ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. А. Акопян

Интегральные преобразования, связанные с дифференциальными операторами бесконечного порядка

Как хорошо известно [1], [2], если функции $K(s)$ и $H(s)$ определены лишь на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$, обе ограничены и удовлетворяют функциональному уравнению

$$K(s)H(1-s)=1, \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}, \tag{1}$$

то они порождают определенные интегральные преобразования в классе $L_2(0,+\infty)$.

Именно, если $\frac{k_1(x)}{x}$ и $\frac{h_1(x)}{x}$ суть соответственно трансформации Меллина функций $\frac{K(s)}{1-s}$ и $\frac{H(s)}{1-s}$, то каждая функция $f(x)$ из класса $L_2(0,+\infty)$ имеет две трансформации, определяемые почти всюду на $(0,+\infty)$ формулами

$$g_k(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} f(y)\,dy,$$

$$g_h(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} f(y)\,dy.$$

При этом функции $g_k(x)$ и $g_h(x)$ из класса $L_2(0,+\infty)$, и почти всюду на $(0,+\infty)$ справедливы формулы обращения

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} g_k(y)\,dy,$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} g_h(y)\,dy.$$

$x\in(0,+\infty)$

В § 1 настоящей статьи строятся прямые и обратные интегральные преобразования для случая, когда функция $K(s)$ и $H(s)$ вместо (1) удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s)=1,\ \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$$

при определенных ограничениях, накладываемых на функции $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$.

Определяя смысл операторов $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ и $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)$, мы устанавливаем, что для любой функции $f(x)$ из класса

$$\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\in L_2(0,+\infty)$$ формула

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}\,\Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy$$

почти всюду на $(0,+\infty)$ определяет функцию $g(x)$ из класса

$$\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)\in L_2(0,+\infty).$$

Вместе с этим имеет место формула обращения

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\,\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy,$$

почти всюду на $(0,+\infty)$.

Установленные здесь результаты представляют собой дальнейшее развитие теории интегральных преобразований Ватсона-Планшереля.

В § 2 приводятся различные следствия из теорем, приведенных в § 1.

В частности, в случае, когда $\Phi_1(s)\equiv 1$, приводятся формулы обращения для некоторых известных интегральных преобразований (Лапласа, Стильтьеса и др.) в классе $L_2(0,+\infty)$, которые ранее были получены Винером и Палеем [3], Поллардом [4] другим путем.

Но кроме того, на основании результатов § 1 даются обращения некоторых новых специальных классов интегральных преобразований.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность своему учителю проф. М. М. Джрбашяну за ценные советы и руководство при выполнении данной работы.

§ 1. Обобщение теорем Ватсона-Планшереля

1°. Приведем сначала формулировки некоторых известных результатов из теории преобразований Меллина, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Две функции $f(x)$ и $F(s)$ являются преобразованиями Меллина одна относительно другой, если они связаны двойственными соотношениями вида

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx, \tag{1.1}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,x^{-s}\,ds, \quad (c>0). \tag{1.2}$$

Пары преобразований Меллина будем обозначить соответственно через $f(x)$, $F(s)$; $g(x)$, $G(s)$; $k(x)$, $K(s)$; $h(x)$, $H(s)$ и т. д.

Имеют место следующие теоремы [1; § 3, 17].

Теорема А. *Если* $f(x)\in L_2(0,+\infty)$, *тогда функции*

$$F(s,a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)\,x^{s-1}\,dx;\ \operatorname{Re} s=\frac{1}{2} \tag{1.3}$$

при $a\to+\infty$ *сходятся в среднем квадратичном на прямой* $\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$ *к некоторой функции* $F(s)$. *Функции*

$$f(x,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} F(s)\,x^{-s}\,ds, \quad x>0 \tag{1.4}$$

при $a\to+\infty$ *на полуоси* $(0,+\infty)$ *сходятся в среднем квадратичном к* $f(x)$.

Обратно, если $F(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$, то интегралы (1.4) при $a\to+\infty$ сходятся в среднем квадратичном на $(0,+\infty)$ к некоторой функции $f(x)\in L_2(0,+\infty)$. Тогда интегралы (1.3) сходятся в среднем квадратичном на прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$ к функции $F(s)$.

Теорема Б. *Если* $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ *и* $g(x)\in L_2(0,+\infty)$, *тогда имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\,G(1-s)\,ds. \tag{1.5}$$

Заметим теперь, что если $f(x)\in L_2(0,\infty)$, то для любого $y>0$ имеем также $f(xy)\in L_2(0,+\infty)$. Из (1.1) или (1.2) следует, что $F(s)\,y^{-s}$

есть преобразование Меллина функции $f(xy)$, поэтому формулу (1.5) можно написать также в виде

$$\int_0^\infty f(xy)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}F(s)\,G(1-s)\,y^{-s}ds,\quad y>0. \tag{1.6}$$

2° Определение 1. *Относим к классам* Φ_a *и* Φ_b *все функции* $\Phi(s)$, *определенные на линии* $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$ *и удовлетворяющие соответственно одному из условий:*

а) $\Phi(s)$ *есть полином определенной степени* $m\geqslant 0$, *не имеющий нулей на линии* $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$;

б) $\Phi(s)\neq 0$, $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$ *и существует неубывающая на полуоси* $[0,+\infty)$ *функция* $p(t)$, *такая, что*

$$tp'(t)\uparrow+\infty,\quad t\uparrow+\infty,\quad \int^\infty\frac{p(t)}{t^2}\,dt=+\infty,$$
$$\left|\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\geqslant e^{p(|t|)},\quad |t|\geqslant t_0\geqslant 0. \tag{1.7}$$

Докажем две предварительные леммы.

Лемма 1. *Если* $\Phi(s)\in\Phi_b$, *то существует последовательность полиномов* $\{P_n(s)\}$ $(n=0,1,\ldots)$, *для которой*

$$\lim_{n\to\infty}P_n(s)=\Phi(s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},$$

$$|P_n(s)|\leqslant M|\Phi(s)|,\ (n=0,1,\ldots),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},$$

где M — *постоянная, не зависящая от* n.

Доказательство. Построим непрерывную функцию $f_n(t)$ так, чтобы отношение

$$\frac{f_n(t)}{\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)}$$

равнялось нулю вне интервала $(-n-1,\ n+1)$, единице в интервале $[-n,\ n]$ и было линейной функцией в интервалах $[-n-1,\ -n]$, $[n,\ n+1]$. Но, как следует из теоремы М. М. Джрбашяна ([5], стр. 371), система полиномов полна при приближении с весом $\left|\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{-1}$. Поэтому при любом натуральном n найдется полином $Q_n(t)$, для которого

$$\frac{|f_n(t)-Q_n(t)|}{\left|\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|}\leqslant\frac{1}{n+1},$$

откуда

$$\frac{|Q_n(t)|}{\left|\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|}\leqslant 1+\frac{1}{n+1},\quad(-\infty<t<+\infty).$$

Следовательно, при $-\infty<t<+\infty$

$$|Q_n(t)|\leqslant 2\left|\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\quad(n=0,1,\ldots)$$

кроме того

$$\left|1-\frac{Q_n(t)}{\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\quad(-n\leqslant t\leqslant n).$$

Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty}Q_n(t)=\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right),\quad(-\infty<t<+\infty)^*.$$

Теперь остается представить полиномы $Q_n(t)$ в виде $P_n\left(\frac{1}{2}+it\right)$, чем и завершается доказательство.

Пусть $\Phi(s)\in\Phi_b$, тогда, по лемме 1, существует последовательность полиномов $\{P_n(s)\}$, $s=\frac{1}{2}+it$ $(n=0,1,\ldots)$ таких, что при $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$

$$|P_n(s)|\leqslant M|\Phi(s)|,\quad(n=0,1,\ldots),\tag{1.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n(s)=\Phi(s).$$

Определение 2. *Пусть* $\Phi(s)\in\Phi_b$. *Обозначим через* $\Phi\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ *предел в среднем*

$$\text{l. i. m.}_{n\to\infty}P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$$

для любой последовательности полиномов $\{P_n(s)\}$ $(n=0,1,\ldots)$, *удовлетворяющих условиям* (1.8) *если он существует.*

Лемма 2. *Пусть функция* $F(s)$ *такова, что* $\Phi(s)F(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\frac{1}{2}+i\infty\right)$, *где* $\Phi(s)\in\Phi_a$ или Φ_b. *Тогда будем иметь:*

---

* Что из полноты следует существование полиномов $Q_n(t)$ с указанными свойствами, было отмечено Полларом [6].

а) $s^k F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$,

если

$\Phi(s)$ *есть полином степени* m *и* $s^k F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$, $(k=0, 1, \ldots)$ — *в противном случае*

б) *существует* $\Phi\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x)$ *и является преобразованием Меллина от функции* $F(s)\Phi(s)$.

Доказательство. Положим сначала, что $\Phi(s) \in \Phi_b$ не сводится к полиному. Пусть

$$c_k = \sup_{\mathrm{Re}\, s=1/2} \left|\frac{s^k}{\Phi(s)}\right|^2,$$

тогда

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |s^k F(s)|^2\, ds \leqslant c_k \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |\Phi(s) F(s)|^2\, ds < +\infty,\ (k=0, 1, 2\ldots).$$

Так как $s^k F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$, $(k=0, 1, \ldots)$, то интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\, s^k\, x^{-s}\, ds, \quad x>0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

абсолютно сходятся.

Последовательно применяя операцию $-x\frac{d}{dx}$ к обеим частям формулы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\, x^{-s}\, ds$$

получим

$$\left(-x\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\, s^k\, x^{-s}\, ds, \quad (k=0, 1, \ldots). \tag{1.9}$$

Если $\{P_n(s)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ произвольная последовательность полиномов, удовлетворяющих условию (1.8), то из (1.9) получим формулы

$$P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\, P_n(s)\, x^{-s}\, ds, \quad (n=0, 1, \ldots). \tag{1.10}$$

Пусть

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\,\text{l.i.m.}_{a\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}F(s)\,\Phi(s)\,x^{-s}\,ds, \tag{1.11}$$

тогда из (1.10) и (1.11) получим:

$$\varphi(x)-P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)=\frac{1}{2\pi i}\,\text{l.i.m.}_{a\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}F(s)\,[\Phi(s)-P_n(s)]\,x^{-s}\,ds.$$

Отсюда, из равенства Парсеваля для преобразований Меллина, имеем:

$$\int_0^\infty\left|\varphi(x)-P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}|F(s)|^2|\Phi(s)-P_n(s)|^2\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}|F(s)\,\Phi(s)|^2\left|1-\frac{P_n(s)}{\Phi(s)}\right|^2ds. \tag{1.12}$$

Так как $F(s)\,\Phi(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$, то для данного $\varepsilon>0$ число $R=R(\varepsilon)$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$\int_{\left|s-\frac{1}{2}\right|>R}|F(s)\,\Phi(s)|^2\,ds<\varepsilon,\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}. \tag{1.13}$$

Правую часть (1.12) можно записать в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}|F(s)\,\Phi(s)|^2\left|1-\frac{P_n(s)}{\Phi(s)}\right|^2ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR}^{\frac{1}{2}+iR}|F(s)\,\Phi(s)|^2\left|1-\frac{P_n(s)}{\Phi(s)}\right|^2ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\left|s-\frac{1}{2}\right|>R}|F(s)\,\Phi(s)|^2\left|1-\frac{P_n(s)}{\Phi(s)}\right|^2ds\equiv$$

$$\equiv I_1^{(n)}(R)+I_2^{(n)}(R). \tag{1.14}$$

Но полиномы $P_n(s)$ таковы, что

$$\sup_{\operatorname{Re}s=1/2}\left|1-\frac{P_n(s)}{\Phi(s)}\right|=M<+\infty,\quad (n=0,1,\ldots),$$

где M не зависит от n.

Поэтому в силу (1.13)

$$|I_2^{(n)}(R)| \leqslant M\varepsilon, \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{1.15}$$

Далее, в силу второго из свойств (1.8) полиномов $P_n(s)$

$$\lim_{n\to\infty} I_1^{(n)}(R) = 0. \tag{1.15'}$$

Из (1.15) и (1.15') следует, что

$$\text{l. i. m.}_{n\to\infty} P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x) = \varphi(x).$$

Заметим теперь, что если $Q_n(t) = P_n\left(\frac{1}{2} + it\right)$ $(-\infty < t < +\infty)$, то из существования

$$\text{l. i. m.}_{n\to\infty} P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x) = \varphi(x)$$

следует также, что

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\text{l. i. m.}_{n\to\infty} Q_n\left(ix\frac{d}{dx}\right)\sqrt{x}\, f(x) = \varphi(x).$$

Действительно, легко проверить, что

$$\frac{1}{\sqrt{x}} Q_n\left(ix\frac{d}{dx}\right)\sqrt{x}\, f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} P_n(s) F(s)\, x^{-s}\, ds \quad (n=0, 1, \ldots),$$

т. е. $\frac{1}{\sqrt{x}} Q_n\left(ix\frac{d}{dx}\right)\sqrt{x}\, f(x) = P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x) \quad (n=0, 1, \ldots),$

откуда следует наше утверждение.

Если же функция $\Phi(s)$ есть некоторый полином степени $m \geqslant 0$, то обозначая

$$c_{m,k} = \sup_{\operatorname{Re} s = 1/2} \left|\frac{s^k}{\Phi(s)}\right|^2, \quad (k=0, 1, \ldots, m)$$

имеем

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |s^k F(s)|^2\, ds \leqslant c_{m,k} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |\Phi(s) F(s)|^2\, ds < +\infty \quad (k=0, 1, \ldots m)$$

и из (1.9) при $k=0, 1, \ldots, m$ легко следует формула

$$\Phi\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x) = \varphi(x)$$

т. е. справедливость леммы.

3°. Перейдем теперь к доказательству некоторых теорем, являющихся естественными обобщениями теоремы Ватсона-Планшереля [1].

Теорема 1. *Пусть на линии* $s=\frac{1}{2}+it\ (-\infty<t<+\infty)$ *функции* $K(s)$, $H(s)$, $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ *связаны соотношением*

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s)=1, \tag{1.16}$$

где $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)\in\Phi_a$ *или* Φ_b *и*

$$\sup_{Res=1/2}|K(s)\Phi_2(s)|<+\infty, \tag{1.17}$$

$$\sup_{Res=1/2}|H(s)|<+\infty. \tag{1.18}$$

Тогда для любой функции $f(x)$ *из класса* $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\in L_2(0,+\infty)$, *формула*

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{k_1(xy)}{y}\Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy \tag{1.19}$$

определяет почти всюду на $(0,+\infty)$ *функцию* $g(x)$ *из класса* $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)\in L_2(0,+\infty)$. *Почти всюду на* $(0,+\infty)$ *имеет место двойственная формула*

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{h_1(xy)}{y}\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy. \tag{1.20}$$

Доказательство. По теореме A существует предел в среднем на линии $Res=\frac{1}{2}$

$$\text{l. i. m.}_{a\to+\infty}\int_{1/a}^{a}\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\cdot x^{s-1}\,dx,$$

и по лемме 2 этот предел равен $\Phi_1(s)F(s)$. Из (1.17) следует, что

$$K(s)\Phi_1(1-s)F(1-s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right).$$

Если обозначим

$$g(x,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}K(s)\Phi_1(1-s)F(1-s)\,x^{-s}\,ds, \tag{1.21}$$

то по теореме A существует предел в среднем

$$g(x) = \underset{a \to +\infty}{\text{l. i. m.}}\, g(x, a), \tag{1.21'}$$

причем $g(x) \in L_2(0, +\infty)$.

Пусть

$$G(s) = \underset{a \to +\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\, x^{s-1} dx, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{1.22}$$

тогда из (1.21) и (1.22) следует, что

$$G(s) = K(s)\, \Phi_1(1-s)\, F(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \tag{1.23}$$

Далее, из (1.23) и (1.17) заключаем, что

$$\Phi_2(s) G(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right),$$

и в силу леммы 2

$$\Phi_2\left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x) \in L_2(0, +\infty).$$

Из (1.21) имеем:

$$\int_0^x g(u, a)\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{K(s)}{1-s} \Phi_1(1-s)\, F(1-s)\, x^{1-s}\, ds$$

откуда, имея в виду (1.21') и переходя к пределу при $a \to +\infty$, получим формулу

$$\int_0^x g(u)\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{K(s)}{1-s} \Phi_1(1-s)\, F(1-s)\, x^{1-s}\, ds, \tag{1.24}$$

причем интеграл справа сходится в обычном смысле.

По теореме Б формулу (1.24) можно записать в виде:

$$\int_0^x g(u)\, du = \int_0^{\infty} \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y \frac{d}{dy}\right) f(y)\, dy,$$

т. е. утверждение (1.19) установлено.

Из (1.23) и (1.16) получим

$$F(s) = H(s)\, \Phi_2(1-s)\, G(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \tag{1.25}$$

Так как $\Phi_2(1-s)\, G(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$, то в силу (1.18)

$$H(s)\,\Phi_2(1-s)\,G(1-s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right).$$

Обозначим

$$f(x,a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} H(s)\,\Phi_2(1-s)\,G(1-s)\,x^{-s}\,ds,$$

тогда

$$\int\limits_0^x f(u,a)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{H(s)}{1-s}\,\Phi_2(1-s)\,G(1-s)\,x^{1-s}\,ds \qquad (1.26)$$

и так как по теореме A $\lim\limits_{a\to+\infty} f(u,a)=f(u)$, то из (1.26) следует

$$\int\limits_0^x f(u)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H(s)}{1-s}\,\Phi_2(1-s)\,G(1-s)\,x^{1-s}\,ds. \qquad (1.27)$$

По теореме $Б$ формулу (1.27) можно записать в виде

$$\int\limits_0^x f(u)\,du=\int\limits_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\,\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy,$$

т. е. утверждение (1.20) также установлено.

Очевидно, что при $\Phi_1(s)\equiv\Phi_2(s)\equiv 1$ из доказанной теоремы следует теорема Ватсона [1 теорема 129].

Легко видеть, что если взамен (1.17), (1.18) выполняются условия

$$\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}|H(s)\,\Phi_1(s)|<+\infty,\quad \sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}|K(s)|<+\infty,$$

то в теореме 1 утверждения (1.19) и (1.20) меняются местами.

Теорема 2. *Пусть на линии* $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$ *функции* $K(s)$, $H(s)$, $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ *связаны соотношением*

$$K(s)\,H(1-s)\,\Phi_1(1-s)\,\Phi_2(s)=1, \qquad (1.28)$$

где $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)\in\Phi_a$ *или* Φ_b *и*

$$\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}|K(s)\,\Phi_2(s)|<+\infty, \qquad (1.29)$$

$$\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}|H(s)\,\Phi_1(s)|<+\infty. \qquad (1.30)$$

Тогда для любой функции $f(x)$ *из* $L_2(0,+\infty)$ *формула*

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{k_1(xy)}{y}\cdot f(y)\,dy \tag{1.31}$$

определяет почти всюду на $(0,+\infty)$ *функцию* $g(x)$, *также принадлежащую к классу* $L_2(0,+\infty)$. *Почти всюду на* $(0,+\infty)$ *имеет место двойственная формула*

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{h_1(xy)}{y}\,g(y)\,dy. \tag{1.32}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L_2(0,+\infty)$, так что $F(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$. В силу (1.29)

$$K(s)\,\Phi_2(s)\,F(1-s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right).$$

Пусть $g(x)$ — ее преобразование Меллина. Тогда

$$\int_0^x g(u)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{K(s)\,\Phi_2(s)}{1-s}\,F(1-s)\,x^{1-s}ds. \tag{1.33}$$

Но по лемме 2 $\dfrac{K(s)\,\Phi_2(s)}{1-s}$ преобразование Меллина для $\Phi_2\left(-x\dfrac{d}{dx}\right)\dfrac{k_1(x)}{x}$. Поэтому, в силу формулы Парсеваля для преобразований Меллина, (1.33) эквивалентна равенству

$$\int_0^x g(u)\,du=\int_0^{\infty}\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{k_1(xy)}{y}\cdot f(y)\,dy,$$

откуда вытекает, что почти всюду имеет место равенство (1.31). Так как

$$G(s)=K(s)\,\Phi_2(s)\,F(1-s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},$$

то в силу (1.28) следует, что

$$F(s)=H(s)\,\Phi_1(s)\,G(1-s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^x f(u)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H(s)\,\Phi_1(s)}{1-s}\,G(1-s)\,x^{1-s}\,ds. \tag{1.34}$$

Наконец, так как $\frac{H(s)\,\Phi_1(s)}{1-s}$ преобразование Меллина для $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)\frac{h_1(x)}{x}$, то

$$\int_0^x f(u)\,du = \int_0^\infty \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{h_1(xy)}{y}\cdot g(y)\,dy.$$

Справедливо также следующее обобщение теорем 1 и 2, доказательство которого мы опускаем ввиду того, что оно сходно с доказательствами теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть на линии* $s=\frac{1}{2}+it\ (-\infty<t<+\infty)$ *функции* $K(s)$, $H(s)$, $\Phi_1(s)$, $\Psi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\Psi_2(s)$ *связаны соотношением*

$$K(s)\,H(1-s)\,\Phi_1(1-s)\,\Psi_1(1-s)\,\Phi_2(s)\,\Psi_2(s)=1,$$

где $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\Psi_1(s)$, $\Psi_2(s)\in\Phi_a$ *или* Φ_b *и*

$$\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}|K(s)\,\Phi_2(s)\,\Psi_2(s)|<+\infty,$$

$$\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}|H(s)\,\Phi_1(s)|<+\infty.$$

Тогда, для любой функции $f(x)$ *из класса* $\Psi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\in L_2(0,+\infty)$, *формула*

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{k_1(xy)}{y}\Psi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy$$

определяет почти всюду на $(0,+\infty)$ *функцию* $g(x)$ *принадлежащую к классу* $\Psi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)\in L_2(0,+\infty)$. *Двойственная формула*

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{h_1(xy)}{y}\Psi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy$$

также имеет место почти всюду на $(0,+\infty)$.

Теорема 4. *(Аналог равенства Парсеваля). Пусть удовлетворены условия теоремы 1. Тогда для любых функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$, *для которых* $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f_1(x)\in L_2(0,+\infty)$, $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)f_2(x)\in L_2(0,+\infty)$ *имеет место равенство*

$$\int_0^\infty f_1(xy)\,f_2(y)\,dy=\int_0^\infty g_k(xy)\,g_k(y)\,dy,\quad x>0, \tag{1.35}$$

где

$$g_k(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_2(xy)}{y}\,\Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f_1(y)\,dy, \tag{1.36}$$

$$g_h(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\,\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)f_2(y)\,dy. \tag{1.37}$$

При условиях (1.29) и (1.30) имеет место также равенство

$$\int_0^\infty \left|\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f_1(xy)\right|\left|\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)f_2(x)\right|dx=$$

$$=\int_0^\infty \left|\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)g_k(xy)\right|\left|\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g_k(x)\right|dx. \tag{1.38}$$

Доказательство. Если $G_k(s)$ и $G_h(s)$ суть соответственно преобразования Меллина функций $g_k(x)$ и $g_h(x)$, то, как легко видеть, соотношения (1.36) и (1.37) в терминах преобразования Меллина соответственно эквивалентны формулам

$$G_k(s)=K(s)\,\Phi_1(1-s)\,F_1(1-s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}, \tag{1.39}$$

$$G_h(s)=H(s)\,\Phi_2(1-s)\,F_2(1-s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}. \tag{1.40}$$

Из (1.39), (1.40) и (1.16) следует равенство

$$F_1(s)\,F_2(1-s)=G_h(s)\,G_k(1-s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}. \tag{1.41}$$

Умножая (1.41) на $x^{-s}\,(x>0)$ и интегрируя результат по линии $s=\frac{1}{2}+it\ (-\infty<t<+\infty)$ по теореме *Б* получим формулу (1.35). Умножая обе части равенства (1.41) на $\Phi_1(s)\,\Phi_2(1-s)$ и используя тот факт, что при условиях (1.29) и (1.30) $\Phi_1(s)\,G_h(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$ и $\Phi_2(s)\,G_h(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$, по теореме *Б* получим равенство (1.38).

Следствие. а) *При условиях теоремы 1, если функции* $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ и $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ *из класса* $L_2(0,+\infty)$, *то*

$$\int_0^\infty [f(x)]^2\,dx = \int_0^\infty g_h(x)\,g_k(x)\,dx, \tag{1.42}$$

где

$$g_k(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}\,\Phi_1\Big(-y\frac{d}{dy}\Big)f(y)\,dy,$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\,\Phi_2\Big(-y\frac{d}{dy}\Big)f(y)\,dy.$$

б) *Если при условиях теоремы 1 дополнительно полагать, что*

$$\overline{H(1-s)\,\Phi_2(s)} = K(s)\,\Phi_1(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{1.43}$$

то

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |g_k(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |g_h(x)|^2\,dx, \tag{1.44}$$

где

$$g_k(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}\,\Phi_1\Big(-y\frac{d}{dy}\Big)f(y)\,dy,$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\,\Phi_2\Big(-y\frac{d}{dy}\Big)\overline{f(y)}\,dy.$$

Действительно, (1.42) следует из (1.35), если полагать, что $f_2(y) = f_1(y) = f(y)$, $y \in (0, +\infty)$ и $x = 1$. (1.44) следует из (1.35), если в последнем положить $f_1(y) = f(y)$, $f_2(y) = \overline{f(y)}$, $x = 1$ и учесть, что в силу условия (1.43) $G_k(s) = \overline{G_h(1-\bar{s})}$, т. е. $g_k(x) = \overline{g_h(x)}$.

§ 2. Примеры и применения

Теорема 5. *Пусть функции $k(x)$ и $h(x)$ таковы, что*

а)
$$\sup_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} |K(s)\,[\Gamma(s)]^{-1}| < +\infty, \tag{2.1}$$

$$\sup_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} |H(s)| < +\infty, \tag{2.2}$$

б)
$$\int_0^\infty \frac{k(x)\,h_1(ux)}{x}\,dx = \log(1+u), \ (u > 0). \tag{2.3}$$

Тогда, для любой функции $f(x)$ из класса $\Big[\Gamma\Big(-x\frac{d}{dx}\Big)\Big]^{-1} f(x) \in L_2(0, +\infty)$, формула

ПН-3912

$$g(x)=\int_0^\infty k(xy)\left[\Gamma\left(-y\frac{d}{dy}\right)\right]^{-1}f(y)\,dy \tag{2.4}$$

определяет почти всюду на $(0,\infty)$ *функцию* $g(x)$ *из класса* $\left[\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}g(x)\in L_2(0,+\infty)$. *Почти всюду на* $(0,+\infty)$ *имеет место двойственная формула*

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\left[\Gamma\left(-y\frac{d}{dy}\right)\right]^{-1}g(y)\,dy. \tag{2.5}$$

Доказательство. По формуле Парсеваля для преобразований Меллина на (2.3) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty}\frac{H(s)K(1-s)}{1-s}u^{-s}ds=\frac{\log(1+u)}{u},\ (u>0),$$

но

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{1-s}u^{-s}ds=\frac{\log(1+u)}{u},\ (u>0),$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty}\left\{\frac{H(s)K(1-s)}{1-s}-\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{1-s}\right\}u^{-s}ds=0. \tag{2.6}$$

Так как $\dfrac{H(s)K(1-s)}{1-s}-\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{1-s}\in L\left(\frac12-i\infty,\frac12+i\infty\right)$, то по известной теореме (см. [1], теорема 32) из (2.6) имеем

$$K(s)H(1-s)-\Gamma(s)\Gamma(1-s)=0,\ \mathrm{Re}\,s=\frac12. \tag{2.7}$$

Далее заметим, что по формуле дополнения $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi[\sin\pi s]^{-1}$, поэтому

$$\left|\Gamma\left(\frac12+it\right)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi t}}.$$

Отсюда получим оценку

$$\left|\Gamma\left(\frac12+it\right)\right|^{-1}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\pi}{2}|t|},$$

т. е. $[\Gamma(s)]^{-1}\in\Phi_b$.

Положив в теореме 1 $\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = [\Gamma(s)]^{-1}$, $\left(\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\right)$, из (2.7) получим

$$K(s) H(1-s) \Phi_1(1-s) \Phi_2(s) = 1, \ \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}.$$

Иначе говоря, удовлетворено условие (1.16).

Из (2.1) и (2.2) следует, что выполняются и условия (1.17), (1.18) теоремы 1, из которой и следует наше утверждение.

Теорема 5'. *Пусть удовлетворены условия (2.2) и (2.3) теоремы 5, а вместо (2.1) удовлетворяется условие:*

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left| K\left(\frac{1}{2} + it\right) e^{\pi|t|} \right| < +\infty. \tag{2.8}$$

Тогда, для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(0, +\infty)$, формула

$$g(x) = \int_0^\infty k(xy) f(y)\, dy \tag{2.9}$$

определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ из класса $\sin \pi\left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \sin \pi\left(-y \frac{d}{dy}\right) g(y)\, dy, \tag{2.10}$$

где

$$\sin \pi\left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\pi x \frac{d}{dx}\right)^{2k}}{(2k)!} \sqrt{x} f(x). \tag{2.11}$$

Доказательство. Так как

$$\left| \sin \pi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = |\operatorname{ch} \pi t| > \frac{1}{2} e^{\pi|t|},$$

то ясно, что $\sin \pi s \in \Phi_b$.

Положив в теореме 1 $\Phi_1(s) \equiv 1 \in \Phi_a$ и $\Phi_2(s) = \pi^{-1} \sin \pi s \in \Phi_b$, в силу (2.7) имеем:

$$K(s) H(1-s) \Phi_1(1-s) \Phi_2(s) = 1, \ \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2},$$

т. е. удовлетворяется условие (1.16). Из (2.2) и (2.8) следует, что выполняются также условия (1.17) и (1.18) теоремы 1, которая и устанавливает наше утверждение.

Так как

$$\sin\pi\left(\frac{1}{2}+it\right)=\operatorname{ch}\pi t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}t^{2k},$$

то в качестве последовательностей полиномов $\left\{P_n\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\}$ $(n=0, 1, \dots)$ можно взять

$$P_n\left(\frac{1}{2}+it\right)=Q_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}t^{2k},$$

так как удовлетворяется условие (1.8). Тогда

$$\sin\pi\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)=\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\,P_n\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\,Q_n\left(ix\frac{d}{dx}\right)\sqrt{x}f(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\left(\pi x\frac{d}{dx}\right)^{2k}}{(2k)!}\sqrt{x}f(x),$$

т. е. (2.11) доказано.

Следствие. *Интегральное преобразование Стильтьеса*

$$g(x)=\int_0^{\infty}\frac{f(y)}{x+y}dy,\quad f(y)\in L_2(0,+\infty) \tag{2.12}$$

обращается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sin\pi\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x). \tag{2.13}$$

Действительно, положив в теореме 5′

$$k(x)=\frac{1}{1+x},\quad H(s)=1,$$

убеждаемся, что все условия теоремы 5′ выполняются, если $\Phi_1(s)\equiv 1$, $\Phi_2(s)=\pi^{-1}\sin\pi s$. Поэтому интегральное преобразование

$$g(x)=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(y)}{1+xy}dy,\quad \varphi(y)\in L_2(0,+\infty) \tag{2.14}$$

обращается формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{h_1(xy)}{y}\sin\pi\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy, \tag{2.15}$$

где

$$h_1(x)=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & 0<x<1.\end{cases} \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует

$$\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\pi}\sin\pi\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x). \tag{2.17}$$

Обозначая $\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\in L_2(0,+\infty)$, из (2.14) и (2.17) получаем (2.12) и (2.13).

Эта формула обращения преобразования Стильтьеса содержится в книге Винера-Палея [3].

Заметим, что в данном случае выполняется не только условие

$$\sup_{\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}}|K(s)\Phi_2(s)|<+\infty,$$

но и условие

$$\sup_{\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}}|H(s)\Phi_1(s)|<+\infty.$$

Поэтому верно и обратное утверждение, а именно, что решение уравнения

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sin\pi\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x),$$

где $f(x)\in L_2(0,+\infty)$, запишется в виде (2.12).

Последнее утверждение для функции $f(x)$ из класса $\sqrt{x}f(x)\in C\cdot B(0,+\infty)$ (т. е. функция $\sqrt{x}f(x)$ непрерывна и ограничена), при граничных условиях:

$$g(x)=O(1),\ x\to\infty,$$
$$xg(x)=O(1),\ x\to 0,$$

следует из теоремы Хиршмана и Уиддера (см. [7], гл. III, теорема 8.3).

Получим формулу обращения для обобщенного преобразования Стильтьеса.

Теорема 6. *Для любой функции* $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ *формула*

$$g(x)=\Gamma(1+\alpha)\int_0^\infty\frac{y^\alpha f(y)}{(x+y)^{1+\alpha}}\,dy,\ (\mathrm{Re}\,\alpha\geqslant 0) \tag{2.18}$$

определяет почти всюду на $(0,+\infty)$ *функцию* $g(x)$ *из класса*

$$\left[\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)\Gamma\left(1+\alpha+x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}g(x)\in L_2(0,+\infty).$$

Почти всюду на $(0,+\infty)$ *имеет место двойственная формула*

$$f(x)=\left[\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)\Gamma\left(1+\alpha+x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}g(x). \tag{2.19}$$

Доказательство. Из формулы Стирлинга можно легко получить, что функция $|\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)|^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\Gamma(1/2+\alpha-it)\right|^{-1}>ce^{\pi|t|-\alpha\log|t|},\ |t|\geqslant t_0$$

т. е. $|\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)|^{-1}\in\Phi_b$. Поэтому, полагая в теореме 1 $K(s)=\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)$, $H(s)\equiv 1$, $\Phi_1(s)\equiv 1$, $\Phi_2(s)=|\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)|^{-1}\in\Phi_b$, получаем, что все условия теоремы 1 удовлетворяются. Следовательно, преобразование

$$g(x)=\Gamma(1+\alpha)\int_0^\infty\frac{\varphi(y)}{(1+xy)^{1+\alpha}},\ \varphi(y)\in L_2(0,\infty),\tag{2.20}$$

обращается формулой

$$\varphi(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{h_1(xy)}{y}\left[\Gamma\left(-y\frac{d}{dy}\right)\Gamma\left(1+\alpha+y\frac{d}{dy}\right)\right]^{-1}g(y)\,dy,\tag{2.21}$$

где $h_1(x)$ определяется из (2.16).

Из (2.21) следует, что

$$\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\left[\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)\Gamma\left(1+\alpha+x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}g(x).\tag{2.22}$$

Обозначая $\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\in L_2(0,+\infty)$, по (2.20) и (2.21) убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Легко видеть, что здесь также имеет место обратное утверждение, что решение уравнения (2.19), где $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ задано, дается формулой (2.18).

Теорема 7. *Для любой функции $f(x)$ из класса $\sin\pi\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\in L_2(0,+\infty)$ формула*

$$g(x)=\frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-y)^{\alpha-1}\sin\pi\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy,\ Re\alpha>0\tag{2.23}$$

определяет функцию $g(x)$ из класса $x^{-\alpha}g(x)\in L_2(0,+\infty)$. Почти всюду на $(0,+\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x)=\Gamma(1+\alpha)\int_0^\infty\frac{g(y)}{(x+y)^{1+\alpha}}\,dy.\tag{2.24}$$

Доказательство. Положим $K(s)=\Gamma(s)[\Gamma(s+\alpha)]^{-1}$, $H(s)=\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)$, $\Phi_2(s)=1$, $\Phi_1(s)=\pi^{-1}\sin\pi s$. Так как (см. [1], стр. 251)

$$k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(1-x)^{\alpha-1}, & 0<x<1, \quad Re\,\alpha>0\\ 0, & x>1\end{cases}$$

$$h(x)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1+x)^{1+\alpha}},$$

то по теореме 1 интегральное преобразование

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{1}{x}}(1-xy)^{\alpha-1}\sin\pi\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy, \tag{2.25}$$

где $\sin\pi\left(-x\dfrac{d}{dx}\right)f(x)\in L_2(0,+\infty)$, обращается формулой

$$f(x)=\Gamma(1+\alpha)\int_0^{\infty}\frac{\varphi(y)}{(1+xy)^{1+\alpha}}\,dy. \tag{2.26}$$

или, обозначая $x^{\alpha-1}\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=g(x)$, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 8. *Пусть* $\rho>\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<\mu<\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{2}$, *тогда интегральное преобразование*

$$g(x)=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{\infty}E_{\rho}\left(-x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}};\mu\right)(xy)^{\mu-1}f(y)\,dy, \tag{2.27}$$

где $f(x)\in L_2(0,+\infty)$; $E_{\rho}(z;\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)}$ —

функция типа Миттаг-Лефлера, обращается формулой

$$f(x)=\left[\sin\pi\rho\left(\mu+x\frac{d}{dx}\right)\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)\right]\left\{\frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Так как

$$\left|\sin\pi\rho\left(\mu-\frac{1}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|>ce^{-\left(\rho-\frac{1}{2}\right)|t|}, \quad |t|>t_0,$$

где c — постоянная, не зависящая от t, то при $\rho>\dfrac{1}{2}$

$$\sin\pi\rho(s+\mu-1)\times\Gamma(1-s)\in\Phi_b.$$

Положим в теореме 1 $K(s)=[\sin\pi\rho(s+\mu-1)\Gamma(1-s)]^{-1}$, $H(s)=1$, $\Phi_1(s)=1$, $\Phi_2(s)=\sin\pi\rho(s+\mu-1)\Gamma(1-s)$ и заметим, что ([8], стр. 151)

$$k(x)=\frac{1}{\pi\rho}E_{\rho}\left(-x^{\frac{1}{\rho}};\mu\right)x^{\mu-1}$$

и $$h_1(x)=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & 0<x<1.\end{cases}$$

Тогда приходим к выводу, что преобразование

$$g(x)=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^\infty E_\rho\left(-x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}};\mu\right)(xy)^{\mu-1}f(y)\,dy,\ f(y)\in L_2(0,\infty)$$

обращается формулой

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{h_1(xy)}{y}\left[\sin\pi\rho\left(-y\frac{d}{dy}+\mu-1\right)\Gamma\left(1+y\frac{d}{dy}\right)\right]g(y)\,dy, \quad (2.29)$$

эквивалентной формулам

$$\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\left[\sin\pi\rho\left(-x\frac{d}{dx}+\mu-1\right)\Gamma\left(1+x\frac{d}{dx}\right)\right]g(x),$$

или

$$f(x)=\left[\sin\pi\rho\left(\mu+x\frac{d}{dx}\right)\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)\right]\left\{\frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Следствие. *Интегральное преобразование Лапласа*

$$g(x)=\int_0^\infty e^{-xy}f(y)\,dy,\ f(y)\in L_2(0,\infty) \quad (2.30)$$

обращается формулой

$$f(x)=\left[\Gamma\left(1+x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}\left\{\frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}. \quad (2.31)$$

Действительно, полагая в (2.27) $\rho=\mu=1$, приходим к нашему утверждению.

Формула обращения (2.31) была получена Поллардом [4] в несколько иной форме.

Получим теперь еще одну формулу обращения для преобразования Лапласа.

Теорема 9. *Интегральное преобразование (2.30) обращается формулой:*

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{1-\cos xy}{y}\sin\frac{\pi}{2}\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy. \quad (2.32)$$

Доказательство. Так как

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\pi t}{2}}>\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}|t|},$$

то $\sin\frac{\pi}{2}s\in\Phi_b$.

Полагая в теореме 1, $K(s)=\Gamma(s)$, $H(s)=\frac{2}{\pi}\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s$, $\Phi_1(s)=1$, $\Phi_2(s)=\sin\frac{\pi}{2}s$ и проверяя справедливость всех условий, приходим к нашему утверждению.

Теорема 10. *Для любой функции $f(x)$ из класса*

$$\left[\Gamma\left(1+x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}f(x)\in L_2(0,+\infty)$$ *формула*

$$g(x)=[\Gamma(n+1)]^2\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+xy)^{n+1}}P_n\left(\frac{1-xy}{1+xy}\right)\left[\Gamma\left(1+y\frac{d}{dy}\right)\right]^{-1}f(y)\,dy, \tag{2.33}$$

где $P_n(x)$ – полином Лежандра n-го порядка, определяет почти всюду на $(0,+\infty)$ функцию $g(x)$ из класса $\left[\Gamma\left(n+1+x\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}$ $g(x)\in L_2(0,+\infty)$. Почти всюду на $(0,+\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{1}{x}}(1-xy)^{n-1}\left[\Gamma\left(n+1+y\frac{d}{dy}\right)\right]^{-1}g(y)\,dy. \tag{2.34}$$

Доказательство. Положим $K(s)=\Gamma(s)[\Gamma(n+1-s)]^2[\Gamma(1-s)]^{-1}$, $H(s)=\Gamma(s)[\Gamma(n+s)]^{-1}$, $\Phi_1(s)=[\Gamma(1-s)]^{-1}$; $\Phi_2(s)=[\Gamma(n+1-s)]^{-1}$.

