

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.3-385

ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫХОДА И СРЕДНИЕ ЧИСЛА РАССЕЯНИЯ ФОТОНОВ. II. МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ И ПЛОСКИХ СРЕДАХ

Д.И.НАГИРНЕР, А.В.ДЕМЕНТЬЕВ, Е.В.ВОЛКОВ

Поступила 24 июня 2024

Принята к печати 26 августа 2024

В качестве примеров применения формул части I рассмотрены рассеяние в одномерной среде, для которой все характеристики поля излучения выражаются через элементарные функции, и (трехмерное) изотропное монохроматическое рассеяние. Изучены некоторые свойства функции Амбарцумяна, а также выведены асимптотики средних чисел рассеяния фотонов в оптически толстом плоском слое.

Ключевые слова: перенос излучения; средние числа рассеяний фотонов

1. *Введение.* Во второй части данной работы, формулы, приведенные в первой части [1], конкретизируются для двух важных случаев рассеяния, рассматривавшихся в теории переноса излучения.

В начале развития теории переноса излучения, для выяснения простейших аспектов процесса, принималось, что рассеяние происходит в так называемой одномерной среде, в которой все фотоны могут проходить только вдоль одной прямой [2]. Такая модель может служить приближением в случае очень сильно вытянутых индикатрис, заменяемых игольчатой индикатрисой (рассеяние вперед-назад). Процесс рассеяний в такой среде изучался в работах основоположников [3,4].

Идеализированное рассеяние в одномерной среде представляет еще и тот интерес, что все характеризующие это рассеяние величины могут быть выражены в элементарных функциях. Кроме того, асимптотики величин реального рассеяния в трехмерной среде очень похожи на точные выражения одномерных и позволяют оценить их действие на примере точных формул.

Изотропное рассеяние в трехмерной плоскопараллельной однородной среде с горизонтально симметричным полем излучения представляет простейший случай трехмерного рассеяния и позволяет продвинуться в построении теории переноса в однородных плоских средах наиболее далеко. Большое значение в этой теории имеют как точные, так и различные асимптотические формулы.

Как и в первой части, здесь выводятся асимптотики для больших глубин как полубесконечной среды, так и оптически толстого слоя, а также для рассеяния, близкого к чистому.

2. Рассеяние в одномерной среде.

2.1. *Основные формулы.* Ядерная функция при рассеянии в одномерной среде - простая экспонента, а весовая функция в представлении ее в виде (I.2) - дельта-функция (основной промежуток вырождается в точку 1):

$$K(\tau) = e^{-\tau}, \quad A(y) = \delta(y-1). \quad (1)$$

Им соответствуют функции (I.3) (двустороннее преобразование Лапласа и преобразование Фурье ядерной функции)

$$\mathcal{V}(p) = \frac{1}{1-p^2}, \quad \mathcal{V}(u) = \frac{1}{1+u^2} \quad (2)$$

и характеристическое число (решение уравнения (I.52)) $k = \sqrt{1-\lambda}$.

2.2. *Полубесконечная среда.* Поскольку $A(1) = \infty$, во многих общих формулах интегралы обращаются в нуль и остаются только внеинтегральные слагаемые. Так задаются резольвентная функция, интеграл от нее и преобразование Лапласа, то есть H -функция:

$$\Phi(\tau) = (1-k)e^{-k\tau} = C_0 e^{-k(\tau+\tau_e)}, \quad \Psi(\tau) = \frac{1}{k} [1 - (1-k)e^{-k\tau}], \quad H(p) = \frac{p+1}{p+k}. \quad (3)$$

Величины, входящие в эти функции:

$$\tau_e = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = \frac{\operatorname{arth} k}{k}, \quad C_0 = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\lambda} = \frac{1}{\operatorname{ch} k \tau_e} = \frac{k}{\operatorname{sh} k \tau_e}. \quad (4)$$

Простыми формулами определяются даже резольвента полубесконечной среды

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \tau_1) = \Phi(|\tau - \tau_1|) + \int_0^{\min(\tau, \tau_1)} \Phi(\tau - t) \Phi(\tau_1 - t) dt = \\ \frac{1-k^2}{2k} e^{-k|\tau-\tau_1|} - \frac{(1-k)^2}{2k} e^{-k(\tau+\tau_1)} \end{aligned} \quad (5)$$

и вероятность выхода фотона из среды

$$P(\tau) = \frac{\lambda}{2} D(\tau, 1) = \frac{\lambda}{2} (1-k) \frac{2}{1-k^2} e^{-k\tau} = (1-k) e^{-k\tau} = \Phi(\tau). \quad (6)$$

Наконец, решение однородного уравнения (задача Милна)

$$\frac{S_M(\tau)}{S_M(0)} = \frac{1+k}{2k} e^{k\tau} - \frac{1-k}{2k} e^{-k\tau} = C_0 \frac{\operatorname{sh} k(\tau + \tau_e)}{k}. \quad (7)$$

2.3. *Конечный отрезок.* Простая точная формула получается для резольвентной функции и при конечном τ_0 :

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \lambda \frac{\text{sh } k(\tau_0 - \tau) + k \text{ch } k(\tau_0 - \tau)}{(1+k)^2 \text{sh}(k\tau_0) + 2k \text{ch}(k\tau_0)} = C_0 \frac{\text{sh } k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad (8)$$

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) = C_0 \frac{\text{sh } k\tau_e}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)} = \frac{k}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (9)$$

При рассмотрении трехмерных задач рассеяния обычно значения ядерной $K(\tau)$ и резольвентной функций при $\tau = 0$ бесконечны, здесь они конечны.

По резольвентной функции находим резольвенту:

$$\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0) = C_0 \frac{\text{sh } k(\tau_0 - \bar{\tau} + \tau_e) \text{sh } k(\tau + \tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e) \text{sh } k\tau_e}, \quad (10)$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{\tau + \tau_1 - |\tau - \tau_1|}{2} = \min\{\tau, \tau_1\}, \quad \tau = \frac{\tau + \tau_1 + |\tau - \tau_1|}{2} = \max\{\tau, \tau_1\}. \quad (11)$$

Предельные случаи $\tau_1 = 0$ и $\tau_1 = \tau_0$ получаются верными.

Получим еще интеграл от (8). Его можно представить в разных формах. Непосредственное интегрирование (8) дает

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau = 1 + \frac{C_0}{k} \frac{\text{ch } k(\tau_0 + \tau_e) - \text{ch } k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (12)$$

Воспользовавшись соотношениями (4) между C_0 , k и τ_e , получаем тождество

$$k \text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e) + C_0 \text{ch } k(\tau_0 + \tau_e) = \text{ch } k(\tau_0 + 2\tau_e), \quad (13)$$

а с его помощью - выражение

$$\Psi(\tau, \tau_0) = \frac{\text{cth } k(\tau_0 + 2\tau_e)}{k} - \frac{C_0 \text{ch } k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{k \text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)} = \frac{\text{ch } k(\tau_0 + 2\tau_e) - C_0 \text{ch } k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{k \text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (14)$$

В таком виде точная формула для одномерной среды по форме совпадает с крупномасштабной асимптотикой (I.78).

Приведение (12) к общему знаменателю и преобразование гиперболических функций приводит к еще одному выражению:

$$\Psi(\tau, \tau_0) = \frac{\text{sh } k(\tau_0 - \tau/2 + 2\tau_e) \text{sh } k(\tau/2 + \tau_e) + \text{sh } k(\tau_0 - \tau/2 + \tau_e) \text{sh } k(\tau/2)}{\text{sh } k\tau_e \text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (15)$$

Последнее выражение позволяет легко перейти к пределу чистого рассеяния:

$$\text{при } \lambda \rightarrow 1 \text{ будет } k \rightarrow 0 \text{ и } \Psi(\tau, \tau_0) \rightarrow 1 + \frac{\tau}{2} \frac{2\tau_0 + 2 - \tau}{\tau_0 + 2}.$$

Крайнее значение интеграла также можно представить по-разному:

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) = 1 + \frac{C_0}{k} \frac{\frac{\text{sh } k \tau_0}{2}}{\frac{\text{ch } k \frac{\tau_0 + 2\tau_e}{2}}} = \frac{\text{th } k \frac{\tau_0 + 2\tau_e}{2}}{k} = \frac{1 + \frac{1}{k} \text{th } k \frac{\tau_0}{2}}{1 + k \text{th } k \frac{\tau_0}{2}} \rightarrow 1 + \frac{\tau_0}{2} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 1. \quad (16)$$

Второе выражение имеет вид общей асимптотики (I.68), если подставить $k = \sqrt{1 - \lambda}$. С этим условием совпадают асимптотики при $\tau_0 \rightarrow \infty$ и вид пределов при $\lambda \rightarrow 1$, хотя значения экстраполированной длины у них разные.

