2^r}; \quad (j > n, r > j > j_x + 1, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}). \quad (2.65)$$

Таким образом, так как при $i > \max(n, \lambda_{j_x+2})$ мы можем определить j , удовлетворяющее неравенству (2.60), то из (2.65) ясно, что для указанных i ряды (2.52) сходятся.

Обозначим через $T_j^{(n)}(x)$ сумму ряда (2.52). Тогда будем иметь

$$T_j^{(n)}(x) = \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) + \sigma_{i,j-1}(x) + \sigma_{ij}(x) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) \quad (2.66)$$

$$(\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}, i \geq \max(n, \lambda_{j_x+2}), j > \max(n, j_x+1).$$

Можно доказать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_j^{(n)}(x) = 0.$$

В самом деле, заметим прежде всего, что $|a_{ik}^{(n)}| \leq \gamma_{\lambda_j}^{(n)}$ при $k=1, 2, 3, \dots, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}, j > n$. Поэтому, так как $\mu_1=0$, в силу (2.32), (2.55) и (2.57) будем иметь

$$\sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{(n)}(x) \leq \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \cdot L_j \sum_{r=1}^{j-2} (\mu_{r+1} - \mu_r) = \gamma_{\lambda_j}^{(n)} L_j \mu_{j-1} \quad (2.67)$$

для всех достаточно больших значений i , именно для таких i , для которых соответствующее значение j , удовлетворяющее неравенству $\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$, больше, чем j_x+1 .

Так как при $i \rightarrow \infty$ соответствующее число j стремится к бесконечности, а число n фиксировано, то из (2.39) и (2.67) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{(n)}(x) = 0. \quad (2.68)$$

Далее, из (2.64) и (2.59) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{i,j-1}^{(n)}(x) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^{(n)}(x) = 0. \quad (2.69)$$

С другой стороны, в силу неравенств (2.65) имеем

$$\sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}^{(n)}(x) < \frac{1}{2^j}$$

при $j > n, j > j_x + 1, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$.

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}^{(n)}(x) = 0. \quad (2.70)$$

Из (2.68), (2.69) и (2.70) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i^{(n)}(x) = 0.$$

Таким образом мы доказали, что в каждой точке x множества $G \cdot E \cdot A$ ряд (2.45) суммируется к $F(x)$ каждым из методов $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$.

Теперь докажем, что на множестве $G \cdot E \cdot B$ ряд (2.45) также будет суммироваться всеми методами $T_1, T_2, \dots$ к $F(x)$, т. е. к $+\infty$.

Для этого мы должны доказать, что в любой точке $x \in G \cdot E \cdot B$ ряды (2.51) для любого фиксированного n сходятся, начиная с достаточно большого i , и их суммы стремятся к $+\infty$, когда $i \rightarrow \infty$.

Пусть $x \in G \cdot E \cdot B$, тогда найдется j_x настолько большое, что $x \in G_{j_x} \cdot E \cdot B$ для всех $j > j_x$.

С другой стороны, так как $x \in E \cdot B$, то в силу (2.22) и в силу определения множества E как множества тех точек, где выполняется (2.22), будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(x) = +\infty. \quad (2.71)$$

Рассмотрим ряд (2.51). Теперь мы будем изучать поведение следующих сумм из этого ряда

$$\sigma_{ir}^{*(n)}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x). \quad (2.72)$$

Пусть

$$j > j_x + 1, \quad j > n \quad (2.73)$$

и

$$\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}. \quad (2.74)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{*(n)}(x) = \sum_{r=1}^{j-2} \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x). \quad (2.75)$$

Так как в силу (2.73) $x \in G_{j-1}$, то из (2.53), (2.54) и (2.55), учитывая (2.31), будем иметь

$$|S_k^*(x)| < L_j, \quad k \leq \mu_{j-1}. \quad (2.76)$$

Поэтому

$$\left| \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{*(n)}(x) \right| < L_j \mu_{j-1} \gamma_l^{(n)} < L_j \mu_{j-1} \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \quad (2.77)$$

и тогда в силу (2.39)

$$\left| \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{*(n)}(x) \right| < \frac{1}{j}. \quad (2.78)$$

Из (2.74) и (2.78) вытекает

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{lr}^{*(n)}(x) = 0. \quad (2.79)$$

Далее заметим, что так как $1 < L_j$ (см. (2.30)), то в силу (2.39) имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} < \gamma_{ij}^{(n)} \cdot \mu_{j-1} < \gamma_{ij}^{(n)} \cdot \mu_{j-1} L_j < \frac{1}{j}, \quad (2.80)$$

где $j > n$ и число i удовлетворяет неравенству (2.74).

Рассмотрим теперь суммы $\sigma_{lr}^{*(n)}(x)$ для $r > j$. В силу (2.31), (2.53), (2.54) и (2.55) учитывая, что при $j > j_x$, x принадлежит множеству G_j , будем иметь

$$|\sigma_{lr}^{*(n)}(x)| \leq \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} |S_k(x)| \leq L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)},$$

Отсюда, так как $\lambda_r \geq i$, в силу (2.40) имеем

$$|\sigma_{lr}^{*(n)}(x)| \leq L_r \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} < L_r \cdot \delta_r^{(n)} < \frac{1}{2^r}, \quad (2.81)$$

где $r > j > j_x$, $j > n$, $\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$.

Из (2.81) получаем

$$\left| \sum_{k=\mu_{j+1}+1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x) \right| = \left| \sum_{l=j+1}^{\infty} \sigma_{lr}^{*(n)}(x) \right| < \frac{1}{2^j}. \quad (2.82)$$

Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j+1}+1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x) = 0. \quad (2.83)$$

Таким образом, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x)$$

сходятся для $i > \lambda_j$, где j удовлетворяет неравенствам (2.73).

Обозначим сумму этого ряда через $T_i^{*(n)}(x)$.

Мы должны доказать, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} T_i^{*(n)}(x) = +\infty, \quad (2.84)$$

для чего в силу (2.79) и (2.83) достаточно доказать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [\sigma_{i,j-1}^{(n)}(x) + \sigma_{i,j}^{(n)}(x)] = +\infty. \quad (2.85)$$

Для этого заметим, что в силу (2.81) и в силу того, что $L_r \geq 1$, будем иметь

$$\sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} < \frac{1}{2^j}; \quad (j > j_0, j > n, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}). \quad (2.86)$$

Из условия 2⁰⁰ метода суммирования T_n и из (2.80) и (2.86) вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} = 1. \quad (2.87)$$

В силу (2.72) можно написать

$$\sigma_{i,j-1}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} S_l(x) + S_{l_{j-1}}(x) \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)}, \quad (2.88)$$

$$\sigma_{i,j}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} S_l(x) + S_{l_j}(x) \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)}, \quad (2.89)$$

где в (2.88) имеем $l = l_{j-2} + k - \mu_{j-1}$; ($l_{j-2} < l \leq l_{j-1}$) и в (2.89) имеем $l = l_{j-1} + k - \mu_j$; ($l_{j-1} < l \leq l_j$) (см. (2.53), (2.54) и (2.55)).

Так как $\mu_{j-1} - \mu_{j-1} \leq l_{j-1} < l_j < \mu_{j-1}$ и $\mu_j - \mu_j \leq l_j < \mu_{j-1}$ (см. первое неравенство (2.40) и (2.42)), то в силу неравенства (2.39) можно писать:

$$\left| \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} S_l(x) \right| \leq L_{j-1} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} \leq L_{j-1} \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \mu_{j-1} < \frac{1}{j}, \quad (2.90)$$

$$\left| \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} S_l(x) \right| < L_j \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} \leq L_j \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \mu_{j-1} < \frac{1}{j}. \quad (2.91)$$

Из неравенств (2.90) и (2.91) видно, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} S_l(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} S_l(x) = 0 \quad (2.92)$$

и, с другой стороны, так как $L_j > 1$, из этих же неравенств вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j-1} a_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} = 0. \quad (2.93)$$

Сравнивая (2.87) и (2.93), получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} + \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} \right) = 1. \quad (2.94)$$

В силу положительности чисел $a_{ik}^{(n)}$ (см. 1⁰⁰) и в силу (2.71) из (2.94) вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[S_{i_{j-1}}(x) \cdot \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} + S_{i_j}(x) \cdot \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} \right] = +\infty. \quad (2.95)$$

Сравнивая (2.88), (2.89) с (2.92) и (2.95), мы видим, что имеет место равенство (2.85).

Как мы уже заметили из (2.85), в силу (2.79) и (2.83) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i^{(n)}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = +\infty$$

и это имеет место для любого $x \in G \cdot B \cdot E$.

Аналогично можно доказать, что в любой точке множества $G \cdot E \cdot C$ сходятся все ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x)$$

начиная с достаточно большого значения i , и их сумма стремится к $-\infty$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = -\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что в каждой точке x множества (2.49) имеет место соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = F(x) \quad (2.96)$$

для всех $n=1, 2, \dots$

Но из (2.28), (2.29) и (2.36) следует, что мера множества (2.49) равна $b-a$.

Итак доказано, что ряд (2.45), который получен из ряда (2.17) добавлением нулей, почти всюду на $[a, b]$ суммируется к $F(x)$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$.

Рассмотрим теперь перестановку ряда (2.1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{q_i}(x), \quad (2.97)$$

полученную следующим образом.

В ряде (2.45) вместо добавленных нулей, т. е. вместо нулей лежащих в промежутках $\mu_j' < \nu \leq \mu_{j+1}'$, $j=1, 2, \dots$, вставим функции $\{f_{m_p}(x)\}$ ряда (2.11) в возрастающем порядке индекса p .

Очевидно, полученный таким образом ряд (2.97) является суммой ряда (2.45) и ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\nu}(x), \quad (2.98)$$

где

$$\psi_{\nu}(x) = 0 \quad \text{при} \quad \mu_j' < \nu \leq \mu_{j+1}', \quad j=1, 2, \dots,$$

а для ν , удовлетворяющих неравенствам $\mu_j' < \nu \leq \mu_{j+1}'$, $j=1, 2, \dots$, функции $\psi_{\nu}(x)$ меняются, совпадая с возрастанием индекса ν со всеми функциями $f_{m_p}(x)$.

Так как ряд (2.11) сходится к почти везде конечной функции $\varphi(x)$, то ряд (2.98) также будет сходиться к той же сумме.

Обозначим через

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^k f_{q_i}(x). \quad (2.99)$$

Будем иметь

$$S_k(x) = S_k^*(x) + S_k^{\sigma}(x), \quad (2.100)$$

где

$$S_k^*(x) = \sum_{\nu=1}^k \psi_{\nu}(x); \quad S_k^{\sigma}(x) = \sum_{\nu=1}^k \psi_{\nu}'(x). \quad (2.101)$$

В силу регулярности метода T_n ($n=1, 2, \dots$) и в силу того, что ряд (2.98) почти всюду на $[a, b]$ сходится к $\varphi(x)$, будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{\infty} a_{hk}^{(n)} S_k^{\sigma}(x) = \varphi(x) \quad (2.102)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Из соотношений (2.96) и (2.102) в силу (2.100) вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x) = F(x) + \varphi(x) \quad (2.103)$$

почти всюду на $[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$.

Отсюда, в силу (2.21) будем иметь

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Таким образом, для заранее заданной измеримой функции $f(x)$ существует ряд (2.97), полученный из ряда (2.1) перестановкой членов, который суммируется к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$.

Теорема 4 доказана. Тем самым доказаны также теорема 3 и теорема III, сформулированная во введении.

Замечание. В теореме 3 дается достаточное условие, при котором ряд (2.1), который универсален в обычном смысле, будет универсальным в классе всех измеримых функций в смысле суммируемости одновременно всеми методами Чезаро положительного порядка.

Это достаточное условие (см. (2.4)) заключается в том, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{f_n(x)\}$ почти всюду сходится к нулю.

Легко видеть, что существуют универсальные ряды вида (2.1), для которых никакая подпоследовательность последовательности $\{f_n(x)\}$ не сходится к нулю почти всюду.

Более того, в универсальном ряде (2.1) последовательность $\{f_n(x)\}$ может возрастать сколь угодно быстро на всем отрезке $[a, b]$.

В самом далее, перенумеруем полиномы с рациональными коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

и возьмем произвольную последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$.

Положим $f_1(x) = \Phi_1(x)$, $f_2(x) = -\Phi_1(x) + P_1(x)$ далее, $f_3(x) = \Phi_2(x)$, $f_4(x) = -\Phi_2(x) + (P_2(x) - P_1(x))$, ..., $f_{2n-1}(x) = \Phi_n(x)$, $f_{2n}(x) = -\Phi_n(x) + (P_n - P_{n-1})$ и т. д.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (*)$$

будет универсальным, так как

$$\sum_{k=1}^{2n} f_k(x) = P_n(x), \quad n=1, 2, \dots$$

Так как функции $\Phi_n(x)$ могут возрастать сколь угодно быстро на отрезке $[a, b]$, то $|f_n(x)|$ тоже могут сколь угодно быстро возрастать на $[a, b]$.

Ясно, что при достаточно быстром возрастании $|f_n(x)|$ никакая перестановка ряда (*) не будет суммироваться методами Чезаро к конечной сумме, для любого $x \in [a, b]$.

Таким образом теорема 3 для произвольных универсальных рядов не верна.

Институт Математики и механики
АН Армянской ССР,

Поступила 12 I 1960

Ереванский Госуниверситет.

Ա. Ա. Թալալյան

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՍԱՐՅԱ ԱՍԵՆՈՒՐԵՔ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցված են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1. Գոյություն ունի $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների $\{\varphi_n(x)\}$ լրիվ օրթոգոնալ սխեմ՝ այնպիսին, որ մի որևէ $f(x) \in L_2[a, b]$ ֆունկցիայի վերլուծությունը ըստ այդ սխեմի տարամիտում է համարյա ամենուրեք, բայց ցանկացած $F(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

շարք, որը զուգամիտում է $F(x)$ -ին համարյա ամենուրեք:

Թեորեմ 2. Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}$ -ը նորմավորված բազիս է $L_p[a, b]$ տարածության մեջ:

Գոյություն ունի այնպիսի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (2)$$

շարք, որտեղ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, որ ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար (2)

շարքի անդամների տեղափոխությունից ստացված մի ինչ-որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

շարք համարյա ամենուրեք դուրսգալիս է դեպի $f(x)$ ֆունկցիան Չեզարոյի բոլոր դրական կարգի մեթոդներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Меньшов Д. Е. Sur la representation des fonctions mesurables Par des series trigonometriques. Matem. сб. 9 (51), 1941, 667—692.
2. Меньшов Д. Е. Sur les series de fonctions orthogonales Fund. Math. 4, 1923, 82—105.
3. Талалян А. А. Суммирование рядов по базисам пространства L_p методами Чезаро. ДАН СССР, том 124, № 5, 1959.
4. Меньшов Д. Е. Sur la sommation des series de fonctions orthogonales par des methodes de Cesaro. Matem. сб., 8 (50), 1940, 121—136.
5. Талалян А. А. О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Известия АН Армянской ССР (серия физ. мат. наук), том X, № 3, 1957.
6. Меньшов Д. Е. Sur la convergence et la sommation des series de fonctions orthogonales. Bull. Soc. Math. France, 64, 1936, 147—170.
7. Талалян А. А. О рядах по базисам пространства L_p , универсальных относительно перестановок. ДАН Арм. ССР, том XXVIII, № 4, 1959.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

Изгиб прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием

Задача об изгибе упругого составного стержня была исследована в работах [1, 2, 3, 4]. В работе [2] получено также контурное условие задачи об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием в ее приближенной постановке.

В настоящей статье рассмотрен изгиб поперечной силой прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работе [6]. Рассмотрены частные случаи, когда тонкие усиливающие покрытия имеются только на гранях, параллельных или перпендикулярных изгибающей силе. Определены касательные напряжения в характерных точках сечения.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием показаны на (фиг. 1).

Предположим, что коэффициенты Пуассона для основного материала и усиливающего покрытия одинаковы. Тогда при изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0. \quad (1.1)$$

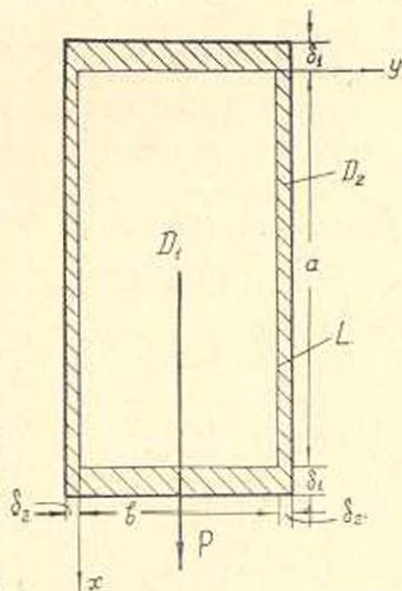
Для осевой деформации ε_z принимаем следующее выражение

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2} (A_0 x + B_0)(l - z). \quad (1.2)$$

Для нормального напряжения будем иметь

$$\sigma_z^{(i)} = (A_i x + B_i)(l - z) \quad (i=1, 2), \quad (1.3)$$

где l —длина стержня, E_2 —модуль упругости материала покрытия, а A_i и B_i ($i=0, 1, 2$)—постоянные коэффициенты, подлежащие определению.



Фиг. 1.

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z=l$ и произвольным сечением $z=const$, будем иметь

$$\iint_{D_0} \sigma_z dx dy = 0, \quad \iint_{D_0} x \sigma_z dx dy = -M, \quad (1.4)$$

где $D_0 = D_1 + D_2$ — область поперечного сечения изгибаемого стержня, M — изгибающий момент в данном сечении $z=const$ стержня, равный

$$M = P \cdot (l - z). \quad (1.5)$$

Из закона Гука и условий (1.2), (1.3) получим:

$$A_1 = \frac{E_1}{E_2} A_0, \quad B_1 = \frac{E_1}{E_2} B_0 \quad \text{и} \quad A_2 = A_0, \quad B_2 = B_0. \quad (1.6)$$

Используя (1.3), (1.5) и (1.6), из (1.4) для постоянных A_0 и B_0 получаем систему линейных уравнений, решение которой будет

$$A_0 = -\frac{P}{ba^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{12} \cdot \frac{E_1}{E_2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta_2}{b} + \frac{\delta_1}{a} \left(1 + 2 \frac{\delta_2}{b}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_1}{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta_1^2}{a^2}\right)}, \quad (1.7)$$

$$B_0 = -\frac{a}{2} A_0.$$

При помощи (1.2), (1.3) и (1.7) определяются деформация ε_z и напряжение σ_z .

Перейдем теперь к определению касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Как известно [1, 2], при решении задач об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, функция напряжений $F(x, y)$ в области поперечного сечения, соответствующей основному материалу, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1+\nu} A_1 \cdot \left(y - \frac{b}{2}\right) \quad (1.8)$$

и контурному условию

$$F + \mu_i \frac{\partial F}{\partial n} = - \int \left(A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x \right) dy \quad \text{на } L. \quad (1.9)$$

Здесь $\mu_i = \frac{G_2}{G_1} \delta_i$ ($i=1, 2$), где δ_i — толщины соответствующих покрытий,

G_1 и G_2 — модули сдвига основного материала и материала покрытия, A_1 и B_1 — известные постоянные (1.6), (1.7).

Касательные напряжения в области D_1 определяются формулами

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x - A_2 \frac{\delta_1^2}{2} + B_2 \delta_1, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.10)$$

В области D_2 , соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение постоянно по направлению нормали n , направлено параллельно касательной L и определяется формулой

$$\tau_{xz} = -\frac{F}{\delta} + A_2 \frac{x^2 - \delta^2}{2} + B_2(x + \delta_1). \quad (1.11)$$

Для рассматриваемой здесь прямоугольной области определим функцию F , удовлетворяющую уравнению Пуассона (1.8) и контурным условиям

$$F(x, 0) - \mu_2 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F(x, b) + \mu_2 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, \quad (1.12)$$

$$F(0, y) - \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F(a, y) + \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0. \quad (1.13)$$

Функцию $F(x, y)$ ищем в виде

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \frac{\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y}{N_k}, \quad (1.14)$$

где $N_k = \sqrt{\mu_2 + \frac{b}{2} (1 + \mu_2^2 \alpha_k^2)}$, α_k ($k=1, 2, \dots$) являются корнями трансцендентного уравнения.

Используя контурные условия (1.12), получим уравнение относительно α_k

$$1 - \mu_2^2 \alpha_k^2 + 2 \mu_2 \alpha_k \operatorname{ctg} b \alpha_k = 0. \quad (1.15)$$

Используя уравнения (1.8), (1.14) и (1.15), а также численные значения корней трансцендентного уравнения (1.15), получим:

$$f_k'' - \alpha_k^2 f_k = -r_k \quad (k=2, 4, 6, \dots), \quad (1.16)$$

где

$$r_k = -\frac{2\nu}{1+\nu} \cdot \frac{A_1}{\alpha_k N_k} \left(\mu_2 + \frac{b}{2} \right).$$

Интегрируя (1.16) и подставляя f_k в (1.14), находим

$$F(x, y) = \sum_{k=2, 4}^{\infty} \left[A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \alpha_k x + \frac{r_k}{\alpha_k^2} \right] \cdot \frac{\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y}{N_k}. \quad (1.17)$$

Внося (1.17) в (1.13) и приравнявая нулю коэффициенты при тригонометрических функциях, получаем систему линейных уравне-

ний относительно постоянных интегрирования A_k, B_k ($k=2, 4, 6, \dots$).
Решение этой системы будет

$$A_k = \frac{r_k}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\mu_1 \alpha_k + \operatorname{ctha} \alpha_k - \operatorname{cscha} \alpha_k}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2},$$

$$B_k = -\frac{r_k}{\alpha_k^2} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k (\operatorname{ctha} \alpha_k + \operatorname{cscha} \alpha_k)}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2}. \quad (1.18)$$

Подставляя выражения A_k и B_k согласно (1.18) в (1.17), после необходимых преобразований получим

$$F(x, y) = \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k^2 N_k} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \right] (\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y), \quad (1.19)$$

где $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

2. Используя найденные значения функции напряжений $F(x, y)$ по формулам (1.10), (1.11) найдем значения напряжений

$$\tau_{xz}(x, y) = \frac{1}{2} [x(x-a) - \mu_1(a+\delta_1)] A_1 + \\ + \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k N_k} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \right] \times \\ \times (\cos \alpha_k y - \mu_2 \alpha_k \sin \alpha_k y), \quad (1.20)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k N_k} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \times \\ \times (\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y), \quad (1.21)$$

$$\tau_{xz}^*(x, y) = \frac{x+\delta_1}{2} [x - (a+\delta_1)] A_0 - \frac{1}{\delta} \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k^2 N_k} \left[1 - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \right] \times \\ \times (\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y), \quad (1.22)$$

где A_1 и A_0 известные постоянные (1.6) и (1.7), а τ_{xz}^* обозначает напряжение в усиливающем покрытии.

Рассмотрим частные случаи. В случае отсутствия усиливающего покрытия, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\alpha_k = \frac{k\pi}{b}$ ($k=2, 4, 6, \dots$), значения касательных напряжений в точках $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a}{2}, b\right)$, полученные из уравнений (2.1) и (2.2), совпадают с уже известными ([5], стр. 325).

В случае, когда покрытия имеют только две противоположные грани параллельные изгибающей силе (т. е. $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0,1 \cdot b$), α_k ($k=2, 4, 6, \dots$) являются корнями уравнения (1.15).

Решая уравнение (1.15) методом касательных, для корней с точностью до 10^{-3} будем иметь: $b\alpha_1=1,312$; $b\alpha_2=3,670$; $b\alpha_3=6,579$; $b\alpha_4=9,627$; $b\alpha_5=12,72$; $b\alpha_k=(k-1)\pi$ ($k=6, 7, \dots$). Для механических характеристик возьмем $G_1=8 \cdot 10^4$ кг/см², $G_2=8 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu=0,25$.

В таблице 1 приведены вычисленные по формулам (2.1)–(2.3) значения напряжения τ_{xz} в двух характерных точках при четырех отношениях размеров поперечного сечения.

Таблица 1

$\frac{a}{b}$	4	2	1	0,5
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	0,330	0,321	0,298	0,274
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, b\right)$	0,334	0,337	0,344	0,353
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^*\left(\frac{a}{2}, b\right)$	3,343	3,370	3,440	3,530

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, b\right), \\ \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, b\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из таблицы 1 можно заметить, что при больших значениях отношения $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b} \geq 4$) напряжения τ_{xz} в точках $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ практически совпадают.

Из таблицы 1 видно также, что напряжения в характерных точках в вертикальном усиливающем покрытии в 10 раз больше, чем напряжения в соответствующих точках контакта основного материала.

