

Г. В. Бадалян

## Обобщение хаусдорфовского метода суммирования рядов

Настоящая работа в основном посвящена обобщениям хаусдорфской теории моментов и хаусдорфовского или  $H$ — метода суммирования рядов (см. [1], [2], [3] и др.).

Работа состоит из трех параграфов.

Первый из них имеет подготовительный характер, где рассматриваются вопросы, связанные с известным обобщением многочленов С. Н. Бернштейна, во втором излагается обобщение хаусдорфской теории моментов нецелых степеней аргумента, а в последнем приводится обобщение  $H$ — метода суммирования последовательностей (рядов).

### § 1. Некоторые свойства функции $\lambda_{m,n}(x)$

Рассмотрим последовательность чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu}} = \infty \quad (1.1)$$

и функции

$$\lambda_{m,n}(x) = \frac{\prod_{\nu=n+1}^m \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=n}^m (\zeta + \gamma_{\nu})}, \quad (1.2)$$

где  $n=0, 1, \dots, m$ ,  $x \in [0, 1]$ , а простой контур  $C$ , здесь и впредь в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя.

**Теорема 1.** Для всякого  $x \in [0, 1]$  справедливо

$$\begin{aligned} \text{а) } \lambda_{m,n}(x) &> 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, m, \\ \text{б) } \lambda_{m,n}(0) &= 0, \quad n=1, 2, \dots, m, \quad \lambda_{m,0}(0) = 1, \quad \lambda_{m,n}(1) = 0, \\ &\quad n=0, 1, 2, \dots, m-1, \quad \lambda_{m,m}(1) = 1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{в) } \sum_{n=0}^m \lambda_{m,n}(x) = 1.$$

Для доказательства а) заметим, что для

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots \text{ и } x \in [0, 1],$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \alpha_v)} \geq 0,$$

см. [4], стр. 8.

С другой стороны,

$$\lambda_{m,n}(x) = x^{\gamma_n} \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^{m-n} (\zeta + \alpha_v)} \geq 0,$$

где  $\alpha_v = \gamma_{n+v} - \gamma_n$ .

Справедливость утверждения б) следует из интегрального представления  $\lambda_{m,n}(x)$ .

Для доказательства в) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \lambda_{m,n}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^m \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{\prod_{v=n}^m (\zeta + \gamma_v)} x^{-\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( 1 - \prod_{v=0}^m \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v} \right) \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = 1, \end{aligned}$$

так как  $\prod_{v=0}^m \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v} = 0$ .

Теорема 2. Для всякого  $x \in (0, 1]$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m,n}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Действительно, имеем

$$\lambda_{m,n}(x) < C_n x^{-x} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + x}, \quad (1.5)$$

где  $x > 0$  — произвольное число, а  $C_n$  зависит только от  $n$ .

Справедлива также следующая модификация теоремы 2. Обозначим

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{1}{\gamma_n} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + \frac{1}{2}}$$

и  $\varepsilon_m = \max \varepsilon_{m,n}$ , когда  $n = 0, 1, 2, \dots, m$ . (1.6)

Заметим, что при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .

Теорема 2'. Для всяких  $x \in (0, 1)$  и  $n = 0, 1, 2, \dots, m$  справедливо неравенство

$$\lambda_{m,n}(x) \leq \frac{\varepsilon_m^{1/x}}{\sqrt{x(1-x)}}. \quad (1.7)$$

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\lambda_{m,n}(x) = (-1)^{m-n} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{x^{\zeta} d\zeta}{\prod_{v=n}^m (\zeta - \gamma'_v)},$$

где  $\gamma'_v = \gamma_v + \frac{1}{2}$ .

В качестве контура  $C$  возьмем окружность

$$\zeta = 2R \cos \varphi e^{i\varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad R > 2\gamma'_m.$$

Отметим на окружности  $C$  точку  $\zeta_0 = 2R \cos \varphi_0 e^{i\varphi_0}$ ,

где  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2R\epsilon_m}$ , тогда

$$\lambda_{m,n}(x) \leq 2x^{-\frac{1}{2}} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma'_v} (J_{m,n}^*(x) + J_{m,n}^{**}(x)), \quad (1.8)$$

где

$$J_{m,n}^*(x) = \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R d\varphi}{\prod_{v=n}^m \sqrt{4R(R - \gamma'_v) \cos^2 \varphi + \gamma_v'^2}},$$

$$J_{m,n}^{**}(x) = \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_0^{\varphi_0} \frac{\exp\left(-2R \cos^2 \varphi \ln \frac{1}{x}\right) R d\varphi}{\prod_{v=n}^m \sqrt{4R(R - \gamma'_v) \cos^2 \varphi + \gamma_v'^2}}.$$

Имеем

$$J_{m,n}^*(x) < \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{\prod_{v=n}^m \gamma'_v} \frac{R}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right),$$

или

$$J_{m,n}^*(x) < \frac{1}{\gamma_n} - \frac{1}{4\pi \epsilon_m^2}. \quad (1.9)$$

Оценим теперь  $J_{m,n}^{**}(x)$ .

Заметим, что

$$\min_{0 < \varphi < \varphi_0} [4R(R - \gamma'_v) \cos^2 \varphi + \gamma_v'^2] = 4R(R - \gamma'_v) \cos^2 \varphi_0 + \gamma_v'^2,$$



а

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_m^{-1/2}}{2R},$$

$$\cos \varphi_0 = \sin \frac{\varepsilon_m^{-1/2}}{2R} > \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon_m^{-1/2}}{2R} = \frac{\varepsilon_m^{-1/2}}{\pi R}.$$

Это значит, что

$$J_{m,n}^{**}(x) < \frac{R \prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{2\pi \prod_{v=n}^m \sqrt{(R-\gamma_v') \varepsilon_m^{-1/2} + \gamma_v'^2}} \int_0^{\varphi_0} \exp\left(-2R \ln \frac{1}{x} \cos^2 \varphi\right) d\varphi <$$

$$< \frac{R \varepsilon_m^{1/2}}{2\pi \sqrt{R-\gamma_n'}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{4}{\pi} R \ln \frac{1}{x} \varphi^2\right) d\varphi <$$

$$< \frac{\varepsilon_m^{1/2}}{4 \sqrt{\pi \ln \frac{1}{x}}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R(R-\gamma_n')}} < \frac{\varepsilon_m^{1/2}}{4 \sqrt{\ln \frac{1}{x}}}.$$

но так как

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln(1-(1-x)) > 1-x,$$

то

$$J_{m,n}^{**}(x) < \frac{\varepsilon_m^{1/2}}{4 \sqrt{1-x}}. \quad (1.10)$$

Из (1.8), в силу оценок (1.9) и (1.10), получаем

$$\lambda_{m,n}(x) < \frac{1}{2\gamma_n} \frac{\varepsilon_m^{-1/2}}{\sqrt{x}} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v'} + \frac{\varepsilon_m^{1/2}}{2 \sqrt{x(1-x)}},$$

или

$$\lambda_{m,n}(x) = \frac{\varepsilon_m^{1/2}}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Определение 1. Обозначим через  $\Phi$  оператор, если он всякому квазимногочлену

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^{\gamma_n}$$

сопоставляет число

$$\Phi[P_m(x)] = \sum_{n=0}^m a_n \mu_n. \quad (1.11)$$

Обозначим

$$\lambda_{m,n} = \prod_{v=n+1}^m \gamma_v \sum_{j=n}^m \frac{\mu_j}{\prod_{v=j}^m (\gamma_v - \gamma_j)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (1.12)$$



Замечание 1. Имеет место равенство

$$\Phi[\lambda_{m,n}(x)] = \lambda_{m,n}.$$

Определение 2. Последовательность  $\{\mu_n\}$  удовлетворяет условию (A), если выполняются неравенства

$$\sum_{n=0}^m |\lambda_{m,n}| < L, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

где  $L$  — постоянная, не зависящая от  $m$ .

А. О. Гельфонд в работе [5] рассматривает обобщение классических многочленов С. Н. Бернштейна\*, которые в наших терминах определяются так:

Определение 3. Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[0, 1]$ . Квазимногочленом Бернштейна для этой функции назовем функцию

$$B_m^*(f, x) = \sum_{n=0}^m f(\tau_{m,n}^*) \lambda_{m,n}(x), \quad (1.14)$$

где

$$x \in [0, 1], \quad \tau_{m,n}^* = \prod_{v=n+1}^m \left(1 - \frac{\gamma_v}{\gamma_n}\right)^{\frac{1}{v}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Там же доказано:

Если  $f(x) \in C([0, 1])$ , то при  $m \rightarrow \infty$ ,  $B_m^*(f, x)$  стремится к  $f(x)$  равномерно на всем  $[0, 1]$ .

Для удобства дальнейшего изложения мы внесем в определение функций  $B_m^*(f, x)$  небольшое изменение, которое, хотя не меняет существа положения, но, как нам кажется, облегчает выкладки, связанные с ними.

Определение 3'. Квазимногочленом С. Н. Бернштейна функции  $f(x)$ , определенной на  $[0, 1]$ , назовем функцию

$$B_m(f, x) = \sum_{n=0}^m f(\tau_{m,n}) \lambda_{m,n}(x), \quad (1.14')$$

где

$$x \in [0, 1], \quad \tau_{m,n} = \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1}.$$

Покажем, что теорема А. О. Гельфонда остается в силе и для  $\{B_m(f, x)\}^{**}$ .

\* См. также [6].

\*\* Отметим, что А. О. Гельфондом доказана теорема более сильная, чем приведенная выше, но и она остается в силе для  $B_m[f, x]$ ; более того, теорему при этом можно доказать сравнительно проще, не выходя при этом из схемы доказательства классической теоремы С. Н. Бернштейна.

Для этого в силу теоремы А. О. Гельфонда нам достаточно показать, что при  $f(x) \in C([0, 1])$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |B_m(f, x) - B_m^*(f, x)| = 0$$

равномерно для всех  $x \in [0, 1]$ .

Последнее утверждение в свою очередь будет доказано, если убедимся в том, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\tau_{m,n} - \tau_{m,n}^*| = 0$$

равномерно для  $n = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Обозначим

$$\theta_{m,n} = \tau_{m,n}^* - \tau_{m,n} = \prod_{s=n+1}^m \left(1 - \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma_s}} - \prod_{s=n+1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1}$$

и заметим, что при  $n = 1, 2, \dots, m-1$  справедливо тождество

$$\begin{aligned} \theta_{m,n} &= \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \theta_{m,n+1} + \prod_{s=n+2}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1} \left[ \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} + 1} \right], \\ \prod_{s=n+1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1} &= 1. \end{aligned}$$

Повторяя ход соответствующих рассуждений работы [5] (см. стр. 115), заключаем, что

$$\max_{1 \leq n \leq m-1} |\theta_{m,n}| \leq \frac{C}{\gamma_{n+1}} \prod_{s=n+2}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1},$$

где  $C > 0$  — абсолютная постоянная; знаем также, что

$$|\theta_{m,0}| = \prod_{s=1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s + 1},$$

а

$$|\theta_{m,m}| = \left| \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} - \frac{\gamma_m}{\gamma_m + 1} \right| < \frac{C}{\gamma_m}.$$

Таким образом

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}) = 0$$

равномерно для всех  $n = 0, 1, 2, \dots, m$ .

**Теорема 3.** Если последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  удовлетворяет условию (А), тогда

$$\rho_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

Лемма. Для всякого  $x$  справедливо равенство

$$\sum_{k=n}^m \frac{\prod_{v=k+1}^m (\gamma_v - \gamma_n)}{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v} \lambda_{m,k}(x) = x^{\gamma_n}. \quad (1.16)$$

Для доказательства рассмотрим сумму

$$S_n(\zeta) = \frac{1}{\zeta + \gamma_m} + \frac{\gamma_m - \gamma_n}{(\zeta + \gamma_m)(\zeta + \gamma_{m-1})} + \dots + \frac{\prod_{v=n+1}^m (\gamma_v - \gamma_n)}{\prod_{v=n+1}^m (\zeta + \gamma_v)}.$$

Для краткости обозначим  $\gamma_v - \gamma_n = \alpha_v$ ,  $\zeta + \gamma_n = z$ , тогда

$$S_n(\zeta) = \sum_{k=n}^m \frac{\prod_{v=k+1}^m \alpha_v}{\prod_{v=k}^m (z + \alpha_v)} = \left(1 - \prod_{v=n}^m \frac{\alpha_v}{z + \alpha_v}\right) \frac{1}{z} = \frac{1}{z},$$

так как  $\alpha_n = 0$ .

Таким образом

$$S_n(\zeta) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\zeta + \gamma_n},$$

значит

$$\begin{aligned} x^{\gamma_n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C S_n(\zeta) x^{-\zeta} d\zeta = \\ &= \sum_{k=n}^m \frac{\prod_{v=k+1}^m (\gamma_v - \gamma_n)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=k}^m (\zeta + \gamma_v)} = \sum_{k=n}^m \prod_{v=k+1}^m \frac{\gamma_v - \gamma_n}{\gamma_v} \lambda_{m,k}(x). \end{aligned}$$

Этим лемма доказана.

Для доказательства теоремы применим оператор  $\Phi$  к равенству (1.16).

Будем иметь

$$\mu_n = \Phi[x^{\gamma_n}] = \sum_{k=n}^m \prod_{v=k+1}^m \frac{\gamma_v - \gamma_n}{\gamma_v} \lambda_{m,k}. \quad (1.17)$$

С другой стороны,

$$B_m(x^{\gamma_n}) = \sum_{k=n}^m \gamma_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^m \prod_{v=k+1}^m \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1}\right)^{\gamma_n} \lambda_{m,k}(x). \quad (1.18)$$



Применяя теперь оператор  $\Phi$  к (1.18), будем иметь

$$\Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \sum_{k=0}^m \left( \frac{\gamma_n}{\gamma_n + 1} \right)^{\gamma_n} \lambda_{m,k}. \quad (1.19)$$

Из (1.17) и (1.19) получаем

$$\begin{aligned} \mu_n - \Phi[B_m(x^{\gamma_n})] &= \sum_{k=0}^m \left[ \prod_{v=k+1}^m \frac{\gamma_v - \gamma_n}{\gamma_v} - \prod_{v=k+1}^m \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \right)^{\gamma_n} \right] \lambda_{m,k} - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{v=k+1}^m \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \right)^{\gamma_n} \lambda_{m,k}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Заметим, что для всякого  $n$  при достаточно большом  $m$

$$\theta_{m,k} = \left| \prod_{v=k+1}^m \left( 1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_v} \right) - \prod_{v=k+1}^m \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \right)^{\gamma_n} \right| \quad (1.21)$$

может быть сделанно меньше любого заранее заданного числа  $\varepsilon > 0$ .

Взяв  $m$  достаточно большим, в силу условия (A) будем иметь также

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{v=k+1}^m \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \right)^{\gamma_n} \lambda_{m,k} \right| < \varepsilon. \quad (1.22)$$

В силу (1.21) и (1.22) из (1.20) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15')$$

В частности, при  $n = 0$  имеем

$$\mu_0 = \Phi[B(1)] = \sum_{k=0}^m \lambda_{m,k}. \quad (1.15'')$$

## § 2. К теории моментов

Определение 4. Последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  называется моментной последовательностью, если существует функция с ограниченной вариацией  $\alpha(t)$ , такая, что

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

где здесь и впредь последовательность  $\{\gamma_n\}$  удовлетворяет условию (1.1).

Теорема 4. Для того, чтобы последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  была моментной последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (A).

Необходимость, в силу теоремы 1, очевидна.

Достаточность, здесь и впредь в аналогичных случаях, доказывается приспособлением известного метода к нашему случаю, когда вместо обычных моментов рассматриваются обобщенные моменты (2.1), см. [7].

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_m(0+) &= \lambda_{m,0}, \quad \alpha_m(0) = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_m(\tau_{m,k}+) - \alpha_m(\tau_{m,k}-) &= \lambda_{m,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ \alpha_m(1-) &= \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{m,k}, \\ \alpha_m(1) &= \sum_{k=0}^m \lambda_{m,k} = \mu_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и рассмотрим ступенчатую функцию  $\alpha_m(t)$  с вышеуказанными скачками.

Нетрудно заметить, что

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha_m(t) = \sum_{k=0}^m \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k}.$$

С другой стороны, имеем

$$\Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \sum_{k=0}^m \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k},$$

значит

$$\Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha_m(t).$$

Используя известный принцип выбора Хелли, из  $\{\alpha_m(t)\}$  можем подобрать сходящуюся подпоследовательность  $\{\alpha_{m_j}(t)\}$  с предельной функцией  $\alpha(t)$ , имеющей ограниченную вариацию.

Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha(t),$$

но

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi[B_m(x^{\gamma_n})] = \mu_n.$$

Этим теорема доказана.

Обозначим оператор

$$L_{m,t}(\mu) = \frac{\lambda_{m,[mt]}}{\int_0^1 \lambda_{m,[mt]}(x) dx}, \quad (2.3)$$

где  $t \in [0, 1]$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $[mt]$  — целая часть числа  $mt$ .

В частности, при  $[mt] = k$  имеем

$$L_{m,\frac{k}{m}}(\mu) = \frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} = \lambda_{m,k} \frac{\prod_{v=k}^m (\gamma_v + 1)}{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v}. \quad (2.3')$$

**Теорема 5.** Если последовательность  $\{\mu_n\}$  удовлетворяет условию (A), тогда существует

$$\mu_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m$$

и

$$\mu_n - \mu_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt. \quad (2.4)$$

Действительно, заметим, что существует

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt \quad (2.4')$$

и представим его в виде интегральной суммы Римана.

С этой целью разобьем  $[0, 1]$  на  $m$  сегментов  $\Delta_{m,0}, \Delta_{m,1}, \dots, \Delta_{m,m-1}$  с точками разбиения

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1$$

так, чтобы имели

$$\partial \mathcal{L}(\Delta_{m,k}) = \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx = \frac{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v}{\prod_{v=k}^m (\gamma_v + 1)}.$$

Нетрудно заметить, что такое разбиение возможно, так как

$$a) \quad \sum_{k=0}^{m-1} \partial \mathcal{L}(\Delta_{m,k}) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx = 1, \quad (2.5)$$

$$б) \quad \partial \mathcal{L}(\Delta_{m,k}) = \frac{1}{\gamma_k + 1} \prod_{v=k+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \rightarrow 0, \text{ когда } m \rightarrow \infty$$

равномерно для всех  $k$ .



Заметим также, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \partial \mathcal{L}(\Delta_{m,k}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{v=k}^m \gamma_v}{\prod_{v=k}^m (\gamma_v + 1)} = \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \left( 1 + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 \gamma_2} + \dots + \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (\gamma_v + 1)}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \right) = \\ &= \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \left[ \left( \prod_{v=1}^n \frac{\gamma_v + 1}{\gamma_v} - 1 \right) + 1 \right] = \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} = \tau_{m,n}. \end{aligned}$$

Это значит, что  $x_k = \tau_{m,k}$ .

Возвращаясь к (2.4'), будем иметь

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_{m,k}^{\gamma_n} L_{m,\xi_{m,k}}(\mu) \partial \mathcal{L}(\Delta_{m,k}) + \varepsilon_{m,n}, \quad (2.6)$$

где  $\tau_{m,k} \leq \xi_{m,k} \leq \tau_{m,k+1}$ ,  $\varepsilon_{m,n} \rightarrow 0$ , когда  $m \rightarrow \infty$ .

Подставляя значение  $L_{m,\xi_{m,k}}(\mu)$  из (2.3) в (2.6), будем иметь

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} + \varepsilon_{m,n}. \quad (2.6')$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \xi_{m,k}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n} &\leq \xi_{m,k+1}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n} = \\ &= \prod_{v=k+2}^m \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \right)^{\gamma_n} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_{k+1} + 1} \right)^{\gamma_n} \right] < \frac{C(\gamma_n)}{\gamma_{k+1} + 1} \prod_{v=k+2}^m \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \right)^{\gamma_n}. \end{aligned}$$

Это значит, что, каким бы не было целое число  $n > 0$ , при  $m \rightarrow \infty$

$$\xi_{m,k}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n} \rightarrow 0, \text{ равномерно для всех } k = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.7)$$

Представляя (2.6') в виде

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} + \sum_{k=0}^{m-1} (\xi_{m,k}^{\gamma_n} - \tau_{m,k}^{\gamma_n}) \lambda_{m,k} + \varepsilon_{m,n}$$

и учитывая (2.7), в силу условия (A) будем иметь

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} + \varepsilon_{m,n}^*,$$

где  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{m,n}^* = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

С другой стороны, согласно теореме 3 имеем

$$\begin{aligned} \mu_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi [B_m(x^{\gamma_n})] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \lambda_{m,m} + \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{m,k}^{\gamma_n} \lambda_{m,k} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\lambda_{m,m} = \int_0^1 x^{\gamma_m} d\alpha(x) = \mu_m.$$

Путем интегрирования по частям получаем

$$\mu_m = [\alpha(1) - \alpha(1-)] + \gamma_m \int_0^1 t^{\gamma_m-1} [\alpha(1-) - \alpha(t)] dt.$$

Разбивая

$$\int_0^1 t^{\gamma_m-1} [\alpha(1-) - \alpha(t)] dt$$

на два интеграла по  $[0, 1-\varepsilon]$  и  $[1-\varepsilon, 1]$ , проводя соответствующие оценки, будем иметь

$$\begin{aligned} |\mu_m - \alpha(1) + \alpha(1-)| &\leq \max_{t \in [0, 1-\varepsilon]} |\alpha(1-) - \alpha(t)| (1-\varepsilon)^{\gamma_m} + \\ &+ \gamma_m \max_{t \in [1-\varepsilon, 1]} |\alpha(1-) - \alpha(t)| \int_{1-\varepsilon}^1 t^{\gamma_m-1} dt, \end{aligned}$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\mu_m - \alpha(1) + \alpha(1-)| = 0.$$

Это значит, что существует  $\mu_\infty$  и

$$\mu_\infty = \alpha(1) - \alpha(1-). \quad (2.9)$$

Учитывая (2.9), из (2.6') и (2.7) получаем

$$\mu_n - \mu_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{\gamma_n} L_{m,t}(\mu) dt.$$

Этим теорема доказана.

Введем теперь обозначение

$$\Delta^k \mu_n = \sum_{j=0}^k \frac{\prod_{v=1}^k \gamma_{n+v}}{\prod_{\substack{v=0 \\ v \neq j}}^k (\gamma_{n+v} - \gamma_{n+j})} \mu_{n+j}. \quad (2.10)$$

Заметим, что

$$\Delta^k \mu_n = \Phi [\lambda_{k+n, n}(x)] = \lambda_{k+n, n}, \quad (2.11)$$

а при  $\gamma_v = \gamma$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\Delta^k \mu_n = \binom{n+k}{n} \Delta^k \mu_n. \quad (2.12)$$

Определение 5. Последовательность  $\{\mu_n\}$  называется абсолютно монотонной, если

$$\Delta^k \mu_n > 0, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Теорема 6. Для абсолютной монотонности последовательности  $\{\mu_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая и ограниченная на  $[0, 1]$  функция  $\alpha(t)$ , удовлетворяющая условиям

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n} d\alpha(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Достаточность. Пусть функция  $\alpha(t)$  удовлетворяет условиям теоремы, тогда

$$0 \leq \int_0^1 \lambda_{k+n, n}(t) d\alpha(t) = \sum_{j=0}^k \frac{\prod_{v=1}^k \gamma_{n+v}}{\prod_{\substack{v=0 \\ v \neq j}}^k (\gamma_{n+v} - \gamma_{n+j})} \mu_{n+j} = \Delta^k \mu_n.$$

Необходимость. Пусть  $\Delta^k \mu_n > 0$ ,  $(n, k = 0, 1, 2, \dots)$ , тогда

$$\lambda_{m, n} \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^m \lambda_{m, n} < L, \quad (2.15)$$

где  $L > 0$  — число, не зависящее от  $m$ .

Действительно,

$$\Delta^{m-n} \mu_n = \Phi(\lambda_{m, n}(x)) = \lambda_{m, n},$$

следовательно,

$$\sum_{n=0}^m \Delta^{m-n} \mu_n = \sum_{n=0}^m \lambda_{m, n}.$$



С другой стороны, известно, что

$$\sum_{n=0}^m \lambda_{m,n}(x) = 1,$$

значит

$$\sum_{n=0}^m \lambda_{m,n} = \Phi\left(\sum_{n=0}^m \lambda_{m,n}(x)\right) = \Phi(1) = \mu_0. \quad (2.16)$$

Этим (2.15) доказана.

Повторяя конструкцию, приведенную в теореме 4, докажем существование возрастающей и ограниченной на  $[0, 1]$  функции  $\alpha(t)$ , удовлетворяющей условиям

$$\mu_n = \int_0^1 t^n d\alpha(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Этим теорема доказана.

Из теорем 4 и 6 следует:

*Теорема 4'. Для того, чтобы последовательность  $\{\mu_n\}$  удовлетворяла условию (A), необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух абсолютно монотонных последовательностей.*

Ниже мы приводим обобщение теоремы А. Ф. Соловьева на случай нецелых моментов (см. [8], стр. 167).

Как известно,  $f(x) \in L_M$  на  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b M(f(t)) dt < \infty,$$

где  $M(u)$ ,  $(-\infty < u < \infty)$  непрерывная выпуклая вниз четная функция, удовлетворяющая условиям:

$$M(0) = 0, \quad \frac{M(u)}{u} \rightarrow \infty \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Известно, что для всякой функции  $M(u)$ , удовлетворяющей вышеприведенным условиям, справедливо неравенство Иенсена

$$M\left(\frac{\int_a^b p(t) u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt}\right) \leq \frac{\int_a^b p(t) M(u(t)) dt}{\int_a^b p(t) dt}.$$

**Определение 6.** Последовательность  $\{\mu_n\}$  при  $\{\gamma_n\}$  удовлетворяет условию (B), если существует постоянная  $L$  такая, что

$$\sum_{k=0}^m M \left( \frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(t) dt} \right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(t) dt \leq L. \quad (2.17)$$

Теорема 7. Условие (B) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \varphi(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

где  $\varphi(t) \in L_n$  на  $[0, 1]$ .

Необходимость. Пусть  $\varphi(t) \in L_n$ , тогда

$$\begin{aligned} M \left( \frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) &= M \left( \frac{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) \varphi(x) dx}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) \leq \\ &\leq \frac{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) M(\varphi(x)) dx}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m M \left( \frac{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) \varphi(x) dx}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^m \int_0^1 M(\varphi(x)) \lambda_{m,k}(x) dx, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{k=0}^m M \left( \frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx \leq \int_0^1 M(\varphi(x)) dx < \infty.$$

Достаточность. Пусть

$$\sum_{k=0}^m M \left( \frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx < L.$$

По формуле Юнга имеем

$$\frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \leq N(1) + M \left( \frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right), \quad (2.19)$$

где  $N(u)$  функция, дополнительная к функции  $M(u)$ .

Из (2.19) следует, что

$$\begin{aligned} |\lambda_{m,k}| &\leq N(1) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx + \\ &+ M \left( \frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.19')$$

Просуммируя (2.19') по  $k=0, 1, 2, \dots, m$ , получаем

$$\sum_{k=0}^m |\lambda_{m,k}| \leq N(1) + \sum_{k=0}^m M \left( \frac{|\lambda_{m,k}|}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx,$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^m |\lambda_{m,k}| \leq N(1) + L. \quad (2.20)$$

Отсюда, согласно теореме 4, следует существование функции  $\varphi(t)$ , имеющей на  $[0, 1]$  ограниченную вариацию, такой, что

$$\int_0^1 x^n d\varphi(x) = \mu_n, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

Покажем, что  $\varphi(x)$  на  $[0, 1]$  удовлетворяет условию

$$\varphi(x) = c + \int_0^x g(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где  $g(t) \in L_n$  на  $[0, 1]$ .

Как известно (см. [9]), для этого необходимо и достаточно показать, что при всяком разбиении сегмента  $[0, 1]$  точками

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1 \quad (2.21)$$

выполняется неравенство



$$\sum_{i=0}^{n-1} M \left( \frac{\Delta \varphi(x_i)}{\Delta x_i} \right) \Delta x_i \leq L,$$

где  $L$  — постоянная, не зависящая от способа разбиения сегмента  $[0, 1]$  и  $n$ .

С этой целью рассмотрим на  $[0, 1]$ , как в теореме 4, ступенчатую функцию  $\varphi_m(x)$

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(0+) = \lambda_{m,0},$$

$$\varphi_m(\tau_{m,k}+) - \varphi_m(\tau_{m,k}-) = \lambda_{m,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\varphi_m(1-) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{m,k}, \quad \varphi_m(1) = \sum_{k=0}^m \lambda_{m,k}.$$

Как известно, из последовательности  $\{\varphi_m(x)\}$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке  $[0, 1]$ ; не нарушая общности, будем считать, что последовательность  $\{\varphi_m(x)\}$  сама сходится к  $\varphi(x)$ .

Пусть теперь в сегменте  $[0, 1]$  произведено произвольное разбиение (2.21) и пусть

$$\tau_{m,p} < x_i \leq \tau_{m,p+1},$$

$$\tau_{m,q} < x_{i+1} \leq \tau_{m,q+1},$$

или

$$\sum_{k=p+2}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx < \Delta x_i < \sum_{k=p+1}^{q+1} \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx,$$

где, при заданных  $x_i$  и  $x_{i+1}$ ,  $p$  и  $q$  зависят от  $m$  и  $i$ .

Переходя к пределу, когда  $m \rightarrow \infty$ , получаем

$$\Delta x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx. \quad (2.22)$$

Если заметить еще, что

$$\Delta \varphi(x_i) = \lim_{m \rightarrow \infty} [\varphi_m(x_{i+1}) - \varphi_m(x_i)] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=p+1}^q \lambda_{m,k}, \quad (2.23)$$

то будем иметь

$$\frac{\Delta \varphi(x_i)}{\Delta x_i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=p+1}^q \lambda_{m,k}}{\sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}. \quad (2.24)$$

С другой стороны, применение неравенства Иенсена дает

$$M\left(\frac{\sum_{k=p+1}^q \lambda_{m,k}}{\sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) = M\left(\frac{\sum_{k=p+1}^q \frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx} \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}{\sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \leq \\ \leq \frac{\sum_{k=p+1}^q M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}{\sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx},$$

или

$$M\left(\frac{\sum_{k=p+1}^q \lambda_{m,k}}{\sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx \leq \\ \leq \sum_{k=p+1}^q M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx. \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} M\left(\frac{\sum_{k=p+1}^q \lambda_{m,k}}{\sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \sum_{k=p+1}^q \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=p+1}^q M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx. \quad (2.25')$$

Переходя к пределу, когда  $m \rightarrow \infty$ , в силу (2.22), (2.23) и непрерывности  $M(u)$  получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} M\left(\frac{\Delta \varphi(x_i)}{\Delta x_i}\right) \Delta x_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=p+1}^m M\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx}\right) \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) dx \leq L.$$

Значит

$$\sum_{i=0}^{n-1} M \left( \frac{\Delta \varphi(x_i)}{\Delta x_i} \right) \Delta x_i \leq L.$$

Таким образом доказано, что

$$\varphi(x) = c + \int_0^x g(t) dx,$$

где  $g(x) \in L_m$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; следовательно,

$$\mu_n = \int_0^1 x^{\gamma_n} d\varphi(x) = \int_0^1 x^{\gamma_n} g(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Этим теорема доказана.

В случае, когда  $\gamma_n = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , теорема 7 совпадает с теоремой А. Ф. Соловьева (см. [8]).

Если считать, что  $M(u) = |u|^p$ ,  $p > 1$ , то, как следствие теоремы 7, получается следующее обобщение теоремы Хаусдорфа.

Теорема 7'. Для того, чтобы

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n} \varphi(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\varphi(t) \in L^p([0, 1])$ ,  $p > 1$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^m |\lambda_{m,k}|^p \left\{ \int_0^1 \lambda_{m,k}(t) dt \right\}^{1-p} < L,$$

где  $L > 0$  — постоянная, не зависящая от  $m$ .

Определение 7. Последовательность  $\{\mu_n\}$  удовлетворяет условию (C), если существует число  $L > 0$  такое, что

$$|\lambda_{m,k}| \left( \int_0^1 \lambda_{m,k}(t) dt \right)^{-1} < L. \quad (2.26)$$

Теорема 8. Условие (C) необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n} \varphi(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\varphi(t)$  — ограниченная на сегменте  $[0, 1]$  функция



Необходимость условия следует из равенства

$$\lambda_{m,k} = \int_0^1 \lambda_{m,k}(x) \varphi(x) dx.$$

Достаточность.

В силу (2.26)

$$|L_{m,t}(\mu)| \leq L.$$

Из последовательности  $L_{m,t}(\mu)$  можно выделить подпоследовательность  $L_{m_j,t}(\mu)$  и указать такую ограниченную функцию  $\varphi(t)$ , чтобы для всякой функции  $\psi(t) \in L([0, 1])$  имели

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 L_{m_j,t}(\mu) \psi(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) \psi(t) dt.$$

С другой стороны, при  $\psi(t) = t^{\gamma_n}$

$$\mu_n - \mu_\infty = \int_0^1 t^{\gamma_n} \varphi(t) dt,$$

но из

$$\mu_m = \lambda_{m,m} = \int_0^1 t^{\gamma_m} \varphi(t) dt$$

следует, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = \mu_\infty = 0$ , значит

$$\mu_n = \int_0^1 t^{\gamma_n} \varphi(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

### § 3. Обобщенные хаусдорфовские средние

Определение 8. Назовем преобразование вида

$$t_m = \sum_{n=0}^m \lambda_{m,n} S_n \quad (3.1)$$

обобщенным хаусдорфовским преобразованием, короче  $H$  — преобразованием.

Преобразование, согласно обозначению (2.10), можно записать так

$$t_m = \sum_{n=0}^m \Delta^{m-n} \mu_n S_n. \quad (3.1')$$

Соответствующий метод суммирования последовательностей будем называть обобщенным хаусдорфским методом суммирования и будем обозначать через  $H$  или  $H(\mu, \gamma)$ .

Теорема 9. Для регулярности метода  $H(\mu, \gamma)$  необходимо и достаточно, чтобы существовала функция  $\alpha(t)$  с ограниченной вариацией на  $[0, 1]^*$ , удовлетворяющая условиям

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} dx(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

$$\alpha(0+) = \alpha(0) = 0, \quad \alpha(1) = 1.$$

Для доказательства заметим, что из общей теории линейных преобразований следует, что для регулярности метода  $H(\mu, \gamma)$  необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=0}^m |\lambda_{m,n}| < L, \text{ где } L - \text{абсолютная постоянная,} \\ \text{б)} \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m,n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \text{в)} \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \lambda_{m,n} = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для выполнения условия а), согласно теореме 4, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция  $\alpha(t)$  с ограниченной вариацией на  $[0, 1]$ , такая, что

$$\int_0^1 t^{\gamma_n} dx(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для выполнения условия б), при  $n = 0$  имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \lambda_{m,0}(x) dx(x) = 0, \quad (3.4)$$

но, с другой стороны

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \lambda_{m,0}(x) dx(x) = \alpha(0+) \quad (3.4')$$

в чем легко убедиться интегрированием по частям и разбиением сегмента  $[0, 1]$  на две части  $[0, \delta]$ ,  $[\delta, 1]$ .

\* Не нарушая общности можем предполагать, что  $\alpha(0) = 0$ .