В силу оценки

$$\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-it\right)\right|^{-1}>ce^{\frac{\pi}{2}|t|-n\ln|t|}$$

имеем $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)\in\Phi_b$. Так как (см. [1], стр. 251)

$$k(x)=[\Gamma(n+1)]^2\frac{1}{(1+x)^{n+1}}P_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

и

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n)}(1-x)^{n-1}, & 0<x<1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

то утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Можно привести многочисленные примеры применения других теорем § 1, но в данной статье мы на этом остановливаться не будем.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 V 1959

Ս. Ա. Հակոբյան

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ, ԿԱՊՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՀԵՏ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ինչպես հայտնի է [1], [2], եթե $K(s)$ և $H(s)$ ֆունկցիաները սահմանված են միայն $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$ գծի վրա, երկուսն էլ սահմանափակ են և բավարարում են

$$K(s)H(1-s)=1,\quad \mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2} \tag{1}$$

ֆունկցիոնալ հավասարմանը, ապա նրանք ծնում են որոշակի ինտեգրալ ձևափոխություններ $L_2(0,+\infty)$ դասում. այն է՝ եթե $\frac{k_1(x)}{x}$ և $\frac{h_1(x)}{x}$ համապատասխանաբար $\frac{K(s)}{1-s}$ և $\frac{H(s)}{1-s}$ ֆունկցիաների Մելլինի ձևափոխություններն են, ապա $L_2(0,+\infty)$ դասի յուրաքանչյուր $f(x)$ ֆունկցիա ունի երկու ձևափոխություններ, որոնք $(0,+\infty)$-ի վրա համարյա ամենուրեք որոշվում են

$$g_k(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}f(y)\,dy,$$

$$g_h(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}f(y)\,dy$$

բանաձևերով։ Ընդ որում, $g_k(x)$ և $g_h(x)$ ֆունկցիաները $L_2(0,+\infty)$ դասից են, և համարյա ամենուրեք $(0,+\infty)$-ի վրա իրավացի են

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}g_k(y)\,dy,$$

$$x\in(0,+\infty)$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}g_h(y)\,dy$$

շրջման բանաձևերը։

Ներկա հոդվածի § 1-ում կառուցվում են ուղիղ և հակադարձ ինտեգրալ ձևափոխություններ այն դեպքում, երբ $K(s)$ և $H(s)$ ֆունկցիաները (1)-ի փոխարեն բավարարում են

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s)=1, \quad \mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}$$

տեսքի ֆունկցիոնալ հավասարմանը $\Phi_1(s)$ և $\Phi_2(s)$ ֆունկցիաների վրա դրված որոշակի սահմանափակումների դեպքում:

Սահմանելով $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ և $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)$ օպերատորների իմաստը, ցույց է տրվում, որ $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)\in L_2(0,+\infty)$ դասի ցանկացած ֆունկցիայի համար

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}\Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy$$

բանաձևը համարյա ամենուրեք $(0,+\infty)$-ի վրա որոշում է $g(x)$ ֆունկցիա $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)\in L_2(0,+\infty)$ դասից: Դրա հետ մեկտեղ համարյա ամենուրեք $(0,+\infty)$ միջակայքում տեղի ունի շրջման բանաձևը՝

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy:$$

Այստեղ ստացված արդյունքներն իրենցից ներկայացնում են Պլանշերել-Վատսոնի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության հետագա զարգացումը: § 2-ում բերվում են § 1-ում ապացուցված թեորեմների տարբեր հետևանքներ:

Մասնավորապես, $\Phi_1(s)\equiv 1$ դեպքում բերվում են շրջման բանաձևեր մի քանի հայտնի ինտեգրալ ձևափոխությունների (Մոելլերսի, Լապլասի և այլն) համար $L_2(0,+\infty)$ դասում, որոնք Պալեյ-Վիների [3] և Պոլլարդի [4] կողմից ստացված էին այլ ճանապարհով:

Բացի դրանից, § 1-ի արդյունքների հիման վրա բերվում են, ինտեգրալ ձևափոխությունների մի քանի նոր հատուկ դասերի համար, շրջման բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. *Kober H.* Eine Verallgemeinerung der Transformationen vom Fourier-Typ. The Quart. Journ. of Math., 8, № 31, 1937, 172-185.
3. *Paley and Wiener N.* Fourier Transforms in the complex domain. New York, 1934.
4. *Pollard H.* Integral Transforms, Duke Math. Journ., Vol. 13, 1946, 307—330.
5. *Джрбашян М. М.* Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сб., т. 36 (78), № 3, 1955.
6. *Pollard H.* Solution of Bernstein's approximation problem. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 4, 1953, 869—875.
7. *Хиршман И. И.* и *Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки. ИЛ, М., 1958.
8. *Джрбашян М. М.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применение в теории целых функций. Известия АН СССР, сер. матем., 19, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре оператора $-\Delta u + pLu + \int K(Q, P)\, u(P)\, dP$ на плоскости

Вопрос о строении спектра сингулярного оператора $-u'' + pu$ с комплексным потенциалом $p(x)$ был впервые изучен М. А. Наймарком [1], который для получения соответствующих результатов пользовался найденной им асимптотикой решений уравнения $-u'' + pu = \lambda u$ на полуоси. Совершенно иной подход к решению этой задачи был указан в заметке [2] И. М. Гельфанда. Дальнейшее развитие этот метод получил в диссертации автора, посвященной спектру несамосопряженного оператора Шредингера и выполненной под руководством И. М. Гельфанда в 1954 году. Аналогичный метод использован в настоящей работе для изучения спектра операторов вида

$$Tu = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)\, u(P)\, dP,$$

рассматриваемых на всей эвклидовой плоскости E. Здесь L — ограниченный оператор в $L_2(E)$, а $p(Q)$ и $K(Q, P)$ подчинены определенным условиям. Однако, из-за наличия интегрального оператора и оператора L, пришлось по существу дать новые доказательства, изложение которых будет приведено ниже. Заметим, что результаты теорем 1, 3 и 4 в том частном случае, когда $K(Q, P) \equiv 0$, а оператор L сводится к единичному, были получены в диссертации автора (формулировка их без доказательства приведена в обзорной статье М. А. Наймарка [3]) и в развернутой форме публикуются впервые. Отметим, наконец, что вопрос об изучении спектра операторов рассматриваемого вида возник в связи с задачей, впервые предложенной М. М. Джрбашяном, о разложении по собственным функциям оператора

$$-u'' + pu + \int_0^x K(x, t)\, u(t)\, dt,$$

решение которой на конечном промежутке дано в работе А. Н. Нерсесяна [4].

С целью четкой формулировки задачи напомним ряд известных фактов и условимся о некоторых обозначениях. Условимся прежде

всего через E обозначать обычную эвклидову плоскость, а через $L_2(E)$ — гильбертово пространство функций, определенных на всей плоскости E и суммируемых с квадратом. Далее, обозначим через Ω область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E)$. Как известно, этот оператор получается замыканием в $L_2(E)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на всех финитных функциях. Известно также, что оператор $-\Delta u$ обладает чисто непрерывным спектром, совпадающим с положительной полуосью. Таким образом, для точек λ комплексной плоскости, лежащих вне положительной полуоси, существует резольвента оператора $-\Delta u$, которую мы будем обозначать через $B_\lambda u$ и интегральное представление которой также хорошо известно. Именно, если λ находится вне положительной полуоси, то при любом $f(Q) \in L_2(E)$, уравнение

$$-\Delta u - \lambda u = f \qquad (u \in \Omega) \tag{1}$$

имеет одно и только одно решение из Ω, которое выражается формулой

$$u(Q) = B_\lambda f = \frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda}\, r_{QP})\, f(P)\, dP \qquad (Im\sqrt{\lambda} > 0), \tag{2}$$

где r_{QP} означает расстояние между точками Q и P, $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а через $H_0(z)$ мы обозначили, опустив верхний индекс, функцию Ханкеля первого рода. В дальнейшем мы будем часто пользоваться известным интегральным представлением этой функции [5]

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{i\xi}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \tag{3}$$

которое справедливо для всех $z \neq 0$, $\arg z \neq \frac{3\pi}{2}$, причем радикалы выбираются так, чтобы при $\arg z = \frac{\pi}{2}$ было

$$\arg \sqrt{z} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \arg\left(1 + \frac{i\xi}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Считая теперь комплекснозначные функции $p(Q)$ и $K(Q, P)$ такими, что

$$\int_E |p(Q)|^2\, dQ < \infty, \qquad \int_E \int_E |K(Q, P)|^2\, dQ dP < \infty, \tag{4}$$

причем $p(Q)$ ограничена, и обозначая через L произвольный линейный ограниченный (несамосопряженный) оператор в $L_2(E)$, введем в рассмотрение оператор

$$Tu = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)\, u(P)\, dP, \quad (u \in \Omega) \tag{5}$$

определенный на указанном выше многообразии Ω.

Наиболее общий результат о спектре этого оператора составляет содержание нижеследующей теоремы, где утверждение о совпадении „непрерывного" спектра несамосопряженного оператора T с положительной полуосью следует понимать в том смысле, что ни одна точка положительной полуоси не может быть регулярной точкой оператора T (повидимому правильнее было бы говорить о „сплошном" спектре этого оператора, но вряд ли целесообразно вводить здесь новый термин).

Теорема 1. Непрерывный спектр оператора T совпадает с положительной полуосью, а точки спектра, лежащие в остальной части комплексной плоскости, могут быть лишь собственными значениями, не имеющими точек накопления вне положительной полуоси.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$Tu - \lambda u = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)\, u(P)\, dP - \lambda u = f, \tag{6}$$

где $f(Q) \in L_2(E)$. В силу (2) оно эквивалентно уравнению

$$u = B_\lambda f - C_\lambda u, \tag{7}$$

где положено

$$C_\lambda u = B\left\{ pLu + \int_E K(Q, P)\, u(P)\, dP \right\}. \tag{8}$$

Покажем, что оператор C_λ вполне непрерывен. Действительно, в силу полной непрерывности интегрального оператора [это следует из (4)] достаточно установить, что оператор $B_\lambda\{pLu\}$ является вполне непрерывным. Но

$$B_\lambda\{pLu\} = \frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda}\, r_{MQ})\, p(Q)\, Lu(Q)\, dQ$$

и, поскольку оператор L ограничен, достаточно показать, что ядро $H_0(\sqrt{\lambda}\, r_{MQ})\, p(Q)$ — типа Гильберта-Шмида. Действительно, интеграл

$$\int_E |H_0(\sqrt{\lambda}\, r_{MQ})|^2\, dM$$

существует (это следует из известной асимптотики функции Ханкеля) и не зависит от выбора точки Q, ибо интегрирование ведется по всему пространству. Поэтому

$$\int_E\int_E |H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})p(Q)|^2\,dQdM = \int_E\left\{\int_E |H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|^2\,dM\right\}|p(Q)|^2\,dQ =$$

$$= \int_E |H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|^2\,dM \cdot \int_E |p(Q)|^2\,dQ < \infty,$$

что и доказывает полную непрерывность оператора C_λ.

Допустим теперь, что неположительное λ не является собственным значением оператора T. Это значит, что однородное уравнение (6), а следовательно и однородное уравнение (7) (получающееся при $B_\lambda f = 0$), имеют лишь тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение (7), а поэтому и эквивалентное ему уравнение (6), разрешимы при любой $f(Q) \in L_2(E)$. Отсюда, благодаря замкнутости оператора T, заключаем, что существует ограниченная резольвента $(T-\lambda E)^{-1}$ и поэтому λ является регулярной точкой оператора T. Это доказывает, что точками спектора этого оператора, лежащими вне положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения. Эти собственные значения являются, очевидно, собственными значениями для уравнения

$$u = -C_\lambda u.$$

Но поскольку вполне непрерывный оператор C_λ аналитически зависит от параметра λ вне положительной полуоси (ибо этим свойством обладает оператор B_λ), то в силу теоремы Келдыша ([6] и [2]) собственные значения оператора T не могут иметь предельных точек вне положительной полуоси.

Переходя к доказательству первой части теоремы, покажем сперва, что если при некотором неположительном λ существует ограниченная резольвента $R_\lambda = (T-\lambda E)^{-1}$ оператора T, то она представляется в виде

$$R_\lambda f = B_\lambda f + K_\lambda f, \tag{9}$$

где оператор K_λ вполне непрерывен. Действительно, наше предположение означает, что однородное уравнение (6), а следевательно и однородное уравнение (7) (получающееся при $B_\lambda f = 0$), имеют лишь тривиальное решение. Поэтому существует оператор $(E+C_\lambda)^{-1}$. Далее, легко проверить, что

$$(E+C_\lambda)^{-1} = E - C_\lambda(E+C_\lambda)^{-1}. \tag{10}$$

С другой стороны, $R_\lambda f$ является решением уравнения (6), а следовательно и уравнения (7). Поэтому

$$R_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda R_\lambda f,$$

откуда, в силу (10),

$$R_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda(E+C_\lambda)^{-1}B_\lambda f$$

и достаточно положить

$$K_\lambda = -C_\lambda(E+C_\lambda)^{-1}B_\lambda.$$

чтобы получить представление (9), ибо полная непрерывность K_λ очевидна.

Допустим теперь, что некоторое положительное $\lambda=\lambda_0>0$ является регулярной точкой оператора T, т. е. что существует ограниченная резольвента R_{λ_0} этого оператора при $\lambda=\lambda_0$. Введем в рассмотрение уравнение

$$-\Delta u-\lambda_0 u=Tu-pLu-\int_E K(Q, P)\,u(P)\,dP-\lambda_0 u=f, \tag{11}$$

которое, очевидно, эквивалентно уравнению

$$u=R_{\lambda_0}f+R_{\lambda_0}Su, \tag{12}$$

где положено

$$Su=pLu+\int_E K(Q, P)\,u(P)\,dP.$$

Покажем, что оператор $R_{\lambda_0}S$ вполне непрерывен. Для этого заметим, что из существования R_{λ_0} следует существование R_λ в некоторой окрестности $\lambda=\lambda_0$. Выберем из этой окрестности последовательность неположительных $\lambda=\lambda_n$ так, чтобы $\lambda_n\to\lambda_0$. Как известно, будем иметь $\|R_{\lambda_n}-R_{\lambda_0}\|\to 0$. В силу ограниченности оператора S, отсюда получаем, что $\|R_{\lambda_n}S-R_{\lambda_0}S\|\to 0$. Поэтому полная непрерывность оператора $R_{\lambda_0}S$ будет установлена, если мы убедимся в полной непрерывности операторов $R_{\lambda_n}S$. Но это очевидное следствие представления (9), ибо полная непрерывность операторов $B_{\lambda_n}S=C_{\lambda_n}$ была установлена выше. Заметим теперь, что однородное уравнение, соответствующее (11),

$$-\Delta u-\lambda_0 u=0$$

имеет, как известно, лишь тривиальное решение, ибо все положительные λ принадлежат непрерывному спектру оператора $-\Delta u$. Таким образом и однородное уравнение, соответствующее (12) (получающееся при $R_{\lambda_0}f=0$), имеет лишь тривиальное решение. Но тогда, в силу альтернативы Фредгольма, уравнение (12), следовательно и равносильное ему уравнение (11), разрешимы при любой правой части. Это означает, что при $\lambda=\lambda_0$ существует резольвента оператора $-\Delta u$, определенная на всем гильбертовом пространстве $L_2(E)$. В силу замкнутости оператора $-\Delta u$, эта резольвента ограничена и поэтому $\lambda=\lambda_0$ является регулярной точкой оператора $-\Delta u$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. Обозначим $\|K\|^2=\int_E\int_E |K(Q, P)|^2\,dQdP$ и предположим, что $|p(Q)|\leqslant M$. Тогда весь спектр оператора T лежит внутри параболы $\eta^2=4\alpha(\alpha+\xi)$, где $\alpha=\frac{\pi}{2}\sqrt{M^2\|L\|^2+\|K\|^2}$, $\xi=Re\lambda$, $\eta=Im\lambda$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $z=x+iy$ и $Imz=y>0$, то, как легко видеть, при $\xi\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\left|1+\frac{i\xi}{2z}\right|^{-\frac{1}{2}}\leqslant 1.$$

Поэтому из (3) следует, что

$$|H_0(z)|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{e^{-y}}{|\sqrt{z}|}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}d\xi\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\quad(y=Imz>0).\tag{13}$$

Отсюда при $Im\sqrt{\lambda}=\tau>0$ получаем

$$\int_E|H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|\,dQ=2\pi\int_0^\infty|H_0(\sqrt{\lambda}r)|\,rdr\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-\tau r}}{\sqrt{\tau r}}rdr=$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau^2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\tau^2}.\tag{14}$$

Пусть теперь $u(Q)$ является собственной функцией оператора T при некотором неположительном λ, т. е. $Tu-\lambda u=0$. Как мы уже знаем, $u(Q)$ удовлетворяет уравнению

$$u(M)=-\frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})\left[p(Q)Lu(Q)+\int_E K(Q,P)u(P)\,dP\right]dQ.\tag{15}$$

Применяя неравенство Буняковского и считая $u(Q)$ нормированной, получим

$$|u(M)|^2\leqslant\frac{1}{16}\int_E|H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|\,dQ\cdot\int_E|H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|\times$$

$$\times\left\{2M^2|Lu(Q)|^2+2\int_E|K(Q,P)|^2\,dP\right\}dQ.$$

Заметив теперь, что интегрирование функции $|H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|$ по одной из переменных дает константу, не зависящую от другой переменной (ибо интегрирование ведется по всему пространству E), немедленно получаем, интегрируя последнее неравенство по переменной M,

$$1\leqslant\frac{1}{8}\left(\int_E|H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})|\,dQ\right)^2\{M^2\|L\|^2+\|K\|^2\},$$

или в силу (14)

$$\tau^4\leqslant\frac{\pi^2}{4}\{M^2\|L\|^2+\|K\|^2\}.$$

Заметим, далее, что если $\lambda=\xi+i\eta$, а $\sqrt{\lambda}=\sigma+i\tau$, то, как легко видеть, $\eta^2=4\tau^2(\tau^2+\xi)$. Чтобы доказать теорему, остается воспользоваться последним неравенством.

Прежде, чем сформулировать теорему 3, примем следующее

Определение 1. Будем говорить, что оператор L ограничен над многообразием ограниченных функций из $L_2(E)$, если существует некоторая константа, которую мы обозначим через $\|L\|_c$, такая, что для всех $u(Q)\in L_2(E)$ выполняется неравенство

$$|Lu(Q)|\leqslant\|L\|_c\sup|u(Q)|. \tag{16}$$

Теорема 3. Пусть оператор L ограничен над многообразием ограниченных функций из $L_2(E)$ (определение 1), а функция $p(Q)$ и интеграл

$$\int_E|K(Q, P)|dP \tag{17}$$

являются ограниченными и суммируемыми функциями точки Q. Тогда дискретный спектр оператора T ограничен.

Доказательство. Заметим сперва, что если $Im\sqrt{\lambda}>0$, то из неравенства (13) следует

$$|H_0(\sqrt{\lambda}r)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}|\lambda|^{-\frac{1}{4}}r^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Отметим также, что все функции $u(Q)\in\Omega$ являются ограниченными, ибо представляются в виде

$$u(Q)=B_\lambda f=\frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{QP})f(P)\,dP,$$

откуда

$$|u(Q)|^2\leqslant\frac{1}{16}\int_E|H_0(\sqrt{\lambda}r_{QP})|^2dP\cdot\int_E|f(P)|^2dP.$$

Пусть теперь $u(Q)$ некоторая собственная функция, соответствующая собственному значению λ оператора T. Как нам известно, $u(Q)$ должно удовлетворять уравнению

$$u(M)=-\frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})p(Q)Lu(Q)\,dQ-$$

$$-\frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ})\left\{\int_E K(Q, P)u(P)\,dP\right\}dQ.$$

Используя оценку (18) и неравенство (16), получаем отсюда

$$|u(M)|\leqslant\sup|u(Q)|\cdot|\lambda|^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|L\|_c\cdot\int_E\frac{|p(Q)|}{\sqrt{r_{MQ}}}dQ+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_E \frac{1}{\sqrt{r_{MQ}}}\left(\int_E |K(Q,P)|\,dP\right)dQ\Big\}. \tag{19}$$

Но в силу ограниченности и суммируемости функции $p(Q)$ и интеграла (17), выражение в фигурных скобках ограничено некоторой константой A, не зависящей ни от выбора точки M, ни от значения параметра λ. Таким образом окончательно

$$\sup|u(Q)| \leqslant A|\lambda|^{-\frac{1}{4}}\sup|u(Q)|.$$

Но поскольку $u(Q)$ ограничена, отсюда следует, что $|\lambda| \leqslant A^4$, что и доказывает теорему.

Замечание. Теорема остается в силе, если при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует интеграл

$$\int_E\int_E e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q,P)|^2\,dQdP < \infty,$$

ибо и в этом случае последний интеграл в правой части (19) допускает оценку, не зависящую от выбора точки M (здесь r_Q означает расстояние точки Q до начала координат). Действительно, дважды пользуясь неравенством Буняковского, легко убедиться, что

$$\left\{\int_E \frac{1}{\sqrt{r_{MQ}}}\left(\int_E |K(Q,P)|\,dP\right)dQ\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_E e^{-\varepsilon_0 r_P}dP \cdot \int_E \frac{e^{-\varepsilon_0 r_Q}}{r_{MQ}}dQ \cdot \int_E\int_E e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P}|K(Q,P)|^2\,dQdP,$$

и очевидно, что второй интеграл в правой части допускает оценку, не зависящую от выбора точки M.

Чтобы получить более точные сведения о предельных точках дискретного спектра оператора T, мы введем в рассмотрение, при определенных предположениях относительно $p(Q)$ и $K(Q,P)$, следующую функцию

$$K^*(Q,P;\sqrt{\lambda}) = -\frac{i}{4}S_1(Q,P;\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{16}S_2(Q,P;\sqrt{\lambda}) -$$

$$-\frac{1}{16}S_3(Q,P;\sqrt{\lambda}), \tag{20}$$

где положено

$$S_1(Q,P;\sqrt{\lambda}) = \int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{QQ_1})\,K(Q_1,P)\,dQ_1, \tag{21}$$

$$S_2(Q,P;\sqrt{\lambda}) = p(P)\int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{QP_1})\,H_0(\sqrt{\lambda}r_{P_1P})\,p(P_1)\,dP_1, \tag{22}$$

$$S_3(Q, P; \sqrt{\lambda}) = \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QP_1}) S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda})\, p(P_1)\, dP_1. \tag{23}$$

Нужное нам в дальнейшем свойство функции $K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})$ устанавливается во второй из следующих двух лемм.

Лемма 1. Пусть $G_{\delta, R}$ — область в плоскости комплексной переменной λ, состоящая из тех λ, для которых $|\lambda| < R$, $Im\lambda \geqslant -\delta$ и кроме того $|\lambda| \geqslant \delta$ при $Im\lambda > 0$, а $|Re\lambda| \geqslant \delta$ при $Im\lambda < 0$. Тогда существует константа $\gamma(\delta, R)$, зависящая лишь от δ и R, такая, что неравенство

$$|\hat{r}I_0(\lambda r)| \leqslant \gamma(\delta, R) \frac{e^{\delta r}}{\sqrt{r}} \tag{24}$$

выполняется при всех $\lambda \in G_{\delta, R}$ и всех положительных r.

Доказательство. Очевидно, что

$$\left|1 + \frac{i\xi}{2\lambda r}\right|^{-\frac{1}{2}} < \left|\frac{\lambda}{Re\lambda}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, при $Im\lambda > 0$ левая часть этого неравенства не превосходит единицы. Поэтому в области $G_{\delta, R}$ имеем

$$\left|1 + \frac{i\xi}{2\lambda r}\right|^{-\frac{1}{2}} \leqslant \max\left\{1, \sqrt{\frac{R}{\delta}}\right\}.$$

Теперь уже требуемое неравенство непосредственно вытекает из (3).

Лемма 2. Пусть при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполняются неравенства

$$|p(Q) e^{\varepsilon_0 r_Q}| \leqslant a < \infty, \qquad \int_E |p(Q) e^{\varepsilon_0 r_Q}| dQ < \infty, \tag{25}$$

$$\int_E \int_E e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty, \tag{26}$$

где r_Q означает расстояние точки Q до начала координат.

Тогда функция $K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})$, определяемая формулой (20) и рассматриваемая при значениях $\sqrt{\lambda}$, принадлежащих области $G_{\delta, R}$ при $0 < \delta < \frac{\varepsilon_0}{8}$ (см. лемму 1), допускает оценку

$$\left|K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})\, e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q}\right| \leqslant \Phi(P; \delta, R, \varepsilon_0) \tag{27}$$

независимо от выбора точки Q, причем

$$\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi(P; \delta, R, \varepsilon_0)\, dP < \infty. \tag{28}$$

Доказательство. Достаточно показать, что каждая из функций $S_i(Q, P; \sqrt{\lambda})$ допускает оценки, аналогичные (27) и (28). Начнем с $S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})$. Поскольку $\delta \leqslant \frac{\varepsilon_0}{8}$, то, пользуясь неравенством (24), находим

$$\left| S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})\, e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| \leqslant \gamma(\delta, R) \int_E \frac{e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}}}{\sqrt{r_{QQ_1}}} |K(Q_1, P)|\, dQ_1 =$$

$$= \gamma(\delta, R) \int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)| \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}}}{\sqrt{r_{QQ_1}}} dQ_1 \leqslant \gamma(\delta, R) \times$$

$$\times \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}}}{r_{QQ_1}} dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \gamma_1(\delta, R) \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (29)$$

ибо интеграл

$$\int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}}}{r_{QQ_1}} dQ_1$$

допускает, очевидно, не зависимую от Q оценку. Положим поэтому

$$\Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0) = \gamma_1(\delta, R) \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (30)$$

Имеем в силу (26) и (30):

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0)\, dP = \int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} \Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0)\, dP \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} dP \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_P} \Phi_1^2(P; \delta, R, \varepsilon_0)\, dP \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

т. е. для функции $S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})$ имеют место оценки, аналогичные (27) и (28), причем роль функции Φ играет $\Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0)$, определяемая формулой (30). Переходя к рассмотрению функции $S_3(Q, P; \sqrt{\lambda})$,

произведем предварительно следующую оценку для $S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})$, несколько отличную от вышеприведенной:

$$\left|S_1(Q, P;\sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_Q}\right| \leqslant \gamma(\delta, R)\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{4}r_{Q_1}}|K(Q_1, P)|\frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_1}}}{\sqrt{r_{QQ_1}}}dQ_1 \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(\delta, R)\left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2}r_{Q_1}}|K(Q_1, P)|^2 dQ_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4}r_{Q_1}}}{r_{QQ_1}}dQ_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

или, поскольку последний интеграл оценивается независимо от выбора точки Q,

$$\left|S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_Q}\right|^2 \leqslant \Phi_2(P), \tag{31}$$

где положено

$$\Phi_2(P) = \gamma_2(\delta, R)\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2}r_{Q_1}}|K(Q_1, P)|^2 dQ_1, \tag{32}$$

а $\gamma_2(\delta, R)$ — некоторая константа.

Теперь из (23) находим:

$$\left|S_2(Q, P; \sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_Q}\right| \leqslant \gamma(\delta, R)\int_E \frac{e^{\frac{\varepsilon_0}{8}r_{P_1}}|p(P_1)|}{\sqrt{r_{QP_1}}}|S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda})|dP_1 =$$

$$= \gamma(\delta, R)\int_E \frac{e^{\frac{3\varepsilon_0}{8}r_{P_1}}\sqrt{|p(P_1)|}}{\sqrt{r_{QP_1}}}\sqrt{|p(P_1)|}\left|S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{4}r_{P_1}}\right|dP_1 \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(\delta, R)\left(\int_E \frac{e^{\varepsilon_0 r_{P_1}}|p(P_1)|}{r_{QP_1}}dP_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E |p(P_1)| \times\right.$$

$$\left.\times\left|S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{4}r_{P_1}}\right|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу ограниченности и суммируемости $e^{\varepsilon_0 r_{P_1}}|p(P_1)|$, первый интеграл в правой части оценивается независимо от Q. Учитывая также ограниченность $p(P)$ и оценивая второй интеграл правой части на основании (31), находим

$$\left|S_3(Q, P; \sqrt{\lambda})\, e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q}\right| \leqslant \gamma_3(\delta, R)\left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} \Phi_2(P)\, dP_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\left|S_3(Q, P; \sqrt{\lambda})\, e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q}\right| \leqslant \gamma_4(\delta, R)\, |\Phi_2(P)|^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, в силу (32)

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} [\Phi_2(P)]^{\frac{1}{2}} dP \leqslant \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} dP\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_P} \Phi_2(P)\, dP\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2(\delta, R)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} dP\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E \int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_P} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 dP\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Рассмотрим, наконец, функцию $S_2(Q, P; \sqrt{\lambda})$. Из (22) следует

$$\left|S_2(Q, P; \sqrt{\lambda})\, e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q}\right| \leqslant \gamma^2(\delta, R)\, |p(P)| \int_E \frac{e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{P_1}} e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{P_1 P}}}{\sqrt{r_{QP_1} r_{P_1 P}}} |p(P_1)|\, dP_1 \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^2(\delta, R)\, |p(P)|\, e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}}}{\sqrt{r_{QP_1} r_{P_1 P}}} |p(P_1)|\, dP_1.$$

Но последний интеграл оценивается независимо от выбора точек Q и P. Это следует из ограниченности и суммируемости функции $e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} |p(P_1)|$ и, очевидного неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{r_{QP_1} r_{P_1 P}}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_{QP_1}} + \frac{1}{r_{P_1 P}}\right).$$

Таким образом, окончательно

$$\left|S_2(Q, P; \sqrt{\lambda})\, e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q}\right| \leqslant \Phi_3(P),$$

где

$$\Phi_3(P) = \gamma_5(\delta, R) |p(P)|\, e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P}.$$

Отсюда в силу (25)

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi_3(P)\, dP < \infty.$$

Таким образом, оценки, аналогичные (27) и (28), установлены нами для каждой из функций $S_i(Q, P; \sqrt{\lambda})$, а это и доказывает лемму.

Переходя к следующей теореме, предположим, что L — единичный оператор. Таким образом Tu имеет вид

$$Tu = -\Delta u + p(Q)\, u + \int_E K(Q, P)\, u(P)\, dP. \tag{33}$$

Теорема 4. Пусть при некотором $\varepsilon_0 > 0$ функция $p(Q) e^{\varepsilon_0 r_Q}$ ограничена и суммируема. Пусть, кроме того,

$$\int_E \int_E e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q, P)|^2\, dQdP < \infty.$$

Тогда дискретный спектр оператора T, определенного формулой (33), ограничен и единственной предельной точкой собственных значений этого оператора может быть лишь точка 0.

Доказательство. Ограниченность дискретного спектра следует из замечания к теореме 3. Далее, как нам уже известно, собственные функции рассматриваемого оператора должны удовлетворять уравнению

$$u(Q) = -\frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QQ_1}) \left\{ p(Q_1)\, u(Q_1) + \int_E K(Q_1, Q_2)\, u(Q_2)\, dQ_2 \right\} dQ_1. \tag{34}$$

Подставляя в интеграл

$$-\frac{i}{4}\int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QQ_1})\, p(Q_1)\, u(Q_1) dQ_1$$

вместо $u(Q)$ выражение, стоящее в правой части (34), после простых преобразований убедимся, что $u(Q)$ должно удовлетворять уравнению

$$u(Q) = \int_E K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})\, u(P)\, dP, \tag{35}$$

где $K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})$ определена формулой (20). Вводя параметр μ и рассматривая вспомогательное уравнение

$$u(Q) = \mu \int_E K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})\, u(P)\, dP, \tag{36}$$

замечаем, что при каждом фиксированном значении $\sqrt{\lambda}$ из верхней полуплоскости это есть однородное интегральное уравнение типа Фредгольма, обращающееся при $\mu = 1$ в исходное уравнение (35). Таким образом, при фиксированном значении $\sqrt{\lambda}$ $(Im\sqrt{\lambda} > 0)$ уравне-

ние (36) имеет нетривиальные решения лишь в том случае, когда выполняется условие

$$D(\sqrt{\lambda};\mu)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mu^n}{n!}d_n(\sqrt{\lambda})=0, \tag{37}$$

где положено

$$d_n(\sqrt{\lambda})=\underbrace{\int_E\cdots\int_E}_{n\ \text{раз}}det\|K^*(Q_i,Q_k;\sqrt{\lambda})\|dQ_1\cdots dQ_n. \tag{38}$$

Теперь ясно, что задача о собственных значениях оператора T сводится к задаче о нулях функции $D(\sqrt{\lambda};1)$, лежащих в верхней полуплоскости. Очевидно, теорема будет доказана, если мы покажем что $D(\sqrt{\lambda};1)$, рассматриваемая как функция переменной $\sqrt{\lambda}$, аналитична в любой области $G_{\delta,R}$ (см. лемму 1). Для доказательства этого заметим, что каждая из функций $d_k(\sqrt{\lambda})$ аналитична по переменной $\sqrt{\lambda}$ в указанной области, как это следует, например, из известной теоремы Морера. Поэтому достаточно лишь обнаружить равномерную сходимость в $G_{\delta,R}$ ряда (37) при $\mu=1$. Для этого определители, входящие в формулу (38), запишем в виде

$$det\|K^*(Q_i,Q_k;\sqrt{\lambda})\|=e^{\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_1}}\cdots e^{\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_n}}\times$$

$$\times\ det\left\|K^*(Q_i,Q_k;\sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_i}}\right\|. \tag{39}$$

Далее, на основании (27)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|K^*(Q_i,Q_k;\sqrt{\lambda})\,e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_i}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant n^{\frac{1}{2}}\Phi(Q_k;\delta,R,\varepsilon_0).$$

Поэтому в силу неравенства Адамара

$$\left|det\left\|K^*(Q_i,Q_k;\sqrt{\lambda})e^{-\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_i}}\right\|\right|\leqslant n^{\frac{n}{2}}\Phi(Q_1;\delta,R,\varepsilon_0)\cdots\Phi(Q_n;\delta,R,\varepsilon_0)$$

Пользуясь (39), находим окончательно

$$\left|det\|K^*(Q_i,Q_k;\sqrt{\lambda})\|\right|\leqslant n^{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_1}}\Phi(Q_1;\delta,R,\varepsilon_0)\cdots$$

$$\cdots e^{\frac{\varepsilon_0}{8}r_{Q_n}}\Phi(Q_n;\delta,R,\varepsilon_0).$$

Заметив теперь, что согласно (28)

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi(P; \delta, R, \varepsilon_0)\, dP = M < \infty,$$

получим из (38)

$$|d_n(\sqrt{\lambda})| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

Таким образом, при $\mu = 1$ ряд (37) мажорируется сходящимся рядом

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}} M^n}{n!},$$

а это и доказывает теорему.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР,
Ереванский Государственный университет

Поступила 11 V 1959

Հ. Մ. Մարտիրոսյան

ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԴԻՏԱՐԿՎՈՂ $-\Delta u + pLu + \int K(Q, P)\, u(P)\, dP$ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $L_2(E)$-ն ամբողջ E էվկլիդյան հարթության վրա որոշված և քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների հիլբերտյան տարածությունն է։ Նշանակենք Ω-ով $L_2(E)$ տարածության մեջ դիտվող $-\Delta u$ հիպերմաքսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթը։ Ինչպես հայտնի է, այդ օպերատորն ստացվում է բոլոր ֆինիտ ֆունկցիաների վրա դիտվող $-\Delta u$ օպերատորի փակումից $L_2(E)$-ում։

Համարելով $p(Q)$ և $K(Q, P)$ ֆունկցիաները այնպիսիները, որ նրանց համար

$$\int_E |p(Q)|^2\, dQ < \infty, \qquad \int_E \int_E |K(Q, P)|^2\, dQdP < \infty,$$

ընդ որում $p(Q)$-ն սահմանադրական է, և նշանակելով $L_2(E)$-ում կամայական գծային, սահմանադրական (ոչ ինքնահամալուծ) օպերատորը L-ով, դիտարկենք հետևյալ օպերատորը՝

$$Tu = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)\, u(P)\, dP \qquad (u \in \Omega).$$

Ներկա աշխատանքի մեջ պարզվում է այն օպերատորի սպեկտրի կառուցման հարցը, ընդ որում առաջված ամենաընդհանուր պրոցեսը կազմում է հետևյալ երկու թեորեմների բավարարությունը:

Թեորեմ 1. T օպերատորի անընդհատ սպեկտրը համընկնում է դրական կիսառանցքի հետ, իսկ կոմպլեքս հարթության վերացած մասում ընկած սպեկտրի կետերը կարող են լինել միայն դրական կիսառանցքից դուրս կուտակման կետ չունեցող սեփական արժեքներ:

Թեորեմ 2. Նշանակենք $\|K\|^2 = \int_E \int_E |K(Q, P)|^2 dQdP$ և ենթադրենք, որ $|p(Q)| < M$: Այդ դեպքում T օպերատորի ամբողջ սպեկտրն ընկած է $\eta^2 = 4\alpha(\alpha + \xi)$ պարաբոլի ներսում, որտեղ

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\sqrt{M^2\|L\|^2 + \|K\|^2}, \qquad \xi = Re\lambda, \ \eta = Im\lambda:$$

Նախքան հետևյալ թեորեմի ձևակերպումը, պարմանավորվենք ասել, որ L օպերատորը $L_2(E)$-ում սահմանափակ ֆունկցիաների բազմաձևության վրա սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի հաստատուն, որը մենք կնշանակենք $\|L\|$, որ $L_2(E)$-ին պատկանող բոլոր $u(Q)$-երի համար տեղի ունի

$$|Lu(Q)| < \|L\| \sup |u(Q)|$$

անհավասարությունը:

Թեորեմ 3. Դիցուք L օպերատորը սահմանափակ է $L_2(E)$-ի սահմանափակ ֆունկցիաների բազմաձևության վրա, իսկ $p(Q)$-ն և

$$\int_E |K(Q, P)|\, dP$$

ինտեգրալը Q կետի սահմանափակ և հանրագումարելի ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում T օպերատորի դիսկրետ սպեկտրը սահմանափակ է:

Դիսկրետ սպեկտրի սահմանային կետերի մասին ավելի ճշգրիտ տեղեկություններ է տալիս հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 4. Դիցուք ինչ-որ $\varepsilon_0 > 0$-ի համար $p(Q)e^{\varepsilon_0 r_Q}$ ֆունկցիան սահմանափակ և հանրագումարելի է: Դիցուք, բացի այդ,

$$\int_E \int_E e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q, P)|^2 dQdP < \infty,$$

և L-ն բերվում է միավոր օպերատորի: Այդ դեպքում T օպերատորի դիսկրետ սպեկտրը սահմանափակ է և այդ օպերատորի սեփական արժեքների միակ սահմանային կետը կարող է լինել 0 կետը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, новая серия, 85, 1, 1952.
2. *Гельфанд И. М.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов. Успехи матем. наук, VII, № 6, 1952.
3. *Наймарк М. А.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов. Успехи матем. наук, XI, 6, 1956.
4. *Нерсесян А. Б.* Разложение по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения. Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 3, 1959.
5. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. I, 1949.
6. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, новая серия, 77, 1, 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Ц. Гнуни

К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек

Рассматривается нелинейная задача динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек, собранных из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Линейная задача динамической устойчивости пологих однослойных оболочек исследована в работах многих авторов [1, 4, 8, 9]. Общие вопросы нелинейной теории динамической устойчивости упругих систем разработаны В. В. Болотиным, им же решены две конкретные нелинейные задачи динамической устойчивости изотропных пластин [1].

Известно [1], что линейная теория динамической устойчивости дает исчерпывающий ответ о расположении областей динамической неустойчивости в предположении, что начальное равновесное безмоментное состояние отождествляется с недеформированным состоянием оболочки. В противном случае области неустойчивости следует определить не из уравнений линейной теории, а из линейного приближения уравнений нелинейной теории, которые будут содержать коэффициенты при нелинейных членах и будут совпадать с уравнениями линейной теории только в том случае, если начальное состояние принимается недеформированным. В настоящей работе мы безмоментное состояние примем как недеформированное и для границ областей неустойчивости будем брать их обычные значения [1]. Однако, беспредельное возрастание амплитуд в областях динамической неустойчивости, предсказываемое линейной теорией, в экспериментальных исследованиях не наблюдается. Наоборот, с увеличением амплитуд колебаний скорости их изменения постепенно уменьшаются и получается процесс установления колебаний с почти постоянной амплитудой. Причиной этого являются нелинейные факторы, которые для пологих оболочек включают в себя в первую очередь большие прогибы. Поэтому, для исследования процесса установления колебаний и определения амплитуд установившихся колебаний, необходимо исходить из уравнений нелинейной теории оболочек [1].

1. Пусть x и y являются криволинейными, ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. Считаем, что геометрия срединной поверхно-

сти оболочки совпадает с геометрией плоскости и главные кривизны k_x и k_y при дифференцировании ведут себя как постоянные.

Известно, что ортотропные материалы обладают тремя плоскостями упругой симметрии. Пусть одна из плоскостей упругой симметрии материала каждого слоя будет параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две—перпендикулярны к координатным линиям $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

Имеем следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$$k_x N_1 + k_y N_2 + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$

$$- 2S\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q - m^*\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь m^* — приведенная масса, которая в случае симметрично собранных слоистых оболочек имеет вид

$$m^* = \frac{2}{g}\left[\gamma_{n+1}\delta_{n+1} + \sum_{m=1}^{n}\gamma_m(\delta_m - \delta_{m+1})\right],$$

где γ_m — удельный вес m-го слоя, δ_m — расстояние m-го слоя от срединной поверхности оболочки, которая одновременно является срединной поверхностью среднего $(n+1)$-го слоя [3], q — внешняя, нормально приложенная к срединной поверхности, нагрузка.

Эти уравнения получены из обычных уравнений равновесия нелинейной теории [2] путем добавления инерционных членов, причем тангенциальные силы инерции не учитываются.

Для усилий и моментов имеем [3]

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2, \\ N_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2, \\ S &= C_{66}\omega_2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

и

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2, \\ M_2 &= D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2, \\ H &= D_{66}\tau, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$C_{ik} = 2\left[B_{ik}^{n+1}\delta_{n+1} + \sum_{m=1}^{n}B_{ik}^{m}(\delta_m - \delta_{m+1})\right],$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3}\left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^{n} B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right]; \tag{1.5}$$

$$B_{11}^m = \frac{E_1^m}{1-\mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_2^m}{1-\mu_1^m \mu_2^m},$$

$$B_{12}^m = \frac{\mu_1^m E_2^m}{1-\mu_1^m \mu_2^m} = \frac{\mu_2^m E_1^m}{1-\mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{66}^m = G_{xy}^m. \tag{1.6}$$

Для деформации срединной поверхности имеем [2]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{1.7}$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

и

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{1.8}$$

$$\tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

которые должны удовлетворять следующему уравнению неразрывности [2]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0. \tag{1.9}$$

Представляя усилия N_1, N_2 и S посредством функции напряжений $\varphi = \varphi(x, y, t)$ следующим образом

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \tag{1.10}$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (1.1). На основании (1.8), (1.7) и (1.10) из уравнений (1.2) и (1.9) получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:

$$a_{22}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (a_{66} + 2a_{12})\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{2}L(w, w) + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{1.11}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$

$$-L(w,\varphi)-k_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-k_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-q(x,y,t)+m^*\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

где

$$L(w,\varphi)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{1.12}$$

$$a_{11}=\frac{C_{11}}{\Omega},\quad a_{22}=\frac{C_{22}}{\Omega},\quad a_{12}=\frac{C_{12}}{\Omega},\quad a_{66}=\frac{1}{C_{66}}, \tag{1.13}$$

$$\Omega=C_{11}C_{22}-C_{12}^2.$$

В системе (1.11) заменив $q(x, y, t)$ выражением [1]

$$q=N_1^0(x,y,t)\varkappa_1+N_2^0(x,y,t)\varkappa_2, \tag{1.14}$$

получим уравнения динамической устойчивости

$$a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+(a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\frac{1}{2}L(w,w)+$$

$$+k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-L(w,\varphi)-$$

$$-k_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-k_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+N_1^0\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_2^0\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+m^*\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{1.15}$$

где N_1^0 и N_2^0 силы, характеризующие начальное безмоментное состояние, которые для простоты принимаются не зависящими от x и y.