В случае одномерной среды вероятность выхода совпадает с резольвентной функцией. Выход фотона из среды может осуществляться через одну из границ и соответствующие вероятности можно разграничить. Для одномерной среды это одна и та же функция от дополняющих друг друга аргументов:

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} D(\tau, 1, \tau_0) = \Phi(\tau, \tau_0) = C_0 \frac{\text{sh } k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad (17)$$

$$P(\tau_0 - \tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} D(\tau, -1, \tau_0) = \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) = C_0 \frac{\text{sh } k(\tau + \tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad (18)$$

$$\mathcal{P}(\tau, \tau_0) = P(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0) = C_0 \frac{\text{ch } k(\tau_0/2 - \tau)}{\text{ch } k(\tau_0/2 + \tau_e)}. \quad (19)$$

По только что приведенным формулам или по (I.33) находим вероятности выхода фотонов с границ среды:

$$\begin{aligned} P(0, \tau_0) &= C_0 \frac{\text{sh } k(\tau_0 + \tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)} = 1 - \frac{k}{\text{th } k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \\ P(\tau_0, \tau_0) &= C_0 \frac{\text{sh } k(\tau_e)}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)} = \frac{k}{\text{sh } k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полная вероятность выхода с границ отрезка и с его середины

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0, \tau_0) &= \mathcal{P}(\tau_0, \tau_0) = C_0 \frac{\text{ch } k(\tau_0/2)}{\text{ch } k(\tau_0/2 + \tau_e)} = 1 - k \text{th } k \frac{\tau_0 + 2\tau_e}{2}, \\ \mathcal{P}(\tau_0/2, \tau_0) &= \frac{C_0}{\text{ch } k(\tau_0/2 + \tau_e)}. \end{aligned} \quad (21)$$

В середине эта вероятность принимает минимальное значение.

При $\tau_0 \rightarrow \infty$ получается, естественно, $P(\tau, \tau_0) \rightarrow P(\tau) = \Phi(\tau)$, $P(\tau_0 - \tau, \tau_0) \rightarrow 0$. При $\lambda \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} P(\tau, \tau_0) &= \frac{\tau_0 - \tau + 1}{\tau_0 + 2}, \quad P(\tau_0 - \tau, \tau_0) = \frac{\tau + 1}{\tau_0 + 2}, \\ \mathcal{P}(\tau, \tau_0) &= P(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0) = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

2.4. Средние числа рассеяний. Полное число рассеяний фотона, рожденного на расстоянии τ от начала промежутка, легко найти по формуле

(I.38) с использованием (15) и (16):

$$N(\tau, \tau_0) = \frac{1}{k^2} \left[1 - C_0 \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right)}{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right)} \right] =$$

$$\frac{\operatorname{sh} k \left(\frac{\tau_0 - \tau}{2} + \tau_e \right) \operatorname{sh} k \left(\frac{\tau}{2} + \tau_e \right) + \operatorname{sh} k \frac{\tau_0 - \tau}{2} \operatorname{sh} k \frac{\tau}{2}}{k \operatorname{sh} k \tau_e \operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right)}. \quad (23)$$

При чистом рассеянии

$$N(\tau, \tau_0) = 1 + \frac{\tau_0 + \tau(\tau_0 - \tau)}{2}, \quad N(0, \tau_0) = N(\tau_0, \tau_0) = 1 + \frac{\tau_0}{2},$$

$$N(\tau_0/2, \tau_0) = 1 + \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0^2}{8}. \quad (24)$$

Формулы (19)-(24) были получены В.В.Соболевым [4] без введения τ_e .

Для получения других средних чисел рассеяния требуется находить производные по λ от вероятностей выхода фотонов.

Проще сначала находить производные по числу k , а производные по λ получать, умножая их на $dk/d\lambda$. При этом используем производные

$$\frac{dC_0}{dk} = \frac{d\sqrt{1-k^2}}{dk} = -\frac{k}{C_0}, \quad \frac{d(k\tau_e)}{dk} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+k}{1-k}\right)}{dk} = \frac{1}{1-k^2} = \frac{1}{C_0^2} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{1}{2k}. \quad (25)$$

Производная от полной вероятности получается дифференцированием (19):

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\tau, \tau_0)}{\partial k} = -\frac{k}{C_0} \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 - \tau)}{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 + \tau_e)} + C_0 \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0/2 - \tau)}{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 + \tau_e)} \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right)$$

$$- C_0 \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 - \tau)}{\operatorname{ch}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)} \operatorname{sh} k(\tau_0/2 + \tau_e) \left(\frac{\tau_0}{2} + \frac{1}{C_0^2} \right). \quad (26)$$

Некоторые преобразования гиперболических функций приводят к немного отличающемуся выражению. Умножим его на $-1/(2k)$ и получим производную по λ :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2k} \left[\frac{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 - \tau)}{\operatorname{ch}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)} \operatorname{sh} k(\tau_0/2 + 2\tau_e) \right.$$

$$\left. + \frac{\tau_0}{2} C_0 \frac{\operatorname{sh} k(\tau + \tau_e)}{\operatorname{ch}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)} + C_0 \tau \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0/2 - \tau)}{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 + \tau_e)} \right]. \quad (27)$$

Выражение (26) явно симметрично относительно середины отрезка, симметричность (27) проверяется с использованием равенства

$$\operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + \tau_e) - 2\operatorname{sh} k\left(\frac{\tau_0}{2} - \tau\right)\operatorname{ch} k\left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e\right) = \operatorname{sh} k(\tau + \tau_e), \quad (28)$$

получающегося в результате перегруппировки аргументов гиперболических функций.

Продифференцируем и односторонние вероятности, сначала по k , затем перейдем к производной по λ . После ряда преобразований найдем для выхода вверх, то есть (17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda} = & \frac{1}{2k} \left[\frac{\operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + 2\tau_e)\operatorname{ch} k(\tau_0 + 2\tau_e) - \operatorname{sh} k(\tau + 2\tau_e)}{\operatorname{sh}^2 k(\tau_0 + 2\tau_e)} \right. \\ & \left. - \frac{C_0 \operatorname{sh} k(\tau + \tau_e)\tau_0}{\operatorname{sh}^2 k(\tau_0 + 2\tau_e)} + C_0 \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \tau \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Для выхода вниз надо просто сделать замены $\tau_0 - \tau \leftrightarrow \tau$. Выкладка с использованием формул с гиперболическими функциями доказывает, что сумма (29) с выражением при указанной замене дает (26).

Все приведенные формулы содержат экстраполированную длину, выражение для которой в (2) достаточно простое и при подстановке его в формулы получаются тоже не очень сложные выражения, которые были найдены ранее [2,4,5]. Удобство выражений с τ_e в их компактности, а также в простоте вычислений и процедуры перехода к чистому рассеянию. Еще одно преимущество формул с τ_e в том, что они похожи на асимптотические формулы для трехмерной среды даже в том общем случае, для которого эти асимптотики были найдены в части I.

2.5. Средние числа рассеяний при чистом рассеянии. Для перехода к случаю чистого рассеяния, то есть к пределу при $\lambda \rightarrow 1$, $k \rightarrow 0$, разложим последовательно интересующие нас величины по степеням k с запасом степеней. Начинать надо с разложений гиперболических функций. Разложения синуса и косинуса общеизвестны, а разложения обратных величин содержат числа Бернулли B_n и Эйлера E_n :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \frac{1}{\operatorname{sh} x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}, \quad (30)$$

$$\operatorname{th} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad \operatorname{cth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}. \quad (31)$$

Экстраполированная длина в данном случае простая функция и ее разложение также широко известно.

Указанные разложения позволяют найти средние при чистом рассеянии. При этом несколько первых степеней k сокращаются и для среднего числа рассеяний фотона, возникшего на глубине τ , а вышедшего через верхнюю

границу, получается

$$N_+(\tau, \tau_0) = \frac{R(\tau, \tau_0)}{6(\tau_0 + 2)(\tau_0 - \tau + 1)}, \quad (32)$$

где

$$R(\tau, \tau_0) = 2\tau_0^3(1 + \tau) + 3\tau_0^2(4 + 2\tau - \tau^2) + \tau_0(24 - 9\tau^2 + \tau^3) + 2(6 - 6\tau - 3\tau^2 + \tau^3). \quad (33)$$

Полное число рассеяний выходящих фотонов

$$\begin{aligned} N_E(\tau, \tau_0) &= P(\tau, \tau_0)N_+(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0)N_+(\tau_0 - \tau, \tau_0) \\ &= 1 + \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau(\tau_0 - \tau)}{2} = N(\tau, \tau_0) \end{aligned} \quad (34)$$

равно полному числу рассеяний, так как фотоны не поглощаются.