Из (3.4) и (3.4') следует, что

$$\alpha(0+) = 0.$$

Далее заметим, что

$$\sum_{n=0}^m \lambda_{m,n} = \mu_0,$$

значит для выполнения условия в) нужно, чтобы  $\mu_0 = 1$ , т. е.

$$\mu_0 = \int_0^1 d\alpha(t) = 1.$$

Последнее равенство, при условии  $\alpha(0) = 0$ , равносильно тому, что  $\alpha(1) = 1$ .

Таким образом

$$\alpha(0) = \alpha(0+) = 0, \quad \alpha(1) = 1. \quad (3.5)$$

Нетрудно, наконец, заметить, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m,n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Действительно, согласно теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_{m,n}| &\leq \int_0^{\delta} |\lambda_{m,n}(x)| |d\alpha(x)| + \int_{\delta}^1 |\lambda_{m,n}(x)| |d\alpha(x)| \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} |d\alpha(x)| + \max_{x \in [\delta, 1]} |\lambda_{m,n}(x)| \int_{\delta}^1 |d\alpha(x)| \leq \\ &\leq \delta \max_{x \in [0, \delta]} |\alpha(t)| + C_n \delta^{-\alpha} \prod_{\nu=n+1}^m \frac{\gamma_{\nu}}{\gamma_{\nu} + \alpha}, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

При фиксированном  $n$  и достаточно большом  $m$  будем иметь

$$|\lambda_{m,n}| < \varepsilon(m), \quad \text{где } \varepsilon(m) \rightarrow 0, \quad \text{когда } m \rightarrow \infty.$$

**Определение 9.** Моментную последовательность  $\{\mu_n\}$  назовем регулярной моментной последовательностью при заданной последовательности  $\{\gamma_{\nu}\}$ , если выполняются условия (3.3).

В силу определения 9, теорема 9 сформулируется еще так:

**Теорема 9'.** Для регулярности метода  $H(\mu, \gamma)$  необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{\mu_n\}$  (при заданной последовательности  $\{\gamma_{\nu}\}$ ) была регулярной моментной последовательностью.



Обозначим через  $H_{1,2}S = H_2 H_1 S$  результат последовательного применения к последовательности  $\{S_n\}$  двух регулярных преобразований  $H_1$  и  $H_2$ , где

$$H_1 = H(p, \gamma) \text{ и } H_2 = H(p', \gamma).$$

Теорема 10. Преобразование  $H_{1,2}S = H_2 H_1 S$  также является обобщенным хаусдорфовским преобразованием и

$$H_{1,2} = H(p \cdot p', \gamma). \quad (3.6)$$

Для доказательства теоремы составим

$$t_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k = \sum_{k=0}^n S_k \int_0^1 \lambda_{n,k}(x) dx(x), \quad (3.7)$$

$$t_m^* = \sum_{n=0}^m \lambda_{m,n}^* t_n = \sum_{n=0}^m S_n \int_0^1 \lambda_{m,n}(u) d\beta(u), \quad (3.8)$$

где

$$\lambda_{m,n}^* = \prod_{\nu=n+1}^m \gamma_\nu \sum_{j=n}^m \frac{p'_j}{\prod_{\substack{\nu=n \\ \nu \neq j}}^m (\gamma_j - \gamma_\nu)}$$

и рассмотрим

$$t_m^* = \sum_{n=0}^m \left( \sum_{k=0}^n S_k \int_0^1 \lambda_{n,k}(x) dx(x) \right) \int_0^1 \lambda_{m,n}(u) d\beta(u). \quad (3.9)$$

Из (3.9) после изменения порядка суммирования получаем

$$t_m^* = \sum_{k=0}^m S_k \sum_{n=k}^m \int_0^1 \lambda_{n,k}(x) dx(x) \int_0^1 \lambda_{m,n}(u) d\beta(u). \quad (3.9')$$

Упростим теперь сумму

$$\sigma_{m,k} = \sum_{n=k}^m \int_0^1 \lambda_{n,k}(x) dx(x) \int_0^1 \lambda_{m,n}(u) d\beta(u). \quad (3.10)$$

Имеем

$$J_m(\zeta, z) = \sum_{n=k}^m \frac{\prod_{\nu=k+1}^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=k}^n (\zeta + \gamma_\nu)} \cdot \frac{\prod_{\nu=n+1}^m \gamma_\nu}{\prod_{\nu=n}^m (z + \gamma_\nu)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\nu=k+1}^m \gamma_{\nu} \sum_{n=k}^m \frac{1}{\prod_{\nu=k}^n (\zeta + \gamma_{\nu}) \prod_{\nu=n}^m (z + \gamma_{\nu})} = \\
&= \frac{\prod_{\nu=k+1}^m \gamma_{\nu}}{\prod_{\nu=k}^m (z + \gamma_{\nu})} \sum_{n=k}^m \frac{\prod_{\nu=k}^{n-1} (z + \gamma_{\nu})}{\prod_{\nu=k}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \\
&= \frac{\prod_{\nu=k+1}^m \gamma_{\nu}}{\prod_{\nu=k}^m (z + \gamma_{\nu})} \left[ 1 - \prod_{\nu=k}^m \frac{z + \gamma_{\nu}}{\zeta + \gamma_{\nu}} \right] \frac{1}{\zeta - z}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{n=k}^m \lambda_{n,k}(x) \lambda_{m,n}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} x^{-z} d\zeta \int_{C_1} u^{-z} J_{m,k}(\zeta, z) dz;$$

значит в силу (3.11)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=k}^m \lambda_{n,k}(x) \lambda_{m,n}(u) = \\
&= \frac{\prod_{\nu=k+1}^m \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{u^{-z} dz}{\prod_{\nu=k}^m (z + \gamma_{\nu})} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left[ 1 - \prod_{\nu=k}^m \frac{z + \gamma_{\nu}}{\zeta + \gamma_{\nu}} \right] \frac{x^{-z} d\zeta}{\zeta - z}.
\end{aligned}$$

Используя свободу выбора контура  $C$  ( $C$  — охватывает окрестности точек  $-\gamma_k, -\gamma_{k+1}, \dots, -\gamma_m$ ), возьмем его таким, чтобы  $z \in C_1$  оказался во внешней к контуру  $C$  области, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^{-z} d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Это значит, что

$$\sum_{n=k}^m \lambda_{n,k}(x) \lambda_{m,n}(u) = - \frac{\prod_{\nu=k+1}^m \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_1} u^{-z} dz \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^{-z} d\zeta}{(\zeta - z) \prod_{\nu=k}^m (\zeta + \gamma_{\nu})}. \quad (3.12)$$

Из (3.9) и (3.12) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{m,k} &= - \int_0^1 d\beta(u) \frac{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_1} u^{-z} dz \int_0^1 dx(x) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-z} d\zeta}{(\zeta-z) \prod_{v=k}^m (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= - \int_0^1 d\beta(u) \frac{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_1} u^{-z} dz \int_0^1 \sum_{j=k}^m \frac{x^{\gamma_j}}{(-\gamma_j - z) \prod_{\substack{v=k \\ v \neq j}}^m (-\gamma_j + \gamma_v)} dx(x) = \\ &= \int_0^1 d\beta(u) \frac{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_1} u^{-z} \sum_{j=k}^m \frac{\mu_j}{(z + \gamma_j) \prod_{\substack{v=k \\ v \neq j}}^m (-\gamma_j + \gamma_v)} dz. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.10) и (3.13) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{m,k} &= \int_0^1 \prod_{v=k+1}^m \gamma_v \sum_{j=k}^m \frac{\mu_j u^{\gamma_j}}{\prod_{\substack{v=k \\ v \neq j}}^m (-\gamma_j + \gamma_v)} d\beta(u) = \\ &= \prod_{v=k+1}^m \gamma_v \sum_{j=k}^m \frac{\mu_j}{\prod_{\substack{v=k \\ v \neq j}}^m (-\gamma_j + \gamma_v)} \int_0^1 u^{\gamma_j} d\beta(u) = \\ &= \prod_{v=k+1}^m \gamma_v \sum_{j=k}^m \frac{\mu_j \mu'_j}{\prod_{\substack{v=k \\ v \neq j}}^m (-\gamma_j + \gamma_v)}. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\lambda_{m,k}^{**} = \prod_{v=k+1}^m \gamma_v \sum_{j=k}^m \frac{\mu_j \mu'_j}{\prod_{\substack{v=k \\ v \neq j}}^m (-\gamma_j + \gamma_v)}, \quad (3.14)$$

тогда (3.9') переписывается так

$$t_m^* = \sum_{k=0}^m \lambda_{m,k}^{**} S_k. \quad (3.9'')$$

Этим теорема доказана.



Из теоремы 10 следует

Теорема 10'. Повторное применение преобразований  $H_1 = H(\mu, \gamma)$ ,  $H_2 = H(\mu', \gamma)$  есть  $H$  преобразование и справедливо равенство

$$H_{1,2}S = H_{2,1}S. \quad (3.15)$$

Обозначим теперь

$$\tilde{\lambda}_{n,k} = \prod_{\nu=k+1}^n \gamma_\nu \sum_{j=k}^n \frac{\mu_j^{-1}}{\prod_{\substack{\nu=k \\ \nu \neq j}}^n (\gamma_\nu - \gamma_j)}, \quad (3.16)$$

а преобразование

$$\tilde{t}_n = \sum_{k=0}^n \tilde{\lambda}_{n,k} S_k$$

через  $\tilde{H}$ .

Теорема 11. Последовательное применение преобразований  $\tilde{H}H = H\tilde{H}$  есть тождественное преобразование, т. е.

$$\tilde{t}_m = \sum_{n=0}^m \tilde{\lambda}_{m,n} t_n = \sum_{n=0}^m \tilde{\lambda}_{m,n} \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k = S_m. \quad (3.17)$$

Для доказательства теоремы, согласно (3.9''), имеем

$$t_m^* = \sum_{k=0}^m \lambda_{m,k} S_k,$$

где

$$\lambda_{m,k} = \prod_{\nu=k+1}^m \gamma_\nu \sum_{j=k}^m \frac{1}{\prod_{\substack{\nu=k \\ \nu \neq j}}^m (\gamma_\nu - \gamma_j)}.$$

Нам остается заметить, что

$$\lambda_{m,k} = \begin{cases} 0, & \text{когда } 0 \leq k \leq m-1, \\ 1, & \text{когда } k = m. \end{cases}$$

Действительно, нетрудно заметить, что

$$\lambda_{m,k} = \frac{\prod_{\nu=k+1}^m \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{\zeta}^m \frac{d\zeta}{\prod_{\nu=k}^m (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Но последний интеграл равен нулю для всех  $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ , а

$$i_{m,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z + \gamma_m} = 1.$$

Это значит, что

$$\bar{t}_m = \sum_{k=0}^m i_{m,k} S_k = S_m. \quad (3.17)$$

Доказанная теорема показывает, что  $\bar{H} = H^{-1}$ , следовательно, ее можно сформулировать еще так

Теорема 11'. Справедливо равенство

$$HH^{-1}S = H^{-1}HS = S.$$

Последняя теорема в силу теоремы 9 показывает, что известная теорема о сравнении мощностей двух хаусдорфовских методов суммирования (см. [10], стр. 324) переносится и на случай обобщенных методов суммирования, а именно:

Теорема 12. Пусть  $H = H(\mu, \gamma)$ ,  $H' = H(\mu', \gamma)$  два регулярных обобщенных хаусдорфовских метода, для которых  $\mu_n \neq 0$ ,  $\mu'_n \neq 0$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , тогда:

а) для того чтобы  $H_1 \supset H$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\left\{ \frac{\mu'_n}{\mu_n} \right\}$  была регулярной моментной последовательностью;

б) для равносильности методов  $H$  и  $H_1$  необходимо и достаточно, чтобы  $\left\{ \frac{\mu'_n}{\mu_n} \right\}$  и  $\left\{ \frac{\mu_n}{\mu'_n} \right\}$  были регулярными моментными последовательностями.

В частности, для того чтобы метод  $H$  был равносильен тождественному, необходимо и достаточно, чтобы  $\{\mu_n\}$  и  $\left\{ \frac{1}{\mu_n} \right\}$  были регулярными моментными последовательностями.

Доказательство следует из

$$H_2 S = H_1 H H^{-1} S = H_1 H^{-1} H S = H_1 H^{-1} (H S). \quad (3.18)$$

Если обозначить

$$H_1(z) = \int_0^1 t^z d\alpha(t), \quad H_2(z) = \int_0^1 t^z d\beta(t), \quad (3.19)$$

где  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  удовлетворяют условиям теоремы 9, то последняя теорема может быть сформулирована так:

Теорема 12'. Пусть  $H_1 = H(\mu, \gamma)$  и  $H_2(\mu', \gamma)$  определены по (3.19), тогда:

а) для того чтобы  $H_2 \supset H_1$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали функции  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ ,  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,  $\delta(t)$ , где  $H_1(\gamma_n) = \rho_n$ ,  $H_2(\gamma_n) = \rho'_n$ , а  $\delta(t)$  на  $[0, 1]$  имеет ограниченную вариацию,  $\delta(0) = \delta(0+) = 0$ ,  $\delta(1) = 1$ ,  $V_n^b \delta(1) = 1$ , и

$$\frac{H_2(z)}{H_1(z)} = \int_0^1 t^z d\delta(t); \quad (3.20)$$

б) для равносильности методов  $H_1$  и  $H_2$  необходимо и достаточно, чтобы кроме вышеуказанных функций существовала еще функция  $\delta_1(t)$ , обладающая всеми свойствами функции  $\delta(t)$ , такая, что

$$\frac{H_1(z)}{H_2(z)} = \int_0^1 t^z d\delta(t), \quad (3.20')$$

$$\frac{H_2(z)}{H_1(z)} = \int_0^1 t^z d\delta_1(t). \quad (3.21)$$

Последняя теорема остается в силе (в соответствующей формулировке) и тогда, когда конечное или даже бесконечное множество (ненарушающее единственность функции  $\delta(t)$ ) элементов последовательности  $\{\rho_n\}$  равно нулю.

Это утверждение следует из теоремы Фукса (см. [3], стр. 64—76), если там обычные моменты заменить моментами (3.2) и заметить, что нигде в теореме по существу не использована целочисленность степеней моментов, а также справедливость утверждения:

$$\text{если } H \subset H' \text{ и } \rho_n = 0, \text{ то и } \rho'_n = 0.$$

Ниже мы приводим доказательство последнего утверждения. Имеем

$$t_m = \int_0^1 \sum_{k=0}^m S_k \lambda_{m,k}(x) dx(x); \quad (3.22)$$

Допустим теперь, что

$$S_k = \begin{cases} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_n}, & m = n+1, n+2, \dots \\ 0, & 0 \leq k \leq n \end{cases} \quad (3.23)$$

и рассмотрим



$$J_m(\zeta) = \sum_{k=n}^m \frac{\prod_{v=k+1}^m \gamma_v}{\prod_{v=k}^m (\zeta + \gamma_v - \gamma_m)} S_k, \quad \prod_{v=n+1}^n \gamma_v = 1,$$

или

$$J_m(\zeta) = \prod_{v=n}^m \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v - \gamma_n} \left( \frac{S_n}{\gamma_n} + \frac{\zeta + \gamma_{n+1} - \gamma_n}{\gamma_n \gamma_{n+1}} S_{n+1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\prod_{v=n+1}^{m-2} (\zeta + \gamma_v - \gamma_n)}{\prod_{v=n}^{m-1} \gamma_v} S_{m-1} + \frac{\prod_{v=n+1}^{m-1} (\zeta + \gamma_v - \gamma_n)}{\prod_{v=n}^m \gamma_v} S_m \right).$$

В силу (3.23) получаем

$$J_m(\zeta) = \prod_{v=n}^m \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v - \gamma_n} \left[ \frac{1}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} + \frac{\zeta + \gamma_{n+1} - \gamma_n}{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(\gamma_{n+2} - \gamma_n)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\prod_{v=n}^{m-1} (\zeta + \gamma_v - \gamma_n)}{\prod_{v=n+1}^m (\gamma_v - \gamma_n)} \right] = \\ = \prod_{v=n}^m \frac{\gamma_v}{\zeta + \gamma_v - \gamma_n} \left[ \prod_{v=n+1}^m \frac{\zeta + \gamma_v - \gamma_n}{\gamma_v - \gamma_n} - 1 \right] \frac{1}{\zeta}. \quad (3.24)$$

Заметим теперь, что

$$t_m = \int_0^1 t^{\gamma_n} dx(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} J_m(\zeta) t^{-\zeta} d\zeta = \\ = \int_0^1 t^{\gamma_n} dx(t) \left( \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} - \right. \\ \left. - \frac{\prod_{v=n+1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=n+1}^m (\zeta + \gamma_v - \gamma_n)} \right) = \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_n} \int_0^1 t^{\gamma_n} dx(t) -$$

$$-\int_0^1 \frac{\prod_{s=n+1}^m \gamma_s}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{t^{-z} d\zeta}{\prod_{s=n}^m (\zeta + \gamma_s)} dz(t) = \prod_{s=n+1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_n} \mu_n - \lambda_{m,n}.$$

Таким образом окончательно получаем

$$t_m = \prod_{s=n+1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_n} \mu_n - \lambda_{m,n}. \quad (3.25)$$

Известно, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m,n} = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \mu_n \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{s=n+1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_n}$$

и равняется бесконечности, если  $\mu_n \neq 0$ .

Если теперь положить  $\mu_n = 0$ , а  $\mu_n^* \neq 0$ , хотя  $H' \supset H$ , то для нашего примера соответственно получим

$$t_m \rightarrow 0, \quad (H)$$

$$t_m^* \rightarrow \mu_n^* \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{s=n+1}^m \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_n} = \infty. \quad (H').$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Покажем теперь, что полученное в [4] обобщение чезаровского метода суммирования входит в рассматриваемый в настоящей работе метод суммирования как частный случай.

**Теорема 14.** *Обобщенный чезаровский метод суммирования является  $H(\gamma, z)$  методом при  $\alpha_n = \gamma_n - \gamma_1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .*

$$z(x) = \gamma_1 \int_0^1 u^{\gamma_1-1} du.$$

Действительно,

$$\lambda_{m,n}^* = -\gamma_1 \frac{\prod_{s=n+1}^m \alpha_s}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x^{-z+\gamma_1} \prod_{s=n+1}^m d\zeta_s}{(\zeta - \gamma_1) \sum_{s=n}^m (\zeta + \gamma_s)} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\gamma_1 \frac{\prod_{v=n+1}^m \alpha_v}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - \gamma_1) \prod_{v=n}^m (\zeta + \alpha_v)} = \\
&= -\gamma_1 \frac{\prod_{v=n+1}^m \alpha_v}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - \gamma_1) \prod_{v=n}^m (\zeta + \alpha_v)} = \gamma_1 \frac{\prod_{v=n+1}^m \alpha_v}{\prod_{v=n}^m (\gamma_1 + \alpha_v)} = \\
&= \frac{\gamma_1}{\gamma_n} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} = C_{m,n}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
S_m^{(1)} &= \frac{\sum_{n=1}^m \frac{\prod_{v=1}^{n-1} \gamma_v}{\prod_{v=2}^n (\gamma_v - \gamma_1)} S_{n-1}}{\prod_{v=2}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}} = \sum_{n=1}^m C_{m,n}^* S_n^* \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{m,n}^* &= \gamma_1 \frac{\prod_{v=n+1}^m (\gamma_v - \gamma_1)}{\prod_{v=n}^m \gamma_v} = \frac{\gamma_1}{\gamma_n} \prod_{v=n+1}^m \frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v}, \quad (3.28) \\
S_n^* &= S_{n-1}.
\end{aligned}$$

Из (3.26) и (3.28) следует, что

$$C_{m,n}^* = C_{m,n} = t_{m,n}^*$$

$$S_m^{(1)} = \sum_{n=1}^m t_{m,n}^* S_n^* = t_m. \quad (3.29)$$

Отметим также, что можно получить аналог известного неравенства, связывающего  $\sum_{n=0}^m |t_n|$  и  $\sum_{n=0}^m |S_n|$  (см. [10], стр. 339-340).

В заключение заметим, что можно освободиться от ограничения

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots$$



допуская равенства некоторых из соседних  $\gamma_k$ , в этом случае очевидно, что  $\lambda_{m,n}$  определится не по (1.12), а так:

пусть

$$\dots < \gamma_k = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_{k_1-1} < \gamma_{k_1} < \dots;$$

обозначим

$$\omega_n(x) = x^{\gamma_k} (\ln x)^{n-k}, \quad n = k, k+1, \dots, k_1-1,$$

тогда прямое вычисление покажет, что

$$\lambda_{m,n}(x) = \sum_{n=0}^m a_{m,n} \omega_n(x),$$

а

$$\mu_n = \sum_{n=0}^m a_{m,n} \mu_n,$$

где

$$\mu_n = \int_0^1 \omega_n(x) d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 16 III 1959

## 2. Գ. Քաղաղյան

### ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՀԱՌԻՍԴՈՐՖՅԱՆ ՄԵՐՈՂԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս աշխատության մեջ հիմնականում շարադրված է շարքերի (հաջորդականությունների) հանրագումարման հատկությունների մեթոդի հետևյալ ընդհանրացումը:

Դիցուք արված են թվերի  $\{\mu_n\}$ ,  $|\gamma_n|$  և  $|S_n|$  հաջորդականությունները, որանդ

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty:$$

Դիտարկվում է հաջորդականությունների հետևյալ ձևափոխությունը (հանրագումարման մեթոդը).

$$t_m = \sum_{n=0}^m \lambda_{m,n} S_n, \quad (H^*)$$

որտեղ

$$\lambda_{m,n} = \prod_{\nu=n+1}^m \gamma_{\nu} \sum_{\lambda=n}^m \frac{\gamma_{\lambda}}{\prod_{\substack{\nu=n \\ \nu \neq \lambda}}^m (\gamma_{\nu} - \gamma_{\lambda})};$$

Մասնավոր դեպքում, երբ  $\gamma_{\nu} = \nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  ( $H^*$ ) ձևափոխությունը համընկնում է Հաուսդորֆյան կամ կարճ ( $H$ ) ձևափոխության հետ:

Աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ ( $H^*$ ) ձևափոխությունը պահպանում է ( $H$ ) ձևափոխության բոլոր հիմնական հատկությունները: Նշենք նաև, որ նա իր մեջ՝ որպես մասնավոր դեպք ընդգրկում է Չեդարյան միջին գումարների մեր կողմից ալ հարցի կապակցությունը ստացված ընդհանրացումը նույնպես:

Աշխատությունը բաղկացած է երեք պարագրաֆներից: Առաջին պարագրաֆն ունի ընդհանուր բնույթ, որանդ դիտարկվում են Ս. Ն. Բերնշտեյնի բազմանդամների ընդհանրացման հետ կապված հարցեր:

Երկրորդ պարագրաֆը նվիրված է մոմենտների Հաուսդորֆյան տեսության ընդհանրացմանը, երբ դիտարկվում են ֆունկցիաների ոչ ամբողջ աստիճանի մոմենտները:

Երրորդ պարագրաֆում շարադրված է հաշորդականությունների հանրագումարելիության Հաուսդորֆյան մեթոդի ընդհանրացումը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Hausdorff F. Summationsmethoden und Momentfolgen I, II. Mathematische Zeitschrift, Vol. 9, 1921.
2. Rogosinski W. W. On Hausdorff's methods of Summability. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 38, 1942.
3. Fuchs W. H. J. A Theorem on Hausdorff's Methods of Summation. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, Vol. 16, Nos. 61-2, 1945.
4. Бабалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XI, № 2, 1958.
5. Гельфонд А. О. К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна. Известия АН СССР, серия математическая, 14, 1950.
6. Widder D. V. Hirschman J. J., Jr. Generalized Bernstein Polynomials. Duke Math. Journ., 16 1949.
7. Widder D. V. The Laplace Transform. Princeton, Princeton University Press, 1946.
8. Соловьев А. Ф. Обобщения одной теоремы Хаусдорфа. УМН, том XIII, вып. 6 (84), 1958.
9. Медведев Ю. Т. Обобщение одной теоремы Ф. Рисса. УМН, VIII, вып. 6 (58), 1953.
10. Харди Г. Расходящиеся ряды. Москва, 1951.



МАТЕМАТИКА

А. Б. Персесян

Разложение по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

В в е д е н и е

В предлагаемой работе исследуется краевая задача типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом второго порядка.

Такая задача в несколько менее общей постановке рассматривалась Норкиным [1], однако им получены лишь асимптотические формулы для собственных функций, вопрос же о разложении по собственным функциям оставался открытым.

В § 1 ставятся взаимно-сопряженные краевые задачи для интегро-дифференциального оператора с запаздывающим аргументом и изучается асимптотика собственных функций и собственных значений.

В § 2 строится функция Грина рассматриваемого интегро-дифференциального оператора.

В § 3 строится биортогональная система собственных и присоединенных функций взаимно-сопряженных краевых задач и уточняются асимптотические формулы.

При определенных ограничениях в § 4 доказываются теоремы о разложении по собственным и присоединенным функциям, равносходимость с обычными рядами Фурье и сходимость в среднем.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность своему учителю академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну за ценные советы и внимание при выполнении настоящей работы.

§ 1. Взаимно-сопряженные краевые задачи.

Асимптотические формулы

1. Рассмотрим на конечном отрезке  $[0, l]$  интегро-дифференциальный оператор с запаздывающим аргументом

$$Ly = -y'' + \sum_{i=1}^m q_i(x) y(x - \Delta_i(x)) + \int_0^x K(x, t) y(t) dt, \quad (1.1)$$



где  $\Delta_i(x) > 0$ ,  $\Delta_i(l) < l$ ,  $\Delta_i'(x) < 0 < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

$q_i(x)$  — действительные функции, причем  $q_i(x) \equiv 0$  при  $x = -\Delta_i(x) < 0$  ( $0 \leq x \leq l$ ), а при  $x = \Delta_i(x) > 0$   $q_i(x)$  непрерывны, ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Ядро  $K(x, t)$  ( $0 \leq t \leq x \leq l$ ) действительно и удовлетворяет условию

$$\int_0^l \int_0^l |K(t_1, t)| dt_1 dt < +\infty. \quad (1.2)$$

Условия, налагаемые на функции  $q_i(x)$  означают, что в точке  $x=0$  нет запаздывания.

Обозначим

$$\varphi_i(x) = x - \Delta_i(x), \quad \varphi_i^{-1}(x) = \psi_i(x) = x + \Delta_i'(x) \quad (1.3)$$

( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Функции  $\varphi_i^{-1}(x)$  существуют в силу условий, налагаемых на функции  $\Delta_i(x)$ , а  $\Delta_i'(x) \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Пусть  $y(x)$  и  $z(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемые на  $[0, l]$  функции. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l z(x) Ly(x) dx &= - \int_0^l z(x) y''(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_0^l q_i(x) z(x) y(x - \Delta_i(x)) dx + \\ &+ \int_0^l z(x) \int_0^x K(x, t) y(t) dt dx = \\ &= [y(x) z'(x) - y'(x) z(x)]_0^l - \int_0^l y(x) z''(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(l)} q_i(\psi_i(x)) y(x) z(\psi_i(x)) \psi_i'(x) dx + \\ &+ \int_0^l y(x) \int_x^l K(t, x) z(t) dt dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Обозначим

$$q_i''(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \psi_i(l) < x \leq l \\ q_i(\psi_i(x)) \psi_i'(x) & \text{при } 0 \leq x < \psi_i(l) \end{cases} \quad (1.5)$$

( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Назовем оператор

$$L^*z = -z''(x) + \sum_{i=1}^m q_i^*(x) z(x + \Delta_i^*(x)) + \\ + \int_x^l K(t, x) z(t) dt, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1^*)$$

сопряженным к  $L$  на  $[0, l]$ .

Так как из (1.4) следует, что для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций  $y(x)$  и  $z(x)$

$$\int_0^l z(x) L y(x) dx = \int_0^l y(x) L^* z(x) dx + [y(x) z'(x) - y'(x) z(x)]_0^l \quad (1.4')$$

то операторы  $L$  и  $L^*$  естественно назвать взаимно-сопряженными. Заметим, что оператор  $L^*$  есть интегро-дифференциальный оператор с опережающим аргументом.

Рассмотрим следующие взаимно-сопряженные краевые задачи

$$(A) \quad \begin{cases} Ly = \lambda y & (1.6) \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 & (1.7) \\ y(l) \cos \beta + y'(l) \sin \beta = 0 & (1.8) \end{cases}$$

$$(A^*) \quad \begin{cases} L^*z = \lambda z & (1.6^*) \\ z(0) \cos \alpha + z'(0) \sin \alpha = 0 & (1.7^*) \\ z(l) \cos \beta + z'(l) \sin \beta = 0 & (1.8^*) \end{cases}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные параметры.

Пусть  $y(x, \lambda)$  и  $z(x, \lambda)$  суть соответственно решения задач Коши

$$Ly = \lambda y; \quad y(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad y'(0, \lambda) = -\cos \alpha \quad (1.9)$$

$$L^*z = \lambda z; \quad z(l, \lambda) = \sin \beta, \quad z'(l, \lambda) = -\cos \beta. \quad (1.9^*)$$

Как известно [2], задачи (1.9) и (1.9<sup>\*</sup>) имеют на  $[0, l]$  единственные решения. Методом вариации произвольных постоянных легко убедиться, что задача Коши (1.9) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x, \lambda) = \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) y(t - \Delta_i(t), \lambda) dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} (x-t) \int_t^l K(t, t_1) y(t_1, \lambda) dt_1 dt \quad (1.10)$$

или, после соответствующей замены переменных, следующему уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = & \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(x)} \sin \sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t)) q_i^*(t) y(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_x^t \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 y(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Аналогично задача (1.9\*) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(x, \lambda) = & \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l - x) + \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} (l - x)}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(x)}^l \sin \sqrt{\lambda} (\varphi_i(t) - x) q_i(t) z(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^l \int_x^t \sin \sqrt{\lambda} (t_1 - x) K(t, t_1) dt_1 z(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.11^*)$$

Легко видеть, что решения интегральных уравнений (1.11) и (1.11\*) являются целыми функциями от  $\lambda$  типа не выше  $l$ . С другой стороны, очевидно, что задачи (1.6)–(1.7) и (1.6\*)–(1.8\*) с точностью до постоянного множителя при неизвестной функции соответственно эквивалентны задачам (1.9) и (1.9\*), а следовательно и уравнениям (1.11) и (1.11\*).

2°. Из условия (1.8) следует, что собственные значения задачи (A) суть нули целой функции

$$\omega(\lambda) = y(l, \lambda) \cos \beta + y_x(l, \lambda) \sin \beta. \quad (1.12)$$

Аналогично собственные значения задачи (A\*) совпадают с нулями целой функции

$$\omega^*(\lambda) = -z(0, \lambda) \cos \alpha - z_x(0, \lambda) \sin \alpha. \quad (1.12^*)$$

Справедлива

Лемма 1.1

$$\omega(\lambda) \equiv \omega^*(\lambda) \quad (1.13)$$

т. е. собственные значения задач (A) и (A\*) совпадают. Кроме того, справедливо соотношение



$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx = \frac{\omega(\lambda) - \omega(\mu)}{\lambda - \mu} \quad (1.14)$$

$(\lambda \neq \mu).$

В частности

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \lambda) dx = \omega'(\lambda). \quad (1.14')$$

Доказательство. Из формулы (1.4') имеем

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx &= \int_0^l z(x, \mu) L y(x, \lambda) dx = \\ &= \omega(\lambda) - \omega^*(\mu) + \int_0^l y(x, \lambda) L^* z(x, \mu) dx = \\ &= \omega(\lambda) - \omega^*(\mu) + \mu \int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из формулы (1.15) при  $\lambda = \mu$  следует формула (1.13), что, в свою очередь, влечет справедливость формул (1.14) и (1.14').

Установим асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задач (A) и (A\*).

Лемма 1.2. При  $0 \leq x \leq l$  и  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ &+ \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} z(x, \lambda) &= \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l-x) + \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} (l-x)}{\sqrt{\lambda}} + \\ &+ \left( \frac{\sin \beta}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \beta}{\lambda} \right) O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| (l-x)}) \end{aligned} \quad (1.16^*)$$

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= -\sin \alpha \sin \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + \sin(\alpha - \beta) \cos \sqrt{\lambda} l - \\ &- \cos \alpha \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}} + \left( \sin \alpha \sin \beta + \right. \\ &\left. + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\lambda} \right) O(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| l}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

причем оценка порядков остаточных членов в формулах (1.16) и (1.16\*) равномерна относительно  $x \in (0, l)$ .

Доказательство. Пусть  $\sqrt{\lambda} = \alpha + i\tau$

$$y(x, \lambda) = e^{|\tau|x} f(x, \lambda). \quad (1.18)$$

Тогда из (1.11) имеем

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) = & e^{-|\tau|x} \left( \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_0^t \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 e^{-|\tau|(x-t)} f(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(x)} \sin \sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t)) q_i^*(t) e^{-|\tau|(x-t)} f(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Пусть

$$\mu(\lambda) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x, \lambda)|.$$

Из (1.19) имеем

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) \leq & |\sin \alpha| + \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right| + \\ & + \frac{\mu(\lambda)}{|\sqrt{\lambda}|} \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^{\varphi_i(1)} |q_i^*(t)| dt + \int_0^1 \int_0^t |K(t_1, t)| dt_1 dt \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Отсюда при достаточно большом  $|\lambda|$  получим

$$\mu(\lambda) \leq M \left\{ |\sin \alpha| + \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right| \right\}. \quad (1.21)$$

Или, согласно (1.18),

$$|y(x, \lambda)| \leq M_1 e^{|\tau|x} \left\{ |\sin \alpha| + \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right| \right\}. \quad (1.22)$$

Подставляя оценку (1.22) снова в формулу (1.11), получим формулу (1.16). Формула (1.16\*) доказывается аналогично.

Продифференцировав формулу (1.11) по  $x$  и учитывая оценку (1.16), получим, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} = & -\sin \alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \\ & + \left( \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \right) O \left( e^{Im \sqrt{\lambda} x} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Наконец, из формул (1.16), (1.23) и (1.12) следует оценка (1.17). Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает существование бесконечного множества собственных значений задач (A) и (A\*) и указывает их асимптотику.

Лемма 1.3. Вне достаточно большого круга  $|\lambda| \leq R$  все собственные значения задач (A) и (A\*) являются простыми корнями функции  $\omega(\lambda)$ , положительны и имеют вид

а) при  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$  или  $\sin \alpha = \sin \beta = 0$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n > n_0) \quad (1.24)$$

б) при  $\sin \alpha = 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$  или  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta = 0$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n > n_0). \quad (1.25)$$

Доказательство. Формулы (1.24) и (1.25) получаются, как обычно, из леммы 1.2 (см., например, [3], гл. 1, § 1).

Применяя тот же метод, что и при доказательстве леммы 1.2, получим, что, например, при  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$

$$\omega'(\lambda) = -\frac{l}{2} \sin \alpha \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} l + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{Jm\sqrt{\lambda} l}\right).$$

Согласно (1.24), при достаточно больших по модулю  $|\lambda_n|$  будем иметь

$$\begin{aligned} \omega'(\lambda_n) &= -\frac{l}{2} \sin \alpha \sin \beta \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} + \\ &+ O\left(\frac{1}{n} e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = -\frac{l}{2} \sin \alpha \sin \beta \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно большом  $|\lambda_n|$   $\omega'(\lambda_n) \neq 0$ , т. е. первое утверждение леммы.