Сопоставляя полученные результаты с известными ([5], стр. 325), замечаем, что благодаря вертикальному усиливающему покрытию напряжение в приведенных характерных точках уменьшается более чем в три раза, при одной и той же изгибающей силе P .

В случае, когда покрытие имеется на гранях, перпендикулярных к изгибающей силе (т. е. $\mu_1=b$, $\mu_2=0$ или $\delta_1=0,1 \cdot b$, $\delta_2=0$),

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{b} \quad (k=2, 4, \dots).$$

В таблице 2 приведены значения напряжения τ_{xz} , вычисленные по формулам (2.1)–(2.3) в некоторых характерных точках поперечного сечения.

Таблица 2

$\frac{a}{b}$	4	2	1	0,5
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	0,7844	0,7154	0,6442	0,5614
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right)$	0,7893	0,7270	0,6682	0,6027
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} (a, b)$	0,4008	0,4942	0,5459	0,5464
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,3965	0,4839	0,5246	0,5085
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,3979	0,4872	0,5314	0,5206

Из этих же формул (2.1)–(2.3) следует, что

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) &= \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right), \\
 \tau_{xz} (0, b) &= \tau_{xz} (a, b), \\
 \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2} \right) &= \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right), \\
 \tau_{xz}^* \left(0, \frac{b}{2} \right) &= \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right), \\
 \tau_{yz} \left(0, \frac{b}{2} \right) &= \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \tau_{yz} \left(a, \frac{b}{2} \right) = 0, \\
 \tau_{yz} (0, b) &= \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, b \right) = \tau_{yz} (a, b) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из таблицы 2 следует, что напряжение τ_{xz}^* в горизонтальном усиливающем покрытии, как и следовало ожидать, совпадает с напря-

жением τ_{xz} в соответствующих точках контакта основного материала.

Сопоставляя первые две строчки таблицы 2 с таблицей 10 ([5], стр. 325), замечаем, что, благодаря горизонтальному усиливающему покрытию, напряжение в приведенных характерных точках уменьшается примерно в 1,5 раза.

Когда вся боковая поверхность изгибаемого стержня имеет усиливающее покрытие (т. е. $\mu_1 = \mu_2 = b$ или $\delta_1 = \delta_2 = 0,1 \cdot b$), $\alpha_k (k=2, 4, 6, \dots)$ являются корнями уравнения (1.15).

В таблице 3 приведены значения напряжения τ_{xz} , вычисленные по приведенным общим формулам (2.1)–(2.3) в точках $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ и $\left(a, \frac{b}{2}\right)$.

Таблица 3

$\frac{a}{b}$	4	2	1	0,5
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	0,4120	0,4391	0,4478	0,4221
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right)$	0,4146	0,4462	0,4637	0,4491
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^* \left(\frac{a}{2}, b \right)$	2,259	1,751	1,262	0,8800
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,2080	0,2968	0,3647	0,3825
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,2095	0,3012	0,3748	0,4011

$$\tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right),$$

$$\tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2} \right) = \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right),$$

$$\tau_{xz}^* \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \tau_{xz}^* \left(\frac{a}{2}, b \right),$$

$$\tau_{xz}^* \left(0, \frac{b}{2} \right) = \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right),$$

(2.6)

$$\tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, b \right) = 0,$$

$$\tau_{yz} \left(0, \frac{b}{2} \right) = -\tau_{yz} \left(a, \frac{b}{2} \right) \neq 0.$$

Сопоставляя первые две строчки таблицы 3 с вышеупомянутой таблицей 10 работы [5], замечаем, что благодаря усиливающему по-

крытию напряжение в приведенных характеристических точках уменьшается более чем в два раза, при одной и той же изгибающей силе P .

Сравнивая в таблице 3 четвертую строку с пятой, замечаем, что напряжение τ_{xz} в горизонтальном усиливающем слое почти совпадает с напряжением в соответствующих точках контакта основного материала. Сравнивая вторую строку с третьей, замечаем, что с увеличением отношения $\frac{a}{b}$ напряжение τ_{xz} в вертикальном усиливающем слое возрастает по сравнению с напряжением в соответствующих точках контакта основного материала. Однако, сравнивая формулы (2.1) и (2.3), замечаем, что при увеличении отношения $\frac{a}{b}$ величина $\frac{\tau_{xz}^*}{\tau_{xz}}$ не может превзойти отношения модулей сдвига $\frac{G_2}{G_1}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 IX 1959

Պ. Ն. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՁՈՂԻ ԾՈՒՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է ուժեղացնող ծածկույթ տեղյոց ուղղանկյուն հատվածքով ձողի ծոման խնդիրը, երբ ձողի մի ծայրը ամրակցված է, իսկ մյուս՝ ազատ ծայրում ազդում է P լայնական ուժը, որը կիրառված է կտրվածքի ծանրության կենտրոնում և ուղղված է X առանցքին զուգահեռ ուղղությամբ:

Այս խնդրի լուծման մոտավոր եղանակը առաջարկված է [1—3] աշխատություններում:

Օգտագործելով ձողի հատվածքի լայնական չափերի նկատմամբ ուժեղացնող ծածկույթի հաստության փոքրության պայմանը, դիտարկվող խնդրում ծածկույթի առկայությունը որոշակի մոտավորությամբ արտահայտվում է լարումների ֆունկցիայի (1.9) եզրային պայմանով: Այսպիսով, ուժեղացնող բարակ ծածկույթով ձողի ծոման խնդիրը մոտավոր դրվածքով բերվում է լարումների ֆունկցիայի որոնմանը, որը հիմնական նյութի տիրույթում պետք է բավարարի համապատասխան աջ մասով (1.8) Պուասոնի հավասարմանը և եզրում՝ (1.9) խորը եզրային պայմանին:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [6] աշխատությունում ուսումնասիրված օրթոնորմալ ֆունկցիաների սխեմով: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր, երբ եզրերում ուժեղացնող բարակ ծածկույթները միայն զուգահեռ են կամ միայն ուղղահայաց են ձող ուժին:

Առաջված են բանաձևեր հատվածքի կետերում շոշափող լարումների հաշվման համար: Մասնավոր դեպքում, երբ բացակայում է ծածկույթը, ստա-

նում ենք [5] աշխատությունում բերված Սեն-Վենանի լուծումները: Քննարկված մասնավոր դեպքերում ստացված են թվային արդյունքներ, որոնք բերված են աղյուսակներում և համեմատվում են [5] աշխատությունում ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К. С. Общая задача изгиба стержня, составленного из различных материалов. Известия АН Арм. ССР, т. XI, № 5, 1958.
2. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Известия АН Арм. ССР, т. X, № 5, 1957.
3. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН Арм. ССР, т. XXIII, № 3, 1956.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
6. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехиздат, 1950.

С. М. Дургарьян

Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных* и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры

В многочисленных работах, посвященных решению температурных задач пластинок, в основном рассмотрены пластинки, изготовленные из изотропных материалов, без учета изменений упругих постоянных материала пластинки в зависимости от температуры.

В последние годы появились работы, в которых учитываются изменения упругих постоянных материала неоднородных пластинок и оболочек, а также посвященные решению температурной задачи слоистых (в частности биметаллических) пластин и оболочек [2], [4], [5], [6], [7], [8].

Температурная задача слоистых анизотропных оболочек, без учета изменения упругих свойств материала оболочки от температуры, впервые решена С. А. Амбарцумяном [2].

Однако, нам неизвестны работы, посвященные решению температурной задачи анизотропной (ортотропной) слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры нагрева.

Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

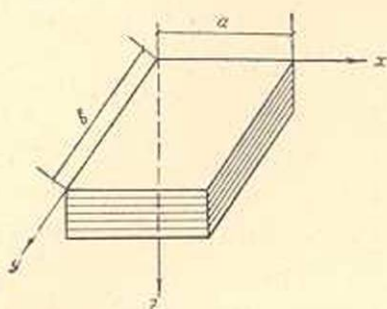
§ 1. Вывод основных уравнений

Рассмотрим температурную задачу многослойной пластинки, собранной из произвольного числа однородных ортотропных слоев.

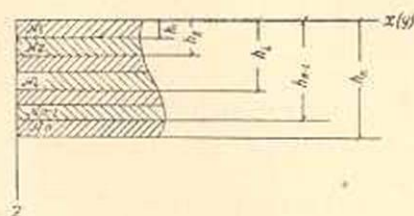
Пластинка отнесена к триортогональной системе прямолинейных координат так, чтобы срединные плоскости слоев, являющиеся одной из плоскостей упругой симметрии материала пластинки, были параллельны координатной плоскости xoy .

* В настоящей работе упругие характеристики материала пластинки считаются непостоянными (зависящими от температуры). Однако, придерживаясь общепринятой терминологии, они названы упругими постоянными.

Принимая гипотезу Франца Неймана, а также считая, что коэффициенты деформаций и температурного расширения зависят от температуры, запишем обобщенный закон Гука для i -ого слоя [2]:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$\left. \begin{aligned} e_x^i &= a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_y^i + a_{13}^i \sigma_z^i + \beta_x^i T, \\ e_y^i &= a_{21}^i \sigma_x^i + a_{22}^i \sigma_y^i + a_{23}^i \sigma_z^i + \beta_y^i T, \\ e_z^i &= a_{31}^i \sigma_x^i + a_{32}^i \sigma_y^i + a_{33}^i \sigma_z^i + \beta_z^i T, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$e_{xy}^i = a_{46}^i \tau_{xy}^i, \quad e_{yz}^i = a_{44}^i \tau_{yz}^i, \quad e_{xz}^i = a_{55}^i \tau_{xz}^i, \quad (1.2)$$

где $\beta_x^i, \beta_y^i, \beta_z^i$ — коэффициенты температурного расширения соответственно вдоль координатных осей x, y и z ; T — температура в данной точке пластинки.

В основу дальнейших выкладок кладутся следующие предположения [3]:

а) нормальными напряжениями σ_z на площадках, параллельных координатной плоскости xoy , можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями ($\sigma_z = 0$);

б) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки остается прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности ($e_{yz} = e_{xz} = 0$) и сохраняет свою первоначальную длину ($e_z = 0$).

На основании принятых предположений

$$\sigma_z = e_z = e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (1.3)$$

Внеся (1.3) в первые два уравнения (1.1), получим

$$\left. \begin{aligned} e_x^i &= a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_y^i + \beta_x^i T, \\ e_y^i &= a_{21}^i \sigma_x^i + a_{22}^i \sigma_y^i + \beta_y^i T. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Из известных соотношений

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, & e_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, & e_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

с учетом (1.3) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, & u_z &= u_z(x, y) = w, \\ e_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, & u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, & u_y &= v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где u , v , w — перемещения точек координатной плоскости $z=0$ вдоль координатных осей x , y , z .

Из (1.4) найдём:

$$\tau_x^i = \frac{a_{22}^i e_x^i - a_{12}^i e_y^i - T(\beta_x^i a_{22}^i - \beta_y^i a_{12}^i)}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2}, \quad (1.7)$$

$$\tau_y^i = \frac{a_{11}^i e_y^i - a_{12}^i e_x^i - T(\beta_y^i a_{11}^i - \beta_x^i a_{12}^i)}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2}, \quad (1.8)$$

а из (1.2) имеем

$$\tau_{xy}^i = \frac{1}{a_{66}^i} e_{xy}^i.$$

Внося в выражения τ_x^i , τ_y^i и τ_{xy}^i значения e_x^i , e_y^i и e_{xy}^i из (1.5) с учетом (1.6) получим:

$$\sigma_x^i = B_{11}^i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^i \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Q_1^i T, \quad (1.9)$$

$$\sigma_y^i = B_{22}^i \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{12}^i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Q_2^i T, \quad (1.10)$$

$$\tau_{xy}^i = B_{66}^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (1.11)$$

$$\text{где } B_{11}^i = \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = \frac{E_x^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i}, \quad B_{22}^i = \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = \frac{E_y^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i},$$

$$B_{12}^i = -\frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = \frac{E_x^i \mu_{yx}^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i} = \frac{E_y^i \mu_{xy}^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i}, \quad B_{66}^i = \frac{1}{a_{66}^i} = G_{xy}^i,$$

$$Q_1^i = \frac{a_{12}^i \beta_y^i - a_{22}^i \beta_x^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = -B_{12}^i \beta_y^i - B_{11}^i \beta_x^i = -\frac{E_x^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i} (\beta_x^i + \mu_{yx}^i \beta_y^i),$$

$$Q_2^i = \frac{a_{12}^i \beta_x^i - a_{11}^i \beta_y^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = -B_{12}^i \beta_x^i - B_{22}^i \beta_y^i = -\frac{E_y^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i} (\mu_{xy}^i \beta_x^i + \beta_y^i).$$

Для определения моментов, тангенциальных и перерезывающих усилий имеем:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_x^i z dz, & M_y &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_y^i z dz, & H &= H_{xy} = H_{yx} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \tau_{xy}^i z dz, \\
 T_x &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_x^i dz, & T_y &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_y^i dz, & S &= S_{xy} = S_{yx} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \tau_{xy}^i dz.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Внеся в (1.12) значения σ_x^i , σ_y^i и τ_{xy}^i из (1.9) – (1.11), получим:

$$M_x = K_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_{1T}, \quad (1.13)$$

$$M_y = K_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_{2T}, \quad (1.14)$$

$$H = K_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.15)$$

$$T_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - K_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{1T}, \quad (1.16)$$

$$T_y = C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - K_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{2T}, \quad (1.17)$$

$$S = C_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2K_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.18)$$

где аналогично с обозначениями, принятыми в [9],

$$C_p = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} B_p^i dz, \quad K_p = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} B_p^i z dz, \quad D_p = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} B_p^i z^2 dz, \quad (1.19)$$

$$\text{а } C_{pT} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} Q_p^i T dz, \quad K_{pT} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} Q_p^i T z dz. \quad (1.20)$$

При отсутствии внешней нагрузки условия равновесия элемента пластинки, как известно, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= N_x, \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= N_y, \\
 \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из третьего и четвертого уравнений равновесия (1.21), учитывая (1.13)–(1.15), найдем значения N_x и N_y .

Внося полученные значения N_x и N_y в пятое уравнение равновесия (1.21), а значения T_x , T_y и S по (1.16)–(1.18)—в первые два уравнения равновесия (1.21), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_{11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(K_{66} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(K_{12} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u + \\ & + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(K_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(K_{22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] v - \\ & - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] w = - \frac{\partial^2 K_{1T}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K_{2T}}{\partial y^2}, \end{aligned} \right. \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] u + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v - \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \right] w = - \frac{\partial C_{1T}}{\partial x}, \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{12} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] v - \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \right] w = - \frac{\partial C_{2T}}{\partial y}. \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

§ 2. Некоторые частные случаи

1. Рассмотрим случай, когда коэффициенты температурного расширения и Пуассона не зависят от температуры, модуль Юнга и сдвига являются линейными функциями температуры, температура вдоль оси x изменяется по линейному закону, а по толщине пакета—по произвольному закону.

Принимаем:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{xy}^i &= \mu_1^i = \text{const}, & \mu_{yx}^i &= \mu_2^i = \text{const}, & \beta_x^i &= \beta_y^i = \beta^i = \text{const}, \\ E_x^i &= E_1^i(1 - k_1 T), & E_y^i &= E_2^i(1 - k_2 T), & G_{xy}^i &= G^i(1 - k_3 T), & T &= x\varphi(z) + b. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Введем обозначения:

$$\Phi_1^i = \frac{E_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad \Phi_2^i = \frac{E_2^i \mu_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i} = \frac{E_2^i \mu_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad \Phi_3^i = \frac{E_2^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad (2.2)$$

$$A_1^i = (1 - k_i b) \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{2}, \quad A_2^i = (1 - k_i b) \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{3},$$

$$A_3^i = (1 - k_i b)(h_i - h_{i-1}), \quad (2.3)$$

$$C_1^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi(z) z dz, \quad C_2^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi(z) z^2 dz, \quad C_3^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\varphi(z)]^2 z dz,$$

$$C_4^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi(z) dz, \quad C_5^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\varphi(z)]^2 dz, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i A_\nu^i \quad (j=1,2,3; \nu=1,2,3), \quad \Delta_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i C_\nu^i \quad (j=1,2,3; \nu=1,2,4),$$

$$R_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i C_\nu^i \varphi^i \quad (j=1,2,3; \nu=3,5), \quad P_{j\nu} = b \sum_{i=1}^n \Phi_j^i A_\nu^i \varphi^i \quad (j=1,2,3; \nu=1,3),$$

$$\Omega_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i C_\nu^i \varphi^i \frac{1-2k_i b}{k_i} \quad (j=1,2,3; \nu=1,4),$$

$$L_j = \sum_{i=1}^n G^i A_j^i \quad (j=1,2,3), \quad F_j = \sum_{i=1}^n G^i C_j^i \quad (j=1,2,4). \quad (2.5)$$

Заметим, что коэффициенты Φ_j^i , A_j^i , C_j^i , а следовательно, и $\Gamma_{j\nu}$, $\Delta_{j\nu}$, $R_{j\nu}$, $P_{j\nu}$, $\Omega_{j\nu}$, L_j , F_j не зависят от координат x , y , z .

Внося (2.1) в (1.19), (1.20) и пользуясь обозначениями (2.2)–(2.5), для $C_{j\nu}$, $K_{j\nu}$, $D_{j\nu}$, C_{jT} , K_{jT} получим:

$$C_{11} = \Gamma_{11} - x\Delta_{11}, \quad C_{12} = \Gamma_{21} - x\Delta_{21}, \quad C_{22} = \Gamma_{33} - x\Delta_{34}, \quad C_{66} = L_3 - xF_4,$$

$$K_{11} = \Gamma_{11} - x\Delta_{11}, \quad K_{12} = \Gamma_{21} - x\Delta_{21}, \quad K_{22} = \Gamma_{31} - x\Delta_{31}, \quad K_{66} = L_1 - xF_1,$$

$$D_{11} = \Gamma_{12} - x\Delta_{12}, \quad D_{12} = \Gamma_{22} - x\Delta_{22}, \quad D_{22} = \Gamma_{32} - x\Delta_{32}, \quad D_{66} = L_2 - xF_2,$$

$$C_{1T} = -[P_{13} + P_{23} + x(\Omega_{14} + \Omega_{24}) - x^2(R_{15} + R_{25})],$$

$$C_{2T} = -[P_{23} + P_{33} + x(\Omega_{24} + \Omega_{34}) - x^2(R_{25} + R_{35})],$$

$$K_{1T} = -[P_{11} + P_{21} + x(\Omega_{11} + \Omega_{21}) - x^2(R_{13} + R_{23})],$$

$$K_{2T} = -[P_{21} + P_{31} + x(\Omega_{21} + \Omega_{31}) - x^2(R_{23} + R_{33})]. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (1.22)–(1.24), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно перемещений u , v и w :

$$\left\{ (\Gamma_{11} - x\Delta_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\Delta_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1)] \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \right.$$

$$- 2F_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\} u + \left\{ [\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1)] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 2(\Delta_{21} + F_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$+ (\Gamma_{31} - x\Delta_{31}) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \Big\} v + \left\{ -(\Gamma_{12} - x\Delta_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\Delta_{12} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 2[\Gamma_{22} + 2L_2 - \right.$$

$$- x(\Delta_{22} + 2F_2)] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(\Delta_{22} + 2F_2) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - (\Gamma_{32} - x\Delta_{32}) \frac{\partial^4}{\partial y^4} \Big\} w = 0, \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[(\Gamma_{13} - x\Delta_{14}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta_{14} \frac{\partial}{\partial x} + (L_3 - xF_4) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u + \\ & + \left\{ [\Gamma_{23} + L_3 - x(\Delta_{24} + F_4)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \Delta_{24} \frac{\partial}{\partial y} \right\} v + \left\{ -(\Gamma_{11} - x\Delta_{11}) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \right. \\ & + \Delta_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left[\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1) \right] \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \Delta_{21} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\} w = \\ & = \Omega_{14} + \Omega_{24} - 2x(R_{15} + R_{25}), \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ [\Gamma_{23} + L_3 - x(\Delta_{24} + F_4)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial}{\partial y} \right\} u + \\ & + \left[(L_3 - xF_4) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - F_4 \frac{\partial}{\partial x} + (\Gamma_{22} - x\Delta_{24}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] v + \\ & + \left\{ -[\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1)] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 2F_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - (\Gamma_{31} - x\Delta_{31}) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right\} w = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Итак, решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (2.7)–(2.9).

Полученные значения u , v и w (содержащие восемь постоянных интегрирования) внесем в (1.9)–(1.11) и (1.13)–(1.18), после чего из условий закрепления пластинки по контуру определяются значения постоянных интегрирования, а следовательно, и окончательные значения перемещений u , v , w , напряжений σ_x^i , σ_y^i , τ_{xy}^i , моментов M_x , M_y , H и усилий T_x , T_y и S .

2. Рассмотрим случай, когда коэффициенты температурного расширения и Пуассона не зависят от температуры, модули Юнга и сдвига являются линейными функциями температуры, а температура изменяется только по толщине пакета по произвольному закону.

Принимаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_{xy}^i = \mu_x^i = \text{const}, \quad \mu_{yx}^i = \mu_y^i = \text{const}, \quad \beta_x^i = \beta_y^i = \beta^i = \text{const}, \\ E_x^i = E^i(1 - k_i T), \quad E_y^i = E^i(1 - k_i T), \quad G_{xy}^i = G^i(1 - k_i T), \quad T = T(z). \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

Введем обозначения:

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_0^i &= \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) z dz, \quad \Omega_1^i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) z^2 dz, \quad \Omega_2^i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) dz, \\ \Omega_3^i &= \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) T z dz, \quad \Omega_4^i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) T dz. \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

Внеся (2.10) в (1.19), (1.20) и пользуясь обозначениями (2.2) и (2.11), для коэффициентов C_{jv} , K_{jv} , D_{jv} , C_{jT} , K_{jT} получим:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad C_{12} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad C_{22} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \\
 K_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad K_{12} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad K_{22} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \\
 D_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad D_{12} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad D_{22} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \\
 C_{66} &= \sum_{i=1}^n G_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad K_{66} = \sum_{i=1}^n C_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad D_{66} = \sum_{i=1}^n G_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \\
 C_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^i + \Phi_i^i) \beta_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad C_{27} = - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^i + \Phi_i^i) \beta_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \\
 K_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^i + \Phi_i^i) \beta_i^i \Omega_i^i = \text{const}, \quad K_{27} = - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^i + \Phi_i^i) \beta_i^i \Omega_i^i = \text{const}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для рассматриваемого случая основные уравнения (1.22)–(1.24) примут вид:

$$\begin{aligned}
 & \left[K_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (K_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y^2} \right] u + \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] v - \\
 & - \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w = 0,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\
 & - \left[K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] w = 0,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(C_{12} + C_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v - \\
 & - \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] w = 0.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Нетрудно заметить, что уравнения (2.13)–(2.15) совпадают с уравнениями, полученными С. А. Амбарцумяном в работе [9], при $X=V=Z=0$.

Как обычно, введя потенциальную функцию и приняв

$$\begin{aligned}
 u &= -K_{11} C_{66} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^5} + [C_{12}(K_{12} + 2K_{66}) - C_{22} K_{11}] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^3 \partial y^2} + \\
 & + [-C_{22}(K_{12} + 2K_{66}) + K_{22}(C_{12} + C_{66})] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x \partial y^4},
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$v = [-C_{11}(K_{12} + 2K_{66}) + K_{11}(C_{12} + C_{66})] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^4 \partial y} + \\ + [C_{12}(K_{12} + 2K_{66}) - C_{11}K_{22}] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^2 \partial y^3} - K_{22} C_{66} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial y^5}, \quad (2.17)$$

$$\Psi = -C_{11}C_{66} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + (C_{12}^2 + 2C_{12}C_{66} - C_{11}C_{22}) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} - C_{22}C_{66} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4}, \quad (2.18)$$

тождественно удовлетворим уравнениям (2.14) и (2.15), а внеся значения u , v , w по (2.16)–(2.18) в (2.13), получим разрешающее уравнение для нахождения функции Ψ [9]

$$B_1 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^8} + B_2 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^6 \partial y^2} + B_3 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^4 \partial y^4} + B_4 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^2 \partial y^6} + B_5 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial y^8} = 0, \quad (2.19)$$

где

$$B_1 = (C_{11}D_{11} - K_{11}^2)C_{66}, \quad (2.20)$$

$$B_2 = 2C_{12}K_{11}(K_{12} + 2K_{66}) - C_{11}(K_{12} + 2K_{66})^2 - D_{11}(C_{12}^2 + 2C_{12}C_{66} - C_{11}C_{22}) - C_{22}K_{11}^2 + 2C_{11}C_{66}(D_{12} + 2D_{66}), \quad (2.21)$$

$$B_3 = -2(K_{12} + 2K_{66})(C_{22}K_{11} + C_{11}K_{22}) + 2C_{12}(K_{12} + 2K_{66})^2 - 2(D_{12} + 2D_{66})(C_{12}^2 + 2C_{12}C_{66} - C_{11}C_{22}) + 2K_{11}K_{22}(C_{12} + C_{66}) + C_{66}(C_{11}D_{22} + C_{22}D_{11}), \quad (2.22)$$

$$B_4 = 2C_{12}K_{22}(K_{12} + 2K_{66}) - C_{22}(K_{12} + 2K_{66})^2 - D_{22}(C_{12}^2 + 2C_{12}C_{66} - C_{11}C_{22}) - C_{11}K_{22}^2 + 2C_{22}C_{66}(D_{12} + 2D_{66}), \quad (2.23)$$

$$B_5 = (C_{22}D_{22} - K_{22}^2)C_{66}. \quad (2.24)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию разрешающего уравнения (2.19).