2. Решение системы (1.15) ищем в виде

$$\varphi(x,y,t)=\sum_m\sum_n\Phi_{mn}(t)\,\varphi_{mn}(x,y),$$

$$w(x,y,t)=\sum_m\sum_n f_{mn}(t)\,w_{mn}(x,y). \tag{2.1}$$

Представим $\varphi_{mn}(x, y)$ и $w_{mn}(x, y)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента и может быть представлена в виде линейных комбинаций фундаментальных функций поперечных колебаний балок, заведомо удовлетворяющих только двум граничным условиям на каждом краю оболочки

$$\varphi_{mn}(x,y)=X_n(x)\,Y_m(y),$$

$$w_{mn}(x,y)=U_n(x)\,V_m(y). \tag{2.2}$$

Уравнения (1.15) в вариационной записи принимают вид:

$$\iint\Bigg[a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+(a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+$$

$$+\frac{1}{2}L(w,w)+k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigg]\delta\varphi\,dx\,dy=0,$$

$$\iint\Bigg[D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$

$$-L(w,\varphi)-k_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-k_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+$$

$$+N_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+m^*\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Bigg]\delta w\,dx\,dy=0. \tag{2.3}$$

Вариациями функций $\varphi(x,y,t)$ и $w(x,y,t)$ будут:

$$\delta\varphi=\sum_m\sum_n\varphi_{mn}\,\delta\Phi_{mn},$$

$$\delta w=\sum_m\sum_n w_{mn}\,\delta f_{mn}. \tag{2.4}$$

Используя произвольность вариации $\delta\Phi_{mn}$ и δf_{mn} и ортогональность фундаментальных функций, из (2.3) получим следующую систему уравнений:

$$\iint\Bigg[\Phi_{mn}\left(a_{22}\frac{\partial^4\varphi_{mn}}{\partial x^4}+(a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^4\varphi_{mn}}{\partial x^2\partial y^2}+a_{11}\frac{\partial^4\varphi_{mn}}{\partial y^4}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}f_{mn}^2L(w_{mn},w_{mn})+f_{mn}\left(k_x\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2}\right)\Bigg]\varphi_{mn}\,dx\,dy=0,$$

$$\iint\Bigg[f_{mn}\left(D_{11}\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4}\right)- \tag{2.5}$$

$$-\Phi_{mn}f_{mn}L(w_{mn},\varphi_{mn})-\Phi_{mn}\left(k_x\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial x^2}\right)+$$

$$+f_{mn}N_1^0\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2}+f_{mn}N_2^0\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial y^2}+$$

$$+m^*\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2}w_{mn}\Bigg]w_{mn}\,dx\,dy=0.$$

После подстановки (2.2) в систему (2.5) и интегрирования, получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{f}_{mn}+\omega_{mn}^2\left(1-\frac{N_1^0}{N_{1*}^{mn}}-\frac{N_2^0}{N_{2*}^{mn}}\right)f_{mn}-e_{mn}f_{mn}^2+d_{mn}f_{mn}^3=0, \quad (2.6)$$

где

$$\omega_{mn}^2=\frac{I_2\dot{I}_2}{m^*I_0I_1}+\frac{\dot{I}_1}{m^*I_0},$$

$$N_{1*}^{mn}=\frac{I_2\dot{I}_2}{I_1I_4}+\frac{\dot{I}_1}{I_4},\quad N_{2*}^{mn}=\frac{I_2\dot{I}_2}{I_1I_5}+\frac{\dot{I}_1}{I_5}, \quad (2.7)$$

$$e_{mn}=\frac{\dot{I}_2I_3+I_2\dot{I}_3}{m^*I_0I_1},\quad d_{mn}=\frac{I_3\dot{I}_3}{m^*I_0I_1},$$

$$I_1=\iint\left[a_{22}X_n^{IV}Y_m+(a_{66}+2a_{12})\dot{X}_n\dot{Y}_m+a_{11}X_nY_m^{IV}\right]X_nY_m\,dxdy,$$

$$I_2=-\iint(k_x\dot{U}_nV_m+k_y\dot{U}_nV_m)\,X_nY_m\,dxdy,$$

$$I_3=\frac{1}{2}\iint\left|\dot{U}_nV_m\dot{U}_nV_m-(\dot{U}_nV_n)^2\right|X_nY_m\,dxdy,$$

$$I_1'=\iint\left|D_{11}U_n^{IV}V_m+2(D_{12}+2D_{66})\dot{U}_n\dot{V}_m+D_{22}U_nV_m^{IV}\right|X_nY_m\,dxdy,$$

$$I_3'=\iint(X_nY_m\dot{U}_nV_m-2\dot{X}_nY_m\dot{V}_mU_n+\dot{X}_nY_mU_n\dot{V}_m)\,U_nV_m\,dxdy, \quad (2.8)$$

$$I_2'=-\iint(k_xX_n\dot{Y}_m+k_y\dot{X}_nY_m)\,U_nV_m\,dxdy,$$

$$I_4=\iint\dot{U}_nV_m\dot{U}_nV_m\,dxdy,$$

$$I_5=\iint U_n\dot{V}_mU_nV_m\,dxdy,$$

$$I_6=\iint U_n^2V_m^2\,dxdy.$$

3. Из уравнения (2.6), принимая $f_{mn}=A\sin\bar{\omega}t$ и $N_1^0=N_2^0=0$, для нелинейной частоты собственных колебаний ($\bar{\omega}_{mn}$) получим выражение:

$$\bar{\omega}_{mn}^2=\omega_{mn}^2-e_{mn}f_{mn}+d_{mn}f_{mn}^2. \quad (3.1)$$

Принимая $N_1^0=\text{const}$, $N_2^0=\text{const}$ и $f_{mn}=\text{const}$, из (2.6) можно получить также нелинейные критические значения действующих сил при их статическом действии. Аналогичные задачи для однослойных, изотропных, шарнирно-опертых оболочек решены О. Д. Онашвили [4].

Наконец, исходя из уравнения (2.6), можно описать хлопок оболочки при действии нагрузки со стороны выпуклости [2], однако в настоящей работе этот вопрос не исследуется.

4. В частном случае, когда прямоугольная в плане $(a \times b)$ оболочка радиально оперта по четырем краям, из (2.7) получим

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{m^*}\left[\frac{(k_y\lambda_n^2 + k_x\mu_m^2)^2}{a_{22}\lambda_n^4 + (a_{66}+2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{11}\mu_m^4} + \right.$$
$$\left. + D_{11}\lambda_n^4 + 2(D_{12}+2D_{66})\lambda_n^2\mu_m^2 + D_{22}\mu_m^4\right]. \qquad (4.1)$$

$$N_{1^*}^{mn} = -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\frac{(k_y\lambda_n^2 + k_x\mu_m^2)^2}{a_{22}\lambda_n^4 + (a_{66}+2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{11}\mu_m^4} + \right.$$
$$\left. + D_{11}\lambda_n^4 + 2(D_{12}+2D_{66})\lambda_n^2\mu_m^2 + D_{22}\mu_m^4\right]. \qquad (4.2)$$

$$N_{2^*}^{mn} = -\frac{1}{\mu_m^2}\left[\frac{(k_y\lambda_n^2 + k_x\mu_m^2)^2}{a_{22}\lambda_n^4 + (a_{66}+2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{11}\mu_m^4} + \right.$$
$$\left. + D_{11}\lambda_n^4 + 2(D_{12}+2D_{66})\lambda_n^2\mu_m^2 + D_{22}\mu_m^4\right]. \qquad (4.3)$$

$$e_{mn} = \frac{16}{m^* ab}\cdot\frac{\lambda_n\mu_m(k_y\lambda_n^2 + k_x\mu_m^2)}{a_{22}\lambda_n^4 + (a_{66}+2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{11}\mu_m^4}, \qquad (4.4)$$

$$d_{mn} = \frac{512}{9}\cdot\frac{1}{m^* a^2 b^2}\cdot\frac{\lambda_n^2\mu_m^2}{a_{22}\lambda_n^4 + (a_{66}+2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{11}\mu_m^4}, \qquad (4.5)$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{b}. \qquad (4.6)$$

5. Принимая [1]

$$N_1^0 = N_{10} + N_{1t}\cos\vartheta t$$
$$N_2^0 = N_{20} + N_{2t}\cos\vartheta t, \qquad (5.1)$$

уравнение (2.6) можно привести к виду:

$$\ddot{f}_{mn} + \Omega_{mn}^2(1 - 2\mu_{mn}\cos\vartheta t)f_{mn} - e_{mn}f_{mn}^2 + d_{mn}f_{mn}^3 = 0, \qquad (5.2)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2\left(1 - \frac{N_{10}N_{2^*}^{mn} + N_{20}N_{1^*}^{mn}}{N_{1^*}^{mn}N_{2^*}^{mn}}\right). \qquad (5.3)$$

$$\mu_{mn} = \frac{1}{2}\frac{N_{1t}N_{2^*}^{mn} + N_{2t}N_{1^*}^{mn}}{N_{1^*}^{mn}N_{2^*}^{mn} - N_{10}N_{2^*}^{mn} - N_{20}N_{1^*}^{mn}}. \qquad (5.4)$$

Условно предполагая [1], что силы сопротивления имеют вид $R_{mn}(\dot{f}_{mn})\dot{f}_{mn}$, и вводя их в уравнение (5.2), получим

$$\ddot{f}_{mn} + R_{mn}(f_{mn})\dot{f}_{mn} + \Omega_{mn}^2(1 - 2\mu_{mn}\cos\vartheta t) f_{mn} - e_{mn} f_{mn}^2 + d_{mn} f_{mn}^3 = 0. \quad (5.5)$$

Ограничиваясь первым членом разложения $R_{mn}(f_{mn})$ в ряд Тейлора из уравнения (5.5) получим

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu\cos\vartheta t) f - ef^2 + df^3 = 0, \quad (5.6)$$

где ε характеризует затухание системы в первом приближении.

Здесь индексы m и n опущены, поскольку уравнение (5.5) идентично для всех форм колебаний.

6. Переходим к вычислению амплитуд установившихся колебаний.

Известно [1], что уравнение (5.6) можно написать таким образом, чтобы его „линейная" часть допускала периодическое решение:

$$f'' + 2\varepsilon_* f' + \Omega_*^2(1 - 2\mu\cos\vartheta t) f + V(f, f', t) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$V(f, f', t) = -ef^2 + df^3 + (\Omega^2 - \Omega_*^2)(1 - 2\mu\cos\vartheta t) f + 2(\varepsilon - \varepsilon_*) f', \quad (6.2)$$

$$\Omega_* = \Omega\frac{\vartheta}{\vartheta_*}, \qquad \varepsilon_* = \varepsilon\frac{\vartheta}{\vartheta_*}, \quad (6.3)$$

ϑ^* — критическая частота.

Используя метод Мандельштама [1, 5], уравнение (6.1) можно привести к следующей системе уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dz_1}{dt} + F_1(z_1, z_2, t) = 0,$$

$$\frac{dz_2}{dt} - \varepsilon_* z_2 + F_2(z_1, z_2, t) = 0, \quad (6.4)$$

где

$$z_1 = x_1\psi_{11} + x_2\psi_{21},$$

$$z_2 = x_1\psi_{12} + x_2\psi_{22}; \quad (6.5)$$

$$F_1(z_1, z_2, t) = \psi_{21} V(x_1, x_2, t),$$

$$F_2(z_1, z_2, t) = \psi_{22} V(x_1, x_2, t); \quad (6.6)$$

$$x_1 = f, \; x_2 = f'; \quad (6.7)$$

$$\psi_{11} = 2\varepsilon_*\varphi(-t) - \frac{d\varphi(-t)}{dt}, \quad \psi_{12} = -\frac{d\varphi(-t)}{dt},$$

$$\psi_{21} = \varphi(-t), \; \psi_{22} = \varphi(t), \quad (6.8)$$

$\varphi(t)$ — функция Матье [6].

Уравнение (6.4) можно решить методом последовательных приближений. Однако для практических целей достаточно и нулевое приближение, которое определяется из условий

$$z = C,$$
$$z = 0, \tag{6.9}$$

где C — амплитуда нулевого приближения, для определения которой из условия периодичности решений* системы (6.4) получим

$$\int_0^T F_1(C, 0, t)\, dt = 0, \tag{6.10}$$

или в развернутом виде

$$\int_0^T \Big| - eC^2 \varphi^2(t) + dC^3 \varphi^3(t) + (\Omega^2 - \Omega_*^2)(1 - 2\mu\cos\theta t) C\varphi(t) +$$

$$+ 2(\varepsilon - \varepsilon_*) C \frac{d\varphi(t)}{dt} \Big| \varphi(-t)\, dt = 0. \tag{6.11}$$

Из условия (6.11) для амплитуд установившихся колебаний в нулевом приближении, помимо тривиального корня $C = 0$, получим следующие выражения для главной области неустойчивости соответственно для верхнего и нижнего предела:

а) при $\varepsilon = 0$

$$C = \frac{2\Omega}{\sqrt{3d}} \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\theta_*^2} - 1\right)(1 \mp \mu)}, \tag{6.12}$$

где

$$\theta_*^2 \approx 4\Omega^2 (1 \mp \mu); \tag{6.13}$$

в) при $\varepsilon \neq 0$

$$C = \frac{2\Omega}{\sqrt{3d}} \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\theta_*^2} - 1\right)\left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{\theta^2 \varepsilon^2}{\Omega^4}}\right)}, \tag{6.14}$$

где

$$\theta_*^2 \approx 4\Omega^2 \left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\Omega^2}}\right). \tag{6.15}$$

Отметим, что формулы (6.12) — (6.15) по внешнему виду идентичны с соответствующими формулами для пластин. Кривизны срединной поверхности входят в формулы (6.12) — (6.15) через величины Ω и μ. Отсюда мы замечаем, что четные степени функции f не влияют ни на установление колебаний, ни на величину установившихся амплитуд. К аналогичному результату приводят и другие методы нахождения периодических решений уравнения (6.1).

---

* Решения системы (6.4) если периодичны, то имеют период $T = \frac{2\pi}{\theta}$ или $2T$ [1, 5].

Следует отметить, что выкладки П. 6 предполагают слабую нелинейность системы, неспособную существенно изменять гармонический характер движения. На основе этого строится решение, не обеспечивающее постоянство энергии системы для любого мгновения, но соответствующее постоянству энергии в среднем за период. Этим и объясняется отсутствие влияния четких нелинейных членов на величину установившихся амплитуд [11]. Поэтому исследование перескока для динамического процесса становится невозможным.

7. В качестве числового примера рассмотрим трехслойную фанерную оболочку [7], характерные размеры срединной поверхности которой суть: $a = b = 10$ *м*, $R = 40$ *м*.

Пусть оболочка состоит из двух продольных (наружных) и одного поперечного слоев. Общая толщина фанеры $h = 0{,}09$ *м*, толщина каждого слоя $\delta_0 = 0{,}03$ *м*. Расчетные толщины $\delta_1 = \delta_3 = 0{,}045$ *м* и $\delta_2 = 0{,}015$ *м*. Удельный вес фанеры $\gamma = 800$ *кг/м*^{3}.

Упругие характеристики каждого слоя приведены в нижеследующей таблице:

	E_1^m (*кг/см*^{2})	E_2^m	G_{12}^m	μ_{12}^m	μ_{21}^m
I и III слои	120000	6000	4800	0,6	0.03
II слой	6000	120000	4800	0.03	0.6

На основании приведенных данных из (1.5) и (1.13) получаем

$$a_{11} = 0{,}249658 \text{ } м/кг, \quad D_{11} = 70200 \text{ } кг \cdot м,$$
$$a_{22} = 0{,}133817 \text{ } м/кг, \quad D_{22} = 6210 \text{ } кг \cdot м,$$
$$a_{12} = 0{,}010385 \text{ } м/кг, \quad D_{12} = 2160 \text{ } кг \cdot м,$$
$$a_{66} = 2{,}380952 \text{ } м/кг, \quad D_{66} = 2970 \text{ } кг \cdot м.$$

Допустим, на оболочку действуют равномерная нагрузка $q_0 = 100 кг/м^2$ и пульсирующая нагрузка $q_1 \cos \vartheta t = 200 \cos \vartheta t \text{ } кг/м^2$. Исходное безмоментное напряженное состояние будет характеризоваться силами $N_1^0 = 0$ и $N_2^0 = Rq$. Используя формулы (4.1)—(4.7), (5.1), (5.3) и (5.4) в случае основного тона колебаний ($m = n = 1$), для величин Ω_{11}^2 и μ_{11} получаем значения $\Omega_{11}^2 = 374{,}014 \text{ } 1/сек^2$ и $\mu_{11} = 0{,}1446 \text{ } кг/м$.

Из-за отсутствия определенных данных, затуханием системы не будем интересоваться.

Из формулы (6.13) для нижней и верхней границ главной области неустойчивости получим значения:

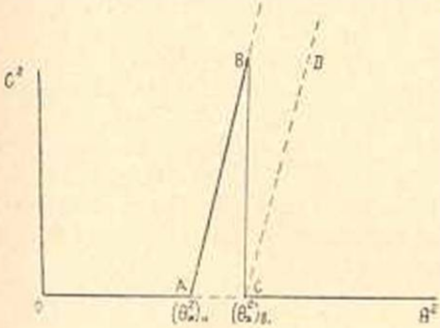
$$(\vartheta_*^2) \text{ ниж.} = 1279{,}753 \text{ } 1/сек^2 \text{ и}$$
$$(\vartheta_*^2) \text{ верхн.} = 1712{,}358 \text{ } 1/сек^2.$$

Амплитуды установившихся колебаний для главной области неустойчивости получаются в виде (фиг. 1):

$$\text{I. } (C^2)\,\text{ниж.} = (0{,}119947\ \theta^2 - 155{,}661579)\,10^{-3}\ м^2,$$

$$\text{II. } (C^2)\,\text{верхн.} = (0{,}119947\ \theta^2 - 205{,}392205)\,10^{-3}\ м^2.$$

Исходя из формулы (6.14), легко убедиться, что при наличии затухания затягивание колебаний возможно лишь для частот, не превышающих $\theta^2 = \frac{\mu^2 \Omega^4}{\varepsilon^2}$ [1, 10].



Фиг. 1.

Как видно из чертежа, нулевое решение нелинейной системы устойчиво всюду, за исключением областей возбуждения линейной системы. В области возбуждения *AC* вместо неограниченного возрастания амплитуд получается процесс установления колебаний по линии *AB*, соответствующий решению I; что касается решения II, то оно неустойчиво [10].

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. С. А. Амбарцумяну за постановку задачи и за руководство.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 2 X 1959

Վ. Ց. Գնունի

ՓՈՔՐ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է փոքր կորության շերտավոր անիզոտրոպ թաղանթների դինամիկ կայունության ոչ գծային խնդիրը։

Խնդրի հիմնական հավասարումն ստացվում է որպես երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում, որի գծային մասը իրենից ներկայացնում է Մատյեի հայտնի հավասարումը։

Օգտագործելով Լ. Ի. Մանդելշտամի մեթոդը, հաշված են կայունացված ամպլիտուդները անկայունության տիրույթներում։ Պարզվում է, որ հավասարման ոչ գծային մասի մեջ մտնող զույգ աստիճանի անդամները ոչ մի ազդեցություն չունեն կայունացման երևույթի վրա։ Բերված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М., 1956.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
3. *Амбарцумян С. А.* Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Изв. АН АрмССР, т. V, № 6, 1952.
4. *Онашвили О. Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд. АН СССР, 1957.
5. *Мандельштам Л. И.* Полное собрание трудов. Изд. АН СССР, М., 1947.
6. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функции Матье. ИЛ, М., 1953.
7. *Амбарцумян С. А.* Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Изв. АН АрмССР, т. IV, № 5, 1951.
8. *Хачатурян Т. Т.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. Сб. тр. Ер.ПИ, № 4, 1950.
9. *Марков А. И.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. ПММ, т. XIII, в. 2, 1949.
10. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1948.
11. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. Машгиз, М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с двумя симметричными прямоугольными полостями

Решена задача о кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, имеющего два симметрично расположенных выреза. При решении использован метод сведения задач кручения к вполне регулярным бесконечным системам [1]. Удовлетворение граничных условий приводит к совокупности четырех бесконечных систем линейных уравнений. Доказана вполне регулярность этих систем. Получены формулы для определения жесткости и напряжений. В качестве численного примера вычислены напряжения и жесткость призматического стержня прямоугольного сечения с соотношением сторон 1:2, имеющего два симметричных квадратных выреза. Жесткость такого стержня сопоставлена с жесткостью стержня, поперечное сечение которого имеет один вырез и площадь, равную половине площади сечения данного стержня.

Кручению призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с одним прямоугольным вырезом посвящены работы [2] и [3].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу кручения призматического стержня прямоугольного поперечного сечения $CQVW$ (фиг. 1) с двумя симметрично расположенными полостями $PRST$ и $GNMH$. Оси x и y направим по осям симметрии.

Функция напряжений $U(x, y)$ при кручении удовлетворяет внутри области поперечного сечения уравнению Пуассона

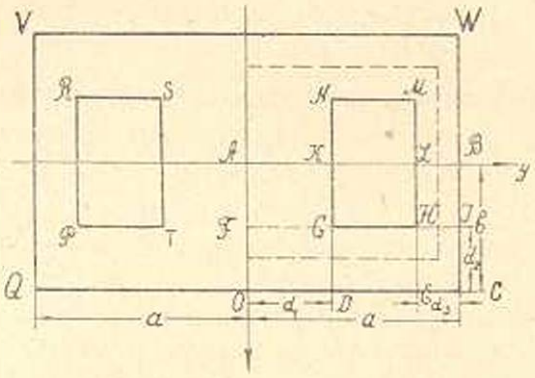
$$\nabla^2 U(x, y) = -2, \tag{1.1}$$

а на контурах сечения принимает постоянные значения, причем одно из этих постоянных может быть принято равным нулю.

В данной задаче принято, что функция напряжений $U(x, y)$ равна нулю на внешнем контуре сечения. В силу симметрии области поперечного сечения на обоих внутренних контурах функция напря-

жений принимает одно и то же постоянное значение U_0, а решение ищется только в области $OAKGHLBCO$. Чтобы распространить решение на всю область сечения, потребуем, чтобы на осях симметрии нормальные производные функции напряжений обращались в нуль, т. е.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Пусть

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области } AKDOA, \\ U_2(x, y) & \text{в области } OFICO, \\ U_3(x, y) & \text{в области } LBCEL. \end{cases} \tag{1.3}$$

Функции $U_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$, в силу вышесказанного, должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad U_1(b, y) = 0,$$

$$U_1(x, d_1) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant b - d_2, \\ U_2(x, d_1) & \text{при } b - d_2 < x \leqslant b, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad U_2(b, y) = 0, \quad U_2(x, a) = 0,$$

$$U_2(b - d_2, y) = \begin{cases} U_1(b - d_2, y) & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant d_1, \\ U_0 & \text{при } d_1 \leqslant y \leqslant a - d_3, \\ U_3(b - d_2, y) & \text{при } a - d_3 \leqslant y \leqslant a, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial U_3}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad U_3(x, a) = 0, \quad U_3(b, y) = 0,$$

$$U_3(x, a - d_3) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant b - d_2, \\ U_2(x, a - d_3) & \text{при } b - d_2 \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Введем вспомогательные функции [1] $\Phi_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, т. е. функции напряжений $U_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3)$ будем искать в виде:

$$U_1(x, y)=\psi_1(x, y)+\begin{cases}0 & \text{в области } AKGFA,\\ \Phi_1(x, y) & \text{» } FGDOF,\end{cases}$$

$$U_2(x, y)=\psi_2(x, y)+\begin{cases}0 & \text{» } GHEDG,\\ \Phi_2(x, y) & \text{» } FGDOF,\\ \Phi_4(x, y) & \text{» } HICEH,\end{cases} \tag{1.5}$$

$$U_3(x, y)=\psi_3(x, y)+\begin{cases}0 & \text{» } LBIHL,\\ \Phi_3(x, y) & \text{» } HICEH.\end{cases}$$

Вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е.

$$\nabla^2\Phi_i(x, y)=0 \quad (i=1, 2, 3, 4), \tag{1.6}$$

следовательно, функции $\psi_i(x, y)$ должны удовлетворять, согласно (1.1), уравнению Пуассона

$$\nabla^2\psi_i(x, y)=-2. \tag{1.7}$$

Из (1.4) получим граничные условия для функций $\psi_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3)$ и $\Phi_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \psi_1(b, y)+\Phi_1(b, y)=0,\\ \psi_1(x, d_1)=U_0, \quad \psi_2(b-d_2, y)=U_0, \quad \psi_2(b, y)=0,\\ \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right|_{y=0}+\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \psi_2(x, a)+\Phi_4(x, a)=0,\\ \left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \psi_3(x, a-d_3)=U_0, \quad \psi_3(x, a)=0,\\ \psi_3(b, y)+\Phi_3(b, y)=0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \Phi_2(b, y)=0,\\ \Phi_4(b, y)=0, \quad \Phi_3(x, a)=0.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Для непрерывности решения надо потребовать, чтобы на линиях контакта удовлетворялись условия:

$$\begin{gathered}\Phi_1(b-d_2, y)=0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right|_{x=b-d_2}=0, \quad \Phi_1(x, d_1)=\psi_2(x, d_1)-U_0,\\ \Phi_2(x, d_1)=0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right|_{y=d_1}=0, \quad \Phi_2(b-d_2, y)=\psi_1(b-d_2, y)-U_0.\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\Phi_4(x, a-d_3)=0,\quad \left.\frac{\partial\Phi_4}{\partial y}\right|_{y=a-d_3}=0,\quad \Phi_4(b-d_2, y)=\psi_3(b-d_2, y)-U_0,$$

$$\Phi_3(b-d_2, y)=0,\quad \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right|_{x=b-d_2}=0,\quad \Phi_3(x, a-d_3)=\psi_2(x, a-d_3)-U_0.$$

Граничные условия для функций $\Phi_i(x, y)$ и $\psi_i(x, y)$ неоднородны. Согласно Гринбергу [4], решение ищем в такой же форме, как и при однородных граничных условиях

$$\psi_1(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}H_k(x)\cos\frac{(2k-1)\pi y}{2d_1},\quad \psi_2(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(y)\sin\frac{k\pi(b-x)}{d_2},$$

$$\psi_3(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(x)\sin\frac{k\pi}{d_3}(a-y),\quad \Phi_1(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k(x)\cos\frac{(2k-1)\pi y}{2d_1},$$

$$\Phi_2(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(y)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b-x),\quad \Phi_3(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}L_k(x)\sin\frac{k\pi}{d_3}(a-y),$$

$$\Phi_4(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}K_k(y)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b-x),$$

(1.10)

где

$$H_k(x)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}\psi_1(x, y)\cos\frac{(2k-1)\pi y}{2d_1}\,dy,$$

$$U_k(y)=\frac{2}{d_2}\int_{b-d_2}^{b}\psi_2(x, y)\sin\frac{k\pi(b-x)}{d_2}\,dx,$$

$$V_k(x)=\frac{2}{d_3}\int_{a-d_3}^{a}\psi_3(x, y)\sin\frac{k\pi}{d_3}(a-y)\,dy,$$

$$W_k(x)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}\Phi_1(x, y)\cos\frac{(2k-1)\pi y}{2d_1}\,dy,$$

$$Y_k(y)=\frac{2}{d_2}\int_{b-d_2}^{b}\Phi_2(x, y)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b-x)\,dx,$$

$$L_k(x)=\frac{2}{d_3}\int_{a-d_3}^{a}\Phi_3(x, y)\sin\frac{k\pi}{d_3}(a-y)\,dy,$$

(1.10′)

$$K_k(y)=\frac{2}{d_2}\int_{b-d_2}^{b}\Phi_1(x,y)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b-x)\,dx.$$

Умножая каждое из уравнений (1.7) и (1.6) соответственно: уравнение для $\psi_1(x,y)$ на $\frac{2}{d_1}\cos\frac{(2k-1)\pi y}{2d_1}$ и интегрируя его от нуля до d_1, уравнение для $\psi_2(x,y)$ на $\frac{2}{d_2}\sin\frac{k\pi}{d_2}(b-x)$ и интегрируя от $b-d_2$ до b и т. д. аналогично (1.10′), получим линейные дифференциальные уравнения для определения функций $H_k(x)$, $U_k(y),\ldots,K_k(y)$:

$$H_k''(x)-\xi_k^2H_k(x)=\frac{2\xi_k}{d_1}U_0(-1)^k-\frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)},$$

$$U_k''(y)-\tau_{1k}^2U_k(y)=\frac{2\tau_{1k}}{d_2}U_0(-1)^k-\frac{4}{k\pi}[1-(-1)^k],$$

$$V_k''(x)-\zeta_k^2V_k(x)=\frac{2\zeta_k}{d_3}U_0(-1)^k-\frac{4}{k\pi}[1-(-1)^k],$$

$$W_k''(x)-\xi_k^2W_k(x)=\frac{2\xi_k}{d_1}(-1)^k\sum_{p=1}^{\infty}U_p(d_1)\sin\tau_{1p}(b-x)+$$

$$+\frac{2\xi_k}{d_1}U_0(-1)^{k+1},$$

$$Y_k''(y)-\tau_{1k}^2Y_k(y)=\frac{2\tau_{1k}}{d_2}(-1)^k\sum_{p=1}^{\infty}H_p(b-d_2)\cos\xi_p y+\frac{2\tau_{1k}U_0}{d_2}(-1)^{k+1},\tag{1.11}$$

$$L_k''(x)-\zeta_k^2L_k(x)=\frac{2\zeta_k}{d_3}(-1)^k\sum_{p=1}^{\infty}U_p(a-d_3)\sin\tau_{1p}(b-x)+$$

$$+\frac{2\zeta_k}{d_3}U_0(-1)^{k+1},$$

$$K_k''(y)-\tau_{1k}^2K_k(y)=\frac{2\tau_{1k}}{d_2}(-1)^k\sum_{p=1}^{\infty}V_p(b-d_2)\sin\zeta_p(a-y)+$$

$$+\frac{2\tau_{1k}}{d_2}U_0(-1)^{k+1},$$

где обозначено

$$\frac{(2k-1)\pi}{2d_1}=\xi_k,\quad \frac{k\pi}{d_2}=\tau_{1k},\quad \frac{k\pi}{d_3}=\zeta_k.\tag{1.12}$$

§ 2. Решение уравнений задачи. Исследование бесконечных систем

Из условий (1.8) и (1.9) получим граничные условия, которым должны удовлетворять функции $H_k(x)$, $U_k(y), \ldots, K_k(y)$:

$$H_k'(x)|_{x=0}=0,\quad V_k'(x)|_{x=0}=0,\quad W_k(b-d_2)=0,$$

$$W_k'(b-d_2)=0,\quad K_k(a-d_3)=0,\quad K_k'(a-d_3)=0, \tag{2.1}$$

$$Y_k(d_1)=0,\quad Y_k'(d_1)=0,\quad L_k(b-d_2)=L_k'(b-d_2)=0,$$

$$H_k(b)+W_k(b)=0,\quad V_k(b)+L_k(b)=0,$$

$$U_k(a)+K_k(a)=0,\quad U_k'(0)+Y_k'(0)=0. \tag{2.2}$$

Решая дифференциальные уравнения (1.11) и удовлетворяя условиям (2.1), получим значения функций $H_k(x)$, $U_k(y), \ldots$ и $K_k(y)$. В выражения функций $H_k(x)$, $V_k(x)$ и $U_k(y)$ войдут постоянные интегрирования A_k, E_k, C_k и D_k, для определения которых подставим полученные выражения функций $H_k(x)$, $V_k(x), \ldots, U_k(y)$ в (2.2). В результате получим совокупность четырех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Удобно вместо постоянной C_k ввести новую постоянную F_k:

$$C_k=\operatorname{sch}\tau_{1k}a\,[-D_k\operatorname{sh}\tau_{1k}a+F_k]. \tag{2.3}$$

Сделаем подстановку

$$\alpha\frac{(2k-1)(-1)^k}{2}A_k\operatorname{ch}\xi_k(b-d_2)=M_k,$$

$$\alpha k(-1)^kF_k\operatorname{ch}\zeta_k(b-d_2)=N_k,$$

$$k(-1)^k\{F_k\operatorname{ch}\tau_{1k}d_1\operatorname{sch}\tau_{1k}a-D_k\operatorname{sh}\tau_{1k}(a-d_1)\cdot\operatorname{sch}\tau_{1k}a\}=G_k, \tag{2.4}$$

$$k(-1)^k\{F_k\operatorname{ch}\tau_{1k}(a-d_3)\cdot\operatorname{sch}\tau_{1k}a-D_k\operatorname{sh}\tau_{1k}d_3\cdot\operatorname{sch}\tau_{1k}a\}=H_k.$$

Здесь α — некоторый постоянный множитель, величина которого будет определена в дальнейшем.

Для определения M_k, N_k, G_k и H_k получим совокупность бесконечных систем линейных уравнений

$$M_k=\sum_{p=1}^{\infty}a_{kp}^{11}G_p+b_k^1,$$

$$N_k=\sum_{p=1}^{\infty}a_{kp}^{21}H_p+b_k^{11}. \tag{2.5}$$

$$G_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{31} N_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{32} M_p + b_k^{III},$$

$$H_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} N_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{42} M_p + b_k^{IV},$$

где

$$a_{kp}^{11} = \frac{2\alpha d_2 \xi_k}{(\pi p)^2 + (d_2 \xi_k)^2} \operatorname{sh} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2),$$

$$b_k^{I} = \frac{2U_0 \alpha}{\pi d_2 \xi_k} \operatorname{sh} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2) -$$

$$- \frac{2d_2 \alpha}{\pi \xi_k} \operatorname{sh} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2) +$$

$$+ \frac{4\alpha}{\pi^2 \xi_k^2} \operatorname{ch} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2),$$

. . . . . .

$$a_{kp}^{41} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2d_3 \tau_{1k}}{(p\pi)^2 + (d_3 \tau_{1k})^2} \operatorname{sh} \tau_{1k} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \cdot \operatorname{ch} \tau_{1k} (a - d_3),$$

$$a_{kp}^{42} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{8d_1 \tau_{1k}}{\pi^2 (2k-1)^2 + (2d_1 \tau_{1k})^2} \operatorname{ch} \tau_{1k} d_1 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \cdot \operatorname{sh} \tau_{1k} d_3, \qquad (2.6)$$

$$b_k^{IV} = \frac{2U_0}{\pi d_3 \tau_{1k}} \operatorname{sh} \tau_{1k} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \cdot \operatorname{ch} \tau_{1k} (a - d_3) - \frac{2d_3}{\pi \tau_{1k}} \operatorname{sh} \tau_{1k} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \times$$

$$\times \operatorname{ch} \tau_{1k} (a - d_3) - \frac{4d_1}{\pi \tau_{1k}} \operatorname{ch} \tau_{1k} d_1 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \cdot \operatorname{sh} \tau_{1k} d_3 +$$

$$+ \frac{4}{\pi \tau_{1k}^2} \operatorname{sh} \tau_{1k} d_1 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \cdot \operatorname{sh} \tau_{1k} d_3 + \frac{4}{\pi \tau_{1k}^2} \operatorname{ch} \tau_{1k} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a \cdot \operatorname{ch} \tau_{1k} (a - d_3) -$$

$$- \frac{4(-1)^k}{\pi \tau_{1k}^2} \operatorname{ch} \tau_{1k} (a - d_3) \cdot \operatorname{sch} \tau_{1k} a.$$

Если положить

$$H_k = Z_{4k}, \quad N_k = Z_{4k-2}, \quad G_k = Z_{4k-1}, \quad M_k = Z_{4k-3},$$

$$C_{4k-3,\,4p} = C_{4k-3,\,4p-2} = C_{4k-3,\,4p-3} = 0, \quad C_{4k-3,\,4p-1} = a_{kp}^{11}, \quad \gamma_{4k-3} = b_k^{I},$$

$$C_{4k-2,\,4p} = a_{kp}^{21}, \quad C_{4k-2,\,4p-1} = C_{4k-2,\,4p-2} = C_{4k-2,\,4p-3} = 0, \quad \gamma_{4k-2} = b_k^{II},$$

$$C_{4k-1,\,4p-2} = a_{kp}^{31}, \quad C_{4k-1,\,4p-3} = a_{kp}^{32}, \quad \gamma_{4k-1} = b_k^{III}, \qquad (2.7)$$

$$C_{4k-1,\,4p} = C_{4k-1,\,4p-1} = 0, \quad \gamma_{4k} = b_k^{IV}, \quad C_{4k,\,4p-2} = a_{kp}^{41},$$

$$C_{4k,\,4p-4} = a_{kp}^{42}, \quad C_{4k,\,4p-1} = C_{4k,\,4p} = 0,$$

то совокупность систем (2.5) можно представить в виде одной системы:

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Можно показать, что для всех ν при $d_3 > 2d_1$, если придать α значение

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a - d_1 - d_3)}}{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_3}(b - d_2)}}},$$

то

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi(b-d_2)}{d_3}}\right]\left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a - d_1 - d_3)}\right]},$$

а при $d_3 < 2d_1$, выбирая α

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a - d_1 - d_3)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(b - d_2)}}}$$

будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{\pi(b-d_2)}{d_1}}\right]\left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a - d_1 - d_3)}\right]},$$

т. е. в обоих случаях $\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| \leqslant 1 - \theta$ для любого ν и $\theta > 0$. Следовательно, система (2.8) вполне регулярна.

Система (2.8) остается вполне регулярной и тогда, когда вырезы вырождаются как в продольные, так и в поперечные трещины.

Свободные члены γ_ν системы (2.8) ограничены и, следовательно, система имеет ограниченные решения.

Решив систему, согласно (2.7) получим значения постоянных H_k, N_k, G_k, M_k, а следовательно, в силу (2.4) и значения постоянных интегрирования A_k, E_k, D_k и F_k. Этим будут определены функции $H_k(x)$, $V_k(y)$ и $U_k(y)$. Подставляя в (1.10) значения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ..., $K_k(y)$, на основании (1.6) получим значения функций напряжений $U_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ во всей области поперечного сечения

$$U_1(x, y) = U_0 + (d_1^2 - y^2) + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} Z_{4k-3} \cdot \operatorname{ch} \xi_k x \times$$

$$\times \operatorname{sch} \xi_k (b - d_2) \cdot \cos \xi_k y$$

$$0 \leqslant x \leqslant b - d_2,$$

$$0 \leqslant y \leqslant d_1.$$

$$U_1(x, y) = \frac{U_0}{d_2}(b-x) + (b-x)(d_2-b+x) + \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot Z_{4k-3}\times$$

$$\times \operatorname{sh}\xi_k(b-x)\cdot\operatorname{csch}\xi_k d_2\cdot\cos\xi_k y + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot Z_{4k-1}\operatorname{ch}\tau_{1k} y\times$$

$$\times \operatorname{sch}\tau_{1k} d_1 \sin\tau_{1k}(b-x) + \frac{32\,d_1^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}\operatorname{sh}\xi_k(b-x)\times \qquad (2.9)$$

$$\times \operatorname{csch}\xi_k d_2\cdot\cos\xi_k y;$$

$$b-d_2 \leqslant x \leqslant b,$$
$$0 \leqslant y \leqslant d_1;$$

. . . . . .

§ 3. Определение постоянной U_0 и жесткости при кручении

Функции напряжений $U_1(x, y)$ выражены через постоянную U_0 — значение функции напряжений на внутреннем контуре, которая определяется из теоремы о циркуляции касательного напряжения [6]. Согласно этой теореме

$$\int_{C_0} T_s\,ds = \int_{C_0}\left[X_z\frac{dx}{ds} + Y_z\frac{dy}{ds}\right]ds = \int_{C_0}\left[\frac{\partial U}{\partial y}dx - \frac{\partial U}{\partial x}dy\right] G\tau = 2\Omega, \quad (3.1)$$

где C_0 — внутренний контур поперечного сечения, Ω — область, ограниченная этим контуром C_0, G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины стержня, T_s — проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура на направление касательной к этому контуру в той же точке контура.

Подставляя в (3.1) значения функций напряжений из (2.6) и интегрируя, после некоторых преобразований получим следующую формулу для определения постоянной U_0:

$$U_0\left\{\frac{1}{d_2}(a-d_1-d_3) + \frac{1}{d_3}(b-d_2)\right\} - (2a-d_3)(b-d_2) -$$

$$-d_2(a-d_1-d_3) = -\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k-3}}{2k-1}\operatorname{th}\xi_k(b-d_2) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[Z_{4k} +$$

$$+ Z_{4k-1}]\operatorname{th}\frac{\tau_{1k}}{2}(a-d_1-d_3) - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k-2}}{k}\operatorname{th}\zeta_k(b-d_2). \qquad (3.2)$$

Ряды, входящие в выражение (3.2), имеют порядок сходимости $\frac{1}{k^2}$,

поскольку неизвестные Z_k имеют порядок $\frac{1}{k}$. С помощью некоторых преобразований возможно получить формулу для вычисления U_0, выраженную через ряды, порядок сходимости которых не менее $\frac{1}{k^3}$.

Действительно, если составить сумму выражений

$$\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k-3}}{2k-1}\operatorname{ch}\xi_k b\cdot\operatorname{csch}\xi_k d_2\operatorname{sch}\xi_k(b-d_2)+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k-2}}{k}\operatorname{ch}\xi_k b\cdot\operatorname{sch}\zeta_k(b-d_2)\operatorname{csch}\zeta_k d_2+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{Z_{4k}}{k}\operatorname{sh}\tau_{1_k}(a-d_1)\cdot\operatorname{csch}\tau_{1_k}d_3\cdot\operatorname{csch}\tau_{1_k}(a-d_1-d_3)-\right.$$

$$\left.-\frac{Z_{4k-1}}{k}\operatorname{csch}\tau_{1_k}(a-d_1-d_3)\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{Z_{4k-1}}{k}\operatorname{ch}\tau_{1_k}(a-d_3)\cdot\operatorname{sch}\tau_{1_k}d_1\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{csch}\tau_{1_k}(a-d_1-d_3)-\frac{Z_{4k}}{k}\operatorname{csch}\tau_{1_k}(a-d_1-d_3)\right\},$$

то после приведения подобных членов получим выражение, совпадающее с правой частью (3.2), которое выражено через ряды порядка не менее $\frac{1}{k^3}$. Заменяя правую часть (3.2) полученным выражением, окончательно, для вычисления U_0, получим следующую формулу

$$U_0\left\{\frac{1}{d_2}\left(a-\frac{2}{3}d_3\right)+\frac{1}{d_2}\left(b-\frac{2}{3}d_2\right)\right\}=\frac{d_2}{\pi d_3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k}}{k^2}+$$

$$+\frac{d_3}{\pi d_2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k-2}}{k^2}+\frac{4d_1}{\pi d_2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{4k-3}}{(2k-1)^2}-\frac{4d_2^2}{\pi^3}\sum_{1,3}^{\infty}\frac{1}{k^3}\times$$

$$\times\operatorname{cth}\frac{\tau_{1_k}d_3}{2}-\frac{1}{2}\frac{d_2^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\operatorname{th}\tau_{1_k}d_3-\frac{4d_2^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\operatorname{th}\tau_{1_k}d_1-$$

$$-\frac{4d_3^2}{\pi^3}\sum_{1,3}^{\infty}\frac{1}{k^3}\operatorname{cth}\frac{\zeta_k d_2}{2}-\frac{1}{2}\frac{d_3^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\operatorname{th}\zeta_k d_2-$$

$$-\frac{32d_1^2}{\pi^3}\sum_{1,3}^{\infty}\frac{1}{k^3}+(2a-d_3)b-d_2\left(a-\frac{2}{3}d_3-\frac{2}{3}d_1\right). \qquad (3.3)$$

Жесткость при кручении стержней многосвязного профиля определяется по формуле

$$C = G\left[-2U_1\Omega_1 + 2\sum_{k=1}^{n} U_k\Omega_k + 2\iint_{\Omega} U(x, y)\,dxdy\right], \qquad (3.4)$$

где Ω_1 — площадь, ограниченная внешним контуром, Ω_k — площадь, ограниченная внутренним контуром C_k, G — модуль сдвига, Ω — область поперечного сечения стержня, U_1 — значение функции напряжений на внешнем контуре, U_k — значение функции напряжений на внутреннем контуре. В применении к данному сечению формула (3.4) согласно (1.5) принимает вид

$$C = 8G\left\{\int_0^{d_1}\int_0^{b-d_2} \psi_1(x, y)\,dxdy + \int_0^{d_1}\int_{b-d_2}^{b} [\psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y)]\,dxdy + \right.$$

$$+ \int_{d_1}^{a-d_3}\int_{b-d_2}^{b} \psi_2(x, y)\,dxdy + \int_{a-d_3}^{a}\int_{0}^{b-d_2} \psi_3(x, y)\,dxdy +$$

$$\left. + \int_{a-d_3}^{a}\int_{b-d_2}^{b} [\psi_3(x, y) + \Phi_3(x, y)]\,dxdy\right\} + 4U_0\Omega_0 G. \qquad (3.5)$$

Подставляя в (3.5) значения функций напряжений, после некоторых преобразований окончательно получаем следующую формулу для вычисления жесткости

$$C = 8G\left\{U_0\left(ab - \frac{d_3 b}{2} - \frac{ad_2}{2} + \frac{d_2 d_3}{4}\right) + \frac{1}{6}\left(4d_1^3 b - \right.\right.$$

$$- 4d_1^3 d_2 + d_2^3 a - \frac{1}{2} d_3 d_2^2 + bd_3^3 - \frac{1}{2} d_2 d_3^3\Big) -$$

$$- \frac{8d_1^2}{\alpha\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{(2k-1)^3} \operatorname{sh}\xi_k\left(b - \frac{d_2}{2}\right)\operatorname{sch}\frac{\xi_k d_2}{2}\operatorname{sch}\xi_k(b - d_2) -$$

$$- \frac{2d_2^2}{\pi^2}\sum_{1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^3} \operatorname{sh}\frac{\tau_{1k}}{2}(a + d_1 - d_3)\cdot\operatorname{sch}\tau_{1k} d_1\cdot\operatorname{sch}\frac{\tau_{1k}}{2}(a - d_1 - d_3) -$$

$$- \frac{2d_2^2}{\pi^2}\sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^3} \operatorname{sh}\frac{\tau_{1k}}{2}(a - d_1)\cdot\operatorname{sch}\frac{\tau_{1k} d_3}{2}\operatorname{sch}\frac{\tau_{1k}}{2}(a - d_1 - d_3) -$$

$$- \frac{2d_3^2}{\alpha\pi^2}\sum_{1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^3} \operatorname{sh}\zeta_k\left(b - \frac{d_2}{2}\right)\operatorname{sch}\frac{\zeta_k d_2}{2}\operatorname{sch}\zeta_k(b - d_2) +$$

$$\left. + \frac{128d_1^4}{\pi^5}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \operatorname{th}\frac{\xi_k d_2}{2}\right\}. \qquad (3.6)$$

§ 4. Числовой пример

Вычислим жесткость стержня, поперечное сечение которого имеет следующие размеры:

$$a = 2b,\ a-(d_1+d_3) = 2(b-d_2),\ d_3 = 2d_1,\ \frac{b}{d_2} = \frac{3}{2}.$$

Решая систему (2.8), после применения лимитант [5] получим следующие оценки для неизвестных:

$$\begin{gathered}
0{,}02455a^2 \leqslant Z_1 \leqslant 0{,}02564a^2,\\
0{,}02939a^2 \leqslant Z_2 \leqslant 0{,}03057a^2,\\
0{,}00066a^2 \leqslant Z_3 \leqslant 0{,}00184a^2,\\
0{,}01220a^2 \leqslant Z_4 \leqslant 0{,}01365a^2,\\
0{,}00483a^2 \leqslant Z_5 \leqslant 0{,}00662a^2,\\
0{,}01044a^2 \leqslant Z_6 \leqslant 0{,}01198a^2,\\
0{,}00027a^2 \leqslant Z_7 \leqslant 0{,}00187a^2,\\
0{,}00574a^2 \leqslant Z_8 \leqslant 0{,}00778a^2,\\
0{,}00262a^2 \leqslant Z_9 \leqslant 0{,}00491a^2,\\
0{,}00676a^2 \leqslant Z_{10} \leqslant 0{,}00864a^2,\\
0{,}00029a^2 \leqslant Z_{11} \leqslant 0{,}00226a^2,\\
0{,}00386a^2 \leqslant Z_{12} \leqslant 0{,}00633a^2,\\
0{,}00031a^2 \leqslant Z_{\nu(\nu>13)} \leqslant 0{,}00800a^2.
\end{gathered}$$

а для U_0

$$0{,}18573a^2 \leqslant U_0 \leqslant 0{,}18727a^2.$$

Жесткость при кручении такого стержня

$$0{,}44288\ Ga^4 \leqslant C \leqslant 0{,}44840\ Ga^4.$$

За расчетное значение C принимаем среднее арифметическое между нижней и верхней границами жесткости

$$C = 0{,}44564\ Ga^4,$$

что дает ошибку 0,6 %.