Далее, пусть  $\lambda_n = u_n + iv_n$  есть собственное значение задач (A) и (A\*). Так как функции  $q_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $K(x, t)$  и параметры  $\alpha, \beta$  вещественны, то  $\bar{\lambda}_n = u_n - iv_n$  также будет собственным значением задач (A) и (A\*). Допустим, что  $v_n \neq 0$ . Пусть  $y_n(x)$  есть собственная функция задачи (A), соответствующая собственному значению  $\lambda_n$ , а  $\bar{z}_n(x)$  — собственная функция задачи (A\*), соответствующая собственному значению  $\bar{\lambda}_n$ . Согласно формуле (1.14) имеем

$$\int_0^l y_n(x) \bar{z}_n(x) dx = 0, \quad (n > n_0). \quad (1.26)$$

Учитывая асимптотические формулы (1.16), (1.16\*) и (1.24), (1.25), получим, что из (1.26) следует (для простоты положим  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$ )



$$\int_0^l \left\{ \sin \alpha \cos \left( \frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) x + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sin \beta \cos \left( \frac{\pi n}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (l-x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} dx = 0, \quad (n > n_0).$$

т. е.

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n > n_0),$$

что невозможно для достаточно большого  $n_0 > 0$ . Лемма доказана.

## § 2. Функция Грина оператора с запаздывающим аргументом

В этом параграфе мы построим функцию Грина оператора  $L$ .

1°. Пусть функция  $g(x, t)$  ( $0 \leq t \leq x \leq l$ ) при каждом фиксированном  $t$  есть решение следующей задачи Коши для интегро-дифференциального оператора с запаздывающим аргументом

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} + \int_t^x K(x, t_1) g(t_1, t) dt_1 + \\ + \sum_{i=1}^m q_i(x, t) g(x - \Delta_i(x), t) = 0, \\ g(x, t)|_{x=t} = 0, \quad \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=t} = 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где

$$q_i(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < x < \psi_i(t) \\ q_i(x) & \text{при } \psi_i(t) \leq x < l \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.2)$$

Легко видеть, что, согласно [2], задача Коши (2.1) имеет единственное решение и эквивалентна интегральному уравнению

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x \left[ \int_{t_1}^x K(t_2, t_1) (x - t_2) dt_2 \right] g(t_1, t) dt_1 + \\ + \sum_{i=1}^m \int_t^x q_i(t_1, t) (x - t_1) g(\varphi_i(t_1), t) dt_1. \quad (2.3)$$

В свою очередь, легко проверить, что уравнение (2.3) эквивалентно следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned}
 g(x, t) = (x - t) + \int_t^x \int_{t_1}^x K(t_2, t_1) (x - t_2) dt_2 g(t_1, t) dt_1 + \\
 + \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(t)}^{\varphi_i(x)} q_i^*(t_1) (x - \varphi_i(t_1)) g(t_1, t) dt_1
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$0 \leq t \leq x \leq l.$$

Обозначив ядро интегрального уравнения (2.4) через  $Q(x, t)$ , получим

$$\begin{aligned}
 Q(x, t) = \int_t^x K(t_2, t_1) (x - t_1) dt_1 + \\
 + \sum_{i=1}^m q_i^*(x, t) (x - \varphi_i(t)),
 \end{aligned} \quad (2.4')$$

где функции  $q_i^*(x, t)$  определяются из формул (2.2\*) (см. ниже)

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x Q(x, t_1) g(t_1, t) dt_1. \quad (2.5)$$

Хотя ядро  $Q(x, t)$ , вообще говоря, разрывное, уравнение (2.5) имеет единственное решение, получаемое методом Вольтерра (см., например, [6], § 556).

**Лемма 2.1.** Если функция  $g(x, t)$  есть решение задачи Коши (2.1) при фиксированном  $t$  ( $0 \leq t \leq x \leq l$ ), то при фиксированном  $x$  ( $0 \leq t \leq x \leq l$ ) функция  $g(x, t)$  является решением следующей задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с опережающим аргументом

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t^2} + \int_t^x K(t_1, t) g(x, t_1) dt_1 + \\
 & + \sum_{i=1}^m q_i^*(x, t) g(x, t + \Delta_i^*(t)) = 0 \\
 & 0 \leq t \leq x \leq l \\
 & g(x, t)|_{t=x} = 0, \quad \left. \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right|_{t=x} = -1
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1'')$$

где

$$q_i^*(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_i(x) < t \leq x \\ q_i^*(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \varphi_i(x) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.2'')$$

Доказательство. Пусть  $R(x, t)$  — резольвента уравнения (2.5). Тогда

$$g(x, t) = (x - t) + \int_t^x R(x, u)(u - t) du. \quad (2.6)$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} = R(x, t). \quad (2.7)$$

Известно, что резольвента  $R(x, t)$  удовлетворяет следующему уравнению (см., например, [6], § 559)

$$R(x, t) = Q(x, t) + \int_t^x R(x, t_1) Q(t_1, t) dt. \quad (2.8)$$

Из (2.2\*), (2.4) и (2.8) имеем

$$\begin{aligned} R(x, t) = & \int_t^x K(t_1, t)(x - t_1) dt_1 + \\ & + \sum_{i=1}^m q_i^*(x, t)(x - \psi_i(t)) + \\ & + \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} \left\{ \int_t^{t_1} K(t_2, t)(t_1 - t_2) dt_2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m q_i^*(t_1, t)(t_1 - \psi_i(t)) \right\} dt_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$0 \leq t \leq x \leq l.$

Из (2.6) непосредственно следует, что

$$g(x, t)|_{t=x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} = -1. \quad (2.10)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} dt_1 \int_t^{t_1} K(t_2, t)(t_1 - t_2) dt_2 = \\ & = \int_t^x K(t_2, t) dt_2 \int_{t_2}^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} (t_1 - t_2) dt_1 = \\ & = \int_t^x K(t_2, t) dt_2 \int_{t_2}^x R(x, t_1)(t_1 - t_2) dt_1 = \end{aligned}$$



$$= \int_t^x K(t_2, t) \{g(x, t_2) - (x - t_2)\} dt_2. \quad (2.11)$$

и при  $x > \psi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )

$$\begin{aligned} & \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} q_i^*(t_1, t) (t_1 - \psi_i(t)) dt_1 = \\ &= q_i^*(t) \int_{\psi_i(t)}^x \frac{\partial^2 g(x, t_1)}{\partial t_1^2} (t_1 - \psi_i(t)) dt_1 = \\ &= q_i^*(t) \left\{ \left[ (t_1 - \psi_i(t)) \frac{\partial g(x, t_1)}{\partial t_1} \right]_{t_1 = \psi_i(t)}^x - \right. \\ & \quad \left. - g(x, t_1) \Big|_{t_1 = \psi_i(t)}^x \right\} = \\ &= q_i^*(t) \{ \psi_i(t) - x + g(x, \psi_i(t)) \} \quad (2.11), \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Ясно также, что при  $x < \psi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) интеграл в левой части формулы (2.11) равен нулю. Но условие  $x < \psi_i(t)$  означает, что  $t > \varphi_i(x)$ . Таким образом, учитывая обозначения (2.2\*), имеем

$$\begin{aligned} & \int_t^x \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t_1^2} q_i^*(t_1, t) (t_1 - \psi_i(t)) dt_1 = \\ &= q_i^*(x, t) \{g(x, t + \Delta_i^*(t)) - (x - \psi_i(t))\} \quad (2.12) \\ & \quad (0 \leq t \leq x \leq l; i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Подставив формулы (2.11) и (2.12) в выражение (2.9) и учитывая соотношения (2.7) и (2.10), получим утверждение леммы 2.1.

2°. Приступим к построению функции Грина задачи (A). Пусть  $\lambda = 0$  не является собственным значением задач (A) и (A\*) (этого всегда можно добиться, принимая, если нужно, функцию  $q_1(x) \equiv \text{const}$  и  $\Delta_1(x) \equiv 0$ ). Пусть, далее, функция  $f(x)$  имеет ограниченную вторую производную на  $(0, l)$  и удовлетворяет краевым условиям задач (A) и (A\*)

$$\begin{aligned} f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha &= 0 \\ f(l) \cos \beta + f'(l) \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначим

$$Lf(x) \equiv h(x) \quad (2.14)$$

$$L^*f(x) \equiv h^*(x). \quad (2.14^*)$$

Введем функцию

$$G(x, t) = \begin{cases} c_0 y(x, 0) z(t, 0) & \text{при } 0 < x \leq t \leq l \\ c_0 y(x, 0) z(t, 0) + g(x, t) & \text{при } l > x > t > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

где  $g(x, t)$  — решение задачи Коши (2.1) и

$$c_0 = \frac{-1}{\omega(0)} \quad (2.16)$$

(так как  $\lambda = 0$  — не собственное значение, то  $\omega(0) \neq 0$ ).

**Теорема 2.1.** Функция  $G(x, t)$ , определяемая формулой (2.15), является функцией Грина задачи (A), т. е. из (2.13) — (2.14) следует, что

$$f(x) = \int_0^l G(x, t) h(t) dt. \quad (2.17)$$

В свою очередь, функция  $G^*(x, t) \equiv G(t, x)$  является функцией Грина задачи (A\*), т. е. из (2.13) — (2.14\*) следует, что

$$f^*(x) = \int_0^l G(t, x) h^*(t) dt. \quad (2.17^*)$$

**Доказательство.** Составим функцию

$$f^*(x) = \int_0^l G(x, t) h(t) dt \quad (2.18)$$

и покажем, что она удовлетворяет соотношениям (2.13) — (2.14). Тогда из того, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи (A), будет следовать, что  $f^*(x) \equiv f(x)$  ( $0 < x < l$ ).

Действительно, имеем

$$f^*(x) = c_0 y(x, 0) \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \int_0^x g(x, t) h(t) dt. \quad (2.19)$$

Откуда, учитывая свойства функции  $g(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f^*(x)}{dx^2} &= c_0 y_{xx}(x, 0) \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \\ &+ h(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} h(t) dt = h(x) + \\ &+ c_0 \left[ \sum_{i=1}^m q_i(x) y(z_i(x), 0) + \int_0^x K(x, t) y(t, 0) dt \right] \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m q_i(x) \int_0^{\varphi_i(x)} g(\varphi_i(x), t) h(t) dt + \int_0^x \int_t^x K(x, t_1) g(t_1, t) dt_1 h(t) dt = \\
& = h(x) + \sum_{i=1}^m q_i(x) f^*(x - \Delta_i(x)) + \int_0^x K(x, t) f^*(t) dt \quad (2.20)
\end{aligned}$$

т. е.

$$L f^*(x) = h(x) \quad (2.21)$$

$$0 \leq x \leq l.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
f^*(0) \cos \alpha + \left. \frac{df^*(x)}{dx} \right|_{x=0} \sin \alpha = c_0 \{ y(0, 0) \cos \alpha + \\
+ y'_x(0, 0) \sin \alpha \} \int_0^l h(t) z(t, 0) dt = 0, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(l) \cos \beta + \left. \frac{df^*(x)}{dx} \right|_{x=l} \sin \beta = c_0 \{ y(l, 0) \cos \beta + \\
+ y'_x(l, 0) \sin \beta \} \int_0^l z(t, 0) h(t) dt + \int_0^l \left\{ g(l, t) \cos \beta + \right. \\
\left. + \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} \sin \beta \} h(t) dt. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Но из (2.1), (2.1\*) и (2.3) следует, что функция

$$\Phi(t) \equiv g(l, t) \cos \beta + \left. \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} \sin \beta \quad (2.24)$$

удовлетворяет задаче Коши

$$L^* \Phi(t) = 0 \quad (2.25)$$

$$0 \leq t \leq l,$$

$$\Phi(l) = \sin \beta, \quad \Phi'(l) = -\cos \beta.$$

Значит

$$\Phi(t) \equiv z(t, 0) \quad (2.26)$$

$$0 \leq t \leq l.$$

Из (2.23), (2.26) и (2.16) следует, что

$$f^*(l) \cos \beta + \left. \frac{d}{dx} f^*(x) \right|_{x=l} \sin \beta = 0.$$

Следовательно,  $f^*(x) \equiv f(x)$ , т. е. функция  $G(x, t)$  есть функция Грина задачи (A).



Пользуясь леммой 2.1, совершенно аналогичными выкладками можно показать, что функция  $G^*(x, t) \equiv G(t, x)$  ( $0 \leq t, x \leq l$ ) является функцией Грина задачи  $(A^*)$ . Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что задачи  $(A)$  и  $(A^*)$  соответственно эквивалентны следующим союзным интегральным уравнениям Фредгольма:

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x, t) y(t) dt, \quad (2.27)$$

$$z(x) = \lambda \int_0^l G(t, x) z(t) dt, \quad (2.27^*)$$

где  $G(x, t)$  — функция Грина задачи  $(A)$ .

### § 3. Построение биортогональной системы и предварительное разложение. Уточнение асимптотических формул

1°. Согласно лемме 1.1 справедлива формула

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) dx = \frac{\omega(\lambda) - \omega(\mu)}{\lambda - \mu}. \quad (3.1)$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1 работы [4].

Пусть  $\lambda_n$  есть  $p_n$ -кратный нуль функции  $\omega(\lambda)$ . Поставим в соответствие каждому  $\lambda_n$  две последовательности функций

$$\frac{\partial^j y(x, \lambda_n)}{\partial \lambda_n^j} \quad (j = 0, 1, \dots, p_n - 1), \quad (3.2)$$

$$\text{и} \quad \sum_{k=0}^{p_n-j-1} \frac{b_{p_n-j-k-1}^{(n)}}{k! j!} \frac{\partial^k z(x, \lambda_n)}{\partial \lambda_n^k} \quad (j = 0, 1, \dots, p_n - 1), \quad (3.2^*)$$

где

$$b_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_n)^{p_n}}{\omega(\lambda)} \right\}_{\lambda = \lambda_n} \quad (k = 0, 1, \dots, p_n - 1).$$

Из леммы 1.3 следует, что при достаточно большом  $|\lambda_n|$  имеем две функции

$$y(x, \lambda_n) \quad (3.3)$$

и

$$\frac{z(x, \lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)}.$$

Пусть, далее,  $\{y_k(x)\}$  и  $\{z_k(x)\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) соответственно множества всех функций вида (3.2) и (3.2\*), соответствующих всем нулям функции  $\omega(\lambda)$  и пронумерованных в порядке возрастания модуля  $\lambda_n$ . Согласно теореме 1 работы [4], справедлива.

Лемма 3.1. Система  $\{y_k(x), z_k(x)\}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) биортогональна на  $[0, l]$ , т. е.

$$\int_0^l y_k(x) z_p(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ 1, & k = p. \end{cases} \quad (3.4)$$

Кроме того, если контур  $\Gamma_n$  содержит первые  $n$  нулей функции  $\omega(\lambda)$  (включая их кратность), то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} d\lambda = \\ = \sum_{k=0}^n y_k(x) z_k(t) \quad 0 \leq x, t \leq l. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть  $f(x) \in L_1(0, l)$  и  $C_n$  — пробегаемая в положительном направлении окружность радиуса  $R_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n-1}}{2}$  ( $n > n_0$ ). Согласно лемме 1.3, при достаточно большом  $n_0$  на окружностях  $C_n$  нет нулей функции  $\omega(\lambda)$ .

Теорема 3.1. Если  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию на некотором интервале  $\Delta \in [a, b]$  ( $0 < a < b < l$ ) и  $f(x) \in L_1(0, l)$ , то

$$\frac{1}{2} f(x+0) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_x^l f(t) z_k(t) dt \quad (3.6)$$

и

$$\frac{1}{2} f(x-0) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x) \int_0^x f(t) y_k(t) dt \quad x \in \Delta. \quad (3.6^*)$$

Доказательство. Для определенности положим

$$\sin \alpha \neq 0, \quad \sin \beta \neq 0.$$

Учитывая равномерность оценок в формулах (1.16) и (1.16\*) леммы 1.2, получим при  $|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in C_n$

$$\begin{aligned} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^l z(t, \lambda) f(t) dt = \\ = \frac{\left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x}\right) \right\}}{-\sin \alpha \sin \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + O\left(e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| l}\right)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_x^l f(t) \left\{ \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l-t) - O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(l-t)}\right) \right\} dt = \\
 & = \frac{\cos \sqrt{\lambda} x \int_x^l f(t) \cos \sqrt{\lambda} (l-t) dt}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l} + \\
 & + O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_x^l e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(x-t)} |f(t)| dt \right\}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Пусть  $x < l - \delta$  ( $0 < \delta < l$ ), тогда при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_x^l e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(x-t)} |f(t)| dt \right\} = \\
 & = O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} e^{-|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \delta} \right\} + O\left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_x^{x+\delta} |f(t)| dt \right\}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Учитывая произвольность  $\delta > 0$ , из леммы 3.1 и формул (3.7) и (3.8) получим

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < R_n} y_k(x) \int_x^l f(t) z_k(t) dt = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^l f(t) z(t, \lambda) dt d\lambda = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l} \int_x^l \cos \sqrt{\lambda} (l-t) f(t) dt d\lambda. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Пользуясь известным методом, восходящим к Коши (см., например, [5]), из (3.9) получим формулу (3.6). В случае, когда  $\sin \alpha = 0$  или  $\sin \beta = 0$ , метод доказательства тот же.

Аналогично доказывается формула (3.6\*).

2°. Введем обозначение функции типа Миттаг-Лефлера

$$E_p(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k p^{-1})}, \quad (p > 0, -\infty < \mu < +\infty).$$



Как известно [7], при  $\mu < 3$  справедлива оценка

$$|E_{\frac{1}{2}}(-u, \mu)| \leq A(1+u)^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad u \geq 0 \quad (3.10)$$

где  $A > 0$  постоянная, не зависящая от  $u$ .

**Лемма 3.2.** Пусть функция  $f(x, \lambda)$  непрерывна на отрезке  $0 \leq x \leq l$  при  $\lambda \geq R > 0$ . Кроме того, пусть

$$|f(x, \lambda)| \leq M_1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \lambda \geq R$$

где  $M_1$  не зависит от  $x$  и  $\lambda$ .

Тогда при  $1 < \mu < 3$

$$\left| \int_0^x f(t, \lambda) (x-t)^{\mu-1} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2, \mu) dt \right| \leq \quad (3.11)$$

$$\leq M_2 \lambda^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \lambda \geq R$$

где  $M_2$  — постоянная, не зависящая от  $x$  и  $\lambda$ .

**Доказательство.** При  $1 < \mu < 3$  имеем

$$(1+u)^{\frac{1-\mu}{2}} = u^{\frac{1-\mu}{2}} \left( \frac{u}{1+u} \right)^{\frac{\mu-1}{2}} \leq u^{\frac{1-\mu}{2}}. \quad (3.12)$$

Значит, оценку (3.10) можно переписать в виде

$$|E_{\frac{1}{2}}(-u, \mu)| \leq A u^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad u \geq 0. \quad (3.13)$$

Отсюда

$$|(x-t)^{\mu-1} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2, \mu)| \leq A \lambda^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad 0 \leq t \leq x \leq l, \quad \lambda \geq R$$

или

$$\left| \int_0^x f(t, \lambda) (x-t)^{\mu-1} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2, \mu) dt \right| \leq$$

$$\leq A \lambda^{\frac{1-\mu}{2}} \int_0^x |f(t, \lambda)| dt \leq A M_1 l \lambda^{\frac{1-\mu}{2}} = M_2 \lambda^{\frac{1-\mu}{2}}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Так как  $M_2$  от  $\lambda$  не зависит, то оценка (3.11) справедлива при  $\lambda \geq R$  и  $0 \leq x \leq l$ . Лемма 3.2 доказана.

При некоторых дополнительных предположениях уточним полученные выше асимптотические формулы.

**Лемма 3.3.** Пусть функции  $q_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) имеют почти всюду на  $[0, l]$  ограниченные первые производные и

$$K(x, t) = \frac{K_1(x, t)}{(x-t)^2}, \quad 0 \leq \sigma < 1, \quad 0 \leq x, t \leq l \quad (3.14)$$

причем

$$\text{или} \quad \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right| dx \leq M < +\infty, \quad 0 \leq t \leq l \quad (3.14')$$

$$\text{или} \quad \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial t} K_1(x, t) \right| dt \leq M < +\infty, \quad 0 \leq x \leq l$$

где  $M$  не зависит от  $x$  и  $t$ .

Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  ( $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$ ) справедливы уточненные асимптотические формулы

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = & \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \int_0^x \sum_{i=1}^m \sin \sqrt{\lambda} (x - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\} + \\ & + \frac{\cos \alpha}{2\lambda} \left\{ \int_0^x \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (x - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\}, \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(x, \lambda) = & \sin \beta \cos \sqrt{\lambda} (l-x) + \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} (l-x)}{\sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{\sin \beta}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \int_x^l \sum_{i=1}^m \sin \sqrt{\lambda} (l-x - \Delta_i^*(t)) q_i^*(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\} - \\ & - \frac{\cos \beta}{2\lambda} \left\{ \int_x^l \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (l-x - \Delta_i^*(t)) q_i^*(t) dt + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\}, \quad (3.15^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = & -\sqrt{\lambda} \sin \alpha \sin \beta \sin \sqrt{\lambda} l + \sin(\alpha - \beta) \cos \sqrt{\lambda} l - \\ & - \cos \alpha \cos \beta \frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2} \left\{ \int_0^l \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (l - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \right. \\ & \left. + O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right) \right\} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \int_0^l \sum_{i=1}^m \sin \sqrt{\lambda} (l - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(|\lambda|^{\frac{s-1}{2}}\right) \Bigg\} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2\lambda} \left\{ \int_0^t \sum_{i=1}^m \cos \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \right. \\
& \left. + O\left(|\lambda|^{\frac{s-1}{2}}\right) \right\}, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

причем оценка остаточных членов в формулах (3.11) и (3.11\*) равномерна при  $x \in [0, l]$ .

Доказательство. Из леммы 1.2 имеем при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , ( $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$ )

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) y(t - \Delta_i(t)) dt = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) \left\{ \sin \alpha \left[ \cos \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda}} \left[ \sin \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \right] \right\} dt \quad (3.17) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q_i(t) \cos \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \Delta_i(t)) q_i(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - 2t + \Delta_i(t)) q_i(t) dt = \\
& = \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} x \int_0^x \cos [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt - \\
& - \frac{1}{2} \cos \sqrt{\lambda} x \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \quad (3.18) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) \sin \sqrt{\lambda} (t - \Delta_i(t)) q_i(t) dt =$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \cos \sqrt{\lambda} x \int_0^x \cos [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt - \\
&- \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} x \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda} \Delta_i(t)] q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \quad (3.19) \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 dt = O\left(|\lambda|^{\frac{\sigma-1}{2}}\right). \quad (3.20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) K(t_1, t) dt_1 &= \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) \frac{K_1(t_1, t)}{(t_1 - t)^2} dt_1 = \\
&= \int_0^x K_1(t_1, t) dt_1 \int_0^{t_1} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) (t_2 - t)^{-2} dt_2 = \\
&= K_1(x, t) \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) (t_2 - t)^{-2} dt_2 - \\
&- \int_0^x \left( \int_0^{t_1} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) (t_2 - t)^{-2} dt_2 \right) \frac{\partial}{\partial t_1} K(t_1, t) dt_1. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^x (t_2 - t)^{-2} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) dt_2 = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{k+\frac{1}{2}} (x-t)^{2k+2-\sigma}}{\Gamma(2k+3-\sigma)} = \\
&= (x-t)^{2-\sigma} \sqrt{\lambda} E_{\frac{1}{2}}(-\lambda(x-t)^2; 3-\sigma). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Так же и

$$\int_0^x (t_2 - t)^{-2} \sin \sqrt{\lambda} (x - t_2) dt_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \sqrt{\lambda} (x - t_1) \int_t^{t_1} (t_2 - t)^{-\sigma} \cos \sqrt{\lambda} (t_1 - t_2) dt_2 + \\
&+ \cos \sqrt{\lambda} (x - t_1) \int_t^{t_1} (t_2 - t)^{-\sigma} \sin \sqrt{\lambda} (t_1 - t_2) dt_2 = \\
&= \Gamma(1 - \sigma) \sin [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] (t_1 - t)^{1-\sigma} E_{\frac{1}{2}} [-\lambda (t_1 - t)^2; 2 - \sigma] + \\
&+ \Gamma(1 - \sigma) \sqrt{\lambda} \cos [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] (t_1 - t)^{2-\sigma} E_{\frac{3}{2}} [-\lambda (t_1 - t)^2; 3 - \sigma]. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Из формул (3.21), (3.22) и (3.23) с учетом условия (3.14') и из леммы 3.1 следует утверждение (3.20).

Подставив формулу (1.16) в выражение (1.11), получим при  $\lambda \rightarrow +\infty$  ( $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$ )

$$\begin{aligned}
y(x, \lambda) &= \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^m \sin [\sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t))] q_i^*(t) + \right. \\
&+ \left. \int_t^x \sin [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] K(t_1, t) dt_1 \right\} \left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} t - \right. \\
&- \left. \cos \alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} + \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) O(1) \right\} dt. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (3.17), (3.18), (3.19), а также формулу (3.20) получим утверждение (3.15) леммы.

Формула (3.15\*) доказывается аналогично. Для доказательства формулы (3.16) заметим, что из (1.11) следует при  $\lambda \rightarrow +\infty$  ( $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = 0$ )

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} &= -\sqrt{\lambda} \sin \alpha \sin \sqrt{\lambda} x - \cos \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \\
&+ \int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^m \cos [\sqrt{\lambda} (x - \psi_i(t))] q_i^*(t) + \right. \\
&+ \left. \int_t^x \cos [\sqrt{\lambda} (x - t_1)] K(t_1, t) dt_1 \right\} y(t, \lambda) dt. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Пользуясь асимптотической формулой (3.15), из (3.25) и (1.12) получим формулу (3.16) леммы.

## § 4. Теорема о разложении

В этом параграфе ограничимся, для определенности, случаем  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$ . Остальные случаи получаются аналогично.

1°. Опираясь на результаты 2° § 3, получим некоторые формулы для собственных функций и собственных значений.

Лемма 4.1. Если функции  $K(x, t)$  и  $q_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) удовлетворяют условиям леммы 3.3, то все собственные значения и собственные функции, начиная с некоторого номера, имеют вид

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} + \frac{C_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right), \quad (n \geq n_0) \quad (4.1)$$

$$y(x, \lambda_n) = \sin \alpha \cos \frac{\pi n}{l} x + \frac{\alpha_n(x)}{n} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \frac{\sin \alpha}{2n} \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(0)}^x \sin \left\{ \frac{\pi n}{l} (x - \Delta_i(t)) \right\} q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right), \quad (4.2) \\ (0 \leq x \leq l, n \geq n_0)$$

$$\frac{z(x, \lambda_n)}{w'(\lambda_n)} = \frac{2}{l \sin \alpha} \cos \frac{\pi n}{l} x + \frac{\alpha_n^*(x)}{n} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \frac{1}{2n \sin \alpha} \sum_{i=1}^m \int_x^{\varphi_i(l)} \sin \left\{ \frac{\pi n}{l} (x + \Delta_i^*(t)) \right\} q_i(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \quad (4.2^*) \\ (0 \leq x \leq l, n \geq n_0),$$

$$C_n = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\pi \sin \alpha \sin \beta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(0)}^l \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt, \quad (4.3)$$

$$\alpha_n(x) = \frac{\sin \alpha}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^x q_i(t) dt - C_n x \sin \alpha - \cos \alpha, \quad (4.4)$$

$$\alpha_n^*(x) = \frac{\sin \beta}{2} \sum_{i=1}^m \int_x^l q_i^*(t) dt - C_n (l - x) \sin \beta - \cos \beta, \quad (4.4^*)$$

причем порядок остаточных членов в формулах (4.2) и (4.2\*), равномерен при  $x \in [0, l]$ .

Доказательство. Согласно лемме 1.3, имеем

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} + \delta_n \right)^2, \quad (4.5)$$

где



$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l = & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 \cos \sqrt{\lambda_n} l} \sum_{i=1}^m \int_0^l \cos [\sqrt{\lambda_n} (l - \Delta_i(t))] q_i(t) dt \right\} + O\left(\lambda_n^{-\frac{\pi-2}{2}}\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Или, согласно (4.5),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l = & \frac{l}{\pi n} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^l \cos \left\{ \left( \frac{\pi n}{l} + \delta_n \right) \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left[ l \left( \frac{\pi n}{l} + \delta_n \right) \right] \sum_{i=1}^m \int_0^l \sin \left\{ \left( \frac{\pi n}{l} + \delta_n \right) \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt \right\} + \\ & + O(n^{\pi-2}) = \frac{l}{\pi n} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^l \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} \Delta_i(t) \right\} q_i(t) dt \right\} + O(n^{\pi-2}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.5) и (4.7) непосредственно следует формула (4.1).

Формулы (4.2) и (4.2\*) получаются подстановкой оценки (4.1) соответственно в формулы (3.15), (3.15\*) и (3.16). Лемма доказана.

Из леммы 4.1 и (3.15) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, \lambda_n)}{\partial x} = & -\frac{\pi n}{l} \sin \alpha \sin \frac{\pi n}{l} x + z_n(x) \cos \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \frac{\pi}{2l} \sum_{i=1}^m \int_0^x \cos \left\{ \frac{\pi n}{l} (x - \Delta_i(t)) \right\} q_i(t) dt + O(n^{\pi-1}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$0 \leq x \leq l$

где оценка остаточного члена равномерна при  $x \in [0, l]$ .

Пусть

$$z_n(x, t) \equiv \sum_{k=0}^n y_k(x) z_k(t) -$$

$$-\frac{1}{l} - \frac{2}{l} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} t. \quad (4.9)$$

Справедлива

Лемма 4.2. При  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$

$$|\sigma_n(x, t)| \leq M < +\infty, \quad (0 \leq x, t \leq l, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.10)$$

Доказательство. Из формул (4.2) и (4.2\*) имеем

$$\begin{aligned} \frac{y(x, \lambda_k) z(t, \lambda_k)}{w'(\lambda_k)} &= \frac{2}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} t + \\ &+ \frac{2\alpha_k(x)}{lk \sin \alpha} \sin \frac{\pi k}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} t + \\ &+ \frac{1}{lk} \cos \frac{\pi k}{l} t \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(0)}^x \sin \left\{ \frac{\pi k}{l} (x - \Delta_i(t)) \right\} q_i(t) dt + \\ &+ \frac{\alpha_k^*(x) \sin \alpha}{k} \cos \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} t + \\ &+ \frac{\cos \frac{\pi k}{l} x}{2k} \sum_{i=1}^m \int_x^{\varphi_i(l)} \sin \left\{ \frac{\pi k}{l} (x + \Delta_i^*(t)) \right\} q_i(t) dt + O(k^{-2}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где порядок остаточного члена равномерен при  $x, t \in [0, l]$ .

Но ввиду формулы

$$\sin \frac{\pi k}{l} u \cos \frac{\pi k}{l} v = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{\pi k}{l} (u + v) + \sin \frac{\pi k}{l} (u - v) \right\}$$

и равномерной ограниченности на отрезке  $[0, \pi]$  сумм вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (n = 1, 2, \dots, x \in [0, \pi]) \quad (4.12)$$

(см., например, [3], стр. 36), из формул (4.11), (4.3), (4.4), (4.4\*), учитывая (3.3), получим лемму.

2°. В этом пункте мы будем полагать, что функции  $K(x, t)$  и  $q_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) удовлетворяют условиям леммы 3.3.

Докажем теорему о разложении по биортогональной системе  $\{y_k(x), z_k(x)\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), построенной в 1° § 3.

Теорема 4.1. Для каждой функции  $f(x)$ , имеющей интегрируемую вторую производную на  $[0, l]$  и удовлетворяющей краевым условиям задачи (A), справедливы разложения

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt, \quad (4.13)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x) \int_0^l f(t) y_k(t) dt, \quad (4.13^*)$$

причем ряды справа сходятся равномерно на отрезке  $x \in [0, l]$ .

Доказательство. Пусть

$$Lf(x) = h(x). \quad (4.14)$$

Тогда, согласно теореме 2.1

$$f(x) = \int_0^l G(x, t) h(t) dt, \quad (4.15)$$

где  $G(x, t)$  — функция Грина задачи (A).

Ряд

$$f^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt, \quad (4.16)$$

сходится равномерно при  $0 < x \leq l$ , так как из (3.3) и (4.7) имеем

$$|y_k(x)| \leq M, \quad |z_k(x)| \leq M \quad (4.17)$$

$$(0 \leq x \leq l, \quad k = 0, 1, 2, \dots),$$

а из (3.3) и (4.15) следует, что при  $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^l f(t) z_k(t) dt &= \frac{1}{\omega'(\lambda_k)} \int_0^l f(t) z(t, \lambda_k) dt = \\ &= \frac{1}{\lambda_k \omega'(\lambda_k)} \int_0^l h(t) z_k(t) dt = O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Известно, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \cos kt}{k}, \quad 0 \leq x < \pi \quad (4.20)$$

равномерно сходится при  $0 < \varepsilon \leq t \leq \pi - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  — любое) (см., например, [3], стр. 36 и [8], § 1.23), а из (4.12) следует, что его частные суммы равномерно ограничены при  $t \in [0, \pi]$ .

Продифференцировав почленно ряд (4.16) и учитывая свойства ряда (4.20), из (4.8) и (3.3) получим, что ряд



$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k'(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt$$

равномерно сходится на каждом отрезке вида  $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$  и его частные суммы равномерно ограничены при  $x \in [0, l]$ . Следовательно функция  $f^*(x)$  имеет на  $[0, l]$  непрерывную ограниченную производную.

Из теоремы 3.1 имеем

$$f^*(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^x f(t) z_k(t) dt. \quad (4.21)$$

С другой стороны, из равномерной сходимости ряда (4.16) и биортонormalности систем  $\{y_k(x), z_k(x)\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) имеем

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f^*(t) z_k(t) dt = \\ &= \frac{f^*(x)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^x f^*(t) z_k(t) dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Обозначим

$$u(x) \equiv f^*(x) - f(x). \quad (4.23)$$

Тогда из (4.21) и (4.22) получим

$$\frac{u(x)}{2} = - \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \int_0^x u(t) z_k(t) dt. \quad (4.24)$$

Так как функция  $u(x)$  имеет на  $[0, l]$  непрерывную ограниченную производную, то ряд (4.24), согласно формуле (4.11), сходится равномерно на каждом отрезке вида  $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$ .

В частном случае, когда  $K(x, t) \equiv 0$ ,  $q_i(x) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и  $\sin \alpha = 1$ ,  $\sin \beta = 1$ , из теоремы 3.1 получим

$$\frac{u(x)}{2} = \frac{1}{l} \int_0^x u(t) dt + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi k}{l} x \int_0^x u(t) \cos \frac{\pi k}{l} t dt, \quad (4.25)$$

где ряд справа также сходится равномерно на каждом отрезке вида  $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$ .

Из (4.24) и (4.25) имеем

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_0^x \varepsilon_n(x, t) u(t) dt + \varepsilon_n(x), \\ (0 \leq x \leq l, n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.26)$$

где

$$\varepsilon_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{при } x \in [\varepsilon, l - \varepsilon] \quad (\varepsilon > 0 - \text{любое})$$

и

$$|\varepsilon_n(x)| \leq K \quad \text{при } x \in [0, l], \quad n = 1, 2, \dots$$

Уравнение (4.26) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно  $u(x)$ , следовательно

$$u(x) = \int_0^x R_n(x, t) \varepsilon_n(t) dt + \varepsilon_n(x), \quad (4.27)$$

$$(0 \leq x \leq l, \quad n = 1, 2, \dots)$$

где  $R_n(x, t)$  — резольвента уравнения (4.26).