Внеся общее решение однородного дифференциального уравнения (2.19) в (2.16)–(2.18), а полученные значения u , v и w в (1.9)–(1.11) и (1.13)–(1.18), выразим перемещения, напряжения, моменты и усилия через найденную потенциальную функцию Ψ , содержащую восемь постоянных интегрирования.

Далее, из условий закрепления пластинки по контуру, можно определить значения постоянных интегрирования, а следовательно и окончательные значения перемещений u , v , w , напряжений σ_x^i , σ_y^i , τ_{xy}^i , моментов M_x , M_y , H и усилий T_x , T_y , S .

3. Рассмотрим случай, когда коэффициенты температурного расширения и Пуассона не зависят от температуры, модули Юнга и сдвига являются показательными функциями температуры, а температура по толщине пакета изменяется по произвольному знаку.

Принимаем:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{xy}^i &= \mu_1^i = \text{const}, & \mu_{yx}^i &= \mu_2^i = \text{const}, & \beta_x^i &= \beta_y^i = \beta^i = \text{const}, \\ E_x^i &= E_1^i(1 + \alpha_i - \alpha_i e^{k_i T}), & E_y^i &= E_2^i(1 + \alpha_i - \alpha_i e^{k_i T}), & G_{xy}^i &= G^i(1 + \alpha_i - \alpha_i e^{k_i T}), \\ T &= T(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Пользуясь обозначениями (2.2), а также введя

$$\begin{aligned}
A_1^i &= (1 + \alpha_j)(h_i - h_{i-1}), & A_2^i &= (1 + \alpha_j) \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{2}, & A_3^i &= (1 + \alpha_j) \frac{h_i^3 - h_{i-1}^3}{3}, \\
A_4^i &= (1 + \alpha_j) \int_{h_{i-1}}^{h_i} T dz, & A_5^i &= (1 + \alpha_j) \int_{h_{i-1}}^{h_i} T z dz, \\
\Omega_1^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} dz, & \Omega_2^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} z dz, & \Omega_3^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} z^2 dz, \\
\Omega_4^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} T dz, & \Omega_5^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} T z dz,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

заметим, что коэффициенты A_j и Ω_j ($j=1, 2, \dots, 5$) не зависят от координат x, y, z .

Внося (2.25) в (1.19), (1.20) и пользуясь обозначениями (2.2) и (2.25), получим:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_1^i - \Omega_1^i), & C_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_2^i (A_1^i - \Omega_1^i), \\
C_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_1^i - \Omega_1^i), & C_{66} &= \sum_{i=1}^n G^i (A_1^i - \Omega_1^i), \\
K_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_2^i - \Omega_2^i), & K_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_2^i (A_2^i - \Omega_2^i), \\
K_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_3^i (A_2^i - \Omega_2^i), & K_{66} &= \sum_{i=1}^n G^i (A_2^i - \Omega_2^i), \\
D_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_3^i - \Omega_3^i), & D_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_2^i (A_3^i - \Omega_3^i), \\
D_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_3^i (A_3^i - \Omega_3^i), & D_{66} &= \sum_{i=1}^n G^i (A_3^i - \Omega_3^i), \\
C_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_1^i + \Phi_2^i) (A_4^i - \Omega_4^i)^{3/2}, & C_{27} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_2^i + \Phi_3^i) (A_4^i - \Omega_4^i)^{3/2}, \\
K_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_1^i + \Phi_2^i) (A_5^i - \Omega_5^i)^{3/2}, & K_{27} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_2^i + \Phi_3^i) (A_5^i - \Omega_5^i)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

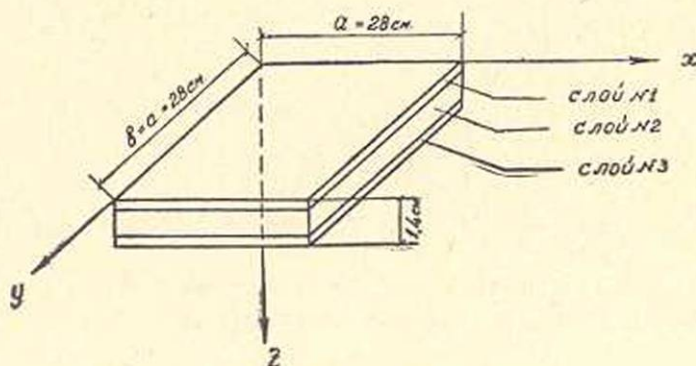
Дальнейший ход расчета полностью совпадает со случаем, изложенным в п. 2 настоящего параграфа с той лишь разницей, что в (2.13)–(2.24) значения C_{jv} , K_{jv} , D_{jv} , C_{j7} и K_{j7} определяются по (2.27).

Как и следовало ожидать, основные результаты п. 2 (а следовательно и п. 3) совпадают с результатами, полученными С. А. Амбарцумяном в работе [9], при $X=Y=Z=0$.

§ 3. Числовой пример

Для иллюстрации хода расчета рассмотрим температурную задачу квадратной ($a=b$), трехслойной ($n=3$), свободно опертой пластинки (фиг. 3) с условиями на контуре

$$\begin{aligned} v=w=T_x=M_x=0 & \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=a, \\ u=v=w=M_y=0 & \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=a. \end{aligned}$$



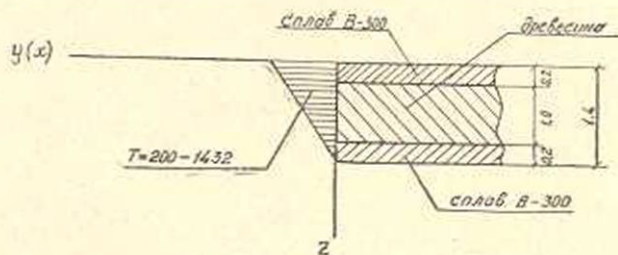
Фиг. 3.

Не уточняя истинного закона распределения температуры, условно принимаем линейный закон распределения температуры по толщине пакета с перепадом от 200° до 0° , а также считаем:

а) материал слоев №№ 1 и 3 (сплав В-300) изотропным, но с упругими постоянными, зависящими от температуры;

б) материал слоя № 2 ортотропным, с упругими постоянными, не зависящими от температуры.

Материалы и толщины слоев, а также эпюра распределения температуры по толщине показаны на фиг. 4.



Фиг. 4.

На основании опытных данных, приведенных в [10], для сплава В-300 подбираем аналитическое выражение зависимости модуля Юнга от температуры в виде $E=6,5 (1-0,0005T)10^5 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом имеем:

для слоев №№ 1 и 3 [10], [11], [12]:

$$\left. \begin{aligned} E_x^1 &= E_y^1 = E_x^3 = E_y^3 = 6,5(1 - 0,0005T)10^5 \text{ кг/см}^2, \\ G_{xy}^1 &= G_{xy}^3 = 2,4(1 - 0,0005T)10^5 \text{ кг/см}^2, \\ \mu_1^1 &= \mu_2^1 = \mu_1^3 = \mu_2^3 = 0,35, \\ \beta_x^1 &= \beta_y^1 = \beta_x^3 = \beta_y^3 = 2,55 \times 10^{-5}, \\ k_1 &= k_3 = 0,0005; \end{aligned} \right\} (3.1)$$

для слоя № 2 [11], [12]:

$$\left. \begin{aligned} E_x^2 &= 1,2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \mu_1^2 = 0,072, \\ E_y^2 &= 0,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \mu_2^2 = 0,036, \\ G_{xy}^2 &= 7 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \\ \beta_x^2 &= \beta_y^2 = 0,4 \cdot 10^{-5}, \\ k_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.2)$$

Из (2.2) и (2.11), принимая во внимание закон изменения температуры по толщине пакета $T = 200 - 143z$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^1 &= \Phi_1^2 = \Phi_1^3 = \Phi_3^3 = 7,407 \cdot 10^5, \\ \Phi_2^1 &= 1,203 \cdot 10^5, \\ \Phi_2^2 &= \Phi_2^3 = 2,593 \cdot 10^5, \\ \Phi_2^3 &= 0,04331 \cdot 10^5, \\ \Phi_3^2 &= 0,6016 \cdot 10^5; \end{aligned} \right\} (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0^1 &= 0,01819; \quad \Omega_1^1 = 0,002429; \quad \Omega_2^1 = 0,1814; \quad \Omega_3^1 = 3,291; \\ \Omega_0^2 &= 0,7000; \quad \Omega_1^2 = 0,5733; \quad \Omega_2^2 = 1,000; \quad \Omega_3^2 = 58,10; \\ \Omega_0^3 &= 0,2582; \quad \Omega_1^3 = 0,3364; \quad \Omega_2^3 = 0,1986; \quad \Omega_3^3 = 3,585. \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Внеся (3.3) и (3.4), а также значения β^i и G_{xy}^i в (2.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= 4,018 \times 10^5; \quad C_{12} = 1,028 \times 10^5; \quad C_{22} = 3,416 \times 10^5; \\ &\quad C_{66} = 0,9820 \times 10^5; \\ K_{11} &= 2,889 \times 10^5; \quad K_{12} = 0,7469 \times 10^5; \quad K_{22} = 2,468 \times 10^5; \\ &\quad K_{66} = 0,7123 \times 10^5; \\ D_{11} &= 3,199 \times 10^5; \quad D_{12} = 0,9032 \times 10^5; \quad D_{22} = 2,855 \times 10^5; \\ &\quad D_{66} = 0,8533 \times 10^5; \end{aligned} \right\} (3.5)$$

$$K_{27} = -190,4. \quad (3.6)$$

Подставив (3.5) в (2.19)–(2.24), будем иметь разрешающее уравнение для нахождения функции Ψ

$$\begin{aligned} 4,425 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^8} + 20,10 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^6 \partial y^2} + 30,01 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^4 \partial y^4} + 18,34 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^2 \partial y^6} + \\ + 3,593 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial y^8} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Контурным условиям при $x=0$ и $x=a$ удовлетворим, приняв

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{\pi m x}{a}.$$

В первом приближении, ограничиваясь первым членом разложения, будем иметь:

$$\Psi = Y \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (3.8)$$

Внеся (3.8) в (3.7), получим дифференциальное уравнение

$$3,593 Y^{VIII} - 23,09 \times 10^{-2} Y^{VI} + 47,56 \times 10^{-4} Y^{IV} - 40,10 \times 10^{-6} Y^{II} + 11,11 \times 10^{-8} Y = 0, \quad (3.9)$$

решив которое, найдем значение Y , а следовательно и значение потенциальной функции

$$\begin{aligned} T = & \left(C_1 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + C_2 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \right. \\ & + C_3 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + C_4 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y + C_5 \operatorname{sh} 0,186y + \\ & \left. + C_6 \operatorname{ch} 0,186y + C_7 \operatorname{sh} 0,0735y + C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right) \sin \frac{\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для определения значений постоянных интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_8$, внесем (3.10) в (2.16)–(2.18), а полученные результаты и (3.6)–в (1.14).

Для u, v, w и M_y получим

$$\begin{aligned} u = & \left[(4,47C_1 - 1,69C_4) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + (4,47C_2 + \right. \\ & + 1,69C_3) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + (4,47C_3 - \\ & - 1,69C_2) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + (4,47C_4 + \\ & + 1,69C_1) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 0,684C_5 \operatorname{sh} 0,186y - \\ & - 0,684C_6 \operatorname{ch} 0,186y - 0,0239C_7 \operatorname{sh} 0,0735y - \\ & \left. - 0,0239C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right] \cos \frac{\pi x}{a} \times 10^5, \\ v = & \left[(4,15C_3 - 2,49C_2) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + (4,15C_4 + \right. \\ & + 2,49C_1) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + (4,15C_1 - \\ & - 2,49C_4) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + (4,15C_2 + \\ & + 2,49C_3) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 0,250C_5 \operatorname{sh} 0,186y - \\ & - 0,250C_6 \operatorname{ch} 0,186y - 0,0768C_7 \operatorname{sh} 0,0735y - \\ & \left. - 0,0768C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times 10^5, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 w = & \left[(5,68C_1 - 2,18C_4) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + \right. \\
 & + (5,68C_2 + 2,18C_3) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + (5,68C_3 - 2,18C_2) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + \\
 & + (5,68C_4 + 2,18C_1) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y + 0,0215C_5 \operatorname{sh} 0,186y + \\
 & + 0,0215C_6 \operatorname{ch} 0,186y + 0,00806C_7 \operatorname{sh} 0,0735y + \\
 & \left. + 0,00806C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times 10^9, \\
 M_y = & \left[(-4,07C_1 + 4,46C_4) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + \right. \\
 & + (-4,07C_2 - 4,46C_3) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + (-4,07C_3 + 4,46C_2) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + \\
 & + (-4,07C_4 - 4,46C_1) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 0,707C_5 \operatorname{sh} 0,186y - \\
 & - 0,707C_6 \operatorname{ch} 0,186y - 0,124C_7 \operatorname{sh} 0,0735y - 0,124C_8 \operatorname{ch} 0,0735y - \\
 & \left. - 242 \times 10^{-9} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times 10^9.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Удовлетворив условиям

$$u=v=w=M_y=0 \quad \text{при} \quad y=0 \text{ и } y=a,$$

(из 3.11) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & 4,47C_4 + 1,69C_1 - 0,684C_5 - 0,0239C_8 = 0, \\
 & 4,15C_2 + 2,49C_3 - 0,250C_5 - 0,0768C_1 = 0, \\
 & 5,68C_4 + 2,18C_1 + 0,0215C_6 + 0,00806C_8 = 0, \\
 & -4,07C_4 - 4,46C_1 - 0,707C_6 - 0,124C_8 = 242 \times 10^{-9}, \\
 & 42,4C_1 + 34,8C_2 + 42,5C_3 + 35,0C_4 - 62,5C_5 - 62,5C_6 - 0,0920C_7 - \\
 & \quad - 0,0951C_8 = 0, \\
 & 48,6C_1 + 27,3C_2 + 48,6C_3 + 27,1C_4 - 22,8C_5 - 22,8C_6 - 0,306C_7 - \\
 & \quad - 0,296C_8 = 0, \\
 & 54,3C_1 + 44,1C_2 + 54,3C_3 + 44,3C_4 + 1,96C_5 + 1,96C_6 + 0,0310C_7 + \\
 & \quad + 0,0321C_8 = 0, \\
 & -67,9C_1 - 15,0C_2 - 67,8C_3 - 15,2C_4 - 64,6C_5 - 64,6C_6 - 0,478C_7 - \\
 & \quad - 0,493C_8 = 242 \times 10^{-9}.
 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решив (3.12), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & C_1 = -51,79 \times 10^{-9}; \quad C_2 = -17,31 \times 10^{-9}; \quad C_3 = 48,70 \times 10^{-9}; \\
 & C_4 = 21,20 \times 10^{-9}; \quad C_5 = -46,74 \times 10^{-9}; \quad C_6 = 47,39 \times 10^{-9}; \\
 & C_7 = 795,5 \times 10^{-9}; \quad C_8 = -1055 \times 10^{-9}.
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.11), учитывая (3.13), получим:

$$\begin{aligned}
 u = & (-267 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + 5,42 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + 247 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + 7,22 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + 31,9 \operatorname{sh} 0,186y - 32,4 \operatorname{ch} 0,186y - 19,0 \operatorname{sh} 0,0735y + \\
 & + 25,1 \operatorname{ch} 0,0735y) \cos 0,112x \times 10^{-4},
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$v = (245 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y - 41,0 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y - 268 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + 49,5 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 11,9 \operatorname{sh} 0,186y + 11,7 \operatorname{ch} 0,186y + 80,6 \operatorname{sh} 0,0735y - 61,1 \operatorname{ch} 0,0735y) \sin 0,112x \times 10^{-4}, \quad (3.14)$$

$$w = (-340 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + 7,90 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + 314 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + 7,49 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - \operatorname{sh} 0,186y + 1,02 \operatorname{ch} 0,186y + 6,42 \operatorname{sh} 0,0735y - 8,46 \operatorname{ch} 0,0735y) \sin 0,112x \times 10^{-3}.$$

Имея окончательные значения u , v и w , нетрудно по (1.6) найти перемещения и деформации, а по (1.13)–(1.18) и по третьему и четвертому уравнениям (1.21)–усилия и моменты в любой точке пластинки.

В частности, подставив в последнее выражение (3.14) $x=y=14$ см, найдем прогиб центра верхней плоскости пластинки $w_0=0,326$ мм.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 XI 1959

Ս. Մ. Գուրգարյան

ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Զերիֆամացվող նորմալի հիպոթեզի հիման վրա բերվում է շերտավոր օրթոտրոպ սալի շերմալին խնդրի լուծումը, երբ ինչպես առաձգականության գործակիցները, այնպես էլ շերմալին ընդարձակման գործակիցը կախված են շերմաստիճանից:

Ամենաընդհանուր դեպքի համար ստացված է փոփոխական գործակիցներով մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների (1.22)–(1.24) սխեմներ:

Դիտարկված են առաձգականության գործակիցների և շերմաստիճանի փոփոխման երեք դեպքեր:

Հաշվման ընթացքը ցուցադրելու նպատակով լուծված է մեկ խնդիրն օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
2. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Известия АН Арм. ССР, том V, № 6, 1952.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957.

4. Григолюк Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инженерный сборник, т. XVII, 1953.
5. Королев В. И. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инженерный сборник, т. XXII, 1955.
6. Аксельрад Э. Л. О температурных деформациях неоднородных оболочек. Известия АН СССР, ОТИ, № 8, 1958.
7. Аксельрад Э. Л. Некоторые задачи теории неоднородных по термоупругим свойствам оболочек. Автореферат кандидатской диссертации, 1959.
8. Шестериков С. А. Температурные напряжения в упругом диске постоянной толщины. Известия АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, № 5, 1959.
9. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН Арм. ССР, ФМЕТ науки, том VI, № 3, 1953.
10. Булыгин И. П., Власова П. Т., Горбодей А. Т., Селиверстова П. М., Чупахин С. Е. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей. Оборонгиз, 1957.
11. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1953.
12. Справочник авиаконструктора, том III, 1939.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Изгиб железобетонной балки с учетом неустановившейся ползучести только сжатой зоны бетона

В настоящей работе исследуются деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом нелинейной ползучести только сжатой зоны бетона.

В линейной постановке эта задача была изучена в нашей работе [1]. Но экспериментальные исследования показывают, что в широком диапазоне изменения напряжений $\left(\frac{1}{2} R \leq \sigma \leq R\right.$, где R —предел прочности материала) линейная связь между деформациями ползучести

и соответствующими напряжениями нарушается. Поэтому, при решении рассматриваемой задачи будем исходить из нелинейных уравнений теории ползучести, развитой в работе [2]. Решение задачи сводится к интегрированию нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, методом, данным в работе [3]. Особенность этого метода решения заключается в том, что в качестве первого приближения берется не упругое решение, а решение соответствующей задачи линейной ползучести. Именно благодаря этому значительно усиливается быстрота сходимости последовательных приближений.

Решение рассматриваемой задачи когда бетон находится в состоянии установившейся ползучести, а напряжение арматуры получает свое предельное значение σ_T , приведено в работе [4].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

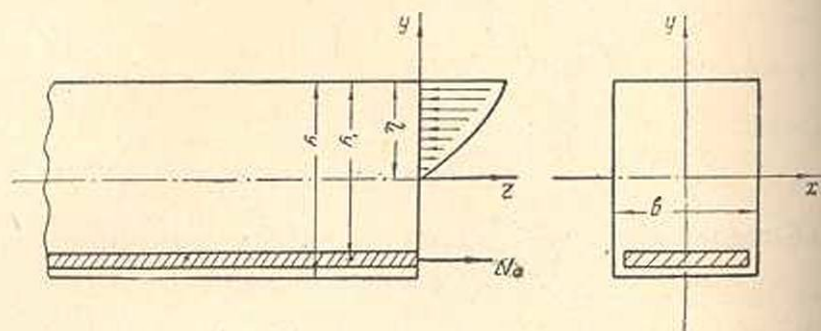
Рассмотрим изгибаемую железобетонную балку с одиночной арматурой (фиг. 1). Допустим, что балка имеет одну плоскость симметрии и все внешние силы действуют в этой плоскости.

Далее, положим, что сжимаемая зона бетона работает полностью, а растянутая зона не работает вследствие образования в ней трещин. Обозначим расстояние от сжатого края сечения до центра тяжести арматуры через h_1 , высоту сечения— h , ширину— b , расстояние нейтральной оси от верхнего края балки— η .

Направим координатные оси ox и oy параллельно главным осям инерции поперечного сечения, а ось oz —по направлению, параллельному геометрической оси балки.

При изучении напряженного состояния в изгибаемой железобетонной балке примем, что сечения после деформации остаются плоскими.

Для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что модуль мгновенной деформации E_s постоянен.



Фиг. 1

Как известно, между полной продольной деформацией бетона $\varepsilon_s(t)$ и напряжением $\sigma_s(t)$ с учетом нелинейной ползучести бетона существует зависимость [2]

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s} - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_s(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.1)$$

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести бетона при одноосном напряженном состоянии, $F(\sigma_s)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для бетона, определяемая из опыта в результате испытания на простую ползучесть и нормированная условием $F(1) = 1$, τ_1 — возраст бетона в момент приложения нагрузки, t — время.

Пусть $F(\sigma_s)$ является степенной функцией вида

$$F(\sigma_s) = \alpha \sigma_s + \beta \sigma_s^m, \quad (1.2)$$

где α , β , m — постоянные параметры, определяемые из опыта.

Такого вида функция характерна тем, что обладает достаточной общностью и хорошо описывает экспериментальные кривые ползучести в широком диапазоне изменения напряжений [5, 6].

Очевидно, что если в (1.2) параметр β является малым, то функция $F(\sigma_s)$ будет описывать кривые ползучести материалов, обладающих слабой нелинейностью.

Внося выражение $F(\sigma_s)$ из (1.2) в (1.1), получим

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s} - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \beta \int_{\tau_1}^t [\sigma_s(\tau)]^m \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.3)$$

Пользуясь гипотезой плоских сечений, можем написать

$$\varepsilon_s(t) = A(z, t)y, \quad (1.4)$$

где $A(z, t)$ — неизвестная кривизна балки в данный момент времени t .
Здесь в каждый момент времени рассматриваются те точки балки

которые от перемещающейся нейтральной оси находятся на расстоянии y .

Подставляя выражение $\varepsilon_s(t)$ из (1.4) в (1.3), получим

$$\sigma_s(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) K(t, \tau) d\tau - \beta \int_{\tau_1}^t [\sigma_s(\tau)]^m K(t, \tau) d\tau = E_s A(z, t) y, \quad (1.5)$$

где

$$K(t, \tau) = E_s \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}. \quad (1.6)$$

Таким образом, задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (1.5). Функция $A(z, t)$ определяется из уравнений равновесия.

§ 2. Решение интегрального уравнения (1.5)

Пользуясь методом, развитым в работе [3], будем искать решение уравнения (1.5) в следующей форме

$$\sigma_s(t) = \sigma_s^{(0)}(t) + \beta \sigma_s^{(1)}(t) + \beta^2 \sigma_s^{(2)}(t) + \dots \quad (2.1)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\sigma_s^{(0)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(0)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = E_s A(z, t) y, \quad (2.2)$$

$$\sigma_s^{(1)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(1)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^t [\sigma_s^{(0)}(\tau)]^m K(t, \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

$$\sigma_s^{(2)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(2)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = m \int_{\tau_1}^t [\sigma_s^{(0)}(\tau)]^{m-1} \sigma_s^{(1)}(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

...

Таким образом, решение нелинейного интегрального уравнения (1.5) сводится к решению некоторой совокупности рекуррентных линейных интегральных уравнений (2.2), (2.3), (2.4)...