Жесткость данного стержня C_0 сопоставлена с жесткостью C^* стержня, поперечное сечение которого имеет только один вырез (фиг 2), и размеры $a = 2b,\ a-(d_1+d_3)=2(b-d_2),\ d_3 = 2d_1,\ \frac{b}{d_2} = \frac{3}{2}$, т. е. площадь, равную половине площади сечения рассматриваемого стержня. Значение жесткости $C^* = 10{,}9259\ Gd_2^4$ взято из работы [3].

Сопоставление показывает, что если стержень с двумя отверстиями (фиг. 1) разрезать по оси симметрии OA на два одинаковых стержня с одним отверстием (фиг. 2), то жесткость C^* полученного стержня (площадь поперечного сечения которого равна половине площади сечения основного стержня) будет в 3,3 раза меньше, чем жесткость стержня с двумя полостями.

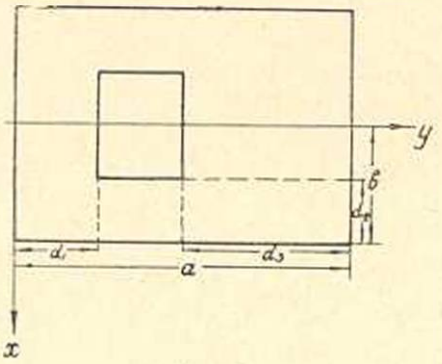
По приближенной формуле теории тонкостенных стержней замкнутого профиля [7], которая в применении к данному сечению (фиг. 1) принимает вид

$$C = \frac{4GF_1^2}{\frac{1}{d_2}\left(a - \frac{d_3}{2}\right) + \frac{1}{d_3}\left(b - \frac{d_2}{2}\right)}$$

(здесь F_1 — площадь, заключенная внутри срединной линии, отмеченной пунктиром на фиг. 1), для жесткости получаем значение

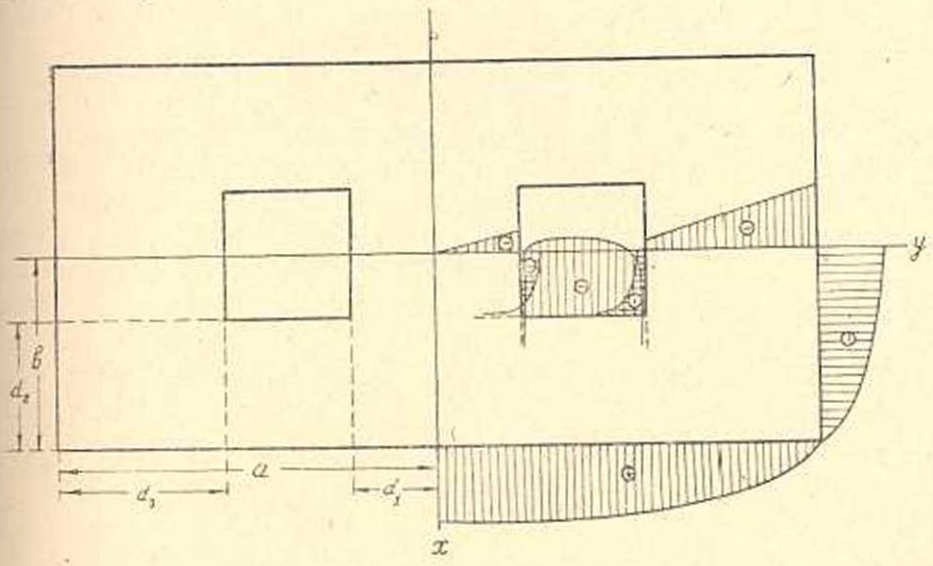
$$C = 0{,}34879\ Ga^4.$$

Это показывает, что приближенная формула по крайней мере при $\frac{d_2}{b} > \frac{2}{3}$ не применима к полым прямоугольным стержням, т. к. приближенное значение жесткости отличается от точного не менее, чем на 21,7 %.



Фиг. 2.

Для иллюстрации напряженного состояния построена эпюра напряжений (фиг. 3).



Фиг. 3.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 18 VII 1959

Ն. Օ. Գուլքանյան

ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Լարումների ֆունկցիայի որոնման համար օգտագործված է լուծումը գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների բերման եղանակը [1]։

Ինտեգրվող խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների չորս անվերջ սիստեմների համախմբի լուծմանը։ Ապացուցված է այդ անվերջ սիստեմների համախմբի լիովին անկախ լուծելիությունը։ Ձողի կոշտության և լարումների որոշման համար ստացված են բանաձևեր։ Որպես թվային օրինակ հաշվված են երկու սիմետրիկ քառակուսի անցքերով կողմերի 1 : 2 հարաբերությամբ ուղղանկյուն կտրվածքով ձողի կոշտությունը և լարումները։ Ստացված արդյունքները համեմատված են մի անցքով ուղղանկյուն հատվածք ունեցող ձողի ոլորման կոշտության հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН АрмССР, т. IX, № 2. 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. *Абрамян Б. Л.* Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, т. XIV, в. 3, 1950.
3. *Гулканян Н. О.* О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 5, 1957.
4. *Гринберг Г. А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных. Изв. АН СССР, серия физическая; т. X, в. 2, 1946.
5. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближеные методы высшего анализа. ОТНИ, М., 1949.
6. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
7. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. Госуд. издат-во оборонной промышленности, М.—Л., 1939.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок

1. Рассмотрим круглую пластинку постоянной толщины h, изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Принимаем, что плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки.

Цилиндрическая система координат (r, β, γ) выбрана так, что координатная плоскость $r\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Принимаются следующие гипотезы [1]:

а) нормальными напряжениями σ_γ на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь по сравнению с прочими напряжениями;

б) Расстояние по нормали (γ) между двумя точками пластинки после деформации остается неизменным;

в) Для касательных напряжений $\tau_{r\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеем

$$\tau_{r\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)\varphi(r,\beta),\qquad \tau_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)\psi(r,\beta),\qquad (1.1)$$

где φ, ψ — искомые функции координат r, β.

В работе [2], при рассмотрении задачи изгиба круглых ортотропных пластинок, обладающих цилиндрической анизотропией, получена разрешающая система трех дифференциальных уравнений относительно трех искомых функций: нормального перемещения $w(r, \beta)$ и функций $\varphi(r, \beta)$ и $\psi(r, \beta)$. При принятых обозначениях эта система имеет вид

$$\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)+Z=0,$$

$$-B_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)+B_{22}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+$$

$$+a_{55}\frac{h^2}{10}\left[B_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+B_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-B_{22}\frac{\varphi}{r}\right]-r\varphi+$$

$$+a_{44}\frac{h^2}{10}\left[(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\beta}-(B_{66}+B_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right]=0,\qquad (1.2)$$

$$-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\beta}-B_{22}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}\right)+$$

$$+a_{55}\frac{h^2}{10}\left[(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\beta}+(B_{66}+B_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right]+$$

$$+a_{44}\frac{h^2}{10}\left[B_{66}\left(r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r}\right)+B_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\right]-r\psi=0,$$

где Z — интенсивность нормально приложенной поверхностной нагрузки; B_{ik}, a_{44}, a_{55} — известные коэффициенты упругости [4].

В случае, когда пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала, для коэффициентов упругости имеем

$$B_{11}=B_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},\qquad B_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},$$
$$B_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad a_{44}=a_{55}=\frac{1}{G'},\tag{1.3}$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярным к ней.

Учитывая (1.3), из системы (1.2) легко можно исключить φ и ψ. Тогда для w получим следующее дифференциальное уравнение

$$D\Delta\Delta w=(1-ka^2\Delta)Z,\tag{1.4}$$

где a — радиус пластинки,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},$$
$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad k=\frac{1}{10(1-\nu^2)}\cdot\frac{E}{G'}\cdot\frac{h^2}{a^2}.\tag{1.5}$$

При составлении уравнений рассматриваемых здесь задач устойчивости и колебаний круглых трансверсально-изотропных пластинок будем исходить из уравнения (1.4).

2. Пусть пластинка сжата в своей плоскости равномерно распределенной нагрузкой, нормальной к контуру и равной P на единицу длины.

Уравнение статической устойчивости получим, если в (1.4) заменим Z выражением [5, 6]

$$Z=-P\Delta w,\tag{2.1}$$

где Δ — оператор Лапласа в полярных координатах (1.5).

Подставляя (2.1) в (1.4), получим

$$\Delta\Delta w+\frac{c^2}{a^2}\Delta w=0,\tag{2.2}$$

где

$$c^2 = \frac{Pa^2}{D - Pka^2}. \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$w(r, \beta) = \left[C_1 J_n\left(c\frac{r}{a}\right) + C_2 Y_n\left(c\frac{r}{a}\right) + C_3\left(\frac{r}{a}\right)^n + C_4\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\right]\sin n\beta, \tag{2.4}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$; J_n и Y_n — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, порядка n. Постоянные интегрирования $C_1, \ldots C_4$ определяются из граничных условий.

Предположим, что рассматриваемая пластинка защемлена по всему контуру. При этом граничные условия будут:

при $$r = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{2.5}$$

Если пластинка сплошная (без отверстия в центре), надо положить $C_2 = C_4 = 0$. Тогда из условий (2.5) получим:

$$\begin{gathered} C_1 J_n(c) + C_3 = 0, \\ C_1\left[-\frac{n}{a}J_n(c) + \frac{c}{a}J_{n-1}(c)\right] + C_3\frac{n}{a} = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для определения постоянных C_1 и C_3 получили систему однородных уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, для определения c получим следующее трансцендентное уравнение

$$2n J_n(c) - c J_{n-1}(c) = 0. \tag{2.7}$$

Это уравнение для каждого n имеет бесчисленное множество корней, среди которых наименьший получается при $n = 1$ и равен $c = 5{,}136$. Следовательно, учитывая (2.3), найдем значение критической силы

$$P^* = \frac{26{,}38\ D}{a^2(1 + 26{,}38\ k)}. \tag{2.8}$$

Принимая здесь $k = 0$, получим значение критической силы, вычисленное по классической теории пластинок.

Как и следовало ожидать [3], в отличие от классической теории, критическая сила (2.8) зависит также от коэффициента k, т. е. от отношения упругих постоянных E/G' и отношения h/a.

В таблице 1 приведены значения коэффициента k и отношения критической силы (2.8) к критической силе, вычисленной по классической теории пластинок ($P^*_{kl} = 26{,}38D/a^2$) для различных значений отношения E/G' при $\frac{h}{a} = 0{,}1$ и $\nu = 0{,}3$.

Из таблицы 1 замечаем, что при увеличении коэффициента k увеличивается расхождение между значениями критических сил, вычисленными по формуле (2.8) и по классической теории пластинок.

Таблица 1

E/G'	0	2.6	5	10	20
k	0	0.0029	0.0055	0.0110	0.0220
$P^*/P^0_{кл}$	1.0	0.929	0.873	0.775	0.633

3. Уравнение свободных колебаний ненагруженной пластинки получим, если в (1.4) заменим Z выражением

$$-Z = -\frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

где γ_0 — удельный вес материала пластинки, g — ускорение силы тяжести.

Подставляя (3.1) в (1.4), получим

$$\Delta\Delta w + \frac{\gamma_0 h}{gD}(1 - ka^2\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{3.2}$$

Принимая

$$w(r, \beta, t) = W(r, \beta)\sin\omega t$$

и подставляя в (3.2), получим

$$\Delta\Delta W - \frac{\gamma_0 h}{gD}\omega^2(1 - ka^2\Delta)W = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение собственных колебаний (3.3) и граничные условия (2.5) будут удовлетворены, если положить

$$W(r, \beta) = \left| I_n(\mu'_{nj}) J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) - J_n(\mu_{nj}) J_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right| \cos n\beta \tag{3.4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, 3, \ldots),$$

где J_n — и I_n — функции Бесселя первого рода вещественного и чисто мнимого аргументов порядка n,

$$\mu'_{nj} = \mu_{nj} / \sqrt{1 + k\mu^2_{nj}},$$

μ_{nj} — корни уравнения, получающиеся из второго условия (2.5)

$$I_n(\mu'_{nj})\frac{d}{dr}\left[J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]_{r=a} - J_n(\mu_{nj})\frac{d}{dr}\left[I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]_{r=a} = 0, \tag{3.6}$$

которое можно написать в виде

$$\mu_{nj} I_n(\mu'_{nj}) J_{n-1}(\mu_{nj}) - \mu'_{nj} J_n(\mu_{nj}) I_{n-1}(\mu'_{nj}) = 0. \tag{3.7}$$

При этом для частот собственных колебаний ω_{nj} имеем

$$\omega^2_{nj} = \frac{gD}{a^4\gamma_0 h}\mu^2_{nj}\mu'^2_{nj}. \tag{3.8}$$

Принимая в (3.8) $k=0$, получим собственные частоты рассматриваемой пластинки, вычисленные по классической теории пластинок.

Отметим, что корни уравнения (3.7) зависят от коэффициента k, т. е. от отношения упругих постоянных E/G', коэффициента Пуассона и отношения h/a. Следовательно, для нахождения корней уравнения (3.7) необходимо иметь значение коэффициента k.

Ниже приводим корни уравнения (3.7), заключенные в интервале $0<\mu_{nj}<10$ при $n=0, 1, 2$ для двух значений коэффициента k:

при $k=0$ $\quad \mu_{01}=3{,}196,\ \mu_{02}=6{,}306,\ \mu_{03}=9{,}439;$
$\mu_{11}=4{,}611,\ \mu_{12}=7{,}799,$
$\mu_{21}=5{,}906,\ \mu_{22}=9{,}197,$

при $k=0{,}0011$ $\quad \mu_{01}=3{,}224,\ \mu_{02}=6{,}399,\ \mu_{03}=9{,}612;$
$\mu_{11}=4{,}662,\ \mu_{12}=7{,}928,$
$\mu_{21}=5{,}981,\ \mu_{22}=9{,}356.$

В таблице 2 приведены значения отношения частот ω_{nj} (3.8) при $k=0{,}011$ к соответствующим частотам ω^0_{nj}, вычисленным по классической теории пластинок ($k=0$).

Таблица 2

	$n=0, j=1$	$n=0, j=2$	$n=0, j=3$	$n=1, j=1$	$n=1, j=2$	$n=2, j=1$	$n=2, j=2$
$\omega_{nj}/\omega^0_{nj}$	0,964	0,855	0,730	0,918	0,795	0,869	0,739

Из этой таблицы замечаем, что, как и следовало ожидать [3], частоты собственных колебаний (ω_{nj}), вычисленные при $k=0{,}011$, заметно отличаются от соответствующих величин (ω^0_{nj}), найденных по классической теории пластинок ($k=0$). Причем это отличие тем больше, чем больше n и j. Вычисления показывают, что это отличие также увеличивается при увеличении коэффициента k.

4. Пусть нагрузка, равномерно распределенная по контуру пластинки (см. п. 2), меняется периодически во времени.

Уравнение динамической устойчивости получим, если в (1.4) заменим Z выражением

$$Z=-P\Delta w-\frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в (1.4), получим

$$(D-Pka^2)\Delta\Delta w+P\Delta w+\frac{\gamma_0 h}{g}(1-ka^2\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{4.2}$$

Представим $w(r, \beta, t)$ в следующем виде

$$w=T_{nj}(t)\left[I_n(\mu'_{nj})J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right)-J_n(\mu_{nj})I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]\cos n\beta. \tag{4.3}$$

фактически принимая, что форма изгиба зажатой по контуру круглой пластинки совпадает с формой свободных колебаний ненагруженной пластинки. При этом удовлетворяются граничные условия задачи (2.5), так как остаются в силе формулы (3.5) и (3.8).

Ясно, что (4.3) не будет удовлетворять уравнению (4.2). Уравнению (4.2) будем удовлетворять приближенно, пользуясь вариационным методом Галеркина.

Подставим (4.3) в (4.2) и полученное выражение умножив на

$$\left[I_n(\mu'_{nj}) J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) - J_n(\mu_{nj}) I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]\cos n\beta\, r\,dr\,d\beta$$

проинтегрируем по всей площади пластинки.

Учитывая, что [9]

$$\int_0^a J_n^2\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) r\,dr = \frac{a^2}{2}\left\{ [J'_n(\mu_{nj})]^2 + \left(1-\frac{n^2}{\mu_{nj}^2}\right) J_n^2(\mu_{nj})\right\},$$

$$\int_0^a I_n^2\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right) r\,dr = -\frac{a^2}{2}\left\{ [I'_n(\mu'_{nj})]^2 - \left(1+\frac{n^2}{\mu'^2_{nj}}\right) I_n^2(\mu'_{nj})\right\},$$

$$\int_0^a J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right) r\,dr = \frac{a^2}{\mu_{nj}^2+\mu'^2_{nj}}\left[\mu'_{nj} J_n(\mu_{nj}) I'_n(\mu'_{nj}) - \right.$$

$$\left. - \mu_{nj} I_n(\mu'_{nj}) J'_n(\mu_{nj})\right],$$

где в силу (3.6) последний интеграл обращается в нуль, после некоторых преобразований для T_{nj} получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2T_{nj}}{dt^2} + \omega_{nj}^2\left(1 - \frac{Pa^2}{D\mu_{nj}^2\mu'^2_{nj}}\cdot\frac{b_2}{b_1}\right) T_{nj} = 0, \tag{4.4}$$

где

$$b_1 = \mu_{nj}^4 + \mu'^4_{nj} + (\mu_{nj}^2 - \mu'^2_{nj})\left\{\mu_{nj}^2\left[\frac{J'_n(\mu_{nj})}{J_n(\mu_{nj})}\right]^2 - n^2\right\},$$

$$b_2 = (\mu_{nj}^4 + \mu'^4_{nj})\left\{\mu_{nj}^2\left[\frac{J'_n(\mu_{nj})}{J_n(\mu_{nj})}\right]^2 - n^2\right\} + \mu_{nj}^6 - \mu'^6_{nj}. \tag{4.5}$$

Принимая $P = P_0\cos\theta t$ и учитывая, что

$$P_{nj}^* = \frac{D\mu_{nj}^2\mu'^2_{nj}}{a^2}\cdot\frac{b_1}{b_2} \tag{4.6}$$

представляет собой приближенное (в смысле метода Галеркина) значение критической силы, уравнение (4.4) можно написать в следующем виде

$$\frac{d^2T_{nj}}{dt^2} + \omega_{nj}^2 (1 - 2\lambda_{nj}\cos\theta t)\, T_{nj} = 0, \tag{4.7}$$

где

$$\lambda_{nj} = P_0/2P_{nj}^*. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.7) представляет собой известное уравнение Матье, которое при некоторых соотношениях между его коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Этим решениям будут соответствовать области динамической неустойчивости рассматриваемой задачи.

Границы областей динамической неустойчивости можно определить по следующим приближенным формулам [8]:

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{nj}} = \sqrt{1 \pm \lambda_{nj}} \tag{4.9}$$

для первой (главной) области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{nj}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{3}\lambda_{nj}^2}, \quad \frac{\theta^*}{2\omega_{nj}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\lambda_{nj}^2} \tag{4.10}$$

для второй области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{nj}} = \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{9\lambda_{nj}^2}{8 \pm 9\lambda_{nj}}} \tag{4.11}$$

для третьей области неустойчивости и т. д., где θ^* — критические частоты внешней нагрузки, т. е. частоты внешней нагрузки, соответствующие границам областей неустойчивости.

Отметим, что формулы (4.9)—(4.11), определяющие границы областей динамической неустойчивости, внешне ничем не отличаются от аналогичных формул, полученных исходя из классической теории пластинок ($k=0$). Но отличие несомненно имеется. Оно заключается в самих величинах ω_{nj} и P_{nj}^*.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 X 1959

Ա. Ա. Խաչատրյան

ԿԼՈՐ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատության մեջ դիտարկված սալերի համար ընդունված են Ա. Ա. Համբարձումյանի առաջադրած [1] հետևյալ հիպոթեզները՝

ա) սալի միջին հարթությանը զուգահեռ հարթականերում գործող նորմալ լարումները կարելի է արհամարհել մյուս լարումների նկատմամբ,

բ) սալի օրևէ երկու կետերի միջև նորմալ (γ) ուղղությամբ եղած հեռավորությունը դեֆորմացիայից հետո մնում է անփոփոխ,

գ) τ_{rr} և $\tau_{\theta\gamma}$ շոշափող լարումները ըստ սալի հաստության փոխվում են պարաբոլական օրենքով (1.1):

Կոր օրթոտրոպ սալերի ծռման համար բերված հավասարումների սիստեմը (1.2) ստացված է [2] աշխատանքի հիման վրա:

Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալերի դեպքում (1.2) սիստեմից ճկվածքի համար ստացված է (1.4) հավասարումը: (1.4) հավասարման մեջ փոխարինելով Z-ը (2.1), (3.1) և (4.1) արտահայտություններով, ստացված են համապատասխանաբար ստատիկ կայունության, սեփական տատանումների և դինամիկ կայունության խնդիրները:

Լուծված են հետևյալ խնդիրները՝ ա) ստատիկ կայունության խնդիրները (2-րդ կետ), երբ սալը սեղմված է ամբողջ եզրով հավասարաչափ բաշխված P ինտենսիվությամբ ուժով. բ) դինամիկ կայունության խնդիրը (4-րդ կետ), երբ վերոհիշյալ ուժը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է պարբերաբար (կոսինուսի օրենքով). գ) չբեռնավորված սալի սեփական տատանումների խնդիրը (3-րդ կետ): Այս բոլոր դեպքերի համար ընդունված է, որ դիտարկվող սալն ամբակցված է ամբողջ եզրով:

Ստացված բանաձևերը և նրանց հիման վրա կատարված թվային հաշվումները ցույց է տալիս, որ այստեղ բերված մեծությունները (կրիտիկական ուժը, սեփական տատանումների հաճախականությունը և այլն), կախված k (1.5) դործակցից, զգալիորեն տարբերվում են կլասիկ տեսությամբ ստացված համապատասխան մեծություններից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, 5, 1958.
2. *Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В.* К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, т. 12, 1, 1959.
3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. ДАН АрмССР, т. XXIX, № 4, 1959.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
5. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. II. Изд. АН СССР, 1953.
6. *Филиппов А. П.* Колебания упругих систем. Изд. АН УССР, 1956.
7. *Боднер Б. А.* Устойчивость пластин под действием периодических сил. ПММ, т. II, в. 1, 1938.
8. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
9. *Грей Э.* и *Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Изд. И. Л., 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. Бабаджанян

О плоской задаче открытого потока несжимаемой жидкости

Задача плоского установившегося открытого потока несжимаемой жидкости сводится к решению системы, состоящей из двух уравнений движения и уравнения неразрывности

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x}; \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x}(h v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h v_y) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где v_x и v_y — компоненты вектора скорости по осям x, y; h — глубина потока; g — ускорение силы тяжести. Эти уравнения получены в следующих предположениях:

а) Гидростатический закон распределения давления по глубине потока,

б) Постоянство вектора скорости по глубине потока,

в) Положительный уклон дна равен уклону сил трения.

Система уравнений (1) содержит три неизвестных v_x, v_y, h и образует замкнутую систему без дополнительного условия потенциальности потока.

Если движение жидкости потенциальное, то из условия отсутствия вихря и постоянства энергии, исходная система (1) приводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости.

Это уравнение имеет следующий вид

$$\left(1 - \frac{v_x^2}{gh}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{v_x v_y}{gh} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v_y^2}{gh}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

где φ есть потенциал скорости.

Уравнение (2) для бурных потоков ($v > \sqrt{gh}$) будет гиперболического типа, решение которого в общем виде дается методом ха-

рактеристик. Если движение жидкости вихревое, то не имеет места вышеизложенное обстоятельство, т. е. не существует такой функции $\varphi(x, y)$, через которую компоненты скорости выражались бы в виде

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Следовательно, и решение задачи не может быть приведено к решению уравнения типа (2).

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы построить соответствующую функцию для вихревого движения и составить уравнение, которому удовлетворяет эта функция.

При решении этой задачи вместо системы (1) составим другую систему уравнений, состоящую из двух последних уравнений системы (1) и из интеграла Бернулли для вихревого стационарного движения:

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(h v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h v_y) = 0, \tag{3}$$

$$h + \frac{v^2}{2g} = H(\psi).$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$h v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad h v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Умножая обе части уравнений (4) соответственно на dy и dx, затем складывая, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = h v_x dy - h v_y dx = d\psi,$$

откуда

$$dy = \frac{v_y}{v_x} dx + \frac{1}{h v_x} d\psi. \tag{5}$$

Перейдем от независимых переменных x и y к переменным ξ, ψ, где $\psi(x, y)$ есть функция тока, а $\xi = x$. Тогда из (5) и из первого уравнения системы (3) можно написать

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{v_y}{v_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{h v_x}, \tag{6}$$

$$v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v_x \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Заменяя v_x и v_y по (4) и производя сокращения получим

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi} = -gh \frac{\partial h}{\partial \psi}. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что существует такая функция $f(\xi, \psi)$, для которой имеют место соотношения

$$v_y = -\frac{\partial f}{\partial \psi} \text{ и } h = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi}}. \tag{8}$$

Имея ввиду выражение (8), уравнения (6) примут следующий вид

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi}\left| v^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)^2 \right|}}, \tag{10}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Третье уравнение системы (3) в новых переменных примет следующий вид

$$\sqrt{\frac{2}{g}\frac{\partial f}{\partial \xi}} + \frac{v^2}{2g} = H(\psi). \tag{11}$$

Из (9) и (10) перекрестным дифференцированием исключая y и подставляя значения v^2, $v\frac{\partial v}{\partial \xi}$, $v\frac{\partial v}{\partial \psi}$ из (11), получим то искомое уравнение, которому удовлетворяет функция $f(\xi, \psi)$.

$$\sqrt{g}\,\frac{dH}{d\psi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left[3\sqrt{\frac{g}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - gH(\psi) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1/2}\right] + 2\sqrt{g}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}\left[H(\psi) - \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{1/2}\right] +$$
$$+ \sqrt{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1/2}\frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \xi}. \tag{12}$$

В этом уравнении $H(\psi)$ — заданная функция. Определив из уравнения (12) функцию $f(\xi, \psi)$, из (9) и (10) можно найти $y(\xi, \psi)$. Функция $y(\xi, \psi = \text{const})$ есть линия тока.

Компоненты скорости v_x, v_y и глубину h можно найти из (8) и (11).

Уравнение (12) имеет очень сложный вид и при решении конкретных задач его применение невозможно. Чтобы выявить особенности некоторых движений, рассмотрим частные случаи, применив идею функции $f(\xi, \psi)$.

1. Рассмотрим случай, когда $h = h(\psi)$, т. е. глубина сохраняется вдоль линии тока. Требуется найти возможное движение жидкости.

Из второго соотношения (8) имеем

$$f(\xi, \psi) = \frac{g}{2}\,h^2(\psi) \cdot \xi + \theta(\psi), \tag{13}$$

где $\theta(\psi)$ неизвестная функция.

Из (9) и (10) имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{ghh'\xi + \theta'(\psi)}{\sqrt{v^2 - (ghh'\xi + \theta')^2}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - (ghh'\xi + \theta')^2}}, \tag{15}$$

где

$$h' = \frac{dh}{d\psi}, \quad \theta'(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}.$$

Интегрируя (14), получим

$$y = \sqrt{\frac{v^2}{(ghh')^2} - \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)^2} + \eta(\psi), \tag{16}$$

где $\eta(\psi)$ — произвольная функция.

Дифференцируя (16) по ψ и сравнивая полученное выражение с (15), можно написать

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v^2}{(ghh')^2} - \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)^2}} \left[\frac{d}{d\psi}\frac{v^2}{(ghh')^2} - 2\left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\theta'}{ghh'}\right)\right] + \frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{gh^2 h'\sqrt{\frac{v^2}{(ghh')^2} - \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)^2}}. \tag{17}$$

В выражении (17) переменная ξ входит явным образом, поэтому ясно, что написанное выражение будет иметь место лишь тогда, когда

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 0, \quad \frac{d}{d\psi}\frac{\theta'}{ghh'} = 0,$$

или

$$\eta(\psi) = \text{const}, \quad \frac{\theta'}{ghh'} = \text{const}.$$

Исходя из этого, (17) примет следующий вид

$$\frac{d}{d\psi}\frac{v^2}{(ghh')^2} = \frac{2}{gh^2 h'}. \tag{18}$$

Присоединяя к этому уравнению интеграл Бернулли в виде (11), получим два уравнения с двумя неизвестными $v(\psi)$ и $h(\psi)$. Из (16) получим уравнение линии тока

$$(y + \text{const})^2 + (\xi + \text{const})^2 = \frac{v^2}{(ghh')^2}. \tag{19}$$

Уравнение (19) является уравнением семейства концентрических окружностей.

В этом случае возможное движение есть вращательное движение частиц жидкости по окружности.

Если глубина всюду одинакова, т. е. $h = \text{const}$, то из (14) и (15) получим:

$$y = -\frac{\theta'\xi}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} + s(\psi), \tag{20}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - \theta'^2}}. \tag{21}$$

Дифференцируя (20) по ψ и сравнивая с (21) получим

$$-\xi \frac{d}{d\psi}\frac{\theta'}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} + \frac{ds}{d\psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - \theta'^2}}.$$

Аналогично уравнению (17), можем написать

$$\frac{d}{d\psi}\frac{\theta'}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} = 0,$$

или

$$\frac{\theta'}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} = \text{const}. \tag{22}$$

Таким образом, получаются два уравнения. Первое из них

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - \theta'^2}}, \tag{23}$$

а второе—интеграл Бернулли в виде (11).

Линии тока в этом случае являются семейством параллельных прямых. Действительно, учитывая (22) выражение (20) примет следующий вид

$$y = \text{const} \cdot \xi + s(\psi).$$

2. Рассмотрим безвихревое движение $[H(\psi) = \text{const}]$.

В этом случае v выразится по закону Бернулли через глубину h

$$v^2 + 2gh = 2gH.$$

Из втрого уравнения (8) получим

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = -\frac{1}{gh}\frac{\partial v_y}{\partial \xi} = -\frac{1}{gh}\frac{dv_y}{dh}\cdot\frac{\partial h}{\partial \xi}, \tag{24}$$

уравнение характеристик которого, имеет вид

$$\frac{d\xi}{\frac{1}{gh}\frac{dv_y}{dh}} = \frac{d\psi}{1}. \tag{25}$$

Интегрируя (25), получим

$$\xi = \frac{1}{gh}\frac{dv_y}{dh}\cdot\psi + f_1(h), \tag{26}$$

где $f_1(h)$ неизвестная функция.

Для простоты исследования вместо ξ и ψ введем новые переменные h и $\psi = \Phi$, тогда

$$\frac{\partial y}{\partial \Phi} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \Phi} + \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{gh} \frac{\partial v_y}{dh} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{1}{gh} \cdot \frac{d^2 v_y}{dh^2} \Phi - \frac{1}{gh^2} \frac{dv_y}{dh} \Phi + f_1 \right).$$

Подставляя в эти уравнения $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi}$ из (9), $\frac{\partial y}{\partial \psi}$ из (10) и имея ввиду, что $v_y = -\frac{\partial f}{\partial \psi}$, получим

$$\frac{\partial y}{\partial \Phi} = \frac{1}{gh} \frac{\partial v_y}{\partial h} \frac{v_y}{\sqrt{v^2 - v_y^2}} + \frac{1}{h \sqrt{v^2 - v_y^2}} =$$

$$= -\frac{1}{gh} \frac{d}{dh} \sqrt{v^2 - v_y^2} = -\frac{1}{gh} \frac{dv_x}{dh}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{v_y}{v_x} \left(\frac{1}{gh} \frac{d^2 v_y}{dh^2} \Phi - \frac{1}{gh^2} \frac{dv_y}{dh} \Phi + f_1 \right). \tag{28}$$

Интегрируя (27) получим

$$y = -\frac{1}{gh} \frac{dv_x}{dh} \Phi + f_2(h), \tag{29}$$

где $f_2(h)$ — произвольная функция.

Подставляя значение y в (28), после некоторых преобразований получим

$$\left(\frac{1}{gh^2} \frac{dv_x}{dh} - \frac{1}{gh} \frac{d^2 v_x}{dh^2} - \frac{v_y}{v_x} \frac{1}{gh} \frac{d^2 v_y}{dh^2} + \frac{v_y}{v_x} \frac{1}{gh^2} \frac{dv_y}{dh} \right) \Phi +$$

$$+ f_2(h) - \frac{v_y}{v_x} f_1(h) = 0.$$

Из этого уравнения видно, что для существования выбранного движения необходимо, чтоб имели место следующие соотношения

$$\frac{1}{h} \frac{dv_x}{dh} - \frac{d^2 v_x}{dh^2} - \frac{v_y}{v_x} \frac{d^2 v_y}{dh^2} + \frac{v_y}{v_x} \frac{1}{h} \frac{dv_y}{dh} = 0, \tag{30}$$

$$f_2(h) - \frac{v_y}{v_x} f_1(h) = 0. \tag{31}$$

Уравнение (31) используется при установлении граничных условий. Обозначив угол наклона скорости через $\beta(h)$ и имея ввиду соотношения:

$$v_x = v \cos\beta = v_x(h), \quad v_y = v \sin\beta = v_y(h),$$

уравнение (30) можно преобразовать следующим образом

$$v_x\frac{d^2v_x}{dh^2}-v_y\frac{d^2v_y}{dh^2}-\frac{1}{h}\left(v_x\frac{dv_x}{dh}+v_y\frac{dv_y}{dh}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2v^2}{dh^2}-\left(\frac{dv}{dh}\cos\beta-v\sin\beta\frac{d\beta}{dh}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{dv}{dh}\sin\beta+v\cos\beta\frac{d\beta}{dh}\right)-\frac{1}{h}\frac{d}{dh}\frac{v^2}{2}=$$

$$=v\frac{d^2v}{dh^2}-v^2\left(\frac{d\beta}{dh}\right)^2-\frac{v}{h}\frac{dv}{dh}.$$

Подставляя значение $\frac{dv}{dh}$, $\frac{d^2v}{dh^2}$ из закона Бернулли, получим

$$\frac{g^2}{v^3}+v\left(\frac{d\beta}{dh}\right)^2-\frac{g}{hv}=0.$$

Из этого уравнения вытекает

$$\left(\frac{d\beta}{dh}\right)^2=\frac{g}{hv^2}-\frac{g^2}{v^4}=\frac{gh}{h^2v^2}\left(1-\frac{g^2h^2}{v^2}\right),$$

или

$$\left(\frac{d\beta}{dh}\right)^2=\frac{c^2}{h^2v^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right), \tag{32}$$

где $c=\sqrt{gh}$—скорость поверхностной волны.

Как показывает уравнение (32), для существования движения необходимо, чтобы в правой части выражение в скобке было положительным т. е. чтобы $v>c$ или $v>\sqrt{gh}$. Таким образом, отыскиваемое движение возможно только при скоростях, соответствующих сверхбурным потокам.

В этом случае задача решается до конца. Действительно, возьмем соотношения

$$\frac{d\beta}{dh}=\frac{d\beta}{dv}\cdot\frac{dv}{dh}=-\frac{g}{v}\cdot\frac{d\beta}{dv}.$$

Подставляя значение $\frac{d\beta}{dh}$ из (32), получим

$$\frac{d\beta}{dv}=\mp\frac{\sqrt{v^2-c^2}}{cv}. \tag{33}$$

Принимая во внимание, что

$$\sin\alpha=\frac{c}{v},$$

где α есть угол Маха (угол между касательной к характеристике в данной точке и вектором скорости) уравнение (33) примет следующий вид

$$d\beta\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v}dv=0. \tag{34}$$

Интеграл уравнения (34) есть*

$$\beta = \mp \left[\sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}} \right) + \alpha \right] + \text{const.} \tag{35}$$

Уравнение (35) устанавливает связь между β и v вдоль характеристик. Как известно, если характеристики в плоскости (x, y) суть прямые линии, то задача решается точно.

Уравнение (35) представляет два (соответствующие двум знакам правой части) семейства линий, зависящих каждое от одного параметра. Эти кривые расположены между окружностями с радиусами $R_B = v_{kp}$ и $R_H = \sqrt{3}\, v_{kp}$, где $v_{kp} = \sqrt{2g \frac{n}{3}}$. Легко доказать, что эти линии на плоскости (v_x, v_y) будут эпициклоидами.

Неизвестные функции $f_1(h)$ и $f_2(h)$ определяются из граничных условий.

Можно найти также уравнение линий тока. Для этого вычислим

$$\frac{dv_x}{dh} = \frac{d}{dh}(v\cos\beta) = -\frac{g}{v}\cos\beta \mp \frac{g}{v} v\sin\beta \cdot \frac{\sqrt{v^2 - c^2}}{cv} =$$

$$= -\frac{g}{v\sin\alpha}\left(\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{c} \sqrt{v^2 - c^2} \right) =$$

$$= -\frac{g}{v\sin\alpha} \cdot \sin(\alpha \pm \beta).$$

Таким же образом

$$\frac{dv_y}{dh} = \frac{d}{dh}(v\sin\beta) = \pm \frac{g}{v\sin\alpha} \cdot \cos(\alpha \pm \beta).$$

Из (35) можно вычислить $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$. Подставляя значения $\frac{dv_x}{dh}$, $\frac{dv_y}{dh}$ в выражения (26) и (29) при значениях $\Phi = \text{const}$, получим уравнения линий тока в параметрическом виде

$$x = \pm \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{hv\sin\alpha} \cdot \text{const} + f_1(h),$$

$$y = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{h \cdot v \cdot \sin\alpha} \cdot \text{const} + f_2(h).$$

Таким образом, полученные разультаты утверждают правильность выбранного метода.

---

* *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, т. 2, 1948.

Институт энергетики и гидравлики
АН Армянской ССР

Поступила 10 III 1959

Գ. Հ. Հարությունյան

ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ԲԱՑ ՀՈՍԱՆՔԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է անսեղմելի հեղուկի բաց հոսանքի հարթ խնդիրը ազատ մակերևույթի առկայության դեպքում, որը հավասարումների մեջ հանդես է գալիս որպես անհայտ։

Հայտնի է, որ երբ արագությունն ունի պոտենցիալ, ապա տիպի ունեն $v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ պայմանները։ Այս դեպքում շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները անխզելիության հավասարման հետ միասին բերվում են մեկ երկրորդ կարգի ոչ գծային մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման, որը բուն հոսանքի դեպքում հիպերբոլական տիպի է և որի լուծումը տրված է խարակտերիստիկների մեթոդով։

Այն դեպքում, երբ հեղուկի շարժման արագությունը չունի պոտենցիալ, այնինչ շարժումը մրրկալին է, վերը նշված հավասարումների սիստեման չի բերվում մեկ հավասարման և խնդրի լուծումը խիստ դժվարանում է։ Հաղվածում ուսումնասիրվում է երկրորդ դեպքը, կառուցվում է այս դեպքի համար $f(x,y)$ ֆունկցիան, որով արտահայտվում են v_x, v_y և h։ Ստացվում է նաև այն հավասարումը, որին բավարարում է $f(x,y)$ ֆունկցիան։ Լուծված են մի քանի մասնավոր դեպքեր։

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Распространение давления в неоднородной жидкости

§ 1. Случай неоднородной жидкости

Рассматривается задача распространения давления вглубь полуплоскости, занятой неоднородной сжимаемой жидкостью.

Пусть в точке O границы полуплоскости возникает некоторое давление, которое затем распространяется по границе ударной волной. Расположим ось Ox по невозмущенной границе полуплоскости, ось Oz перпендикулярно ей. t время с начала движения. На оси Ox имеем граничное условие для давления

$$P(x, O, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & |x| < R(t), \\ O & |x| > R(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $R(t)$ координата фронта на границе жидкости, $P_1(x, t)$ — распределение давления за фронтом.