Но из леммы (4.2) следует (см., например, [5]), что

$$|R_n(x, t)| \leq M e^{Mt}, \quad (4.28)$$

$$(0 \leq x, t \leq l, \quad n = 1, 2, \dots)$$

следовательно при  $0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$  и  $0 < \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$

$$|u(x)| = \left| \int_0^x R_n(x, t) \varepsilon_n(t) dt + \int_\varepsilon^x R_n(x, t) \varepsilon_n(t) dt + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_n(x) \right| \leq K M e^{Mt} \varepsilon + M e^{Mt} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} |\varepsilon_n(t)| dt + |\varepsilon_n(x)|. \quad (4.29)$$

Устремив в формуле (4.29)  $n \rightarrow \infty$  и учитывая произвольность  $\varepsilon$ , получим, что

$$u(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

следовательно

$$f^*(x) \equiv f(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Таким образом, формула (4.13) доказана. Формула (4.13\*) доказывалась совершенно аналогично. Теорема доказана.

3°. Теорема 4.1 легко уточняется с использованием леммы 4.2 (см., например, [4], гл. 1, § 4).

Теорема 4.2. Если  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$ , то для любой абсолютно интегрируемой на  $(0, l)$  по Лебегу функции  $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^n y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt - \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{l} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{l} x \int_0^l \cos \frac{\pi k}{l} t f(t) dt \right\} = 0 \quad (4.30)$$

равномерно во всем интервале  $(0, l)$ .

Такая же теорема справедлива и при разложении по системе  $\{z_k(x)\}$ ,  $(k=0, 1, 2, \dots)$ . В случае, когда  $\sin \alpha = 0$  или  $\sin \beta = 0$ , разложение по биортогональной системе сравнивается с разложением в ряд Фурье по функциям  $\sin nx$  ( $n=1, 2, \dots$ ) или по функциям  $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ).

Из теоремы о равносходимости следуют следующие теоремы:

Теорема 4.3. Если  $f(x) \in L_2(0, l)$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{k=0}^n y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt \right|^2 dx = 0, \quad (4.31)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{k=0}^n z_k(x) \int_0^l f(t) y_k(t) dt \right|^2 dx = 0. \quad (4.31^*)$$

Теорема 4.4. Пусть  $f(x), g(x) \in L_2(0, l)$ . Тогда справедливо обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_0^l f(x) g(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* b_k, \quad (4.32)$$

где

$$a_k = \int_0^l f(t) z_k(t) dt, \\ b_k = \int_0^l g(t) z_k(t) dt, \quad (4.33)$$

$$a_k^* = \int_0^l f(t) y_k(t) dt,$$

$$b_k^* = \int_0^l g(t) y_k(t) dt$$

$$(k=0, 1, 2, \dots).$$

Справедлива также

Теорема 4.5. Для каждой функции  $f(x) \in L_2(0, l)$  справедливы обобщенные неравенства Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leq M \int_0^l |f(x)|^2 dx, \quad (4.34)$$



$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^*|^2 \leq M \int_0^l |f(x)|^2 dx, \quad (4.34^*)$$

где

$$a_k = \int_0^l f(t) z_k(t) dt \quad a_k^* = \int_0^l f(t) y_k(t) dt \quad (4.35)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

а постоянная  $d_0 < M < +\infty$  не зависит от  $f(x)$  (где  $d_0 = \frac{2}{l \sin^2 \alpha}$ ).

Доказательство. По теореме 4.3

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k(x). \quad (4.36)$$

Обозначим

$$\tilde{L}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z_k(x). \quad (4.37)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ d_0 \sum_{k=0}^n \overline{a_k} y_k(x) + \sum_{k=0}^n \overline{a_k} (z_k(x) - d_0 y_k(x)) \right\} = \\ &= d_0 \tilde{f}(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l f(t) \sum_{k=0}^n \overline{z_k(t)} (z_k(x) - d_0 y_k(x)) dt. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Используя свойства ряда (4.20), из (3.3), (4.1) и (4.2) так же, как и при доказательстве леммы 4.1, получаем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k(t)} \{d_0 y_k(x) - z_k(x)\} \quad (4.39)$$

$$0 \leq x, t \leq l$$

равномерно сходится в каждом квадрате вида  $(0 < \varepsilon \leq t \leq l - \varepsilon, 0 \leq x \leq l)$  и его частные суммы равномерно ограничены при  $0 \leq x, t \leq l$ .

Поэтому, обозначив

$$Q(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k(t)} [z_k(x) - d_0 \overline{y_k(x)}] \quad (4.40)$$

из (4.38) имеем

$$\bar{L}f(x) = d_0 \overline{f(x)} + \int_0^t \overline{f(t)} Q(x, t) dt, \quad (4.41)$$

где

$$|Q(x, t)| \leq K < +\infty \quad (0 \leq x, t \leq l).$$

Отсюда следует, что

$$\bar{L}f(x) \in L_2(0, l). \quad (4.42)$$

С другой стороны, из (4.36), (4.37) и (4.41) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 &= \int_0^l f(x) \bar{L}f(x) dx = \\ &= d_0 \int_0^l |f(x)|^2 dx + \int_0^l f(x) \int_0^t \overline{f(t)} Q(x, t) dt dx \leq \\ &\leq d_0 \int_0^l |f(x)|^2 dx + K \left\{ \int_0^l |f(x)| dx \right\}^2 \leq \\ &\leq (d_0 + lK) \int_0^l |f(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Обозначив  $d_0 + lK = M$ , получим формулу (4.34). Формула (4.34\*) доказывается аналогично.

В заключение заметим, что все результаты пункта 3° § 4 легко можно перенести на случай, когда функции  $K(x, t)$  и  $q_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  комплекснозначны.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 12 VI 1959

## 2. Բ. Ներածություն

ՈՒՂԱՑՈՂ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՈՎ ՄԻ ԻՆՏԵԳՐՈՎ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ  
ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՎԵՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Դիտարկվում է հետևյալ հրկու փոխադարձ-համալուծ եզրային խնդիրը՝

$$(A) \begin{cases} -y'' + \int_0^x K(x, t) y(t) dt + \sum_{i=1}^m q_i(x) y(x - \Delta_i(x)) = \lambda y \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \\ y(l) \cos \beta + y'(l) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

որտեղ  $\Delta_i(x) \geq 0$ ,  $\Delta_i'(x) \leq \theta < 1$  և  $q_i(x) \equiv 0$ , երբ  $x - \Delta_i(x) < 0$   
( $i = 1, 2, \dots, m$ )

$$(A^*) \begin{cases} -z'' + \int_x^l K(t, x) z(t) dt + \\ + \sum_{i=1}^m q_i^*(x) z(x + \Delta_i^*(x)) = \lambda z \\ z(0) \cos \alpha + z'(0) \sin \alpha = 0 \\ z(l) \cos \beta + z'(l) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

որտեղ  $x + \Delta_i^*(x) = \varphi_i^{-1}(x)$  ( $\varphi_i(x) \equiv x - \Delta_i(x)$ ) ( $i = 1, 2, \dots, m$ ):

Որոշվում են (A) և (A\*) խնդիրների սեփական ֆունկցիաների ասիմպտոտական հատկությունները և կառուցվում է (A) խնդրի Գրինի ֆունկցիան, որի միջոցով (A) և (A\*) խնդիրները համապատասխանաբար բերվում են հետևյալ երկու համասեռ ինտեգրալ հավասարումներին՝

$$y(x) = \lambda \int_0^x G(x, t) y(t) dt$$

$$z(x) = \lambda \int_0^l G(t, x) z(t) dt:$$

(A) և (A\*) խնդիրների սեփական ֆունկցիաների միջոցով կառուցվում է  $\{y_k(x), z_k(x)\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) բիօրթոգոնալ սխառն և  $q_i(x)_{(i=1,2,\dots,m)}$  և  $K(x, t)$  ֆունկցիաների վրա որոշ սահմանափակումներ զննելուց հետո ստացվում է վերածում ըստ արդ սխառնմի:

Բերենք թեորեմներից մեկը:

Թեորեմ. Եթե  $q_i^*(x) \in L_1(0, l)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) և

$$K(x, t) = \frac{K_1(x, t)}{(x - t)^2}, \quad 0 \leq x < l$$

որտեղ



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \in L_1(0, l) \quad (t = \text{const}),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} K_1(x, t) \in L_1(0, l) \quad (x = \text{const}),$$

$$\sup_{x \in [0, l]} \int_0^l |f(x)| dx \in L_2(0, l) \text{ и } \sup_{t \in [0, \infty)} \int_0^l |f(x)| dx \in L_2(0, l)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{k=0}^n y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) dt \right|^2 dx = 0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Норкин С. Б. О краевой задаче типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Изв. Высших уч. зав., математика, № 6 (7), 1958.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.—Л., 1951.
3. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.—Л., 1950.
4. Джрбашян М. М. и Нерсисян А. Б. О построении некоторых специальных биортогональных систем. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, № 5, 1959.
5. Titchmarsh E. C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford, 1946.
6. Гурса Курс математического анализа. М.—Л., ГТТИ, 1933.
7. Джрбашян М. М. Об асимптотическом поведении функции типа Миттаг-Лефлера. Изв. АН АрмССР, XIX, № 3, 1954.
8. Зигмунд Тригонометрические ряды. М.—Л., ГОНТИ, 1939.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, В. С. Тоноян

**Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с зубцами**

Кручение стержня, поперечное сечение которого представляет круговой сектор, рассмотрели Сен-Венан [1, 2], Гринхилл [3], А. Н. Динник [4], А. Ш. Лошкин [5], В. Н. Лысков [6], Стивенсон [7], Н. Х. Арутюнян [8, 9], Шен Бей-Линь [10, 11] и другие.

Некоторые из них рассмотрели также кручение стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора [1, 2, 5, 6].

В настоящей работе рассматривается кручение стержней с поперечными сечениями в виде кольцевых секторов с краевыми зубцами (фиг. 1) и с центрально расположенным зубом (фиг. 6).

Точное решение этой задачи получено методом приведения задачи к бесконечным системам линейных уравнений, изложенным в работах Н. Х. Арутюняна [12] и др. [13, 14].

Решение представлено в виде рядов. Определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Вычислены жесткости для некоторых случаев и напряжения. Из общего решения, для кругового и кольцевого секторов получаются компактные формулы для определения жесткостей при кручении и касательных напряжений.

**Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с краевыми зубцами**

§ 1. Постановка задачи

Решение задачи о кручении призматических стержней в полярных координатах сводится к определению функции напряжения  $U(r, \varphi)$ , удовлетворяющей в области поперечного сечения стержня уравнению

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (1.1)$$

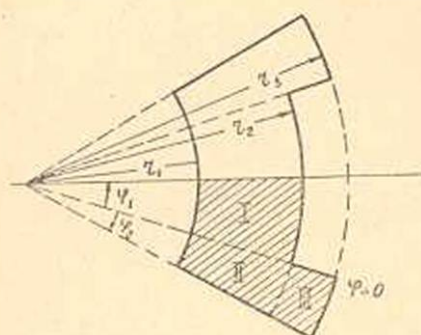
и обращающейся в нуль на контуре этой области.

При помощи функции  $U(r, \varphi)$  касательные напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{z\varphi}$  определяются формулами



$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} Gz, \\ \tau_{z\varphi} &= -\frac{\partial U}{\partial r} Gz.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Рассмотрим стержень с поперечным сечением в виде кольцевого сектора, имеющего на наружной криволинейной части выточку или симметрично расположенные зубцы (фиг. 1).



Фиг. 1.

В силу симметрии профиля, достаточно рассмотреть только половину области сечения. Определенное в этой части области решение распространится на всю область сечения, если потребовать, чтобы нормальная производная функции  $U(r, \varphi)$  на оси симметрии ( $\varphi = \varphi_1$ ) равнялась нулю

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = 0. \quad (1.3)$$

Переходя к переменной

$$t = \ln \frac{r}{r_0}, \quad (1.4)$$

решение уравнения (1.1) ищем в форме

$$U[r(t), \varphi] = \Phi(t, \varphi) - \frac{r_0^2 e^{2t}}{2}, \quad (1.5)$$

где  $\Phi(t, \varphi)$  — гармоническая функция.

Разбиваем рассматриваемую половину области сечения на простейшие области I, II, и III и полагаем, что функция  $\Phi(t, \varphi)$  в этих областях принимает, соответственно, значения  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ .

Вспомогательные функции  $\Phi_i(t, \varphi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\Phi_1(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = 0, \\ \Phi_2(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_2(t, -\varphi_2) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = 0, \\ \Phi_3(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} &= \Phi_3(t, -\varphi_2) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

и условиям сопряжения

$$\Phi_1(t, 0) = \Phi_2(t, 0), \quad \Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \quad (1.7)$$



$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_{t=0}, \quad (1.8)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}. \quad (1.9)$$

При этом использованы соотношения (1.5) и условия для функции  $U(r, \varphi)$ .

Функции  $\Phi_i(t, \varphi)$  ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k t + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k t) \sin \alpha_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi) \sin \beta_k t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(0 < \varphi < \varphi_1, -t_1 < t < 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \lambda_k t + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \lambda_k t) \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi) \sin \beta_k t, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$(-\varphi_2 < \varphi < 0, -t_1 < t < 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(3)} \operatorname{sh} \lambda_k t + B_k^{(3)} \operatorname{ch} \lambda_k t) \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(3)} \operatorname{sh} \gamma_k \varphi + D_k^{(3)} \operatorname{ch} \gamma_k \varphi) \sin \gamma_k t, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$(-\varphi_2 < \varphi < 0, 0 < t < t_2)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{\varphi_2}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}. \quad (1.13)$$

## § 2. Определение постоянных интегрирования

Пользуясь выражениями (1.10)–(1.12) и удовлетворив условиям (1.6) и (1.7), для постоянных интегрирования получим следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(1)} = & \frac{r_2^2}{\alpha_k \varphi_1} \operatorname{cth} \alpha_k t_1 - \frac{r_1^2}{\alpha_k \varphi_1 \operatorname{sh} \alpha_k t_1}, & B_k^{(1)} = & \frac{r_2^2}{\alpha_k \varphi_1}, \\ C_k^{(1)} = & -D_k^{(2)} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1, & D_k^{(1)} = & D_k^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(2)} &= B_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \frac{r_1^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k \varphi_2 \operatorname{sh} \lambda_k t_1}, \\ C_k^{(2)} &= D_k^{(2)} \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 + \frac{r_2^2 \beta_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{t_1 (4 + \beta_k^2) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(3)} &= -B_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_3^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k \varphi_2 \operatorname{sh} \lambda_k t_2}, \\ B_k^{(3)} &= B_k^{(2)}, \quad C_k^{(3)} = \frac{r_2^2 \gamma_k}{t_2 (4 + \gamma_k^2)} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{th} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2}, \\ D_k^{(3)} &= \frac{r_2^2 \gamma_k}{t_2 (4 + \gamma_k^2)} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Подставляя эти значения в (1.10)–(1.12) и удовлетворив условиям (1.8), для определения постоянных  $B_k^{(2)}$  и  $D_k^{(2)}$  получим следующие бесконечные системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} D_k^{(2)} &= \frac{2}{t_1 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p B_p^{(2)}}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} - \\ &- \frac{1}{\beta_k t_1 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2)} \left\{ \frac{r_2^2 \beta_k^3 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{(4 + \beta_k^2) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} + \right. \\ &+ (-1)^{k+1} r_1^2 \left( \operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \frac{\varphi_2}{2} \right) + r_2^2 \operatorname{th} \beta_k \varphi_1 \Big\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} B_k^{(2)} &= \frac{2}{\varphi_2 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{th} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p D_p^{(2)}}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} - \\ &- \frac{1}{\varphi_2 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{th} \lambda_k t_2)} \left\{ \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\lambda_k} \left( \frac{r_1^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} + \frac{r_3^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) + \right. \\ &+ \frac{r_2^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k^2 - 4} \left( \lambda_k \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{\lambda_k e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} + 2 \right) + \\ &+ \frac{r_2^2 (-1)^{k+1}}{\lambda_k^2 - 4} \left( \lambda_k \operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{\lambda_k e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - 2 \right) \Big\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

( $k = 1, 2, \dots$ )

Произведя замену неизвестных

$$\begin{aligned} \lambda_k \varphi_2 B_k^{(2)} &= m Y_k - [1 + (-1)^{k+1}] r_2^2, \\ \beta_k t_1 D_k^{(2)} &= X_k - r_2^2 - (-1)^{k+1} r_1^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $m$  — постоянное число, подлежащее определению в дальнейшем, эту совокупность приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k, \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k, \end{aligned} \right\} (k=1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2m \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)}, \\ b_{kp} &= \frac{2\lambda_k}{m t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2) (\beta_p^2 + \lambda_k^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$P_k = \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k^2 + 4} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1}{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{1}{m (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left\{ \frac{4(-1)^{k+1}}{\lambda_k^2 - 4} \left( r_2^2 \operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r_1^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \right) + \frac{4[1 + (-1)^{k+1}]}{\lambda_k^2 - 4} \left( r_2^2 \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_3^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r_2^2 \lambda_k}{\lambda_k^2 - 4} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lambda_k t_1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

### § 3 Исследование бесконечной системы (2.7)

Введя новые обозначения

$$\left. \begin{aligned} X_k &= Z_{2k-1}, \quad P_k = N_{2k-1}, \\ Y_k &= Z_{2k}, \quad Q_k = N_{2k}, \\ A_{2k-1, 2p} &= a_{kp}, \quad A_{2k, 2p-1} = b_{kp}, \quad A_{2k-1, 2p-1} = A_{2k, 2p} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

совокупность систем (2.7) можем записать в виде одной системы

$$Z_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} Z_n + N_i, \quad (i=1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Покажем, что система (3.2) (или системы (2.7)) вполне регулярна [15].

Рассмотрим отдельно два случая

а)  $i=2k-1$ , тогда



$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2k-1, n}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2m \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \beta_k^2} =$$

$$= \frac{m}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2} \left( \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 - \frac{1}{\beta_k \varphi_2} \right) \leq \frac{m}{2} (1 + e^{-2\beta_k \varphi_1}) \leq m, \quad (3.3)$$

в)  $i = 2k$ , тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2k, n}| = \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| = \frac{2\gamma_k}{m t_1 (\operatorname{cth} \gamma_k t_1 + \operatorname{cth} \gamma_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_p^2 + \gamma_k^2} =$$

$$= \frac{1}{m (\operatorname{cth} \gamma_k t_1 + \operatorname{cth} \gamma_k t_2)} \left( \operatorname{cth} \gamma_k t_2 - \frac{1}{\gamma_k t_2} \right) \leq \frac{1}{2m}. \quad (3.4)$$

При этом использованы соотношения (2.8), значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left( \operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right) \quad (3.5)$$

и неравенства

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1,$$

$$\frac{1}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2} \leq \frac{1}{2} (1 + e^{-2\beta_k \varphi_1}) \leq 1. \quad (3.6)$$

Число  $m$  выбираем из равенства

$$\frac{1}{2m} = m, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.7)$$

Из (3.3), (3.4) и (3.7) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{in}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

то-есть система (3.2) вполне регулярна.

Легко видеть из (2.9) и (2.10), что свободные члены системы (3.2) ограничены сверху и при  $i \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

#### § 4. Определение функции напряжения

Подставляя значения (2.1)–(2.3) в (1.10)–(1.12), для функций  $\Phi_i(t, \varphi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) получим выражения

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (t + t_1)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \sin \alpha_k \varphi -$$

$$- \frac{r_1^2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \sin \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \quad (4.1)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t}] \frac{\beta_k \sin \beta_k t}{4 + \beta_k^2} + \\ & + \frac{2r_1^2}{\varphi_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k t}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t, \quad (4.2) \end{aligned}$$

( $-\varphi_2 < \varphi < 0, -t_1 < t < 0$ )

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & -\frac{2r_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k t}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi + \\ & + \frac{r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left( \varphi + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2}} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \frac{\gamma_k \sin \gamma_k t}{4 + \gamma_k^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi. \quad (4.3) \end{aligned}$$

( $-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 < t \leq t_2$ )

Заменяя в этих выражениях коэффициенты  $B_k^{(2)}$  и  $D_k^{(2)}$  через  $X_k$  и  $Y_k$  при помощи (2.6) и произведя некоторое преобразование, выражения (4.1)–(4.3) приведем к виду

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \\ & + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta (\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \quad (4.4) \end{aligned}$$

( $0 < \varphi < \varphi_1, -t_1 < t < 0$ )

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t + \\ & + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi - \\ & - \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t, \quad (4.5) \end{aligned}$$

( $-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0$ )

$$\Phi_3(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi -$$

$$- \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{2it_2}}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left( \frac{\varphi_2}{2} + \varphi \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \frac{\varphi_2}{2}} \sin \gamma_k t \quad (4.6)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2).$$

### § 5. Определение жесткости при кручении

Жесткость при кручении сплошного призматического стержня определяется формулой

$$C = 2G \int_{\Omega} U d\Omega = 4G \int_{\Omega^*} U d\Omega, \quad (5.1)$$

где  $\Omega$  — область сечения стержня,  $\Omega^*$  — половина области сечения.

Подставляя, согласно (1.5), выражения (4.4)–(4.6) в (5.1) и произведя интегрирование, для определения жесткости при кручении получим следующую формулу

$$C = 2G \left\{ \frac{\varphi_1}{4} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\varphi_2}{4} (r_3^4 - r_1^4) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4t_1} (r_2^2 - r_1^2)^2 - \right.$$

$$- \frac{\varphi_2}{4t_2} (r_1^2 - r_2^2)^2 - \frac{2r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k |1 + (-1)^{k+1} e^{-2it_1}|}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \left( \operatorname{th} \beta_k \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_2}{2} \right) -$$

$$- \frac{4mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left( \operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{-2it_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \right.$$

$$- \left. \frac{e^{2it_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \frac{8r_1^4}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{-2it_1}|^2}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_2}{2} -$$

$$- \frac{16r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{2it_2}|^2}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2} \left. \right\}. \quad (5.2)$$

Решая бесконечные системы (2.7), мы получим значения неизвестных  $X_k$  и  $Y_k$  с избытком и с недостатком. Пользуясь этими значениями неизвестных, можно получить по формуле (5.2) значения жесткостей с избытком и недостатком.

Из (5.2), переходя к пределу при  $t_1 \rightarrow \infty$  ( $r_1 = 0$ ), получим формулу для жесткости кругового сектора с зубцами



$$\begin{aligned}
 C = & 2G \left\{ \frac{\varphi_1 r_2^4}{4} + \frac{\varphi_2 r_3^4}{4} - \frac{\varphi_2}{4t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 - \right. \\
 & - \frac{4mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left( 1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \\
 & - \frac{2r_2^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{X(z)}{z(z^2 + 4)} \left( \operatorname{th} z \varphi_1 + \operatorname{th} \frac{z \varphi_2}{2} \right) dz - \frac{8r_2^4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{z \varphi_2}{2}}{z(z^2 + 4)^2} dz - \\
 & - \frac{16r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]^2}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2} \Bigg\}. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Здесь неизвестные коэффициенты  $X(z)$  и  $Y_k$  должны быть определены из систем, получаемых из (2.7) при  $t_1 \rightarrow \infty$  соответствующим предельным переходом.

#### § 6. Жесткости кругового и кольцевого секторов

Из (5.3), снова переходя к пределу при  $t_2 \rightarrow 0$  ( $r_3 = r_2$ ), получим формулу для жесткости кругового сектора с центральным углом  $\alpha = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$ .

$$\begin{aligned}
 C = & 2Gr_2^4 \left[ \frac{\alpha}{8} - \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{z\alpha}{2}}{z(z^2 + 4)^2} dz \right] = \\
 = & Gr_2^4 \frac{8\alpha^3}{\pi^4} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \left( k + \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2} = Gr_2^4 K(\alpha). \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

При этом использованы значения интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{z\alpha}{2}}{z(z^2 + q^2)^2} dz = \frac{\alpha\pi}{8q^3} - \frac{\alpha^3}{q\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \left( k + \frac{\alpha q}{\pi} \right)^2}, \quad (6.2)$$

и неизвестных

$$X(z) = \frac{4r_2^2 \operatorname{ch} z \varphi_1}{(z^2 + 4) \operatorname{ch} z (\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad Y_k = 0, \quad (6.3)$$

которые получаются из систем (2.7) соответствующим предельным переходом при  $r_3 = r_2$  и  $r_1 = 0$ .

Формула (6.1) совпадает с формулами Стивенсона А. С. [7] и Арутюняна Н. Х. [8, 9], выведенными ими для жесткости кругового сектора другими способами.

Формулу (6.1) можно записать также и в виде

$$K(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{\pi} \left[ \psi\left(\frac{x}{\pi}\right) - 2\psi\left(\frac{2x}{\pi}\right) - C_0 \right] + \\ + \frac{2x}{\pi^2} \left[ \psi'\left(\frac{2x}{\pi}\right) - \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{x}{\pi}\right) \right], \quad (6.4)$$

где использовано значение ряда

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+z)^2} = \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{\pi^2}{8} + \psi'(z) - \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{z}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{z} \left[ \psi\left(\frac{z}{2}\right) - 2\psi(z) - C_0 \right] \right\}. \quad (6.5)$$

Здесь  $\psi(z)$  и  $\psi'(z)$  — соответственно первая и вторая производные гамма-функции, а  $C_0$  — постоянная Эйлера [16].

Из (5.2), при  $t_2 = 0$ , получаем также формулу для жесткости стержня с сечением в виде кольцевого сектора с центральным углом  $\alpha = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$

$$C = Gr_2^4 K(\lambda; \alpha), \quad \lambda = \frac{r_1}{r_2}, \quad (6.6)$$

где

$$K(\lambda; \alpha) = \frac{\alpha}{4} (1 - \lambda^4) - \frac{\alpha}{4t_1} (1 - \lambda^2)^2 - \\ - \frac{16}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]^2}{\beta_k^2 (\beta_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\beta_k \alpha}{2}. \quad (6.7)$$

При этом использованы следующие значения неизвестных

$$X_k = \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k^2 + 4} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1}{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad Y_k = 0, \quad (6.8)$$

получаемые из систем (2.7) соответствующим предельным переходом при  $r_3 = r_2$ .

## § 7. Численные примеры

В качестве численных примеров рассмотрены стержни с сечениями в виде кольцевого сектора с краевыми зубцами и без зубцов.

В таблицах 1 и 2 для жесткости кольцевого сектора даются значения коэффициента  $K(\lambda, \alpha)$ , вычисленные по формуле (6.7). В этих же таблицах, для сравнения, приведены также значения этого же коэффициента, вычисленные в работе Лыскова [6] и по Сен-Венану [2].

Таблица 1

| $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$            | 0,0   | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9    | 1,0 |
|----------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-----|
| $K(\lambda; 2\pi)$<br>По Лыскову       | 0,878 | 0,725 | 0,570 | 0,394 | 0,291 | 0,183 | 0,101 | 0,045 | 0,014 | 0,0019 | 0   |
| $K(\lambda; 2\pi)$ По<br>формуле (6.7) | 0,878 | 0,726 | 0,570 | 0,421 | 0,293 | 0,184 | 0,102 | 0,045 | 0,015 | 0,0021 | 0   |

Таблица 2

| $\alpha$                                                   | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$  | $2\pi$ |
|------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|--------|--------|
| $K\left(\frac{1}{2}; \alpha\right)$<br>по Сеп-Венану       | 0,0196          | 0,0524           | 0,0854 | —      |
| $K\left(\frac{1}{2}; \alpha\right)$<br>по формуле<br>(6.7) | 0,0169          | 0,0565           | 0,0942 | 0,1844 |

В таблице 3 приводятся вычисленные по формуле (5.2) жесткости стержней с сечениями в виде полукольца с зубцами (фиг. 2) и хомута (фиг. 3) с размерами

$$\frac{r_1}{r_2} = 0,7; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,3; \quad \varphi_2 = 0,3 = 17^\circ 11' 19'' \quad (7.1)$$

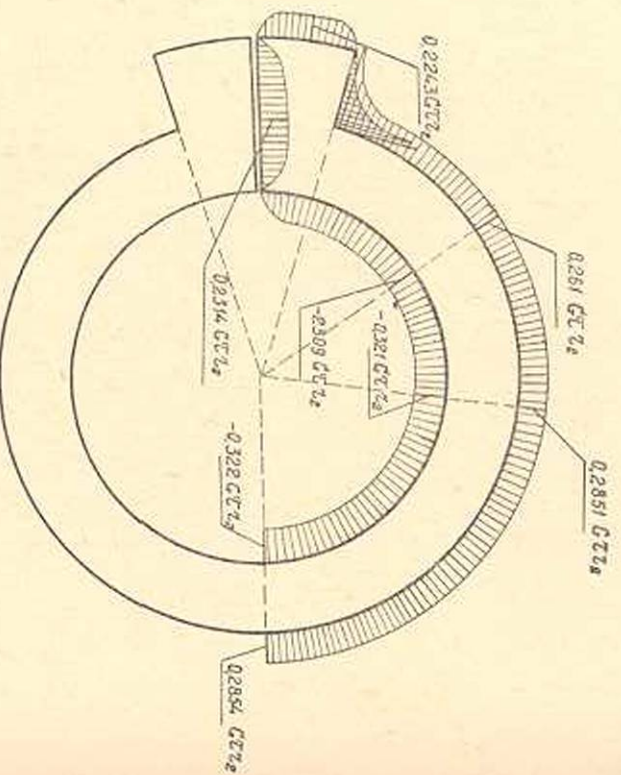
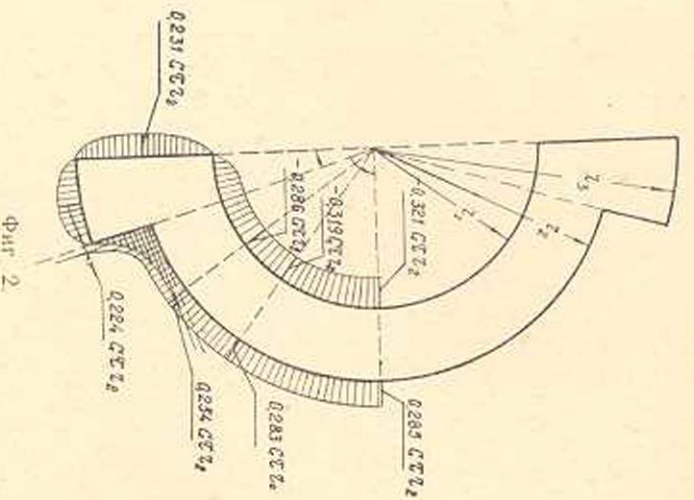
для двух случаев  $\left( \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \right)$ .

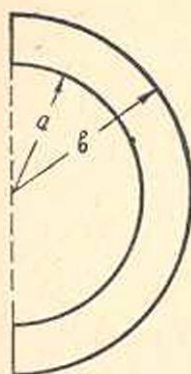
В этой же таблице, для сравнения, приводятся также жесткости стержней с сечениями в виде полукольца  $\left( \frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_2} = 0,7 \text{ и } \frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{7}{13} \right)$  и колец с трещинами таких же размеров (фиг. 4 и 5).

Таблица 3

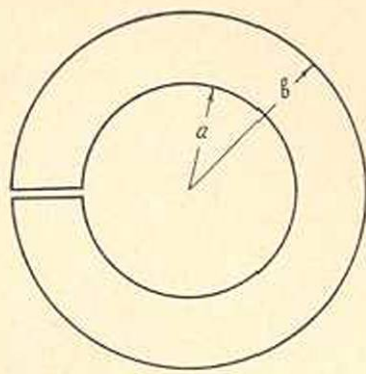
|                    | $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ | Кольцевой сектор                      | Кольцевой сектор с краевыми зубцами |           |         | Кольцевой сектор                               |
|--------------------|---------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------|---------|------------------------------------------------|
|                    |                                 | $\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_2} = 0,7$ | с недост.                           | с избытк. | среднее | $\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{7}{13}$ |
| Жесткости          | $\frac{\pi}{2}$                 | 0,033                                 | 0,103                               | 0,105     | 0,104   | 0,257                                          |
| $\frac{C}{Gr_2^4}$ | $\pi$                           | 0,045                                 | 0,127                               | 0,131     | 0,129   | 0,513                                          |







Фиг. 4.



Фиг. 5.

## § 8. Определение напряжений

Пользуясь соотношениями (1.2), (1.5) и (4.4)–(4.6), для определения касательных напряжений  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{z\varphi}$  в сечении стержня, получим следующие формулы

$$\tau_{rz}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{t_1 r_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \quad (8.1)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\tau_{z\varphi}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[ \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} - r_2^2 e^{2t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \cos \beta_k t \right], \quad (8.2)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\tau_{rz}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[ \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{ch} \beta_k \varphi}{(\beta_k^2 + 4) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t - \right. \\ \left. - \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t - \right. \\ \left. - \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \cos \lambda_k \varphi \right], \quad (8.3)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\tau_{z\varphi}(t, \varphi) = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[ \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} - r_2^2 e^{2t} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{sh} \beta_k \varphi}{(\beta_k^2 + 4) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \cos \beta_k t + \\
& + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \cos \beta_k t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{ch} \lambda_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi \Bigg] \quad (8.4) \\
& (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}(t, \varphi) = & - \frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[ - \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \cos \lambda_k \varphi + \right. \\
& + \left. \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{sh} \gamma_k \left( \frac{\varphi_2}{2} + \varphi \right)}{(\gamma_k^2 + 4) \operatorname{ch} \gamma_k \frac{\varphi_2}{2}} \sin \gamma_k t \right], \quad (8.5) \\
& (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{z\varphi}(t, \varphi) = & - \frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left[ \frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} - r_2^2 e^{2t} - \right. \\
& - \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{ch} \gamma_k \left( \frac{\varphi_2}{2} + \varphi \right)}{(\gamma_k^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{\gamma_k \varphi_2}{2}} \cos \gamma_k t - \\
& - \left. \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{ch} \lambda_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi \right] \quad (8.6) \\
& (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2).
\end{aligned}$$

В качестве примера по этим формулам вычислены напряжения  $\tau_{z\varphi}$  для стержней с сечениями в виде полукольца с зубцами (фиг. 2) и хомута (фиг. 3), приведенных в параграфе 6.

На фигурах 2 и 3 приводятся эпюры распределения этих напряжений в рассматриваемых сечениях.

В частном случае, когда мы имеем стержень с сечением в виде кругового сектора ( $r_1 = 0$ ,  $r_3 = r_2$ ,  $2(\varphi_1 + \varphi_2) = \alpha$ ), для определения максимальных касательных напряжений  $\tau_{z\varphi}$  на криволинейной части контура сечения получаем формулу

$$\tau_{z\varphi} \left( 0, \frac{\alpha}{2} \right) = G\tau r_2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \psi \left( \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{4} \right) - \psi \left( \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{3}{4} \right) \right] \right\}. \quad (8.7)$$

Некоторые значения этих напряжений, вычисленные по формуле (8.7), приводятся в таблице 4. В этой же таблице, для сравнения, приводятся значения тех же напряжений, вычисленные Сен-Венаном [2].