Займемся решением этих уравнений.

Решение уравнения (2.2) будет

$$\sigma_s^{(0)}(t) = E_s y H_0(t, \tau_1), \quad (2.5)$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = A(z, t) + \alpha \int_{\tau_1}^t A(z, \tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau. \quad (2.6)$$

Здесь $R(t, \tau, \alpha)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t, \tau)$.

Если для меры ползучести бетона принять [2]

$$C(t, \tau) = \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right], \quad (2.7)$$

где A_1 , C_0 , γ — постоянные параметры, определяемые из опыта, то

выражение резольвенты $R(t, \tau, \alpha)$ можно представить в следующем виде

$$\alpha R(t, \tau, \alpha) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta'(\tau) + \eta''(\tau) - \gamma \eta'(\tau)] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\eta(x)} dx, \quad (2.8)$$

где

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \alpha E_s \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \right] d\tau. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.3) будет

$$\sigma_s^{(1)}(t) = (E_s y)^m [H_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau]. \quad (2.10)$$

Здесь положено

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau. \quad (2.11)$$

Если ограничиваться только вторым приближением, то решение основного уравнения (1.5) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) = & E_s y \{ H_0(t, \tau_1) + \beta (E_s y)^{m-1} [H_1(t, \tau_1) + \\ & + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau] \} + O(\beta^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для определения неизвестной функции $A(z, t)$ пользуемся уравнениями равновесия

$$\int_0^{\eta} \sigma_s(t) b dy + N_a(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$\int_0^{\eta} \sigma_s(t) b y dy - N_a(t) (h_1 - \eta) = M_z.$$

Здесь $N_a(t)$ — усилие в арматуре, равное $F_a \sigma_a(t)$, F_a — площадь поперечного сечения арматуры, $\sigma_a(t)$ — напряжение в арматуре, $\eta = \eta(t)$ — неизвестная высота сжатой зоны балки в момент времени t , M_z — величина изгибающего момента.

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона имеем

$$\varepsilon_s(t) |_{y=-(h_1-\eta)} = \varepsilon_a(t). \quad (2.14)$$

Пользуясь этими соотношениями и замечая, что

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}, \quad (2.15)$$

получим выражение усилия $N_a(t)$

$$N_a(t) = -F_a E_a A(z, t)(h_1 - \eta), \quad (2.16)$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Подставляя значения $\sigma_s(t)$ и $N_a(t)$ из (2.12) и (2.16) в уравнения (2.13), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b E_s \eta^2 H_0(t, \tau_1) + \beta \frac{b}{m+1} E_s^m \eta^{m+1} \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \right. \\ & \left. + 2 \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) \right\} K(t, \tau) d\tau = F_a E_a A(z, t)(h_1 - \eta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} b \eta^3 E_s H_0(t, \tau_1) + \beta \frac{b}{m+2} \eta^{m+2} E_s^m \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \right. \\ & \left. + 2 \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau + F_a E_a A(z, t)(h_1 - \eta)^2 = M_z. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.6) будет

$$A(z, t) = H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Здесь $K(t, \tau)$ является резольвентой ядра $R(t, \tau, \alpha)$.

Внося выражение $A(z, t)$ из (2.19) в (2.17) и (2.18), найдем

$$\begin{aligned} & [p_1 \tau_1^2 - p_2(1 - \zeta)] H_0(t, \tau_1) + p_2(1 - \zeta) \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + \beta p_3 \tau_1^{m+1} \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & [q_1 \tau_1^3 + q_2(1 - \zeta)^2] H_0(t, \tau_1) - q_2(1 - \zeta)^2 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + \beta q_3 \tau_1^{m+2} \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau = M_z, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} b E_s h_1^2, \quad p_2 = F_a E_a h_1, \quad p_3 = \frac{b h_1^{m+1}}{m+1} E_s^m, \\ q_1 &= \frac{1}{3} b E_s h_1^3, \quad q_2 = F_a E_a h_1^2, \quad q_3 = \frac{b h_1^{m+2}}{m+2} E_s^m, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\zeta = \frac{\eta}{h_1}$ — есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени t к полезной высоте сечения.

Таким образом, определение искомых функций $H_0(t, \tau_1)$ и $\zeta(t)$ свелось к совместному решению двух нелинейных интегральных уравнений (2.20) и (2.21). К этим уравнениям применим вышеизложенный метод.

Ищем решение этих уравнений в следующей форме

$$H_0(t, \tau_1) = H_0^{(0)}(t, \tau_1) + \beta H_0^{(1)}(t, \tau_1) + \beta^2 H_0^{(2)}(t, \tau_1) + \dots, \quad (2.23)$$

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) + \beta \zeta_1(t) + \beta^2 \zeta_2(t) + \dots \quad (2.24)$$

Подставляя эти выражения в (2.20), (2.21) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$[p_1 \zeta_0^2 - p_2(1 - \zeta_0)] H_0^{(0)}(t, \tau_1) + p_2(1 - \zeta_0) \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.25)$$

$$[q_1 \zeta_0^3 + q_2(1 - \zeta_0)^2] H_0^{(0)}(t, \tau_1) - q_2(1 - \zeta_0)^2 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = M_z, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & [p_1 \zeta_0^2 - p_2(1 - \zeta_0)^2] H_0^{(1)}(t, \tau_1) + (2p_1 \zeta_0 + p_2) \zeta_1 H_0^{(0)}(t, \tau_1) + \\ & + p_2(1 - \zeta_0) \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(1)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau - p_2 \zeta_1 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + \alpha \int_{\tau_1}^t [H_0^{(0)}(x, \tau_1)]^m R(t, x, z) dx \} K(t, \tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & [q_1 \zeta_0^3 + q_2(1 - \zeta_0)^2] H_0^{(1)}(t, \tau_1) + [3q_1 \zeta_0^2 - 2q_2(1 - \zeta_0)] \zeta_1 H_0^{(0)}(t, \tau_1) - \\ & - q_2(1 - \zeta_0)^2 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(1)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + 2q_2(1 - \zeta_0) \zeta_1 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + q_2 \zeta_0^{m+2} \alpha \int_{\tau_1}^t \{ [H_0^{(0)}(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^t [H_0^{(0)}(x, \tau_1)]^m R(t, x, z) dx \} K(t, \tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Аналогично можно написать остальные уравнения.

Таким образом, решение системы нелинейных интегральных уравнений (2.20) и (2.21) сводится к решению некоторой совокупности систем линейных интегральных уравнений.

Займемся решением этих уравнений.

Систему уравнений (2.25) и (2.26) можно написать в следующем виде

$$H_0^{(0)}(t, \tau_1) = \frac{6M_z}{E_0 F_0 \zeta_0^2 (3 - \zeta_0) h_1^2}, \quad (2.29)$$

$$\int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = \left[1 - \frac{\zeta_0^2}{2m_1(1 - \zeta_0)} \right] H_0^{(0)}(t, \tau_1), \quad (2.30)$$

где $\mu = \frac{F_0}{bh_1}$ — коэффициент армирования, $m_1 = \frac{E_a}{E_0}$ — модульное отношение, $\zeta_0(t)$ и $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$ — неизвестные функции.

Формулы (2.29) и (2.30) совпадают с формулами (3.10) и (3.11), полученными нами для линейной ползучести [1].

Заметим, что если исключить из уравнения (2.30) функцию $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$, то получим для определения $\zeta_0(t)$ нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, решение которого связано с практически непреодолимой трудностью. Поэтому к интегральному уравнению (2.30) применим метод Н. М. Крылова и Н. И. Боголюбова, как это мы делали при рассмотрении линейной задачи [1]. Тогда для определения $\zeta_0(t_k)$ и $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$ получим [1]

$$a_k \zeta_0^1(t_k) + b_k \zeta_0^2(t_k) + c_k \zeta_0^3(t_k) + d_k \zeta_0(t_k) + l_k = 0, \quad (2.31)$$

где

$$\zeta_0(t_k) = \frac{\tau_0(t_k)}{h_1}, \quad \zeta_0(\tau_1) = \mu m_1 \sqrt{1 + \frac{2}{\mu m_1} - 1}, \quad (2.32)$$

$$a_k = -\mu m_1 E_s A_k, \quad b_k = 4\mu m_1 E_s A_k,$$

$$c_k = 3 \{ f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] - a_k \},$$

$$d_k = -l_k = 6\mu m_1 f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots$$

$$\dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[1 + E_s C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right], \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} A_k = & \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[C(t_k, \tau_1) - C \left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ & + f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[C \left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right] + \\ & + f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_3)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[C \left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - C \left(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2} \right) \right] + \dots + f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-2})] \times \\ & \times \left[C \left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$f[\zeta_0(\tau_1)] = \frac{1}{3} \zeta_0^2(\tau_1) + \mu m_1 [1 - \zeta_0(\tau_1)], \quad (2.35)$$

$$\varphi[\zeta_0(t_k)] = \frac{1}{6} \zeta_0^2(t_k) [3 - \zeta_0(t_k)] \quad (2.36)$$

и

$$H_0^{(0)}(t_k, \tau_1) = \frac{6M_s}{F_s E_s \zeta_0^2(t_k) [3 - \zeta_0(t_k)] h_1^2}. \quad (2.37)$$

В формулах (2.31)–(2.37) индексу k нужно давать значения 0, 1, 2, ..., n , причем $t_0 = \tau_1$.

Решая уравнение (2.31), определяем то значение $\zeta_0(t_k)$, которое

имеет в данном случае физический смысл. Пользуясь теоремой Штурма, нетрудно показать, что это уравнение имеет только один корень, который для данной задачи имеет физический смысл. Подставляя значение $\zeta_0(t_k)$ в выражение (2.37), определяем $H_0^{(0)}(t_k, \tau_1)$. Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, n$, получим числовые значения $\zeta_0(t)$ и $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$ при $t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, причем $t_0=\tau_1$.

Систему уравнений (2.27) и (2.28) можно написать в следующем виде

$$B_1(\zeta_0)H_0^{(0)}(t, \tau_1) + B_2(\zeta_0)\zeta_0(t) = B_3(\zeta_0)J(t, \tau_1), \quad (2.38)$$

$$D_1(\zeta_0)H_0^{(1)}(t, \tau_1) + D_2(\zeta_0) \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = D_3(\zeta_0)J(t, \tau_1), \quad (2.39)$$

где

$$B_1(\zeta_0) = \frac{1}{3} p_1 q_2 \zeta_0^2 (3 - \zeta_0), \quad B_2(\zeta_0) = \frac{3p_2(2 - \zeta_0)}{\zeta_0(3 - \zeta_0)} M_2, \quad (2.40)$$

$$B_3(\zeta_0) = -p_2 q_2 \left(1 + \frac{1 - \zeta_0}{m+1}\right) \zeta_0^{m+1}, \quad (2.41)$$

$$J(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0^{(0)}(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0^{(0)}(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} D_1(\zeta_0) &= q_1 \zeta_0^2 + q_2 (1 - \zeta_0)^2, \\ D_2(\zeta_0) &= q_2 (1 - \zeta_0)^2, \\ D_3(\zeta_0) &= -q_2 \zeta_0^{m+2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь $\zeta_1(t)$ и $H_0^{(1)}(t, \tau_1)$ неизвестны, а численные значения $B_1(\zeta_0)$, $B_2(\zeta_0)$, $B_3(\zeta_0)$, $D_1(\zeta_0)$, $D_2(\zeta_0)$, $D_3(\zeta_0)$ и $J(t, \tau_1)$ известны для некоторых значений времени $\tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$.

Сперва рассмотрим интегральное уравнение (2.39) и применим к нему метод Крылова и Боголюбова [1]. Тогда, придавая времени t последовательно возрастающие конкретные значения $t_1, t_2, \dots, t_n$, получим

$$H_0^{(1)}(t_1, \tau_1) = \frac{D_3[\zeta_0(t_1)]J(t_1, \tau_1)}{D_1[\zeta_0(t_1)] + \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_1)] C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(t_2, \tau_1) &= \frac{1}{D_1[\zeta_0(t_2)] + \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_2)] C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ D_3[\zeta_0(t_2)] \times \right. \\ &\times J(t_2, \tau_1) - \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_2)] \left[C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] H_0^{(1)}(t_1, \tau_1) \left. \right\}, \quad (2.45) \end{aligned}$$

$$H_0^{(1)}(t_k, \tau_1) = \frac{1}{D_1[\zeta_0(t_k)] + \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_k)] C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ D_3[\zeta_0(t_k)]J(t_k, \tau_1) - \alpha E_0 D_2[\zeta_0(t_k)] \left| C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - \right. \right. \\ & - C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \left| H_0^{(1)}(t_1, \tau_1) - \dots - \alpha E_0 D_2[\zeta_0(t_k)] \left| C\left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \right| H_0^{(1)}(t_{k-1}, \tau_1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Уменьшая расчетные интервалы времени, мы можем получить решение с любой точностью. Как показано в работе [7], применение этого метода к задачам теории ползучести оказывается весьма эффективным, так как большая точность получается даже при выборе сравнительно небольшого числа интервалов.

Из этих формул определим численные значения $H_0^{(1)}(t_1, \tau_1)$, $H_0^{(1)}(t_2, \tau_1), \dots, H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)$, после чего из соотношения (2.38) можем получить

$$\zeta_1(t_k) = \frac{B_3[\zeta_0(t_k)]J(t_k, \tau_1) - B_1[\zeta_0(t_k)]H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)}{B_2[\zeta_0(t_k)]}. \quad (2.47)$$

Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, n$, получим численные значения $\zeta_1(t)$ при $t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, причем $t_0=\tau_1$.

Аналогичным образом можно определить остальные приближения.

Если ограничиваться только вторым приближением, то для $H_0(t, \tau_1)$ и $\zeta(t)$ получим

$$H_0(t_k, \tau_1) = H_0^{(0)}(t_k, \tau_1) + \beta H_0^{(1)}(t_k, \tau_1) + O(\beta^2), \quad (2.48)$$

$$\zeta(t_k) = \zeta_0(t_k) + \beta \zeta_1(t_k) + O(\beta^2), \quad (2.49)$$

где $H_0^{(0)}(t_k, \tau_1)$, $H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)$ и $\zeta_1(t_k)$ определяются соответственно формулами (2.37), (2.46) и (2.47), а $\zeta_0(t_k)$ является решением уравнения (2.31).

Здесь $\zeta(t_k) = \frac{\tau_1(t_k)}{h_1}$ есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени t к полезной высоте сечения.

Пользуясь выражениями (1.4), (2.19), (2.48), (2.37) и (2.46), для определения полной продольной деформации бетона получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_1) = & H_0(t_1, \tau_1) y + \alpha E_0 \{ H_0(\tau_1, \tau_1) [C(t_1, \tau_1) - \\ & - C(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2})] + H_0(t_1, \tau_1) C(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) \} y, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_2) = & H_0(t_2, \tau_1) y + \alpha E_0 \{ H_0(\tau_1, \tau_1) [C(t_2, \tau_1) - \\ & - C(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2})] + H_0(t_1, \tau_1) [C(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) - C(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2})] + \\ & + H_0(t_2, \tau_1) C(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}) \} y, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(t_k) = & H_0(t_k, \tau_1)y + \alpha E_s \{ H_0(\tau_1, \tau_1) [C(t_k, \tau_1) - \\
& - C(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2})] + H_0(t_1, \tau_1) [C(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) - C(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2})] + \\
& + H_0(t_2, \tau_1) [C(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}) - C(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2})] + \dots + H_0(t_{k-1}, \tau_1) \times \\
& \times [C(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2}) - C(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2})] + H_0(t_k, \tau_1) C(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}) \} y.
\end{aligned} \quad (2.52)$$

Если известна продольная деформация бетона, то можно согласно (2.14) определить деформацию в арматуре. Для определения закона изменения деформации в арматуре получим формулу

$$\frac{\varepsilon_a(t_k)}{\varepsilon_a(\tau_1)} = \frac{1 - \zeta(t_k)}{1 - \zeta(\tau_1)} \frac{\varepsilon_s(t_k)}{\varepsilon_s(\tau_1)}, \quad (2.53)$$

где индекс k принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$, причем $t_0 = \tau_1$.

Перейдем к определению прогиба балки.

На основании (2.19) можем написать

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W(t)}{dz^2} = & H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau, \\
\frac{d^2 W(\tau_1)}{dz^2} = & H_0(\tau_1, \tau_1),
\end{aligned} \quad (2.54)$$

где $W(t)$ — прогиб балки в момент времени t , $W(\tau_1)$ — прогиб балки в момент времени τ_1 .

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2 W(t)}{dz^2} = \frac{H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau}{H_0(\tau_1, \tau_1)} \frac{d^2 W(\tau_1)}{dz^2}. \quad (2.55)$$

Интегрируя это уравнение и принимая для простоты такое закрепление опор балки, чтобы постоянные интегрирования равнялись нулю, получим

$$\frac{W(t)}{W(\tau_1)} = \frac{H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau}{H_0(\tau_1, \tau_1)}. \quad (2.56)$$

Для определения численных значений $\frac{W(t)}{W(\tau_1)}$ нужно пользоваться

выражениями (2.48), (2.37), (2.44), (2.45) и (2.46). Напряжение в бетоне определяется формулой (2.12), где вместо функции $H_0(t, \tau_1)$ нужно подставить ее значение из (2.48), (2.37), (2.44), (2.45) и (2.46). Если ограничиваться первыми двумя приближениями, то для определения напряжений в бетоне получим

$$\sigma_b(t) = E_b y \{ H_0(t, \tau_1) + \beta (E_s y)^{m-1} J(t, \tau_1) \} + O(\beta^2), \quad (2.57)$$

где $J(t, \tau_1)$ определяется формулой (2.42).

Если известна деформация арматуры, то напряжение в арматуре определяется по (2.15), т. е.

$$\tau_a(t) = E_a \varepsilon_a(t). \quad (2.58)$$

Для определения закона изменения $\zeta(t)$ находим

$$\frac{\zeta(t_k)}{\zeta(\tau_1)} = \frac{1}{\zeta(\tau_1)} \left\{ \zeta_0(t_k) + \beta \frac{B_3[\zeta_0(t_k)]J(t_k, \tau_1) - B_1[\zeta_0(t_k)]H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)}{B_2[\zeta_0(t_k)]} \right\}, \quad (2.59)$$

где индексу k нужно давать значения $0, 1, 2, \dots, n$ и еще принять $t_0 = \tau_1$. Здесь $\zeta(\tau_1) = \zeta_0(\tau_1)$.

С целью иллюстрации некоторых количественных результатов, рассмотрим численный пример.

Примем

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) \left| 1 - e^{-0,026(t-\tau)} \right| 10^{-5},$$

$\nu = 0,0165$; $E_b = 1,4 \cdot 10^5$ кг/см²; $\tau_1 = 7$ дней; $m = 2$; $M_2 = 1,300000$ кг.см;
 $b = 25$ см; $h_1 = 50$ см.

При этих данных рассмотрим четыре случая, соответствующих значениям параметра нелинейности; $\beta = 0$, $\beta = 0,001$, $\beta = 0,01$, $\beta = 0,02$.

Очевидно, что значению $\beta = 0$ соответствует линейная ползучесть, рассмотренная в работе [1], а остальным значениям β соответствует нелинейная ползучесть с квадратичным законом нелинейности.

Для нахождения искомых функций разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов $\tau_1 = 7$, $t_1 = 14$, $t_2 = 28$, $t_3 = 90$, $t_4 = 360$ дням.

Ниже приводятся 4 таблицы. В этих таблицах даются численные значения отношений

$$\frac{\zeta(t)}{\zeta(\tau_1)}, \quad \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}, \quad \frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}, \quad \frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_b(\tau_1)}, \quad \frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}, \quad \frac{W(t)}{W(\tau_1)}, \quad (5.60)$$

в зависимости от различных значений времени t и параметра нелинейности β при первом и втором приближениях.

Численные значения отношений (5.60) при линейной ползучести взяты из нашей работы [1].

Численные значения $\zeta(t)/\zeta(\tau_1)$ в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом и втором приближениях

Таблица 1

t	П р и б л и ж е н и я			
	первое	второе		
		параметр нелинейности β		
		0	0,001	0,01
7	1	1	1	1
14	1,11947	1,12729	1,19779	1,27717
28	1,26739	1,28147	1,41448	1,55847
90	1,43638	1,44927	1,60330	1,78112
360	1,45400	1,47009	1,62641	1,80655

Численные значения $\frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_b(\tau_1)} = \frac{W(t)}{W(\tau_1)}$ в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом и втором приближениях

Таблица 2

t	П р и б л и ж е н и я			
	первое	второе		
		параметр нелинейности β		
		0	0,001	0,01
7	1	1	1	1
14	1,156500	1,169691	1,286255	1,415515
28	1,420321	1,460172	1,779114	2,133820
90	1,883662	1,941421	2,554497	3,257700
360	1,947630	2,021786	2,779640	3,547501

Численные значения $\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)} = \frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}$ в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом и втором приближениях

Таблица 3

t	П р и б л и ж е н и я	
	первое	второе
	параметр нелинейности β	
	0	0,001
7	1	1
14	1,023885	1,026497
28	1,055120	1,064939
90	1,093223	1,102649
360	1,097427	1,10797

Численные значения $\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$ в зависимости от времени t и коэф-
фициента нелинейности β при первом и втором приближениях в точках
 $y = h_1 \zeta(t)$, $y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t)$ и $y=0$.

Таблица 4

t	Значения y	Приближения	
		первое	второе
		параметр нелинейности β	
		0	0,001
7	—	1	1
14	$y = h_1 \zeta(t_1)$	0,817014	0,797518
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_1)$	0,817014	0,812942
	$y=0$	0,817014	0,828365
28	$y = h_1 \zeta(t_2)$	0,656870	0,624827
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_2)$	0,656870	0,655838
	$y=0$	0,656870	0,682850
90	$y = h_1 \zeta(t_3)$	0,539848	0,508080
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_3)$	0,539848	0,535850
	$y=0$	0,539848	0,563620
360	$y = h_1 \zeta(t_4)$	0,529042	0,49404
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_4)$	0,529042	0,51975
	$y=0$	0,529042	0,54546

Из этих таблиц следует, что 1) увеличение отношения высоты сжатой зоны сечения балки к полезной высоте сечения в условиях неустановившейся ползучести сильно активизируется, 2) особенно сильно активизируется увеличение деформации и прогиба в бетоне (например, при $\beta=0,02$ $\varepsilon_0(t)$ и $W(t)$ в два раза больше, чем в случае линейной ползучести), 3) увеличение напряжения и деформации в арматуре в условиях нелинейной ползучести при $\beta=0,001$ незначи-
тельно и 4) при нелинейной ползучести напряжение в бетоне в точ-
ках $0 < y \leq h_1 \zeta(t)$ затухает, а в точках $y \leq 0$ — увеличивается.

Մ. Մ. Մանուկյան

ԵՐԿԱԹՔԵՏՈՆԵ ՀԵԾԱՆԻ ԾՌՈՒՄԸ ԲԵՏՈՆԻ ՄԻԱՅՆ ՍԵՂՄՎԱԾ ԳՈՏՈՒՆԻ ՉԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱԴՐՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ ուսումնասիրվում են ծովող երկաթբետոն հեծանի լարումները և ղեֆորմացիան, երբ բետոնի սեղմված գոտին աշխատում է լրիվ, իսկ ձգված գոտին չի աշխատում՝ նրանում առաջացած ճաքերի պատճառով:

Առաջադրված խնդրի ընդհանուր լուծումը բետոնի զծային սողքի դեպքում տրված է [1] աշխատությունում: Բայց էքսպերիմենտալ հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ մեծ լարումների դեպքում ($0 \leq \sigma \leq R$, որտեղ R -ը նյութի կալունության սահմանն է) սողքի ղեֆորմացիայի և համապատասխան լարումների միջև զծային կապը խախտվում է: Այդ պատճառով առաջադրված խնդիրը լուծելու համար օգտագործվում է Ն. Ս. Հարությունյանի առաջադրած սողքի ոչ-զծային տեսությունը: Խնդրի լուծումը բերվում է Վոլտերրի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարմանը, որի լուծման համար օգտագործվում է [3] աշխատության մեջ շարադրված մեթոդը:

Այս մեթոդի առանձնահատկությունն այն է, որ որպես առաջին մոտավորություն վերցվում է ոչ թե խնդրի առաձգական լուծումը, ինչպես առաջադրված է կատարել սողքի ոչ-զծային տեսության խնդիրը Պիկարի հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով լուծելիս, այլ զծային սողքի համապատասխան խնդրի լուծումը: Այս առանձնահատկության շնորհիվ զգալիորեն բարձրանում է հաջորդական մոտավորությունների դոգամատության արագությունը:

$F(\sigma)$ ֆունկցիան, որը բնորոշում է սողքի դեպքում տվյալ նյութի լարվածության և ղեֆորմացիայի միջև եղած ոչ-զծային առնչությունը, վերցված

$$F(\sigma) = \alpha\sigma + \beta\sigma^m$$

տեսքով, որտեղ α , β , m -հաստատուն պարամետրերն են, որոնք որոշվում են փորձից և բավարարում են $\alpha + \beta = 1$ պայմանին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Манукян М. М. Деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и частично растянутой зон бетона. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, том IX, № 9, 1956.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
3. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенной стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, том XXII, вып. 6, 1958.
4. Манукян М. М. Изгиб железобетонной балки с учетом установившейся ползучести только сжатой зоны бетона. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, том X, № 4, 1957.