Обозначим $a(z)$ изменение с глубиной скорости звука в невозмущенной жидкости. Уравнения движения неоднородной жидкости сводятся к уравнению для давления [3]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2(z)} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

Найдем распределение давления на головной волне AB (фиг. 1), представляющей огибающую элементарных возмущений, порожденных фронтом на границе. Уравнение линии AB найдено в [3] и имеет вид

$$x = R(t') + \lambda \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}},$$

$$t - t' = \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}}, \tag{1.3}$$

$$O = \lambda R'(t') - 1.$$

Дифференциальные уравнения характеристических лучей уравнения (1.2) имеют вид ([1], стр. 267):

$$\frac{dx}{ds}=\frac{p_2}{2},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{p_3}{2},\quad \frac{dp_1}{ds}=0, \tag{1.4}$$

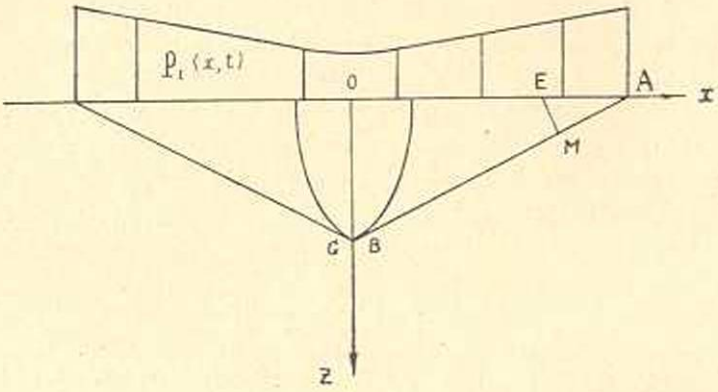
$$\frac{dp_3}{ds}=-(p_1^2+p_3^2)\frac{1}{4a^2(z)}\frac{\partial}{\partial z}a^2(z),\qquad t-t_0=\int_0^s\frac{ds}{a^2(z)}.$$

Начальные условия для уравнения (1.4)

при $s=0,\ x=x_0,\ z=z_0,\ t=t_0,$

$$p_1=\frac{2}{a(z_0)}\sin\vartheta_0,\quad p_3=\frac{2}{a(z_0)}\cos\vartheta_0, \tag{1.5}$$

где ϑ_0 — угол наклона луча в точке (x_0, z_0) к оси Oz.



Фиг. 1.

Интегрируя уравнение (1.4) при условиях (1.5), получим уравнение характеристических лучей

$$x=\frac{\sin\vartheta_0}{a(z_0)}s+x_0,$$

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(z_0)}}}=s, \tag{1.6}$$

$$t-t_0=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(z_0)}}}.$$

Условие в точке E для угла наклона луча ME (фиг. 1) к оси Oz (ϑ_0) имеет вид

$$\sin\vartheta_0=\frac{a(o)}{R'(t_0)}. \tag{1.7}$$

В уравнении (1.6) t_0 — момент времени, когда фронт проходит через точку E границы, $x_0=R(t_0),\ z_0=0$.

Если учесть последние соотношения, уравнения (1.6) и (1.7) перепишутся в виде

$$x - x_0 = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(o)}}} = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)} s,$$

$$t - t_0 = \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(o)}}}, \qquad (1.8)$$

$$R'(t_0)\frac{\sin\vartheta_0}{a(o)} - 1 = 0.$$

Очевидно, уравнения (1.8) совпадают с уравнением линии AB (1.3) если принять $t' = t_0$, $\lambda = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)}$.

Решение уравнения (1.2) в точке M головной волны может быть получено по формуле акад. С. Л. Соболева, которая для плоского случая имеет вид [2]

$$P(x, z, t) = \frac{\Psi(\vartheta_0)}{\sqrt{\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}}}, \qquad (1.9)$$

где $\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}$ якобиан преобразования (1.8), $\Psi(\vartheta_0)$ — произвольная функция, определяемая из начальных условий на луче ME в точке E.

Вычисление якобиана $\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}$ дает нам:

$$\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)} = \mu(z, \lambda)\left\{-\frac{\cos\vartheta_0}{a(o)}\int_0^z \frac{\mu^{-3}(z, \lambda)\,dz}{a^2(z)} + \frac{R'^3(t_0)\cos\vartheta_0}{a(o)R''(t_0)}\right\}, \qquad (1.10)$$

где

$$\mu(z, \lambda) = \sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}, \quad \lambda = \sin\vartheta_0/a(o).$$

Подставляя (1.10) в (1.9) и определяя функцию $\Psi(\vartheta_0)$ из условия в точке E при $s = 0$

$$z = 0, \quad x = x_0 = R(t_0), \quad t = t_0, \quad P(x, o, t) = P_1(x_0, t_0), \qquad (1.11)$$

получим распределение давления вдоль головной волны

$$\frac{P(x, z, t)}{P_1[x_0(\vartheta_0), t_0(\vartheta_0)]} = \sqrt{\frac{R'^3(t_0)}{R''(t_0)}} \cdot \left[\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos\vartheta_0}{a(o)}, \qquad (1.12)$$

где угол ϑ_0 находится из (1.7), t_0 и x_0 получаются из соотношений

$$x_0 = R(t_0) = R\left[t - \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(o)}}}\right], \tag{1.13}$$

которые с учетом (1.7) служат для определения ϑ_0, t_0, x_0. Очевидно, значения t_0 и x_0 совпадают со значениями $\overline{t_*}$ и $\overline{r_0}$ § 4 работы [3].

Получим формулу (1.12) с помощью общих решений в интегральной форме работы [3]. Как показано в работе [3], распределение давления вдоль головной волны записывается в виде

$$\frac{P(x,z,t)}{P_1(\overline{r_0},\overline{t_*})} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\mu(o,\lambda)}{\mu(z,\lambda)}}\left[\int_0^z \frac{dz}{\mu(z,\lambda)}\int_0^z \frac{dz}{\mu^3(z,\lambda)\,a^2(z)}\right]^{-\frac{1}{2}} R'(t_0)\times$$

$$\times \int_0^{\tau_1} \frac{d\eta}{1-\lambda R'(\tau')}, \tag{1.14}$$

где

$$\lambda = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)}; \quad \tau_1^2 = \left[\lambda\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}}\right]^2 - (x_0 - x)^2,$$

$$\tau' = t - \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}}. \tag{1.15}$$

Очевидно, на головной волне в силу (1.8) имеем $\tau_1 = 0$, $1 - R'(\tau')\lambda = 0$, причем τ_1 и $1 - R'(\tau')\lambda$ бесконечно малые одного порядка.

Разложим выражение $1 - \lambda R'(\tau')$ в ряд по степеням τ_1^2. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1^2}\left[1 - \lambda R'(\tau')\right] = -\frac{1}{2C}\cdot\frac{1}{1-\lambda R'(\tau')}, \tag{1.16}$$

где

$$\frac{1}{C}\left\{\frac{R'(t_0)}{\int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\left[\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2\right]^{1/2}}} - \lambda R''(t_0)\right\} : (x - x_0). \tag{1.17}$$

Если отбросить малые высшего порядка, из (1.16) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial(\tau_1^2)^2}[1-\lambda R'(\tau')] = -\frac{1}{2^2C^2}\cdot\frac{1}{[1-\lambda R'(\tau')]^3},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^k}{\partial(\tau_1^2)^k}[1-\lambda R'(\tau')] = \frac{(2k-3)!!}{2^kC^k}\cdot\frac{1}{[1-\lambda R'(\tau')]^{2k-1}}. \qquad (1.18)$$

. . . . . .

Теперь получим разложение для $1-\lambda R'(\tau')$

$$1-\lambda R'(\tau') = [1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}\left[1-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2\cdot2^2}\xi^4-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}\xi^{2k}-\ldots\right] = [1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}\sqrt{1-\xi^2}, \qquad (1.19)$$

где

$$\xi = \frac{\tau_1}{\sqrt{C}\,[1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}}. \qquad (1.20)$$

Если сделать в (1.14) замену переменной (1.20) и учесть, что $[1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=\tau_{01}^2}=0$, и, следовательно, из (1.19)

$$\xi_1 = \frac{\tau_{01}}{\sqrt{C}\,[1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_{01}=0}} = 1,$$

можно найти распределение давления вдоль головной волны

$$\frac{P(x,z,t)}{P_1(r_0,t_*)} = \frac{2}{\pi}R'(t_*)\sqrt{\frac{a(o,\lambda)}{a(z,\lambda)}}\times$$

$$\times\left[C\int_0^z\frac{dz}{a(z,\lambda)}\int_0^z\frac{dz}{a^3(z,\lambda)a^2(z)}\right]^{-\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (1.21)$$

и вычислив интеграл, после несложных преобразований, легко из (1.21) получить выражение (1.12).

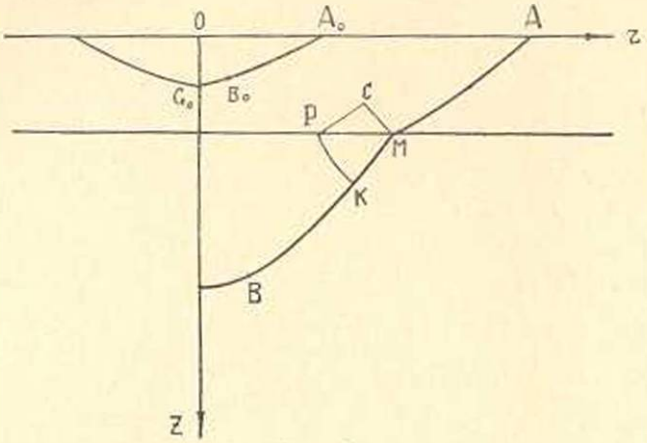
В случае однородной жидкости формулы упрощаются. В случае, если начальная плотность меняется с глубиной $\rho_0(z)$, в формуле (1.12) добавляется множитель $\sqrt{\frac{\rho_0(z)}{\rho_0(o)}}$ [3].

§ 2. Случай слоистой жидкости

Рассмотрим распространение давления в слоистой среде. Пусть жидкий слой, имеющий начальные скорость звука и плотность a_1 и ρ_1 лежит на жидком полупространстве, начальные параметры которого

соответственно a_2 и ρ_1. Пусть в точке O поверхности жидкости возникло давление, которое затем распространяется по ней произвольной ударной волной (фиг. 2).

Рассмотрим сначала плоский случай. Выберем ось Or по свободной поверхности жидкости, Oz—перпендикулярно к ней. Для давления и закона распространения по поверхности воспользуемся обозначениями § 1 (заменив x на r).



Фиг. 2.

В силу симметрии рассматриваем область $r>0$. Найдем сначала область возмущенного движения жидкости. Обозначим высоту слоя h. Тогда для моментов времени $t<\dfrac{h}{a_1}$ фронт волны находится построением Гюйгенса для однородной среды [3].

Он состоит из дуги окружности B_0G_0 с уравнением

$$\sqrt{r^2+z^2}=a_1t \qquad (2.1)_1$$

и дуги кривой A_0B_0, которая находится из соотношений

$$[r-R(t_0)]^2+z^2=a_1^2(t-t_0)^2,\quad R'(t_0)[R(t_0)-r]=a_1^2(t_0-t_1). \qquad (2.1)_2$$

Легко видеть, что уравнение A_0B_0 можно представить в виде

$$\frac{a_1}{R'(t_0)}=\cos\theta,\quad r=R(t_0)+a_1(t-t_0)\cos\theta,$$
$$z=a_1(t-t_0)\sin\theta. \qquad (2.1)_3$$

Уравнения $(2.1)_3$ для фиксированного θ суть уравнения луча ME [4]. Для $t>\dfrac{h}{a_1}$ начнет преломляться участок G_0B_0 волны. Уравнение линии GB получится по Гюйгенсу из G_0B_0. Легко видеть, что уравнение GB дается $(2.1)_2$, где нужно положить $R=\sqrt{a_1^2t^2-h^2}$.

Нами в работе [3] получено уравнение для границы элементарного возмущения в случае неоднородной жидкости (см. § 1, линия BG на фиг. 1)

$$r=\lambda\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}},\qquad t=\int_0^z\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}}. \tag{2.2}_1$$

Уравнение линии BA дается (1.3). Если исключить $r\,(=x)$ и t из уравнения $(2.2)_1$ и (1.3), получим

$$-R(t')+\lambda\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}}=\frac{1}{R'(t')}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{1}{R'^2(t')}}},$$

$$\int_0^z\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}}-t'=\int_0^z\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{1}{R'^2(t')}}}. \tag{2.2}_2$$

Система $(2.2)_2$ имеет решение $t'=0$,

$$\lambda=\frac{1}{R'(o)}. \tag{2.2}_3$$

Решение $(2.2)_3$ определяет координаты точки B (фиг. 1).

Из $(2.2)_1$ имеем

$$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_B=-R'(o)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{1}{R'^2(o)}}.$$

То же значение производной $\left(\frac{dx}{dz}\right)_B=\left(\frac{dr}{dz}\right)_B$ дает (1.3). Таким образом мы доказали, что линия ABM (фиг. 1) — гладкая. Если положить

$$a(z)=\begin{cases}a_1 & z<h,\\ a_2 & z>h,\end{cases}$$

получим вместо $(2.2)_1$ при $z>h$

$$r=\frac{\lambda h}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\lambda^2}}+\frac{\lambda(z-h)}{\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\lambda^2}},$$

$$t=\frac{h}{a_1^2\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\lambda^2}}+\frac{z-h}{a_2^2\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\lambda^2}}. \tag{2.3}_1$$

Легко показать, что (2.3) совпадает с уравнением линии BG, полученным выше иным путем.

Уравнение (1.3) даст нам (если заменить t' на t_0) при $z>h$

$$r-R(t_0)=\frac{1}{R'(t_0)}\left[\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{R'^2(t_0)}}}+\frac{z-h}{\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}\right],$$

$$t-t_0=\frac{h}{a_1^2\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}+\frac{z-h}{a_2^2\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}. \qquad (2.3)_2$$

Для моментов времени $\frac{h}{a_1}<t<\frac{h}{a_1\sqrt{1-\frac{a_1^2}{R'^2(o)}}}$ возмущенная область в нижнем полупространстве ограничена GB: для

$$t>\frac{h}{a_1\sqrt{1-\frac{a_1^2}{R'^2(o)}}}$$

начинает преломляться волна A_0B_0.

Уравнение огибающей BM элементарных возмущений, порожденных следом волны M на границе $z=h$, получится в виде

$$\begin{aligned}&[r-r_\Gamma(t')]+(z-h)^2=a_2^2(t-t')^2,\\ &r_\Gamma'(t')\,[r_\Gamma(t')-r]=a_2^2(t'-t),\end{aligned} \qquad (2.4)_1$$

где абсцисса точки M $r_\Gamma(t')$ определяется уравнениями (см. $(2.3)_2$)

$$r_\Gamma(t')=R(t_0)+\frac{1}{R'(t_0)}\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}},$$

$$t'=t_0+\frac{h}{a_1^2\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}. \qquad (2.4)_2$$

Нетрудно теперь показать, что уравнение линии BM $(2.4)_{1,2}$ тождественно уравнению $(2.3)_2$. Таким образом геометрическая теория волн, полученная для непрерывных неоднородностей, распространяется и на разрывные (слоистые) случаи

$$a(z)=\begin{cases}a_1 & z<h,\\ a_2 & z>h.\end{cases}$$

Очевидно, что уравнение линии BM можно записать также в виде

$$\begin{aligned}&r=r_\Gamma+a_2(t-t_\Gamma)\cos\vartheta, \qquad \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_1}=\frac{a_1}{a_2},\\ &z=h+a_2(t-t_\Gamma)\sin\vartheta,\end{aligned} \qquad (2.4)_3$$

где положено $r_\Gamma=R(t_0)+h\operatorname{ctg}\vartheta$,

$$t_\Gamma=t_0+\frac{h}{a_1\sin\vartheta}.$$

Очевидно, t_Γ есть момент прихода возмущения, возникшего в момент t_0 в точке $(R(t_0),\ o)$, на границу $z=h$; $(r_\Gamma,\ h)$ координаты точки P прихода.

Переходим к определению давления на отраженной волне CM и преломленной волне BM. Проведем лучи—преломленный KP и отраженный CP.

Как показано в [4] и [5], давление вдоль лучей в прифронтовых областях для фронтов прямой, отраженной и преломленной волн, выразится

$$P_0 = \frac{A_0(\theta) f(\tau)}{\sqrt{t - t_0(\theta) + \frac{r_0(\theta)}{a_1}}}, \quad A_0(\theta) = P_1(x_0, t_0) \sqrt{\frac{r_0(\theta)}{a_1}},$$

$$r_0(\theta) = \frac{-R'^3[t_0(\theta)] \sin^2\theta}{R''[t_0(\theta)]\, a_1}, \tag{2.5}$$

где

$$\tau = t - t_0(\theta) - \frac{\sqrt{[r - R(t_0)]^2 + z^2}}{a_1},$$

$$[r - R(t_0)] \sin\theta = z\cos\theta; \quad \cos\theta = \frac{a_1}{R'(t_0)};$$

$$P_1 = \frac{A_1(\theta) f(\tau_1)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}}, \tag{2.6}$$

где

$$\tau_1 = t - t_\Gamma(\theta) - \frac{\sqrt{[r - r_\Gamma(\theta)]^2 + (h - z)^2}}{a_1},$$

$$(r - r_\Gamma)\sin\theta = (h - z)\cos\theta,$$

$$r_\Gamma - R(t_0) = \frac{ha_1}{R'(t_0)\sqrt{1 - \frac{a_1^2}{R'^2(t_0)}}};$$

$$P_2 = \frac{B_0(\theta) f(\tau_2)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}}, \tag{2.7}$$

где

$$\tau_2 = t - t_\Gamma(\theta) - \frac{\sqrt{[r - r_\Gamma(\theta)]^2 + (z - h)^2}}{a_2},$$

$$[r - r_\Gamma(\theta)] \sin\theta_1 = (z - h)\cos\theta_1.$$

Функция $f(\tau)$ характеризует давление за фронтом, причем имеем $f'(\tau) \gg f(\tau)$ (для вычисления давления). На самом фронте волны можно считать

$$f(\tau) = \sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 1 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}; \quad f'(\tau) = \delta(\tau) \text{ (дельта—функция).}$$

Выражение $r_{\Gamma_{1,2}}(\theta)$ представляет радиус кривизны отраженной и преломленной волн в точке $P[r_\Gamma(\theta), h]$ границы в момент падения $t_\Gamma(\theta)$, которое имеет вид [5]

$$r_{\Gamma_2}(\theta) = r_{\Gamma_1}(\theta)\frac{a_2}{a_1}\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{\operatorname{ctg}^2\theta_1} = \left|\frac{h}{\sin\theta} - \frac{R'^2(t_0)\sin^2\theta}{a_1 R''(t_0)}\right|\frac{a_2\operatorname{ctg}^2\theta}{a_1\operatorname{ctg}^2\theta_1}. \tag{2.8}$$

Падающая волна задана (2.5). Если учесть, что

$$t - t_0(\theta) + \frac{r_0(\theta)}{a_1} = t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1},$$

выражение (2.5) запишется

$$P_0 = -\frac{A_0(\theta) f(\tau)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}}. \tag{2.5}$$

Для определения отраженной и преломленной волн используем условия в точке P границы жидкостей (начальные условия для определения $A_1(\theta)$ и $B_0(\theta)$ при $t = t_\Gamma(\theta)$):

а) равенство давлений $P_0 + P_1 = P_2$,

б) равенство нормальных скоростей $\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_2}{\partial z}$.

Легко показать, что при $z = h$ $\tau = \tau_1 = \tau_2 = t - t_\Gamma(\theta)$.

Имеем, кроме того, $\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)_{z=h} = -\left(\frac{\partial\tau_1}{\partial z}\right)_{z=h} = -\frac{\sin\theta}{a_1}$;

$$\left(\frac{\partial\tau_2}{\partial z}\right)_{z=h} = -\frac{\sin\theta}{a_2}.$$

Граничные условия запишутся теперь

$$f(\tau)\frac{A_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} + f(\tau_1)\frac{A_1(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} = f(\tau_2)\frac{B_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}},$$

$$-f'(\tau)\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}\frac{A_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} + f'(\tau_2)\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}\frac{A_1(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} =$$

$$= -f'(\tau_2)\frac{1}{\rho_1}\frac{\sin\theta_1}{a_2}\frac{B_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_2}}}. \tag{2.9}$$

Для давления в точке M преломленной волны получим

$$B_0(\theta) = -\frac{2\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}{\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\sin\theta_1}{a_2}} A_0(\theta)\sqrt{\frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{r_{\Gamma_1}(\theta)}}$$

и

$$P_2 = \frac{A_0(\theta)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}} \cdot K,$$

где

$$K = \frac{2\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}}{\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\sin\theta}{a_2}} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{ctg}\theta_1}. \tag{2.10}$$

В частности, для случая $R'(t) = V = \text{const}$, $P_1 = \text{const}$,

$$P_2 = P_1 \frac{2\frac{1}{\rho}\sqrt{M^2 - 1}}{\sqrt{M^2 - 1}\frac{1}{\rho} + \sqrt{M^2 - 1}\frac{1}{\rho_1}},$$

где

$$M = \frac{V}{a}, \quad M_1 = \frac{V}{a_2}.$$

Для случая осесимметричной задачи легко показать [4], что прифронтовые выражения для давления определятся через (2.5), (2.6) и (2.7) для плоской задачи, посредством соотношений

$$P_0^* = P_0\sqrt{\frac{x_0(\theta)}{r}}, \tag{2.5}_1$$

$$P_1^* = P_1\sqrt{\frac{r_\Gamma(\theta)}{r}}, \tag{2.6}_1$$

$$P_2^* = P_2\sqrt{\frac{r_\Gamma(\theta)}{r}}. \tag{2.7}_1$$

Здесь r—координата меридионального сечения, а остальные обозначения те же, что при плоской задаче.

Окончательно в точке M преломленной волны

$$P_2^* = \frac{A_0(\theta)\cdot K}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}}\sqrt{\frac{x_0(\theta)}{r}}. \tag{2.11}$$

В частности, для $P_1 = \text{const}$; $R'(t) = V = \text{const}$ имеем

$$P_2^* = P_2 \frac{2\frac{1}{\rho}\sqrt{M^2-1}}{\frac{1}{\rho_1}\sqrt{M_1^2-1}+\frac{1}{\rho}\sqrt{M^2-1}} \sqrt{\frac{M_1^2 r - Vt + h\frac{M^2-M_1^2}{\sqrt{M^2-1}}}{r(M_1^2-1)}}. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) для случая однородной жидкости получено А. Я. Сагомоняном [6].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 V 1959

Ա. Գ. Բագդոեվ

ՃՆՇՄԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է հարվածող ալիքի թափանցումը խղանկան ոչ համասեռ կամ շերտավոր հեղուկով կիսատարածության խորքը։ Ստացված է հեղուկի խանգարված շարժման երկրաչափական պատկերը, ընդ որում ցույց է տրված, որ շերտավոր հեղուկի խանգարված տիրույթի սահմանը կարելի է ստանալ անընդհատ անհամասեռությունների բանաձևի օգնությամբ։ Այնուհետև ճառագայթային եղանակով հաշված է ճնշման բաշխումը ինչպես անհամասեռ, այնպես էլ շերտավոր հեղուկի առաջնային ալիքի վրա։

[3] աշխատությունում Ադամարի եղանակով ստացված է ամբողջ խանգարված տիրույթի ինտեգրալ ներկայացում անհամասեռ հեղուկի համար։

Ներկա աշխատության մեջ հետազոտում է այդ լուծման ասիմպտոտիկ վարքը առաջնային ալիքի վրա, և ցույց է տրվում լուծումների նույնությունը ալիքների ֆրոնտում, որոնք ստացվել են ճառագայթման և ինտեգրալ ներկայացման եղանակներով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. IV.
2. *Соболев С. Л.* Об интегрировании волнового уравнения. Труды Сейсмолог. института АН СССР, № 6, 1930.
3. *Багдоев А. Г.* Кандидатская диссертация. МГУ, 1959.
4. *Багдоев А. Г.* Распространение давления в упругое полупространство. ДАН АрмССР, № 2, 1959.
5. *Филиппов А. Ф.* О методе вычисления волн. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 7, 1957.
6. *Сагомонян А. Я.* Докторская диссертация. МГУ, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

А. Ц. Аматуни

Переходное излучение дипольных моментов

1. Рассмотрим переходное излучение двух зарядов e и $\pm e$, движущихся равномерно со скоростью v из первой среды во вторую перпендикулярно к плоской границе раздела этих сред, характеризующихся диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2 и магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2.

Пусть первый заряд e движется по оси z (перпендикулярной к границе раздела), а второй $\pm e$ отстоит от первого на расстоянии r_0. Тогда, раскладывая поля и токи в трехкратные интегралы Фурье получим для компонентов Фурье полей зарядов в средах 1 и 2 выражения

$$E_{1,2}=\frac{ei}{2\pi^2}\frac{\frac{\omega}{c^2}\chi_{1,2}\vec{v}-\vec{k}}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\chi_{1,2}}\left(1\pm e^{ikr_0}\right),$$

$$H_{1,2}=\frac{\varepsilon_{1,2}}{c}[\vec{v}E_{1,2}(k)], \qquad (1)$$

где $\chi_{1,2}=\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}$; $\omega=\vec{k}\vec{v}$, знак плюс перед экспонентой относится к случаю одноименных, а знак минус — к случаю разноименных зарядов. Следуя далее методике предложенной в работе Г. М. Гарибяна [1], из условия сшивки полей на границе раздела находим Фурье-компоненты полей излучения

$$E'_{1,2t}=\frac{ei}{2\pi^2}\frac{\vec{\varkappa}\lambda_{1,2}\gamma_{1,2}}{\zeta_{1,2}}\left(1\pm e^{ikr_0}\right),$$

$$E'_{1,2n}=-\frac{ei}{2\pi^2}\frac{\varkappa^2 n_{1,2}}{\zeta_{1,2}}\left(1\pm e^{ikr_0}\right),$$

$$H'_{1,2}=-\frac{ei}{2\pi^2 c}\frac{k_2\varepsilon_{1,2}[\vec{\varkappa}\vec{v}]\gamma_{1,2}}{\zeta_{1,2}}\left(1\pm e^{ikr_0}\right). \qquad (2)$$

Здесь

$$\lambda_{1,2}=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\chi_{1,2}-\vec{\varkappa}^2;\ \zeta_1=\varepsilon_2\lambda_1-\varepsilon_1\lambda_2=-\zeta_2,$$

$$\eta_{01}=\frac{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\dfrac{v}{\omega}\chi_2}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\chi_1}+\frac{-1+\dfrac{v}{\omega}\chi_2}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\chi_2};$$

η_{02} получается из η_{01}, заменой индексов $1\rightleftarrows 2$. Как видно из (1) и (2) поля E, E', H, H' отличаются от выражений, полученных в [1] для одного заряда, фактором $(1+e^{ikr_0})$.

Найдем теперь поток энергии излучения через плоскость, перпендикулярную к оси z, расположенную во второй среде и отстоящую достаточно далеко от границы раздела (см. [2]).

$$W_2=\frac{c}{4\pi}\int|E'H'|_z dxdydt=\frac{2\pi^2 c}{v}\int|E'(k),\ H'(-k)]\,dk=$$

$$=\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\frac{\omega\chi_2\varkappa^3\eta_2^2}{\varepsilon_2^2}\left|1+I_0(\varkappa\rho_0)\cos\left(\frac{\omega}{v}z_0\right)\right|d\varkappa d\omega. \qquad (3)$$

В последнем выражении для W_2 проведено интегрирование по направлению вектора $\vec{\varkappa}$, $\rho_0^2+z_0^2=r_0^2$ и I_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Рассмотрим теперь для простоты случай перехода зарядов из среды $\varepsilon_1=\varepsilon$ в вакуум $\varepsilon_2=1$. Поскольку основной вклад в излучение вперед приходится на частоты бо́льшие оптических, то $\mu_1=\mu_2=1$. Положим $\varkappa=\dfrac{\omega}{c}\sin\vartheta$, где ϑ угол излучения фотона. Тогда

$$W_2=\frac{4e^2\beta^2}{\pi c}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\vartheta\sin^3\vartheta d\vartheta}{(1-\beta^2\cos^2\vartheta)^2}\int_0^{\infty}\left|\frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\vartheta})}{(\varepsilon\cos\vartheta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\vartheta})(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\vartheta})}\right|^2\times$$

$$\times\left[1+I_0\left(\frac{\omega}{c}\rho_0\sin\vartheta\right)\cos\left(\frac{\omega}{v}z_0\right)\right]d\omega \qquad (4)$$

(считается, что первая среда прозрачна). Из формулы (4) видно, что, как и в случае одного заряда, основной вклад в интегралы в ультрарелятивистском случае дают малые углы $\vartheta\sim\sqrt{1-\beta^2}$ и большие частоты, для которых $\varepsilon=1-\dfrac{\sigma}{\omega^2}$, где $\sigma=\dfrac{4\pi e^2 N}{m}$. При этом, если рассматривать случай достаточно удаленных зарядов $z_0\gg\dfrac{v}{\omega_{\text{гр}}}$ и (или) $\rho_0\gg$ $\gg\dfrac{c}{\omega_{\text{гр}}\sin\vartheta}\simeq\dfrac{c}{\omega_{\text{гр}}\sqrt{1-\beta^2}}$ (здесь $\omega_{\text{гр}}\simeq\sqrt{\dfrac{\sigma}{1-\beta^2}}=\sqrt{\sigma}\dfrac{E}{\mu c^2}$ — граничная частота в спектре переходного излучения [2]), то в силу быстрой осцилляции член с косинусом и функцией Бесселя выпадает и имеет место независимое излучение двух зарядов (удвоенное излучение одного заряда).

Пусть теперь заряды одноименны, $z_0 \ll \frac{v}{\omega_{гр}} = \beta\lambda_{гр}$ и $\rho_0 \ll \frac{c}{\omega_{гр}\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \approx \frac{\lambda_{гр}}{\sqrt{1-\beta^2}}$; тогда можно приближенно принять $\cos\left(\frac{\omega}{v} z_0\right) \sim 1$, $I_0 \approx 1$ и мы будем иметь излучение от заряда $2e$, пропорциональное $(2e)^2$. Отсюда вытекает, что при использовании сгустков заряженных частиц для генерации переходного излучения, продольные размеры их должны быть много меньше $\lambda_{гр}$, а на поперечные размеры накладывается заметно более слабое при больших энергиях частиц условие — они должны быть много меньше чем $\lambda_{гр}\frac{E}{\mu c^2}$.

Остановимся теперь более подробно на изучении разноименных зарядов. Рассмотрим сначала движущиеся по оси z и отстоящие друг от друга на расстоянии $z_0 \ll \beta\lambda_{гр}$, $\rho_0 = 0$ разноименные заряды (диполь, ориентированный по скорости). Рассматривая опять крайне релятивистский случай, раскладываем $\cos\left(\frac{\omega}{v} z_0\right)$ в ряд с точностью до второго члена включительно и выполняем в (4) сначала интегрирование по частотам (подставляя $\varepsilon = 1 - \frac{\sigma}{\omega^2}$), а затем по углам (учитывая, что существенны малые углы). В результате для энергии излучения вперед получим

$$W_2 = \frac{2}{15}\frac{p_n^2}{c^3}\left[\frac{\sigma}{1-\beta^2}\right]^{3/2} = \frac{2}{15}\frac{p_n^2\sigma^{3/2}}{c^3}\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^3. \qquad (5)$$

Здесь $p_n = ez_0$ — дипольный момент в лабораторной системе. Если частица (или сгусток частиц) обладает в собственной системе дипольным моментом p_n^0 то $p_n = p_n^0\sqrt{1-\beta^2}$ и вместо (5) получим

$$W_2 = \frac{2}{15}\frac{(p_n^0)^2\sigma^{3/2}}{c^3}\left(\frac{E}{\mu c^2}\right) = \frac{2e^2\sigma^{3/2}}{15}\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)\left(\frac{z_0}{\lambda_{гр}}\right)^3. \qquad (5^1)$$

Таким образом, излучение диполя отличается от излучения одного заряда множителем $\frac{2}{5}\left(\frac{z_0}{\lambda_{гр}}\right)^2$. Излучение диполя, ориентированного перпендикулярно к скорости $p_t = \varepsilon p_0 = p_t^0$ (индекс 0 относится к системе покоя частицы), в ультрарелятивистском случае можно получить из (4) разлагая функцию Бесселя в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами ряда. Выполняя затем интегрирование по частотам и углам получим

$$W_2 = \frac{4}{15}\cdot\frac{(p_t^0)^2\sigma^{3/2}}{c^3\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4}{15}e^2\sigma^{3/2}\cdot\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)\left(\frac{\rho_0}{\lambda_{гр}}\right)^2. \qquad (6)$$

Как видно из сравнения (6) и (7), излучения диполя перпендикулярного к скорости и параллельного ей отличаются численным фактором.

Спектральное распределение излучения в обоих случаях ($p_0 \neq 0$ и $p_1 \neq 0$) сходно и отличается от спектрального распределения в случае одного заряда. В случае заряда [2] спектральное распределение почти постоянно для частот $\omega < \omega_{гр}$ и падает как ω^{-4} при $\omega \gg \omega_{гр}$. В случае диполей спектральное распределение растет как ω^2 при $\omega \ll \omega_{гр}$ и падает как ω^{-2} при $\omega \gg \omega_{гр}$, слабо меняясь в области $\omega \sim \omega_{гр}$. Выражение для числа испущенных фотонов также претерпевает изменение по сравнению со случаем одного заряда; в случае диполей число фотонов N, с точностью до постоянного множителя порядка единицы, дается формулой

$$N \simeq \frac{\pi p_0^2}{2\pi \hbar c} \tag{7}$$

(здесь p_0 — дипольный момент в системе покоя частицы), т. е. не зависит от энергии.

2. К излучению магнитных диполей можно подойти аналогичным образом, именно рассматривать, как это сделано, например, в [3, 4] (для черенковского излучения), магнитные диполи, образованные разноименными магнитными полюсами. При этом известно, что уравнения Максвелла для магнитных зарядов можно получить из уравнений для электрических зарядов заменой

$$E \to H; \quad H \to -E; \quad \rho_e \to \rho_m; \quad \mu \to \varepsilon; \quad \varepsilon \to \mu. \tag{8}$$

Используя это обстоятельство, из (1) можно получить выражения для полей двух магнитных зарядов отстоящих друг от друга на расстоянии r_1 и движущихся нормально к границе раздела двух сред. Из уравнений сшивки полей тогда сразу видно, что поля излучения $E'(k)$ и $H'(k)$ также можно получить из (2) заменой (8). Для выражения потока энергии во второй среде, которую, как и раньше, будем считать вакуумом, получим

$$W_2 = \frac{4m^2\beta^2}{\pi c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta\, d\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left| \frac{(\mu-1)(1-\beta\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta}) - \beta^2(\varepsilon\mu-1)}{(\mu\cos\theta + \sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta})(1-\beta\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta})} \right|^2 \times$$

$$\times \left| 1 \pm I_0\left(\frac{\omega}{c}\rho_0\sin\theta\right)\cos\left(\frac{\omega}{v}z_0\right) \right| d\omega \tag{9}$$

(m — магнитный заряд). Из этой формулы видно, что опять существенны малые углы $\theta \sim \sqrt{1-\beta^2}$ и близкие к единице $\varepsilon\mu$, т. е. большие частоты; на частотах бо́льших оптических $\mu = 1$ и для переходного излучения магнитных диполей из (9) можно получить формулы, совпадающие с (6) и (7) (с очевидной заменой в последних формулах электрических моментов p на магнитные m).

3. Упомянутый выше подход к вычислению переходного излучения магнитных диполей вызывает, однако, те же возражения, что и в случае черенковского излучения магнитных диполей (см. по этому поводу работу В. Л. Гинзбурга и В. Я. Эйдмана [5]). В общих чертах, суть дела заключается в том, что магнитных зарядов в природе не существует, а магнитные моменты имеют токовую природу, причем уравнения Максвелла в среде с ε и μ не равными единице для магнитных моментов токового происхождения отличаются от уравнений Максвелла в той же среде для магнитных диполей, образованных двумя магнитными зарядами разного знака. Это, в свою очередь, приводит к тому, что разнятся, вообще говоря, также и поля переходного излучения.

При расчете переходного излучения магнитных диполей токового происхождения нужно иметь в виду, что движущийся со скоростью v магнитный диполь индуцирует электрический диполь (и наоборот) т. е. излучение будет обусловлено обоими этими диполями. Поэтому, при записи уравнений Максвелла в системе, связанной со средой, в правые части неоднородных уравнений нужно ввести как плотность магнитных, так и электрических диполей.

Уравнения Максвелла для полей, созданных магнитным моментом плотности m и электрическим моментом плотности p имеют вид (см. напр.* [5]):

$$rotH = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} D = -4\pi \operatorname{div} p', \quad \operatorname{div} B = 0, \tag{10}$$

$$j = c\, rot m' + \frac{\partial}{\partial t} p'.$$

Пусть частица движется перпендикулярно к плоскости раздела двух сред (с разными μ и ε) и обладает точечными дипольными моментами. Тогда, подставляя в (10) вместо m' и p', соответственно $m\delta(r - vt)$ и $p\delta(r - vt)$ и разлагая, как и раньше, поля и токи в трехкратные интегралы Фурье, получим для компонентов Фурье электрического и магнитного полей в средах 1 и 2 выражения,

$$E_{1,2}(k) = \frac{1}{2\pi^2\left(k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \chi_{1,2}\right)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \left[\left(\frac{\omega}{c}\right) \chi_{1,2} p - (pk)\, k \right] - \frac{\omega \mu_{1,2}}{c} [km] \right\},$$

$$\tag{11}$$

$$H_{1,2} = \frac{c}{\omega \mu_{1,2}} [k E_{1,2}(k)].$$

* При сравнении формул (10) с формулами (1) работы [5], нужно иметь в виду, что уравнение для φ в [5] содержит, по-видимому, опечатку—в первой части отсутствует член $-\frac{4\pi}{\varepsilon} \operatorname{div} p'$. Заметим, что упомянутое уравнение не используется в [5].

Как уже упоминалось, m и p в этих уравнениях берутся в стеме, связанной со средой. В системе покоя частицы, значения величин пусть будут m_0, p_0; связь между этими величинами да известными соотношениями (m' и p' образуют антиссиметричный зор Mik см. напр. [6])

$$m = m_0 - (1 - \sqrt{1-\beta^2}) \frac{(m_0 v)\, v}{v^2} - \frac{1}{c} [v p_0],$$

$$p = p_0 - (1 - \sqrt{1-\beta^2}) \frac{(p_0 v)\, v}{v^2} + \frac{1}{c} [v m_0].$$

Добавляя, как обычно, к решению неоднородных уравнений шение однородных уравнений Максвелла, разложенные в трехк ные интегралы Фурье (см. [1]), составляем граничные условия. М но показать, исходя из уравнений, которым удовлетворяют Фу компоненты полей, что независимыми уравнениями являются ра ства тангенциальных составляющих электрических и магнитных лей на границе раздела (равенство нормальных составляющих ве ров B и D вытекает из равенства тангенциальных составляющи и H соответственно). Из этих двух векторных уравнений можно ти сначала нормальные составляющие $E'_{1,2}$, а потом, зная их, и генциальные. Поля $H'_{1,2}$ (Фурье-компоненты) определяются по тре му уравнению Максвелла

$$H'_{1,2} = \frac{c}{\omega \mu_{1,2}} [k E'_{1,2}(k)].$$

Здесь k имеет составляющие $\vec{\varkappa}$, $\lambda_{1,2}$; $\lambda_{1,2}$ определяется по (2), и, и в [1], $Re\lambda_1 < 0$ и $Re\lambda_2 > 0$. В результате вычислений получа следующие формулы для полей излучения в различных случаях:

а) $p_n \neq 0$; $p_t = 0$; $m = 0$.

Поля переходного излучения, как и следовало ожидать, со дают с полями (2) случая двух зарядов, движущихся друг за др на расстоянии $z_0 \ll \beta\lambda_{rp}$;

б) $p_n = 0$; $p_t \neq 0$; $m = 0$.

Введем обозначения, которые будем использовать и в др пунктах

$$a_{1,2} = 2\pi^2 \left| k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \chi_{1,2} \right|,$$

$$\zeta_1 = \varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1; \quad \xi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

Тогда

$$E'_{n1} = \frac{(\vec{\varkappa} p_t)}{\zeta_1} \left\{ \frac{\frac{\omega}{v}\lambda_2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\lambda_1^2}{a_1} - \frac{\frac{\omega}{v}\lambda_2 - \lambda_2^2}{a_2} \right\};$$

$$E_{t_1} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{p_t}{\xi_1}\left\{\frac{\frac{\omega}{v} - \lambda_2}{a_2} - \frac{\frac{\omega}{v} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda_2}{a_1}\right\} +$$

$$+ \frac{\vec{\varkappa}(\vec{\varkappa}\boldsymbol{p}_t)}{\zeta_1\xi_1}\left\{\frac{\frac{\omega}{v}\left(\frac{\lambda_2}{\mu_1} - \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right) + \frac{1}{\mu_2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - \lambda_1\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\xi_1}{a_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu_1} - \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_2\right)}{a_2}\right\}. \qquad (15)$$

в) $p = 0$; $m_n \neq 0$; $m_t = 0$.

В этом случае

$$E_{n_1}(k) = 0,$$

$$E_{t_1}(k) = \frac{\omega}{c}\frac{m_n[\boldsymbol{n}\vec{\varkappa}]}{\xi_1}\left\{\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda_2 - \frac{\omega}{v}}{a_1} - \frac{\lambda_2 - \frac{\omega}{v}}{a_2}\right\}. \qquad (16)$$

При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (случай больших частот, или немагнитных сред) формулы (16) совпадают с соответствующими формулами, получаемыми из рассмотрения переходного излучения от двух разноименных магнитных зарядов, движущихся друг за другом на расстоянии $z_0 \ll \lambda_{\text{гр}}$.

г) $p = 0$; $m_n = 0$; $m \neq 0$.

В этом случае

$$E_{n_1} = \frac{\omega}{c}\frac{[\vec{\varkappa}\boldsymbol{m}_t]_n}{\zeta_1}\left\{\frac{\chi_2\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_2\right)}{a_2} - \frac{\chi_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\omega}{v} - \lambda_2\right)}{a_1}\right\},$$

$$E_{t_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{[\boldsymbol{n}\boldsymbol{m}_t]}{\xi_1}\left\{\frac{\frac{\omega}{v} - \lambda_2\frac{\mu_1}{\mu_2}}{a_1} - \frac{\frac{\omega}{v} - \lambda_2}{a_2}\right\} +$$

$$+ \frac{\omega}{c}\frac{\vec{\varkappa}[\vec{\varkappa}\boldsymbol{m}_t](\chi_1 - \chi_2)}{\zeta_1\xi_1}\left\{\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_2\right)}{a_2} - \frac{\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_1\right)}{a_1}\right\}. \qquad (17)$$

В формулах (14)—(17) приведены выражения для полей в первой среде (излучение назад). Для получения выражений для полей излучения вперед необходимо произвести замену индексов $1 \rightleftarrows 2$. Все

приведенные для полей выражения обращаются в нуль, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\mu_1 = \mu_2$. Еще одна проверка формул состоит в том, что можно рассмотреть излучение электрического момента, перпендикулярного к скорости, уже рассмотренного в пункте 1. Конкретнее, пусть мы имеем частицу обладающую в собственной системе только электрическим моментом $\boldsymbol{p}_t^0$. Тогда при движении со скоростью $\boldsymbol{v}$, в системе лабораторной, связанной со средой, она будет иметь согласно (12), электрический момент $\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_t^0$ (поперечные размеры не сокращаются) и магнитный момент $\boldsymbol{m}_t = -\beta [\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}_t]$, и переходное излучение будет обусловлено обоими этими моментами. (Заметим, что при рассмотрении в модели двух электрических разноименных зарядов это обстоятельство учитывается автоматически). Суммируя теперь формулы (15) и (16) (с учетом $\boldsymbol{m}_t = -\beta [\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}_t]$), после некоторых преобразований получаем результат, совпадающий с (2), где, конечно, нужно положить $z_0 = 0$, $p_0 \ll \frac{\lambda_{\text{гр}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, и рассмотреть случай разноименных зарядов.