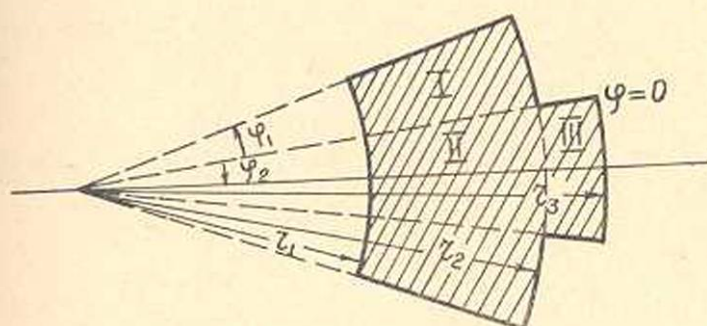


Таблица 4

| $\alpha$                                      |                         | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$  | $2\pi$ |
|-----------------------------------------------|-------------------------|-----------------|------------------|--------|--------|
| $\tau_{\varphi}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ | по Сен-Венану           | 0,452           | 0,622            | 0,719  | —      |
| $G\tau r_z$                                   | по точной формуле (8.7) | 0,4522          | 0,6324           | 0,7268 | 0,8488 |

### Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с центральным зубцом

Рассмотрим кручение стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора, имеющего на наружной криволинейной части центрально расположенный зубец (фиг. 6).



Фиг. 6.

#### § 9. Постановка и решение задачи

В силу симметрии профиля функцию  $\Phi(t, \varphi)$  ищем только в половине области сечения (фиг. 6). Разбиваем эту область на простейшие области I, II и III и полагаем, что  $\Phi(t, \varphi)$  в этих областях принимает значения  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ , которые для нашего профиля должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \Phi_1(t, \varphi_1) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = 0, \\ \Phi_2(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0, \\ \Phi_3(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} &= \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, 0) &= \Phi_2(t, 0), \quad \Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \\ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} &= \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0}, \quad \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=0} = \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right)_{t=0} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}. \quad (9.3)$$

Решая уравнение задачи при условиях (9.1) и (9.2), для функций  $\Phi_i(t, \varphi)$  получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t + \\ & + \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\beta_k (\beta_k^2 + 4) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t, \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t + \\ & + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi, \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, -t_1 \leq t \leq 0)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi - \\ & - \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{ch} \gamma_k (\varphi_2 + \varphi)}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4) \operatorname{ch} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$(-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2)$$

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (9.7)$$

Постоянные коэффициенты, входящие в выражения (9.4)–(9.6), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k, \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9.8)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2m\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_1) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)}, \\ b_{kp} &= \frac{2\lambda_k}{mt_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2) (\beta_p^2 + \lambda_k^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

$$P_k = \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{ch} \beta_k \varphi_2}{(\beta_k^2 + 4) \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{1}{m (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left\{ \frac{2r_2^2 \lambda_k}{\lambda_k^2 - 4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lambda_k t_1} + \frac{1}{\lambda_k^2 - 4} \left( r_2^2 \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_3^2}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Сумма модулей коэффициентов систем (9.8) оценивается неравенствами

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| &= \frac{2m\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} = \\ &= \frac{m}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{cth} \beta_k \varphi_1} \left( \operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 - \frac{1}{\beta_k \varphi_2} \right) < m = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| &= \frac{2\lambda_k}{mt_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} = \\ &= \frac{1}{m (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left( \operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{1}{\lambda_k t_1} \right) < \frac{1}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

а свободные члены этих систем ограничены сверху и при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

#### § 10. Определение жесткости при кручении

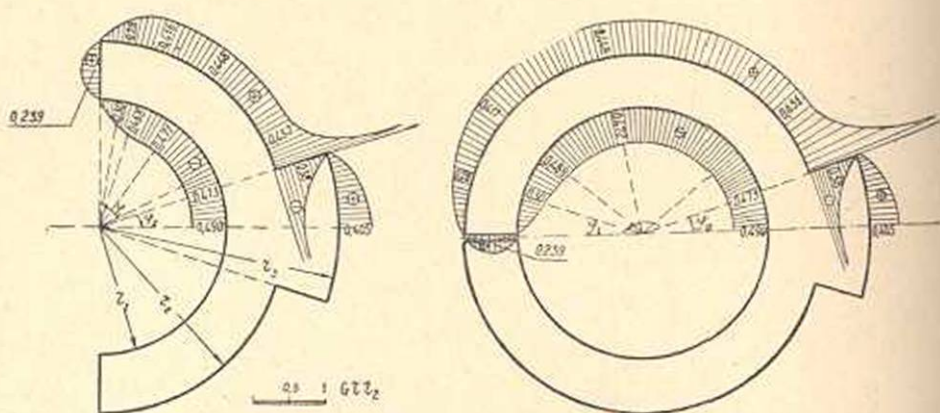
Пользуясь формулой (5.1) и выражениями (1.5), (9.4)–(9.6), для жесткости при кручении рассматриваемого профиля получим следующую формулу

$$\begin{aligned} C &= 4G \left\{ \frac{\varphi_1}{8} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\varphi_2}{8} (r_3^4 - r_1^4) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{8t_1} (r_2^2 - r_1^2)^2 - \right. \\ &\quad - \frac{\varphi_2}{8t_2} (r_3^2 - r_1^2)^2 - \frac{r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \left( \operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_1}{2} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{mr_2^2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left( \operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \right. \right. \end{aligned}$$

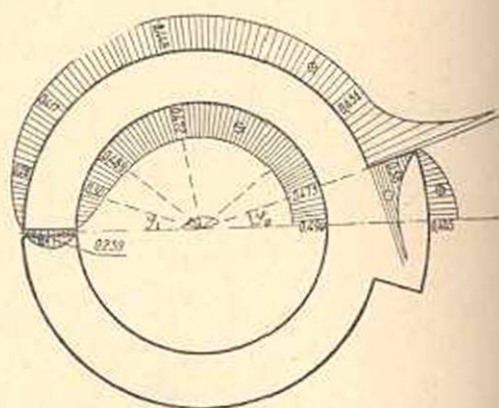


$$\begin{aligned}
 & - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \Big) - \frac{4r_2^4}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}|^2}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \frac{\beta_k \varphi_1}{2} - \\
 & - \frac{4r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_2}|^2}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2 \Big\}. \quad (10.1)
 \end{aligned}$$

В качестве численного примера по формуле (10.1) вычислены жесткости стержней с сечениями в виде полукольца с центральным зубцом (фиг. 7) и кольца с трещиной и центральным зубцом (фиг. 8) для случая, когда



Фиг. 7.



Фиг. 8.

$$\frac{r_1}{r_2} = 0,7; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,3; \quad \varphi_2 = 0,3 = 17^\circ 11' 19''. \quad (10.2)$$

Значения жесткости с избытком и с недостатком для этих двух случаев  $\left( \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \right)$  приведены в таблице 5.

Таблица 5

|                    |                                         | Кольцевой сектор с центральным зубцом |            |         |
|--------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|------------|---------|
|                    |                                         | с недостатком                         | с избытком | среднее |
| Жесткости          | $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ | 0,078                                 | 0,080      | 0,079   |
| $\frac{C}{Gr_2^4}$ | $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$           | 0,089                                 | 0,091      | 0,090   |

Сравнивая эти значения с жесткостями профилей (фиг. 2 и 3), приведенными в таблице 3, мы видим, что жесткость кольцевого сектора с краевыми зубцами больше жесткости такого же кольцевого сектора, имеющего центральный зубец соответствующего размера.

На фигурах 7 и 8 приводятся также и эпюры напряжений.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 25 VI 1959

Բ. Լ. Աբրահամյան, Վ. Ս. Տոնոյան

ԱՏԱՄՆԵՐՈՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏԵՍՔԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ  
ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Հոդվածում դիտարկվում է ատամներով օղակալին սեկտորի տեսքի լայնական կտրվածքով պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը, երբ ատամները զաստվորված են սիմետրիկ ձևով կողմնալին զիրքով (գծ. 1) և երբ ատամըն ունի կենտրոնական զիրք (գծ. 6):

Այս խնդրի ճշգրիտ լուծումն ստացված է օժանդակ ֆունկցիաների ներածուման եղանակով:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է շարքերով: Ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերված է անվերջ գծալին հավասարումների սիստեմաների լուծման: Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմաները լիովին սեղուկյար են: Մի քանի դեպքերի համար հաշվված են ոլորման կոշտութունները և լարումները:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сен-Венан (Saint-Venant). Sur la torsion des prismes à base mixtiligne, et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé. Comptes Rendus t. 87, 1878, № 23, 849—854.
2. Сен-Венан (Saint-Venant). Exemples du calcul de la torsion de prismes a base mixtiligne. Comp. Rend. t. 87, 1878, № 24, 893—899.
3. Гринхилл (Greenhill A.). Mess. of Math., Vol. 9, 1879, p. 35.
4. Динник А. Н. Известия Донск. политехн. инст. Новочеркасск, том 1, отд. II, 1912; том II, отд. II, 1913, стр. 309.
5. Локшин А. Ш. Кручение вала секторного сечения. Изв. Днепропетровского горн. института, 1928.
6. Лысков В. Н. Влияние радиальной трещины при кручении сплошного и трубчатого круглого вала. Изв. Донск. политехнического института, том XIV, 1930.
7. Стивенсон А. С. (Stevenson). Flexure with shear and associated torsion in Prisms of Uni-Axial and Asymmetric cross-sections, Phil. Trans. Roy. Soc., London, (A), 237, 1938, 161—229.
8. Арутюнян Н. Х. О кручении эллиптического кольцевого сектора. ПММ, т. XI, № 5, 1947, 543—546.
9. Арутюнян Н. Х. Приближенное решение некоторых задач о кручении анизотропных стержней. Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. 2, 1948, стр. 41—56.
10. Шэн Бей-Линь (Shang Pei-Lin). Note on the torsional rigidity of cylinders of circular sector cross-sections. ZAMP, 1955, Bd. 6, №5, 416—419.
11. Шэн Бей-Линь (Shang Pei-Lin). Note on the torsional rigidity of semi-circular bars. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 9, 1951, 309—310.
12. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, вып. I, 1949, 107—112. ДАН Арм. ССР, т. IX, № 2, 1948, 67—74.
13. Абрамян Б. Л. Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы. ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 3, 1959, 109—116.



14. Абрамян Б. Л. О кручении круглого цилиндрического стержня, имеющего продольные полости. ДАН АрмССР, том XXVIII, № 5, 1959, 201—211.
15. Канторович Л. В., Крылов Б. И. Приближенные методы высшего анализа М.—Л., 1949.
16. Эмде Ф. и Янке Е. Таблицы функций. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.



К. С. Чобанян, П. О. Галфаян

## Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием

В статье рассматривается задача о кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения с прямоугольным симметричным вырезом. Боковая и внутренняя поверхности стержня предполагаются покрытыми усиливающим слоем постоянной толщины.

На основании малости толщины покрытия по сравнению с поперечными размерами стержня, в постановке рассматриваемой задачи влияние усиливающего покрытия с определенным приближением выражено контурным условием задачи определения функции напряжений при кручении [1]. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работе [2].

Рассматриваемая задача сведена к решению совокупности двух вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. При двух отношениях размеров квадратного сечения с оценкой погрешности приближения решена совокупность бесконечных систем. Определены напряжения в характерных точках сечения и жесткость на кручение стержня.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения скручиваемого стержня показаны на фиг. 1. Области соответствующие усиливающему покрытию, заштрихованы.

Функция напряжений при кручении  $F(x, y)$  в области поперечного сечения, соответствующей основному материалу стержня, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2G \quad (1.1)$$

и приближенному [2] контурному условию

$$F + \mu \frac{\partial F}{\partial n} = c. \quad (1.2)$$

Здесь  $\mu = \delta \frac{G_1}{G}$ , где  $\delta$  — толщина покрытия,  $G$  и  $G_1$  — модули сдвига основного материала и материала покрытия стержня,  $n$  — направление внешней нормали к контуру  $L$ ,  $c$  — постоянная величина, значение которой на внешнем контуре можно приравнять нулю [2].

Жесткость стержня на кручение определяется формулой

$$C = 2 \iint_{D_0} F(x, y) dx dy + 2c_0 \Omega_0, \quad (1.3)$$

где  $c_0$  — значение  $c$  на внутреннем контуре, а  $\Omega_0$  — площадь, ограниченная контуром  $c_0$ .

Касательные напряжения в области  $D_0$  определяются обычными формулами

$$\tau_{xz} = \vartheta \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\vartheta \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.4)$$

В области  $D_1$ , соответствующей покрытию, касательное напряжение направлено по касательной  $L_1$  и определяется формулой

$$\tau_{sz} = \vartheta \frac{F_0 - C_0}{\delta}, \quad (1.5)$$

где  $\vartheta$  — степень кручения, а  $F_0$  — значение функции  $F$  на  $L_1$ .

По соображениям симметрии достаточно определить функцию  $F(x, y)$  только в областях I, II и III.

Функцию  $F$  будем искать в виде:

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) + S(x) & \text{в области I,} \\ F_2(x, y) & \text{в области II,} \\ F_3(x, y) + S(y) & \text{в области III,} \end{cases} \quad (1.6)$$

где

$$S(x) = \frac{c_0}{2\mu + a}(x + \mu), \quad S(y) = \frac{c_0}{2\mu + d}(y + \mu). \quad (1.7)$$

На основании (1.1), (1.2) и (1.6) для определения  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  получаем следующие условия:

$$\Delta F_i = -2G, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

$$F_1(0, y) - \mu \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F_1(a, y) + \mu \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad (1.9)$$

$$F_2(0, y) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F_2(x, 0) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (1.10)$$

$$F_3(x, 0) - \mu \frac{\partial F_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_3(x, d) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial y} \Big|_{y=d} = 0, \quad (1.11)$$

$$F_2(x, d) = F_1(x, d) + S(x), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=d} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d}, \quad (1.12)$$

$$F_2(a, y) = F_3(a, y) + S(y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=a}. \quad (1.13)$$



$$F_2(x, d) = F_1(x, d + c) + S(x), \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{y=d} = - \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{y=d+c}, \quad (1.14)$$

$$F_2(a, y) = F_3(a + b, y) + S(y), \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{x=a} = - \left. \frac{\partial F_3}{\partial x} \right|_{x=a+b}. \quad (1.15)$$

Условия (1.14) и (1.15) выражают симметричность функции  $F(x, y)$  относительно осей симметрии области прямоугольного сечения стержня.

Функции  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  представим в виде рядов:

$$F_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y) \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{M_k}, \quad (1.16)$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(y) \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{M_k}, \quad (1.17)$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{N_k}, \quad (1.18)$$

где

$$M_k = \sqrt{\mu + \frac{a}{2}(1 + \mu^2 \alpha_k^2)}, \quad N_k = \sqrt{\mu + \frac{d}{2}(1 + \mu^2 \beta_k^2)}, \quad (1.19)$$

$\alpha_k$  и  $\beta_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) являются корнями трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} 1 - \mu^2 \alpha_k^2 + 2\mu \alpha_k \operatorname{ctg} \alpha_k a &= 0, \\ 1 - \mu^2 \beta_k^2 + 2\mu \beta_k \operatorname{ctg} \beta_k d &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Последовательности  $[\alpha_k]$  и  $[\beta_k]$ , при  $k$  стремящемся к бесконечности, стремятся к последовательностям  $\left[\frac{k\pi}{a}\right]$  и  $\left[\frac{k\pi}{d}\right]$  [2].

Системы функций

$$\frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{N_k}, \quad (1.21)$$

в интервалах  $0 < x < a$  и  $0 < y < d$  являются ортонормированными.

Разложим функции  $S(x)$  и  $S(y)$  в ряды по функциям (1.21) в интервалах  $0 < x < a$  и  $0 < y < d$ :

$$\begin{aligned} S(x) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k} \cdot \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{M_k^2}, \\ S(y) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\beta_k} \cdot \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{N_k^2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$



2. Внося (1.16)–(1.18) в (1.8) и используя условия (1.10), (1.14), (1.15), находим

$$f_k(y) = B_k \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \left[ y - \left( d + \frac{c}{2} \right) \right]}{\operatorname{ch} \alpha_k \left( d + \frac{c}{2} \right)} + \frac{2G}{\alpha_k^3} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{M_k}, \quad (2.1)$$

$$\psi_k(x) = D_k \frac{\operatorname{ch} \beta_k \left[ x - \left( a + \frac{b}{2} \right) \right]}{\operatorname{ch} \beta_k \left( a + \frac{b}{2} \right)} + \frac{2G}{\beta_k^3} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{N_k}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = E_k & \left[ \operatorname{sh} \alpha_k (y - d) + \frac{\operatorname{th} \alpha_k d + \mu \alpha_k}{1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k d} \operatorname{ch} \alpha_k (y - d) \right] + \\ & + \frac{2G}{\alpha_k^3} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{M_k} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (y - d)}{\operatorname{ch} \alpha_k d + \mu \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k d} \right] + \\ & + \frac{\sin \alpha \alpha_k + \mu \alpha_k \cos \alpha \alpha_k}{\mu M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left[ D_p \frac{1 - \mu \beta_p \operatorname{th} \frac{b \beta_p}{2}}{\operatorname{ch} \beta_p \left( a + \frac{b}{2} \right)} \operatorname{ch} \frac{b \beta_p}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \beta_p^2)}{\beta_p^3 N_p} \right] \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{N_p}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $B_k$ ,  $D_k$  и  $E_k$  — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (1.12) и (1.13). Условия (1.9) и (1.11) удовлетворяются при помощи уравнений (1.20).

На основании (1.17) и (2.3) получаем

$$\begin{aligned} F_2(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} & \left\{ E_p \left[ \operatorname{sh} \alpha_p (y - d) + \frac{\operatorname{th} \alpha_p d + \mu \alpha_p}{1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} \alpha_p d} \operatorname{ch} \alpha_p (y - d) \right] + \right. \\ & + \frac{2G}{\alpha_p^3} \cdot \frac{1 + (-1)^p}{M_p} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_p (y - d)}{\operatorname{ch} \alpha_p d + \mu \alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p d} \right] \left. \right\} \frac{\sin \alpha_p x + \mu \alpha_p \cos \alpha_p x}{M_p} + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \left[ D_p \frac{1 - \mu \beta_p \operatorname{th} \frac{b \beta_p}{2}}{\operatorname{ch} \beta_p \left( a + \frac{b}{2} \right)} \operatorname{ch} \frac{b \beta_p}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \beta_p^2)}{\beta_p^3 N_p} \right] \frac{\operatorname{sh} \beta_p x + \mu \beta_p \operatorname{ch} \beta_p x}{(1 + \mu \beta_p^2 \operatorname{sh} \alpha \beta_p + 2 \mu \beta_p \operatorname{ch} \alpha \beta_p)} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{N_p} \quad (2.4)$$

Здесь использована сумма ряда [7]

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin \alpha_k a + \mu \alpha_k \cos \alpha_k a)(\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x)}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2) M_k^2} = \\ = \mu \frac{\operatorname{sh} \beta_p x + \mu \beta_p \operatorname{ch} \beta_p x}{(1 + \mu^2 \beta_p^2) \operatorname{sh} \beta_p a + 2\mu \beta_p \operatorname{ch} \beta_p a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Справедливость (2.5) проверяется разложением правой части в ряд по функциям (1.21).

Используя условия (1.12) и (1.13) и принимая во внимание (2.1), (2.3) и (2.4), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} Y_p + a_k, \quad Y_k = \sum_{p=0}^{\infty} b_{kp} X_p + b_k, \quad (2.6)$$

где

$$a_{kp} = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\left(1 - \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2}\right) \left[(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu \alpha_k\right]}{1 + \operatorname{th} \alpha_k d \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2} + \mu \alpha_k \left(\operatorname{th} \alpha_k d + \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2}\right)} \cdot \frac{\beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2}, \quad (2.7)$$

$$b_{kp} = \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{\left(1 - \mu \beta_k \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2}\right) \left[(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} \beta_k a + 2\mu \beta_k\right]}{1 + \operatorname{th} \beta_k a \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2} + \mu \beta_k \left(\operatorname{th} \beta_k a + \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2}\right)} \cdot \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) M_p^2}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\left(1 - \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2}\right) \left[(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu \alpha_k\right]}{1 + \operatorname{th} \alpha_k d \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2} + \mu \alpha_k \left(\operatorname{th} \alpha_k d + \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2}\right)} \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p^2 (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \cdot \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \beta_p^2)}{N_p^2} + \\ + \frac{1}{\alpha_k^2} \cdot \frac{[(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu \alpha_k] \cdot \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2}}{1 + \operatorname{th} \alpha_k d \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2} + \mu \alpha_k \left(\operatorname{th} \alpha_k d + \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2}\right)} \left[ c_0 + \frac{2G}{\alpha_k^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + (-1)^k}{\operatorname{ch} \alpha_k d + \mu \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k d} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 b_k = & \frac{2G}{\beta_k} \frac{\left(1 - \mu \beta_k \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2}\right) [(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{tha} \beta_k + 2 \mu \beta_k]}{1 + \operatorname{tha} \beta_k \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2} + \mu \beta_k \left(\operatorname{tha} \beta_k + \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2}\right)} \times \\
 & \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \beta_k^2) M_p^2} \left[ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_p d + \mu \alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p d} \right] - \\
 & - \frac{1}{\beta_k^2} \frac{\left(1 - \mu \beta_k \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2}\right) (1 + \mu \beta_k \operatorname{th} a \beta_k)}{1 + \operatorname{tha} \beta_k \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2} + \mu \beta_k \left(\operatorname{tha} \beta_k + \operatorname{th} \frac{b \beta_k}{2}\right)} \left[ c_0 + \right. \\
 & \left. + \frac{2G}{\beta_k^2} \frac{1 + (-1)^k}{\operatorname{cha} \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{sh} a \beta_k} \right], \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

$$D_k = \frac{(-1)^k \alpha_k}{M_k} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \left(a + \frac{b}{2}\right)}{\left(1 - a \alpha_k \operatorname{th} \frac{b \alpha_k}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{b \alpha_k}{2}} Y_k, \quad (2.11)$$

$$E_k = \frac{(-1)^k \alpha_k}{M_k} \frac{1 + a \alpha_k \operatorname{th} a \alpha_k}{(1 + a^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} a \alpha_k + 2 a \alpha_k} X_k.$$

Коэффициент  $B_k$  через  $E_k$  и  $D_k$  определяется соотношением

$$\begin{aligned}
 B_k = & \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \left(d + \frac{c}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{c \alpha_k}{2}} \left[ -E_k + \frac{(-1)^k}{M_k} \sum_{p=0}^{\infty} D_p \frac{(-1)^p \beta_p^2}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \frac{1 - \mu \beta_p \operatorname{th} \frac{b \beta_p}{2}}{N_p} \times \right. \\
 & \times \frac{\operatorname{ch} \frac{b \beta_p}{2}}{\operatorname{ch} \beta_p \left(a + \frac{b}{2}\right)} + \left. \frac{(-1)^k}{M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p^2 (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \beta_p^2)}{N_p^2} \right]. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Для определения  $c_0$  пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при кручении [6]

$$\oint_{L_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds = -2G \Omega_0, \quad (2.13)$$

где  $L_0$  — внутренний контур сечения, а  $\Omega_0$  — площадь, ограниченная этим контуром.

Подставив в (2.13) значение

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{ds} \quad (2.14)$$

и произведя некоторые преобразования, соотношение (2.13) приведем к виду



$$\int_a^{a+b} \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} \right)_{y=d} dx + \int_d^{d+c} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)_{x=a} dy = Gbc. \quad (2.15)$$

Используя условия (1.6), (1.7), (1.16), (1.18), (2.1), (2.2) и (2.15) получим выражение, определяющее значение  $c_0$  через искомые коэффициенты:

$$c_0 = \frac{2\mu + d}{b + c} \left\{ Gbc + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ [1 + (-1)^k] \left[ \frac{b}{\beta_k^2 N_k^2} + \frac{c}{\alpha_k^2 M_k^2} \right] G + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{D_k}{N_k} \frac{\operatorname{sh} \frac{b\beta_k}{2}}{\operatorname{ch} \beta_k \left( a + \frac{b}{2} \right)} + \frac{B_k}{M_k} \frac{\operatorname{sh} \frac{c\alpha_k}{2}}{\operatorname{ch} \alpha_k \left( d + \frac{c}{2} \right)} \right\} \right\}. \quad (2.16)$$

Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.6) вполне регулярна. Действительно, используя сумму

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\operatorname{th} \alpha_k d + \mu \alpha_k}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu \alpha_k},$$

получаемую из (2.5), находим

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{1}{\mu \alpha_k} \frac{\left| 1 - \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} \right| (\operatorname{th} d\alpha_k + \mu \alpha_k)}{1 + \operatorname{th} d\alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} + \mu \alpha_k \left( \operatorname{th} d\alpha_k + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} \right)} < \\ < \frac{\operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}}{1 + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}} = 1 - \theta, \quad \theta = \frac{1}{1 + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}} > 0. \quad (2.17)$$

Здесь использованы неравенства

$$\left| 1 - \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} \right| < \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}, \quad (2.18)$$

$$1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d\alpha_k < \mu \alpha_k + \operatorname{th} d\alpha_k. \quad (2.19)$$

Неравенство (2.19) доказывается при помощи неравенства  $\mu \alpha_k > 1$ , которое следует из уравнений (1.20) при условии  $\frac{\mu}{2} > \frac{2}{\pi}$ .

В случае, когда

$$\left| 1 - \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} \right| < 1$$

имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{1}{\mu \alpha_k \left( 1 + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} \right)} = 1 - \theta_1,$$

$$\eta_1 = \frac{\mu \alpha_k + \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2} - 1}{\mu \alpha_k \left( 1 + \operatorname{th} \frac{c \alpha_k}{2} \right)} < 1. \quad (2.20)$$

Согласно (2.8) точно такие же оценки получим для суммы абсолютных значений коэффициентов второй системы (2.6). Таким образом, на основании (2.17) и (2.20), совокупность бесконечных систем (2.6) вполне регулярна [5]. Ограниченность свободных членов (2.9) и (2.10) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.6) позволяют определять искомые коэффициенты с любой степенью точности и дать оценку погрешности приближенного решения.

3. Рассмотрим случай квадратного сечения  $d = a$ ,  $c = b$ . Коэффициенты и свободные члены совокупности систем уравнений (2.6) на основании (2.7) — (2.10) будут

$$a_{kp} = b_{kp} = \frac{r_k \alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2}, \quad (3.1)$$

$$a_k = r_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2)} \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \alpha_p^2)}{M_p^2} +$$

$$+ \frac{r_k}{\alpha_k} \frac{\operatorname{th} \frac{b \alpha_k}{2}}{1 - a \alpha_k \operatorname{th} \frac{b \alpha_k}{2}} \left[ c_0 + \frac{2G}{\alpha_k^2} \frac{1 + (-1)^k}{\operatorname{ch} a \alpha_k + a \alpha_k \operatorname{sh} a \alpha_k} \right], \quad (3.2)$$

$$b_k = 2G r_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2} \left[ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} a \alpha_p + a \alpha_p \operatorname{sh} a \alpha_p} \right] -$$

$$- \frac{r_k}{\alpha_k} \frac{1 + a \alpha_k \operatorname{th} a \alpha_k}{(1 + a^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} a \alpha_k + 2a \alpha_k} \left[ c_0 + \frac{2G}{\alpha_k^2} \frac{1 + (-1)^k}{\operatorname{ch} a \alpha_k + a \alpha_k \operatorname{sh} a \alpha_k} \right], \quad (3.3)$$

где

$$r_k = \frac{1}{\alpha_k} \frac{\left( 1 - a \alpha_k \operatorname{th} \frac{b \alpha_k}{2} \right) [(1 + a^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} a \alpha_k + 2a \alpha_k]}{1 + \operatorname{th} a \alpha_k \cdot \operatorname{th} \frac{b \alpha_k}{2} + a \alpha_k \left( \operatorname{th} a \alpha_k + \operatorname{th} \frac{b \alpha_k}{2} \right)}. \quad (3.4)$$

Из симметричности задачи относительно диагонали квадратного сечения следует, что

$$B_k = D_k. \quad (3.5)$$

Для толщины усиливающего покрытия и механических характеристик материалов примем

$$\delta = 0,1 \cdot a; \quad G = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2; \quad G_1 = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2.$$

Тогда  $\mu = a$ .

Решая трансцендентное уравнение (1.20) методом касательных, для его корней с точностью до  $10^{-3}$  будем иметь:

$$ax_0 = 1,312; \quad ax_1 = 3,670; \quad ax_2 = 6,579; \quad ax_3 = 9,627;$$

$$ax_4 = 12,72; \quad ax_k = k\pi; \quad (k = 5, 6, 7, \dots).$$

Обозначим значения неизвестных  $X_k$  и  $Y_k$  с избытком через  $X_k^+$ ,  $Y_k^+$ , а с недостатком через  $X_k^-$ ,  $Y_k^-$ . Пользуясь теорией вполне регулярных систем [5], для  $X_k$  и  $Y_k$  получим следующие оценки:

$$\text{при } \frac{b}{a} = 2$$

$$\frac{X_0^-}{Ga^4} = 0,6047 \frac{c_0^-}{Ga^2} + 0,3056 \leq \frac{X_0}{Ga^4} \leq 0,6055 \frac{c_0^+}{Ga^2} + 0,3043 = \frac{X_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_1^-}{Ga^4} = 0,1076 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,09231 \leq \frac{X_1}{Ga^4} \leq 0,1110 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,09773 = \frac{X_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_2^-}{Ga^4} = 0,03838 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,05021 \leq \frac{X_2}{Ga^4} \leq 0,04469 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,06082 = \frac{X_2^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_3^-}{Ga^4} = 0,01826 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,02930 \leq \frac{X_3}{Ga^4} \leq 0,02704 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,04450 = \frac{X_3^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_0^-}{Ga^4} = 0,02482 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,01193 \leq \frac{Y_0}{Ga^4} \leq 0,02559 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,01329 = \frac{Y_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_1^-}{Ga^4} = 0,03429 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,09198 \leq \frac{Y_1}{Ga^4} \leq 0,03770 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,09741 = \frac{Y_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_2^-}{Ga^4} = 0,01579 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,05017 \leq \frac{Y_2}{Ga^4} \leq 0,02209 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,06078 = \frac{Y_2^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_3^-}{Ga^4} = 0,008041 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,02927 \leq \frac{Y_3}{Ga^4} \leq 0,01682 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,04448 = \frac{Y_3^+}{Ga^4},$$

$$\text{при } \frac{b}{a} = 4$$

$$\frac{X_0^-}{Ga^4} = 0,6281 \frac{c_0^-}{Ga^2} + 0,2944 \leq \frac{X_0}{Ga^4} \leq 0,6286 \frac{c_0^+}{Ga^2} + 0,2936 = \frac{X_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_1^-}{Ga^4} = 0,1060 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,09166 \leq \frac{X_1}{Ga^4} \leq 0,1096 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,09709 = \frac{X_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_2^-}{Ga^4} = 0,03753 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,04978 \leq \frac{X_2}{Ga^4} \leq 0,04367 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,06033 = \frac{X_2^+}{Ga^4},$$



$$\begin{aligned}\frac{X_3^-}{Ga^4} &= 0,01776 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,02905 \leq \frac{X_3}{Ga^4} \leq 0,02631 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,04414 = \frac{X_3^+}{Ga^4}, \\ \frac{Y_0^-}{Ga^4} &= 0,04719 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,02318 \leq \frac{Y_0}{Ga^4} \leq 0,04770 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,02393 = \frac{Y_0^+}{Ga^4}, \\ \frac{Y_1^-}{Ga^4} &= 0,03264 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,09131 \leq \frac{Y_1}{Ga^4} \leq 0,03624 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,09673 = \frac{Y_1^+}{Ga^4}, \\ \frac{Y_2^-}{Ga^4} &= 0,01488 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,04975 \leq \frac{Y_2}{Ga^4} \leq 0,02103 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,06029 = \frac{Y_2^+}{Ga^4}, \\ \frac{Y_3^-}{Ga^4} &= 0,007499 \frac{c_0^-}{Ga^2} - 0,02903 \leq \frac{Y_3}{Ga^4} \leq 0,01604 \frac{c_0^+}{Ga^2} - 0,04412 = \frac{Y_3^+}{Ga^4},\end{aligned}$$

где  $c_0^+$  — значение  $c_0$  с избытком, а  $c_0^-$  — значение с недостатком.

4. Для квадратного сечения согласно (1.6), (1.7), (1.18), (2.2), (2.4) и (2.11) функция напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned}F_2(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k x_k Y_k + \frac{2G + (-1)^k (2G + c_0^2 x_k^2)}{x_k^3} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{sh} x_k x + a x_k \operatorname{ch} x_k x}{(1 + a^2 x_k^2) \operatorname{sh} a x_k + 2a x_k \operatorname{ch} a x_k} \cdot \frac{\sin x_k y + a x_k \cos x_k y}{M_k^2} + \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \left[ (-1)^p x_p X_p + 2G \frac{1 + (-1)^p}{x_p^3} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} a x_p + a x_p \operatorname{sh} a x_p} \right) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{sh} x_p y + a x_p \operatorname{ch} x_p y}{(1 + a^2 x_p^2) \operatorname{sh} a x_p + 2a x_p \operatorname{ch} a x_p} \cdot \frac{\sin x_p x + a x_p \cos x_p x}{M_p^2} + \\ &+ 2G \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{x_p} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{x_k} \cdot \frac{\sin x_k y + a x_k \cos x_k y}{(x_k^2 + x_p^2) M_k^2} \times \\ &\quad \times \frac{\sin x_p x + a x_p \cos x_p x}{M_p^2},\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}F_3(x, y) &= \frac{c_0}{3a} (y + a) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{x_k}{\operatorname{ch} \frac{b x_k}{2}} \cdot \frac{\operatorname{ch} x_k \left| x - \left( a + \frac{b}{2} \right) \right|}{1 - a x_k \operatorname{th} \frac{b x_k}{2}} \cdot Y_k + \right. \\ &\quad \left. + 2G \frac{1 + (-1)^k}{x_k^3} \right] \frac{\sin x_k y + a x_k \cos x_k y}{M_k^2}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Используя найденные значения функции напряжений  $F(x, y)$  в формулах (1.3) — (1.5), найдем напряжения в двух характерных точках и жесткость при кручении

$$C = 2bc_0(2a + b) + 16 \sum_{k=0,2,4}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 M_k^2} \left\{ 8GJ_k + \frac{4Gb}{\alpha_k^2} + \frac{2\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}}{1 - \alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot Y_k + \frac{1 + \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k - \operatorname{sch} \alpha_k}{(1 + \alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k + 2\alpha_k} \cdot \left[ \frac{c_0}{\alpha_k} + (X_k + Y_k)\alpha_k + \frac{8G}{\alpha_k^3} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_k + \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k} \right) \right] \right\}, \quad (4.3)$$

$$\tau_{xz} \left( a + \frac{b}{2}, 0 \right) = \frac{c_0}{3a} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{M_k^2} \left[ \frac{\alpha_k^2}{\operatorname{ch} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot \frac{Y_k}{1 - \alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} + 2G \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \right], \quad (4.4)$$

$$\tau_{xz} \left( a + \frac{b}{2}, a \right) = \frac{c_0}{3a} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k^2} \left[ \frac{\alpha_k^2}{\operatorname{ch} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot \frac{Y_k}{1 - \alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} + 2G \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \right], \quad (4.5)$$

$$\tau_{yz} \left( a + \frac{b}{2}, 0 \right) = \tau_{yz} \left( a + \frac{b}{2}, a \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\tau_{xz}^* \left( a + \frac{b}{2}, 0 \right) = i0 \tau_{xz} \left( a + \frac{b}{2}, 0 \right); \quad \tau_{xz}^* \left( a + \frac{b}{2}, a \right) = -10 \tau_{xz} \left( a + \frac{b}{2}, a \right), \quad (4.7)$$

где

$$J_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2} = 2 \sum_{p=0,2,4}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2},$$

а  $\tau_{xz}^*$  обозначает напряжение в усиливающем покрытии.  $c_0$  для квадратного сечения принимает следующий вид;

$$c_0 = 1,5 Gab + 2,966 Ga^2 + \frac{6a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{M_k^2} \cdot \frac{\operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}}{1 - \alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot Y_k. \quad (4.8)$$

Подставляя в (4.8) значения  $Y_k$  с избытком и с недостатком и разрешая это уравнение относительно  $c_0$ , получим

$$c_0^- = 4,747 Ga^2 < c_0 < 4,774 Ga^2 = c_0^+ \quad \text{при } \frac{b}{a} = 2,$$

$$c_0^- = 7,918 Ga^2 < c_0 < 7,936 Ga^2 = c_0^+ \quad \text{при } \frac{b}{a} = 4.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов  $X_k^+$ ,  $Y_k^+$ ,  $c_0^+$  и  $X_k^-$ ,  $Y_k^-$ ,  $c_0^-$  в (4.3), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости.