5. Карапетян К. С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, № 4, 1959.
6. У Жуй-фын. Неустановившаяся ползучесть составных цилиндрических труб в упругой среде. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, № 3, 1959.
7. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Арм. ССР, серия ФМЕТ наук, т. VII, № 6, 1954.

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение давления в неоднородном упругом
 полупространстве

Пусть в некоторой точке O границы нижнего полупространства, занятого упругой неоднородной средой, возникло давление, которое затем распространяется симметрично по границе по произвольному закону. Движение среды считаем осесимметричным. Расположим ось Ox по границе среды, ось Oz направлена вниз. Обозначим $a(z)$, $b(z)$ и $\rho(z)$ переменные с глубиной скорости продольных и поперечных волн и плотность среды

$$a^2(z) = \frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}, \quad b^2(z) = \frac{\mu(z)}{\rho(z)}.$$

При $z=0$ выполняется условие для тензора напряжений

$$\begin{aligned} \tau_z &= \begin{cases} p_1(x, t), & x < R(t) \\ 0, & x > R(t) \end{cases} \\ \tau_{rz} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $R(t)$ — радиус фронта давления на поверхности среды, $p_1(x, t)$ — давление за этим фронтом. Рассмотрим случай сверхзвуковой скорости распространения $R'(t) > a(z)$. Для определения компонентов тензора напряжений на продольной волне, воспользуемся соотношением вдоль луча для продольной $\bar{u}^*(u_1, u_2)$ и поперечной $\bar{V}^*(v_1, v_2)$ составляющих вектора смещения [1]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\bar{u}^*}{ds_1} + V^2 \tau_1 \bar{u}^* + \frac{1}{\lambda(z) + 2\mu(z)} \{ [\text{grad } \lambda(z)(\bar{u}^* \text{ grad } \tau_1)] + \\ + 2 \text{ grad } \tau_1 [\bar{u}^* \text{ grad } \mu(z)] \} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$2 \frac{d\bar{V}^*}{ds_2} + V^2 \tau_2 \bar{V}^* + \frac{1}{\mu(z)} \{ 2 [\bar{V}^* \text{ grad } \mu(z)] \text{ grad } \tau_2 + \text{grad } \mu(z) [\bar{V}^* \text{ grad } \tau_2] \} = 0,$$

где $\tau_1 = t$ — уравнение фронта продольной волны, $\tau_2 = t$ — уравнение поперечного фронта, $s_{1,2}$ — параметр вдоль лучей. Уравнение лучей для продольных и поперечных волн записывается в виде

$$x = R[t_0(\theta_{1,2})] + \lambda_{1,2} s_{1,2}; \quad s_{1,2} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2}}, \quad (3)$$

$$t = t_0(\theta_{1,2}) = \int_0^z \frac{dz}{C_{1,2}(z) \sqrt{\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2}} = \tau_{1,2},$$

где $\theta_{1,2}$ — угол выхода продольного и поперечного лучей с осью Ox в момент $t = t_0(\theta_1) = t_0(\theta_2)$ прохождения фронта через границу $C_1(z) = a(z)$.

$$C_2(z) = b(z); \quad \lambda_{1,2} = \frac{\cos \theta_{1,2}}{C_{1,2}(\theta)} = \frac{1}{R'[t_0(\theta_1)]} = \frac{1}{v}.$$

Решение [2] на фронтах продольной и поперечной волн получено в [1]. В нашем случае оно имеет вид

$$|\bar{u}^*| = \sqrt{\frac{1}{K_1 \rho(z) a^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{x}} A_1(\theta_1) \tau_1; \quad |\bar{v}^*| = \sqrt{\frac{1}{K_2 \rho(z) b^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{x}} A_2(\theta_2) \tau_2, \quad (4)$$

где

$$K_{1,2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{1,2}^2(0)} - \lambda_{1,2}^2}{\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2}} \sqrt{\frac{\bar{v}^3 R''[t_0(\theta_1)]}{R''[t_0(\theta_1)] \bar{v}^3 - \int_0^z \frac{dz}{C_{1,2}^2(z) \left[\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2 \right]^{3/2}}}}. \quad (5)$$

Для составляющих смещения на фронтах волн имеем

$$u_1 = |\bar{u}^*| \cos \theta_{1,0} = |\bar{u}^*| \frac{a(z)}{a(0)} \cos \theta_1, \quad u_2 = |\bar{u}^*| \sin \theta_1 \Phi, \quad v_1 = |\bar{v}^*| \sin \theta_2 \Phi,$$

$$v_2 = -|\bar{v}^*| \frac{b(z)}{b(0)} \cos \theta_2.$$

Если подставить (4) в (1) получим уравнения для $A_1(\theta_1)$ и $A_2(\theta_2)$ при $z=0$

$$\left[a^2(0) - 2b^2(0) \cos^2 \theta_1 \right] \frac{A_1(\theta_1)}{\sqrt{R[t_0(\theta_1)]}} \frac{1}{\sqrt{\rho(0) a^2(0)}} -$$

$$- 2b^2(0) \frac{A_2(\theta_2)}{\sqrt{R[t_0(\theta_1)]}} \sqrt{\frac{1}{\rho(0) b^2(0)}} \sin \theta_2 \cos \theta_2 = \frac{P_1\{R[t_0(\theta_1)], t_0(\theta_1)\}}{\rho(0)}, \quad (6)$$

$$2 \frac{A_1(\theta_1)}{\sqrt{R[t_0(\theta_1)]}} \frac{1}{\sqrt{\rho(0)a^2(0)}} \cos \theta_1 \sin \theta_1 +$$

$$+ A_2(\theta_2) \frac{1}{\sqrt{\rho(0)b^2(0)}} (1 - 2\cos^2 \theta_2) = 0.$$

Решая (6) и подставляя смещения в закон Гука, получаем

$$\frac{\sigma_z}{p_1} = - \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right] \left[\frac{a^2(z)}{a^2(0)} - 2b^2(z)\frac{1}{v^2} \right] \frac{1}{b^2(0)}}{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right]^2 + 4\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}}} \right\} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}} \sqrt{\frac{1}{K_1}},$$

$$\frac{\tau_{rz}}{p_1} = \frac{-2 \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \frac{b^2(z)}{b^2(0)} \frac{1}{v} \left[2\frac{1}{v^2} - \frac{1}{b^2(0)} \right] \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}}}{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right]^2 + 4\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}} \sqrt{\frac{1}{K_1}}.$$

В случае жидкости, давление σ_z получим из (7) если множитель в фигурных скобках приравняем единице. Для однородного упругого тела выражения (7) получены автором в кандидатской диссертации (МГУ 1959). Если пренебречь продольной составляющей, имеем на поперечной волне:

$$\frac{\sigma_z}{p_1} = \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \frac{b^2(z)}{b^2(0)} \frac{4}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}} \sqrt{\frac{1}{K_2}}$$

$$\frac{\tau_{rz}}{p_1} = \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \frac{b^2(z)}{b^2(0)} \frac{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right] \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \frac{1}{v} \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}}}{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right]^2 + 4\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}}} \sqrt{\frac{1}{K_2}}$$

Ս. Գ. Յագգուկ

ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա. Մ' Փ Ո Փ Ո Ւ Մ'

Աշխատության մեջ քննարկվում է հարվածային ալիքի թափանցումը առաձգական անհամասեռ կիսատարածության մեջ: Ալիքների տարածման արագությունը մակերեսի վրա ընդունվում է ավելի մեծ, քան նրանց տարածումը երկաթական ուղղությամբ: Արդյիսի ենթադրության դեպքում որոշվում են առաձգական լարումների տենզորը երկաթական և լայնական առաձգական ալիքների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Скуридин Г. А. и Гвоздев А. А. О краевых условиях для скачков. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 2, 1958.

А. Г. Багдоев, Э. М. Нерсисян

Определение давления на фронте ударной волны в полупространстве

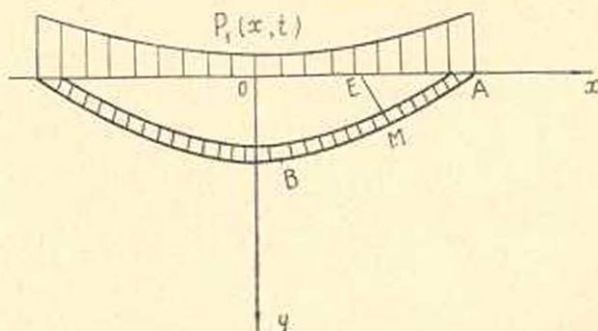
Рассматривается задача о распространении давления в сжимаемую жидкость, занимающую нижнее полупространство. Движение жидкости предполагается осесимметричным. Уравнение состояния жидкости политропическое

$$P=B(s) (\rho^{\gamma} - \rho_0^{\gamma}), \quad (1)$$

где ρ и P означают плотность и давление в жидкости, s — энтропию.

Обозначим через O точку возникновения давления на поверхности. Направим ось Ox по свободной поверхности жидкости, ось Oy — перпендикулярно вниз.

В настоящей работе вычисляется распределение давления на ударной волне, идущей в жидкости (линия AB на фиг. 1).



Фиг. 1.

В предположении малости движения жидкости этот вопрос разрешен в работе [2]. Здесь мы пользуемся следующим приближением, уточняющим линейную теорию.

Рассмотрим реальный случай, когда давление на поверхности резко падает со временем. Тогда основная часть давления в возмущенной жидкости будет сосредоточена в узкой прифронтной области (заштрихованная область фиг. 1).

Предположим, что до начала движения жидкость была однородной, хотя случай неоднородной жидкости получится столь же просто.

Для определения давления в точке M фронта, используем соотношение вдоль луча ME , полученное в работе К. Е. Губкина [1]

$$P = \alpha P_{ak}, \quad (2)$$

где α определяется по значению давления в точке E , P_{ak} соответствует линейному случаю [2]

$$P_{ak} = \frac{\alpha_0 \sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}}{L(t)} = \frac{\sqrt{-\frac{R'^3(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}}}{L(t)} \sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}, \quad (3)$$

$$\text{где } L(t) = \sqrt{t - t_0 - \frac{R'^3(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}}, \quad \cos \theta = \frac{a_0}{R'(t_0)},$$

a_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости, $x = R(t)$ — координата фронта на поверхности, t — время, t_0 определяется уравнением

$$t_0 = t - \frac{1}{a_0} \sqrt{[x - R(t_0)]^2 + y^2}. \quad (4)$$

Уравнение фронта бегущей ударной волны [1] в наших обозначениях запишется

$$\frac{x}{\cos \theta} = a_0(t - t') + \alpha \alpha_0 \frac{\gamma + 1}{2} \sqrt{\frac{R(t')}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}}} \int_{t'}^t \frac{dt}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} + f(x), \quad (5)$$

где $x_t = R(t') + a_0(t - t') \cos \theta$.

Здесь ρ_0 — начальная плотность жидкости, t' — момент прохождения фронта через точку E , $f(x)$ определяется из условия в точке E

$$\frac{R(t')}{\cos \theta} = a_0(\zeta - t') + \alpha \alpha_0 \frac{\gamma + 1}{2} \int_{t'}^{\zeta} \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} dt + f(x), \quad (6)$$

ζ — момент возникновения последовательных волн N_n [1] в точке E , определяемый из граничного условия [2]

$$P_1[R(t'), \zeta] = \frac{\alpha_0 \alpha}{L(\zeta)}, \quad (7)$$

$P_1(x, t)$ — распределение давления на поверхности за фронтом. Для исключения параметра α воспользуемся соотношением вдоль ударной волны (2.7) работы [1]

$$\frac{\alpha_0 \alpha^2}{\rho_0 a_0} \int_{R(t')}^x \frac{\sqrt{R(t')}}{\sqrt{x} L(t) \cos \theta} dx = \frac{4}{\gamma + 1} \int_{\zeta}^t \alpha f'(x) dx. \quad (8)$$

Если вспомнить значение L , (6) упрощается

$$f'(\zeta) = -a - P_1[R(t'), \zeta] \frac{\gamma+1}{2} \sqrt{R(t')} \frac{1}{a_0^2 \rho_0} - \frac{1}{V x_2} - \frac{d}{d\zeta} \{P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta)\} \times \\ \times \frac{\gamma+1}{2} \frac{\sqrt{R(t')}}{a_0 \rho_0} \left(\frac{2}{1 - a_0 \cos \theta} \ln \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(\zeta)}{\sqrt{R(t')} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t')} \right). \quad (9)$$

Если подставить $f(x)$ из (9) и x из (7) в (8), получим уравнение, определяющее ζ в функции координат точки M ударной волны.

Полученное значение ζ нужно подставить в значение давления вдоль луча в точке M , которое можно записать в виде

$$P = P_1[R(t'), \zeta] \frac{L(\zeta)}{L(t')} \sqrt{\frac{R(t')}{x}}. \quad (10)$$

Значение t' получится из уравнения $\zeta = t'$. Уравнение для t' получится, если вычесть (6) из (5).

$$\frac{x - R(t')}{\cos \theta} = a_0(t - t') + P_1[R(t'), t'] L(t') \frac{\gamma+1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0 L(t') \sqrt{x_t}} dt. \quad (11)$$

Если пренебречь вторым слагаемым в (11), имеем

$$t' = t_0.$$

Таким образом, в точке M давление определяется из (10), где ζ определяется в функции координат точки M с помощью соотношений (8), (7) и (9).

$$\frac{1}{\rho_0 a_0^2} L^2(\zeta) \{P_1[R(t'), \zeta]\}^2 \int_{R(t')}^x \frac{\sqrt{R(t')}}{\sqrt{x \cos \theta} \sqrt{\frac{x - R(t_0)}{a_0 \cos \theta} - \frac{R^2(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}} dx = \\ = \frac{4}{\gamma+1} \int_{\zeta}^t P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta) f'(\zeta) d\zeta. \quad (12)$$

Все соотношения, полученные в работе [1], выведены для идеального газа; они остаются верными и для среды с уравнением состояния (1), поскольку исходные уравнения, из которых они выводятся, в обоих случаях совпадают.

Однако, при вычислении скорости звука a_0 нужно пользоваться уже формулой

$$a_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P \rho^{-1}}{\rho^1 - \rho_0^1}.$$

Уравнение (12) можно записать в более простом виде

$$L^2(\zeta) P_1^2[R(t'), \zeta] \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0^2 \cos \theta} \left\{ 2 \sqrt{a_0 \cos \theta} \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t)}{\sqrt{R(t')} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t')} \right\} =$$

$$= \frac{4}{\gamma+1} \int_0^t P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta) f'(\zeta) d\zeta. \quad (12')$$

Для иллюстрации полученных формул были проведены расчеты для частного закона давления на поверхности (достаточно резко падающее со временем давление)

$$P_1(x, t) = (3 - 50t)^2 \kappa z / \text{см}^2,$$

$$R(t) = 340(3t - 25t^2),$$

для жидкости с параметрами $\gamma=7$, $a_0=200 \text{ м/сек}$; $\rho=100 \frac{\kappa z \text{ сек}^2}{\text{м}^4}$ в момент времени $0,01 \text{ сек}$.

Результаты расчетов по формуле (3) дают давление на ударной волне для акустического случая.

Результаты расчетов по формулам (9), (10) и (12) дают давление на ударной волне по уточненным формулам.

Таблица 1

x	P_1	P_{ak}	P	y
9,35	6,25	6,25	6,25	0
8	6,67359	6,63014	6,61357	0,32091
7	6,97932	6,90438	6,86112	0,550195
6	7,27893	7,17531	7,12437	0,77777
5	7,59421	7,40864	7,31014	0,99907
4	7,90054	7,61813	7,55735	1,21525
3	8,20611	7,76346	7,70017	1,42745
2	8,51642	7,74611	7,68362	1,6392
1	8,81532	6,96137	6,92622	1,83895
0,5	8,96721	4,22587	4,2060	1,93963

В таблице 1 $y=f(x, t)$ является уравнением ударной волны при $t=0,01 \text{ сек}$.

Как видно из таблицы 1, при $t=0,01 \text{ сек}$, нелинейные добавки будут незначительными и, следовательно, линейная теория достаточно хорошо описывает явление. Очевидно, что для больших моментов времени ($t \sim 0,06$), когда давление достаточно затухнет, нелинейные добавки станут существенными.

Например, при $t=0,04$ в точках $x=2$ имеем $P_{ak}=4,0915$, $P=3,6522$. Здесь нелинейная добавка порядка $10^0/0$.

Для более резко падающих давлений нелинейные добавки будут еще значительнее.

Ա. Գ. Բագդոևի, է. Մ. Ներսիսյան

ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՀԱՐՎԱԾՈՂ ԱԼԻՔԻ ՃԱԿԱՏՈՒՄ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ աշխատությունում դիտարկվում է ստորին կիսատարածությունը զրադեցրած սեղմվող հեղուկի մեջ ճնշման տարածման խնդիրը:

Հաշվվում է ճնշման բաշխումը հեղուկի մեջ տարածվող հարվածող ալիքի վրա:

Նույն հարցը հեղուկի փոքր շարժումների համար լուծված է [2] աշխատությունում: Այստեղ մենք որոշում ենք հաջորդ մոտավորությունը, որը ճշտում է տեսությունը:

Աշխատությունում բերվում են հաշվման արդյունքները, որոնք ցույց են տալիս ոչ-դժախն ֆակտորների ազդեցությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, т. XXII, вып. 4 1958.
2. Багдоев А. Г. Распространение давления в упругом полупространстве. ДАН Арм. ССР, т. XXVIII, № 2, 1959.

П. А. Безирганян, А. Г. Акритов

Зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от формы отражающего кристалла

В работах [1] и [2] решена задача динамической теории интерференции рентгеновских лучей в случаях ограниченного непоглощающего и поглощающего кристаллов.

Однако, практически важное значение имеет и такой случай, когда кристалл в двух направлениях ограничен, а в одном направлении практически неограничен. Такие случаи довольно часто встречаются среди органических кристаллов, когда размеры в одном направлении так велики (относительно первой зоны Френеля), что практически можно считать неограниченными.

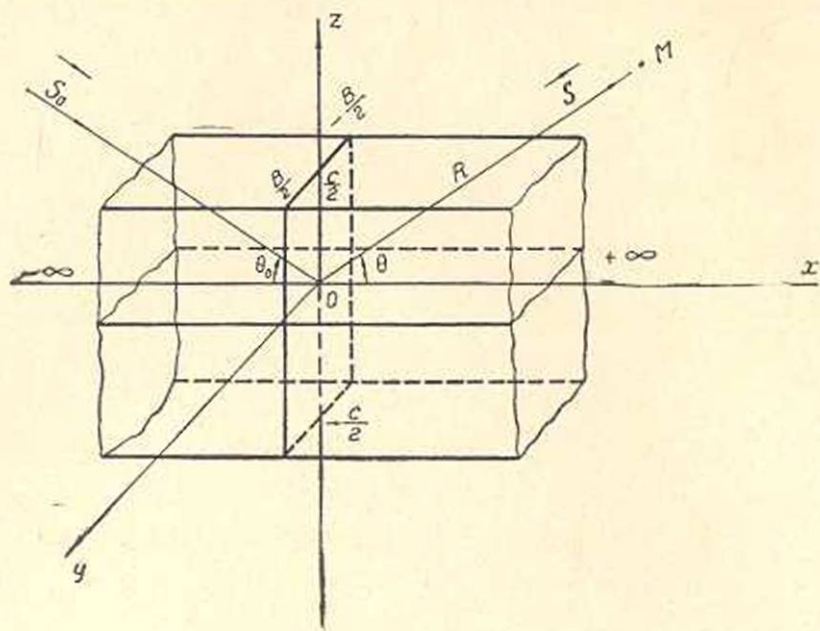
В настоящей работе решена динамическая задача интерференции для двух случаев непоглощающего кристалла. В одном случае кристаллы неограничены в направлении x , а в другом — в направлении y (см. фиг. 1 и 2).

Первый случай

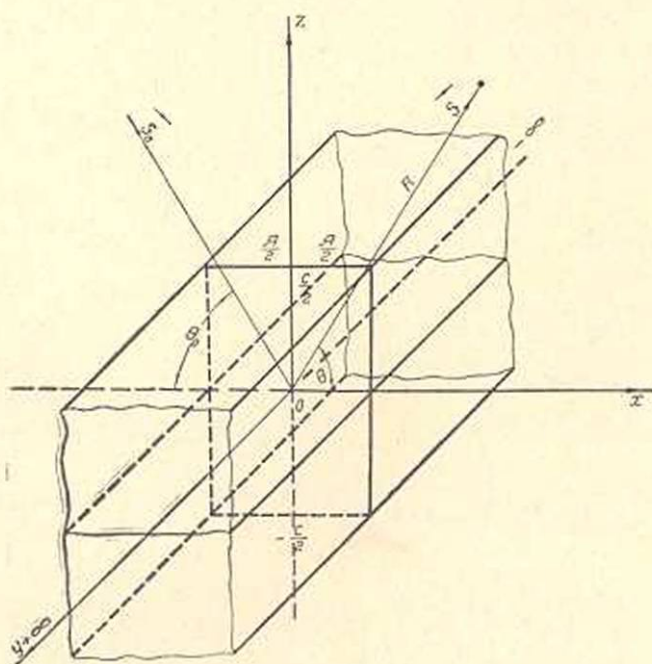
Пусть плоская монохроматическая волна, как и в случаях, рассмотренных в [1] и [2], падает на кристаллы в направлении единичного вектора s_0 (фиг. 1) и точка наблюдения M из начала координат видна в направлении s . Размеры кристалла в направлениях y и z соответственно равны B и C , а в направлении x неограничены ($-\infty \leq x \leq \infty$).

В этом случае волна отраженная от плоскости кристалла, совпадающей с плоскостью xOy , будет

$$G = \frac{ne^2}{Rmc^2} f(2h, k) \exp[ik(ct - R)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ik \frac{x^2 \sin^2 \theta}{2R}\right) dx \times \\ \times \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \exp\left(-ik \frac{y^2}{2R}\right) dy.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Интеграл с бесконечными пределами дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ik \frac{\sin^2 \theta}{2R} x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi R}{k \sin^2 \theta}} (1-i).$$

Следовательно, после простых преобразований, для амплитуды волны, отраженной от плоскости кристалла, совпадающей с плоскостью xOy , получим

$$G_0 = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2 \sin \theta} f(2\theta, k) [1-i] \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} y^2\right) dy,$$

вещественная и мнимая части которой выражаются следующим образом

$$G'_0 = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2 \sin \theta} f(2\theta, k) \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right],$$

$$G''_0 = -\frac{ne^2\lambda}{2mc^2 \sin \theta} f(2\theta, k) \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right],$$

где $G_0 = G'_0 + iG''_0$.

Вещественная и мнимая части амплитуды волны, отраженной от этой же плоскости в направлении падающей волны, будут

$$\Sigma'_0 = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2 \sin \theta} f(0, k) \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right],$$

$$\Sigma''_0 = -\frac{ne^2\lambda}{2mc^2 \sin \theta} f(0, k) \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right],$$

где $\Sigma_0 = \Sigma'_0 + i\Sigma''_0$.

Для поглощающего кристалла в этом случае получим

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{G'_0 - iG''_0}{i\Sigma'_0 - \Sigma''_0 + dk(\sin \theta - \sin \theta_0) \pm \sqrt{[i\Sigma'_0 - \Sigma''_0 + dk(\sin \theta - \sin \theta_0)]^2 - (iG'_0 - G''_0)^2}}, \quad (1)$$

где S_0 —амплитуда отраженной от кристалла волны на поверхности кристалла,

T_0 —амплитуда падающей волны на поверхности кристалла,

d —межплоскостное расстояние отражающих плоскостей,

θ_0 —угол, удовлетворяющий уравнению Вульфа-Брегга,

θ —угол, соответствующий исправленной формуле Вульфа-Брегга.