Для средних чисел рассеяния фотонов, родившихся на глубинах 0 и τ_0 , а вышедших через границу $\tau = 0$, получаются следующие значения

$$\begin{aligned} N_+(0, \tau_0) &= N_-(\tau_0, \tau_0) = \frac{2\tau_0^3 + 12\tau_0^2 + 24\tau_0 + 12}{6(\tau_0 + 2)(\tau_0 + 1)}, \\ N_+(\tau_0, \tau_0) &= N_-(0, \tau_0) = \frac{\tau_0^3 + 6\tau_0^2 + 12\tau_0 + 12}{6(\tau_0 + 2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Как видно из этих формул, число рассеяний фотона, выходящего через ту же границу, на которой он возник, значительно меньше, чем у фотона, выходящего через противоположную границу. При больших толщинах

$$\begin{aligned} P(0, \tau_0) &\sim 1, \quad N_+(0, \tau_0) \sim \frac{\tau_0}{3}, \quad P(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{1}{\tau_0}, \\ N_+(\tau_0, \tau_0) &\sim \frac{\tau_0^2}{6}, \quad N_E(0, \tau_0) = N_E(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\tau_0}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

При рождении фотона в середине отрезка

$$P\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = \frac{1}{2}, \quad N_{\pm}\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = N_E\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = 1 + \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0^2}{8}. \quad (37)$$

2.6. Графики при $\tau_0 = 10$. Для иллюстрации приведенных формул построены графики вероятностей выхода (рис.1) и средних чисел рассеяния (рис.2-5) при оптической длине отрезка, в котором происходит рассеяние, равной $\tau_0 = 10$.

Величина, графики которой приведены на рисунке, указана на том же рисунке. Ввиду малой величины вероятностей на большом протяжении аргумента τ даны их десятичные логарифмы. Графики $P(\tau_0 - \tau, \tau_0)$ и $N_-(\tau, \tau_0) = N_+(\tau_0 - \tau, \tau_0)$ не приводятся, так как получаются из приведенных отражением в прямой $\tau = \tau_0/2$. Значения вероятности выживания фотона приведены

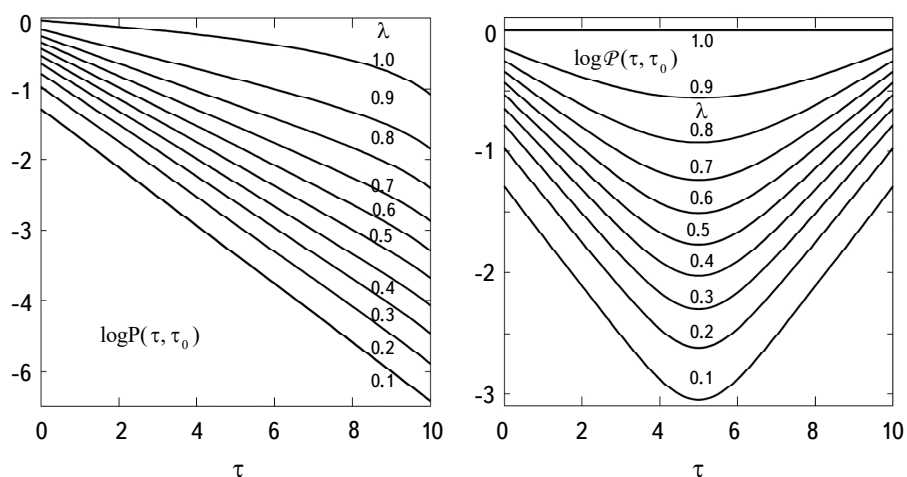


Рис.1. Логарифмы вероятностей выхода фотонов: слева - через верхнюю границу, справа - полные.

около кривых. Из-за большого разброса значений графики чисел рассеяния даются раздельно для $\lambda = 0.1 (0.1) 0.8$ и $\lambda = 0.9, 0.92, 0.95, 0.97, 0.99, 1.0$. Графики приведены в разных масштабах для большего заполнения площади рисунков.

Графики демонстрируют сильную зависимость величин от λ при ее приближении к единице, то есть к чистому рассеянию. На рис.1 это не так сильно выражено, так как приведены логарифмы, выравнивающие значения функций.

2.7. Некоторые интегралы. Часто при приложениях теории переноса источники излучения аппроксимируются степенной функцией оптической

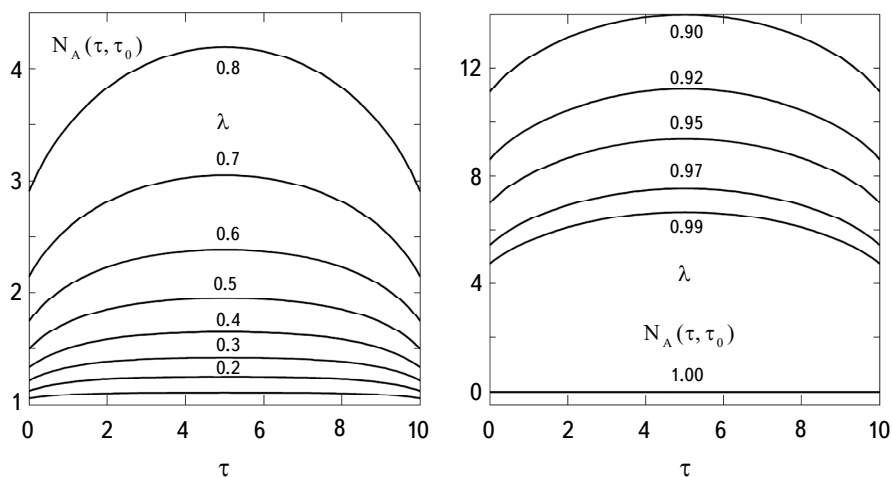


Рис.2. Средние числа рассеяний поглощенных фотонов.

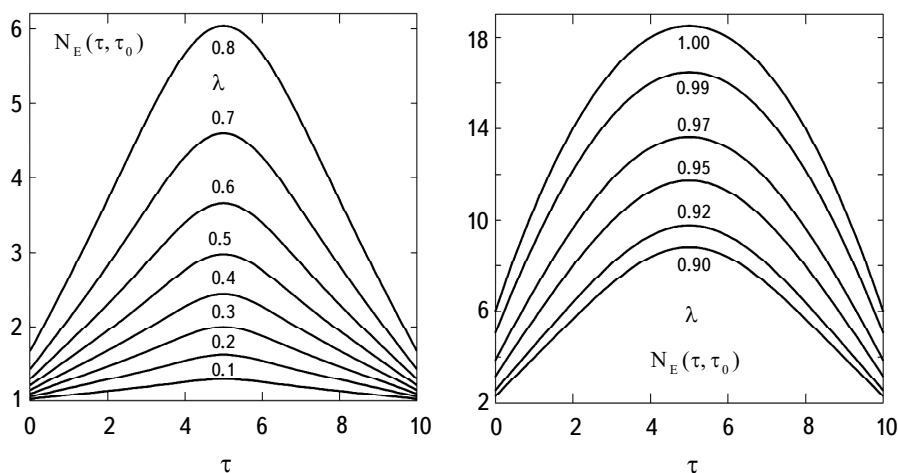


Рис.3. Средние числа рассеяний вышедших фотонов.

глубины. Рассмотрим такое распределение.

Пусть первичные источники описываются формулой $S_0(\tau) = \tau^n$. Для получения усредненных по такому распределению величин, требуется найти интегралы от произведений степеней τ и гиперболических функций с аргументами $k(\tau + \tau_e)$, $k(\tau_0 - \tau + \tau_e)$ и $k(\tau_0/2 - \tau)$.