Таблица 1

| $\frac{b}{a}$ | 2       | 4       |
|---------------|---------|---------|
| $C_0^+$       | 106,303 | 431,273 |
| $C_0^-$       | 106,005 | 430,540 |
| $h$           | 0,0028  | 0,0017  |

В таблице 1 приведены по формуле (4.3) значения величин

$$C_0^+ = C^+/Ga^4, \quad C_0^- = C^-/Ga^4$$

и максимальной относительной погрешности

$$h = (C^+ - C^-)/C^+$$

в процентах для двух отношений  $b/a$ .

Сопоставляя полученные результаты с известными [3], замечаем, что благодаря усиливающему покрытию жесткость квадратного стержня увеличивается более, чем в три раза.

Используя в (4.4), (4.5) значения коэффициентов  $c_0^+$ ,  $Y_k^+$  и  $c_0^-$ ,  $Y_k^-$ , определяем с избытком и недостатком значения напряжения  $\tau_{xz}$  в двух характерных точках при двух отношениях размеров поперечного сечения, которые приведены в таблице 2 с указанием относительной погрешности.

Таблица 2

| $\frac{a}{b}$                                             | 2                | 4              |
|-----------------------------------------------------------|------------------|----------------|
| $\frac{\tau_{xz}\left(a+\frac{b}{2}, 0\right)}{G\beta a}$ | 2,294<br>2,277   | 3,511<br>3,503 |
| $\frac{\tau_{xz}\left(a+\frac{b}{2}, a\right)}{G\beta a}$ | 0,8929<br>0,8924 | 1,780<br>1,776 |

Согласно (4.7), напряжения в усиливающем покрытии будут в 10 раз больше, чем напряжения в соответствующих точках контакта основного материала.



Կ. Ս. Չոբանյան, Գ. Լ. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅՑՈՎ ՍՆԱՍԵՋ  
ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՋՈՂԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում գիտարկվում է սխեմայիկ ուղղանկյուն անցքով ուղղանկյուն լայնական հատվածք ունեցող պրիզմայաձև ձողի ոլորման խնդիրը: Ձողի արտաքին և ներքին մակերևույթները ծածկված են ուժեղացնող բարակ շերտով:

Ելնելով ձողի հատվածքի չափումների նկատմամբ ուժեղացնող շերտի հաստության փոքրությունից, գիտարկվող խնդրում ծածկույթի առկայությունը որոշակի մոտավորությամբ արտահայտվում է լարումների ֆունկցիայի (1.2) կերպին պայմանով:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [2] աշխատության մեջ ուսումնասիրված օրիգինալ ֆունկցիաների սխեմայով: Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների երկու անվերջ սխեմաների լրիվ սեգուլյար համայնքի լուծմամբ:

Ձողի ոլորման կոշտության և լարումների վերջնական հաշվումը կատարված է քառակուսի կարգի համար:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Галфаян П. О., Чобанян К. С. Приближенное решение некоторых задач о кручении стержней с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН СССР, № 3, 1959.
2. Чобанян К. С., Галфаян П. О. Задача о кручении прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. (Находится в печати).
3. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 3.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. 1948.
5. Конторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1941.
6. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. 1947.
7. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Э. М. Нерсисян

# Определение закона движения конуса в неоднородной жидкости\*

Пусть узкий конус вертикально падает на свободную поверхность сжимаемой неоднородной жидкости, занимающей нижнее полупространство. Точку касания носика конуса со свободной поверхностью обозначим через  $O$ . Выберем ось  $Or$  по свободной поверхности, ось  $Oz$  направим вертикально вниз. Если предположить движение жидкости малым и изменение начальной плотности жидкости с глубиной экспоненциальным, т. е.  $\rho(z) = \rho_0 e^{kz}$ , то для давления возмущенного движения получим уравнение ([1] и [3])

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - k \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $a$  — начальная скорость звука,

$t$  — время с начала проникания.

Обозначим через  $f(t)$  глубину проникания конуса в момент времени  $t$ . Тогда граничное условие на боковой поверхности конуса запишется с учетом уравнения движения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \frac{d}{dt} [f'(t) \beta], \quad (2)$$

где  $2\beta$  — угол раствора конуса.

На свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному.

Решение уравнения (1) при заданных граничных условиях для более общего случая тела вращения получено А. Г. Багдоевым [3].

В случае проникания конуса в неоднородную несжимаемую жидкость ( $a = \infty$ ) решение проводится методом источников и распределение давления по образующей конуса получается в виде

$$e^{-kz} p(r, z, t) = -\frac{\rho_0}{2} \beta^2 \int_0^z \frac{[e^{k(\zeta-z)} - 1] [f'^2 + f f'' (f - \zeta)]}{\zeta - z} d\zeta - \\ - \frac{\rho_0}{2} \beta^2 (e^{-kz} - 1) \int_0^{f(t)} \frac{f'^2 + f'' (f - \zeta)}{\zeta + z} d\zeta + p_{\text{оли}}. \quad (3)$$

Здесь  $P_{\text{оли}}$  есть распределение давления для однородной жидкости [2].

\* Задача поставлена А. Г. Багдоевым.



Разлагая в первом из интегралов подынтегральную функцию в ряд по степеням  $(z-z)$  и вычисляя квадратуры, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P(r, z, t)}{\frac{\rho_0}{2} \beta^2} = & [(f'^2 + f''f) - f''f\eta] e^{k_1 \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n \eta^n (-1)^{n-1}}{n!n} - \\ & - f''f\eta e^{k_1 \eta} + (e^{k_1 \eta} - 1) \left\{ \frac{f''f(1-k_1)}{k_1} + 2(f'^2 + f''f) \ln \frac{\eta}{1-\eta} + \right. \\ & \left. + [f'^2 + f''f(1-\eta)] \ln \frac{4}{\beta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначено

$$k_1 = kf, \quad \eta = \frac{z}{f}.$$

Сила, действующая со стороны жидкости на конус, найдется интегрированием (4) по поверхности конуса:

$$P = 2\pi \beta^2 f^2 \int_0^1 p(r, z, t) (1-\eta) d\eta. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), разлагая экспоненциальные функции в ряд по степеням  $k_1$  и пользуясь формулой

$$e^{k_1 \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n \eta^n (-1)^{n-1}}{n!n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{n!} [\psi(n+1) - \psi(1)] \eta^n,$$

после интегрирования в формуле (5) получаем представление силы  $P$  в виде ряда по степеням  $k_1$ :

$$P = \pi \beta^4 f^2 \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n [A_1(n) f'^2 + A_2(n) f''f] + \alpha f^2 f'^2 + \lambda f^3 f'', \quad (6)$$

где  $B(m, n)$  — бета-функция,

$$\psi(l) = \frac{d}{dl} \ln \Gamma(l),$$

$\Gamma(l)$  — гамма-функция,

$$\alpha = -\pi \beta^4 (\ln \beta + \ln 2) \rho_0,$$

$$\lambda = -\pi \beta^4 \left( \frac{2}{3} \ln 2\beta + \frac{7}{9} \right) \rho_0,$$

$$A_1(n) = 2C_1(n) + C_2(n),$$

$$A_2(n) = 2C_1(n) + C_3(n) + C_4(n),$$



$$C_1(n) = \frac{B(2, n+1)}{n!} [\psi(n+3) - \psi(2)] - \frac{2n+3}{(n+2)!(n+1)(n+2)},$$

$$C_2(n) = \frac{1}{(n+2)!} \left\{ \ln \frac{4}{\beta^2} + [\psi(n+1) - \psi(1)] \right\},$$

$$C_3(n) = \frac{2}{(n+3)!} \left\{ \ln \frac{4}{\beta^2} + [\psi(n+1) - \psi(1)] \right\},$$

$$C_4(n) = -\frac{2n+3}{(n+3)!}.$$

Уравнение движения конуса получим из закона Ньютона:

$$mf'' = -P, \quad (7)$$

где  $m$  — масса конуса.

Подставляя (6) в (7) и введя подстановку

$$f'^2 = u(f); \quad \frac{du}{df} = -2f'',$$

получим уравнение первого порядка для функции  $u(f)$

$$\frac{du}{df} = uM(f), \quad (8)$$

где

$$M(f) = \frac{2 \left[ \alpha f^2 + f^2 \pi \beta^3 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n A_1(n) \right]}{-m - \lambda f^3 - \pi f^2 \beta^4 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n A_2(n)}.$$

Интегрируя уравнение (8) при начальном условии  $f(0) = v_0$ , получим

$$\frac{u}{v_0^2} = e^{\int_0^f M(f) df}, \quad f'' = -\frac{1}{2} u \frac{d}{df} M(f). \quad (9)$$

Если ограничиться величинами порядка  $O(\beta^4 \ln \beta)$ , выражение (9) переписывается:

$$f'' = -v_0^2 \frac{f^2}{m} \left[ \alpha - \pi \beta^4 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n A_1(n) \right]. \quad (10)$$

Из выражений (9) и (10) для ускорения проникания конуса следует, что увеличивающаяся с глубиной неоднородность жидкости увеличивает ускорение и соответственно уменьшает скорость дви-

жения конуса. Если ограничиться величинами порядка  $O(\beta^3 \ln \beta)$ , из (9) получим

$$f'' = v_0 \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2\alpha}{m} f^2 \left( 1 + \frac{\lambda f^3}{m} \right)^{-\frac{2\alpha}{3\lambda} - 1} + \right. \\ \left. + k_1 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda f^3}{m} \right)^{-\frac{2\alpha}{3\lambda} - 1} f^3 N_1 - \left( 1 + \frac{\lambda f^3}{m} \right)^{-\frac{2\alpha}{3\lambda}} (f^2 N_2 + f^5 N_3) \right] \right\}, \quad (11)$$

где обозначено

$$N_1 = \frac{\alpha \pi \beta^4 \rho_a \left( 3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7 \right)}{18 m^2},$$

$$N_2 = \frac{\pi \beta^4 \rho_a \left( 3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7 \right)}{12 m},$$

$$N_3 = -\pi \beta^4 \rho_a \left[ \frac{4\lambda \left( 3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7 \right) - 18 \left( \lambda \frac{3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7}{9} - \alpha \frac{6 \ln \frac{4}{\beta^2} - 49}{36} \right)}{21 m^2} \right].$$

По формуле (11) сделаны расчеты, учитывающие в первом приближении влияние неоднородности на ускорение конуса для значений параметров:

$$m = 1 \frac{\text{кг/сек}^2}{\text{м}}, \quad \rho_a = 100 \frac{\text{кг/сек}^2}{\text{м}^3}, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad k = 1.$$

Результаты расчетов приведены в следующей таблице

|                             | $f=0,2$                  | $f=0,4$                  | $f=0,6$                  | $f=0,8$                  | $f=1$                    |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\frac{f''}{v_0}$<br>одн.   | $-0,42626 \cdot 10^{-2}$ | $-0,16971 \cdot 10^{-1}$ | $-0,37416 \cdot 10^{-1}$ | $-0,65440 \cdot 10^{-1}$ | $-0,98244 \cdot 10^{-1}$ |
| $\frac{f''}{v_0}$<br>неодн. | $-0,42874 \cdot 10^{-2}$ | $-0,17163 \cdot 10^{-1}$ | $-0,38105 \cdot 10^{-1}$ | $-0,67240 \cdot 10^{-1}$ | $-0,101969$              |

Вычисления для произвольного  $k$  получаются из данной таблицы с помощью элементарных пересчетов. Полученные результаты показывают, что первое приближение является достаточно точным для  $k < 1$ .

Приближенная формула (10) также дает хорошие результаты.

Последующие члены разложения (9) и (10) можно вычислить столь же просто.

Для конуса конечного раствора, проникающего в несжимаемую жидкость, решение уравнения (1) может быть найдено с помощью потенциалов простого слоя, как и в случае однородной жидкости [2].

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 16 VI 1959

## Է. Մ. Ներդրում

# ԱՆՀԱՄԱՍԵՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԿՈՆՈՍ ԶԱՐԺՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է կոնոսի թափանցումը ներքին կիսա-տարածությունը զրավող անհամասեռ հեղուկի մեջ:

Ըստ խորություն խտության էքսպոնենցիալ փոփոխության դեպքում [3] աշխատության արդյունքի հիման վրա որոշվում է ճնշման բաշխումը կոնոսի ծնիչով և հեղուկի դիմադրության ուժը:

Կոնոսի շարժման օրենքի համար ստացվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում, որի լուծումը արտահայտվում է ըստ միջավայրի անհամասեռության ցուցչի առանձանների շարքի տեսքով:

Ստացված են պարզ մոտավոր բանաձևեր, ըստ որոնց արված են հաշ-վումներ:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. А. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
2. Сагомонян А. Я., Багдоев А. Г. Проникание конуса в жидкость со свободной поверхностью. Вестник МГУ, № 8, сер. мат., мех., астроном., физ., хим., 1955.
3. Багдоев А. Г. Проникание тонкого заостренного тела вращения в неоднородную и слоистую жидкость. Вестник МГУ, № 4, 1957.



Ф. Р. Арутюнян

## Учет геометрии прибора при исследовании рассеяния

В работах [1, 2] нами приведены результаты исследования рассеяния протонов,  $\mu$ - и  $\pi$ -мезонов. Эти исследования производились на высотной станции по изучению космических лучей на г. Арагац (3200 м над уровнем моря) при помощи магнитного масс-спектрометра в сочетании с многопластинными камерами Вильсона. Целью настоящей работы является учет геометрии прибора при исследовании рассеяния — разработка метода аналитического расчета поправочных функций к кривым многократного кулоновского рассеяния, возникающих при этом учете.

Экспериментальные установки, которые используются для исследования рассеяния, ограничивают своей геометрией некоторую область пространства, внутри которой исследуется рассеяние. При изучении рассеяния частиц в большинстве экспериментах исследуются проекции углов рассеяния.

Проекцию полного угла рассеяния  $\theta$ , на плоскость в которой исследуется рассеяние, обозначим через  $\theta_{\varphi}$ , а на плоскость перпендикулярную к плоскости исследования — через  $\theta_z$ .

Ограничение геометрией в плоскости исследования рассеяния приводит к тому, что вероятность регистрации различных углов рассеяния оказывается различной. На это обстоятельство впервые обратил внимание Мак-Дормид [3] и затем Коузине и др. [4]. К тому же приводит и ограничение геометрией в плоскости перпендикулярной к плоскости исследования рассеяния, но в этом случае влияние геометрии зависит также от распределения углов рассеяния. В самом деле, регистрация частиц рассеянных на проекцию угла  $\theta_{\varphi}$  будет зависеть от соответствующего угла  $\theta_z$  и, отсюда, наблюдаемое распределение углов  $\theta_z$  будет зависеть от дозволенного распределения углов  $\theta_{\varphi}$ .

Таким образом, влияние геометрии прибора приводит к некоторой поправочной функции  $C(\theta_{\varphi})$ , которая состоит из двух частей:  $C_1(\theta_{\varphi})$  и  $C_2(\theta_{\varphi})$ .

$C_1(\theta_{\varphi})$  есть поправочная функция, вызванная геометрией прибора в плоскости исследования рассеяния и дает вероятность того, что угол рассеяния  $\theta_{\varphi}$  будет наблюдаться, при условии отсутствия ограничения геометрией в перпендикулярной плоскости.

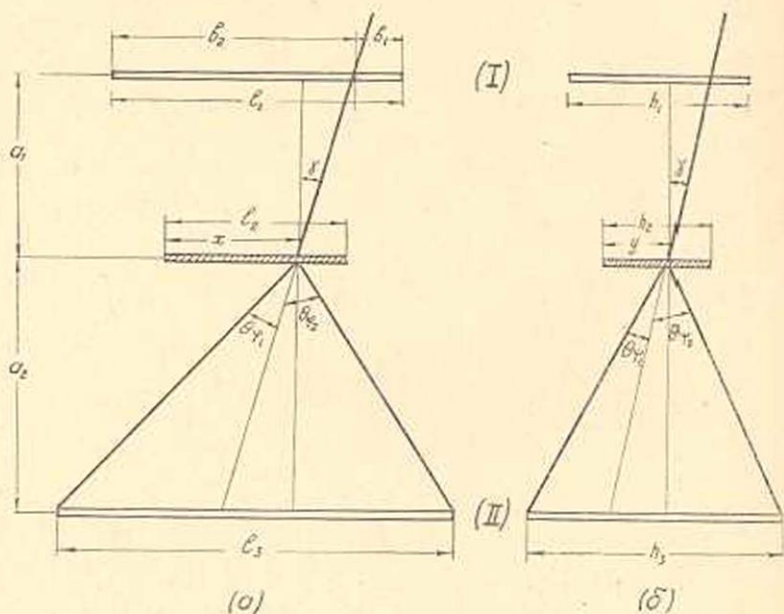
$C_2(\theta_{\varphi})$  есть поправочная функция при ограничении геометрией в плоскости перпендикулярной к плоскости исследования рассеяния,

при условии, что нет ограничения геометрии в плоскости исследования рассеяния.

Полная поправочная функция  $C(\theta_\varphi) = C_1(\theta_\varphi) \cdot C_2(\theta_\varphi)$ .

### § 1. Поправочная функция $C_1(\theta_\varphi)$ .

На фиг. 1 приведена схема прибора, которую можно считать эквивалентной схемой замещения большинства экспериментальных установок, используемых для исследования рассеяния в двух проекциях:  $a$ —в плоскости исследования рассеяния,  $b$ —в плоскости перпендикулярной к плоскости исследования рассеяния.



Фиг. 1.

Если на рассеивающую пластину падает частица под углом  $\gamma$  с нормалью к ней и рассеивается в плоскости исследования рассеяния (фиг. 1) на угол  $\theta_\varphi$ , то в верхнем ряду счетчиков (I) полной длины  $l_1$  можно найти такую длину „ $b$ “, при которой, если частица падает на эту длину, она обязательно регистрируется нижним рядом счетчиков (II). В самом деле, из фиг. 1 видно, что если частица падает на ряд счетчиков I левее отрезка  $b_1$  (под тем же углом  $\gamma$  к рассеивающей пластине), то при рассеянии влево на тот же угол  $\theta_{\varphi 1}$  она не будет регистрироваться нижним рядом счетчиков (II).

Если частица падает на рассеивающую пластину вертикально ( $\gamma = 0$ ), то относительная вероятность того, что угол  $\theta_{\varphi 1}$  будет наблюдаться, равна отношению  $b/l_1$ . В действительности над рассеивающей пластиной имеется некоторое угловое распределение падающих частиц  $\zeta(\gamma) d\gamma$  и относительная вероятность наблюдения угла  $\theta_{\varphi 1}$  будет



$$p(\theta_{\varphi_1}) = \frac{b}{l_1} \zeta(\gamma) d\gamma. \quad (1)$$

Знак угла  $\gamma$  будем считать положительным по часовой стрелке от вертикали ( $\gamma = 0$ ) до  $\gamma = 90^\circ$  и рассчитаем полную относительную вероятность регистрации угла  $\theta_{\varphi_1}$

$$P(\theta_{\varphi_1}) = \int_{\gamma} p(\theta_{\varphi_1}). \quad (2)$$

Если обозначим  $(x/a_2 + l_3/2a_2 - l_2/2a_2) = \eta$ , то из фиг. 1 имеем:

$$\operatorname{tg}(\theta_{\varphi_1} + \gamma) = \eta \quad \text{и} \quad \gamma = \arctg \eta - \theta_{\varphi_1},$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\eta - \operatorname{tg} \theta_{\varphi_1}}{1 + \eta \operatorname{tg} \theta_{\varphi_1}}, \quad d\gamma = \frac{d\eta}{1 + \eta^2}, \quad \zeta(\gamma) = \zeta(\arctg \eta - \theta_{\varphi_1}),$$

$$b = l_1 - \left( x - \frac{l_2 - l_1}{2} \right) - a_1 \operatorname{tg} \gamma$$

и

$$\frac{b}{l_1} = \frac{l_1 + l_3}{2l_1} - \frac{a_2}{l_1} \eta - \frac{a_1}{l_1} \operatorname{tg} \gamma.$$

Если введем обозначения:

$$K_1 = \frac{l_1 + l_3}{2l_1}, \quad K_2 = a_2/l_1, \quad K_3 = a_1/l_1$$

и будем писать вместо  $\theta_{\varphi_1}$  просто  $\theta_\varphi$ , то полная вероятность регистрации угла  $\theta_\varphi$  будет

$$P(\theta_\varphi) = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left( K_1 - K_2 \eta - K_3 \frac{\eta - \operatorname{tg} \theta_\varphi}{1 + \eta \operatorname{tg} \theta_\varphi} \right) \frac{\zeta(\arctg \eta - \theta_\varphi)}{(1 + \eta^2)} d\eta. \quad (3)$$

где

$$\eta_0 = \eta(x=0) = \frac{l_3 - l_2}{2a_2} \quad \text{и} \quad \eta_1 = \eta(x=l_2) = \frac{l_3 + l_2}{2a_2}.$$

Поправочная функция будет

$$C_1(\theta_\varphi) = P(\theta_\varphi)/P(0). \quad (4)$$

1. Частный случай, когда частицы падают вертикально ( $\gamma = 0$ ).

$$P(\theta_\varphi) = K_1 - K_2 \operatorname{tg} \theta_\varphi \quad \text{и} \quad C_1(\theta_\varphi) = 1 - \frac{K_2}{K_1} \operatorname{tg} \theta_\varphi. \quad (5)$$

При

$$l_1 = l_2 = l_3 = l, \quad a_1 = a_2 = a, \quad l/a = n$$

$$C_1(\theta_\varphi) = 1 - \frac{1}{n} \operatorname{tg} \theta_\varphi. \quad (6)$$

случай, полученный Мак-Дормидом [3]).



2. Частный случай, когда угловое распределение падающих частиц изотропное, то-есть  $\zeta(\gamma) = 1$ .

Решение интеграла

$$P(\theta_z) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \left[ K_1 - K_2 \eta - K_3 \frac{\eta - \operatorname{tg} \theta_z}{1 + \eta \operatorname{tg} \theta_z} \right] \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)} \quad (7)$$

приводит к формуле

$$P(\theta_z) = K_1 (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta_1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta_0) + K_2 \ln \frac{1 + \eta_0^2}{1 + \eta_1^2} + K_3 \ln \frac{1 + \eta_1 \operatorname{tg} \theta_z}{1 + \eta_0 \operatorname{tg} \theta_z} \quad (8)$$

При  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ,  $a_2 = a_1 = a$ ,  $l/a = n$ ,

$$P(\theta_z) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} n + \frac{1}{n} \ln \frac{1 + n \operatorname{tg} \theta_z}{1 + n^2} \quad (9)$$

При  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ,  $a_1 \neq a_2$ ,  $l/a_2 = n_2$ ,  $l/a_1 = n_1$ ,

$$P(\theta_z) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} n_2 - \frac{1}{n_2} \ln(1 + n_2^2) + \frac{1}{n_1} \ln(1 + n_2 \operatorname{tg} \theta_z) \quad (10)$$

3. Частный случай, когда угловое распределение падающих частиц имеет вид  $\cos^2 \gamma$ . При этом

$$\cos \gamma = \cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta - \theta_z) = \frac{\cos \theta_z + \eta \sin \theta_z}{(1 + \eta^2)^{1/2}}$$

и

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cos^2 \theta_z + \eta \sin 2\theta_z + \eta^2 \sin^2 \theta_z}{1 + \eta^2}$$

Решение интеграла

$$P(\theta_z) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \left[ K_1 - K_2 \eta - K_3 \frac{\eta - \operatorname{tg} \theta_z}{1 + \eta \operatorname{tg} \theta_z} \right] \times \\ \times \left[ \frac{\cos^2 \theta_z + \eta \sin 2\theta_z + \eta^2 \sin^2 \theta_z}{(1 + \eta^2)^2} \right] d\eta \quad (11)$$

приводит к формуле

$$P(\theta_z) = K_1 q_2 + (K_1 q_1 + K_2 q_3 + K_3 q_3) \cos 2\theta_z + \\ + (K_2 q_1 + K_3 q_1 - K_1 q_3 - K_2 q_2) \sin 2\theta_z + \\ + \frac{K_2}{2} \ln \frac{1 + \eta_0^2}{1 + \eta_1^2} \sin^2 \theta_z, \quad (12)$$

где

$$q_1 = \frac{\eta_1}{2(1 + \eta_1^2)} - \frac{\eta_0}{2(1 + \eta_0^2)},$$

$$q_2 = \frac{1}{2} (\text{arc tg } \eta_1 - \text{arc tg } \eta_0),$$

$$q_3 = \frac{1}{2(1+\eta_1^2)} - \frac{1}{2(1+\eta_0^2)}.$$

При

$$l_1 = l_2 = l_3 = l, \quad a_1 = a_2 = a, \quad l/a = n,$$

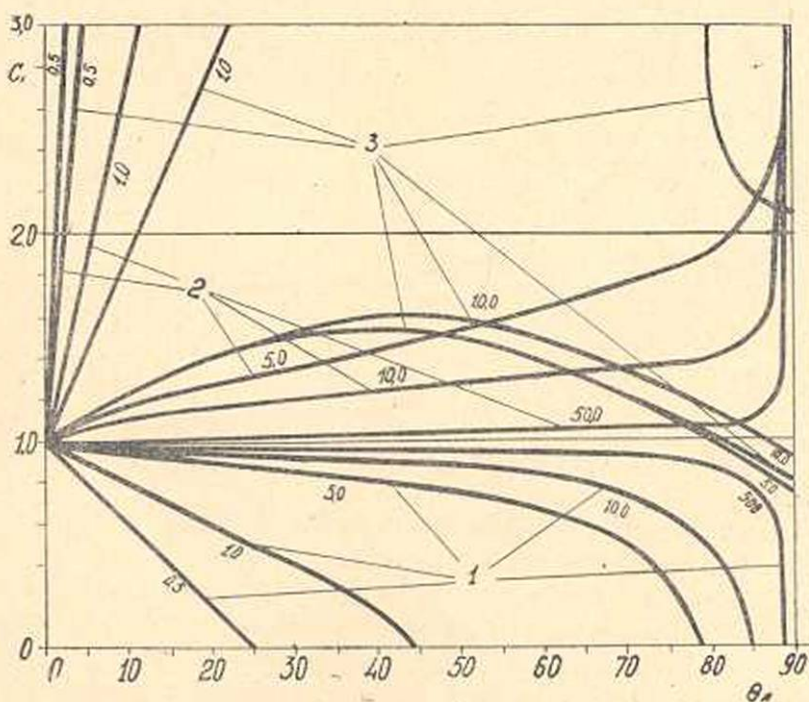
$$\rho(\theta_\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \text{arc tg } n + \left[ \frac{2+n^2}{1+n^2} - \frac{1}{n} \text{arc tg } n \right] \sin 2\theta_\varphi - \right. \\ \left. - \frac{n}{1+n^2} \cos 2\theta_\varphi - \frac{1}{n} \ln(1+n^2) \sin^2 \theta_\varphi \right\}. \quad (13)$$

При

$$l_1 = l_2 = l_3 = l, \quad a_1 \neq a_2, \quad l/a_2 = n_2, \quad l/a_1 = n_1,$$

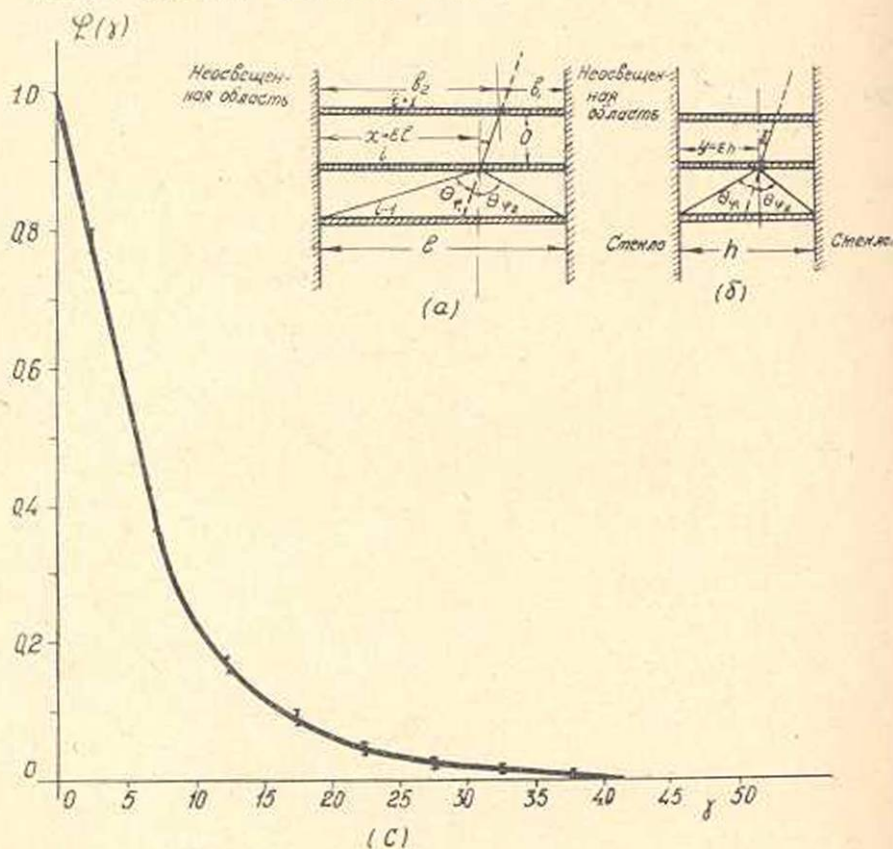
$$\rho(\theta_\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \text{arc tg } n_2 + \left[ \frac{n_1 + n_2 + n_1 n_2^2}{n_1(1+n_2^2)} - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{n_2} \text{arc tg } n_2 \right] \sin 2\theta_\varphi - \frac{n_2^2}{n_1(1+n_2^2)} \cos 2\theta_\varphi - \\ \left. - \frac{1}{n_2} \ln(1+n_2^2) \sin^2 \theta_\varphi \right\}. \quad (14)$$

На фиг. 2 приведены кривые  $C_1(\theta_\varphi)$  для всех трех случаев: 1 —  $\gamma = 0$ ; 2 —  $\zeta(\gamma) = 1$  и 3 —  $\zeta(\gamma) = \cos^2 \gamma$ , для различных значений  $n$

Фиг. 2. Поправочная функция  $C_1(\theta_\varphi)$

(кривые все вычислены для частного случая  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $l/a = n$ ). Из этих кривых хорошо видно, что функция  $C_1(\theta_z)$  резко зависит от вида углового распределения падающих частиц и геометрических параметров прибора.

В случае, если рассеяние исследуется с помощью камеры Вильсона, поправочную функцию  $C_1(\theta_z)$  можно вычислить по тем же формулам. На фиг. 3 приведена камера Вильсона в плоскости исследования рассеяния, т. е. в плоскости фотографирования. Длина  $l$  обусловлена неосвещенной областью камеры и если частица попадает в неосвещенную область, то она не исследуется.



Фиг. 3.

В общем случае длина  $l$  обуславливается просто размерами камеры.

Задачу можно сформулировать точно так же, как она была сформулирована выше для общего случая.

Если на рассеивающую пластину номер  $i$  падает частица под углом  $\gamma$  с нормалью к ней и затем рассеивается на угол  $\theta_z$ , то на пластине  $i + 1$ , полной длины  $l$ , всегда можно найти такую длину  $\delta^*$  при которой, если частица падает на эту длину, то она обязательно остается в пределах освещенной области камеры на пластине  $i - 1$ . И



фиг. 3 видно, что если частица падает на пластину  $i-1$  левее отрезка  $b_i$  (под тем же углом  $\gamma$  к пластине  $i$ ), то при рассеянии влево на тот же угол  $\theta_{\gamma}$ , она уйдет в зону неосвещенной области и, таким образом, не будет фиксирована.

Вероятность наблюдения угла  $\theta_{\gamma}$  из общей формулы (3) при  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $l/a = n$  будет ( $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 1/n$ ,  $K_3 = 1/n$ )

$$P(\theta_{\gamma}) = \int_{\eta=0}^{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \cdot \eta - \frac{1}{n} \frac{\eta - \operatorname{tg} \theta_{\gamma}}{1 + \eta \operatorname{tg} \theta_{\gamma}} \right\} \frac{\zeta(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta - \theta_{\gamma})}{(1 + \eta^2)} d\eta. \quad (15)$$

Аналогичным путем можно получить выражение для  $P(\theta_{\gamma})$  при правом ограничении, которое отличается от формулы (15) только тем, что в ней вместо  $\zeta(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta - \theta_{\gamma})$  будет  $\zeta(\theta_{\gamma} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta)$ .

Точное угловое распределение падающих частиц при той схеме прибора, которая используется нами для исследования рассеяния, получить очень трудно. В самом деле, на данной высоте (3200 м над уровнем моря) существует некоторое угловое распределение падающих частиц в виде  $\zeta(\gamma) d\gamma = \cos^n \gamma d\gamma$ . Это распределение изменяется после рассеяния частиц в пластинах верхней камеры и затем частицы попадают в магнитное поле, где они отклоняются и угловое распределение изменяется вторично. Но это еще не все, так как частицы, чтобы достигнуть пластины в которой исследуется рассеяние, рассеиваются в вышележащих над ней пластинах и вследствие этого угловое распределение падающих частиц изменяется в третий раз.