4. Перейдем теперь к вычислению энергии переходного излучения от частиц, обладающих в системе покоя только магнитным моментом. Рассмотрим сначала излучение вперед от магнитного момента, параллельного скорости ($m_n \neq 0$). Используя формулы (16) и поступая так же, как и при выводе уравнения (3), получим для энергии излучения вперед следующее выражение

$$W_2 = \frac{2m_n^2\beta^2}{\pi c^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta\, d\theta}{(1-\beta^2\chi_2\cos^2\theta)^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left[\frac{\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)(\chi_2\beta\sin^2\theta) + \sqrt{\chi_1-\chi_2\sin^2\theta} - \beta\chi_2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}{(1-\beta\sqrt{\chi_1-\chi_2\sin^2\theta})\left(\frac{1}{\mu_2}\sqrt{\chi_2}\cos\theta + \frac{1}{\mu_1}\sqrt{\chi_1-\chi_2\sin^2\theta}\right)} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{\omega^2 d\omega}{\mu_2} \tag{18}$$

Рассматривая теперь случай перехода из среды $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\mu_1 = \mu$ в вакуум $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$, нетрудно заметить, что при $\beta \sim 1$ существенны малые углы $\theta \sim \sqrt{1-\beta^2}$ и большие частоты, для которых $\mu = 1$ и $\varepsilon = 1 - \frac{\sigma}{\omega^2}$; тогда выполняя интегрирование по частотам, а потом по углам, получаем результат, совпадающий с выражением, которое получается из рассмотрения двух разноименных магнитных зарядов (пункт 2)

$$W_2 = \frac{2m_n^2}{15c^3}\left(\frac{\sigma}{1-\beta^2}\right)^{3/2} = \frac{2m_n^2\sigma^{3/2}}{15c^3}\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^3. \tag{19}$$

Если учесть, что $m_n = m_n^0 \sqrt{1-\beta^2}$, то получается опять линейный рост с энергией, аналогичный случаю электрических диполей. Спектральное распределение излучения и число излученных фотонов также аналогичны случаю электрических диполей.

При вычислении переходного излучения от магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно к скорости, учтем что $m_t = m_t^0$, и, кроме того, возникает еще электрический момент $p_t = \frac{1}{c}[nm_t]$. Поэтому, при вычислении полей нужно брать сумму выражений (17) и (15). Поскольку получающееся выражение для E' довольно громоздко, удобнее не вычислять H' по формуле (13) и потом подставлять в выражение для вектора Пойтинга (3), а сразу воспользоваться преобразованным выражением для $[E'(k)H'(-k)]$

$$[E'_{1,2}(k)H'_{1,2}(-k)]_n = \frac{c\varepsilon_{1,2}}{\mu_{1,2}\omega}\{E'_{n1,2}(k)E'_{n1,2}(-k) + E'_{t1,2}(k)\cdot E'_{t1,2}(-k)\}, \tag{20}$$

которое получается использованием (3) и условия поперечности поля E'. Поступая далее так же, как уже неоднократно упоминалось, для полной энергии излучения вперед при переходе из среды $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\mu_1 = \mu$ в вакуум в случае $\beta \sim 1$ получим выражение:

$$W_2 = \frac{\pi}{16c^3}\sigma^{3/2}m_t^2 + \frac{3}{5c^3}\sigma^{1/2}m_t^2\left(\frac{E}{\mu c^2}\right), \tag{21}$$

которое при больших энергиях численным фактором отличается от результата, полученного при рассмотрении случая двух разноименных магнитных зарядов. Спектральное распределение излучения в этом случае аналогично уже рассмотренному: рост $\sim \omega^2$ при $\omega \ll \omega_{\text{гр}}$ и спад $\sim \omega^{-2}$ при $\omega \ll \omega_{\text{гр}}$. Поскольку излучение в основном сосредоточено на частоте $\omega_{\text{гр}} = \sqrt{\sigma}\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)$, то из (21) нетрудно грубо оценить число переходных квантов

$$N \sim \frac{3}{5}\frac{\sigma m_t^2}{\hbar c^3}, \tag{6^1}$$

которое, как видно из (6^1), не зависит от энергии.

5. Из формул (6^1) и (6) видно, что излучение обусловленное магнитным моментом электрона, или, тем более, нейтрона, практически отсутствует при разумных значениях σ, т. е. в этом случае среднее число переходных квантов исчезающе мало. Поэтому приведенные результаты могут иметь смысл только для моментов, обусловленных сгустками частиц, которые, возможно, будут использоваться для генерации переходного излучения, в частности, в микрорадиоволновой области [7].

В заключение автор благодарит Г. М. Гарибяна за внимание к работе, полезные советы и замечания, а также Б. М. Болотовского и К. М. Барсукова за обсуждение части результатов.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 29 VI 1959

Ա. Յ. Ամատունի

ԴԻՊՈԼԱՅԻՆ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐԻ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ցույց է տրված, որ դիպոլային (էլեկտրական և մագնիսական) մոմենտների անցումային ճառագայթումը առաջ, գծայնորեն կախված է դիպոլների էներգիայից, տարբերվելով թվային գործակիցներով արագությանը դուդահնո և ուղղահայաց ուղղված դիպոլների համար։

Ճառագայթման սպեկտրալ բաշխումն ունի մաքսիմում, երբ $n \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{1-\beta^2}}$ *և նվազում է ω-ի ավելի փոքր ու ավելի մեծ արժեքների համար որպես քառակուսային ֆունկցիա։ Այդ պատճառով, ճառագայթված ֆոտոնների թիվը կախված չէ դիպոլների էներգիայից։*

Դիտարկված է նաև երկու էլեկտրական լիցքերի անցումային ճառագայթման ինտերֆերենցիալի հարցը և ցույց է տրված, որ ճառագայթման կոհերենտ ուժեղացումը մասնիկների խմբերի համար տեղի կունենա խմբերի $z \ll \lambda_{\text{տր}}$ *երկայնական և* $\rho \ll \frac{\lambda_{\text{տր}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ *լայնական չափերի դեպքում։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарибян Г. М.* К теории переходного излучения, ЖЭТФ, 33, 1403, 1957.
2. *Гарибян Г. М.* К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицы, ЖЭТФ, 37, 527, 1959.
3. *Франк И. М.* Излучение Черенкова для мультиполей, Сборник „Памяти С. И. Вавилова", изд. АНСССР, М., 1952, стр. 172.
4. *Balazs N. L.* Čerenkov radiation of neutral particles with a magnetic moment, Phys. Rev., 104, 1220, 1956.
5. *Гинзбург В. Л.* и *Эйдман В. Я.* О черенковском излучении дипольных моментов, ЖЭТФ, 35, 1508, 1958.
6. *Беккер Р.* Электронная теория, ГИТТЛ, 1941, стр. 325; *Болотовский Б. М.* Теория эффекта Вавилова-Черенкова, УФН, 62, 222, 1957.
7. *Барсуков К. М.* Переходное излучение в волноводе, ЖЭТФ, 37, 1106, 1959; *Аскарян Г. А.* Импульсная когерентная генерация миллиметровых радиоволн релятивистскими электронными сгустками, ЖЭТФ, 30, 584, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

П. А. Безирганян, И. Б. Боровский

Зависимость интенсивности отраженных рентгеновских волн от размеров отражающего монокристалла

§ 1. Введение

Многочисленными экспериментальными работами советских и иностранных исследователей доказано, что интенсивность отраженных рентгеновских волн уменьшается с увеличением размеров отражающего монокристалла. Известно так же, что в результате рекристаллизации каменной соли при высокой температуре интенсивность волн низких порядков отражения значительно ослабляется. В работах [1] и других показано, что шлифовкой поверхностей отражающего монокристалла можно значительно увеличить интенсивность отраженных волн. Авторы этих работ объясняют увеличение интенсивности отраженных волн увеличением мозаичности кристалла и уменьшением экстинкции. В работе [2] показано, что растиранием в ступке порошка сложных карбидов вольфрама и титана увеличивается интенсивность интегрального отражения низких порядков. Обычно это уменьшение объясняют [3] первичной и вторичной экстинкциями или одной из них, связанными с экранированием в совершенных кристаллах верхними плоскостями нижележащих плоскостей, а в несовершенных кристаллах — верхними блоками нижележащих блоков.

Существуют кинематическая и динамическая теории интерференции рентгеновских лучей.

Кинематическая теория пренебрегает взаимодействием между первичной и вторычными и между вторичными волнами.

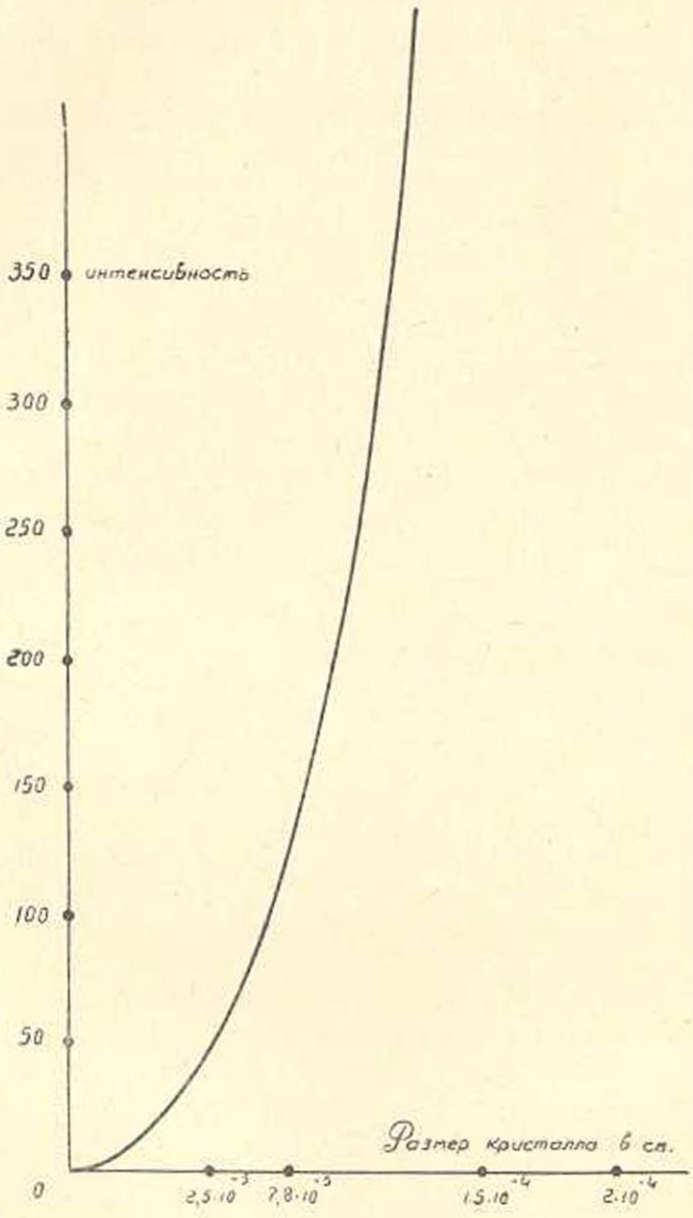
Согласно кинематической теории интерференции рентгеновских лучей, развитой первоначально Лауэ [4], амплитуда волны, отраженной от монокристалла в направлении максимального отражения, пропорциональна числу атомов всего кристалла, облучаемых первичным пучком. В расчетах, приводящих к таким результатам, Лауэ предположил, что точка наблюдения расположена так далеко, что волны, рассеянные различными атомами в направлении точки наблюдения, параллельны.

Значение амплитуды суммарной отраженной волны в точке наблюдения при монохроматической и плоскопараллельной падающей волны, согласно теории Лауэ, запишется следующим образом

$$G = A \frac{\sin M\pi A_1}{\sin \pi A_1} \cdot \frac{\sin N\pi A_2}{\sin \pi A_2} \cdot \frac{\sin L\pi A_3}{\sin \pi A_3}.$$

Из последнего выражения видно, что:

а) амплитуда отраженной волны непрерывно увеличивается с увеличением размеров кристалла (см. фиг. 1),



Фиг. 1.

б) амплитуда отраженной волны не зависит от порядка отражения (вернее, зависит только через атомный фактор),

в) нет сдвига фаз между рассеянной и первичной волнами, т. е. амплитуда волны, отраженной от одномерной, двухмерной или трехмерной решетки, всегда вещественна.

Следовательно, кинематическая теория интерференции не в состоянии объяснить уменьшение интенсивности отраженных волн увеличением размеров отражающего монокристалла. Это расхождение кинематической теории Лауэ с экспериментом объясняют тем, что взаимодействие между первичной и вторичными и между вторичными волнами не учитывается и вводятся поправки на первичную экстинкцию. Однако, одним из существенных недостатков кинематической теории Лауэ для кристаллов, размеры которых больше 10^{-5} *см*, является то, что волны, рассеянные различными атомами в направлении точки наблюдения, считаются параллельными.

Производя расчеты с учетом расходимости волн, рассеянных различными атомами в направлении точки наблюдения, в пределах кинематической теории интерференции рентгеновских лучей можно доказать, что интенсивность отраженных волн уменьшается увеличением размеров отражающего монокристалла.

В отличие от кинематической теории, динамическая теория интерференции рентгеновских лучей учитывает взаимодействие между первичными и вторичными, а также между вторичными, волнами.

В настоящее время, кроме классических [5], [6, 7, 8] теорий, разработана также и квантовая (Колер) теория интерференции рентгеновских лучей.

Однако во всех этих теориях рассматривается или конечное число отражающих плоскостей бесконечных размеров или бесконечное число отражающих плоскостей конечных размеров.

Поэтому как в кинематической, так и в динамической теории недостаточно полно учитывается влияние размеров отражающих монокристаллов на интенсивность отраженных волн.

§ 2. Зависимость амплитуды отраженных волн от размеров кристалла

Рассчитаем волну, отраженную от плоского кристалла, если падающая волна плоская и монохроматическая.

Пусть плоская монохроматическая волна падает на кристалл в направлении единичного вектора $\vec{S_0}$ (см. фиг. 2 и 3) и точка наблюдения M из начала координат видна в направлении $\vec{S}$.

Разность хода Δ в точке наблюдения M между волнами, отраженными от точек 0 и A, равна

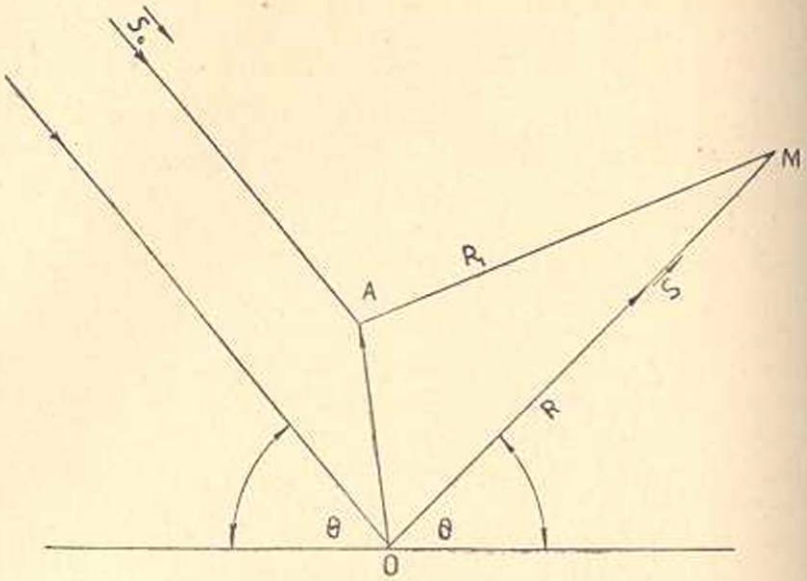
$$\Delta = R - R_1 - \overrightarrow{S_0 r},$$

где R — расстояние точки наблюдения от начала координат,

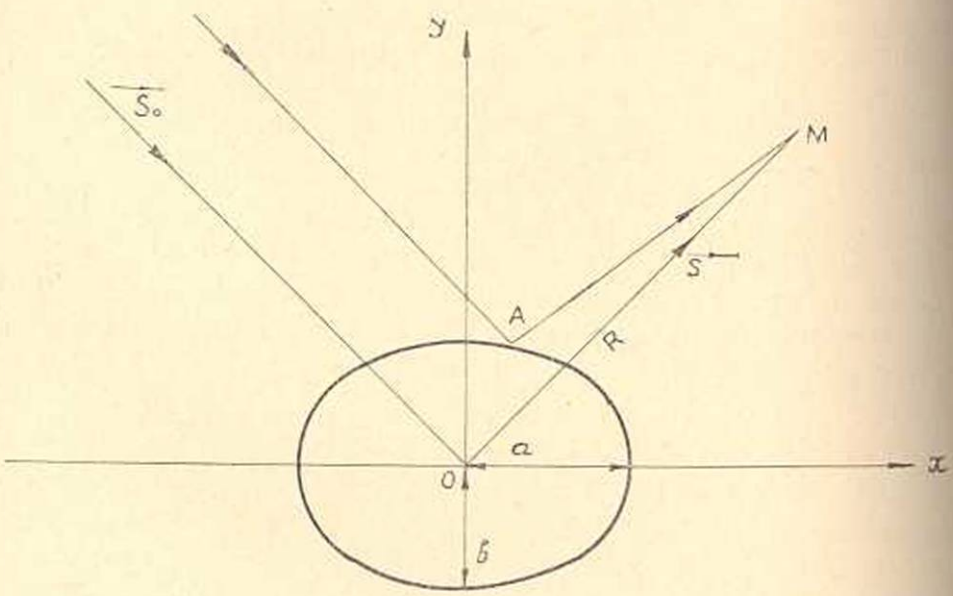
R_1 — расстояние точки наблюдения от рассеивающего атома,

r — расстояние атома от начала координат.

Найдем величину R_1.



Фиг. 2



Фиг. 3.

$$R_1 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2\vec{r}\vec{R}} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2R(\vec{r}\vec{S})}.$$

Разлагая в ряд и не учитывая степеней выше второй, находим

$$R_1 = R + \frac{r^2}{2R} - \vec{S}\vec{r} - \frac{(\vec{r}\vec{S})^2}{2R}.$$

Если падающая волна в точке 0 имеет вид $\exp\{-i\omega t\}$, то отраженная волна в точке M может быть выражена

$$G=\frac{f}{R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}\exp\{-i\omega t\}\sum\exp\left\{-ik\left[(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{r}+\frac{r^2}{2R}-\frac{(\vec{rS})^2}{2R}\right]\right\}. \quad (1)$$

В кинематической теории Лауэ для отраженной волны получается следующее выражение

$$G=\frac{f}{R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}\exp\{-i\omega t\}\sum\exp\{-ik(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{r}\}.$$

Следовательно, исходные допущения Лауэ (параллельность волн, рассеянных различными атомами в направлении точки наблюдения) приводят к пренебрежению слагаемыми

$$\frac{kr^2}{2R}-\frac{k(\vec{rS})^2}{2R}$$

в показателе экспоненциальной функции.

Рассмотрим к чему приводит это пренебрежение.

Допустим, что имеем тригонометрическую функцию $\sin(x-\alpha)$ или $\cos(x-\alpha)$ и что $x\gg\alpha$.

Очевидно, что величиной α в аргументе тригонометрической функции можно пренебречь только в том случае, если она много меньше, чем $\frac{\pi}{2}$.

Оценим величину $\frac{kr^2}{2R}$, которую Лауэ в своих расчетах не учитывает. Обычно, для рентгеновских лучей $k\sim 2\pi\cdot 10^8\ см^{-1}$, r^2 изменяется в пределах $0\leqslant r^2\leqslant 0{,}01\ см^2$ если сечение падающего пучка порядка $0{,}01\ см^2$ и, наконец, $R\sim 10\ см$ (расстояние от образца до фотопленки). В таком случае величина $\frac{kr^2}{2R}$ изменяется в пределах $0\leqslant\frac{kr^2}{2R}\leqslant\pi\cdot 10^5$ и пренебрегать ею нельзя.

При размерах облучаемых кристалликов порядка $10^{-4}\ см$ величина $\frac{kr^2}{2R}$ будет порядка π.

Теперь покажем, что расчеты Лауэ справедливы лишь для маленьких кристаллов порядка 10^{-6} и $10^{-5}\ см$ и в этом случае совпадают с результатами более строгих расчетов.

Формулу [1] можем переписать в следующем виде:

$$G=\frac{f}{R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}\exp\{-i\omega t\}\sum_{m'}\exp\{-ik(\vec{S}-\vec{S}_0)(\vec{am'}+\vec{bn}+c_0\vec{l})\}\times$$

$$\times\sum_{m',n,l}\exp\left\{-ik\frac{(\vec{am'}+\vec{bn}+\vec{c_0l})^2}{2R}\right\}\sum_{m',n,l}\exp\left\{ik\frac{|(\vec{am'}+\vec{bn}+\vec{c_0l})\vec{S}|^2}{2R}\right\}.$$

Допустим, что $\vec{S}_0$ и $\vec{S}$ с координатными осями x, y и z составляют углы:

$$\vec{S}_0(\theta; 90^\circ; 90^\circ - \theta), \quad \vec{S}(\alpha; \beta; \gamma).$$

Тогда выражение для G можно переписать в следующем виде

$$G = \frac{f}{R} \cdot \frac{e^2}{mc^2} \exp\{-i\omega t\} \sum_{m'=0}^{M-1} \exp\left\{-ik\left[(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{a}m' + \frac{a^2\sin^2\alpha - m'^2}{2R}\right]\right\} \times$$

$$\times \sum_{m'=0}^{N-1} \exp\left\{-ik\left[(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{b}n + \frac{b^2\sin\beta n^2}{2R}\right]\right\} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{L-1} \exp\left\{-ik\left[(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{c}_0 l + \frac{c_0^2\sin\gamma_0 l^2}{2R}\right]\right\},$$

где a, b и c — периоды решетки,

M, N и L — числа атомов в направлениях $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Обозначив

$$(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{a} = A_1, \quad \frac{a^2\sin^2\alpha}{2R} = B_1, \quad \frac{2ab\cos\alpha\cos\beta}{2R} = A_4,$$

$$(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{b} = A_2, \quad \frac{b^2\sin^2\beta}{2R} = B_2, \quad \frac{2ac_0\cos\alpha\cos\gamma}{2R} = B_4,$$

$$(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{c}_0 = A_3, \quad \frac{c_0^2\sin^2 j}{2R} = B_3, \quad \frac{2c_0 b\cos\beta\cos\gamma}{2R} = C_4,$$

получим

$$G = A \sum_{m'}\sum_{n}\sum_{l} \exp\{-ik(A_1 m' + B_1 m'^2 + A_2 n + B_2 n^2 + A_3 l + B_3 l^2)\} \times$$

$$\times \sum_{m',n,l} \exp\{ik(A_4 m' n + B_4 m' l + C_4 n l)\},$$

где

$$A = \frac{f}{R} \cdot \frac{e^2}{mc^2} \exp\{i\omega t\}.$$

Если размеры облучаемого монокристалла порядка $10^{-6} - 10^{-5}$ *см*, то с хорошим приближением мы можем тригонометрические функции

$$\cos(kB_1 m'^2), \quad \sin(kB_1 m'^2), \quad \cos(kB_2 n^2), \quad \sin(kB_2 n^2), \quad \cos(kB_3 l^2),$$
$$\sin(kB_3 l^2), \quad \cos(kB_4 m' l), \quad \sin(kB_4 m' l), \quad \cos(kA_4 m' n), \quad \sin(kA_4 m' n),$$
$$\cos(kC_4 n l), \quad \sin(kC_4 n l),$$

заменить величинами

$$\left(1-\frac{1}{2}k^2B_1^2m^4\right)\cdot kB_1m^2,\quad \left(1-\frac{1}{2}k^2B_2^2n^4\right)\cdot B_2kn^2,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}k^2B_3^2l^4\right)\cdot kB_3l^2,\quad \left(1-\frac{1}{2}B_4^2m^2l^2\right)\cdot kB_4ml,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}k^2A_4^2m^2n^2\right)\cdot kA_4mn,\quad \left(1-\frac{1}{2}k^2C_4^2n^2l^2\right)\cdot kC_4nl,$$

соответственно. Это допустимо, так как в этом случае максимальное значение аргумента этих тригонометрических функций порядка 10^{-3}—-10^{-2} радиана.

Произведя суммирование по m, n и l, получим

$$G_{пл}=\frac{f}{R}\frac{e^2}{mc^2}\exp\{-i\omega t\}\sum_{m',n,l}\exp\{-ik(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{r}\}+A',$$

где A' в 10^{+2} раз меньше первой суммы, совпадающей с Лауэвской суммой. Следовательно, в этом случае направление максимумов и величину амплитуды волны, отраженной от такого маленького кристалла, можно определить с помощью формулы Лауэ.

Следует обратить внимание на то, что для маленьких кристаллов амплитуда волны, отраженной от одной плоскости, почти целиком вещественна.

В самом деле, для таких кристаллов расчет амплитуды волны, отраженной от отдельной плоскости, можно произвести с помощью формулы

$$G_{пл}=\frac{f}{R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}\exp\{-i\omega t\}\sum_{m',n}\exp\{-ik(\vec{S}-\vec{S}_0)\vec{r}\},$$

где $\vec{r}=\vec{a}m'+bn$, а эта сумма для амплитуды дает вещественную величину.

На одном частном примере покажем, что для больших кристаллов расчеты Лауэ резко отличаются от более точных расчетов, проделанных в пределах кинематической теории интерференции рентгеновских лучей.

Пусть величины, фигурирующие в наших расчетах, имеют следующие значения:

$$K=2\pi\cdot10^8\ см^{-1};\ \theta=45^\circ;\ R=8\ см;\ a=5\cdot10^{-8}\ см;$$

$$M=1{,}024\cdot10^8;\ b=5\cdot10^{-8}\ см;\ N=5{,}24\cdot10^7\ см.$$

Рассчитаем отражение от одной плоскости. Суммарная волна, отраженная от одной плоскости, выражается следующим образом

$$G_{пл}=\frac{f}{R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}\exp\{-i\omega t\}\sum_{m'=0}^{M-1}\exp\left\{-ik\frac{a\sin^2\theta}{2R}m'^2\right\}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left\{-\frac{ikb}{2R}n^2\right\}.$$

Для нашего частного случая, пользуясь известными формулами (18),

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sin \frac{2\pi m^2}{M} = \frac{\sqrt{M}}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi M}{2} - \sin\frac{M\pi}{2}\right),$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \cos \frac{2\pi m^2}{M} = \frac{\sqrt{M}}{2}\left(1 + \cos\frac{M\pi}{2} + \sin\frac{M\pi}{2}\right),$$

и, суммируя по m' и n, получим

$$G_{na} = A\frac{\sqrt{MN}}{4}\left\{\left[\left(1 + \cos\frac{M\pi}{2} + \sin\frac{M\pi}{2}\right) - i\left(1 + \cos\frac{M\pi}{2} - \sin\frac{M\pi}{2}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(1 + \cos\frac{N\pi}{2} + \sin\frac{N\pi}{2}\right) - i\left(1 + \cos\frac{N\pi}{2} - \sin\frac{N\pi}{2}\right)\right]\right\}.$$

После некоторых простых преобразований получим

$$G_{na} = A\sqrt{MN}\left\{\sin\frac{M+N}{2}\pi\cos\frac{M-N}{2}\pi + \frac{1}{2}\sin\frac{M+N}{2}\pi - \right.$$

$$\left. - i\left[\cos\frac{M+N}{2}\pi + \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{M-N}{2}\pi\right)\right]\right\}.$$

Как видно, для нашего частного случая амплитуда волны, отраженной от плоскости, пропорциональна квадратному корню из числа атомов и в общем случае комплексна.

Таким образом, расчеты Лауэ применимы лишь для кристаллов, размеры которых меньше 10^{-4} *см*. Для таких кристаллов с помощью расчетов Лауэ можно приблизительно определить интенсивность и сдвиг фаз (относительно подающей волны) отраженной суммарной волны.

Метод расчета Лауэ неприменим для кристаллов, размеры которых порядка и больше 10^{-4} *см*, этим методом для таких кристаллов нельзя рассчитывать ни интенсивность, ни сдвиг фаз отраженных суммарных волн.

Расчеты Лауэ применимы, следовательно, только для кристаллов, размеры которых много меньше, чем первая зона Френеля.

Пока размеры кристалла много меньше, чем первая зона Френеля, амплитуда отраженной волны пропорциональна числу частиц, облучаемых первичной волной.

Однако, с дальнейшим увеличением размеров кристалла нарушается эта пропорциональность и с увеличением размеров кристалла амплитуда отраженной волны не только не увеличивается, а может уменьшаться (прибавление четных зон Френеля уменьшает действие нечетных зон).

Все сказанное выше можно сделать еще нагляднее, если несколько уменьшить точность наших расчетов для амплитуды волны, отраженной от плоскости, заменяя при этом суммирование (1) интегрированием. В самом деле, амплитуда волны, отраженной от одной плоскости, выражается следующим интегралом

$$G_{\text{пл}} = \frac{n}{R} \cdot \frac{e^2}{mc^2} f \exp\{i(\omega t - kR)\} \int\int \exp\left\{-\frac{ik(x^2 \sin^2\theta + y^2)}{2R}\right\} dxdy,$$

где n — число атомов в 1 $см^2$ плоскости; x и y совпадают с направлениями $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно.

Докажем прежде всего, что амплитуда волны, отраженной от плоскости, вещественна для маленьких кристаллов, комплекса для кристаллов, имеющих размеры больше 10^{-4} $см$, и чисто мнимая для очень больших кристаллов.

Вещественную и мнимую части этой амплитуды можно записать следующим образом

$$G_{\text{веществ.}} = \frac{n}{R} \frac{e^2}{mc^2} f \left[\int_0^u \cos\frac{kx^2 \sin^2\theta}{2R} dx \int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R} dy - \right.$$

$$\left. - \int_0^u \sin\frac{kx^2 \sin^2\theta}{2R} dx \cdot \int_0^v \sin\frac{ky^2}{2R} dy\right], \qquad (2)$$

$$G_{\text{мнимая}} = -i \frac{n}{R} \frac{e^2}{mc^2} f \left[\int_0^u \cos\frac{kx^2 \sin^2\theta}{2R} dx \int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R} dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^u \sin\frac{kx^2 \sin^2\theta}{2R} dx \cdot \int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R} dy\right],$$

где u и v линейные размеры плоскости в направлениях x и y соответственно.

В конечных пределах эти интегралы не могут быть выражены конечной величиной. Для вычисления этих интегралов с конечными пределами воспользуемся рядами тригонометрических функций синуса и косинуса.

$$\int_0^u \cos\frac{kx^2 \sin^2\theta}{2R} dx = u\left[1 - \frac{1}{215}\left(\frac{k\sin^2\theta}{2R} u^2\right)^2 + \frac{1}{419}\left(\frac{k\sin^2\theta}{2R} u^2\right)^4 - \cdots\right],$$

$$\int_0^u \sin\frac{kx^2 \sin^2\theta}{2R} dx = u\left|\frac{1}{113} \cdot \frac{k\sin^2\theta}{2R} u^2 - \frac{1}{317}\left(\frac{k\sin^2\theta}{2R} u^2\right)^3 + \right.$$

$$\frac{1}{5!1!}\left(\frac{k\sin^2\theta}{2R}u^2\right)^5+\cdots\Bigg],$$

$$\int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R}\,dy = v\left[1-\frac{1}{2!5}\left(\frac{k}{2R}v^2\right)^2+\frac{1}{4!9}\left(\frac{k}{2R}v^2\right)^4-\cdots\right],$$

$$\int_0^v \sin\frac{ky^2}{2R}\,dy = v\left[\frac{1}{1!3}\frac{k}{2R}v^2-\frac{1}{3!7}\left(\frac{k}{2R}v^2\right)^3+\frac{1}{5!1!}\left(\frac{k}{2R}v^2\right)^5\cdots\right].$$

Последние выражения показывают, что для кристаллов, размеры которых не больше 10^{-4} *см*, интегралами

$$\int_0^u \sin\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^v \sin\frac{ky^2\,dy}{2R}$$

можно пренебречь по сравнению с интегралами

$$\int_0^u \cos\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R}\,dy.$$

В таком случае получим

$$G_{\text{веществ.}} = \frac{n}{R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}f\int_0^u \cos\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx\int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R}\,dy,$$

$$G_{\text{мнимая}} = 0,$$

т. е. для кристаллов, размеры которых не превышают 10^{-4} *см*, амплитуда волны, отраженной от плоскости и вообще от кристалла, почти целиком вещественна, т. е. сдвига фазы относительно первичной волны нет.

Эти ряды также показывают, что когда размеры кристалла превышают 10^{-4} *см*, амплитуда отраженной волны становится комплексной. Теперь покажем, что с увеличением размеров кристалла мнимая часть амплитуды увеличивается и в конце концов она становится почти целиком мнимой. Для этого рассмотрим следующие интегралы

$$Y_1 = \int_0^u \exp\left\{-ik\frac{\sin^2\theta}{2R}x^2\right\}dx; \quad Y_2 = \int_0^v \exp\left\{-\frac{ik}{2R}y^2\right\}dy.$$

Сделаем следующие преобразования

$$Y_1 = \int_0^{\infty} \exp\left\{-ik\frac{\sin^2\theta}{2R}x^2\right\}dx - \int_u^{\infty} \exp\left\{-ik\frac{\sin^2\theta}{2R}x^2\right\}dx,$$

$$Y_2 = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{iky^2}{2R}\right\} dy - \int_v^\infty \exp\left\{-\frac{iky^2}{2R}\right\} dy.$$

Интегралы

$$\int_u^\infty \exp\left\{-ik\frac{\sin^2\theta}{2R}x^2\right\} dx \quad \text{и} \quad \int_v^\infty \exp\left\{-\frac{ky^2}{2R}\right\} dy$$

бесконечно много раз интегрируя по частям, можем выразить следующими рядами:

$$\int_u^\infty \exp\left\{-\frac{ik\sin^2\theta}{2R}x^2\right\} dx = \frac{2R\exp\left\{-\frac{ik\sin^2\theta}{2R}u^2\right\}}{-ik\sin^2\theta\cdot u}\left[1+\frac{2R}{-i\sin^2\theta\, ku^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(2R)^2\cdot 1\cdot 3}{(-ik\sin^2\theta\, u^2)^2}+\frac{(2R)^3\cdot 3\cdot 5}{(-ik\sin^2\theta\, u^2)^3}\cdots\right],$$

$$\int_v^\infty \exp\left\{-\frac{iky^2}{2R}\right\} dx = \frac{2R\exp\left\{-\frac{ikv^2}{2R}\right\}}{-ikv}\left[1+\frac{2R}{-ikv^2}+\frac{(2R)^2\,1\cdot 3}{(-ikv^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2R)^3\cdot 3\cdot 5}{(-ikv^2)^3}+\cdots\right].$$

Таким образом получим

$$Y_1 = \int_0^u \exp\left\{-\frac{ik\sin^2\theta x^2}{2R}\right\} dx +$$

$$+\frac{2R\exp\left\{-i\frac{k\sin^2\theta u^2}{2R}\right\}}{-ik\sin\theta\cdot u}[1+\cdots],$$

$$Y_2 = \int_0^v \exp\left\{-i\frac{ky^2}{2R}\right\} dy + \frac{2R\exp\left\{-i\frac{kv^2}{2R}\right\}}{-ikv}[1+\cdots],$$

или

$$Y_1 = \frac{\sqrt{\pi R}(1-i)}{\sqrt{k}\sin\theta\cdot 2} + \frac{2R\exp\left\{-\frac{ik\sin^2\theta u^2}{2R}\right\}}{-ik\sin^2\theta\cdot u}[1+\cdots],$$

$$Y_2 = \frac{\sqrt{\pi R}(1-i)}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1-i}{2} + \frac{2R\exp\left\{-\frac{iku^2}{2R}\right\}}{-ikv}[1+\cdots].$$

Отсюда видно, что если u и v порядка 10^{-2} *см*, то всеми членами по сравнению с первыми можно пренебречь. В таком случае получим

$$G_{mn} = \frac{\pi n l^2 f (1-i)^2}{kmc^2 \sin\theta} = -i\,\frac{\pi n e^2 f}{kmc^2 \sin\theta},$$

то есть, когда размеры кристалла доходят до 10^{-2} *см*, амплитуда волны, отраженной от плоскости (с точностью до 10^{-1}), целиком мнимая.

§ 3. Зависимость интенсивности отраженных волн от размеров кристалла

Рассмотрим зависимость интенсивности отраженных волн от размеров отражающего кристалла. Для этого проследим изменение значения интегралов I_1 и I_2 в зависимости от верхних пределов u и v и построим кривые, показывающие зависимости величин I_1^2, I_2^2 соответственно от u

$$\left\{\left[\int_0^u \cos\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx\right]^2 + \left[\int_0^u \sin\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx\right]^2\right\}$$

и v

$$\left\{\left[\int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R}\,dy\right]^2 + \left[\int_0^v \sin\frac{ky^2}{2R}\,dy\right]^2\right\},$$

а также зависимость величины

$$\left\{\left[\int_0^u \cos\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx\right]^2 + \left[\int_0^u \sin\frac{kx^2\sin^2\theta}{2R}\,dx\right]^2\right\} \times$$

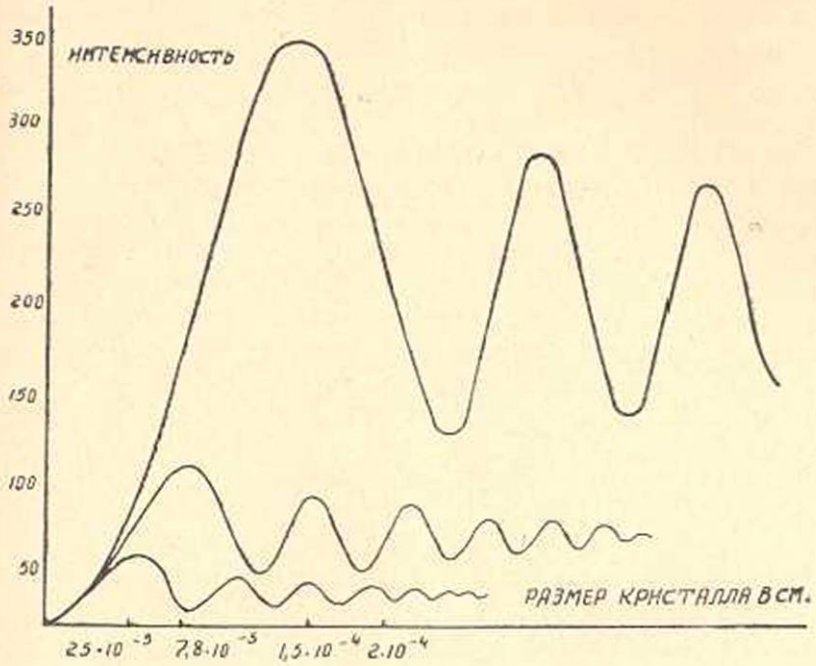
$$\times\left\{\left[\int_0^v \cos\frac{ky^2}{2R}\,dy\right]^2 + \left[\int_0^v \sin\frac{ky^2}{2R}\,dy\right]^2\right\}$$

от u и v.

Кривые этих зависимостей были построены с помощью графического интегрирования интегралов $\int_0^u$ и $\int_0^v$.

Эти кривые* (см. фиг. 4) показывают, что пока размеры кристалла меньше, чем первая зона Френеля, интенсивность отраженных волн увеличивается с увеличением размеров кристалла. С дальнейшим увеличением размеров кристалла величина этой интенсивности колеблется. С увеличением размеров кристалла частота колебаний быстро увеличивается, максимумы уменьшаются, а минимумы увеличиваются, т. е. кривая сглаживается.

* Эти кривые построены для $M_o k_{\alpha_1}$ излучения и для плоскостей 1340 кварца.



Фиг. 4.

В конце концов, когда линейные размеры кристалла превышают 10^{-2} *см*, интенсивность отраженных волн практически становится равной одной четверти интенсивности волны, отраженной первой зоной Френеля. На фигуре 1 приведена кривая, показывающая зависимость интенсивности отраженных волн по расчетам Лауе. Как видно из сопоставления двух кривых, даже в пределах первой зоны Френеля результаты расчетов Лауэ существенно расходятся с результатами более строгих расчетов.

Результаты расчетов Лауэ совпали бы с более строгими расчетами, если первая зона Френеля была бы бесконечно большой.

На фиг. 4 показана зависимость интенсивности отраженных волн от размеров кристалла для различных порядков отражения. Как видно из этих фигур, чем ниже порядок рефлекса, т. е. чем больше площади зон Френеля, тем больше амплитуда и меньше частота колебаний интенсивности, поэтому изменение интенсивности сильных рефлексов легко обнаружить. Для слабых рефлексов кривая быстро сглаживается и уменьшение интенсивности с увеличением размеров кристалла трудно обнаружить.

Следовательно, интенсивность зависит от порядка отражения и размеров кристалла и тем сильнее, чем сильнее отражение.

Согласно представлениям Вульфа-Брегга кристалл рассматривается состоящим из семейства параллельных равноотстоящих атомных плоскостей, которые отражают рентгеновские лучи по зеркальному

закону, если длина падающей волны удовлетворяет одному из следующих условий

$$2d\sin\theta = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots,$$

где d — межплоскостное расстояние этих плоскостей,

θ — угол скольжения падающих и отраженных волн.

В динамической теории Дарвина [5], [9] в основе всех вычислений лежит представление о взаимном обмене энергией между первичными и отраженными волнами. Дарвин учитывает многократное отражение волн между Вульф-Брегговскими плоскостями и взаимодействие как между первичной и многократно отраженными волнами, так и между многократно отраженными волнами.

Расчет волны, отраженной от одной плоскости, Дарвин [9] производит с помощью интеграла

$$\int\int \exp\left\{-\frac{ik\,(x^2\sin^2\theta + y^2)}{2R}\right\} dydx.$$

Он построил свою динамическую теорию, выбрав для пределов интегрирования $\pm\infty$, предполагая, что результаты будут пригодны для любого кристалла, так как в отражении участвует, главным образом, первая френелевская зона. В дальнейших своих расчетах Дарвин исходит из того, что амплитуда волны, отраженной от плоскости, чисто мнимая (умножается на $-i$), что означает отставание по фазе от первичной волны на $\frac{\pi}{2}$, следовательно, дважды отраженная волна будет находиться в противофазе с первичной волной.

Однако, как только что было доказано, сдвиг фазы отраженной волны относительно первичной волны зависит от размеров кристалла. Величина этого сдвига фазы для кристаллов, размеры которых меньше 10^{-5} *см*, незначительна, далее с увеличением размеров отражающего монокристалла она растет и колеблется около $\frac{\pi}{2}$ со значительной амплитудой и, наконец, для кристаллов, размеры которых больше 10^{-2} *см*, практически становится равной $\frac{\pi}{2}$.