Начнем с

$$h_n^{(s)}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \operatorname{sh} k(\tau + \tau_e) d\tau, \quad h_0^{(s)}(\tau_0) = \frac{2}{k} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2} \operatorname{sh} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right), \quad (38)$$

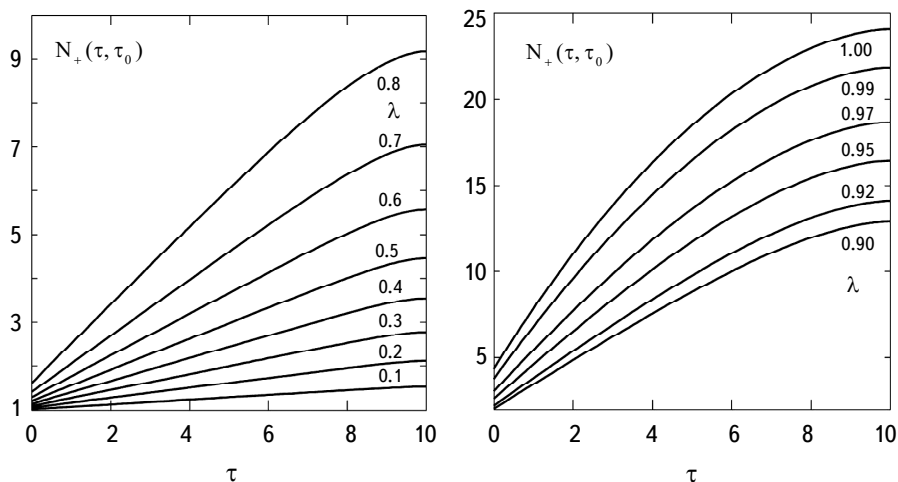


Рис.4. Средние числа рассеяний фотонов, вышедших через верхнюю границу.

$$h_1^{(s)}(\tau_0) = \frac{\tau_0}{k} \operatorname{ch} k(\tau_0 + \tau_e) - \frac{2}{k^2} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2} \operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right). \quad (39)$$

Дважды интегрируя по частям, приходим к рекуррентному соотношению

$$h_n^{(s)}(\tau_0) = \frac{\tau_0^n}{k} \operatorname{ch} k(\tau_0 + \tau_e) - n \frac{\tau_0^{n-1}}{k^2} \operatorname{sh} k(\tau_0 + \tau_e) + \frac{n(n-1)}{k^2} h_{n-2}^{(s)}(\tau_0). \quad (40)$$

Аналогично для:

$$h_n^{(c)}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \operatorname{ch} k(\tau + \tau_e) d\tau, \quad h_0^{(c)}(\tau_0) = \frac{2}{k} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2} \operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right), \quad (41)$$

$$h_1^{(c)}(\tau_0) = \frac{\tau_0}{k} \operatorname{sh} k(\tau_0 + \tau_e) - \frac{2}{k^2} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2} \operatorname{sh} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right), \quad (42)$$

$$h_n^{(c)}(\tau_0) = \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0 + \tau_e)}{k} - n \frac{\tau_0^{n-1}}{k} \operatorname{ch} k(\tau_0 + \tau_e) + \frac{n(n-1)}{k^2} h_{n-2}^{(c)}(\tau_0). \quad (43)$$

Следующие два интеграла

$$f_n^{(c)}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right) d\tau, \quad f_0^{(c)}(\tau_0) = \frac{2}{k} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2}, \quad f_1^{(c)}(\tau_0) = \frac{\tau_0}{k} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2}, \quad (44)$$

$$f_n^{(s)}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \operatorname{sh} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right) d\tau, \quad f_0^{(s)}(\tau_0) = 0, \quad f_1^{(s)}(\tau_0) = -\frac{\tau_0}{k} \operatorname{ch} k \frac{\tau_0}{2} + \frac{2}{k^2} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2}. \quad (45)$$

При $n \geq 2$

$$f_n^{(c)}(\tau_0) = \frac{\tau_0^n}{k} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2} - \frac{n}{k^2} \left[\tau_0^{n-1} \operatorname{ch} k \frac{\tau_0}{2} - (n-1) f_{n-2}^{(c)} \right], \quad (46)$$

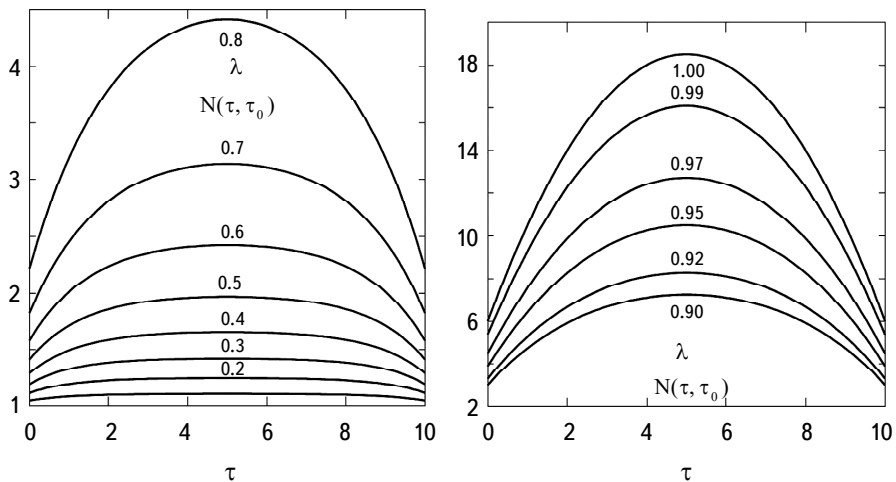


Рис.5. Полные средние числа рассеяний фотонов.

$$f_n^{(s)}(\tau_0) = -\frac{\tau_0^n}{k} \operatorname{ch} k \frac{\tau_0}{2} + \frac{n}{k^2} \left[\tau_0^{n-1} \operatorname{sh} k \frac{\tau_0}{2} + (n-1) f_{n-2}^{(s)}(\tau_0) \right]. \quad (47)$$

Еще два интеграла выражаются через (38) и (41):

$$\tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + \tau_e) d\tau = \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - \tau)^n \operatorname{sh} k(\tau + \tau_e) d\tau = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l n!}{l!(n-l)!} \tau_0^{n-l} h_l^{(s)}(\tau_0), \quad (48)$$

$$\tilde{h}_n^{(c)}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \operatorname{ch} k(\tau_0 - \tau + \tau_e) d\tau = \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - \tau)^n \operatorname{ch} k(\tau + \tau_e) d\tau = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l n!}{l!(n-l)!} \tau_0^{n-l} h_l^{(c)}(\tau_0). \quad (49)$$

Между тремя парами интегралов имеются связи:

$$\tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0) + h_n^{(s)}(\tau_0) = 2 \operatorname{sh} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right) f_n^{(c)}(\tau_0), \quad (50)$$

$$\tilde{h}_n^{(c)}(\tau_0) + h_n^{(c)}(\tau_0) = 2 \operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right) f_n^{(s)}(\tau_0),$$

$$\tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0) - h_n^{(s)}(\tau_0) = 2 \operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right) f_n^{(s)}(\tau_0),$$

$$\tilde{h}_n^{(c)}(\tau_0) - h_n^{(c)}(\tau_0) = 2 \operatorname{sh} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right) f_n^{(s)}(\tau_0). \quad (51)$$

2.8. Вероятности выхода и числа рассеяний при степенных источниках. Усредненные вероятности выхода через границы

$$\bar{P}_n(\tau_0) = \frac{\int_0^{\tau_0} \tau^n P(\tau, \tau_0) d\tau}{\int_0^{\tau_0} \tau^n d\tau} = \frac{C_0(n+1)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \frac{\tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0)}{\tau_0^{n+1}}, \quad (52)$$

$$\bar{\bar{P}}_n(\tau_0) = \frac{\int_0^{\tau_0} \tau^n P(\tau_0 - \tau, \tau_0) d\tau}{\int_0^{\tau_0} \tau^n d\tau} = \frac{C_0(n+1)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \frac{h_n^{(s)}(\tau_0)}{\tau_0^{n+1}}. \quad (53)$$

Усредненная вероятность выхода через обе границы выражается через $f_n^{(c)}(\tau_0)$ и равна, естественно, сумме

$$\bar{\bar{P}}_n(\tau_0) = \bar{P}_n(\tau_0) + \bar{\bar{P}}_n(\tau_0) = \frac{C_0(n+1)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \frac{h_n^{(s)}(\tau_0) + \tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0)}{\tau_0^{n+1}} = \frac{C_0(n+1)}{\tau_0^{n+1}} \frac{f_n^{(c)}(\tau_0)}{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 + \tau_e)}. \quad (54)$$

При чистом рассеянии предельные выражения усредненных вероятностей выхода

$$\bar{P}_n(\tau_0) = \frac{\tau_0 + n + 2}{(n+2)(\tau_0 + 2)}, \quad \bar{\bar{P}}_n(\tau_0) = \frac{(n+1)\tau_0 + n + 2}{(n+2)(\tau_0 + 2)}. \quad (55)$$

Сумма этих величин равна точно единице, так как усреднение единицы оставляет ее неизменной.