Имея в виду, что коэффициент преломления рентгеновских лучей очень мало отличается от единицы, из (1) получим

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{G_0^* - iG_0'}{i\Sigma_0' - \Sigma_0'' + dk(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 \pm V[i\Sigma_0' - \Sigma_0'' + dk(\theta - \theta_0)\cos\theta_0]^2 - (iG_0' - G_0'')^2}.$$

При отражении рентгеновских лучей $M_0K\alpha_1$ от кристалла кальцита [плоскости (211)], для вещественных и мнимых частей амплитуд отраженной волны получим

$$\begin{aligned} G_0' &= \frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin\theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right] \times \\ &\quad \times [f_{Ca}(2\theta, k) + f_C(2\theta, k) + f_O(2\theta, k)], \\ G_0'' &= -\frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin\theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right] \times \\ &\quad \times [f_{Ca}(2\theta, k) + f_C(2\theta, k) + f_O(2\theta, k)], \\ \Sigma_0' &= \frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin\theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right] \times \\ &\quad \times [f_{Ca}(0, k) + f_C(0, k) + f_O(0, k)], \\ \Sigma_0'' &= -\frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin\theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \cdot B} \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \right] \times \\ &\quad \times [f_{Ca}(0, k) + f_C(0, k) + f_O(0, k)], \end{aligned}$$

где f_{Ca} , f_C и f_O — соответственно атомные факторы кальция, углерода и кислорода.

Относительная интенсивность отраженной волны в этом случае, как и в работах [1] и [2], выражается формулой

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{|G_0'|^2 + |G_0''|^2}{U + V + W}, \quad (2)$$

где $U = [dk(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0'']^2 + [\Sigma_0']^2$,

$W = \left\{ 2\Sigma_0' [dk(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0'']^2 + 2G_0' G_0''^2 + \right.$

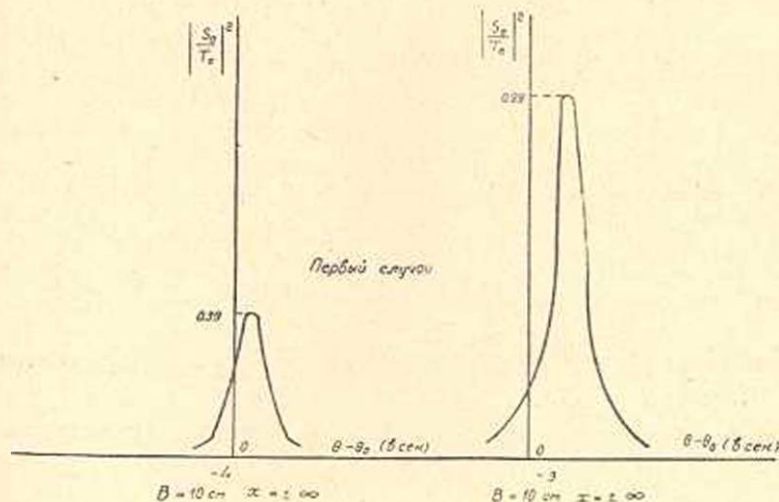
$\left. + \{ [dk(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0'']^2 + (G_0')^2 - (\Sigma_0')^2 - (G_0'')^2 \}^{1/2} \right\}$,

$V = 2\sqrt{U \cdot W} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$,

где φ_1 и φ_2 определяются из выражений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\Sigma_0'}{dk(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 - \Sigma_0'}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi_2 &= \frac{2\Sigma_0'[dk(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 - \Sigma_0'] + 2G_0' G_0''}{[dk(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 - \Sigma_0']^2 + (G_0')^2 - (\Sigma_0')^2 - (G_0'')^2}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений в случае отражения рентгеновских лучей $M\alpha K\alpha_1$ от кристалла кальцита представлены на фиг. 3 и 4.



Фиг. 3.

Фиг. 4.

Второй случай

Во втором случае (фиг. 2), т. е. когда размеры кристалла в направлениях x и z соответственно равны A и C , а в направлении y неограничены ($-\infty \leq y \leq \infty$), для волны, отраженной от плоскости кристалла совпадающей с плоскостью xOy , получим

$$G = \frac{ne^2\lambda}{2mc^2 \sin \theta} f(2\theta, k) [i - 1] \exp[ik(ct - R)] \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \sin \theta \cdot A} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} x^2\right) dx.$$

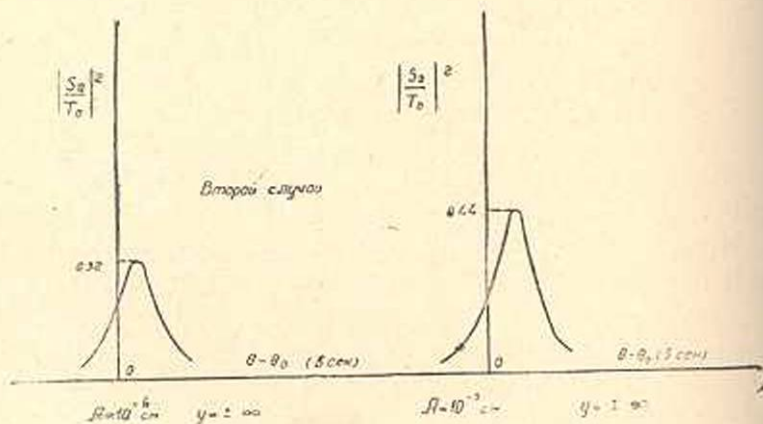
Следовательно, в этом случае вещественные и мнимые части амплитуд могут выражаться следующими формулами

$$\begin{aligned} G_0' &= \frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin \theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \sin \theta \cdot A} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} \sin \theta \cdot A} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right] \times \\ &\times [f_{Ca}(2\theta, k) + f_C(2\theta, k) + f_0(2\theta, k)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_0^* &= -\frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin \theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R} \sin \theta} \cdot A} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R} \sin \theta} \cdot A} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right] \times \\
 &\quad \times [f_{ca}(2\theta, k) + f_c(2\theta, k) + f_0(2\theta, k)], \\
 \Sigma_0^* &= \frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin \theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R} \sin \theta} \cdot A} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R} \sin \theta} \cdot A} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right] \times \\
 &\quad \times [f_{ca}(0, k) + f_c(0, k) + f_0(0, k)], \\
 \Sigma_0^* &= -\frac{ne^2\lambda}{mc^2 \sin \theta} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R} \sin \theta} \cdot A} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\lambda R} \sin \theta} \cdot A} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right] \times \\
 &\quad \times [f_{ca}(0, k) + f_c(0, k) + f_0(0, k)].
 \end{aligned}$$

Относительная интенсивность и в этом случае выражается формулой (2).

Результаты вычислений для второго случая представлены на фиг. 5 и 6.



Фиг. 5.

Фиг. 6.

Из результатов приведенных расчетов можно сделать следующий важный вывод: в случае ограниченного кристалла интенсивность волн, отраженных от данной системы плоскостей при данных углах падения и отражения, зависит от ориентировки плоскости падения. К этому выводу не могут привести ни кинематическая теория интерференции рентгеновских лучей, ни динамические теории Дарвина и Эвальда—Лауэ. Действительно, как известно, в кинематической теории ин-

тенсивность волн, отраженных от ограниченной двумерной атомной решетки, выражается формулой

$$J = \frac{f^2}{R^2} \frac{\sin^2\left(M_1 \frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(M_2 \frac{B}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)},$$

где M_1 —число атомов вдоль одной оси и M_2 —число атомов вдоль другой оси. В этом случае интенсивность дифракционного максимума не зависит (при данном угле падения) от того, совпадает ли с первой или со второй осью проекция направления падающего пучка на отражающую плоскость.

А динамические теории Дарвина и Эвальда—Лауэ рассматривают только неограниченные кристаллы, следовательно различные случаи ориентировки плоскости падения при данном угле падения они не могут различать.

Применяемый нами динамический метод интерференции для ограниченных кристаллов дает возможность установить зависимость интенсивности волн, отраженных от данной системы плоскостей при данных углах падения и отражения, от ориентировки плоскости падения.

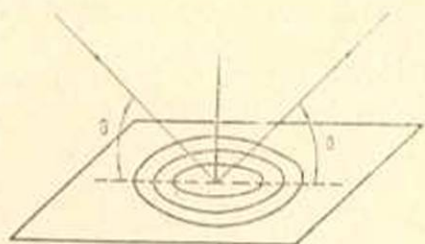
Легко показать, что в этом случае зоны Френеля имеют вид эллипсов (см. фиг. 7), большие оси которых направлены по проекции направления падающего пучка на отражающую плоскость. Следовательно, при ограниченном кристалле, когда размеры кристалла меньше, чем размеры первой зоны Френеля, не безразлично как ориентирована большая ось эллипса относительно кристалла.

В рассмотренном первом случае кристалл в направлении большой оси эллипса неограничен, а в направлении малой оси—ограничен, во втором случае, наоборот, в направлении большой оси кристалл ограничен и размер его в этом направлении меньше, чем большая ось эллипса.

Этим и объясняется тот факт, что в первом случае интенсивность отражения (фиг. 3 и 4) больше, чем во втором случае (фиг. 5 и 6), так как во втором случае первая зона действует не полностью—эллипс первой зоны не помещается полностью на отражающей плоскости кристалла.

Этот результат особенно важен для волокнистых веществ, размеры кристаллов которых в одном направлении много больше, чем в других направлениях.

В этом случае интенсивность отраженных волн при данных углах падения и отражения зависит от ориентировки плоскости падения относительно кристаллографических осей отражающего кристалла.



Фиг. 7.

Պ. Ս. Բեզիրգանյան, Ա. Գ. Ակրիտով

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁԱԾ ԱԼԻԲԵՐԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ
ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՆՈՂ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ՁԵՎԻՑ

Ա Ս Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է ինտերֆերենցիայի զինամիկ խնդրի երկու դեպք: Մի դեպքում բյուրեղն անսահմանափակ է ուղղությամբ, իսկ մյուս դեպքում՝ y ուղղությամբ (ֆիգ. 1, 2): Քննարկման արդյունքներից արվում է հետևյալ հզորացությունը:

Անկման և անդրադարձման տվյալ անկյունների դեպքում, սահմանափակ բյուրեղի հարթությունների տվյալ սխեմից անդրադարձած ռենտգենյան ճառագայթների ինտենսիվությունը կախված է անկման հարթության զիջից:

Այդ հզորացությունը նոր է և չի բխում ոչ կինեմատիկ տեսությունից և ոչ էլ Դարվինի ու Էվալդի-Լաուեի տեսությունից:

Քննարկված դեպքից առաջինում անդրադարձած ռենտգենյան ճառագայթների ինտենսիվությունն ավելի մեծ է, քան երկրորդ դեպքում: Դա բացատրվում է նրանով, որ ֆրենկլյան զոնաների մեծ առանցքներն ուղղված են անդրադարձնող հարթությունների վրա ընկնող ճառագայթի պրոյեկցիայի ուղղությամբ: Այդ պատճառով էլ, երբ բյուրեղը սահմանափակ է (բյուրեղի չափերն առաջին զոնայի չափերից փոքր են), առաջին դեպքում գործում է առաջին զոնայի ավելի մեծ մասը, քան երկրորդ դեպքում:

Այդ հզորացությունը մեծ նշանակություն ունի արնպիսի բյուրեղների ուսումնասիրման գործում, որոնց չափերը տարբեր ուղղությամբ միևնույն կարգի չեն:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Безирганиян П. А. Динамическая теория интерференции рентгеновских лучей для конечного кристалла. ДАН Арм. ССР, том XXIX, № 5, 1959.
2. Безирганиян П. А. Динамическая теория интерференции рентгеновских лучей для конечного кристалла (случай поглощающего кристалла). ДАН Арм. ССР, в печати.

Ереванский государственный университет,
Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 24 IX 1959

Г. М. Гарибян, О. С. Мержелян

Излучение заряда, пролетающего параллельно границе раздела сред

Задача об излучении заряженной частицы, пролетающей параллельно границе раздела двух сред [1]-[4] решена методом, предложенным [5], [6] одним из авторов. Использование этого метода позволяет весьма простым способом решить эту задачу и получить некоторые новые результаты, относящиеся в основном к излучению в той среде, где движется сама частица.

1. Поля излучения в общем случае

Пусть заряд e пролетает на расстоянии a от границы раздела двух сред, находясь в среде с диэлектрической постоянной ϵ_1 , а вторая среда обладает диэлектрической постоянной ϵ_2 ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Граница раздела сред есть плоскость $z = a$, а координаты заряда равны $x = z = 0$, $y = vt$. Поле во второй среде будет решением однородных уравнений Максвелла, тогда как в первой среде оно будет слагаться из решений неоднородных и однородных уравнений. Решениями неоднородных уравнений являются поля (см., например, [7], [5])

$$E(r, t) = \int E(k) e^{i(kr - \omega t)} dk \text{ и т. п.,}$$

$$E(k) = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\frac{\omega}{c^2} \epsilon_1 v - k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1},$$

$$H(k) = \frac{\epsilon_1}{c} [v, E(k)],$$
(1)

где $m = kv = k_y v$, $dk = dk_x \frac{d\omega}{v} dk_z$. Решения однородных уравнений будем искать в виде

$$E_{1,2}(r, t) = \int E_{1,2}(k) e^{i(k_x x + \frac{\omega}{v} y + \omega_{1,2} z - \omega t)} dk \text{ и т. п.,}$$
(2)

причем $\alpha_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 \varepsilon_{1,2}^2 - 1) - k_x^2$. Из физических соображений очевидно (см. [5]), что у α_1 действительная и мнимая части должны быть отрицательны, а у α_2 — положительны. Если обозначить через n_x, n_y, n_z орты координатных осей, то из однородных уравнений Максвелла получим

$$H_{1,2}(k) = \frac{c}{\omega} \left(n_x k_x + n_y \frac{\omega}{v} + n_z \alpha_{1,2}, E'_{1,2}(k) \right), \quad (3)$$

а также условие поперечности полей

$$k_x E'_{1,2x}(k) + \frac{\omega}{v} E'_{1,2y}(k) + \alpha_{1,2} E'_{1,2z}(k) = 0. \quad (4)$$

Фурье-компоненты полей излучения определяются из граничных условий для полных полей при $z=a$ и имеют вид

$$\begin{aligned} E'_{1x}(k) &= k_x \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha_1 + k_z - \alpha_1 - \alpha_2 \right) A_1, \\ E'_{1z}(k) &= \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha_1^2 - k_z \alpha_2 \right) A_1, \\ E'_{2x}(k) &= k_x (k_z - \alpha_1) A_2, \\ E'_{2z}(k) &= \alpha_1 (\alpha_1 - k_z) A_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A_{1,2} = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{e^{i(k_z - \alpha_{1,2})a}}{\left(\varepsilon_2 \alpha_1 - \varepsilon_1 \alpha_2 \right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)}.$$

Для определения этих компонент были использованы граничные условия как для электрических, так и для магнитных полей в отличие от симметричных задач, где достаточно воспользоваться только условиями для электрических полей (см., например, [5], [8]). Это обстоятельство связано с тем, что сейчас магнитное поле имеет, как это видно из формул (3), (5), также и составляющую вдоль направления движения частицы.

Для получения частотного спектра полей излучения надо провести в формулах (2) с компонентами (5) интегрирование по k_z и k_x . Интегрирование по k_z в полях излучения сводится для обеих сред к взятию вычета в точке

$$k_z = + \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_{1,2}^2 - k_x^2}, \quad \text{где} \quad \xi_{1,2}^2 = \beta^2 \varepsilon_{1,2} - 1.$$

Интегрирование по k_x необходимо провести отдельно для каждой из сред.

2. Поля излучения во второй среде

Интегрирование по k_x произведем методом перевала, что даст нам поля на больших расстояниях от границы раздела сред. Обозначим через ρ расстояние от проекции траектории частицы на плоскость раздела сред до исследуемой точки поля:

$$z-a=\rho \cos \theta, \quad x=\rho \sin \theta.$$

Интегрирование проведем на примере E'_{2z} , которое теперь имеет вид

$$E'_{2z} = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_1^2 - k_x^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_1^2 - k_x^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_2^2 - k_x^2}} e^{i \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_1^2 - k_x^2} a} e^{i f(k_x) \rho} dk_x d\omega, \quad (6)$$

где $f(k_x) = ik_x \sin \theta + i \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_2^2 - k_x^2} \cos \theta$. Точкой перевала будет $k_x = \frac{\omega}{v} \xi_2 \sin \theta$ (под $\xi_{1,2}$ мы будем понимать положительное значение квадратного корня). Дальнейшие действия аналогичны проведенным в [5] и в результате получим

$$E'_{2z} = \frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_2} \frac{\cos \theta \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta}}{\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta}} e^{i \frac{\omega}{v} \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta} a} \times \\ \times e^{i \frac{\omega}{v} (y + \xi_2 \rho - vt)} d\omega \quad (7)$$

для $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta > 0$ и

$$E'_{2z} = \frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_2} \frac{\cos \theta \frac{i|\omega|}{\omega} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2}}{\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \frac{i|\omega|}{\omega} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2}} e^{-\frac{|\omega|}{v} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2} a} \times \\ \times e^{i \frac{\omega}{v} (y + \xi_2 \rho - vt)} d\omega \quad (8)$$

для $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta < 0$. Приведем также формулы для остальных компонент полей при $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta > 0$

$$E'_{2x} = \frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \xi_1 \sin \theta \cdot \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \gamma_2 a + \gamma_2} d\omega, \\ E'_{2y} = -\frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \xi_1 \eta \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \gamma_2 a + \gamma_2} d\omega, \quad (9)$$

$$H'_{2x} = \frac{ec}{v^2} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 (\xi_2^2 \eta \cos \theta + \nu_2) \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \nu_2 a + \gamma_2} d\omega,$$

$$H'_{2y} = \frac{ec}{v^2} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \xi_2 (\xi_2 \cos \theta - \nu_2) \sin \theta \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \nu_2 a + \gamma_2} d\omega.$$

При этом были введены обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_2}}{\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \nu_2}, & \gamma_2 &= i \frac{\omega}{v} (y + \xi_2 z - vt), \\ \eta &= \xi_2 \sin^2 \theta + \nu_2 \cos \theta, & \nu_2 &= \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае когда $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta < 0$ формулы для полей получатся заменой $\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta} \rightarrow i \frac{|\omega|}{\omega} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2}$. Поля задаваемые формулами (7)–(9) имеют место для $\rho \gg \lambda / \xi_2 \tan^2 \theta$, где λ — длина волны излучения, деленная на 2π . Это ограничение связано с использованием метода перевала.

Вычислим количество энергии, которое пройдет за все время пролета частицы через цилиндрическую полосу единичной ширины и радиуса ρ , расположенную во второй среде

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [E_x H_y]_{\rho} \cdot \rho d\theta dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (E_x H_y - E_y H_x) \frac{\rho d\theta dt}{\cos \theta} \quad (11)$$

В области, где $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta > 0$ получим

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{2e^2 c^2}{\pi v^4} \int_{\xi_2^2 > 1} d\omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(\xi_1^2 + \eta^2 \xi_2^2) \xi_2^2}{(\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \nu_2)^2} \cos^2 \theta d\theta. \quad (12)$$

В области же, где $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta < 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dy} &= \frac{2e^2 c^2}{\pi v^4} \int_{\xi_2^2 > 1} d\omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_2^2 [\xi_2^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin^2 \theta - \varepsilon_2 \xi_1^2] \xi_2^2 \cos^2 \theta}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cos^2 \theta + \xi_2^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1 \cos^2 \theta]} \times \\ &\times e^{-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \xi_2^2 - \xi_1^2 \cos^2 \theta}} d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

При выводе формул (12) и (13) полагалось $\xi_2^2 > 0$. В противном

случае, как видно из (7)–(9), излучение отсутствует. Кроме того, для простоты мы полагали среды прозрачными. Формулы (12) и (13) были впервые получены Пафомовым [3].

Для анализа полученных формул удобно рассмотреть два отдельных случая. В первом случае будем считать $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Тогда очевидно, что $\xi_1^2 < \xi_2^2$ и могут иметь место следующие случаи:

а) $\xi_1^2 < 0$, $\xi_2^2 > 0$, т. е. первая среда является нечеренковской, а вторая — черенковской средой. В этом случае для вектора Пойтинга имеет место формула (13), которая описывает черенковское излучение генерированное частицей во второй среде. На возможность такого эффекта впервые указали Гинзбург и Франк [8];

б) $\xi_1^2 > 0$, $\xi_2^2 > 0$, т. е. обе среды являются черенковскими. В этом случае для углов $\sin^2 \theta < \xi_1^2 / \xi_2^2$ будет иметь место формула (12), которая описывает черенковское излучение, образовавшееся в первой среде и прошедшее во вторую. Это следует из того, что формула (12) не зависит от α и помимо этого при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ она переходит в формулу Тамма и Франка. Для углов же $\sin^2 \theta > \xi_1^2 / \xi_2^2$ будет справедлива формула (13), которая дает черенковское излучение, образовавшееся во второй среде. Оба этих потока движутся под черенковскими углами характерными для второй среды, что видно из формул (7)–(9).

Тот факт, что излучение, образовавшееся в первой среде и прошедшее во вторую, движется под черенковским углом второй среды получается также из следующих простых соображений. Из закона

преломления имеем $\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$, откуда имея в виду, что $\cos \theta_1 = \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon_1}}$

получаем

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (14)$$

Во втором случае, когда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, имеем $\xi_1^2 > \xi_2^2$ и формула (13) не имеет места, т. е. во второй среде излучение не генерируется.

При этом оказывается возможным только случай $\xi_1^2 > 0$, $\xi_2^2 > 0$ описываемый формулой (12), т. е. во второй среде распространяется только излучение, пришедшее из первой.

Отмеченный выше факт, что при $\xi_2^2 < 0$ во второй среде не будет излучения даже если первая среда черенковская, легко понять из формулы (14), которая показывает, что излучение, идущее из первой среды, испытывает на границе полное внутреннее отражение.

3. Поля в первой среде

Для получения частотного спектра полей необходимо произвести интегрирование по переменной k_z , которое производится аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе. Введем расстояние ρ от траектории частицы до исследуемой точки поля: $x = \rho \sin \theta$, $z = -\rho \cos \theta$.

Так как в первой среде поле является суммой решений неоднородных и однородных уравнений Максвелла, то приведем сначала решения неоднородных уравнений на больших расстояниях

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon_1} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_1} \sin\theta e^{\gamma_1} d\omega, \\ E_y &= -\frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi_1}{\varepsilon_1} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_1} e^{\gamma_1} d\omega, \\ E_z &= -E_x \operatorname{ctg} \theta, \quad H = \beta \varepsilon_1 [n_y, E], \end{aligned} \quad (15)$$

где ε_1 в последней формуле надо понимать внесенной под знак интеграла по частотам, а γ_1 получается из γ_2 [см. формулу (10)] заменой индексов 1 и 2.

Для полей излучения получим выражения

$$\begin{aligned} E'_{1z} &= \frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 (\varepsilon_2 \xi_1 \cos\theta - \varepsilon_1 \nu_1) \cos\theta e^{\gamma_1 + 2i\frac{\omega}{v} a \cos\theta} d\omega, \\ E'_{1x} &= -\frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 (\varepsilon_2 \xi_1 \cos\theta + \varepsilon_1 \nu_1 - 2\varepsilon_1 \xi_1 \cos\theta) \sin\theta e^{\gamma_1 + 2i\frac{\omega}{v} a \cos\theta} d\omega, \quad (16) \\ E'_{1y} &= \frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 \xi_1 (\varepsilon_2 \xi_1 \cos\theta + \varepsilon_1 \nu_1 (\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 2\varepsilon_1 \xi_1 \cos\theta \cdot \sin^2\theta) \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 + 2i\frac{\omega}{v} a \cos\theta} d\omega, \end{aligned}$$

где ξ_1 и ν_1 получаются из формул (10) заменой индексов 1 и 2. Формулы написаны для случая $\xi_2^2 - \xi_1^2 \sin^2\theta > 0$. В обратном случае надо произвести замену, указанную в предыдущем пункте.

Наконец, для магнитных полей мы можем написать равенства

$$\begin{aligned} H'_{1x} &= \frac{1}{\beta} (E'_{1z} + \xi_1 \cos\theta E'_{1y}), \\ H'_{1y} &= -\frac{1}{\beta} (\xi_1 \cos\theta E'_{1x} + \xi_1 \sin\theta \cdot E'_{1z}), \\ H'_{1z} &= \frac{1}{\beta} (\xi_1 \sin\theta E'_{1y} - E'_{1x}). \end{aligned} \quad (17)$$

В этих формулах величину ξ_1 также надо понимать внесенной под знак интеграла по частотам.