Далее из выражения

$$\int_0^u = \int_0^\infty - \int_u^\infty,$$

видно, что интеграл $\int_0^u$ можно заменить с точностью до величины 0,1 интегралом $\int_0^\infty$ только тогда, когда $u \geqslant 10^{-2}$ *см*.

Следовательно, для кристаллов, размеры которых меньше 10^{-2} *см*, по расчетам Дарвина не точно определяются сдвиг фаз и амплитуды волн, отраженных от плоскости.

Несомненно, для таких кристаллов неточны все выводы, вытекающие из динамической теории Дарвина (за исключением выводов, относящихся ко вторичной экстинкции). Например, формула Дарвина для учета влияния первичной экстинкции

$$\frac{E\omega}{I_0} = Qv\frac{thmq}{mq}$$

выведена для конечного числа бесконечных плоскостей, поэтому не всегда применима для кристаллов, размеры которых меньше, чем 10^{-2} *см*.

В динамической теории Дарвина неверно определяется и коэффициент преломления рентгеновских лучей для кристаллов, размеры которых меньше 10^{-2} *см*. Для определения этого коэффициента Дарвин определяет амплитуду волны, отраженной от плоскости с бесконечными пределами.

Таким образом, он для таких кристаллов неверно определяет величину и сдвиг фаз этой амплитуды, следовательно, и неверно определяет коэффициент преломления. Более точные расчеты показывают, что величина коэффициента преломления для кристаллов, размеры которых меньше 10^{-2} *см*, зависит от размеров кристалла.

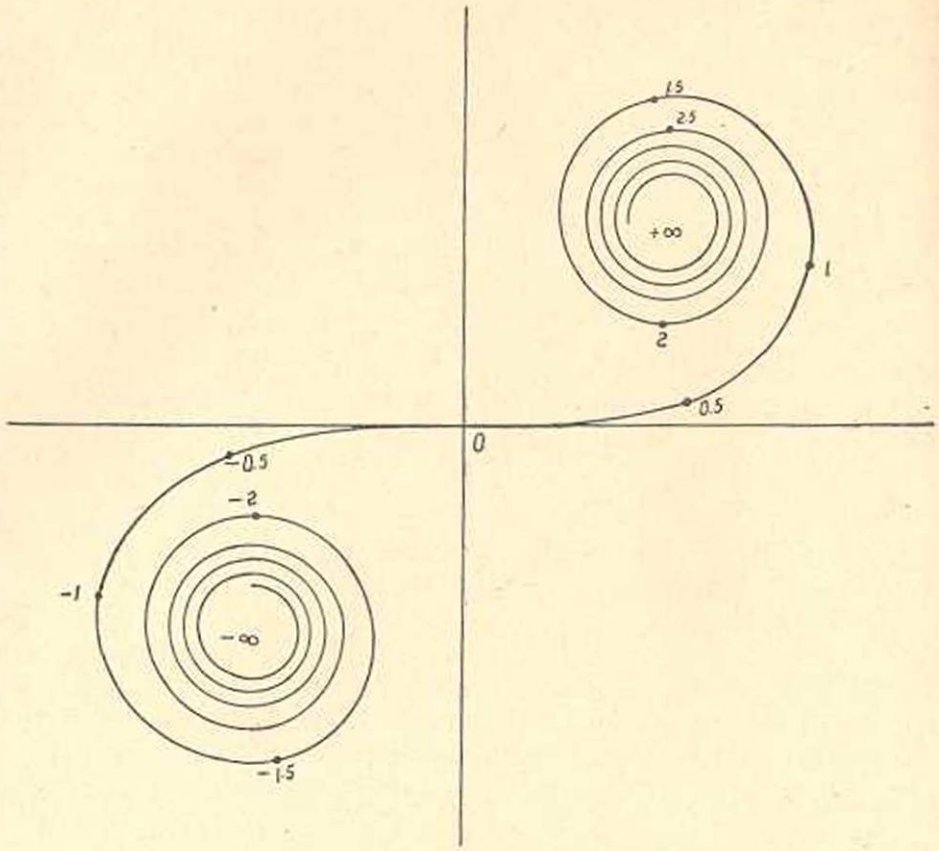
Расчеты Дарвина для вторичной экстинкции верны, так как здесь определялись интенсивности [9, 10], для которой фазовые сдвиги не играют роли. В теории вторичной экстинкции расчеты интенсивности по методу Лауэ производятся только для блоков, величины которых предполагаются меньше 10^{-4} *см*, а для таких кристаллов, как уже мы показали, расчеты Лауэ приблизительно верны.

Из всего вышесказанного становится ясным, что для кристаллов, размеры которых больше 10^{-5} *см* и меньше 10^{-2} *см*, невозможно точно определить интенсивность отраженных волн ни по расчетам Лауэ, ни по расчетам Дарвина и, наконец, для таких кристаллов неверна и поправка Дарвина к формуле Лауэ на первичную экстинкцию.

Так, например, точка $w = 1$ на спирали Корню (фиг. 5) при длине волны $M_0 k_\alpha$ и для плоскостей кварца (1340) соответствует величине размера кристалла $2{,}8 \cdot 10^{-4}$ *см*. В этом случае значения

$$\int \exp\left\{-i\frac{k\sin^2\theta\, x^2}{2R}\right\} dx,$$

вычисленные Лауэ, Дарвином и нами относятся соответственно как 45:32:40, а для точки $w = 1, 2$, что соответствует размеру кристалла $2{,}9 \cdot 10^{-4}$ *см*, эти результаты относятся как 108:64:85.



Фиг. 5

§ 4. Поправка к динамической теории Дарвина

Поправку в динамическую теорию Дарвина можно внести, если принять, что амплитуда волны, отраженной от одной плоскости, в общем случае комплексна.

Из (2) имеем

$$G_{\text{пл}} = G_{\text{вещ}} + G_{\text{мнимая}}$$

или

$$G_{\text{пл}} = G' - iG''$$

где

$$G' = G_{\text{вещ}}; \quad G'' = iG_{\text{мним}}.$$

Амплитуду волны, отраженной от одной плоскости в направлении падающей волны, обозначим через $G_{0,\text{пл}} = G_0' - iG_0''$, где G_0' и G_0'' вещественные и мнимые части этой амплитуды при отсутствии обычного поглощения.

В таком случае показатель преломления рентгеновских лучей можно выразить следующим образом:

$$\mu = 1 - \delta = 1 - \frac{G_0' \sin\theta}{kd},$$

где d межплоскостное расстояние отражающих плоскостей. Так как G_0' зависит от размеров отражающих плоскостей (2), то, следовательно, показатель преломления рентгеновских лучей также зависит от размеров отражающего кристалла и только для кристаллов, размеры которых больше чем 10^{-2} *см*, коэффициент преломления практически не зависит от размеров кристалла и по величине равен

$$\mu = 1 - \delta = 1 - \frac{\lambda^2 l^2}{2\pi mc^2} nf(0).$$

Для учета взаимодействия между первичными и отраженными, а также между отраженными волнами, произведем расчеты, аналогичные расчетам Дарвина. Тогда для неполярного кристалла получим следующие уравнения [9]

$$\begin{aligned} S_r &= -iG_{пл}' + (1 - iG_{0,пл}''')\, e^{-i\varphi} S_{r+1}, \\ T_{r+1} &= (1 - iG_{0,пл}''')\, e^{-i\varphi} T_r - iG_{пл}'''\, e^{-2i\varphi} S_{r+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где T_r и S_r амплитуды, соответственно первичной и отраженной волны в точках, находящихся над r-ой плоскостью,

$$\varphi = ka\sin\theta; \quad G''' = G'' + iG'; \quad G_0''' = G_0'' + iG'.$$

Система (3) решается подстановками

$$T_{r+1} = \chi T_r \quad \text{и} \quad S_{r+1} = \chi S_r.$$

Таким образом, для отношения амплитуды отраженного от поверхности кристалла пучка к амплитуде пучка, падающего на поверхность кристалла, получим

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{-G'''}{G_0''' + v \pm \sqrt{(G''' + v)^2 - G'''^2}},$$

где v определяется из уравнения $kd\sin\theta = m\pi + v$.

Обозначив $\varepsilon = G_0''' + v$ получим

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{-G''' - iG'}{\varepsilon + iG_0' \pm \sqrt{(\varepsilon + iG_0')^2 + (G'' + iG)^2}}. \tag{4}$$

Знак у квадратного корня надо выбирать так, чтобы $\left(\frac{S_0}{T_0}\right)$ было меньше единицы.

Когда действительная часть амплитуды волны, отраженной от одной плоскости, равна нулю, то (4) совпадает с уравнением Дарвина

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{-G'''}{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - G'''^2}}.$$

Как видно, формула (4) по форме совпадает с формулой, выведенной с учетом поглощения.

Для определения зависимости интегральной интенсивности отраженных волн от размеров отражающих плоскостей (в рамках кинематической теории интерференции рентгеновских лучей), определим интенсивность суммарной волны, отраженной от трехмерного кристалла. Для этого мы можем отражение кристалла, содержащего L плоскостей рассматривать как рассеяние одномерной решетки, каждый рассеивающий центр которой рассеивает волну с интенсивностью $I_0(G_{пл})^2$, где I_0 — интенсивность первичной волны.

Таким образом, для интенсивности волны, отраженной от трехмерного кристалла, получим

$$I = I_0 |G_{пл}|^2 \frac{\sin^2 L\,(kd\sin\vartheta)}{\sin^2 (kd\sin\vartheta)}, \tag{5}$$

где d — межплоскостное расстояние отражающих плоскостей.

Из (5) видно, что интенсивность отражения заметна только в пределах

$$-\pi/L < kd\sin\vartheta < \pi/L.$$

Нетрудно убедиться в том, что в этих пределах изменением $|G_{пл}|^2$ с точностью до 10^{-4} можно пренебречь. Следовательно, характер зависимости интегральной интенсивности от размеров отражающих плоскостей определяется характером зависимости $|G_{пл}|^2$ от размеров отражающих плоскостей.

Выводы

1. Кинематическая теория интерференции рентгеновских лучей Лауэ применима только для кристаллов, размеры которых меньше размеров первой зоны Френеля.

2. Динамическая теория Дарвина применима только для кристаллов, размеры которых много больше размеров первой зоны Френеля, т. е. для кристаллов, размеры которых больше 10^{-2} *см*.

3. Поправка Дарвина на первичную экстинкцию учитывает зависимость интенсивности отраженных волн только от толщины кристалла, поэтому она неточна для кристаллов, размеры отражающих плоскостей которых меньше 10^{-2} *см*.

4. До сих пор считали, что уменьшение интенсивности отраженных волн с увеличением размеров отражающего кристалла можно объяснить только динамической теорией интерференции рентгеновских лучей. Как показали наши расчеты, по крайней мере часть этого уменьшения можно объяснить в пределах кинематической теории интерференции рентгеновских лучей.

5. В динамической теории Дарвина неточно определяется показатель преломления для кристаллов, размеры которых меньше 10^{-2} *см*.

6. В динамическую теорию Дарвина можно внести поправку, чтобы она была применима для кристаллов любых размеров.

Ереванский государственный университет,
Институт маталлургии им. А. А. Байкова АН СССР

Поступила 8 V 1959

Գ. Հ. Բեզիրգանյան և Ի. Բ. Բորովսկի

ՄԻԱԲՅՈՒՐԵՂԻՑ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁԱԾ ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՆՈՂ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ՉԱՓԵՐԻՑ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտված են անդրադարձած ռենտգենյան ճառագայթների ինտենսիվության կախումը անդրադարձնող միաբյուրեղի չափերից և Լաուեի տեսության կիրառելիության սահմանները։

Հետազոտությունից պարզվել է, որ՝

1. Ռենտգենյան ճառագայթների ինտերֆերենցիայի Լաուեի կինեմատիկ տեսությունը կիրառելի է միայն այն բյուրեղների նկատմամբ, որոնց չափերը փոքր են Ֆրենելի առաջին զոնայի չափերից։

2. Դարվինի դինամիկ տեսությունը կիրառելի է միայն այնպիսի բյուրեղների նկատմամբ, որոնց չափերը շատ մեծ են Ֆրենելի առաջին զոնայի չափերից։

3. Մինչև այժմ ընդունված էր, որ բյուրեղի չափերի մեծացման հետևանքով անդրադարձած ռենտգենյան ճառագայթների ինտենսիվության փոքրացումը կարելի է բացատրել միայն ռենտգենյան ճառագայթների ինտերֆերենցիայի դինամիկ տեսությամբ։ Սակայն հաշիվները ցույց են տալիս, որ այդ փոքրացման գոնե մի մասը կարելի է բացատրել ռենտգենյան ճառագայթների ինտերֆերենցիայի կինեմատիկ տեսությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гогоберидзе Д. В.* Некоторые объемные дефекты кристаллов. Л., 1958.
2. *Уманский Я. С.* Карбиды твердых силавов. М., 1947.
3. *Darwin C. G.* The teory of X-ray reflection. Phil. Mag. 27, 315—333, 1914.
4. *Von Laue M.* Röntgenstrahlinterferenzen, 1948.
5. *Darwin C. G.* The theory of X-ray reflection. Phil. Mag. 27, 675—690, 1914.
6. *Христов Хр. Я.* О прохождении электромагнитных волн через плоскопараллельную кристаллическую пластинку. ДАН, т. 81, 553, 1951.
7. *Христов Хр. Я.* О прохождение лучей Рентгена через плоскопараллельную пластинку кристалла. ДАН, т. 81, 799, 1951.
8. *Христов Хр. Я.* О прохождении лучей света через плоскопараллельную кристалическую пластинку. ДАН, т. 85, 1269, 1952.
9. *Darwin C. G.* The reflection of X-rays from imperfect crystals. Phil. Mag., 43, 801—829, 1922.
10. *Жданов Г. С.* Основы рентгеноструктурного анализа. Гостехиздат, 1940.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

Э. С. Бурунсузян

Порог достоверного обнаружения и предельная чувствительность радиотелескопов

Для оценки порога чувствительности радиотелескопа, обеспечивающего близкое к достоверному обнаружение дискретных источников, используем методы статистической теории сообщений*. Основные положения этой теории мы считаем знакомыми читателю и используем в работе без пояснений.

Процесс обнаружения дискретного источника космического радиоизлучения в принципе заключается в следующем. Некоторый космический объект (дискретный источник), присущим ему радиоизлучением, постоянно информирует о своем существовании. Эта информация по каналу передачи вместе с порожденными им помехами поступает к экспериментатору. В роли канала передачи в рассматриваемой задаче выступает радиотелескоп. По полученной информации экспериментатор обнаруживает источник космического радиоизлучения.

В этом процессе имеют существенное значение вероятность (p) нахождения источников в „поле зрения" радиотелескопа и вероятность (p') правильного суждения о наличии источника по сигналу на выходе, искаженному помехами.

Вероятность p' всегда меньше единицы, однако многократными наблюдениями она может быть сделана близкой к единице, т. к. суждение о наличии источника по результатам многих наблюдений близко к достоверному. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такой случай ($p' \approx 1$) т. к. для радиоастрономии весьма важно, чтобы констатация наличия источника была близкой к достоверной. Далее, для простоты вместо „близко к достоверному" мы будем писать „достоверно".

Для достоверного обнаружения весьма слабых источников требуется большое количество наблюдений, что сопряжено с большой затратой времени. В радиоастрономической практике время, отведенное на обнаружение источников ($t_н$), всегда ограничено, следовательно, достоверно могут быть обнаружены лишь источники, интен-

* *C. E. Shannon* and *W. Weaver*, „The Matematical Theory of Communication". The University of Illinois, 3—89, 1949.

сивность излучения которых превышает некоторый определенный предел.

Определим порог чувствительности радиотелескопа, превышение которого позволяет достоверно констатировать наличие источника. Или иначе: выясним, во сколько раз мощность сигнала должна превышать мощность помех, чтобы радиотелескоп стал неискажающим?

В рассматриваемой задаче скорость передачи сообщения R определяется количеством данных об источниках, поступающих в единицу времени. При неискаженном приеме скорость передачи сообщения у получателя (на выходе канала) равна скорости создания сообщения (скорости на входе) т. к. помехи действующие в канале не изменяют количества проходящей информации. Следовательно пропускная способность канала передачи (максимальная скорость C, с которой по каналу могут передаваться сообщения) должна удовлетворять условию

$$C \geqslant R. \tag{1}$$

Как известно, пропускная способность канала с полосой пропускания ΔF в котором действует нормально распределенная помеха (белый шум) с дисперсией флуктуаций на выходе $\overline{\sigma_{ш}^2}$, при среднеквадратичном значении полезного сигнала $\overline{\sigma_c^2}$ равна

$$C = \Delta F \log_2\left(1 + \frac{\overline{\sigma_c^2}}{\overline{\sigma_{ш}^2}}\right) \quad \frac{\text{двоичных единиц}}{\text{сек.}}. \tag{2}$$

Для оценки скорости передачи сообщения R определим количество информации H, поступающее от источника за время наблюдения $t_н$. Если в течение части этого времени в „поле зрения" радиотелескопа находились источники, то в течение оставшейся части они были вне „поля зрения", поэтому имеют место только две возможности: первая с вероятностью p — в „поле зрения" источник есть, и вторая с вероятностью $1-p$ — в „поле зрения" источника нет. Следовательно искомое количество информации равно

$$H = -[p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)] \frac{\text{двоичных единиц}}{\text{символ}} \tag{3}$$

(символ — элемент информации, в рассматриваемом случае пара „есть", „нет"). Так как канал обладает ограниченной полосой пропускания ΔF, а поступивший на вход сигнал ограничен временем $t_н$, количество информации, проходящей по каналу, на основании известной теоремы Котельникова, выразится произведением

$$H_R(p) = 2\Delta F t_н \cdot H \frac{\text{двоичных единиц}}{\text{символ}} \tag{4}$$

и, следовательно, скорость передачи сообщения будет равна

$$R = \frac{H_R(p)}{t} = 2\Delta F H \quad \frac{\text{двоичных единиц}}{\text{сек.}} \tag{5}$$

С учетом (2) и (5) условие (1) принимает вид

$$\log_2\left(1 + \frac{\overline{\sigma_c^2}}{\overline{\sigma_{\text{ш}}^2}}\right) \geqslant 2H \tag{6}$$

или в более удобной форме записи

$$\frac{\overline{\sigma_c^2}}{\overline{\sigma_{\text{ш}}^2}} \geqslant 2^{2H} - 1. \tag{7}$$

Выходной сигнал представляет собой напряжение промодулированное диаграммой антенны. Если в „поле зрения" есть источник, напряжение равно $\sqrt{\overline{U_c^2}}$, в противном случае—нулю. Такое переменное напряжение $U_c(t)$ имеет постоянную составляющую (среднее значение) в которой не содержится информации.

Наличие постоянной составляющей лишь изменяет общий (начальный) уровень выходного напряжения и не способствует обнаружению источника. Полезным является напряжение $[U_c(t) - \overline{U_c(t)}]$ и поэтому следует считать

$$\overline{\sigma_c^2} = \overline{[U_c(t) - \overline{U_c(t)}]^2} = p(1-p)\overline{U_c^2}. \tag{8}$$

Дисперсия флуктуаций на выходе связана со среднеквадратичным напряжением шумов $\overline{U_{\text{ш}}^2}$ известным соотношением

$$\overline{\sigma_{\text{ш}}^2} = \frac{\Delta F}{\Delta f}\overline{U_{\text{ш}}^2} \tag{9}$$

в котором Δf представляет собой половину полосы пропускания усилителей высоких частот.

Подставляя (8) и (9) в (7) и учитывая, что при обычно используемом квадратичном детектировании напряжения на выходе пропорциональны мощностям сигнала и помехи действующим на входе, получаем

$$\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \geqslant \left[\frac{2^{2H}-1}{p(1-p)}\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\overline{\Delta F}}{\Delta f}}. \tag{10}$$

Выражая чувствительность в температурных единицах и отбрасывая знак неравенства будем иметь

$$\delta T = \left[\frac{2^{2H}-1}{p(1-p)}\right]^{\frac{1}{2}} N_{\text{ш}} T \sqrt{\frac{\overline{\Delta F}}{\Delta f}}. \tag{11}$$

Здесь δT — изменение температуры антенны, обусловленное излучением источника, $N_{\text{ш}}$ — коэффициент шума канала, T — температура, согласованного со входом канала, сопротивления.

Вероятность нахождения источников в „поле зрения" радиотелескопа определяется угловыми размерами диаграммы антенны, исследуемой области небосвода и количеством источников в этой области. Например, если предположить, что в узкой области около экватора существует один источник, то вероятность p можно оценить по формуле

$$p \approx \frac{\varphi_A^a}{2\pi} = \frac{t_A}{t_0}, \tag{12}$$

где φ_A^a — ширина диаграммы антенны по прямому восхождению, выраженная в радианах, t_A — время воздействия источника на радиотелескоп, t_0 — продолжительность звездных суток.

Стремление к обнаружению источников с возможно низкими яркостными температурами приводит к антеннам с малыми φ_A^a и следовательно

$$p \ll 1. \tag{13}$$

Условие (13) позволяет значительно упростить формулу (11) т. к. при малых p

$$\sqrt{\frac{2^{2H}-1}{p(1-p)}} \approx \sqrt{2\ln\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Используя (14) вместо (11) получим

$$\delta T = \sqrt{2\ln\frac{1}{p}}\, N_{\text{ш}} T \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta f}}. \tag{15}$$

В отличие от аппаратурного порога чувствительности

$$\delta T_{\text{ап}} = N_{\text{ш}} T \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta f}} \tag{16}$$

порог, определяемый формулой (15), назовем порогом достоверного обнаружения. Сравнение (15) с (16) дает

$$\delta T = \sqrt{2\ln\frac{1}{p}}\, \delta T_{\text{ап}}, \tag{17}$$

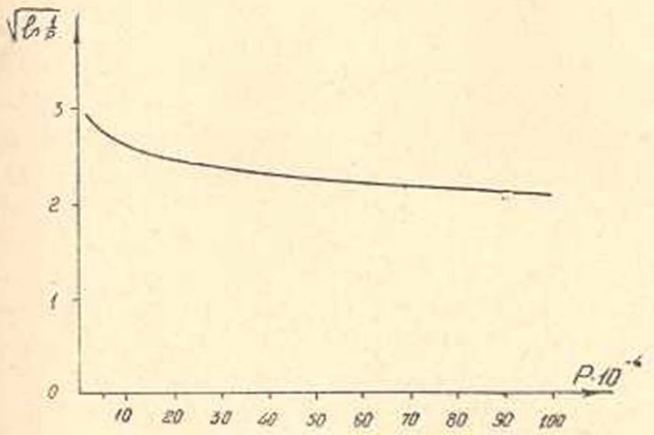
откуда следует, что порог достоверного обнаружения выше аппаратурного в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз.

Разумеется, что на выходе радиотелескопа могут быть зарегистрированы сигналы, соответствующие источникам, температуры антенн для которых заключены в пределах

$$\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}\, \delta T_{\text{ап}} \geqslant \delta T \geqslant \delta T_{\text{ап}}. \tag{18}$$

Однако регистрация таких сигналов не дает оснований для достоверной констатации существования источников. Чем ближе в (18) δT к правому пределу, тем меньше вероятность того, что выходной сигнал объязан источнику. Наоборот, чем ближе δT к левому пределу, тем эта вероятность больше.

Функция $\sqrt{\ln\frac{1}{p}}$ показана на рисунке. Из данных рисунка следует, что даже при весьма малой вероятности $p = 10^{-4}$, которая соответствует $\varphi_A^2 \approx 2'$, порог достоверного обнаружения всего в 4,2 раза выше аппаратурного.



Пусть N — количество различных источников, которое должен зафиксировать радиотелескоп за время $t_н$. Тогда, в соответствии с (4), можно написать

$$N \leqslant 2\Delta F t_н, \tag{19}$$

откуда для минимально допустимой полосы пропускания канала получаем

$$\Delta F_{min} = \frac{N}{2t_н}. \tag{20}$$

Дальнейшее уменьшение ΔF приводит к недопустимой потере информации и потому формула (15) при условии (20) отвечает предельной чувствительности каждого данного радиотелескопа. Под предельным следует понимать естественный порог чувствительности, который для данного N не может быть понижен никакими средствами, если заданы φ_A^2, $N_ш$, T, Δf и $t_н$. Формула для предельной чувствительности, согласно (15) и (20), имеет вид

$$\delta T_{пр} = \sqrt{N \ln\frac{1}{p}}\,\frac{N_ш T}{\sqrt{\Delta f \cdot t_н}}. \tag{21}$$

Так как продолжительность каждого наблюдения должна быть равна звездным суткам (при менее продолжительном наблюдении не все источники исследуемого склонения окажутся выявленными) имеет место связь

$$t_н = nt_0 \tag{22}$$

в которой t_0 — продолжительность звездных суток. Учет этой связи позволяет переписать выражение (21)

$$\delta T_{пр} = \sqrt{\frac{N}{n}} \sqrt{\ln \frac{1}{p}} \frac{N_ш T}{\sqrt{\Delta f \cdot t_0}}. \tag{23}$$

Как следует из формулы (20), написанной в виде

$$\Delta F_{min} = \frac{N}{n} \cdot \frac{1}{2t_0}, \tag{24}$$

предельная полоса пропускания канала будет строго фиксированной, если количество суток наблюдения линейно связано с N, в частности если

$$n = N. \tag{25}$$

Меньшие n нецелесообразны т. к. повышают порог чувствительности, большие (например $n = 2N$) целесообразно применять лишь после того, как реализованы все возможности случая $n = N$.

Количество источников, которые будут обнаружены, заранее неизвестно, поэтому задавать определенное n (либо N) не представляется возможным.

Определить „исходное" n можно по данным предварительного наблюдения. Это наблюдение можно провести в течение одних суток, выбрав полосу пропускания канала, используемую при обычных наблюдениях,

$$\Delta F = \Delta F_ф = \frac{1}{2t_д}. \tag{26}$$

Если предварительное наблюдение выявит N_0 источников, то основные наблюдения с предельной полосой пропускания должны длиться более, чем $n = N_0$ суток.

В результате наблюдений с предельной полосой окажутся обнаруженными все источники, температуры антенн для которых превышают предельный порог чувствительности при $n = N$ определяемый формулой

$$\delta T_{пр} = \sqrt{\ln \frac{1}{p}} \frac{N_ш T}{\sqrt{\Delta f \cdot t_0}}. \tag{27}$$

Возникает естественный вопрос: как может быть практически реализована предельная полоса ΔF_{min}?

При условии (25) эта полоса равна

$$\Delta F_{\min} = \frac{1}{2t_0}. \tag{28}$$

Здесь мы сталкиваемся с положением, характерным для теории сообщений, когда выявляется возможность реализации такой полосы без указания способов реализации.

Для обеспечения предельной полосы на выходе обычного радиотелескопа с полосой ΔF_ϕ, необходимо включить некоторое выходное устройство, которое должно уменьшить дисперсию флуктуаций в t_0/t_A раз, так как

$$\frac{\Delta F_\phi}{\Delta F_{\min}} = \frac{t_0}{t_A}. \tag{29}$$

Указанное выходное устройство, при этом, не должно влиять на прохождение полезного сигнала. Таким требованиям может удовлетворить целый ряд устройств, рассмотрение которых выходит за рамки настоящей статьи. Здесь для полноты изложения мы укажем лишь на одну из возможностей.

Преобразуем выходное напряжение обычного радиотелескопа $U_1(t)$, записанное в промежутке времени $(0, t_0)$, в сигнал $U_{11}(t)$, представляющий собой периодическое (с периодом t_0) повторение напряжения $U_1(t)$. Составим сигнал $U_{12}(t)$ равный

$$U_{12}(t) = \sum_{k=0}^{t_0/2t_A} U_{11}(t - 2kt_A). \tag{30}$$

После таких преобразований спектр флуктуаций в напряжении $U_{12}(t)$ остается прежним, т. е. таким же как и спектр флуктуаций в напряжении $U_1(t)$. Полезная же информация в сигнале $U_{12}(t)$ представится периодическим (с периодом $2t_A$) напряжением. В указанном преобразовании используется априорно известное исследователю время воздействия источника на радиотелескоп t_A, однозначно связанное с φ_A^a. Полезную информацию из сигнала $U_{12}(t)$ можно извлечь с помощью резонансного фильтра, настроенного на частоту $f_A = \frac{1}{2t_A}$. В сигнале $U_{13}(t)$ на выходе фильтра полезная информация будет той же величины, что и в сигнале $U_1(t)$; спектр же флуктуаций будет определяться полосой пропускания резонансного фильтра и может быть обеспечен значительно более узким, чем исходный спектр ΔF_ϕ. Если выявленный таким образом сигнал превышает аппаратурный порог чувствительности более чем в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз, то можно достоверно утверждать, что на исследуемом склонении имеется по крайней мере один источник. Цель достигнута—источник обнаружен. Однако, относительно его координаты по прямому восхождению ничего сказать нельзя, т. к. указанное преобразование выходного напряжения не обес-

печивает раздельной фиксации источников. После наблюдений в течении двух суток, в распоряжении исследователя будут два образца выходных сигналов $U_a(t)$ и $U_b(t)$ из которых можно составить два новых сигнала

$$U_1(t) = \begin{cases} U_a(t) & t < t_0/2, \\ U_b\left(t - \dfrac{t_0}{2}\right) & t > t_0/2, \end{cases} \tag{31}$$

$$U_2(t) = \begin{cases} U_a\left(t + \dfrac{t_0}{2}\right) & t < t_0/2, \\ U_b(t) & t > t_0/2. \end{cases} \tag{32}$$

Сигналы $U_1(t)$ и $U_2(t)$ подвергаются таким же преобразованиям, каким—в предыдущем случае сигнал $U_1(t)$ с той лишь разницей, что верхний предел сумм меняется

$$U_{12}(t) = \sum_{k=0}^{t_0/4t_A} U_{11}(t - 2kt_A), \tag{33}$$

$$U_{22}(t) = \sum_{k=0}^{t_0/4t_A} U_{21}(t - 2kt_A). \tag{34}$$

Окончательные сигналы $U_{13}(t)$ и $U_{23}(t)$ будут содержать информацию, соответствующую двум равным дугам исследуемого склонения. После двух наблюдений могут быть достоверно обнаружены два источника, причем точность определения их координат по прямому восхождению не может быть лучшей, чем $\pm t_0/4$. В общем случае наблюдений, длящихся n суток, может быть обнаружено $N = n$ источников с точностью определения координат не лучшей, чем $\pm t_0/2n$.

Из предыдущего ясно, что предельная чувствительность достигается ценой ухудшения разрешающей способности, восстановить которую можно лишь за счет весьма большого количества наблюдений. Для определения координат источников с точностью до ширины диаграммы направленности τ_A^*, потребовалось бы количество суток наблюдений определяемое связью

$$n_{max} = \frac{t_0}{t_A}, \tag{35}$$

которая для современных антенн требует непрерывных наблюдений на каждом склонении в течении нескольких лет.

Рассмотрим еще граничный случай, когда исследователь задается целью выявить как можно большее количество источников. Максимальное количество источников, которое разрешается антенной равно

$$N_{max} = \frac{t_0}{t_A}. \tag{36}$$

Подставляя это значение N в (20) и обозначая полосу для $N = N_{max}$ через ΔF_{max} получаем

$$\Delta F_{max} = \frac{t_0}{2t_A t_n} = \frac{\Delta F_\Phi}{n}. \tag{37}$$

При такой полосе пропускания канала, формула (15) принимает вид

$$\delta T = \sqrt{2\ln\frac{1}{p}}\, N_m T \sqrt{\frac{\Delta F_\Phi}{\Delta f \cdot n}}. \tag{38}$$

Мы пришли к выражению для порога чувствительности обычного радиотелескопа, учитывающему усреднение данных n наблюдений. Переписав (38) в виде

$$\delta T_{об} = \sqrt{\frac{t_0}{nt_A}} \sqrt{\ln\frac{1}{p}}\, \frac{N_m T}{\sqrt{\Delta f \cdot t_0}} \tag{39}$$

и сравнив обычную чувствительность с предельной

$$\delta T_{об} = \sqrt{\frac{t_0}{nt_A}}\, \delta T_{пр} \tag{40}$$

убеждаемся, что обычная чувствительность хуже предельной в $\sqrt{t_0/nt_A}$ раз. Однако при полосе соответствующей такой чувствительности, обеспечивается максимальная разрешающая способность.

Заметим, что при $n = n_{max}$ чувствительность и разрешающая способность для обоих граничных случаев ($\Delta F = \Delta F_{min}$ и $\Delta F = \Delta F_{max}$) совпадают.

Проведенное рассмотрение показало, что порог достоверного обнаружения выше аппаратурного всегда в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз. Полоса пропускания ΔF сказывается лишь на разрешающей способности и аппаратурной чувствительности радиотелескопа.

Используя предельную полосу ΔF_{min}, можно обеспечить наилучшую чувствительность. Увеличение количества наблюдений в этом случае последовательно улучшает разрешающую способность.

Используя обычную полосу ΔF_{max}, можно обеспечить наилучшую разрешающую способность. Увеличение количества наблюдений в этом случае последовательно улучшает чувствительность.

В практике радиоастрономических наблюдений до сих пор, насколько нам известно, использовалась лишь вторая возможность. Нам представляется целесообразным использование обеих возможностей, сочетание которых позволит получить больше сведений о дискретных *источниках космического радиоизлучения*.

Обсуждение результатов

1. Наличие множителя $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}} > 1$ в выражении (17) показы-

вает, что отождествлять с источниками можно только те всплески на полученной окончательной записи наблюдений, которые превышают аппаратурный порог чувствительности в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз и более. Разумеется рассматриваться должны только всплески по ширине соответствующие раствору диаграммы направленности антенны. Этот результат хорошо согласуется с практикой радиоастрономических наблюдений. Имея возможность проводить лишь ограниченное количество наблюдений, исследователь вынужден часть всплесков на выходной записи признать источниками, другую часть — нет.

Насколько нам известно, в литературе до настоящего времени не приводились данные о том—на каком уровне должна проходить линия разграничения между указанными двумя видами всплесков. Результат (17) дает точную количественную оценку этому уровню, в нашей терминологии — порогу достоверности. Таким образом, единственное правильное решение вопроса таково: *всплеск превышающий порог достоверности обязан источнику, а меньший всплеск может быть обусловлен как источником, так и флуктуацией.*

Приведенное утверждение дает основание для пересмотра каталожных данных по дискретным источникам космического радиоизлучения. Все источники, температуры антенн для которых превышают аппаратурный порог чувствительности менее, чем в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз должны быть либо исключены из каталогов, либо особо оговорены.

2. На первый взгляд может показаться, что радиотелескопы с предельной чувствительностью не представляют практического интереса, т. к. реализация предельной чувствительности с достаточно хорошей разрешающей способностью сопряжена с большой затратой времени. На самом деле это не так. Практическое значение наблюдений с предельной полосой весьма велико.

Пусть, например, после обычных n наблюдений, путем усреднения данных, выявлено N_1 источников. Возникает вопрос: стоит ли продолжать наблюдения, позволит ли увеличение n обнаружить дополнительно к N_1 новые источники, существуют ли таковые на данном склонении? Для ответа на этот вопрос достаточно провести еще одно наблюдение и преобразовать выходные сигналы всех $(n+1)$ наблюдений так, чтоб обеспечить $\Delta F_{\min}$. Если в одной, либо нескольких областях исследуемого склонения с протяженностью по прямому восхождению равной $t_0/(n-1)$ будет зарегистрировано превышение аппаратурного порога в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз, то можно достоверно утверждать, что в этих областях присутствуют хотя бы по одному источнику. Пусть например такое утверждение касается N_2 областей небосвода. Разность $N_2 - N_1$ может быть равна либо нулю, либо положительному целому

числу. В первом случае ($N_2 = N_1$) можно утверждать, что на исследуемом склонении источников (с интенсивностью излучения, превышающей предельный порог) сверх обнаруженных N_1 — нет, следовательно изучение данного склонения можно прекратить. Во втором случае ($N_2 > N_1$) поиски новых источников следует продолжать в тех из N_2 областей, с которыми не отождествляются обнаруженные N_1 источников и внутри которых зарегистрировано превышение аппаратурного порога более чем в $\sqrt{2\ln\frac{1}{p}}$ раз. Общая протяженность t' таких областей будет удовлетворять условию $t' \ll (N_2 - N_1)\frac{t_0}{n+1}$ и когда $t' < t_0$ затрата времени на их исследование может быть значительно сокращена т. к. за время $t_0/2$, пока эти области над горизонтом, каждая из них может быть исследована несколько раз. Таким образом за счет отбрасывания областей изучаемого склонения в которых уже обнаружены источники и в которых источников наверняка нет, можно время наблюдения использовать лишь для областей небосвода, подлежащих дополнительному исследованию и закончить последнее за количество суток много меньшее, чем n_{max}.

Приведенный пример наглядно показывает, что реализация предельной чувствительности без большой затраты времени однозначно решает вопрос о том: есть ли на исследуемом склонении хотя бы один источник с интенсивностью излучения превышающей предельный порог, который не регистрируется обычными n наблюдениями. Решение этого вопроса уже представляет научный интерес, т. к. позволяет сосредоточить внимание на определенной области небосвода и дополнительными наблюдениями уточнить координату источника. Из этого же примера следует, что время, необходимое для уточнения координаты источника, не безнадежно велико.

Высказанные выше соображения позволяют утверждать, что разработка методов и техники для реализации предельной чувствительности радиотелескопа представляют значительный научный интерес.

Можно надеяться, что пересмотр накопленных ныне наблюдательных данных, путем преобразования выходных сигналов с обеспечением предельной чувствительности должен дать новые, дополнительные сведения о распределении дискретных источников космического радиоизлучения.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория
АН Армянской ССР

Поступила 7 IX 1959

Է. Ս. Բուռունսուզյան

ՌԱԴԻՈԴԻՏԱԿՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍՏԻ ՀԱՅՏՆԱԲԵՐՄԱՆ ՇԵՄՔԸ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԶԳԱՅՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ռադիոաստղագիտական դիտումների ժամանակ կոսմիկական ռադիոճառագայթման կետային աղբյուրների առկայության մասին դատում են ռադիոդիտակի ելքի լարվածության ցոլքի (всплеск) *հիման վրա: Այդ լարվածության մեջ, բացի աղբյուրներով պայմանավորված ցոլքերից, միշտ առկա են նաև ռադիոսարքերի ֆլուկտուացիաներով հարուցվող ցոլքեր: Ներկա աշխատության մեջ քննարկվում է հիշյալ երկու տիպի ցոլքերը իրարից զանազանելու հարցը: Առաջարկված է ելքի լարվածության ցոլքերի՝ ռադիոճառագայթման աղբյուրների հետ գրեթե հավաստի նույնացման մի մեթոդ: Այդ մեթոդի հիմնավորման համար օգտագործված են ինֆորմացիայի վիճակագրական տեսության դրույթները:*

Պարզվում է, որ մի քանի դիտումների արդյունքների հիման վրա միշտ հնարավոր է, գործնականորեն անսխալ կերպով, նույնացնել ցոլքերը ռադիոճառագայթման աղբյուրների հետ, եթե ցոլքի մեծությունը, որը միարժեք կերպով կապված է ճառագայթման ինտենսիվության հետ, գերազանցում է մի որոշակի սահման, որը աշխատության մեջ անվանված է հավաստի հայտնաբերման շեմք:

Առաջադրված խնդրի լուծման մեթոդիկան թույլ է տալիս, բացի դրանից, ստանալու ռադիոդիտակի սահմանային զգայնության բանաձևը: Այդ բանաձևի հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ սահմանային զգայնությունը գործնականորեն կարելի է հասնել ի հաշիվ գործիքի լուծող ուժի պակասեցման: Կարելի է կարծել, որ սովորական ռադիոաստղագիտական դիտումների զուգակցումը սահմանային զգայնությամբ կատարվող դիտումների հետ թույլ կտա ստանալ ավելի շատ տեղեկություններ կոսմիկական ռադիոճառագայթման կետային աղբյուրների բաշխման մասին:

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Публикация Г. Б. Петросяна и Б. А. Розенфельда

Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида

Ниже приводится перевод отрывка из „Комментариев к первым десяти книгам „Начал Евклида" математика IX—X веков Абу-л'Аббаса ал-Фадла ан-Найризи, содержащего изложение доказательства V постулата Евклида, принадлежащего математику, которого ан-Найризи называет Аганисом (Аганис). Сведения об этом математике сохранились только у ан-Найризи, которому они известны через ученого VI века Симпликия (после изложения доказательства Аганиса ан-Найризи пишет: „Симпликий сказал: таковы слова Аганиса"). Так как в чертежах ан-Найризи, относящихся к доказательству Аганиса, буквы читаются в греческом порядке, слева направо, в то время, как в остальных чертежах буквы читаются в арабском порядке, справа налево, Аганис писал по гречески или на одном из языков, письменность которых находилась под влиянием греческой письменности.

Так как нет греческого имени, которое транскрибировалось бы по-арабски „Аганис", автор доказательства V постулата, по-видимому, не был греком. Весьма вероятно, что автор доказательства V постулата был армянином по имени *Аган (Ագան)*. Имя Аган в древнеармянской литературе упоминается начиная с V века. Первый историк, который упоминает это имя, Газар Фарпеци (в конце V века). Это имя в последующих веках употребляется все чаще (см. *Г. Аджарян*, словарь собственных имен, т. I, Ереван, 1946 г., стр. 92—98, на армянском языке). Некоторые армянские собственные имена на греческом языке принимают окончание „ης".

По поводу того, кто мог быть автором этого доказательства заметим, что в V—VI веках, когда, по-видимому, жил этот автор, в Византии было несколько десятков ученых армян, овладевших греческой культурой. К этому времени уже был создан армянский алфавит (Месроп Маштоц, 406 г.). Направление армянского письма совпадает с греческим. В V веке и начале VI века широко практиковался отбор лучших учеников армянских школ для получения высшего образования в Константинополе, Риме, Афинах, Александрии, Эдессе. Первая группа таких учеников, направленная в начале V века, состояла из 60 человек. В истории армянской литературы ученых, получивших образование указанным образом, называют „переводчиками" и делят их на „старших

переводчиков" и „младших переводчиков". К „переводчикам" относятся такие крупные ученые, как философ Давид Непобедимый (VI в.) и историк Моисес Хоренаци (V в). Среди дошедших до нас имен „переводчиков" имеется Аган, который был учителем Газара Фарпеци и Вагана Мамиконяна, живших во второй половине V века. Аган был крупным ученым и владел греческим языком. Поэтому вероятнее всего, что автором доказательства V постулата был этот самый Аган.

Перевод выполнен Б. А. Розенфельдом по рукописи Cod. or. 399/1 Лейденской университетской библиотеки (стр. 15об—17об), микрофильм которой был любезно прислан хранителем восточных рукописей этой библиотеки д-ром П. Вооргуве (P. Voorhoeve). В работе над переводом ценную помощь переводчику оказал востоковед В. С. Сегаль. К переводу приложены примечания, также составленные Б. А. Розенфельдом; числа в квадратных скобках указывают № соответственного примечания. В квадратных скобках помещены также слова, добавленные переводчиком для большей ясности изложения. В переводе используется та же транскрипция арабских букв, что и в прежних переводах Б. А. Розенфельда, опубликованных в „Историко-математических исследованиях".

Предпосылки и предложения Симпликия [1] и Аганиса [2], необходимые для двадцать девятого предложения первой книги [3]

В доказательстве двадцать девятого предложения первой книги используется предпосылка: всякие две прямые, проведенные под углами меньшими двух прямых, встречаются [4]. [Это утверждение] — не из общепринятых утверждений.