Полное число рассеяний фотона на отрезке при степенном распределении источников, если $0 < \lambda < 1$ и $\lambda = 1$, равно соответственно

$$\bar{N}_n(\tau_0) = \frac{1}{k^2} \left[1 - C_0 \frac{f_n(\tau_0)}{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 + \tau_e)} \right] \rightarrow 1 + \frac{\tau_0}{2} + \frac{n+1}{2(n+2)(n+3)} \tau_0^2 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 1. \quad (56)$$

Для получения других усредненных чисел рассеяния надо подобно формулам (I.46) и (I.48) результаты усреднения производных поделить на усредненные вероятности выхода. Поскольку операции дифференцирования по λ и интегрирования по τ перестановочны, получаем последовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_n(\tau_0)}{\partial \lambda} = & -\frac{k}{C_0} \frac{\tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} + C_0 \frac{\tilde{h}_n^{(c)}(\tau_0)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \left(\tau_0 + \frac{1}{C_0^2} \right) \\ & - C_0 \frac{\tilde{h}_{n+1}^{(c)}(\tau_0)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} - C_0 \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\operatorname{sh}^2 k(\tau_0 + 2\tau_e)} \tilde{h}_n^{(s)}(\tau_0) \left(\tau_0 + \frac{1}{C_0^2} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\bar{P}}_n(\tau_0)}{\partial \lambda} = & -\frac{k}{C_0} \frac{h_n^{(s)}(\tau_0)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} + \frac{1}{C_0} \frac{h_n^{(c)}(\tau_0)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \\ & + C_0 \frac{h_{n+1}^{(c)}(\tau_0)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} - C_0 \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\operatorname{sh}^2 k(\tau_0 + 2\tau_e)} h_n^{(s)}(\tau_0) \left(\tau_0 + \frac{2}{C_0^2} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

По приведенным формулам средние можно находить, последовательно увеличивая степени n .

3. Изотропное монохроматическое рассеяние в трехмерных средах.

3.1. Основные формулы. Этот вид рассеяния как в полубесконечной среде, так и в конечном слое, исследовался всеми, кто обращался к проблемам переноса излучения. Монографии и учебники были указаны в первой части.

Все общие формулы разделов 2-5 части I годятся для этого рассеяния. При этом введенные там обозначения сохраняются почти для всех функций кроме тех, которые характеризуют выходящее излучение, то есть вместо Чандraseкаровских H -функций и функций X и Y [6] следует использовать введенные В.А.Амбарцумяном $\varphi(\eta) = H(1/\eta)$, $\varphi(\eta, \tau_0) = X(1/\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0) = Y(1/\eta, \tau_0)$ [7,8] (см. также [9]).

Так как для этого рассеяния существует характеристическое число, то и все асимптотики к нему тоже применимы.

В этом разделе приведем более подробные формулы для основных величин, общих для полубесконечной среды и слоя.

Для этого вида рассеяния

$$K(\tau) = E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\tau/\eta} \frac{d\eta}{\eta} = \int_1^\infty e^{-y\tau} \frac{dy}{y}, \quad a=1, \quad b=\infty, \quad A(y) = \frac{1}{y}, \quad (59)$$

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{2p} \ln \frac{1+p}{1-p}, \quad \mathcal{U}(y) = \frac{1}{2y} \ln \frac{y+1}{y-1}, \quad V(u) = \frac{\operatorname{arctg} u}{u}. \quad (60)$$

Параметр $y = 1/\eta$ при $\eta \leq 1$ имеет смысл обратного косинуса полярного угла. Например, вероятность, что поглощенный на глубине τ фотон выйдет из слоя под углом к границе $\tau = 0$, косинус которого η , в телесном угле $2\pi d\eta$, равна $(\lambda/2)D(\tau, 1/\eta, \tau_0)d\eta$. Но допускаются и другие значения y .

В асимптотики всех функций входят характеристическое число k и экстраполированная длина τ_e . Здесь подробно исследуются эти величины для изотропного рассеяния.

Уравнение для нахождения k , полученное еще Хвольсоном [10], имеет вид (напишем его и в удобной для нас форме)

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1, \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (61)$$

Экстраполированная длина (I.55)

$$\tau_e(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arctg} X\left(\frac{1}{\eta}, \lambda\right) \frac{d\eta}{1-k^2\eta^2}, \quad X\left(\frac{1}{\eta}, \lambda\right) = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{\eta}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}}{\frac{\pi\eta}{2}}. \quad (62)$$

3.2. Производные от характеристического числа и экстраполированной длины по λ . Продифференцировав обе части второго равенства в (61), найдем

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{k}{\lambda} \frac{1+k^2}{\lambda - 1 + k^2}. \quad (63)$$

Эта производная отрицательна, так как с ростом λ число k уменьшается.

Продифференцируем и экстраполированную длину (62). Ее производная

$$\frac{d\tau_e(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda\pi} \int_0^1 d\eta \left[\mathcal{A}(\eta, \lambda) - \frac{\operatorname{arctg} X(1/\eta, \lambda)}{(1-k^2\eta^2)^2} k^2 \frac{1-k^2}{\lambda - 1 + k^2} \right], \quad (64)$$

$$\mathcal{A}(\eta, \lambda) = \frac{2}{\lambda} \mathcal{R}\left(\frac{1}{\eta}, \lambda\right).$$

Эти формулы точные.

Значение производной экстраполированной длины (64) при $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}\tau'_e(1) &= \left. \frac{d\tau_e(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = -1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\eta \left[\frac{1}{\mathcal{A}(\eta, 1)} - \frac{3}{2} \operatorname{arccotg} X(1/\eta, 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tau_e(1) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta}{\mathcal{A}(\eta, 1)}.\end{aligned}\quad (65)$$

Вычисления дают

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{\mathcal{A}(\eta, 1)} = \frac{4}{5}, \quad \tau_e(1) = 0.7104460898, \quad \tau'_e(1) = -0.8203170. \quad (66)$$

$\tau_e(1)$ известно с очень большим числом знаков (до 60, см. [11]).

3.3. *Связи между λ и k при почти чистом рассеянии.* Для рассеяния, близкого к чистому, сначала получим разложения $\varepsilon = 1 - \lambda$ по степеням k и обратные.

Общеизвестно разложение

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{2n+1}. \quad (67)$$

Обратим этот ряд, то есть найдем разложение

$$\lambda = 1 - \varepsilon = \sum_{l=0}^{\infty} a_l k^{2l}. \quad (68)$$

Приравняв произведение рядов к единице, получим рекуррентное соотношение

$$\sum_{n=0}^s \frac{a_{s-n}}{2n+1} = 0, \quad (69)$$

из которого найдем

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = -\frac{4}{45}, \quad a_3 = -\frac{44}{945}, \quad a_4 = -\frac{428}{14175}, \\ a_5 &= -\frac{10196}{467775}, \quad a_2 = -\frac{10719068}{638512875}.\end{aligned}\quad (70)$$

Представив k^2 разложением с неопределенными коэффициентами и подставив его в (68), получим с той же точностью

$$k^2 \sim 3\varepsilon \left(1 - \frac{4}{5}\varepsilon + \frac{4}{175}\varepsilon^2 + \frac{4}{175}\varepsilon^3 + \frac{7556}{336875}\varepsilon^4 + \frac{471844}{21896875}\varepsilon^5 \right). \quad (71)$$

Наконец, извлекая корни, находим

$$k \sim \sqrt{3\varepsilon} \left(1 - \frac{2}{5}\varepsilon - \frac{12}{175}\varepsilon^2 - \frac{2}{125}\varepsilon^3 + \frac{166}{67375}\varepsilon^4 + \frac{33354}{3128125}\varepsilon^5 \right), \quad (72)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \sim \frac{k}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{15}k^2 + \frac{32}{525}k^4 + \frac{878}{23625}k^6 + \frac{1130}{43659}k^8 + \frac{11508074}{591215625}k^{10} \right), \quad (73)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \frac{\sqrt{3}}{k} \left(1 - \frac{2}{15} k^2 - \frac{68}{1575} k^4 - \frac{22}{945} k^6 - \frac{82906}{5457375} k^8 - \frac{8334902}{760134375} k^{10} \right). \quad (74)$$

Найдем еще разложения производных. Сначала производную λ по k

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dk} &= 2k \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1} (l+1) k^{2l} \sim \\ &= -\frac{2}{3} k \left(1 + \frac{8}{15} k^2 + \frac{44}{105} k^4 + \frac{1712}{4725} k^6 + \frac{10196}{31185} k^8 + \frac{21438136}{70945875} k^{10} \right), \end{aligned} \quad (75)$$

затем обратную производную

$$\frac{dk}{d\lambda} \sim -\frac{3}{2} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{8}{15} k^2 - \frac{212}{1575} k^4 - \frac{176}{2625} k^6 - \frac{13996}{336875} k^8 - \frac{17013224}{591215625} k^{10} \right). \quad (76)$$

3.4. Слабое рассеяние. В противоположном предельном случае малых λ число k очень близко к единице. Удобно его представить в виде разложения

$$\begin{aligned} k &= 1 - 2y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \sum_{m=0}^n (-1)^m b_{nm} x^m, \\ x &= \frac{2}{\lambda}, \quad y = e^{-x}, \quad b_{n0} = 1. \end{aligned} \quad (77)$$