Поток электромагнитной энергии в первой среде будет складываться из потока черенковского поля, непосредственно созданного частицей, того же потока, но отраженного от границы раздела сред и их ин-

терференции. Формула для полного потока задается выражением (11), в котором под полями надо понимать сумму (15)–(17). Приведем эту формулу для того случая, когда вторая среда является идеальным проводником ($\varepsilon_2 = \infty$)

$$\frac{dw}{dy} = \frac{e^2}{2c^2\pi} \int_{\beta^2 \varepsilon_1 > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_1}\right) \left(2 - e^{-2i\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta} - e^{2i\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta}\right) \omega d\omega d\theta. \quad (18)$$

Из последней формулы видно, что в случае прозрачных сред для данных a и θ существуют также частоты, определяемые соотношением $2\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta = (2n+1)\pi$, интенсивность которых учетверяется по сравнению с интенсивностью в однородной среде.

В то же время для частот ω таких, что $2\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta = 2n\pi$, соответствующая интенсивность равна нулю за счет интерференции с отраженным излучением. Что же касается отмеченного выше увеличения интенсивности, то оно происходит как за счет отраженного излучения, так и за счет частотного перераспределения интенсивности вследствие интерференции.

В заключение отметим, что к рассмотренной нами задаче можно подойти также как к частному случаю более общей задачи о наклонном падении заряда на границу раздела двух диэлектриков [6] (положив $v_z = 0$). Однако простое сравнение трехмерных фурье-компонент задачи, полученных указанными выше двумя разными способами, показывает, что они между собой не совпадают. Как нетрудно видеть, это связано с тем, что в задаче рассмотренной в [6] при сшивке полей необходимо было учитывать решения неоднородных уравнений Максвелла в каждой из сред. Совпадение имеет место только при сравнении проинтегрированных по k_x и k_z выражений для полных полей, и таким образом оба подхода к задаче приводят к одинаковому результату.

Физический институт АН Армянской ССР,
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 I 1960

Գ. Մ. Ղափրյան, Հ. Ս. Մերգելյան

ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՆ ԶՈՒԳԱՆԵՐԻ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԻԻ ՃԱՌԱԳԱՅՔՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է միջավայրերի բաժանման սահմանին դուրս հեռ շարժվող լիցքի ճառագայթումը: Ստացված են բանաձևեր՝ դաշտերի և էներգիայի հոսքի համար հրկրորդ միջավայրում, ինչպես նաև հետազոտված են

էլեկտրական և մագնիսական դաշտերն առաջին միջավայրում: Յուր է արված, որ արդյունքները կարող են ստացվել որպես ավելի ընդհանուր խնդրի մասնավոր դեպք:

ЛИТЕРАТУРА

1. Danos M. Излучение заряда протяженными электронными пучками. Journ. Appl. Phys., 26, 2, 1955. (Русский перевод см. Миллиметровые и субмиллиметровые волны. Москва — 1959).
2. Linhart J. G. Излучение Черенкова электронами, движущимися параллельно границе диэлектрика. Journ. Appl. Phys., 26, 527, 1955 (Русский перевод см. там же).
3. Пафомов В. Е. Излучение точечного заряда, летящего вдоль границы раздела двух сред. ЖЭТФ, 32, 610, 1957.
4. Ситенко А. Г., Ткалич В. С. Об эффекте Черенкова при движении заряда над границей раздела двух сред. ЖЭТФ, 29, 1074, 1959.
5. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения. ЖЭТФ, 33, 1403, 1957.
6. Гарибян Г. М. К теории переходных эффектов в электродинамике. Изв. АН Арм. ССР, 11, № 4, 1958.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Москва, 1957.
8. Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение электрона и атома, движущихся по оси канала в плотной среде. ДАН СССР, 56, 699, 1947.

ФИЗИКА

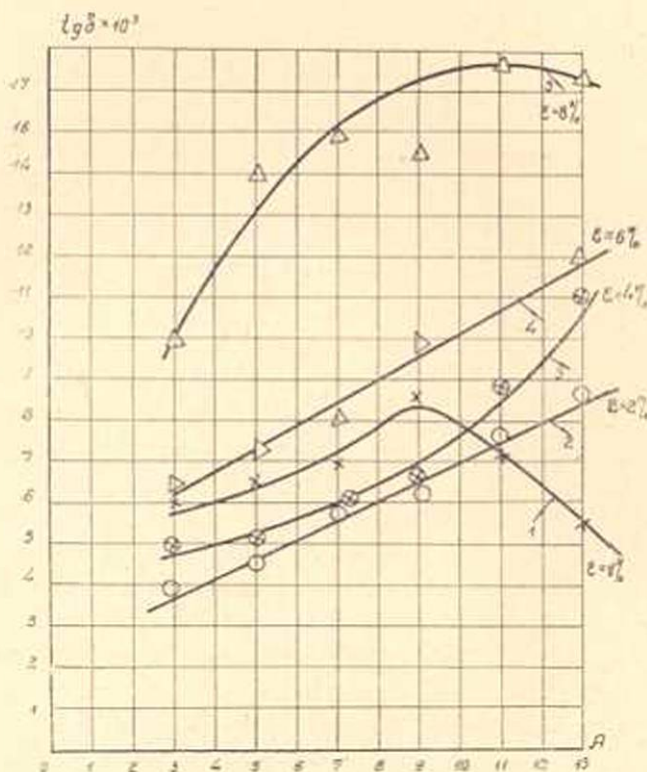
А. А. Дургарян, А. М. Мецбурян

Внутреннее трение алюминия в зависимости от амплитуды колебания, предварительной пластической деформации и времени

Исследования зависимости внутреннего трения от амплитуды колебаний для меди Ридом [1], монокристаллов олова и висмута, а также предварительно пластически деформированной меди Швидковским и Дургаряном [2], показали, что внутреннее трение ($\text{tg} \delta$) зависит от амплитуды колебания нелинейно; в этой зависимости обнаружено также явление гистерезиса [2]. Установлено, что $\text{tg} \delta$ в зависимости от предварительной пластической деформации имеет максимум [2], [3], [4]. Эти измерения проводились на частотах порядка нескольких десятков килогерц. Характер упомянутых явлений в теории дислокаций объясняется двумя механизмами. Во-первых, вязким механизмом внутреннего трения (Виртман и Келер [3]), на основании которого получается, что максимум зависимости внутреннего трения от предварительной пластической деформации есть функция частоты; при этом с увеличением частоты максимум смещается в область больших деформаций, что подтверждается в ряде экспериментальных работ [2, 3, 4], проведенных с частотами в несколько десятков килогерц.

Второй механизм теории дислокаций, обусловленный свойствами петли гистерезиса статической диаграммы напряжение—деформация, устанавливает, что зависимость внутреннего трения от предварительной пластической деформации не является функцией частоты. Не зависит от частоты также и нелинейный характер амплитудной зависимости [1, 2, 5]. Таким образом, экспериментально установленные факты, при измерении на высоких частотах $\text{tg} \delta$ в зависимости от предварительной пластической деформации, находятся в согласии с теорией, базирующейся на вязком механизме. Однако, соответствующие измерения на низких частотах, насколько нам известно, не проводились. Амплитудная зависимость $\text{tg} \delta$ при высоких частотах [1, 2] объясняется гистерезисным механизмом, но и в этой области почти отсутствуют измерения на низких частотах.

В настоящей работе приводятся результаты исследования зависимости $\operatorname{tg} \delta$ от амплитуды колебания и от величины предварительной пластической деформации (кручением) на частотах ~ 1 гц, методом крутильных колебаний [8].



Фиг. 1. Зависимость внутреннего трения A' от амплитуды колебаний. Кривые 1 и 5 сняты при обратном порядке измерений.

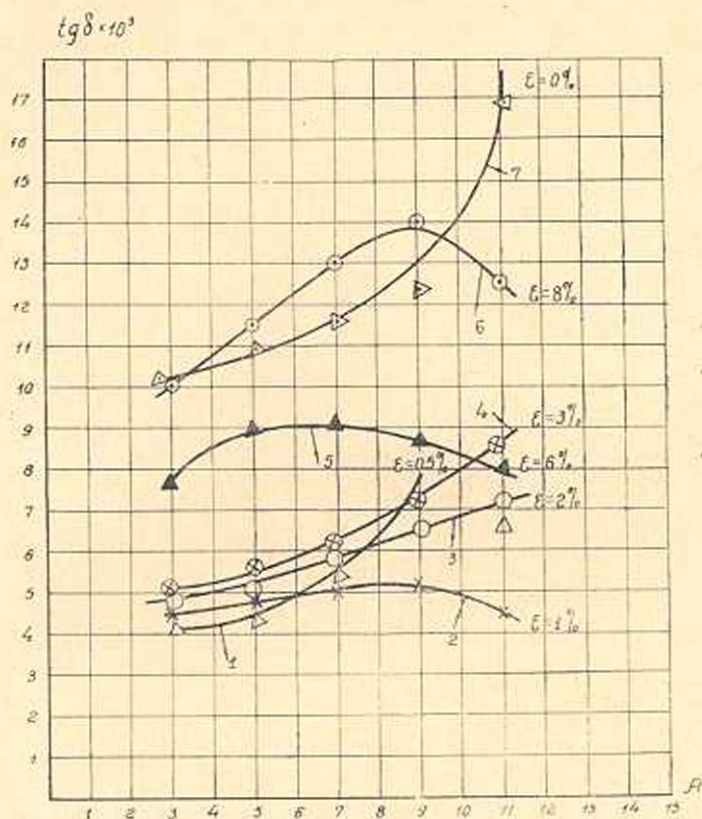
На фиг. 1 и 2 приводятся результаты измерения зависимости $\operatorname{tg} \delta$ от амплитуды колебания (A —в относительных единицах) для крупнозернистых, отожженных образцов алюминия и образцов, предварительно пластически деформированных на разные величины после отжига.

Первое, что можно отметить—это нелинейная зависимость $\operatorname{tg} \delta$ от амплитуды колебаний, также как и в случае высоких частот [1, 2, 5].

Нелинейный характер амплитудной зависимости внутреннего трения на частоте 1 гц для алюминия (фиг. 3) ранее был получен одним из авторов [6].

Второй важный результат—это наличие максимумов на кривой внутреннее трение—амплитуда колебаний (фиг. 1, 2), причем эти максимумы выявляются, когда измерение проводится в обратном порядке, т. е. начинается с больших амплитуд с дальнейшим постепенным

уменьшением ее. Это явление объясняется на основе механизма, упомянутого в работах [1, 2, 6]. Действительно, когда при измерении амплитуда колебаний увеличивается, образуются новые дислокации и, следовательно, увеличивается рассеянная энергия, а при обратном

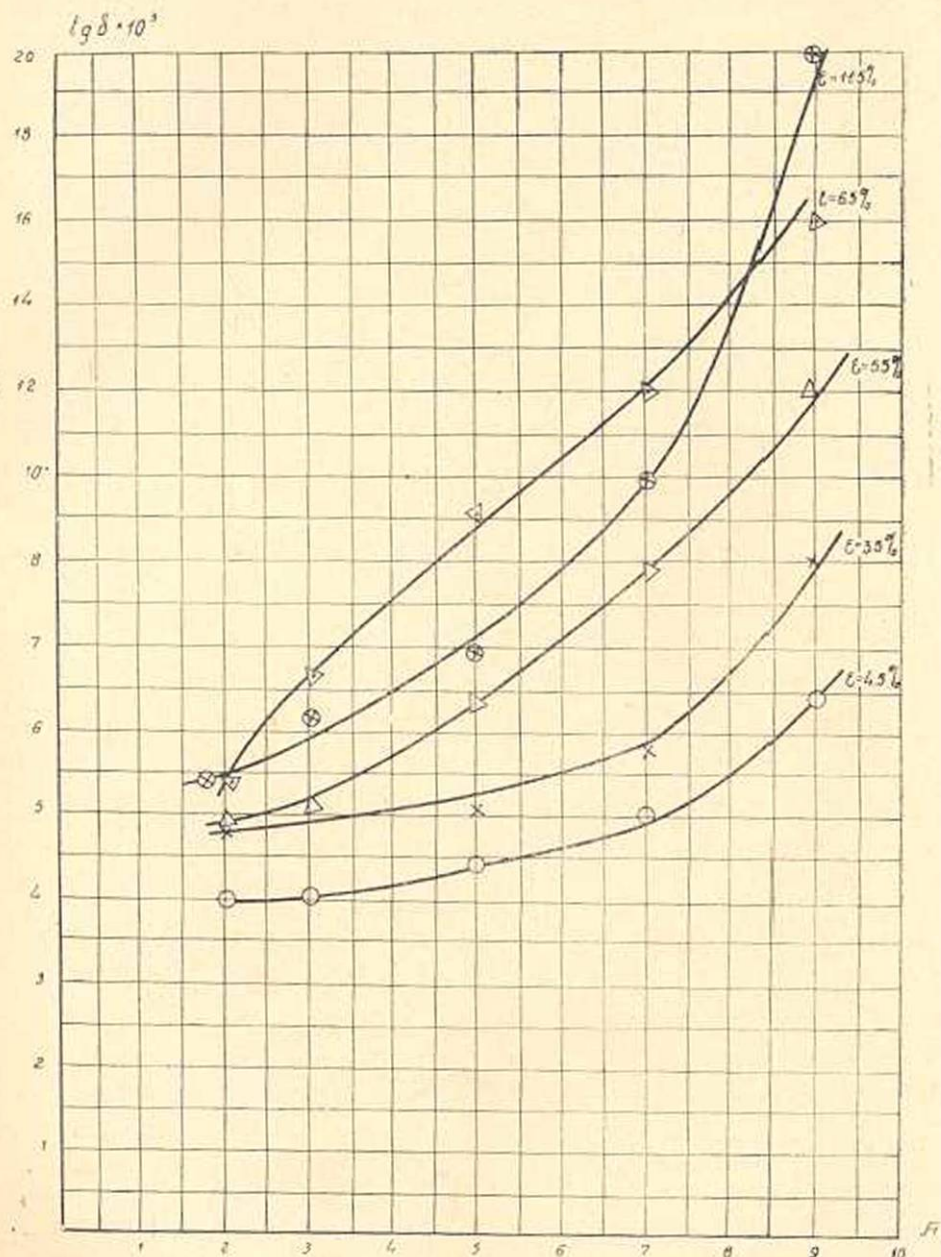


Фиг. 2. Зависимость внутреннего трения Al от амплитуды колебаний. Кривые 2, 5, 6 сняты при обратном порядке измерений. Отличие от данных, приведенных на фиг. 1, обусловлено большим отжигом образцов.

ходе измерений, когда амплитуда колебаний уменьшается, вновь образованные дислокации не сразу выходят на границу или уничтожаются, вследствие чего значение внутреннего трения, уменьшаясь, всегда будет больше, чем при тех же амплитудах в прямом порядке измерений.

Если измерения начинаются сразу с больших амплитуд колебаний, то при этом образуются новые дислокации; с уменьшением амплитуды (но при все еще относительно больших значениях ее) продолжается образование новых дислокаций, следовательно, увеличивается и внутреннее трение. До максимального значения внутреннего трения число образующихся дислокаций постепенно уменьшается, после максимума новые дислокации вообще не образуются, а число

имеющихся дислокаций уменьшается за счет их частичного уничтожения и выхода на границу зерен и блоков. Это наводит на мысль, что образование новых дислокаций при колебаниях происходит со



Фиг. 3. Зависимость внутреннего трения A' от амплитуды колебаний [6].

временем, а скорость их образования, уничтожения и выхода на границу—кончена.

Наблюдения одних и тех же явлений на низких и высоких час-

тотах говорят в пользу гистерезисного механизма зависимости внутреннего трения от амплитуды колебаний. Отметим также, что на исследованных частотах порядка герца, как и на высоких частотах исследованных ранее, наблюдается изменение характера амплитудной зависимости $\text{tg}\delta$ и его абсолютного значения в зависимости от предварительной холодной обработки.

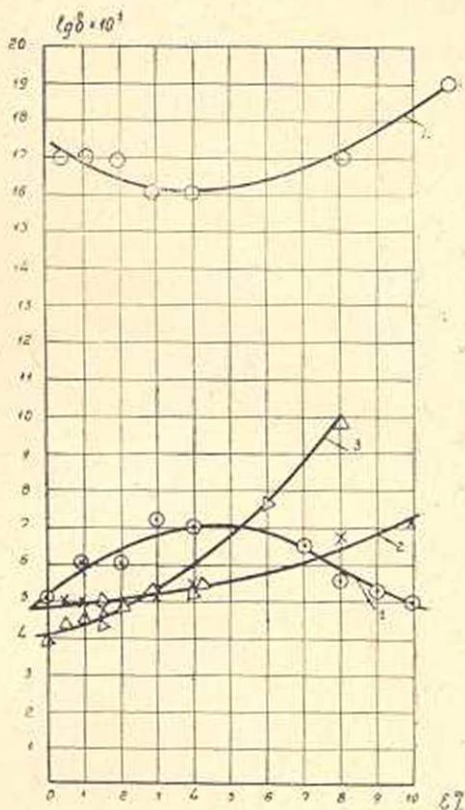
На фиг. 4 приводятся результаты измерения $\text{tg}\delta$ в зависимости от предварительной пластической деформации (ϵ) на частоте $\sim 0,3$ – $1,5$ гц для поликристаллических, предварительно отожженных образцов длиной 300 мм и диаметром 0,8 мм, состоящих из 10–15 кристалликов. У разных образцов средняя величина кристалликов была различная. Как видно из фиг. 4, кривые, которые получены для частоты 1,5 гц проходят много выше, чем кривые для частоты 0,3 гц. Этот пример и результат, полученный ранее одним из авторов (фиг. 5) [6], показывает, что зависимость $\text{tg}\delta$ от ϵ имеет нелинейный характер, как это наблюдалось и для частот в несколько десятков килогерц.

В результатах, приведенных на фиг. 5, для каждого образца измерения проводились дважды. Первое измерение проводилось через 0,5 часа после предварительной пластической деформации, а второе — через 24 часа.

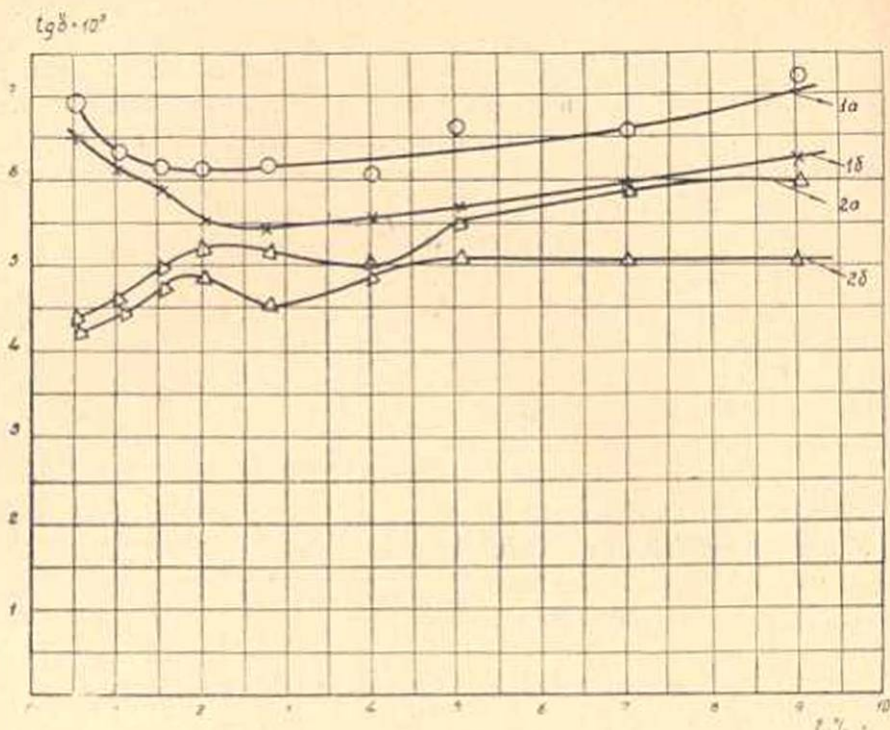
Как видно из фиг. 5, характер кривой от этого не меняется, хотя значение $\text{tg}\delta$ уменьшается со временем.

Для проверки временной зависимости $\text{tg}\delta$ у различно деформированных образцов и оценки времени, необходимого для получения устойчивых значений $\text{tg}\delta$, был поставлен опыт (фиг. 6) [6].

Этот опыт показывает, что при заданных деформациях уже через 2,5 часа значение $\text{tg}\delta$ почти не меняется со временем. Результаты, приведенные на фиг. 4, получены измерением через 24 часа после каждой пластической деформации. Аналогичные результаты по временной зависимости $\text{tg}\delta$ при различных предварительных деформациях получены также В. С. Постниковым [7] для сплава Fe-W.

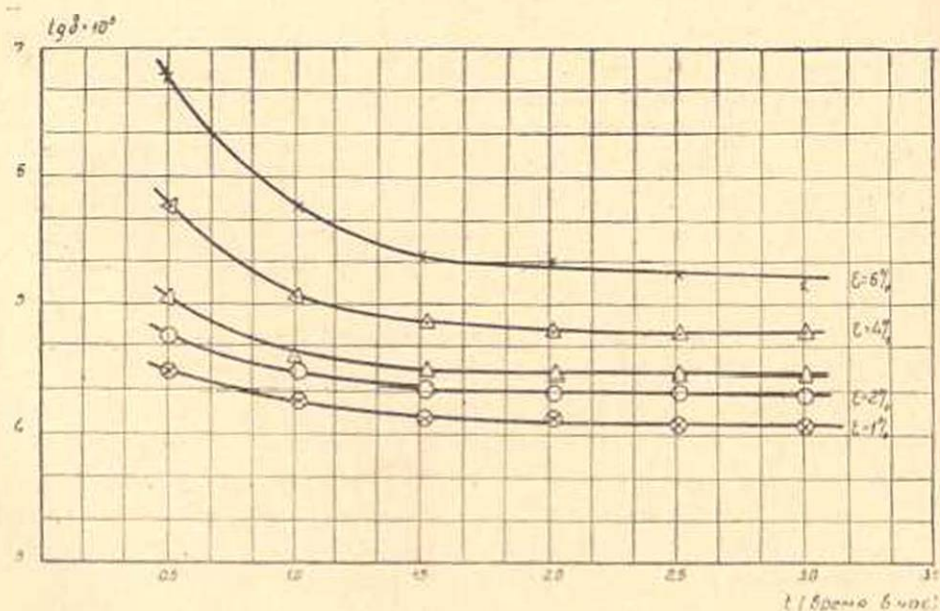


Фиг. 4. Зависимость внутреннего трения A' от предварительной пластической деформации для различных степеней отжига образцов: Кривые 1, 2, 3 сняты при частоте 0,3 гц, а кривая 4 — 1,5 гц.



Фиг. 5. То же, что и на фиг. 4.

Кривые 1 и 2 отличаются разной степенью отжига образцов. Кривые 1а и 2а сняты через 0,5 часа после каждой деформации, кривые 1б и 2б — через 24 часа.



Фиг. 6. Временная зависимость внутреннего трения ΔI для различно предварительно пластически деформированных образцов.

Полученный различный характер зависимости $\lg \delta$ от ε объясняется разницей в величине предварительного отжига и, по всей вероятности, различной величиной зерен в этих образцах.

Сопоставление полученных результатов с результатами для высоких частот [2, 3, 4] показывает, что они оба имеют одинаковый характер зависимости. Однако, если на высоких частотах наблюдается частотная зависимость положения максимума (что говорит в пользу теории вязкого механизма Виртмана и Келера [3] для высоких частот), то в случае низких частот, несмотря на наличие подобных результатов (см. фиг. 5), определенного вывода в пользу вязкого механизма сделать нельзя, т. к., с одной стороны теория Виртмана и Келера относится к высоким частотам и, с другой стороны, в силу большой разницы частот (отличие в 10^5 раз) можно думать, что при низких частотах действует некий другой механизм.

Выяснение этого вопроса требует дальнейших экспериментальных и теоретических исследований.