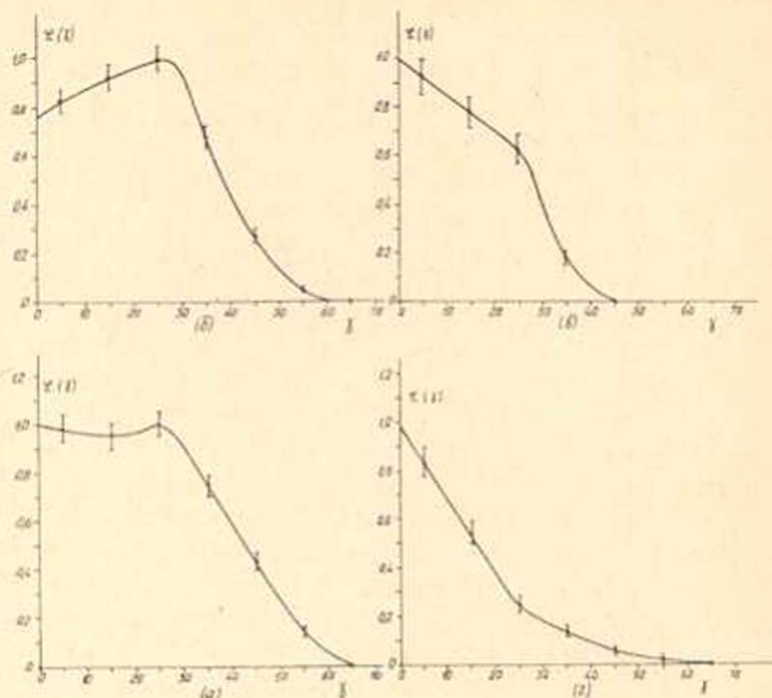
Ясно, что угловое распределение над рассеивающей пластиной сильно отличается от первоначального вида  $\cos^n \gamma$ . Поэтому, для вычисления  $C_1(\theta_{\gamma})$  были использованы экспериментально наблюдаемые угловые распределения падающих частиц, которые для протонов,  $\mu$ - и  $\pi$ -мезонов, рассеявшихся в свинцовых пластинах толщиной 7 мм, приведены соответственно на фиг. 3 и 4.

Угловые распределения падающих частиц для  $\mu$ - и  $\pi$ -мезонов отличаются друг от друга, кроме того для одних и тех же частиц они различны для пластин различного номера  $i$ , то-есть для различных импульсов в точке рассеяния.

Но для импульсов  $(1,0 \div 1,2) \cdot 10^8$  эв/с и  $(1,2 \div 1,4) \cdot 10^8$  эв/с, для  $\mu$ -мезонов эти распределения отличаются друг от друга незначительно, также как и для импульсов  $(1,4 \div 1,6) \cdot 10^8$  эв/с и  $(1,6 \div 1,8) \cdot 10^8$  эв/с и поэтому на фиг. 4 приводятся угловые распределения отдельно для импульсов  $(1,0 \div 1,4) \cdot 10^8$  эв/с и  $(1,4 \div 1,8) \cdot 10^8$  эв/с. На той же фигуре приведено подобное разделение по импульсам для  $\pi$ -мезонов.

Функция  $C_1(\theta_{\gamma})$  вычислялась численным интегрированием выражения (15), используя имеющиеся угловые распределения падающих частиц.

Аналогичным образом были подсчитаны значения  $C_1(\theta_{\gamma})$  для  $\mu$  и  $\pi$ -мезонов, рассеявшихся в медных пластинах толщиной 5 и 2 мм. Все эти кривые поправочной функции  $C_1(\theta_{\gamma})$  приведены на фиг. 5.



Фиг. 4. Угловые распределения падающих мезонов для свинцовых пластин толщиной 7 мм: (а) —  $\mu$ -мезоны ( $p = (1,0 \div 1,4) \times 10^8$  эв/с), (б) —  $\mu$ -мезоны ( $p = (1,4 \div 1,8) \times 10^8$  эв/с), (в) —  $\pi$ -мезоны ( $p = (1,2 \div 1,6) \times 10^8$  эв/с), (г) —  $\pi$ -мезоны ( $p = (1,6 \div 2,0) \times 10^8$  эв/с).

## § 2 Поправочная функция $C_2(\theta_c)$

Пусть  $\Phi(\theta) d\theta$  есть вероятность того, что частица рассеивается на пространственный угол между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , то-есть  $\Phi(\theta) d\theta$  есть функция распределения углов многократного кулоновского рассеяния. Как и в самой теории многократного кулоновского рассеяния заряженных частиц, предполагается, что углы рассеяния малы и  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $2\pi \sin \theta d\theta \approx 2\pi \theta d\theta = d\theta_c d\theta_c$ ;  $\theta^2 = \theta_z^2 + \theta_y^2$  и  $\langle \theta^2 \rangle = 2 \langle \theta_c^2 \rangle = 2 \langle \theta_{\perp}^2 \rangle$ .

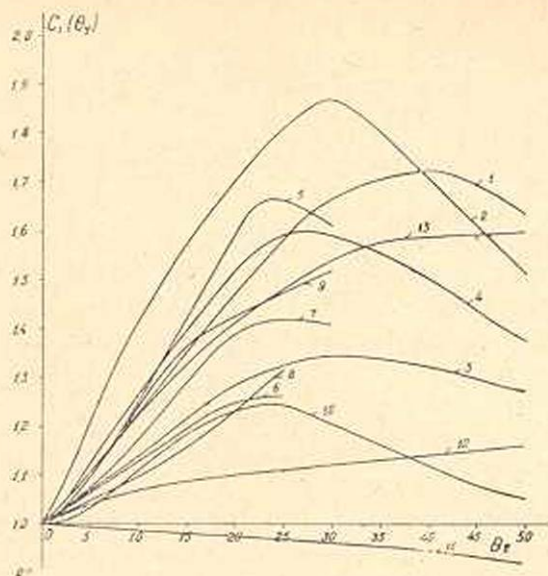
Если в плоскости, перпендикулярной к плоскости исследования рассеяния, нет никакого ограничения геометрией прибора, то функция распределения углов многократного кулоновского рассеяния в плоскости исследования рассеяния определяется интегралом

$$f(\theta_c, \infty) d\theta_c = 4 \int_{\theta_c=0}^{\infty} \frac{\Phi[\theta = (\theta_c^2 + \theta_y^2)^{1/2}]}{2\pi (\theta_c^2 + \theta_y^2)^{1/2}} d\theta_y d\theta_c \quad (16)$$

(множитель 4 появляется из-за рассмотрения всех четырех квадрантов).

При ограничении геометрией в плоскости перпендикулярной к плоскости исследования, то-есть когда углы большие, чем  $\theta_c$ , и  $\theta_{\perp}$



Фиг. 5. Поправочная функция  $C_1(\theta_\varphi)$ 

1.  $\mu$ -мезоны ( $p=1,0 \div 1,4$ )  $\times 10^8$  эв/с — 7 мм Pb.
2.  $\mu$ -мезоны ( $p=1,4 \div 1,8$ )  $\times 10^8$  эв/с — 7 мм Pb.
3.  $\pi$ -мезоны ( $p=1,2 \div 1,6$ )  $\times 10^8$  эв/с — 7 мм Pb.
4.  $\pi$ -мезоны ( $p=1,6 \div 2,0$ )  $\times 10^8$  эв/с — 7 мм Pb.
5.  $\mu$ -мезоны ( $p=0,8 \div 1,4$ )  $\times 10^8$  эв/с — 5 мм Си.
6.  $\mu$ -мезоны ( $p=0,7 \div 1,1$ )  $\times 10^8$  эв/с — 2 мм Си.
7.  $\pi$ -мезоны ( $p=0,8 \div 1,6$ )  $\times 10^8$  эв/с — 5 мм Си.
8.  $\pi$ -мезоны ( $p=0,8 \div 1,4$ )  $\times 10^8$  эв/с — 2 мм Си.
9.  $\mu$ -мезоны ( $p=0,8 \div 1,4$ )  $\times 10^8$  эв/с — 4 мм Си.
10. Протоны ( $p=3,5 \div 6,3$ )  $\times 10^8$  эв/с — 7 и 4 мм Pb.
11. Случай, когда частицы падают вертикально ( $\gamma=0$ ).
12. Случай, когда распределение падающих частиц изотропное ( $\zeta(\gamma)=1$ ).
13. Случай, когда распределение падающих частиц имеет вид  $\cos^2\gamma$ .

(фиг. 1) не регистрируются, функция распределения углов многократного кулоновского рассеяния в плоскости исследования рассеяния будет определяться суммой интегралов

$$f(\theta_\varphi, \theta_{\varphi_1}, \theta_{\varphi_2}) d\theta_\varphi = 2 \left\{ \int_{\theta_{\varphi_1}=0}^{\theta_{\varphi_2}} \frac{\Phi[\theta = (\theta_\varphi^2 + \theta_{\varphi_1}^2)^{1/2}]}{2\pi(\theta_\varphi^2 + \theta_{\varphi_1}^2)^{1/2}} d\theta_{\varphi_1} d\theta_{\varphi_2} + \right. \\ \left. + \int_{\theta_{\varphi_2}=0}^{\theta_{\varphi_1}} \frac{\Phi[\theta = (\theta_\varphi^2 + \theta_{\varphi_2}^2)^{1/2}]}{2\pi(\theta_\varphi^2 + \theta_{\varphi_2}^2)^{1/2}} d\theta_{\varphi_2} d\theta_{\varphi_1} \right\}. \quad (17)$$

В зависимости от вида и размеров прибора и угла наклона  $\gamma$  может оказаться, что углы  $\theta_{\varphi_1}$  и  $\theta_{\varphi_2}$  будут в одном и том же направлении, и если  $\theta_{\varphi_2} > \theta_{\varphi_1}$ , то тогда

$$f(\theta_\varphi, \theta_{\varphi_1}, \theta_{\varphi_2}) d\theta_\varphi = 2 \int_{\theta_{\varphi_1}=\theta_{\varphi_2}}^{\theta_{\varphi_2}} \frac{\Phi[\theta = (\theta_\varphi^2 + \theta_{\varphi_1}^2)^{1/2}]}{2\pi(\theta_\varphi^2 + \theta_{\varphi_1}^2)^{1/2}} d\theta_{\varphi_1} d\theta_{\varphi_2}. \quad (18)$$



Углы  $\theta_{\varphi_1}$  и  $\theta_{\varphi_2}$  из фиг. 1 равны:

$$\theta_{\varphi_1} = \arctg \left[ \frac{(h_3 - h_2)/2 + y}{a_2} \right] - \gamma$$

и

$$\theta_{\varphi_2} = \arctg \left[ \frac{(h_3 + h_2)/2 - y}{a_2} \right] + \gamma.$$

Обозначим отношение функций  $f(\theta_{\varphi_1}, \theta_{\varphi_2})/f(\theta_{\varphi_1}, \infty)$  через  $P(\theta_{\varphi_1}, y, \gamma)$ . Вероятность того, что заданные значения  $\theta_{\varphi_1}$  и  $\theta_{\varphi_2}$  будут наблюдаться, равна вероятности того, что частица падает под углом между  $\gamma$  и  $\gamma + d\gamma$  на расстоянии между  $y$  и  $y + dy$  вдоль рассеивающего вещества и будет равна

$$M_1 \frac{dy}{h_2} \zeta(\gamma) d\gamma, \quad (19)$$

где  $M_1$  — множитель, зависящий от геометрических размеров прибора.

Относительный поправочный множитель для заданных значений  $\theta_{\varphi_1}$ ,  $\theta_{\varphi_2}$  и данных  $y$  и  $\gamma$  будет

$$\frac{M_1}{h_2} P(\theta_{\varphi_1}, y, \gamma) \zeta(\gamma) d\gamma dy. \quad (20)$$

Полная поправочная функция  $G_2(\theta_{\varphi_1})$  дается выражением

$$G_2(\theta_{\varphi_1}) = \frac{M_1}{h_2} \int_{y=0}^{h_2} \int_{\gamma=0}^{\arctg f(h_2 + h_1)/2a_1 f} P(\theta_{\varphi_1}, y, \gamma) \zeta(\gamma) d\gamma dy. \quad (21)$$

Функция распределения углов многократного кулоновского рассеяния с учетом конечных размеров ядра хорошо аппроксимируется кривой нормального распределения, то-есть

$$\Phi(\theta) d\theta = \frac{2}{\langle \theta^2 \rangle} \theta \exp(-\theta^2 / \langle \theta^2 \rangle) d\theta \quad (22)$$

или то же самое в проекциях

$$\Phi(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi \langle \theta_{\varphi}^2 \rangle} \exp[-(\theta_{\varphi}^2 + \theta_{\varphi_1}^2)/2 \langle \theta_{\varphi}^2 \rangle] d\theta_{\varphi} d\theta_{\varphi_1}. \quad (23)$$

Тогда

$$f(\theta_{\varphi}, \infty) d\theta_{\varphi} = 4 \frac{d\theta_{\varphi}}{2\pi \langle \theta_{\varphi}^2 \rangle} \int_0^{\infty} \exp[-(\theta_{\varphi}^2 + \theta_{\varphi_1}^2)/2 \langle \theta_{\varphi}^2 \rangle] d\theta_{\varphi_1} \quad (24)$$

и

$$f(\theta_{\varphi}, \theta_{\varphi_1}, \theta_{\varphi_2}) d\theta_{\varphi} = 2 \frac{d\theta_{\varphi}}{2\pi \langle \theta_{\varphi}^2 \rangle} \left\{ \int_{\theta_{\varphi_1}=0}^{\theta_{\varphi_1}} \exp[-(\theta_{\varphi}^2 + \theta_{\varphi_1}^2)/2 \langle \theta_{\varphi}^2 \rangle] d\theta_{\varphi_1} + \right.$$

$$+ \int_{\theta_z=0}^{\theta_{z0}} \exp \left[ -(\theta_z^2 + \theta_\varphi^2) / 2 \langle \theta_z^2 \rangle \right] d\theta_z \Big\}, \quad (25)$$

$$P(\theta_\varphi, y, \gamma) = C \frac{\int_0^{\theta_{\varphi 1}} \exp(-\theta_\varphi^2 / \langle \theta_\varphi^2 \rangle) d\theta_\varphi + \int_0^{\theta_{\varphi 2}} \exp(-\theta_\varphi^2 / \langle \theta_\varphi^2 \rangle) d\theta_\varphi}{\int_0^\infty \exp(-\theta_\varphi^2 / \langle \theta_\varphi^2 \rangle) d\theta_\varphi} \quad (26)$$

Таким образом, получается, что  $P(\theta_\varphi, y, \gamma)$  для нормального распределения углов рассеяния есть некоторая постоянная величина, не зависящая от угла  $\theta_z$ , то-есть  $P(\theta_\varphi, y, \gamma) = \text{const}(y, \gamma)$ , а следовательно и  $C_2(\theta_z)$  после интегрирования по  $y$  и  $\gamma$  будет постоянной величиной не зависящей от угла  $\theta_\varphi$ . Это означает, что вероятность регистрации различных углов одинакова. Для распределения Мольтера и Ольберта подобные вычисления приводят авторы работы [4].

Таким образом, при учете геометрии прибора, кривые рассеяния надо поправить на величину  $C_1(\theta_\varphi)$ . Поправленная таким образом кривая идет выше первоначальной кривой при больших углах и ниже при малых. Среднеквадратичный и средний углы многократного рассеяния для поправленной кривой увеличиваются. Они вычисляются численно из поправленных кривых распределения углов рассеяния.

Физический институт Академии  
наук Армянской ССР

Поступила 28-XI-1958

### Յ. Ռ. Հարությունյան

## ԳՈՐԾԻՔԻ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆՈՒՄԸ ՑՐՄԱՆ ԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ցրման երևույթի ուսումնասիրման ժամանակ էքսպերիմենտալ սարքավորումը, շնորհիվ իր տարածական սահմանափակվածության, որոշակի աղավաղումներ է մտցնում ստացվող արդյունքների մեջ՝ տարբեր անկյունների տակ ցրումները գործիքի կողմից գրանցվում են տարբեր հավանականությամբ:

Աշխատության մեջ մշակված է ցրման կորերի ճշաման համար անհրաժեշտ ուղղումների հաշվման անալիտիկ մեթոդ: Պարզված է, որ այդ երկրաչափական ուղղումները կարող են զգալիորեն փոխել ցրման կորի տեսքը, մասնավորապես ստացված է, որ [3] աշխատության մեջ բերված էքսպերիմենտալ սարքավորման համար մեծ անկյունների տակ ցրման սպառվող թիվը աճում է 1,5—2,0 անգամ:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Ф. Р. Исследование многократного рассеяния протонов. ЖЭТФ, 34, 800, 1958.
2. Алиханян А. И., Арутюнян Ф. Р. Рассеяние  $\mu$ -мезонов в свинце. ЖЭТФ, 36, 32, 1959.
3. Medirid J. B. Large Angle Scattering of  $\mu$ -Mesons in Lead. *Phil. Mag.* 45, 933, 1954.
4. Cousins J. E., Nash W. E., Pointon A. J. The Effect of the Angular Variation of Intensity on Scattering Distribution of  $\mu$ -Mesons Underground at a Depth of 40 m. w. c. *Nuovo Cimento*, 6, 1113, 1957.



С. А. Хейфец

## Нелинейная поправка к частоте фазовых колебаний

Уравнение фазовых колебаний с нелинейностями, но без затухания и возмущений, имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = \Omega^2 \left( -\frac{1}{2} \varphi^2 \operatorname{ctg} \Phi_s + \frac{1}{6} \varphi^3 \right). \quad (1)$$

Слагаемые в правой части (1) дают поправки к частоте  $\Omega$  в разных приближениях теории возмущений. Член, пропорциональный  $\varphi^3$ , дает поправку в первом же приближении, равную

$$(\Delta\Omega/\Omega)_{\text{куб}} = -A^2/16,$$

где  $A$  — амплитуда фазовых колебаний.

Квадратичный член в первом приближении не дает поправки к частоте, но во втором приближении дает поправку того же порядка (по  $A^2$ ), как и кубический член. Это обстоятельство дает возможность рассматривать их независимо.

Будем решать уравнение (1) методом вариации постоянных

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( a e^{i\int \Omega dt} + a^* e^{-i\int \Omega dt} \right). \quad (2)$$

Для функции  $a(t)$  (модуль которой имеет смысл амплитуды колебаний) получаем следующее уравнение первого порядка

$$\dot{a} = -\frac{\Omega}{8i \operatorname{tg} \Phi_s} \left( a e^{i\int \Omega dt} + a^* e^{-i\int \Omega dt} \right)^2. \quad (3)$$

Чтобы найти поправку к частоте применим методику нелинейных подстановок [1].

Введем вместо  $a$  и  $a^*$  новые переменные  $s$  и  $s^*$

$$\begin{aligned} a &= s + f_1 s^2 + 2f_2 s s^* + f_3 s^{*2}, \\ a^* &= s^* + f_1^* s^{*2} + 2f_2^* s s + f_3^* s^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  подберем таким образом, чтобы уравнение для  $s$  не содержало квадратичных по  $s$  и  $s^*$  членов. Из этого условия имеем:

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{i\int \Omega dt} / 8 \operatorname{tg} \Phi_s, \\ f_2 &= -e^{-i\int \Omega dt} / 8 \operatorname{tg} \Phi_s, \\ f_3 &= -e^{-3i\int \Omega dt} / 24 \operatorname{tg} \Phi_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя теперь (4) и (5) в (3) и отбрасывая члены, содержащие  $s$  в степени выше третьей, получаем

$$\dot{s} = -\frac{20 i \Omega}{192 \operatorname{tg}^2 \Phi_s} |s|^2 s + \text{осциллирующие члены.}$$

Отсюда нетрудно получить поправку от квадратичного члена к частоте фазовых колебаний

$$\Delta \Omega / \Omega_{\text{кв}} = -\frac{5}{48 \operatorname{tg}^2 \Phi_s} A^2, \quad (6)$$

Таким образом, частота фазовых колебаний с нелинейными поправками равна

$$\Omega = \Omega_0 \left( 1 - \frac{5 \operatorname{ctg}^2 \Phi_s + 3}{48} A^2 \right). \quad (7)$$

Как видно из полученного результата, квадратичная нелинейность играет большую роль, чем кубическая (например, в работе [2] квадратичная нелинейность вообще не рассматривалась).

Приношу свою благодарность Ю. Ф. Орлову за помощь в работе.

Физический институт  
АН Армянской ССР

Поступила 17 III 1959

Ս. Ա. ԽԵՒԲԵՑ

## ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՈՒՂՂՈՒՄ ՖԱԶԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Գտնված է ուղղում ֆազային տատանումների հաճախականության համար, որը տալիս է քառակուսային ոչ-գծային թվերը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Орлов Ю. Ф. Нелинейная теория бетатронных колебаний в ускорителях. Диссертация, 1955.
2. Кошкарёв Д. Г., Орлов Ю. Ф. Параметрические резонансы фазовых колебаний в синхротроне, ПТЭ, № 6, 19, 1958.



С. М. Хзарджян

## К теории нелинейных колебаний плазмы

В известных работах [1] последовательно развита теория колебаний плазмы в рамках линейного приближения. Без учета распределения скоростей в работах [2] рассматриваются некоторые результаты нелинейной теории. Эти работы не учитывают температурного разброса скоростей и поэтому не могут выявить температурное влияние как на линейные, так и нелинейные эффекты. К вопросам нелинейной теории плазмы нужно отнести перенос массы и заряда продольными (а так же поперечными) волнами, вопросы взаимодействия продольных волн друг с другом, поперечных волн друг с другом и продольных и поперечных—между собой. Является важным так же вопрос влияния магнитного поля на нелинейные колебания плазмы.

В настоящей работе мы ставим себе цель прежде всего разработать последовательный аппарат теории возмущений, на основании которого можно было бы выяснить все эффекты так называемой малой нелинейности. Этот аппарат соответствует разложению по малому параметру—отношению изменения плотности при наличии волн к среднему значению плотности.

В этой работе мы приводим этот аппарат только для случая продольных волн в плазме, оставляя распространение аппарата на поперечные волны для последующих работ. В качестве основного нелинейного эффекта рассматривается „акустический ветер“, выступающий как эффект второго приближения.

Явление „акустического ветра“ состоит в том, что при прохождении звуковой волны в жидкой или газообразной среде, в последней возникают стационарные потоки жидкости или газа. Первые теоретические исследования этого явления принадлежат Релею [3], позднее появилась серия работ [4], краткий анализ и критика которых даны в работе [5].

В работе [6] рассматриваются поверхностные волны, где впервые устанавливается непосредственная связь между волной и переносом вещества. Перенос вещества в этой теории является следствием учета конечности амплитуд поверхностных волн.



В работе [5], исходя из уравнения Хартри, исследуется перенос вещества волнами в системе частиц с произвольным взаимодействием. Вычислена плотность тока переносимого волнами, и выявлена её зависимость от амплитуды колебаний. Недостатком этого решения является то, что не выявлена зависимость плотности тока от температуры. Преимущество нашего подхода заключается в применении уравнения Власова А. А. [1], позволяющего учесть температуру и особо характерные „дальние“ взаимодействия в плазме.

Как известно, при решении уравнения Власова А. А. методом стационарных волн возникает известная трудность, связанная с появлением сингулярных интегралов. С этой трудностью впервые столкнулся Власов А. А. [1]. Власов А. А. считал, что сингулярные интегралы, понимаемые в смысле главного значения, соответствуют стационарным, незатухающим волнам, в которых начальный момент времени никак не выделен.

Л. Д. Ландау [7], считая неправильным метод стационарных волн и применяя к уравнению Власова А. А. преобразование Лапласа, избавился от этих сингулярных интегралов, в результате пришел к выводу, что в плазме возможны лишь нестационарные затухающие волны.

Van Kampen [1] решая уравнение Власова А. А., как и Власов А. А., методом стационарных волн, получил общее решение и показал, что если понимать получающиеся сингулярные интегралы в смысле главного значения, то тем самым отбрасываются нестационарные процессы и приходим к истолкованию Власова А. А. Случай же Ландау Л. Д. получается из общего решения введением начальных условий. В данной статье рассматривается перенос вещества стационарными волнами.

### § 1. Основное уравнение

Исходным уравнением является уравнение Власова А. А. [9]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \bar{\nabla} f - \frac{1}{m} \bar{\nabla} F \bar{\nabla} \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) d\bar{r}' \int f(\bar{r}', \bar{v}', t) d\bar{v}' = 0, \quad (1)$$

где  $F = f_0 + f$  — функция распределения частиц,

$f_0$  — функция распределения частиц равновесного состояния,

$\Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|)$  — потенциальная энергия взаимодействия частиц,

$m$  — масса частиц.

$$f = \sum_{c=1}^{\infty} \lambda^c \varphi_c, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — малый параметр, причем  $\lambda^e = \left(\frac{\partial \rho}{\rho}\right)^e \cdot a$

$$\varphi_c = \sum_{l=-c}^c A_{c,l}(\bar{v}) e^{-il(\omega t - k\bar{r})}, \quad (3)$$

Условие действительности  $\varphi$  есть  $A_{c,l}^*(\bar{v}) = A_{c,-l}(\bar{v})$ .

Задача заключается в определении коэффициента  $A_{c,l}(\bar{v})$ .

## § 2. Рекуррентные формулы для коэффициентов разложения

Подставляя (2) в (1) и приравнявая члены с одинаковыми степенями малости имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_c}{\partial t} + \bar{v} \nabla_{\bar{r}} \varphi_c - \frac{1}{m} \bar{\nabla}_{\bar{v}} f_0 \nabla_{\bar{r}} \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) \varphi_c d\bar{r}' d\bar{v} = \\ = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \bar{\nabla}_{\bar{v}} \varphi_j \bar{\nabla}_{\bar{r}} \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) \varphi_{c-j} d\bar{r}' d\bar{v}'. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) и приравнявая члены с одинаковыми  $\exp[-il(\omega t - k\bar{r})]$  получаем

$$\begin{aligned} [(k\bar{v} - \omega) A_{c,l}(\bar{v}) - \frac{\sigma_{lk}}{m} \bar{k} \bar{\nabla}_{\bar{v}} f_0 a_{c,l}] l = \\ = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \bar{\nabla}_{\bar{v}} A_{j,m'}(\bar{v}) a_{c-j,l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_{lk} = \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) e^{il\bar{k} \cdot (\bar{r} - \bar{r}')} d\bar{r}'$ ,

$$a_{c,l} = \int A_{c,l}(u) du.$$

Обозначая

$$A_{c,l}(u) = A_{c,l}(\bar{v}_z) = \int \int A_{c,l}(\bar{v}) dv_x dv_y, \quad (5')$$

и умножая уравнение (5) на  $\frac{1}{k\bar{v} - \omega}$ , найдем

$$\begin{aligned} \left[ A_{c,l}(\bar{v}) - \frac{\sigma_{lk}}{m} \frac{\bar{k} \bar{\nabla}_{\bar{v}} f_0}{k\bar{v} - \omega} a_{c,l} \right] l = \\ = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \bar{\nabla}_{\bar{v}} A_{j,m'}(\bar{v}) \frac{1}{k\bar{v} - \omega} a_{c-j,l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'). \end{aligned} \quad (6)$$



Направляя  $\bar{k}$  по оси  $z$ , можно без труда проинтегрировать уравнение (6) по  $v_x$  и  $v_y$ . Совершая эти квадратуры и употребляя обозначение (5'), получим,

$$\left[ A_{c,l}(u) - \frac{\sigma_{lk}}{m} k \frac{df_0(u)}{ku - \omega} a_{c,l} \right] l =$$

$$= \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \frac{dA_{j,m'}(u)}{ku - \omega} a_{c-j, l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'). \quad (7)$$

Теперь можно произвести интегрирование по  $u$  (понимаем интеграл в смысле главного значения)

$$\left[ 1 - \frac{\sigma_{lk}}{m} k \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du \right] a_{c,l} l =$$

$$= \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \int \frac{dA_{j,m'}(u)}{ku - \omega} a_{c-j, l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'). \quad (8)$$

Если ввести обозначения

$$\alpha = \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du, \quad \beta_{c,l} = \int \frac{dA_{c,l}(u)}{ku - \omega} du, \quad (9)$$

уравнение (8) примет вид

$$\left[ 1 - \frac{\sigma_{lk}}{m} k \alpha \right] a_{c,l} l = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \beta_{j,m'} a_{c-j, l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'). \quad (10)$$

### § 3. Приближенное определение коэффициентов разложения

Решим уравнение (10) в различных приближениях.

*1-ое приближение*  $c = l = 1$ .

Тогда из (10)  $\left[ 1 - \frac{\sigma_k}{m} k \alpha \right] a_{1,1} = 0$ .

Предполагая  $a_{1,1} \neq 0$ , получим

$$\frac{\sigma_k}{m} k \alpha = 1. \quad (11)$$

Так как  $\alpha = \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du$



(значение  $|a_{1,1}|$  должно определяться интенсивностью, звуком поля), то соотношение (11) переписывается следующим образом

$$\frac{\sigma_k}{m} k \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du = 1. \quad (11')$$

Рассмотрим предельный случай длинных волн ( $k \rightarrow 0$ ). Разложим подынтегральное выражение по степеням  $k$ .

$$\int \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} du = -\frac{1}{\omega} \int \frac{df_0(u)}{du} \left[ 1 + \frac{ku}{\omega} + \left( \frac{ku}{\omega} \right)^2 + \dots \right] du. \quad (11'')$$

Легко видеть, что (11'') можно интегрировать вдоль действительной оси, как это делается в работе [1], и здесь получаются те же соотношения. Этот случай и будем исследовать.

2-ое приближение.

Случай 1.  $c = 2$ ,  $l = 1$ .

$$\left[ 1 - \frac{\sigma_k}{m} k^2 \right] a_{2,1} = \frac{k}{m} [\beta_{1,0} a_{1,1} \tau_k]. \quad (12)$$

Из (11) получим

$$\frac{k}{m} \beta_{1,0} a_{1,1} \tau = 0, \text{ значит } \beta_{2,0} = 0, \text{ или, что то же самое,}$$

$$\int \frac{dA_{1,0}(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} du = 0. \quad (13)$$

Если  $A_{1,0}$  отличается от 0, то значит существует акустический ветер, причем плотность тока

$$J_{2,0} = \int A_{1,0}(u) u du, \quad (14)$$

который будет выступать как эффект 1-го порядка.

При  $k \rightarrow 0$ , как уже было показано, можно интегрировать вдоль действительной оси. При этом нетрудно видеть, что

$$\frac{dA_{1,0}(u)}{du} = 0, \text{ значит } A_{1,0}(u) = C.$$

Чтобы формула (14) имела смысл, нужно брать  $C = 0$ , значит  $A_{1,0} = 0$ . Этот результат показывает, что в первом приближении "акустического ветра" нет.

2-ое приближение. Случай II.  $c = l = 2$ . Тогда из (10)

$$\left[ 1 - \frac{\sigma_k}{m} k^2 \right] 2a_{2,2} = \frac{k}{m} \beta_{1,1} a_{1,1} \tau_k. \quad (15)$$

Отсюда подставляя значения  $\beta_{1,1}$  и  $A_{1,1}$  из (9), (10)

$$a_{2,2} = \frac{k^2}{2m^2} a_{1,1}^2 \sigma_k^2 \frac{1}{1 - \frac{\sigma_k}{m} k^2} \int \frac{d}{du} \left( \frac{df_0}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du.$$

Обозначая

$$I = \int \frac{d}{du} \left( \frac{df_0}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du$$

получим

$$a_{2,0} = \frac{\sigma_k^2}{2m^2} k^2 a_{1,1}^2 \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} I. \quad (16)$$

Перейдем к следующему приближению.

3-ее приближение  $s=3$ ,  $l=1$ . Из (10) получим

$$\left[ 1 - \frac{\sigma_k}{m} k\alpha \right] a_{3,1} = \frac{k}{m} [\beta_{2,0} a_{1,1} \sigma_k + \beta_{2,2} a_{1,-1} \sigma_{-k} (-1) + \beta_{1,-1} a_{2,2} \sigma_{2k}]. \quad (17)$$

Принимая во внимание (11) получим

$$\beta_{2,0} = \frac{\beta_{2,2} a_{1,-1} \sigma_{-k} - 2\beta_{1,-1} a_{2,2} \sigma_{2k}}{a_{1,1} \sigma_k}. \quad (18)$$

Именно этим членом  $\beta_{2,0}$  мы и будем заниматься для расчета исследуемого эффекта.

#### § 4. Вычисление „акустического ветра“

Из (9) и (18) имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{dA_{2,0}}{du} \frac{1}{ku - \omega} du = \\ & = \frac{1}{a_{1,1} \sigma_k} \int \left[ a_{1,-1} \sigma_{-k} \frac{dA_{2,2}(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} - 2a_{2,2} \sigma_{2k} \frac{dA_{1,-1}(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right] du. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) легко заключить, что при  $k \rightarrow 0$

$$\frac{dA_{2,0}(u)}{du} = \frac{1}{a_{1,1} \sigma_k} \left[ a_{1,-1} \sigma_{-k} \frac{dA_{2,2}(u)}{du} - 2a_{2,2} \sigma_{2k} \frac{dA_{1,-1}(u)}{du} \right]. \quad (20)$$

Откуда

$$A_{2,0}(u) = \frac{1}{a_{1,1} \sigma_k} [a_{1,-1} \sigma_{-k} A_{2,2}(u) - 2a_{2,2} \sigma_{2k} A_{1,-1}(u)] + C. \quad (21)$$

Для того, чтобы формула  $I_{2,0} = \int A_{2,0}(u) u du$  имела смысл  $C$  должно равняться нулю.

Из (7) имеем

$$A_{1,1}(u) = \frac{\sigma_k}{m} k \frac{du}{ku - \omega} a_{1,1}, \quad A_{1,-1}(u) = \frac{\sigma_{-k}}{m} k \frac{du}{ku - \omega} a_{1,-1},$$

$$A_{2,2}(u) = \frac{\sigma_{2k}}{2m^3} k^3 \frac{df_0(u)}{ku - \omega} \frac{\sigma_k^2 a_{1,1}^2}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} I + \frac{k^2}{2m^2} \sigma_k^2 a_{1,1}^2 \frac{d}{du} \left[ \frac{df_0(u)}{ku - \omega} \right]. \quad (22)$$

После подстановки (22) в (21) получим

$$A_{2,0}(u) = \left[ \frac{k^2}{2m^2} \sigma_k \sigma_{-k} \frac{d}{du} \left( \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) - \frac{\sigma_{2k} \sigma_k \sigma_{-k}}{2m^3} \times \right. \\ \left. \times \frac{k^3}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} I \frac{df_0(u)}{ku - \omega} \right] |a_{1,1}|^2. \quad (23)$$

Откуда

$$a_{2,0} = \int A_{2,0}(u) du, \quad I_{2,0} = \int A_{2,0}(u) u du, \quad (24)$$

где  $a_{2,0}$  — уплотнение, вызываемое волнами,

$I_{2,0}$  — плотность потока.

Таким образом, вычисление  $a_{2,0}$  и  $I_{2,0}$  сводится к вычислению интегралов

$$I = \int \frac{1}{ku - \omega} \frac{d}{du} \left( \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du, \\ I_1 = \int \frac{u}{ku - \omega} \frac{d}{du} \left( \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du, \\ I_2 = \int \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} du, \quad I_3 = \int \frac{u}{ku - \omega} \frac{df_0(u)}{du} du.$$

Предполагая  $f_0(u)$  и  $f_0'(u)$  равными нулю при  $u = \pm \infty$ , получим

$$I = 3k^2 \int \frac{f_0(u)}{(ku - \omega)^4} du, \quad I_1 = \frac{\omega}{k} I, \quad I_2 = \int \frac{k f_0(u)}{(ku - \omega)^2} du, \quad I_3 = \frac{\omega}{k} I_2,$$

причем, когда

а)  $f_0(u) = n \delta(u)$ , где  $n$  — средняя плотность частиц,

$$I = \frac{3k^2}{\omega^4}, \quad I_1 = \frac{\omega}{k} \frac{3k^2}{\omega^4} n, \quad I_2 = \frac{k}{\omega^2} n, \quad I_3 = \frac{k}{\omega^2} n \frac{\omega}{k},$$

$$б) f_0(u) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$



с точностью до второго приближения включительно получим

$$I = n \frac{3k^2}{\omega^4} \left[ 1 + 10 \frac{2\pi T}{m} \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \right], \quad I_1 = \frac{\omega}{k} I, \\ I_2 = \frac{k}{\omega^2} n \left[ 1 + 3 \frac{2\pi T}{m} \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \right], \quad I_3 = \frac{\omega}{k} I_2. \quad (25)$$

Подставляя (23) в (24) получим

$$I_{2,0} = \frac{k^2}{2m^2} \sigma_k \sigma_{-k} \left\{ 1 - \frac{\sigma_{2k}}{m\omega^2} \frac{k^2 n}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} \left[ 1 + 3 \frac{2\pi T}{m} \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + 10 \frac{2\pi T}{m} \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \right] n \frac{3k^2}{\omega^4} |a_{1,1}|^2 \frac{\omega}{k} \right\}. \quad (26)$$

Выражение (26) определяет зависимость плотности тока от температуры. Из (26) легко видеть, что когда  $\sigma_k < 0$  плотность тока увеличивается с температурой, а в случае  $\sigma_k > 0$   $I_{2,0}$  уменьшается с увеличением температуры.