Характеристическое уравнение представляется в виде

$$(1-k)x = \ln \left(1 - \frac{1-k}{2} \right) - \ln \left(1 + \frac{1-k-2y}{2y} \right). \quad (78)$$

Разложение логарифмов по степеням малых добавок к единице в их аргументах дает возможность последовательно находить коэффициенты b_{nm} . Первые из них

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2, \quad b_{21} = b_{22} = 6, \quad b_{31} = 12, \quad b_{32} = 32, \quad b_{33} = \frac{64}{3}, \\ b_{41} &= 20, \quad b_{42} = 100, \quad b_{43} = \frac{500}{3}, \quad b_{44} = \frac{250}{3}, \end{aligned} \quad (79)$$

$$b_{51} = 30, \quad b_{52} = 240, \quad b_{53} = 720, \quad b_{54} = 864, \quad b_{55} = \frac{1728}{5}, \quad (80)$$

$$b_{61} = 42, \quad b_{62} = 490, \quad b_{63} = \frac{6860}{3}, \quad b_{64} = 4802, \quad b_{65} = \frac{67228}{15}, \quad b_{66} = \frac{67228}{45}, \quad (81)$$

$$\begin{aligned} b_{71} &= 56, \quad b_{72} = 896, \quad b_{73} = \frac{17920}{3}, \quad b_{74} = \frac{57344}{3}, \\ b_{75} &= \frac{458752}{15}, \quad b_{76} = \frac{1048576}{45}, \quad b_{77} = \frac{2097152}{315}. \end{aligned} \quad (82)$$

При $\lambda = 0.3$ последовательные слагаемые в разложении после единицы по модулю меньше, соответственно, $2.6 \cdot 10^{-3}$, $2.0 \cdot 10^{-5}$, $1.1 \cdot 10^{-5}$, $3.2 \cdot 10^{-7}$, $1.1 \cdot 10^{-8}$,

$3.0 \cdot 10^{-10}$ и $1.2 \cdot 10^{-11}$. Казалось бы, что с уменьшением вероятности выживания фотона точность разложения должна расти. Однако при малых значениях λ последовательные степени экспоненты быстро уменьшаются, но при них растут коэффициенты, которые являются многочленами той же степени от $2/\lambda$, что и степень экспоненты.

Первые два слагаемых в разложении (77) приведены в [12,13].

Составленная программа, включившая и разложения пунктов 3 и 4, обеспечивает получение значений k с точностью не менее 10 значащих цифр. Более подробные сведения о характеристическом числе и программа его вычисления помещены на сайте www.astro.spbu.ru.

4. Полубесконечная среда.

4.1. *Функция Амбарцумяна.* Функция, характеризующая отраженное от полубесконечной среды излучение, для изотропного рассеяния была введена Амбарцумяном [7], обозначена им $\phi(\eta)$ и называется функцией Амбарцумяна. Аргумент $0 \leq \eta \leq 1$ обозначал косинус угла отражения. Здесь будем рассматривать эту функцию при любых неотрицательных аргументах z и отразим явно ее зависимость от вероятности выхода фотона λ , то есть - $\phi(z, \lambda)$.

Функция была определена Амбарцумяном нелинейным уравнением, которому также присвоено имя его автора и которое может быть записано в двух формах:

$$\phi(z, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} z \phi(z, \lambda) \int_0^1 \frac{\phi(z', \lambda) dz'}{z + z'}, \quad \frac{1}{\phi(z, \lambda)} = \sqrt{1 - \lambda} + \int_0^1 \frac{\phi(z', \lambda) z' dz'}{z + z'}. \quad (83)$$

Путем численного решения этого уравнения многие авторы вычисляли функцию $\phi(\eta, \lambda)$. Достаточно ее найти для $\eta \leq 1$, для других значений z она может быть найдена с помощью того же уравнения. Наиболее точные значения получены в [14].

Явное выражение для этой функции было найдено Фоком [15]:

$$\ln \phi(z, \lambda) = \ln H(1/\eta) = -\frac{z}{\pi} \int_0^\infty \ln(1 - \lambda V(u)) \frac{du}{1 + z^2 u^2}, \quad (84)$$

где вместо $V(u)$ надо подставить последнюю формулу из (60) (формула (84) написана в общем виде, справедливом для многих видов рассеяния). По этой формуле функция может быть вычислена при любых положительных z . Программа вычисления с описанием выложена на сайте www.astro.spbu.ru.

Графики функции при некоторых значениях λ даются на рис.6. Аргумент $z > 1$ заменен по формуле $z = 1/(2 - \tilde{z})$. На том же рисунке изображена зависимость функции от $z = 1/k(\lambda) \geq 1$ с той же заменой, то есть приведены значения для $\tilde{z} = 2 - k$.

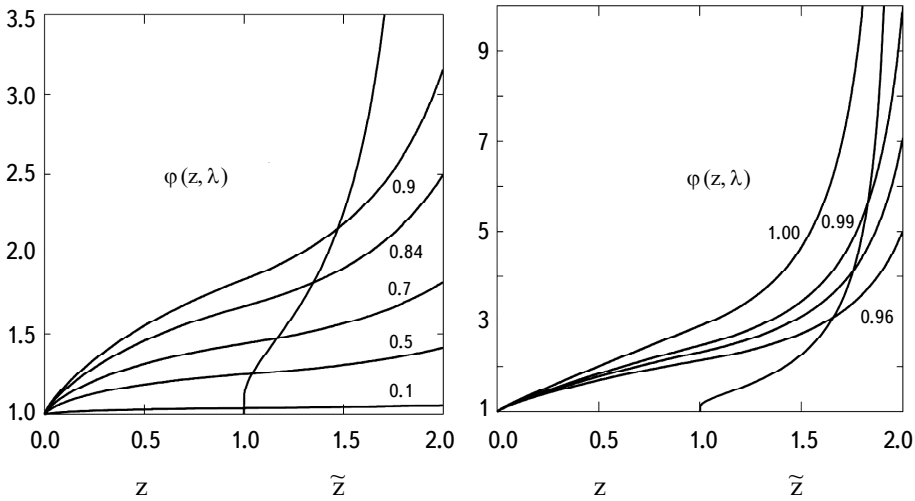


Рис.6. Графики функции $\varphi(z, \lambda)$ при некоторых λ (указаны около кривых, кроме 0.98). При $z > 1$ дается зависимость от $\tilde{z} = 2 - 1/z$. Кривая $\varphi(1/k, \lambda)$ ($k = 2 - \tilde{z}$) пересекает все кривые при $\lambda < 1$.

4.2. *Моменты функции Амбарцумяна.* Представляют интерес моменты целого порядка

$$\alpha_n(\lambda) = \int_0^1 \varphi(z, \lambda) z^n dz. \quad (85)$$

Аналитические выражения известны для нулевого и регуляризованного минус-первого моментов (см., например, [12]):

$$\alpha_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}), \quad \alpha_{-1}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi(z, \lambda) - 1}{z} dz = 2 \ln \varphi(1, \lambda). \quad (86)$$

При переходе от первой формы уравнения в (83) ко второй использовано выражение для $\alpha_0(\lambda)$.

На рис.7 представлены графики моментов от минус первого до десятого в зависимости от величины λ . Кривая минус-первого момента пересекает все остальные кривые.

Моменты являются коэффициентами в разложении при $z > 1$:

$$\frac{1}{\varphi(z, \lambda)} = \sqrt{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{z^l} \alpha_{l+1}(\lambda). \quad (87)$$

По этому разложению можно вычислять функцию при достаточно больших z .