Ереванский государственный университет

Поступила 19 X 1959

Ա. Բ. ԴՈՒՐԳԱՐՅԱՆ, Լ. Մ. ՄԷԾԻՐԱՐՅԱՆ

ԱՆՅՈՒՄԻՆԻ ՆԵՐՔԻՆ ՇՓՄԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԱՅԻՑ. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՊԼԱՍՏԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻՑ ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻՑ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է Al -ի լարի ներքին շփումը՝ կախված տատանման ամպլիտուդայից, նախնական պլաստիկ դեֆորմացիայից և ժամանակից մեկ հերթ հաճախականության մոտակայքում ոլորման տատանումների մեթոդով [8]:

Պարզվում է, որ եթե ամպլիտուդային կախումը (ֆիգ. 1, 2, 3) կարելի է բացատրել նույն մեխանիզմով, ինչ որ բարձր հաճախականությունների դեպքում [1, 2] (դիսլոկացիոն տեսության հիստերեզիսային մեխանիզմ), ապա ներքին շփման բնույթը՝ կախված նախնական պլաստիկ դեֆորմացիայից (ֆիգ. 4, 5), ցածր հաճախականությունների համար պարզ չէ:

Ներքին շփումը՝ կախված տատանման ամպլիտուդայից, կարող է ունենալ նաև մաքուր (ֆիգ. 1, 2), որը նույնպես բացատրվում է ներքին շփման հիստերեզիսային մեխանիզմով:

Բացի այդ, հոդվածում բերվում է տարբեր նախնական դեֆորմացիաներ ունեցող լարերի ներքին շփման կախումը ժամանակից (ֆիգ. 6):

ЛИТЕРАТУРА

1. Read T. A. The Internal friction of single metal crystals, Phys. Rev. 58, 371, 1940.
2. Швидковский Е. Г., Дургарян А. А. Зависимость внутреннего трения и модуля упругости от амплитуды колебаний и предварительной холодной обработки для некоторых металлов. Научные доклады высшей школы, физико-математические науки, 5, 217, 1958.
3. Weertman Y. and Koehler I. S. Internal friction and Jaungs modulus of cold-worked copper single crystals, Journ. Appl. Phys. 24, 624, 1953.
4. Швидковский Е. Г., Дургарян А. А., Тяпунина Н. А. О механизме внутреннего трения в пластически деформированных кристаллах. Научные доклады высшей школы, физико-математические науки, 5, 172, 1958.
5. Nowick A. S. Variation of Amplitude-Dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature, Phy. Rev. 80, 249, 1950.
6. Дургарян А. А. Кандидатская диссертация. Исследования внутреннего трения и модуля Юнга некоторых металлов. Москва, физ. фак. МГУ, 1948.
7. Постников В. С., Лебедев Р. С. Влияние пластической деформации на внутреннее трение сплавов железо-вольфрам. Ф. М. М., том VIII, вып. 1, стр. 95, 1959.
8. Ке Тин-Суй. Опытное доказательство вязкого поведения границ зерен в металлах. Упругость и неупругость металлов. Изд. И. Л., Москва, 1954, стр. 198 (Phys. Rev. 71, 533, 1947).

Н. А. Корахмзян

Переходное излучение вперед

В работе Г. М. Гарибяна [1], в частности, получено выражение для энергии переходного излучения вперед при перпендикулярном падении заряженной частицы на плоскую границу двух сред. Оказалось, что излучение в основном сконцентрировано в малых углах вокруг траектории и имеет частоты больше оптических.

В связи с этим представляет интерес найти зависимость полного переходного излучения вперед от угла падения заряженной частицы на плоскую границу раздела двух сред.

Методом, примененным в работах [2], [3] в настоящей работе вычислено угловое и частотное распределение переходного излучения вперед для случая наклонного падения частицы на границу раздела двух сред с диэлектрическими постоянными ϵ_2 и ϵ_1 .

Указанный метод применим и здесь, так как формулы работы [2] применимы не только для столкновений заряженных частиц, но и при всяком резком изменении поля движущихся заряженных частиц, что, в частности, и имеет место при переходе частицы через границу раздела двух сред.

Пусть частица с зарядом e и со скоростью V_1 пролетает под углом ψ к перпендикуляру, восстановленному к плоской границе раздела двух сред. Плоскость, определяемая скоростью падающей частицы и перпендикуляром, восстановленным к плоской границе раздела этих сред в точке перехода частицы, примем за плоскость XZ , а оси координат выберем, как указано на фиг. 1 работы [2]. Для определения переходного излучения в единичном телесном угле, в единичном интервале частот $W_\omega(\vartheta, \varphi) = \frac{dS}{d\Omega d\omega}$, в точке $(R_0, \varphi, \vartheta)$ второй (ϵ_1) среды, рассуждаем совершенно аналогичным образом, как и в работе [2]. В отличие от работы [2], здесь ϑ — угол между вектором R_0 и положительным направлением оси Z .

Для вектор-потенциалов поля заряженной частицы непосредственно до и после входа ее во вторую среду (ϵ_1) можем соответственно написать

$$A_1 = \frac{e V_1}{c R_0 \left[1 - \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \frac{n_1 \cdot V_1}{c} \right]} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot (1+f), \quad \beta = \frac{V}{c},$$

$$A_2 = \frac{e \cdot V_1}{c R_0 \left[1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \frac{n_2 \cdot V_1}{c} \right]} + \frac{(-e \cdot f) \cdot V_2}{c R_0 \left[1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \frac{n_2 \cdot V_2}{c} \right]}.$$
(1)

Здесь f — коэффициент отражения для волн, отраженных от границы во вторую среду, V_1 — скорость частицы, V_2 — зеркальное изображение вектора V_1 в первой среде, когда частица уже вошла во вторую, n_1 — единичный вектор, имеющий направление луча, исходящего от заряда, который преломляясь на границе раздела двух сред, попадает в точку R_0 , а $n_2 = \frac{R_0}{R_0}$.

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} \cos(V_1, X) &= \sin \psi, & \cos(V_2, X) &= \sin \psi, \\ \cos(V_1, Y) &= 0, & \cos(V_2, Y) &= 0, \\ \cos(V_1, Z) &= \cos \psi, & \cos(V_2, Z) &= -\cos \psi, \end{aligned}$$
(2)

$$\begin{aligned} \cos(n_1, X) &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}, & \cos(n_2, X) &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \cos(n_1, Y) &= \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}, & \cos(n_2, Y) &= \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \cos(n_1, Z) &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \sin^2 \vartheta}, & \cos(n_2, Z) &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$
(3)

и вычисляя компоненты потенциалов A_1 и A_2 из формулы

$$H_m = \frac{1}{2\pi c} \cdot \{[A_2 n_2] - [A_1 n_1]\}$$
(4)

найдем H_m , а потом по формуле

$$W_m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot c \cdot |H_m|^2 \cdot R_0^2$$
(5)

интересующее нас излучение

$$\begin{aligned} W_m(\vartheta, \varphi) &= \frac{e^2 \cdot V \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta^2}{4\pi^2 \cdot c} \cdot \left[\sin \vartheta \left[\frac{1+f}{1 - \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \beta \cdot \cos(n_1 V_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{f}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2 V_2)} - \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2 V_1)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times (i \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi - j \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - k \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + j \sin \psi \left[\frac{1+f}{1 - \sqrt{\varepsilon_2} \beta \cos(n_1, V_1)} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \sin^2 \vartheta} + \frac{f \cdot \cos \vartheta}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(n_2, V_2)} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\cos \vartheta}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_1)} \right] - k \frac{2 \cdot f \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \Big|^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \cos(n_1, V_1) &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \cos \psi \cdot \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \sin^2 \vartheta}, \\ \cos(n_2, V_1) &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi + \cos \vartheta \cdot \cos \psi, \\ \cos(n_2, V_2) &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi - \cos \vartheta \cdot \cos \psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая формулу (6) с формулой (9) работы [2] мы видим, что они совпадают, если в одной из них сделать замену β на $-\beta$ и ϑ на $-\vartheta$.

Если нас интересует полное излучение (S) во второй среде при $\psi=0$, $\varepsilon_2=\varepsilon$ и $\varepsilon_1=1$, то воспользовавшись формулой (6) и соотношением

$$1 + f = - \frac{2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \cos \vartheta}{\varepsilon_2 \cdot \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \sin^2 \vartheta}} \quad (8)$$

получим

$$\begin{aligned} S &= \frac{e^2 \cdot \beta^2}{\pi^2 \cdot c} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta}{(1 - \beta^2 \cdot \cos^2 \vartheta)^2} \cdot d\Omega \times \\ &\times \int_0^{\pi} \left| \frac{(\varepsilon - 1)(1 - \beta^2 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta})}{(\varepsilon \cdot \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta})(1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta})} \right|^2 d\vartheta, \end{aligned} \quad (9)$$

что совпадает с формулой (13) работы М. Г. Гарибяна [1].

Для случая же идеальный проводник—вакуум ($\varepsilon_2 = \infty$, $\varepsilon_1 = 1$) и для любого ψ формула (6) совпадает с формулой (11) работы [2], то есть для такой пары сред распределение и величина излучения в пустоте не зависят от того, входит ли частица из вакуума в идеальный проводник или наоборот*.

Для того, чтобы выяснить вопрос о распределении интенсивности переходного излучения вперед вокруг траектории, удобно формулу (6) написать в системе координат ($X'Y'Z'$), которая получается путем вращения системы (XYZ) вокруг оси Y на угол ψ так, что положительное направление оси Z' совпадает с направлением V_1 . Тогда, воспользовавшись формулами преобразования координат, можем написать (обозначения со штрихами относятся к новой системе)

$$\begin{aligned} \cos(V_1, X') &= 0, & \cos(V_2, X') &= \sin 2\psi, \\ \cos(V_1, Y') &= 0, & \cos(V_2, Y') &= 0, \\ \cos(V_1, Z') &= 1, & \cos(V_2, Z') &= -\cos 2\psi, \end{aligned} \quad (10)$$

* Отметим, что в работе [2] на фиг. 2 радиальные размеры ветви с увеличены в 10 раз.

$$\begin{aligned}
 \cos(n_1, X') &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \cos \vartheta' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \cos^2 \psi - \\
 &\quad - \sin \psi \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \vartheta}, \\
 \cos(n_1, Z') &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cos \vartheta' \cdot \sin^2 \psi + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + \\
 &\quad + \cos \psi \cdot \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \vartheta}, \\
 \cos(n_1, Y') &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi', \\
 \cos(n_2, X') &= \sin \vartheta' \cos \varphi', \quad \cos(n_2, Y') = \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi', \\
 \cos(n_2, Z') &= \cos \vartheta'.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Проведя расчеты в дальнейшем в таком же порядке, что и в системе (XYZ) , получим

$$\begin{aligned}
 W_m(\vartheta', \varphi') &= \frac{e^2 \beta^2}{4\pi^2 \cdot c} \left| \vec{r} \right| \left\{ \frac{1+f}{1 - \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \beta \cdot \cos(n_1, V_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi' - \right. \\
 &\quad - \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_1)} + \frac{f \cdot \cos 2\psi}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \right] \cdot \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi' \Big\} + \\
 &\quad + j' \left\{ \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_1)} + \frac{f \cdot \cos 2\psi}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \right] \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' + \right. \\
 &\quad + \frac{f \cdot \sin 2\psi}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \cdot \cos \vartheta' - \frac{1+f}{1 - \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \beta \cdot \cos(n_1, V_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \times \\
 &\quad \times \left(\cos \vartheta' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \cos^2 \psi - \sin \psi \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \vartheta} \right) \Big\} - \\
 &\quad - k' \cdot \frac{f \cdot \sin 2\psi}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \cdot \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi' \Big|^2. \tag{12}
 \end{aligned}$$

где косинусы в знаменателях определяются по формулам (10) и (11), а

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \vartheta &= \sin^2 \vartheta' + \cos^2 \vartheta' \cdot \sin^2 \psi - \sin^2 \vartheta' \cdot \cos^2 \varphi' \cdot \sin^2 \psi + \\
 &\quad + 2 \cdot \sin \vartheta' \cdot \cos \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi, \tag{13}
 \end{aligned}$$

В случае, когда $\varepsilon_2 = \varepsilon$, и $\varepsilon_1 = 1$ формула (12) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{e^2 \beta^2}{4\pi^2 \cdot c} \cdot \left| \vec{r} \right| \left\{ \frac{\sin \vartheta' \cdot \sin \varphi'}{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot \beta \cdot \cos(n_1, V_1)} \cdot \frac{1+f}{\varepsilon} - \right. \\
 &\quad - \left[\frac{1}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_1)} + \frac{f \cdot \cos 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \right] \cdot \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi' \Big\} + \\
 &\quad + j' \left\{ \left[\frac{1}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_1)} + \frac{f \cdot \cos 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \right] \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f \cdot \sin 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \cdot \cos \vartheta' - \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot \beta \cdot \cos(n_1, V_1)} \cdot \frac{1+f}{\varepsilon} \times \\
& \times (\cos \vartheta' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \cos^2 \psi - \sin \psi \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}) \Big| - \\
& - k' \cdot \frac{f \cdot \sin \vartheta' \cdot \sin \varphi' \cdot \sin 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} \Big|^2, \quad (14)
\end{aligned}$$

причем

$$\cos(n_2, V_1) = \cos \vartheta',$$

$$\cos(n_2, V_2) = \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \sin 2\psi - \cos \vartheta' \cdot \cos 2\psi, \quad (15)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos(n_1, V_1) = \cos \vartheta' \cdot \sin^2 \psi + \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + \cos \psi \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}.$$

Для нахождения полного переходного излучения во второй среде, необходимо проинтегрировать выражение (14) по частотам и по углам. Из (14) видно, что при больших энергиях частицы ($\beta \approx 1$), излучение в основном сконцентрировано вокруг траектории частицы в пределах угла $\vartheta' \approx \sqrt{1 - \beta^2}$. При таких ϑ' учитывая

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta' \cdot \cos \psi - \sin \vartheta' \cdot \cos \varphi' \cdot \sin \psi \quad (16)$$

из (15) можно написать

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos(n_1, V_1) \approx \sin^2 \psi + \cos \psi \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}, \quad \text{если } \operatorname{tg} \psi \ll \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

откуда следует, что основной вклад в излучение вносят частоты больше оптических, для которых имеет место

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sigma}{\omega^2}, \quad \text{где } \frac{\sigma}{\omega^2} \ll 1.$$

Подставляя значение ε в (15) и разлагая корень в ряд, можем написать

$$1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot \beta \cdot \cos(n_1, V_1) = 1 - \beta \cdot \cos \vartheta' + \frac{\beta \sigma}{2\omega^2} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\cos \psi}$$

$$\text{при } \cos^2 \psi \gg \frac{\sigma}{\omega^2} \quad (\text{т. к. } \vartheta \approx \psi).$$

$$\text{Из (16), при } \operatorname{tg} \psi \ll \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{\cos \vartheta}{\cos \psi} \approx \cos \vartheta',$$

$$\text{поэтому } 1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot \beta \cdot \cos(n_1, V_1) = 1 - \beta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta'}.$$

При таком ограничении для ψ , формуле (14) можно придать вид

$$\begin{aligned}
W = & \frac{e^2 \beta^2}{4\pi^2 c} \left\{ \sin \vartheta' \left[\frac{1}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta'}} \cdot \frac{1+f}{\varepsilon} - \frac{1+f + (1-f) \cdot \beta \cdot \cos \vartheta'}{1 - \beta^2 \cdot \cos^2 \vartheta'} \right] \times \right. \\
& \times (f' \cdot \sin \varphi' - f' \cdot \cos \varphi') + f' \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta'}} \cdot \frac{1+f}{\varepsilon} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \omega^2} + \Phi \Big|^2, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Phi = & -i' \frac{f \cdot \sin \theta' \cdot \sin \varphi' \cdot \cos 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} + i' \frac{f \cdot \sin \theta' \cdot \sin \varphi'}{1 + \beta \cdot \cos \theta'} \\ & - j' \frac{f \cdot \sin \theta' \cdot \cos \varphi'}{1 + \beta \cdot \cos \theta'} + j' \frac{f \cdot \sin \theta' \cdot \cos \varphi' \cdot \cos 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} + \\ & + j' \frac{f \cdot \cos \theta' \cdot \sin 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)} + k' \frac{f \cdot \sin \theta' \cdot \sin \varphi' \cdot \sin 2\psi}{1 - \beta \cdot \cos(n_2, V_2)}. \end{aligned}$$

Величина Φ мала т. к. при выбранном приближении для ε , $f \approx 0$, а знаменатели далеки от нуля. Действительно, при приближении $\cos(n_2, V_2)$ к единице, V_2 (и V_1) становится параллельным плоскости раздела сред XU , но в этом случае переходное излучение вообще исчезает [2]. Сделав подстановки

$$1+f = \frac{2\varepsilon \cdot \cos \theta}{\varepsilon \cdot \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}, \quad 1-f = \frac{2\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\varepsilon \cdot \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}, \quad (18)$$

после несложных преобразований вместо (17) получим

$$\begin{aligned} W = & \frac{e^2 \beta^2}{4\pi^2 c} \cdot \left[2 \cdot \sin \theta' \cdot \frac{R + R(\psi)}{(1 - \beta^2 \cdot \cos^2 \theta')(\varepsilon \cdot \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})(1 - \beta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})} \times \right. \\ & \left. \times (i' \cdot \sin \varphi' - j' \cdot \cos \varphi') + j' \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 - \beta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{1+f}{\varepsilon} \cdot \frac{\sigma}{2\omega^2} \right]^2, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\text{где } R = \cos \theta \cdot (\varepsilon - 1)(1 - \beta^2 - \beta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}),$$

$$\begin{aligned} R(\psi) = & \beta^2 \cdot \varepsilon \cdot \cos \theta - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta' \cdot \cos \theta - \beta \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta'} + \\ & + \beta \cdot \cos \theta' \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \beta^2 \cdot \cos \theta' \cdot \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \theta)(\varepsilon - \sin^2 \theta')}, \quad R(\psi=0) = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

Оценив порядки величин R и $R(\psi)$ получим, что $R \approx \frac{\sigma}{\omega^2}$, а $R(\psi) \approx \frac{\sigma^2}{\omega^4}$, и, следовательно, $R(\psi)$ можно отбросить. Отношение второго члена к первому по порядку величины есть $\operatorname{tg} \psi \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$, поэтому при $\operatorname{tg} \psi \ll \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ второй член в квадратной скобке можно отбросить и тогда получим

$$\begin{aligned} W = & \frac{e^2 \beta^2 \cdot \sin^2 \theta'}{\pi^2 \cdot c} \times \\ & \times \left[\frac{\cos \theta}{\varepsilon \cdot \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)(1 - \beta^2 - \beta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})}{(1 - \beta^2 \cdot \cos^2 \theta')(1 - \beta \cdot \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})} \right]^2, \quad (21) \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (9) или с формулой (13) работы [1]. Для ψ мы имеем следующие два условия

$$\cos^2 \psi \gg \frac{\sigma}{\omega^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi \ll \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Из работы [1] имеем $\frac{\omega_{\text{гр}}}{\sqrt{\sigma}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, поэтому первое условие, накладываемое на ψ , влечет за собой второе.

Таким образом, полное переходное излучение вперед есть $S = \frac{e^2 \cdot V \sqrt{\sigma}}{3 \cdot c \cdot V \sqrt{1-\beta^2}}$ (см. работу [1]), и не зависит от угла падения частицы при установленном здесь условии $\cos^2 \psi \gg \frac{\sigma}{\omega^2}$.

Автор выражает глубокую признательность Г. М. Гарибяну и А. Ц. Амагуни за обсуждения и замечания.

Ереванский Государственный
университет

Поступила 31 X 1959

Ե. Ա. Ղորխմազյան

ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ԴԵՊԻ ԱՌԱՋ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում ստացված է բանաձև, որը տալիս է լիցքավորված մասնիկի՝ երկու միջավայրերի սահմանի թեք անցման ժամանակ դեպի առաջ արձակված ճառագայթման ինտենսիվության բաշխումը ըստ անկյունների և ըստ հաճախության:

Յուլյ է տրված, որ ճառագայթումը հիմնականում կենտրոնացված է որակաորիալի շուրջը փոքր՝ $\theta \approx \sqrt{1-\beta^2}$ անկյունների մեջ:

Եթե լիցքավորված մասնիկը $\varepsilon_2 \approx \varepsilon$ թափանցիկ միջավայրից անցնում է վակուում $\varepsilon_1 = 1$, և եթե անկման ψ անկյունը բավարարում է $\cos \psi \gg \frac{\sqrt{\sigma}}{\omega}$ պայմանին, ապա գումար ճառագայթումը դեպի առաջ անկախ է անկման անկյունից: Այստեղ ω -ն ճառագայթման հաճախությունն է, իսկ $\sigma = \frac{4\pi N e^2}{m}$, որտեղ N -ը էլեկտրոնների թիվն է նյութի միավոր ծավալում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицы. ЖЭТФ, **37**, 2(8), 1959.
2. Корхмазян Н. А. Переходное излучение при наклонном падении заряда. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук **11**, 6, 1958.
3. Корхмазян Н. А. Решение задачи о переходном излучении методом изображений. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, **10**, 4, 1957.
- 10 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 2

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

По поводу работы „О приближении аналитических функций целыми функциями“

В работе, цитированной в заглавии, опубликованной в № 6 тома XI (1958), по недосмотру автора вкрались некоторые неточности и опечатки. Пользуясь случаем мы одновременно приводим некоторые уточнения теоремы 1 (стр. 7).

1. Условие 1, наложенное на функцию $\lambda(x)$ (стр. 3) следует сформулировать следующим образом:

$y=\lambda(x)$ представляет гладкую линию, имеющую монотонно меняющуюся (при $|x|>c$) касательную¹ и асимптоты, которые лежат сверху кривой и составляют положительный угол β .

2. В первой строке стр. 4 выражение „в начало координат“ следует заменить выражением *в бесконечность*.

3. Для R_5 (см. формулу (24) на стр. 12) в работе дана грубая оценка в силу чего получена грубая оценка (12) (см. стр. 7), а эта оценка в свою очередь влияет на теорему 1. При точной оценке R_5 , мы получим более сильную теорему. Мы имеем

$$R_5 \leq \frac{CM(\rho)}{\varphi(\rho)} \int_0^\rho e^{A_\rho \lambda \left(\frac{(\rho-z)^2 + 1}{\varphi(z)} \right)} dz. \quad (24)$$

Оценим последний интеграл. Для этого отобразим область D_λ в конечную область G при помощи преобразования $w_1=(z+2i)^{-1}$.

Тогда точки $z=\infty, 0, -i$ переходят, соответственно, в $w_1=0, -\frac{i}{2}, -i$. Отобразим область G при помощи преобразования $w_2=$

$=\Psi(w_1)$ на круг $|w_2-1| \leq 1$ так, чтобы точки $w_1=0, -\frac{i}{2}, -i$ переходили,

соответственно, в $w_2=0, 1, 2$. Тогда, по известной теореме Варшавского, для модуля отображающей функции при $|w_1|<\alpha$, получим

$$|\Psi(w_1)| > C_5 \exp \left\{ -\pi \int_{|w_1|}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho \vartheta(\rho)} \right\} > C_5 e^{-\frac{\pi}{\beta} \int_{|w_1|}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho}} > C_6 |w_1|^{\frac{\pi}{\beta}},$$

так как $\vartheta(\rho) > \beta, 0 < \beta \leq \pi$, где β —угол между асимптотами.

Круг $|w_2 - 1| < 1$ отображим на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, чтобы точки $w_2 = 0, 1, 2$ переходили в точки $w = \infty, 1, 0$. Очевидно, что это отображение осуществляется формулой

$$\bar{w} = \frac{2 - w_2}{w_2}.$$

Отсюда

$$|w| < \frac{4}{|w_2|} < \frac{C_7}{|w_1|^{\frac{\pi}{\beta}}} = C_8 |z|^{\frac{\pi}{\beta}}.$$

Поэтому, для функции, отображающей D_λ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, получим

$$\mu_\lambda(z) = \max_{|z|=R} |f_\lambda(z)| < C_8 |z|^{\frac{\pi}{\beta}},$$

причем $f_\lambda(0) = 1$.

Отсюда и из (24) получим

$$R_5 < \frac{CM(\rho)}{\varphi(\rho)} e^{A_p \left[\frac{\rho}{\varphi(\rho)} \right]^{\frac{\pi}{\beta}}}.$$

Тогда, учитывая эту оценку и оценки, полученные для R_1, R_2, R_3 и R_4 (см. стр. 12 основного текста), получим

$$|F(z)| < \left[\frac{\rho^2 M(\rho)}{\varepsilon \varphi(\rho)} \right] \left(\frac{\rho}{\varphi(\rho)} \right)^{\frac{\pi}{\beta}}. \quad (25)$$

В эту оценку входит вспомогательная функция $\lambda(x)$, так как

$$\rho = |\xi_*|, \quad \xi_* = \xi_{\lambda\varphi}(R).$$

Правая часть неравенства (25) для данного $\varphi(x)$ растет медленно, если $\rho = kR$, $k \geq 2$, а ρ принимает указанные значения при $\lambda(x) = Cx$, $C < 1$. Таким образом, для модуля аппроксимирующей целой функции, вместо оценки (12), получим оценку:

$$|F(z)| < \left[\frac{CR^2 M(kR)}{\varepsilon \varphi(kR)} \right]^C \left(\frac{R}{\varphi(kR)} \right)^{\frac{\pi}{\beta}}, \quad |z| \leq R.$$