Симпликий сказал об этом: этот постулат не очевиден, но необходим для доказательства с помощью линий. Антиниат и Диодор [5] доказали о нем много различных предложений. Птолемей [6] также доказывал его, в его доказательстве использовались тринадцатое, пятнадцатое и шестнадцатое предложения первой книги „Стихий" [7]. Однако это невозможно, так как Евклид пользовался этим постулатом только в двадцать восьмом предложении этой книги, а само это утверждение опирается на утверждении о том, что если две прямые проводятся под двумя прямыми углами, они параллельны, а если они проводятся под углами, меньшими двух прямых, они встречаются.

Что касается нашего друга Аганиса, то он не видит, зачем ставить это утверждение в качестве постулата, так как оно нуждается в доказательстве. Он пользовался другими предложениями вместо предложений, имеющихся в „Стихиях", для того, чтобы доказать двадцать девятое предложение без этого утверждения. Затем, согласно своему мнению, он доказал этот постулат геометрическим способом. Вот его слова в его [собственных] выражениях.

Аганис сказал: согласно нашему обещанию изложим доказательство этого постулата, состоящего в том, что если две линии проведены под углами меньшими двух прямых, они встречаются.

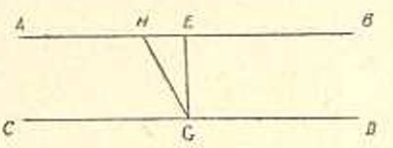
Это доказывается, насколько возможно, с помощью геометрического доказательства. Некоторые порицают геометров за это и говорят: если вы требуете, чтобы мы согласились с тем, что это не доказано, почему же вы пользуетесь этим при доказательстве другого? Поэтому я проведу это [доказательство] и, хотя это утверждение и весьма важно, оно не нуждается в том, чтобы речь о нем была длинной.

Я утверждаю, что мы определяем параллельные линии как такие, которые находятся на одной плоскости и если продолжать их бесконечно в обе стороны, расстояние между ними будет одно и то же [8]. Расстояние это кратчайшая линия, соединяющая их, то же говорится и о других расстояниях [9].

Добавим эти предложения к первой книге „Начал" после двадцать шестого предложения, так что это предложение станет двадцать седьмым предложением.

[Первое предложение Аганиса]. Если две линии параллельны, расстояние между ними перпендикулярно каждой из них.

Пример этого — даны две параллельные линии *AB*, *CD* и пусть расстояние между ними *EG*. Я утверждаю, что [линия] *EG* перпендикулярна каждой из двух линий *AB*, *CD*.

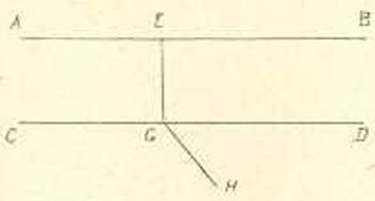


фиг. 1.

Доказательство. Если *EG* не перпендикулярна линиям *AB*, *CD*, углы при точке *E* — не прямые. Пусть острый из них — угол *AEG*. Опустим из точки *G* перпендикуляр на линию *AB*, это *GH*. В силу доказательства XIX [предложения] I [книги „Начал"] [10] *GE* длиннее, чем *GH*. Но *GE* предполагалась кратчайшей прямой линией между линиями *AB*, *CD*, поэтому это нелепо. Таким образом, линия *EG* перпендикулярна каждой из линий *AB*, *CD*. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Второе предложение Аганиса. Если прямая линия падает на две прямые линии и перпендикулярна каждой из них, то линии параллельны, а перпендикуляр является расстоянием между ними.

Пример этого — линии *AB*, *CD*, на них падает линия *EG*, составляющая с каждой из них прямые углы. Я утверждаю, что линии *AB*, *CD* параллельны, а линия *EG* — расстояние между ними.



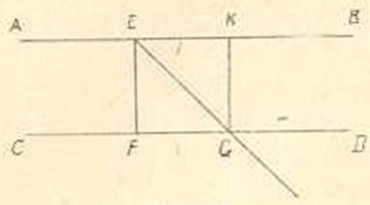
фиг. 2.

Доказательство. Если эти две линии не параллельны, через точку *G* проходит линия параллельная линии *AB*. Пусть, если возможно, это линия *GH*. В этом случае линия *EG* является расстоянием между линиями *AB* и *GH*, так как она — кратчайшая из всех линий, проведенных из точки *G* к линии *AB*. Поэтому угол *HGE* прямой в силу доказательства предыдущего предложения. Но предполагалось, что угол *DGE* — прямой, поэтому

это нелепо. Таким образом, линии AB, CD параллельны, а линия GE—расстояние между ними. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Третье предложение Аганиса. Прямая линия, проведенная к двум параллельным прямым линиям, образует равные накрестлежащие углы, внешний угол, равный соответственному ему внутреннему, и внутренние односторонние углы, вместе равные двум прямым [11].

Пример этого — две параллельные линии AB, CD, к ним проведена прямая EG. Я утверждаю, что углы, образующиеся при этом таковы, как мы указали.



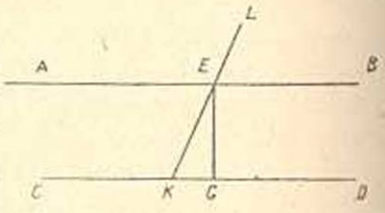
фиг. 3.

Доказательство. Проведем из каждой из точек E, G расстояния между линиями AB, CD, это линии EF, GK. Четыре угла, образующиеся при этом, прямые [12]. Поэтому линия EF параллельна линии KG в силу доказательства предыдущего предложения, а линия EK параллельна линии FG. Линии EK и FG—расстояния между линиями EF и KG, поэтому они равны. Таким образом, линия FG равна линии EK, а линия EF—линии GK и эти линии образуют равные углы. Поэтому два треугольника [FGE и GEK] равны и остальные два угла равны остальным двум углам. Таким образом, угол FGE равен углу GEK, а это накрестлежащие углы. Но угол FGE равен углу HGD, так как они—при пересечении, в силу доказательства XV [предложения] I [книги „Начал"]. Поэтому угол GEK равен углу HGD, внешний—соответственному ему внутреннему. Так как мы доказали, что накрестлежащие углы равны, то, если мы прибавим к ним общий угол DGE, получится, что два угла FGE, EGD, равные двум прямым, равны двум углам KEG, DGE. Таким образом, внутренние односторонние углы равны двум прямым. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Четвертое предложение Аганиса. Если прямая линия проведена к двум прямым линиям и накрестлежащие углы, образуемые между ней и двумя линиями, равны, или если внешний угол равен соответственному ему внутреннему, или внутренние односторонние углы равны двум прямым, то две прямые параллельны [13].

Пример этого—линии AB, CD, на них падает линия EG и образует с ними углы, как мы указали. Я утверждаю, что линии AB, CD, параллельны.

Доказательство. Если линия EG—перпендикуляр, очевидно, что линии AB, CD, параллельны, это доказано во втором из этих дополнительных предложений. Если же EG—не перпендикуляр, отпустим из точки E на линию CD перпендикуляр EK. Тогда если острый угол E—прямой угол, снова очевидно, что

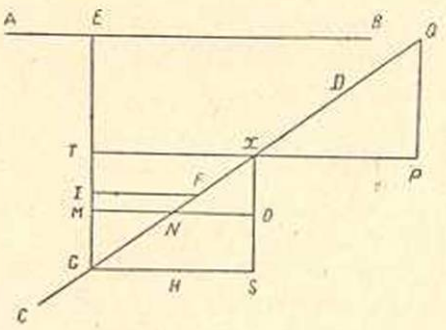


фиг. 4.

линии AB, CD параллельны, это доказано во втором из этих дополнительных предложений. Если же угол E — не прямой угол, восставим в точке E перпендикуляр к линии EK, как доказано в доказательстве XI [предложения] I [книги „Начал"]. Пусть этот перпендикуляр EL. Тогда линии EL, CD параллельны, как доказано в третьем из этих дополнительных предложений. Поэтому каждый из углов GEB, GEL равен углу CGE, но это невозможно. Таким образом, линии AB, CD параллельны. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Таковы предложения Аганиса. Высказав их, он переходит к тридцать первому предложению: мы хотим провести из данной точки прямую, параллельную данной прямой [14], к тридцать второму предложению: у плоских фигур с параллельными сторонами противоположные стороны равны [15], к тридцать третьему предложению: линии, параллельные одной линии, параллельны между собой [16], к тридцать четвертому предложению: прямые линии, соединяющие равные параллельные линии, равны и параллельны [17] и к тридцать пятому предложению: если прямая линия падает на две прямые линии и внутренние односторонние углы меньше двух прямых, то эти две прямые, если продолжить их в сторону углов, меньших двух прямых, встречаются [18].

Пример этого — две прямые линии AB, CD, на которые падает прямая линия EG, причем внутренние односторонние углы со стороны B, D меньше двух прямых. Я утверждаю, что линии AB, CD встречаются с этой стороны.



фиг. 5.

Доказательство. Проведем через точку G линию, параллельную линии AB, как доказано в доказательстве Евклида в XXXI [предложении] I [книги „Начал"]. Пусть это линия GH. Проведем расстояние между ними в соответствии с доказательством XI [предложения] I [книги „Начал"], это линия GE. Предположим на линии CD произвольную точку, куда бы она ни попала, пусть это точка F. Опустим из точки F перпендикуляр на линию GE, как доказано в доказательстве XI [предложения] I [книги „Начал"], пусть это линия FI. Раздвоим линию GE, как доказано в доказательстве X [предложения] I [книги „Начал"] [19]. Раздвоим также ее половину и будем поступать так постоянно до тех пор, пока [точка] деления не попадет ниже точки I. Пусть [точка] деления попадет в точку M. Очевидно, что точка M попадет на ту часть линии EG, о которой мы говорим. Примем, например, что часть, которая падает ниже точки I — четверть GE. Проведем через точку M линию параллельную линиям GH, AB, как доказано в доказательстве XXXI [предложения] I [книги „Начал"], это линия MN. Продолжим линию GD

неограниченно и построим [линию] GQ, содержащую GN столько же раз, сколько раз EG содержит величину GM, т. е. четыре раза. Я утверждаю, что линии AB, CD, встречаются в точке Q. Доказательство. Отложим на линии GQ линию равную GN, как доказано в доказательстве III [предложения] 1 [книги „Начал"] [20]. Пусть это линия NX. Проведем из точки X линию параллельную GN, это линия XS, и продолжим линию MN до точки O. Тогда в треугольниках GMN, NXO две из их сторон равны, это GN и NX, а угол GNM равен углу ONX, как доказано в доказательстве XV [предложения] 1 [книги „Начал"], и, в силу доказательства третьего предложения из установленных Аганисом в этих предпосылках, угол MGN равен углу NXO, так как это накрестлежащие углы. В силу доказательства XXVI [предложения] 1 [книги „Начал"] [21] остальные стороны [первого треугольника] равны остальным сторонам [второго треугольника], каждая сторона — соответственной, и оставшийся угол равен оставшемуся углу. Поэтому сторона GM равна стороне XO. Но сторона OS равна стороне GM как противоположная сторона плоской фигуры с параллельными сторонами. Поэтому линия XS — удвоенная линия GM. Если провести из точки Q линию параллельную линиям EG и XS и провести через точку X линию XT в направлении параллельном AB, она встретится с линией, проведенной из точки Q параллельно линии EG. Тем самым доказано, что она отсекает от нее линию равную линии GT. Проведем ее, это линия PQ. Поэтому линия PQ равна линии TG, так как XQ равна XG, угол TXG равен углу QXP, угол PQX равен углу TGX как накрестлежащий, так что PQ равна GT в силу доказательства XXVI [предложения] 1 [книги „Начал"]. Но GT равен TE, поэтому PQ равна TE и линия AEB встречается с линией PQ в точке Q в силу доказанного Аганисом в установленном им предложении, в котором он утверждает, что линии, соединяющие концы равных и параллельных линий, параллельны и равны. Тем самым доказано, что если прямая линия падает на две прямые линии и внутренние односторонние углы меньше двух прямых углов, то эти две линии, если продолжить их в сторону, в которой углы меньше двух прямых, встречаются. Это и есть то, что мы хотели доказать [22].

Все, что он установил в этом предложении и в предшествующих ему предпосылках, принято как необходимый постулат в первой книге [„Начал"], но представляет собой предложения, добавленные Аганисом к предложениям Евклида, и ни в чем из сделанного им нет ничего заслуживающего порицания.

Симпликий сказал: таковы слова Аганиса и, пожалуй Евклид поставил это утверждение в качестве постулата для того, что бы сделать путь ближе, чем путь, основанный на том, что параллельные линии — это такие линии на одной плоскости, что если продолжать их в обе стороны, расстояние между ними всегда будет равно.

Если обратить эту речь, то будет наоборот, т. е. если линии на одной плоскости таковы, что расстояние между ними не равно, они не параллельны, а так как они не параллельны, они встречаются. Евклид пользовался этим утверждением в прямом предложении из утверждений, принятие которых необходимо, а именно, что эти линии таковы, что при их продолжении [в сторону] углов меньших двух прямых они не сохраняют одного расстояния и, следовательно, встречаются. Очевидно, что их встреча происходит в стороне наклона, в другой же стороне они расходятся и расстояние между ними увеличивается [23]. Поэтому говорится, что если две линии параллельны, они необходимо встречаются, если только это не дуги, так как доказано, что конические сечения не параллельны и не встречаются [24]. Евклид упомянул эту предпосылку и применил эти предложения, а также [доказал] утверждение обратное указанному предложению: если на две прямые линии падает прямая линия и внутренние углы равны двум прямым, они параллельны. Если это предложение доказывается, то утверждение также нуждается в доказательстве [25]. Мы изложили все, что можно сказать о параллельных линиях.

ПРИМЕЧАНИЯ

Автор рукописи, из которой заимствован рассматриваемый отрывок, назван в рукописи Абу-л-'Аббас ал-Фадл ибн Хатим ан-Найризи, но в большинстве источников он именуется не ан-Найризи. В частности, известные математики XI века Абу-р-Райхан ал Бируни (973—1048) и Омар Хайам (1048—1131) в своих сочинениях „Книга об индийских рашиках" и „Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида" называют его Абу-л-'Аббасом ан-Найризи (см. рукопись 1043 Индийского ведомства в Лондоне, л. 28, и рукопись Cod. or. 199/8 Лейденской университетской библиотеки, лл. 76 об. и 78).

Иногда имя ан-Найризи читают „ат-Табризи" (буквы „н" и „т", а также „б" и „й" в арабском алфавите отличаются только точками, в первом случае над, во втором случае под буквой). Например, небольшой трактат ан-Найризи, посвященный V постулату Эвклида (рукопись Arabe 5467/7, Парижской национальной библиотеки, лл 89—90) озаглавлен „Трактат ал-Фадла ибн-Хатима ат-Табризи о доказательстве известного постулата Евклида" (Рисала-ал Фадл ибн Хатим ат-Табризи от байан ал-мусадара алмашхура ли-Уклидис); под именем ат-Табризи этот автор фигурирует в биографическом словаре Поггендорфа (Poggendorff's Biographisch litterarisches Handwörterbuch. т. 3, Leipzig, 1898, стр. 24).

Ан-Найризи был уроженцем Ирана или Азербайджана, работал в Багдаде при халифе Му 'тадиде (халиф с 892 по 902 г.), год рождения ан-Найризи неизвестен, умер он в 922 г. В лейденской рукописи его комментариев к Евклиду сохранились комментарии к I—VI книгам. Комментарии к I—III книгам были изданы вместе с латинским

переводом Бесторном и Гейбергом в Копенгагене в 1893—1905 гг. (Euclidis Elementa ex interpretatione Al Hadschdschadschii cum commentariis Al-Nairizii, Arabice et Zatine ediderunnt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg, I—III, Hauniae, 1893—1905), комментарии к IV—VI книгам были изданы там же Юнге, Редером и Томсоном в 1910—1932 гг. Комментарии ко всем десяти книгам сохранились в латинском переводе Герарда Кремонского (XII век). Этот перевод был издан в 1899 г. Курце (Anariti in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii, ed M. Curtze, Leipzig, 1899). Рассматриваемый нами отрывок имеется в этом переводе на стр. 65—75 (без заголовка).

Кроме теории параллельных линий, которой посвящен приводимый нами отрывок, значительный интерес в комментариях ан-Найризи представляет раздел, посвященный теории отношений; именно в связи с этими вопросами ан-Найризи упоминается в вышеуказанных сочинениях ал-Бируни и Хайяма. Ан-Найризи был автором комментариев к Птолемею, где он рассматривал вопросы тригонометрии и, в частности, дал доказательство сферической теории синусов.

1. Симпликий (у ан-Найризи Санбликйус) — греческий философ и математик VI века, комментатор Аристотеля и Евклида, работал сначала в Афинах, после того, как языческие философы были изгнаны из Афин императором Юстинианом, переехал в Персию. Сведения о комментариях Симпликия к Евклиду сохранились только у ан-Найризи, который, по-видимому, был знаком с работами Симпликия, имевшимися в Персии.

2. Об Аганисе см. вводную заметку. Издатель латинского перевода сочинения ан-Найризи М. Курце без достаточных основний отождествляет Аганиса с математиком I века до н. э. Гемином Родосским (см. Anaritius, цит. соч., стр. 13, а также P. Tannery, Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus? Bibliotheca mathematica, 3-я серия, т. II, 1901, стр. 9—11).

3. 29-е предложение I книги—первое предложение „Начал" Евклида, доказательство которого опирается на V постулат. Ан-Найризи называет Евклида Ауклйдис, а „Начала"—ал-Усул (см. также [7]).

4. Это—V постулат Евклида (см. Евклид, Начала, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, книги I—VI, М.—Л., 1948, стр. 15).

5. Антиниат (Антйнйатус) и Диодор (Дйдурус)—поздне-эллинистические математики. Комментарии александрийского математика IV века Паппа к сочинению Диодора „Аналемма" упоминаются в „Математическом собрании" Паппа (Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt, ed. F. Hultsch, vol. I, Berolini, 1876, стр. 246) см. также предисловие Ф. Гульча к III тому той же книги (Berolini, 1878, стр. IX—XI); Антиниат не упоминается в других дошедших до нас источниках.

6. Птолемей (Битлимйус)—знаменитый александрийский астроном II века Клавдий Птолемей. Доказательство Птолемея V постулата

дошло до нас в передаче афинского философа и математика Прокла Диадоха (Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum libri commentarii, ed. G. Friedlein Lipsiae, 1873, стр. 365—367).

7. „Стихии" (ал-Истикса) — другое название „Начал" Евклида, искажение греческого названия этого сочинения Στοιχεῖα (стихии, элементы). XIII, XV и XVI предложения I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 26, 28 и 29) — теоремы о том, что смежные углы в сумме равны двум прямым, вертикальные углы равны друг другу, внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, не смежных с ним.

8. В этом определении параллельных линий неявно используется предложение, что геометрическое место точек плоскости равностоящих от прямой по одну сторону от нее, — прямая линия. Это предложение содержит утверждение, эквивалентное V постулату Евклида. На этом неявном предположении основывается все „доказательство" Аганиса.

В своем определении параллельных линий Аганис имел предшественника в лице философа I века до н. э. Посидония, работавшего на о. Родос и в Риме. По сообщению Прокла, Посидоний определял параллельные линии следующим образом: „Параллельными называются такие прямые линии, которые находясь на одной плоскости, не сближаются и не удаляются одна от другой, так что все перпендикуляры, проведенные из точек одной из них на другую, равны между собой" (Proclus Diadochus, цит. соч., стр. 176).

9. Под расстоянием между двумя точками древние и средневековые математики понимали не число, как современные математики, а прямолинейный отрезок, соединяющий две данные точки, под расстоянием между двумя параллельными прямыми понимался общий перпендикуляр этих прямых.

10. XIX предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 31) — теорема „во всяком треугольнике большой угол стягивается большой стороной".

11. Это — утверждение XXIX предложения I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 41).

12. Здесь Аганис доказал возможность существования четырехугольника с 4 прямыми углами, непосредственно вытекающую из сделанного им неявного предположения (см. 8). Вопрос о существовании такого четырехугольника становится в центре исследований по теории параллельных линий у последующих математиков средневекового Востока Ибн ал-Хайсама (965—1039), Хайяма и Насир-ад-Дина ат-Туси (1201—1274) (см. Б. А. Розенфельд, Новые исследования по предистории неевклидовой геометрии, дополнение в книге: В. Ф. Каган, Основания геометрии, М., 1956, стр. 322—330, и Доказательства пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана Ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида, Историко-математические исследования, вып. XI, М., 1958, стр. 733—782).

13. Это — утверждения XXVII и XXVIII предложений I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 29 — 40). Отметим, что эти утверждения Евклид доказывал, не опираясь ни на V постулат, ни на эквивалентные ему утверждения, в то время, как Аганис использует здесь свои предыдущие предложения, опирающиеся на предложение, содержащее утверждение эквивалентное V постулату.

14. Эта задача — XXXI предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч. стр., 43).

15. Это — первая часть XXXIV предложения I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 45).

16. Это — XXX предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 42).

17. Это — XXXIII предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 44)

18. Здесь Аганис переходит к непосредственному доказательству V постулата.

19. X предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 24) — задача о раздвоении (делении пополам) отрезка.

20. II предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр., 16) — задача об откладывании от данной точки отрезка равного данному отрезку.

21. XXVI предложение I книги „Начал" (см. Евклид, цит. соч., стр. 37) — теорема о том, что если два угла и сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и стороне другого треугольника, третий угол и две остальные стороны первого треугольника соответственно равны третьему углу и двум остальным сторонам другого треугольника.

22. Доказательство Аганиса основано на двух положениях: 1) если две прямые пересекаются третьей так, что внутренние односторонние углы меньше двух прямых углов, то первые две прямые пересекаются в одной из вершин параллелограмма, две из сторон которого направлены по первой и третьей прямым, а одна из диагоналей — по второй прямой, 2) для всяких двух отрезков существует такое натуральное число, что если это число раз раздваивать бóльший отрезок, получится отрезок меньший меньшего отрезка. Фактически доказательство проводится для случая, когда третья прямая перпендикулярна одной из двух данных прямых, но для получения общего случая достаточно проводить прямую FI не перпендикулярно прямой EG, а только параллельно прямой AB. Первое из указанных положений было взято за основу доказательства V постулата Хайямом, второе из этих положений, равносильное аксиоме Архимеда (для всяких двух отрезков существует такое натуральное число, что если это число раз повторять меньший отрезок, получится отрезок, бóльший большего отрезка), игравший существенную роль в доказательствах Ибн ал-Хайсама и ат-Туси. Аганис не строит указанного параллелограмма целиком, но сначала строит треугольник FIG, образованный прямой

FI, проведенной из некоторой точки F второй прямой, параллельно первой, второй и третьей прямым, затем делит отрезок FG третьей прямой между первыми двумя прямыми на такое число частей, являющееся степенью 2, что полученный отрезок MG меньше стороны IG построенного треугольника. Далее Аганис строит треугольник MNG гомотетичный треугольнику FIG, и треугольники, гомотетичные треугольнику MNG с коэффициентами гомотетии -1, ± 2, ± 4 и т. д. до тех пор, пока не будет построена вершина параллелограмма, противоположная его вершине G; эта вершина Q и является точкой пересечения данных прямых AB и CD. Аганис предполагает, что точка F второй прямой находится между первой прямой и параллельной ей прямой, проходящей через точку G пересечения второй и третьей прямых. Если бы он рассмотрел точку F вне этой полосы, он должен был бы применить аксиому Паша—утверждение о том, что прямая, не проходящая через вершины треугольника, пересекающая одну из его сторон и не пересекающая другую, обязательно пересекается с третьей стороной. Это утверждение существенно используется в доказательствах Ибн ал-Хайама и ат-Туси.

23. Утверждения о том, что из приближения двух прямых друг к другу, следует, что они пересекаются, и о том, что удаление двух прямых друг от друга с одной стороны предполагает их приближение друг к другу с другой стороны, эквивалентны V постулату Евклида (на плоскости Лобачевского параллельные прямые асимптотически приближаются друг к другу, а расходящиеся удаляются друг от друга по обе стороны от их общего перпендикуляра). Оба эти утверждения, приписываемые Хайямом Аристотелю, были выдвинуты Хайямом в качестве постулата, заменяющего V постулат, и положены им в основу его теории параллельных линий.

24. Аганис имеет ввиду асимптотическое приближение ветви гиперболы к ее асимптоте или двух ветвей гипербол к общей асимптоте.

25. В рукописи вместо „Евклид" ошибочно написано — „Аганис". Здесь приводится известный довод за то, что V постулат доказуем с помощью остальных аксиом и постулатов, состоящий в том, что обратное ему утверждение является теоремой (XXVIII предложение I книги „Начал").

Комиссия по истории естествознания и техники
АН Армянской ССР
Коломенский Педагогический институт

Поступила 8 I 1960

Հրապարակում Դ. Ռ. Պետրոսյանի և Ռ. Ա. Բոգենֆելդի

ԱՂԱՆԻՍԻ՝ ԵՎԿԼԻԴԵՍԻ 5-ՐԴ ՊՈՍՏՈՒԼԱՏԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված է մի հատվածի թարգմանություն էվկլիդեսի «Հիմունքներ»-ի առաջին տասը դրքի մասին մեկնաբանություններից գրված 6—10 դարերի հեղինակ ան-Նայրիզիի կողմից արաբերեն լեզվով։

Այս հատվածը պարունակում է Էվկլիդեսի երկրաչափության 5-րդ պոստուլատի ապացույցը, որը պատկանում է Ագանիսին։

Ագան անունը հին հայկական մատենագրության մեջ հիշվում է սկսած 5-րդ դարից։ Առաջին պատմիչը, որ գործ է ածել այդ անունը հանդիսացել է Ղազար Փարպեցին։ Այնուհետև այդ անունը ավելի հաճախ է գործածվում հաջորդ դարերում։

Ագանիսի մասին մաթեմատիկական տեղեկություններ մնացել են միմիայն ան-Նայրիզիի մոտ, որպիսիք իրեն հայտնի են դարձել 6-րդ դարի հույն գիտնական Սիմպլիցիի աշխատությունների միջոցով։

Ան-Նայրիզիի երկրաչափական գծագրերում, որոնք վերաբերվում են Ագանիսի ապացույցներին, տառերը կարդացվում են ձախից աջ, մինչդեռ մյուս գծագրերում տառերը կարդացվում են աջից-ձախ։

Աշխատության մեջ համառոտակի պատմական փաստերի հիման վրա ցույց է տրված, որ ան-Նայրիզիի աշխատության մեջ բերված 5-րդ պոստուլատի ապացույցը ամենայն հավանականությամբ պատկանում է հայ գիտնական մաթեմատիկոս Ագանիսին, որը ապրել է 5-րդ դարում և մտնում է թարգմանիչների խմբի մեջ այնպես, ինչպես Մովսես Խորենացին, Դավիթ Անհաղթը և ուրիշները։

Հատվածի թարգմանությունը արաբերենից ռուսերեն կատարվել է Բ. Ա. Ռոզենֆելդի կողմից, որին էական օգնություն է ցույց տվել արևելագետ Վ. Ս. Սեգալը, ծանոթությունները գրվել են նույնպես Բ. Ա. Ռոզենֆելդի կողմից։

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Х. П. Бабаян, Н. А. Марутян, К. А. Матевосян, М. Г. Саринян

Изучение гиперфрагментов в ядерной эмульсии

Даныш и Пиевский [1] в ядерной эмульсии, экспонированной космическими лучами, наблюдали случай интерпретируемый как распад возбужденного осколка—гиперфрагмента. Возбуждение осколка обусловлено содержанием в ядре нестабильного Λ^0 — гиперона.

Нами проведено систематическое изучение гиперфрагментов в части стопки ядерной эмульсии Ильфорд G—5 из 600 μ слоев, предоставленной нам проф. Пауэллом. Стопка была облучена на высоте 27 *км* в Италии во время экспедиции 1955 г.

Слои просматривались методом сплошного осмотра при увеличении $20\times1{,}5\times7$ для обнаружения двойных звезд. В группу двойных звезд входили как распады гиперфрагментов, так и ядерные взаимодействия заряженных частиц. Было зарегистрировано 778 двойных звезд.

Для отбора гиперфрагментов, каждая двойная звезда анализировалась при увеличении $60\times1{,}5\times15$. Отбирались случаи, удовлетворяющие следующим критериям:

а) длина пробега связывающей частицы > 20 μ,

б) характеристики связывающего следа (толщина, плотность δ — лучей, рассеяние и т. д.) исключали возможность ядерного взаимодействия,

в) суммарный заряд вторичных частиц согласуется с зарядом связывающей частицы,

г) характеристики продуктов распада гиперфрагмента дают возможность провести кинематический анализ.

Этим критериям отбора удовлетворяют 6 случаев.

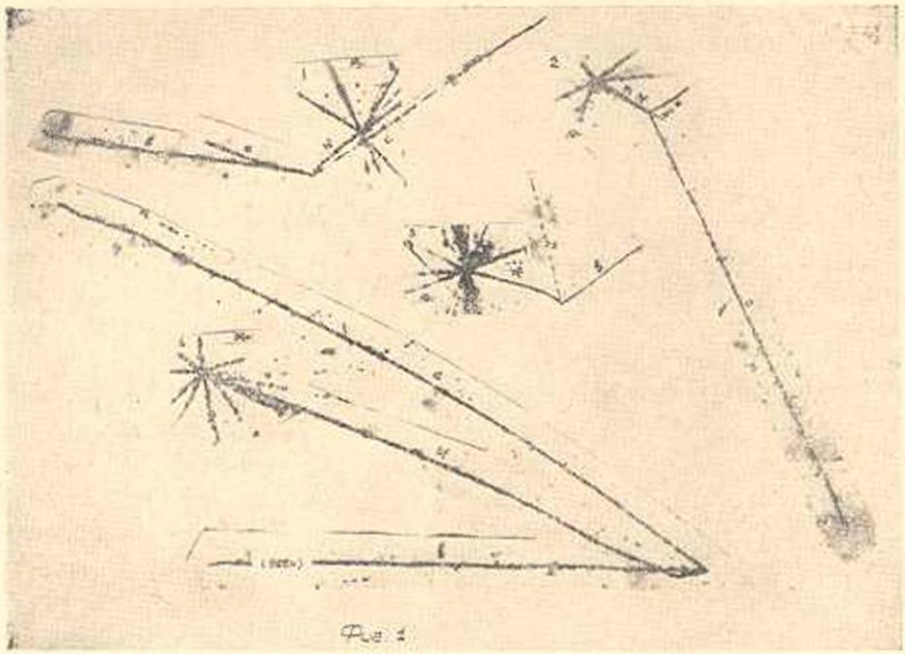
Все гиперфрагменты интерпретированы как распады в покое по рассеянию связывающего следа и по его сужению (для $z > 3$).

Все лучи первичной звезды были прослежены до остановки или выхода из эмульсионной стопки. Ни в одном случае не было наблюдено связанного рождения гиперфрагмента с другими нестабильными частицами.

Энергия вторичных частиц, когда это было возможно, определялась из соотношения пробег-энергия. В других случаях энергия определялась по изменению ионизации из сравнения его с калибровочными кривыми, полученными нами для данной стопки.

В работе [3] проанализированы два случая распада гиперфрагмента, один из которых представляет собой редкий случай распада тяжелого гиперфрагмента ($z = 9 \div 10$) с вылетом энергичного протона, а второй—мезонный распад ядра гелия или лития.

В дальнейшем было обнаружено еще 4 гиперфрагмента, анализ которых приводится в данной статье. Микрофотографии случаев даны на фиг. 1.



Фиг. 1.

Случай 1. Из звезды типа $12 + 2p$ (или $12 + 3n$) вылетает гиперфрагмент. Пройдя 22μ он распадается на три заряженные частицы a, b, c (с пробегами 36μ, 2200μ и 5500μ соответственно), следы которых некомпланарны, что указывает на наличие нейтральных частиц в распаде. Ни одна из вторичных частиц не оказалась мезоном.

По толщине следа и его сужению определено значение заряда гиперфрагмента $z = 2 \div 3$. Однако, минимальный суммарный заряд вторичных частиц исключает значение $z = 2$.

Вычислен остаточный импульс для всех возможных типов частиц a, b, c с зарядом $z = 1$. Кинематический анализ с участием одного нейтрона привел к следующим схемам распада:

$$_{\Lambda}Li^{6} \rightarrow p + d + d + n, \tag{5}$$

$$_{\Lambda}Li^{6} \rightarrow p + t + p + n, \tag{5^1}$$

$$_{\Lambda}Li^{7} \rightarrow d + d + d + n \tag{6}$$

со средним значением $B_{\Lambda} = (5{,}1 \pm 1{,}2)$ *Мэв*.

Возможность распада с участием более одного нейтрона не исключена.

Случай 2. Гиперфрагмент вылетает из звезды типа $11 + 3n$. Пройдя 20 μ он распадается на три заряженные частицы a, b, c с пробегами 21 μ, 7 μ и 142 μ соответственно. По сужению следа и по числу вторичных заряженных частиц можно предположить, что рассматриваемый случай представляет собой распад гиперфрагмента лития или бериллия. Кинематический анализ невозможен из-за больших ошибок, обусловленных малыми пробегами частиц.

Случай 3. След гиперфрагмента имеет длину 52 μ (звезда типа $24 + 12n$). Из измерений толщины следа частицы следует, что ее заряд $z > 2$. Отсутствие сужения указывает на заряд $z = 2$. Гиперфрагмент распадается на две заряженные частицы a и b, следы которых не коллинеарны.

Частица a проходит в 16 пластинках 12500 μ и выходит из стопки. Из сравнения градиента ионизации с калибровочными кривыми, частица отождествлена с протоном с пробегом 21000 ± 3000 μ.

Из-за малой длины следа частицы b (50 μ) заряд ее определяется из сохранения заряда в распаде гиперфрагмента.

Получена следующая схема распада

$$ {}_{\Lambda}He^{4} \rightarrow p + d + n \qquad (7) $$

со значением $B_{\Lambda} = (2{,}1 \pm 5{,}7)$ *Мэв*.

Возможность участия в распаде двух и трех нейтронов не исключена.

Случай 4. Из звезды типа $15 + 0p$ (или $15 + 1n$) вылетела частица, которая пройдя 392 μ распалась на две заряженные частицы a и b с пробегами 526 μ и 1210 μ соответственно. Угол между следами частиц a и b равен 28°.

След гиперфрагмента не имеет сужения, что указывает на заряд $z < 3$. Сравнение числа просветов связывающего следа с числом просветов на той же длине первого и второго следов, интерпретируемых как протон и дейтрон (или тритон) соответственно, показывает, что его заряд равен двум. В пользу такого заключения говорит и толщина следа.

Кинематический анализ дает следующую схему распада

$$ {}_{\Lambda}He^{5,6} \rightarrow p + d\,(t) + 2n. \qquad (8) $$

Участие двух нейтронов в распаде делает невозможным определение энергии связи.

Частота немезонного распада гиперфрагмента гелия мала. С этой точки зрения последние два случая представляют значительный интерес.

Полученные нами значения B_{Λ} согласуются, в пределах статистических ошибок, с известными средними взвешенными значениями.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 20 VIII 1958

Խ. Պ. Բաբայան, Ն. Ա. Մարության, Կ. Ա. Մաթևոսյան, Մ. Հ. Սարինյան

ՀԻՊԵՐՖՐԱԳՄԵՆՏՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՐԻԶԱՅԻՆ ԷՄՈՒԼՍԻԱՅՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դանիշի և Պնևսկու [1] կողմից գտնվել է ծանր գրգռված բեկորի՝ հիպերֆրագմենտի տրոհում կորիզային էմուլսիայում: Բեկորի գրգռումը պայմանավորված է նրանում Λ մասնիկի առկայությամբ:

Ներկա աշխատության մեջ կրկնակի աստղերից հիպերֆրագմենտների զատումը կատարվել է համաձայն а, б, в և г պայմանների: Ուսումնասիրված 778 կրկնակի աստղերից այդ պայմաններին բավարարել են 6-ը, որոնցից վաղ գտնված երկուսի անալիզը տրված է նախորդ աշխատության մեջ [3]: Բերված է քննարկվող դեպքերի միկրոֆոտոգրաֆիան:

Անալիզը ցույց է տալիս, որ առաջին դեպքը $_{\Lambda}Li^{8}$ հիպերֆրագմենտի տրոհումն է համաձայն (5) և (6) սխեմաների: Կապի էներգիայի համար ստացված է $B_{\Lambda} = (5.1 \pm 1.2)$ Мэв արժեքը:

Երկրորդ դեպքի համար լրիվ կինեմատիկական անալիզն անհնարին է, սակայն որոշված է նրա լիցքը $z = 3 \div 4$:

Երրորդ և չորրորդ դեպքերը համապատասխանաբար $_{\Lambda}He^{5}$ և $_{\Lambda}He^{5,6}$ հիպերֆրագմենտների ոչ մեզոնային տիպի տրոհումներ են: $_{\Lambda}He^{5}$-ի համար որոշված է կապի էներգիան $B_{\Lambda} = (2.1 \pm 5.7)$ Мэв:

Ներկա աշխատության մեջ B_{Λ} կապի էներգիայի համար ստացված արժեքները, ստատիստիկական սխալների սահմաններում, համընկնում են հայտնի արժեքների [2] հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниш М.* и *Пневский Ж.* Delayed disintegration of a heavy nuclear fragment—Phil. Mag., 44, 348, 1953.
2. *Францинетти К.* и *Морпурджо Г.* An introduction to the Physics of the new particles—suppl. nuovo cim., 2, 780, 1957.
3. *Бабаян Х. П., Марутян Н. А., Матевосян К. А., Ростомян М. Г.* Два случая распада гиперфрагмента. ЖЭТФ, 34, вып. 1, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Ю. Ф. Орлов, С. А. Хейфец

Деполяризация пучка при движении в неоднородном магнитном поле

Для измерения магнитного момента μ частицы (электрона или μ — мезона) может быть использовано явление изменения поляризации частицы (первоначально продольной) при ее вращении в магнитном поле. Угол между направлением импульса частицы и ее спином (в системе покоя частицы) в момент времени t равен [1]

$$\varphi' = 2\pi \frac{\Delta\mu}{\mu} \frac{E}{mc^2} \frac{t}{T}. \qquad (1)$$

Здесь $\Delta\mu/\mu$ относительная величина отличия магнитного момента частицы от дираковского значения (аномальность), E и T — полная энергия и период обращения частицы в магнитном поле.

Для точного определения $\Delta\mu/\mu$ необходимо очень большое число оборотов частицы. (Так, для достижения относительной точности в измерении $\Delta\mu/\mu$ электрона порядка 10^{-6} необходимое число оборотов электрона составляет примерно 10^8). Чтобы частицы не терялись во время эксперимента, магнитное поле должно быть фокусирующим, т. е. неоднородным. Однако, в неоднородном поле возникает деполяризация пучка.

Формула (1) остается справедливой также и в неоднородном поле, так как движение частицы в магнитном поле классично. Единственным отличием от случая однородного поля является лишь то, что период обращения T частицы зависит теперь от радиальных r и вертикальных z колебаний, которые испытывает частица в неоднородном поле

$$T = \frac{L}{v} = \frac{1}{v} \int_0^L \sqrt{\left(1 + \frac{r}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}\, ds, \qquad (2)$$

где s — координата вдоль орбиты длины L,

ρ — равновесный радиус,

v — скорость частицы.

Так как амплитуды колебаний разных частиц различны как вследствие различных начальных условий, так и из-за случайных причин (столкновение частицы с атомами остаточного газа), то возникает деполяризация пучка.

Воспользуемся уравнениями движения частицы по r и z координатам в магнитном поле вида

$$H = H_0\left(1 - n\frac{r}{\rho} + m\frac{r^2}{\rho^2} + \cdots\right). \tag{3}$$

Здесь n и m характеризуют величины градиента и второй производной поля. Из (2) нетрудно получить выражение для T через среднеквадратичные отклонения r и z — колебаний*

$$T = T_0\left(1 + \frac{2m - n - n^2}{2(1-n)}\frac{\overline{r^2} - \overline{z^2}}{\rho^2}\right). \tag{4}$$

Разброс углов ψ', возникающий из-за колебаний частиц, оказывается таким образом равным

$$\Delta\psi' = 2\pi\frac{\Delta\mu}{\mu}\frac{E}{mc^2}\frac{2m - n - n^2}{2(1-n)}\frac{\overline{r^2} - \overline{z^2}}{\rho^2}\frac{t}{T_0}. \tag{5}$$

При этом нужно иметь в виду, что если $\Delta\psi'$ для максимальных амплитуд достигает величины порядка 2π, то пучок окажется полностью деполяризованным. Поэтому равенство (5) накладывает жесткие ограничения на допустимые амплитуды колебаний частиц. В то же время из (5) нетрудно усмотреть и способы уменьшения деполяризации. Первый способ состоит в выборе такого магнитного поля, для которого параметры n и m удовлетворяют уравнению

$$2m - n - n^2 = 0. \tag{6}$$

Второй способ состоит в создании сильной связи вертикальных и радиальных колебаний и в выборе показателя спадания поля $n = 0{,}5$. При этом среднеквадратичные отклонения вертикальных и радиальных колебаний оказываются в среднем равными $\overline{r^2} = \overline{z^2}$, а $\Delta\psi'$ уменьшается примерно в отношении τ/t, где τ — период перекачки из одной степени свободы в другую, t — полное время нахождения частицы в магнитном поле.

Заметим здесь, что выражение (5) справедливо только для магнитной системы без промежутков. При наличии промежутков нарушается равенство коэффициентов при $\overline{r^2}$ и $\overline{z^2}$ в формуле (5), так что вышеизложенные соображения должны быть пересмотрены.

Уравнения движения в электромагнитном поле частицы с зарядом e и массой m и ее спина s_i имеют следующий вид:

$$\frac{1}{c}\frac{du_i}{d\tau_0} = \frac{e}{m}F_{ik}u_k \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\frac{1}{c}\frac{ds_i}{d\tau_0} = \frac{e}{m}\left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right)F_{ik}s_k + \frac{e}{m}\frac{\Delta\mu}{\mu}F_{ik}u_i s_k u_i,$$

* Подчеркнем, что средние понимаются по времени для данной частицы, так что разные частицы имеют различные среднеквадратичные амплитуды.

где τ — собственное время частицы, F_{ik} — 4-тензор электромагнитного поля, u_i — 4-скорость частицы, s_i — 4-вектор ее спина.

Формулы (1), (4) и (5) были строго получены авторами настоящей работы путем решения этой системы уравнений для движения в магнитном поле, имеющем вид (3).

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 28 VI 1959

Յու. Ֆ. Օռլով, Ս. Ա. Խեֆեց

ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՇԱՐԺՎՈՂ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՓՆՋԻԱՊ ԱԲԵՎԵՌԱՑՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրված է ոչ համասեռ մագնիսական դաշտում շարժվող մասնիկների փնջի ապաբևեռացումը:

Ստացված են ապաբևեռացման աստիճանի արտահայտությունները:

Ցույց են տրված մեթոդները՝ ոչ ցանկալի ապաբևեռացումը փոքրացնելու համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mendlowitz H., Case K.* „Double scattering of Electrons with magnetic interaction", Phys. Rev., **97**, № 1, 33, 1955;

Carrassi M., „The influence of the anomalous magnetic moment on the spin kinematics of electrons in a uniform magnetic field„, Nuovo Çimento. **7**, № 4, 524, 1958.