4.3. *Поведение при слабом рассеянии.* Если рассеяние отсутствует, то есть $\lambda = 0$, то тождественно $\varphi(z, 0) = 1$. При малых $\lambda \ll 1$ должно выполняться разложение

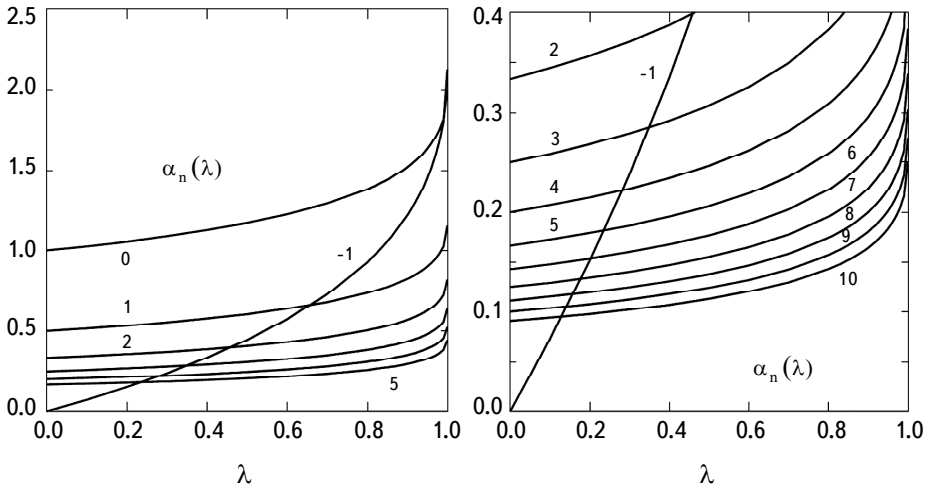


Рис.7. Моменты $\alpha_n(\lambda)$ как функции λ (номера, кроме 3 и 4, указаны около кривых).

$$\varphi(z, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(z) \lambda^l = 1 + a_1(z) \lambda + a_2(z) \lambda^2 + \dots, a_0(z) = 1. \quad (88)$$

Подставив это разложение в нелинейное уравнение, получим рекуррентное соотношение

$$a_l(z) = \delta_{l,0} + \frac{z}{2} \sum_{l'=0}^{l-1} a_{l'}(z) \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} a_{l-l'}(z'). \quad (89)$$

Легко находятся значения всех коэффициентов на бесконечности:

$$a_l(\infty) = \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}, \quad a_1(\infty) = \frac{1}{2}, \quad a_2(\infty) = \frac{3}{8}, \quad a_3(\infty) = \frac{5}{16}, \quad a_4(\infty) = \frac{35}{128}, \dots \quad (90)$$

Введем для удобства обозначения для интеграла, его значения в нуле и предела:

$$\bar{a}_l(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} a_{l-1}(z'), \quad \bar{a}_l(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \frac{a_{l-1}(z)}{z}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \bar{a}_l(z) = \tilde{a}_l = \frac{1}{2} \int_0^1 dz a_{l-1}(z). \quad (91)$$

Только первый коэффициент находится явно:

$$a_1(z) = \frac{z}{2} \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} = \frac{z}{2} \ln \frac{1+z}{z}. \quad (92)$$

Все остальные приходится находить численно, хотя при выделенных значениях z удастся найти точные значения, как и на бесконечности.

Второй коэффициент, как и все последующие, содержит интеграл от предыдущего коэффициента:

$$a_2(z) = \frac{z}{2} \left[\int_0^1 a_1(z') \frac{dz'}{z+z'} + a_1(z) \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} \right] = z [\bar{a}_2(z) + z \bar{a}_1^2(z)]. \quad (93)$$

Однако при $z=1$ оба коэффициента вычисляются: $a_1(1) = \ln 2/2$,

$$a_2(1) = \bar{a}_2(1) + \frac{\ln^2 2}{4} = \frac{\ln^2 2}{8} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi^2}{48}. \quad (94)$$

По рекуррентной формуле

$$a_3(z) = \frac{z}{2} \left[a_0 \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} a_2(z') + a_1(z) \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} a_1(z') + a_2(z) \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} \right]. \quad (95)$$

Последние два интеграла уже известны, остается вычислить один интеграл:

$$a_3(z) = z \bar{a}_3(z) + a_1(z) [2a_2(z) - a_1^2(z)] = z \bar{a}_3(z) + z^2 \bar{a}_1(z) [2\bar{a}_2(z) + z \bar{a}_1^2(z)]. \quad (96)$$

Аналогично третьему

$$a_4(z) = \frac{z}{2} \int_0^1 \frac{dz'}{z+z'} a_3(z') + 2a_1(z) a_3(z) - 3a_1^2(z) a_2(z) + a_2^2(z) + a_1^4(z). \quad (97)$$

Как видно из выражений для коэффициентов, внеинтегральные суммы состоят из слагаемых, у которых суммы индексов множителей равны номерам коэффициентов.

Графики зависимости первых четырех коэффициентов приведены на рис.8.

Коэффициенты при $z=1$ можно использовать для легкого определения значений $\varphi(1/k(\lambda))$ при небольших λ , так как при таких λ значения $k(\lambda)$

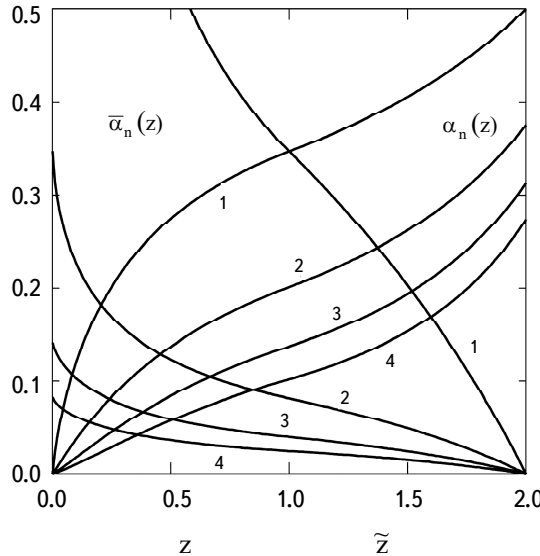


Рис.8. Коэффициенты $\alpha_n(z)$ (растут с ростом z) и интегралы $\bar{a}_n(z)$ (убывают) при $n=1, 2, 3, 4$ (указаны около кривых). При $z > 1$, как и на рис.6, сделана замена $z = 1/(2 - \tilde{z})$.

очень близки к единице. С точностью до четвертой степени λ

$$\Phi_{apr}\left(\frac{1}{k(\lambda)}\right) = 1 + \lambda a_1(1) + \lambda^2 a_2(1) + \lambda^3 a_3(1) + \lambda^4 a_4(1). \quad (98)$$

При $\lambda < 0.3$ формула дает не меньше четырех верных знаков, при $\lambda < 0.5$ - не меньше трех.

4.4. *Другие функции.* Приведем выражение для резольвентной функции:

$$\Phi(\tau) = C_0 e^{-k(\tau+\tau_e)} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\exp(-\tau/\eta)}{\left[1 - \frac{\lambda}{2} \eta \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}\right]^2 + \left[\frac{\lambda\pi}{2} \eta\right]^2} \frac{d\eta}{\varphi(\eta, \lambda) \eta}, \quad C_0 = \sqrt{2k^2 \frac{1-k^2}{\lambda-1+k^2}}. \quad (99)$$

Эти функции исследовались многими авторами (см., например, [12,16]). Они заслуживают нового подробного рассмотрения в отдельной статье.

Здесь отметим, что очень просто получить асимптотики для чистого рассеяния ($\lambda \rightarrow 1$, $\tau \gg 1$ подразумевается). Достаточно в формулы части I подставить приведенные выше разложения. Например, по формуле (I.78)

$$\Psi(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} e^{-k(\tau+\tau_e)} \sim \sqrt{3}(\tau + \tau_e(1)) + k \sqrt{3} \left[\frac{3}{10} - \frac{(\tau + \tau_e(1))^2}{2} \right]. \quad (100)$$

Через $\tau_e(1) = 0.710446$ можно записать асимптотическую формулу для функции $\varphi(z, \lambda)$ при больших z и близких к единице λ :

$$\frac{1}{\varphi(z, \lambda)} \sim \frac{1+kz}{z\sqrt{3}} \left[1 - \frac{\tau_e(1)}{z} + \frac{2}{15} k^2 - \left(\frac{3}{10} + \frac{\tau_e^2(1)}{2z^2} \right) \right]. \quad (101)$$

Формула объединяет (7.26) и (7.27) из [12,13].

5. Изотропное монохроматическое рассеяние в оптически толстом слое.

5.1. *Асимптотики чисел рассеяния.* Все общие формулы части I справедливы, достаточно использовать приведенные выше разложения. Приведем для примера асимптотики чисел рассеяния фотонов, рожденных на границах слоя. Они выражаются согласно формулам (I.48) через логарифмические производные от вероятностей выхода фотонов до вероятности их выживания при каждом рассеянии.

Отметим особенности обозначений. Вероятность выхода $P(\tau, \tau_0)$ предполагает выход фотона через границу $\tau = 0$, так что полная вероятность (через обе границы) равна сумме $\mathcal{P}(\tau, \tau_0) = P(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0)$. Число же рассеяний $N(\tau, \tau_0)$ - через обе границы. Различие границ для числа рассеяний отражается дополнительными значками $\pm$: $N_+(\tau, \tau_0)$ - выход фотона, рожденного на глубине τ , через верхнюю границу, а $N_-(\tau, \tau_0)$ - через нижнюю. Очевидны

соотношения $P(\tau, \tau_0) = P(\tau_0 - \tau, \tau_0)$, $N_+(\tau, \tau_0) = N_-(\tau_0 - \tau, \tau_0)$.

Найдем производные по λ от асимптотик (I.70) и (I.71):

$$P(0, \tau_0) \sim 1 - \sqrt{1 - \lambda} \operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e), \quad P(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (102)$$

Сначала для нижней границы

$$\frac{\partial P(\tau_0, \tau_0)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \frac{1}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} - \sqrt{1 - \lambda} \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\operatorname{sh}^2 k(\tau_0 + 2\tau_e)} \mathcal{D}(\lambda, \tau_0), \quad (103)$$

где (отрицательный множитель (I.91))

$$\mathcal{D}(\lambda, \tau_0) = \frac{dk}{d\lambda}(\tau_0 + 2\tau_e) + 2k \frac{d\tau_e}{d\lambda}. \quad (104)$$

Затем для верхней

$$\frac{\partial P(0, \tau_0)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e) + \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\operatorname{sh}^2 k(\tau_0 + 2\tau_e)} \mathcal{D}(\lambda, \tau_0). \quad (105)$$

По этим производным находим асимптотики средних чисел рассеяния:

$$N(\tau_0, \tau_0) = \frac{\lambda}{P(\tau_0, \tau_0)} \frac{\partial P(\tau_0, \tau_0)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \lambda} - \operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e) \mathcal{D}(\lambda, \tau_0), \quad (106)$$

$$N(0, \tau_0) = \frac{\lambda}{P(0, \tau_0)} \frac{\partial P(0, \tau_0)}{\partial \lambda}. \quad (107)$$

Последнее выражение не упрощается при подстановке асимптотики вероятности.

5.2. Разложения по степеням k и асимптотики при чистом рассеянии. Получим разложения величин по степеням k , используя, в частности,

$$\tau_e \sim \tau_e(1) + \tau'_e(1)(\lambda - 1) \sim \tau_e(1) - \tau'_e(1) \frac{k^2}{3}. \quad (108)$$

Затем разложение

$$\mathcal{D}(\lambda, \tau_0) \sim -\frac{3}{2} \frac{1}{k} \left[[\tau_0 + 2\tau_e(1)] \left(1 - \frac{8}{15} k^2 \right) - 2\tau'_e(1) k^2 \right]. \quad (109)$$

С их помощью получаем разложения вероятностей выхода с границ и полную вероятность:

$$P(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{1}{\sqrt{3}[\tau_0 + 2\tau_e(1)]} \left[1 + \frac{k^2}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2}{2} + 2 \frac{\tau'_e(1)}{\tau_0 + 2\tau_e(1)} \right) \right], \quad (110)$$

$$P(0, \tau_0) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{3}[\tau_0 + 2\tau_e(1)]} \left[1 + \frac{k^2}{3} \left([\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2 + \frac{2}{5} + 2 \frac{\tau'_e(1)}{\tau_0 + 2\tau_e(1)} \right) \right], \quad (111)$$

$$\mathcal{P}(\tau_0) \sim 1 - \frac{k^2}{2\sqrt{3}} [\tau_0 + 2\tau_e(1)]. \quad (112)$$

Асимптотики верны, если $k\tau_0 \ll 1$.

Дифференцирование асимптотик по λ выполняется очень просто, так что при чистом рассеянии

$$\frac{dP(\tau_0, \tau_0)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{6} [\tau_0 + 2\tau_e(1)] \left(1 - \frac{4}{5} \frac{1}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2} - \frac{4\tau'_e(1)}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^3} \right), \quad (113)$$

$$\frac{dP(0, \tau_0)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{3} [\tau_0 + 2\tau_e(1)] \left(1 + \frac{2}{5} \frac{1}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2} + \frac{2\tau'_e(1)}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^3} \right), \quad (114)$$

$$\frac{d\mathcal{P}(\tau_0)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} [\tau_0 + 2\tau_e(1)]. \quad (115)$$

Для средних чисел рассеяния получается

$$N_+(\tau_0, \tau_0) = \frac{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2}{2} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{1}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2} - \frac{4\tau'_e(1)}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^3} \right), \quad (116)$$

$$N_+(0, \tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}[\tau_0 + 2\tau_e(1)]}} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{1}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2} + \frac{2\tau'_e(1)}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^3} \right), \quad (117)$$

$$N(0, \tau_0) = P(0, \tau_0)N_+(0, \tau_0) + P(\tau_0, \tau_0)N_+(\tau_0, \tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\tau_0 + 2\tau_e(1)]. \quad (118)$$

Все поправки к приведенным асимптотикам имеют порядок $e^{-\tau_0}$.

Получению асимптотик при переходе к чистому рассеянию было посвящено несколько статей разных авторов (см., например, [17,18]). Здесь разделены фотоны, выходящие через определенные границы, и систематически использована экстраполированная длина.

6. Заключение. В статье получены точные выражения для всех значимых характеристик изотропного рассеяния в одномерной среде, полубесконечной и конечной, включая резольвенты основных интегральных уравнений. При этом известные ранее формулы представлены в новой форме: они содержат экстраполированную длину. Это позволило очень просто перейти к пределу чистого рассеяния. Приведены точные аналитические выражения для вероятностей выхода и средних чисел рассеяния фотонов в конечной среде, выходящих через одну или другую границы. Продемонстрировано, что асимптотические формулы для характеристик полей излучения в трехмерной среде по виду совпадают с точными формулами для тех же характеристик одномерной

среды. Формулы применяются для случая степенных источников излучения.

Для изотропного рассеяния в трехмерных средах приведены основные функции и константы, входящие в характеристики излучения: ядро интегрального уравнения, характеристическое число k , экстраполированная длина τ_e , разложения k при близких к единице и малых λ , производные по λ от этих же констант. Затем приводятся графики функции Амбарцумяна $\varphi(z, \lambda)$ и ее моментов, а также первых четырех коэффициентов разложения этой функции по степеням λ при $\lambda \ll 1$.

Для рассеяния в оптически толстом плоском слое получены асимптотики средних чисел рассеяния фотонов, возникших на одной из границ и вышедших из слоя через ту же или другую границы, при чистом рассеянии и близком к нему.

Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: dinagirner@gmail.com

THE ESCAPE PROBABILITY AND MEAN NUMBERS OF SCATTERINGS OF PHOTONS. II. MONOCHROMATIC ISOTROPIC SCATTERING IN ONE-DIMENSIONAL MEDIUM AND PLANE MEDIA

D.I.NAGIRNER, A.V.DEMENTYEV, E.V.VOLKOV

As examples of application of formulas of the part I the scattering in one-dimensional medium is considered for which all characteristics of radiation field are expressed in elementary functions. Isotropic monochromatic photon scattering in three-dimensional media is considered as well. Some features of the Ambartsumian function are studied and the asymptotics of the mean photon scattering numbers in optically thick layer are derived.

Keywords: *radiation transfer: mean numbers of scatterings of photons*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д.И.Нагирнер, Ю.В.Миланова, А.В.Дементьев и др.*, *Астрофизика*, **65**, 587, 2022, (*Astrophysics*, **65**, 560, 2022).
2. *В.В.Соболев*, "Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет", М., ГИТТЛ, 1956.
3. *В.А.Амбарцумян*, *ДАН Арм. ССР*, **8**, 101, 1948.
4. *В.В.Соболев*, *Астрофизика*, **2**, 135, 1966, (*Astrophysics*, **2**, 69, 1966).
5. *М.Л.Тер-Микаелян*, *ДАН Арм. ССР*, **8**, 149, 1948.
6. *С.Чандрасекар*, "Перенос лучистой энергии", М., ИЛ, 1953, ("Radiative transfer", Oxford: Clarendon Press, 1950).
7. *В.А.Амбарцумян*, *ЖЭТФ*, **12**, 323, 1943.
8. *В.А.Амбарцумян*, *Астрон. ж.*, **19**, 30, 1942.
9. *В.А.Амбарцумян*, "Научные труды. Том I", Ереван, АН Армении, 1960.
10. *О.Д.Хвольсон*, *Ж. Русск. физ.-хим. об-ва*, **22**, 1, 1890.
11. *T.Viik*, *Astrophys. Space Sci.*, **127**, 285, 1986.
12. *В.В.Иванов*, "Перенос излучения и спектры небесных тел", М., Наука, 1969.
13. *V.V.Ivanov*, "Transfer of Radiation in Spectral Lines", NBS, 1973.
14. *K.Kawabata*, *Astrophys. Space Sci.*, **363**, 17, 2018.
15. *В.А.Фок*, *Мат. сборник*, **14**, 3, 1944.
16. *D.I.Nagirner*, *Astrophys. Space Phys. Rev.*, **13**, 1, 2006.
17. *В.В.Соболев*, *Астрон. ж.*, **41**, 97, 1964.
18. *В.В.Соболев*, "Рассеяние света в атмосферах планет", М., Наука, 1972. ("Light Scattring in Planetary Atmospheres", Oxford: Pergamon Press; 1975).