При

$$1 - \frac{n}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\sigma_{2k}}{m} \\ T = \frac{\sigma_{2k}}{m} \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} \frac{k^2}{\omega^2} \frac{n}{m} \frac{6\pi k^2}{\omega^2}$$

плотность тока обращается в нуль.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю проф. Власову А. А. за предложенную тему и за ценные советы при выполнении работы.

Московский Государственный Университет  
им. Ломоносова

Поступила 2 III 1959

#### Ս. Մ. ԽՀԱՐԺՅԱՆ

### ՊԼԱԶՄԱՅԻ ՈՋ-ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Պլազմայի զծային տատանումների տեսությունը սխառմամբ կարար զարգացել է [1] աշխատություններում: [2] աշխատություններում, առանց հաշվի առնելու արագությունների բաշխումը, ստացվել էին ոչ-զծային տեսությունների բանի արդյունքներ:

Այդ աշխատությունները չեն կարող արտացոլել ջերմաստիճանի ազդեցությունը պլազմայում ոչ-զծային էֆեկտների վրա: Ոչ-զծային տեսությունը

պետք է վերադրել մասնադի և լիցքի փոխանցումը ինչպես երկայնական, աչնպես էլ լայնական աղիքներով, երկայնական աղիքների փոխազդեցությունը միմյանց հետ, լայնական աղիքների փոխազդեցությունը միմյանց հետ: Կարևոր է նաև մագնիսական դաշտի ազդեցությունը ոչ-զմային էֆեկտների վրա:

Ներկա հոդվածում մենք նպատակ ենք դնում՝ նախ և առաջ պարզացնել սիտանմանիկ զրգոումների տեսությունը, որի միջոցով հնարավոր լինի պարզել բոլոր էֆեկտները, այսպես կոչված, փոքր ոչ-զմայնություն, որը համապատասխանում է վերլուծությանը ըստ փոքր պարամետրի՝ խտության փոխազդեցության հարաբերությունը աղիքների ամպլիտյունի զեպքում, խտության միջին արժեքին:

Ներկա հոդվածում վերոհիշյալ ապարատը կիրառվում է պլազմայի միաչն երկայնական աղիքների դեպքի համար: Որպես ոչ-զմային հիմնական էֆեկտ գիտարկվում է «ձայնային քամին», որը հանդես է գալիս որպես երկրորդ մոտավորության էֆեկտ: Այս մոտեցման առավելությունները [4] և [5] աշխատությունների նկատմամբ հիմնված է Ա. Ա. Վլասովի համապարման վրա, որը հանդիսանում է պլազմայում ջերմաստիճանի և հատուկ բնորոշ «հոսավոր» փոխազդեցության միաժամանակյա հաշվումը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М.—Л., 1950. Van Kampen N. C. The dispersion for plasma Waves, Pisica, № 7, 1957, p. 641—650. Van Kampen N. C. On the theory of stationary Waves in plasmas, Pisica, № 12, 1955, p. 949—963. Trilochan Pradhan, Plasma oscillations in a steady Magnetic Field: Circularly polarised Electromagnetic Mods. Phys. Rev., vol. 107, № 5, 1957, p. 1222—1227.
2. Ахиезер А. И. и Любарский Г. Я. К нелинейной теории колебаний электронной плазмы. ДАН СССР, т. 80, 1951, 193. Ахиезер А. И. и Половин Р. В. К теории волновых движений электронной плазмы. ЖЭТФ, т. 30, вып. 5, 1956, ст. 915. Гинзбург В. Л. О нелинейном взаимодействии радиоволн, распространяющихся в плазме. ЖЭТФ, т. 35, вып. 6, 1958, ст. 1573.
3. Lord Rayleigh. Scientific papers (Cambridge) university press., Teddington, England. 108, p. 239, Phil. Trans. 175. Rayleigh, Theory of Sound (macmillan company), Ltd., London, 1896, vol. III.
4. Eckart C. Vortices and Streams Couased by Sound waves, Phys. Rev., vol. 73, 1948, p. 68. A discussion on the first and second viscosities of fluids, Proc. Roy. Soc. A—226, 1—69, 21, 1954.
5. Андреев А. И. Диссертация, Москва, 1955.
6. Власов А. А. О переносе массы и заряда псевдизостными волнами. ЖЭТФ, том 27, вып. 2, 1954, ст. 224.
7. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, вып. 7, т. 16, 1946.



В. А. Шахбазян

## Об улучшении теории возмущений в квантовой электродинамике частиц со спином нуль

### 1. Введение

Взаимодействие частиц с нулевым спином с электромагнитным полем рассматривалось в ряде работ [1]—[8]. Большая часть их [1]—[7] посвящена теории возмущений. При этом применялась как скалярная формулировка Клейна-Гордона [6], так и пятирядное представление общего формализма Дэффина-Кеммера [7]. Было установлено, что скалярная электродинамика перенормируема и число типов расходящихся диаграмм равно пяти [6], [7]. Это—части собственной энергии скалярного мезона и фотона, вершинная и комптоновская части, часть меллеровского взаимодействия. Были установлены два тождества Уорда [6], [7], связывающие собственно-энергетическую часть с вершинной и вершинную часть—с комптоновской [6], [7]. Это позволило полностью устранить расходимости скалярной квантовой электродинамики посредством перенормировки массы и заряда и введения дополнительного контрчлена, описывающего нелинейное взаимодействие скалярного поля с самим собой.

Большой интерес представляют попытки улучшения обычной теории возмущений. В работе [8] найдено, так называемое, „нулевое приближение“ для функций Грина мезона и фотона и вершинной части методом, развитым в [9].

В настоящей работе излагается применение метода ренормализационной группы к случаю скалярной электродинамики. Рассмотрение проводится в формализме Дэффина-Кеммера.

### 2. Построение ренормализационной группы в скалярной квантовой электродинамике

После устранения расходимостей скалярной электродинамики, эффективный лагранжиан взаимодействия [10] следует выбрать в виде:

$$L_{\text{эфф.}}(p) = ez_1: \bar{\psi} \hat{A} \psi : + (z_2 - 1): \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) : - \\ - z_4: \bar{\psi}(p) \frac{p^2 - m^2}{m} X \psi(-p) : - ez_5: \bar{\psi}[(p + p')A] \frac{1}{m} X \psi: -$$



$$-e^2 z_6 : \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi : - \frac{z_3 - 1}{2} \sum_{n, m} g^{nn} g^{mm} : A_n(p) (p^n p^m - g^{nm} p^2) A_m(-p) : + \\ + z_7 : (\bar{\psi} X \psi)^2 + \delta m_1 : \bar{\psi}(p) \psi(-p) : + \delta m_2 : \bar{\psi}(p) X \psi(-p) : \quad (1)$$

Здесь  $\psi$  — оператор скалярного поля, удовлетворяющий уравнению Кеммера

$$(\hat{p} - m) \psi = 0,$$

$\bar{\psi}$  — функция, „кеммеровски“ сопряженная функции  $\psi$ ,

$$\hat{p} = \sum_k g^{kk} \Gamma^k p^k, \quad \hat{A} = \sum_k \Gamma^k A_k,$$

$\Gamma^k$  — пятирядные матрицы Кеммера ( $k = 0, 1, 2, 3$ ),

$z_1, \dots, z_7, \delta m_1, \delta m_2$  — конечные произвольные константы,

$X$  — пятирядная матрица, удовлетворяющая равенству

$$\bar{\psi} X \psi = \bar{\psi}^* \psi^*,$$

где  $\psi^*, \bar{\psi}^*$  — обычные операторы скалярного поля, удовлетворяющие уравнению Клейна-Гордона. Во всех контрчленах, в которых аргументы операторов полей явно не выписаны, подразумевается интегрирование по импульсным аргументам от произведения операторов и  $\delta$  — функции суммарного импульса.

В силу градиентной инвариантности имеют место следующие тождества Уорда:

$$z_1 = z_2, \quad z_4 = z_5 = z_6. \quad (2)$$

Пользуясь свойствами пятирядного представления матриц Кеммера можно показать, что в (1) можно произвести следующую замену:

$$-z_1 : \bar{\psi}(p) \frac{X}{m} (p^2 - m^2) \psi(-p) : - e z_5 : \bar{\psi} [(p + p') A] \frac{1}{m} X \psi : - \\ - e^2 z_6 : \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi : \rightarrow -z_4 : \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) : - \\ - e z_5 : \bar{\psi} \hat{A} \psi : + e^2 (2z_5 - z_4 - z_6) : \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi : \quad (3)$$

(см. Приложение).

В силу (2) последнее слагаемое равно нулю, и мы получаем вместо (1)

$$L_{\text{эфф.}}(p) = e(z_1 - z_3) : \bar{\psi} \hat{A} \psi : + (z_2 - z_4 - 1) : \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) : - \\ - \frac{z_3 - 1}{2} \sum_{n, m} : A_n(p) (p^n p^m - g^{nm} p^2) A_m(-p) : + z_7 : (\bar{\psi} X \psi)^2 : + \\ + \delta m_1 : \bar{\psi}(p) \psi(-p) : + \delta m_2 : \bar{\psi}(p) X \psi(-p). \quad (4)$$

Вводя новые обозначения  $z_1 - z_3 = z_2 - z_4 = z$ ,  $z_7 \rightarrow z_4 h$ , окончательно имеем

$$\begin{aligned}
L_{\text{эфф.}}(p) = & ez: \bar{\psi} \hat{A} \psi: + (z-1): \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p): - \\
& - \frac{z_3 - 1}{2} \sum_{a, m} A_n(p) (p^a p^m - g^{nm} p^2) A_m(-p): + \\
& + \delta m_1: \bar{\psi}(p) \psi(-p): + \delta m_2: \bar{\psi}(p) X \psi(-p): + z_4 h: (\bar{\psi} X \psi)^2: \quad (5)
\end{aligned}$$

Здесь  $h$  — второй заряд.

Применяя метод рассмотрения, развитый в [10], произвол, содержащийся в  $S$ -матрице, можно свести к мультипликативному произволу в одночастичных функциях Грина, вершинной части и части меллеровского взаимодействия. Это, в свою очередь, эквивалентно некоторой конечной перенормировке зарядов. Можно поэтому определить группу преобразований, оставляющих инвариантными константы взаимодействия. Если считать калибровку фотонной функции Грина произвольной [11], то уравнения указанных преобразований примут вид:

$$\begin{aligned}
G_2 &= z G_1, \quad D_2 = z_3 D_1, \quad \Gamma_2 = z^{-1} \Gamma_1, \\
\Box_2 &= z_4^{-1} \Box_1, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$e_2 = z_3^{-1/2} e_1, \quad h_2 = z_4 z^{-2} h_1, \quad d_i^{(2)} = z_3^{-1} d_i^{(1)}.$$

Здесь

$G$  — функция Грина мезона,

$D$  — функция Грина фотона,

$\Gamma$  — вершинная часть,

$\Box$  — часть меллеровского взаимодействия,

$d_i^0$  — коэффициент при продольной части функции Грина фотона.

### 3. Матричная структура симметричных асимптотик функций $G, \Gamma, \Box$

Для получения симметричных асимптотик функций, фигурирующих в (6), рассмотрим их матричную структуру. Нас интересуют те члены в  $G, \Gamma, \Box$ , в которых степени квадратов константы взаимодействия совпадают со степенями больших логарифмов. В области больших импульсов сумма ряда таких членов представляет собой, как известно [9], [10], нулевой член разложения точной функции в ряд по степеням константы взаимодействия. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением матричных структур симметричных асимптотик нулевого приближения функций  $G, \Gamma, \Box$ .

Рассмотрим сперва симметричные асимптотики  $G, \Gamma^n$  и  $K^{nm}$ , где  $K^{nm}$  — комптоновская часть. В нужном нам приближении, руководствуясь вычислениями по теории возмущений и соображениями релятивистской инвариантности, их матричные структуры можно задать в виде

$$G(p) = \frac{1}{m} \frac{m^2 a(p) + (\hat{p}^2 - p^2) b(p) + m \hat{p} d_m(p)}{m^2 - p^2} - \frac{1}{m} Y[f(p) - 1], \quad (7)$$



$$\Gamma^n(p, p, p) = \Gamma^n \cdot \Gamma(p) - \frac{2p^n}{m} X[f(p) - 1], \quad (8)$$

$$K^{nm}(p, \dots, p) = -\frac{g^{nm}}{m} X[f(p) - 1], \quad Y = 1 - X. \quad (9)$$

Здесь везде  $[f(p) - 1]$  одна и та же функция в силу тождеств Уорда. Отметим, что матричная структура в (7), (8), (9) согласуется с выбором ее, сделанным в работе [8]. Следует иметь в виду, что в ультрафиолетовой области значения  $a(p)$  можно изменять, оставляя неизменными все остальные функции. В самом деле, если к  $a(p)$  добавить  $a(p)$ , имеющее логарифмическую асимптотику, то это не приведет к изменению в  $b(p)$ , так как соответствующая добавка  $\frac{m^2}{p^2} a(p)$  пренебрежимо мала.

Перейдем к симметричной асимптотике части меллеровского взаимодействия. Поскольку нас интересует только вклад во второй заряд, мы можем ограничиться теми членами, матричная структура которых совпадает со структурой члена второго взаимодействия в лагранжиане, т. е. дается выражением  $X_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta}$ . Скалярную функцию, являющуюся множителем при указанной структуре, обозначим через  $\square_1$ .

#### 4. Дифференциальные уравнения Ли ренормализационной группы

При выводе дифференциальных уравнений группы, функции  $\Gamma$ ,  $\square_1$  будут считаться зависящими от одного импульсного аргумента. Это соответствует их симметричной асимптотике в ультрафиолетовой области и частному выбору асимптотик в инфракрасной. Имея в виду это обстоятельство, можно написать функциональные уравнения ренормализационной группы. Аналогично тому, как это делается в [10], получаем

$$\begin{aligned} e^2 d(x, y, e^2, h) &= e^2 d(t, y, e^2, h) \times \\ &\times d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2, h), h\varphi(t, y, e^2, h)\right), \\ h\varphi(x, y, e^2, h) &= h\varphi(t, y, e^2, h) \times \\ &\times \varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2, h), h\varphi(t, y, e^2, h)\right), \\ s(x, y, e^2, e^2 d_i^0, h) &= s(t, y, e^2, e^2 d_i^0, h) \times \\ &\times s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2, h), e^2 d_i^0, h\varphi(t, y, e^2, h)\right). \end{aligned} \quad (13)$$



Здесь  $s(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h)$  — совокупность функций  $a, b, d_M, \Gamma, \square_1, f$ ;  $h\varphi(x, y, e^2, h)$  — второй инвариантный заряд ренормализационной группы, который составлен следующим образом:

$$h\varphi(x, y, e^2, h) = h\square_1(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h) d_M^2(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h).$$

При получении последнего равенства предположено, что выражение второго инвариантного заряда не может зависеть от  $d_l^0$ . В противном случае была бы нарушена градиентная инвариантность теории, так как  $h\varphi$  входит явным образом в выражение поперечной функции Грина фотона. Вычисления в низшем порядке теории возмущений по  $e^2$  и  $h$  подтверждают это предположение. Далее, из трех функций  $a(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$ ,  $b(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$  и  $d_M(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$ , фигурирующих в функции распространения мезона, при составлении второго заряда использована последняя. Это опять-таки связано с их поведением в ультрафиолетовой и инфракрасной областях. В инфракрасной области все они равны друг другу, тогда как в ультрафиолетовой, пользуясь соображениями о неоднозначности функции  $a(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$ , изложенными в предыдущем пункте, можно всегда выбрать  $a = d_M$ . Что же касается функций  $b(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$  и  $f(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$ , то они не могут принимать участия в составлении второго заряда, так как умножаясь на  $\hat{p}^2 - p^2$  и  $Y$  соответственно, во всех внутренних линиях, оканчивающихся в  $h$  — вершинах, выпадают в силу специфической матричной структуры последних. Это становится ясным, если воспользоваться свойствами

$$(p^2 - \hat{p}^2)X = 0, \\ XY = 0.$$

Отметим еще, что все функции нормированы на единицу

$$d(1, y, e^2, h) = \varphi(1, y, e^2, h) = s(1, y, e^2, e^2 d_l^0, h) = 1. \quad (14)$$

Дифференцируя теперь (14) по  $x$  и полагая  $t = x$ , получим следующие дифференциальные уравнения группы

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^2 d(x, y, e^2, h)}{\partial x} &= \frac{e^2 d(x, y, e^2, h)}{x} \times \\ &\times D \left[ \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2, h), h\varphi(x, y, e^2, h) \right], \\ \frac{\partial h\varphi(x, y, e^2, h)}{\partial x} &= \frac{h\varphi(x, y, e^2, h)}{x} \times \\ &\times \Phi \left[ \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2, h), h\varphi(x, y, e^2, h) \right], \\ \frac{\partial s(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h)}{\partial x} &= \frac{s(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h)}{x} \times \end{aligned} \quad (15)$$

$$\times S \left[ \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2, h), e^2 d_l^0, h\varphi(x, y, e^2, h) \right],$$

где

$$D \left( \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} d \left( \xi, \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) \right]_{\xi=1},$$

$$\Phi \left( \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi \left( \xi, \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) \right]_{\xi=1},$$

$$S \left( \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi, e^2 d_l^0 \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} s \left( \xi, \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi, e^2 d_l^0 \right) \right]_{\xi=1}.$$

### 5. Импульсные асимптотики функций

$G, D^{nm}, \Gamma, f, \square_1$  при  $|p^2| \gg m^2$

*Ультрафиолетовая асимптотика.* При нахождении ультрафиолетовой асимптотики, для функций  $D, \Phi, S$  будем пользоваться низшими приближениями по  $e^2$  и  $h$ . Соответствующие выражения из теории возмущений имеют вид:

$$\begin{aligned} d_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{4\pi^2} \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ a_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{16\pi^2} (d_l^0 - 3) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ b_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2 d_l^0}{16\pi^2} \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ d_{M(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{32\pi^2} (2d_l^0 - 3) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ f_{(2)}(p) &= 1 + \frac{3e^2}{64\pi^2} (d_l^0 - 1) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ \Gamma_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{64\pi^2} (3 - d_l^0) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ \square_1(p) &= 1 - \left( \frac{e^2 d_l^0}{8\pi^2} + \frac{5h}{32\pi^2} + \frac{3}{4\pi^2} \frac{e^4}{h} \right) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Первые два уравнения в (15) для инвариантных зарядов переписываются в виде

$$\frac{dz_1}{dz} = z_1 D(z_1, \rho), \quad (17a)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \rho \Phi(z_1, \rho), \quad (17b)$$

где  $z_1 = e^2 d(z, e^2, h)$ ,  $\rho = h\varphi(z, e^2, h)$ ,  $z = \ln x$ .



Пользуясь для  $D$  и  $\Phi$  (16), получаем

$$\sigma_1 D(\sigma_1, \rho) = d_1 \sigma_1^2,$$

$$\rho \Phi(\sigma_1, \rho) = -\varphi_1 \sigma_1^2 - \varphi_2 \sigma_1 \rho - \varphi_3 \rho^2, \quad (18)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{48\pi^2}, \quad \varphi_1 = \frac{3}{4\pi^2}, \quad \varphi_2 = \frac{3}{16\pi^2}, \quad \varphi_3 = \frac{5}{32\pi^2}.$$

Для  $\sigma_1$  сразу получаем из (17а) и первого уравнения в (16)

$$\sigma_1 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{48\pi^2} \ln x}. \quad (19)$$

Исключая из (17)  $z$  и используя (18), получаем уравнение

$$\frac{d\rho}{d\sigma_1} = -\frac{\varphi_1}{d_1} - \frac{\varphi_2}{d_1} \frac{\rho}{\sigma_1} - \frac{\varphi_3}{d_1} \frac{\rho^2}{\sigma_1^2}, \quad (20)$$

решение которого имеет вид

$$\rho = \left[ \frac{h}{e^2} - a - b \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) \right] e^2 \exp(c\varphi). \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{c} \ln \frac{\sigma_1}{e^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{\frac{h}{e^2} + \frac{d_1 + \varphi_2}{2\varphi_3}}{\sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_3} - \frac{(d_1 + \varphi_2)^2}{4\varphi_3^2}}} = -\frac{a}{b}, \\ c &= \frac{d_1}{\varphi_3 \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_3} - \frac{(d_1 + \varphi_2)^2}{4\varphi_3^2}}} = \frac{d_1}{\varphi_3 b}. \end{aligned}$$

Нас интересуют значения  $\sigma_1^2 \geq e^2$ . В этой области  $\varphi$  может принимать только неотрицательные значения. Считая  $h$  и  $e^2$  конечными и отличными от нуля, получаем следующие неравенства, определяющие область изменения  $\alpha$

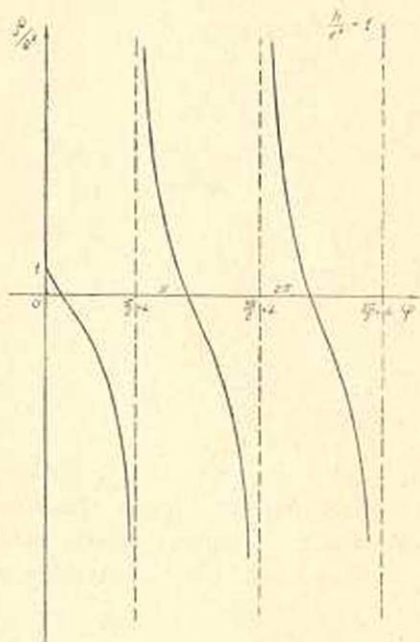
$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Исследуем формулу (21). При  $\varphi = 0$ , т. е. при  $\sigma_1 = e^2$ ,  $\rho = h$ . Функция  $\rho(\varphi)$  имеет бесконечное число точек разрыва, в которых обращается в  $\pm \infty$ . Учитывая положительность  $\varphi$  и область задания  $\alpha$ , получаем, что  $\rho$  обращается в бесконечность в точках

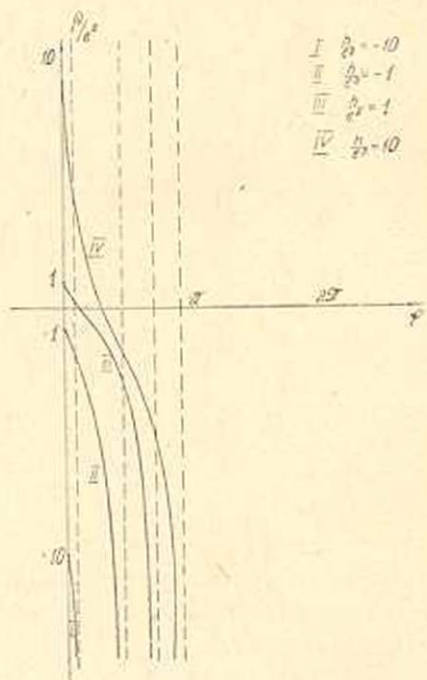
$$\varphi = \alpha + \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$



Так как  $\alpha$  зависит от отношения  $\frac{h}{e^2}$ , то каждая кривая семейства  $\rho(\varphi, \alpha)$  будет иметь свою совокупность точек разрыва и асимптот. Поэтому графическое изображение семейства кривых  $\rho(\varphi, \alpha)$  на всей фазовой плоскости представляется затруднительным. На фиг. 1 приведен график одной кривой семейства, для которой  $h = e^2$ . Кривая, соответствующая экспериментальным значениям  $e^2$  и  $h$ , будет определяться их отношением. Заметим, что уже при  $\varphi$ , достаточно близком к значению  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ , происходит выход из области слабой связи по  $\rho$ . Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением участка фазовой плоскости, соответствующего области изменения  $\varphi$  в интервале  $\left[0, \frac{\pi}{2} + \alpha\right]$ . На фиг. 2 приведены графики четырех кривых, соответствующих значениям  $\frac{h}{e^2}$  равным соответственно  $\pm 1, \pm 10$ .



Фиг. 1



Фиг. 2.

Представляет интерес выяснить, в какой области значений безразмерного импульса  $x$  происходит выход из области слабой связи по  $\rho$ . Отметим, что выход из области слабой связи по  $\sigma_1$  происходит, как это видно из (19), при значениях  $\ln x$ , достаточно близких к

$$\ln x_{\sigma_1 \rightarrow \infty} = \frac{48\pi^2}{e^2}. \quad (22)$$

Значение  $\alpha_1$ , при котором  $\rho \rightarrow \infty$ , дается равенством

$$\alpha_{1\rho \rightarrow \infty} = e^2 \exp \left[ c \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right]. \quad (23)$$

Используя (19), можно получить зависимость между значением безразмерного импульса  $x$ , при котором  $\rho \rightarrow \infty$ , и  $e$  и  $\hbar$ :

$$\ln x_{\rho \rightarrow \infty} = \frac{48\pi^2}{e^2} \left[ 1 - \frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}} \right]. \quad (24)$$

Из (23) следует, что отношение  $\frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}}$  не может принимать отрицательных значений. Далее, отсюда же видно, что так как  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ , то область изменения  $\frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}}$  задается неравенствами

$$e^{-e^2} < \frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}} < 1,$$

поэтому всегда  $\ln x_{\rho \rightarrow \infty} < \ln x_{\alpha_1 \rightarrow \infty}$ . Таким образом, следует ожидать, что выход из области слабой связи по  $\rho$  произойдет раньше, чем по  $\alpha_1$ . В самом деле, семейство асимптот (23) ограничено справа значением  $e^2 \exp(c\pi) = 1,22 e^2$ . Так как  $e^2 \ll 1$ , то самая крайняя асимптота находится в области значений  $\alpha_{1\rho \rightarrow \infty} \ll 1$ . Поэтому для всех кривых семейства  $\rho(\alpha, \alpha)$  выход из области слабой связи по  $\rho$  будет происходить раньше, чем по  $\alpha_1$ . Например, при  $\frac{\hbar}{e^2} = 1$  второй инвариантный заряд  $\rho$  стремится к единице при  $\alpha_1 \rightarrow 1,15e^2$ . Отношение логарифмов безразмерных импульсов, при которых  $\rho \sim 1$  и  $\alpha_1 \sim 1$ , равно

$$\frac{\ln x_{\rho \sim 1}}{\ln x_{\alpha_1 \sim 1}} = 0,131 \left( \frac{\hbar}{e^2} = 1 \right).$$

Таким образом, из данного примера устанавливается, что выход из области слабой связи по  $\rho$  происходит раньше, чем по  $\alpha_1$ .

Приведем теперь выражения для симметричных асимптотик функций  $G$ ,  $\Gamma$ ,  $\square$ . Решая уравнения (15), получаем

$$b(x, e^2, e^2 d_1^0) = x^{\frac{e^2 d_1^0}{16\pi^2}}, \quad (25)$$

$$d_M(x, e^2, e^2 d_1^0) = x^{\frac{e^2 d_1^0}{16\pi^2}} [d(x, e^2)]^{-1/2}, \quad (26)$$

$$\Gamma(x, e^2, e^2 d_1^0) = x^{\frac{e^2 d_1^0}{64\pi^2}} [d(x, e^2)]^{-1/4}, \quad (27)$$



$$f(x, e^2, e^2 d_l^0) = x^{\frac{3e^2 d_l^0}{64\pi^2}} [d(x, e^2)]^{-3/4}, \quad (28)$$

$$\square_1(x, e^2, e^2 d_l^0, h) = x^{-\frac{e^2 d_l^0}{8\pi^2}} [d(x, e^2)]^{5-\frac{A}{C}} \times \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \frac{|\cos(\varphi + \beta)|^B}{\sin(\varphi + \alpha)}, \quad (29)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a + 3b^2}{3ab - 2b}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad A = -\frac{1}{9b^2 + 4}, \quad B = \frac{3b}{9b^2 + 4}.$$

(25) и (26) совпадают с выражениями функций  $\lambda(\xi)$ ,  $G_{10}$ , полученными в [8]. Формула (29) получена впервые.

Автор пользуется случаем выразить свою глубокую благодарность доктору физико-математических наук Д. В. Ширкову, под руководством которого выполнена настоящая работа. Автор благодарен также И. Ф. Гинзбургу за полезное обсуждение.

### Приложение

Докажем, что контрчлены вида  $-\bar{\psi} \frac{z_4}{m} A^2 X \psi$  сокращаются с аналогичными контрчленами, появляющимися из  $-z_4 \bar{\psi} \frac{p^2 - m^2}{m} X \psi$  и  $-z_4 \bar{\psi} \frac{[(p+q)A]}{m} X \psi$ , причем последние преобразуются к виду  $-z_4 \bar{\psi} (\hat{p} - m) \psi$ ,  $-z_4 \bar{\psi} \hat{A} \psi$  соответственно. При доказательстве производятся следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[ -iz_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p) i \hat{A} = \\ & = i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[ -iz_4 (\hat{p} - m) \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p) i \hat{A} - iz_4 \frac{A^2}{m} X; \\ & \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[ -iz_4 \frac{(p+q)A}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(q) = \frac{1}{i} \Delta^c(p) [-iz_4 \frac{\hat{p}}{m} \hat{A} X] \frac{1}{i} \Delta^c(q) + \\ & + \frac{1}{i} \Delta^c(p) [-iz_4 X \frac{\hat{A}}{m} \hat{q}] \frac{1}{i} \Delta^c(q) = \frac{1}{i} \Delta^c(p) \times \\ & \times \left[ -iz_4 \frac{(\hat{p} - m) \hat{A} X}{m} \right] \frac{1}{i} \Delta^c(q) + \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[ -iz_4 \frac{X \hat{A} (\hat{q} - m)}{m} \right] \frac{1}{i} \Delta^c(q) + \\ & + \frac{1}{i} \Delta^c(q) [-iz_4 \hat{A}] \frac{1}{i} \Delta^c(q). \end{aligned} \quad (\Pi 1)$$



Как видно из (П1), включение члена  $-z_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$  в  $\Delta^c(p)$  приводит к появлению комптоновской вершины, если мезонная линия начинается и кончается в обычных вершинах  $\hat{A}$ . Точно также, если обе стороны второго соотношения в (П1) умножить на  $\hat{A}$ , то первый и второй члены в правой части приводят к появлению комптоновских вершин. Используются также следующие равенства:

$$(\hat{p} - m) \psi(p) = 0, \quad \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) = 0, \quad (П2)$$

$$(\hat{p} - m) \Delta^c(p) = -1.$$

Важно отметить еще одно обстоятельство. Если хотя бы один конец мезонной линии заканчивается в вершинах  $-z_4: \bar{\psi}[(p+q)A] \frac{1}{m} X \psi:$ ,  $-z_4: \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi:$ , то включение в нее членов  $-i \frac{z_4}{m} (p^2 - m^2) X$  не приводит к появлению комптоновских вершин.

Точно так же, если в мезонную линию включена одна вершина  $-z_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$ , могущая привести к появлению комптоновской вершины, то включение дополнительно одной или большего числа таких же вершин в ту же линию приведет только к перенормировке мезонной линии и увеличению степени  $z_4$  при комптоновской вершине.

Для доказательства рассмотрим незамкнутые мезонные циклы  $n$ -го порядка.

Возьмем справа такую их совокупность, в которую входят:

1) всевозможные циклы  $n$ -го порядка с одной вершиной

$$-z_4 \frac{[(p+p')A]}{m} X,$$

2) всевозможные циклы  $(n-1)$ -го порядка с одной вершиной

$$-z_4 \frac{1}{m} A^2 X \text{ и}$$

3) все циклы  $n$ -го порядка с вершиной  $-z_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$ , включенной в один из отрезков цикла.

Тогда, беря сумму всех выражений, соответствующих указанной совокупности, получим, что все циклы с комптоновскими вершинами сокращаются при одновременном выполнении преобразования (3). В самом деле, используя формулы (П1) и (П2), из суммы циклов первой совокупности получаем:

$$\bar{\psi}(p) \left\{ \left( -iz_4 \frac{[(p+p_1)A]}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i \hat{A} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \left[ -iz_4 \frac{[(p_1 + p_2)A]}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \left[ -iz_4 \frac{[(p_n + q)A]}{m} X \right] \psi(q) = \\
& = \bar{\psi}(p) \left\{ (-iz_4 \hat{A}) \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \right. \quad (\text{ПЗ}) \\
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) (-iz_4 \hat{A}) \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) (-iz_4 \hat{A}) \left. \right\} \psi(q) + \\
& + \bar{\psi}(p) \left\{ \left( 2iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \right. \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) \left( 2iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \left. \right\} \psi(q).
\end{aligned}$$

Мы получили исходную совокупность циклов  $n$ -го порядка с вершинами  $-iz_4 \hat{A}$ , вместо  $-iz_4 \frac{(p + p')A}{m} X$ , и новую совокупность циклов  $(n-1)$ -го порядка с комптоновскими вершинами  $2iz_4 \frac{A^2}{m} X$ . Из суммы циклов третьей совокупности получим

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}(p) \left\{ i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \left[ -iz_4 \frac{p_1^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \right. \\
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \left[ -iz_4 \frac{p_2^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_3) \dots \\
& \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) \times \\
& \times \left[ -iz_4 \frac{p_n^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} \left. \right\} \psi(q) = \\
& = \bar{\psi}(p) \left\{ \left( -iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \right. \quad (\text{П4}) \\
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \left( -iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_3) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) \left( -iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \left. \right\} \psi(q) + \\
& + \bar{\psi}(p) \left\{ i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) [-iz_4(p_1 - m)] \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \right.
\end{aligned}$$



$$\dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i \hat{A} + \dots + i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) i \hat{A} \times \\ \times \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) | -iz_4(\hat{p} - m) | \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) \Big| \psi(q).$$

В этом случае получается исходная совокупность циклов  $n$ -го порядка с вершинами  $-iz_4(\hat{p} - m)$  вместо  $-iz_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$ , и новая совокупность циклов  $(n-1)$ -го порядка с комптоновскими вершинами  $-iz_4 \frac{A^2}{m} X$ .

Мы видим, что циклы  $(n-1)$ -го порядка, образовавшиеся из первой и третьей совокупностей, в сумме с циклами из второй совокупности дают нуль. Таким образом, преобразование (3) можно считать доказанным для рассмотренного частного случая.

Общий случай, когда в линии и узлы циклов  $n$ -го и  $(n-1)$ -го порядков включается произвольное число вершин, пропорциональных  $z_4$ , доказывается методом индукции. Для замкнутых петель доказательство аналогично.

Математический институт  
им. В. А. Стеклова  
АН СССР

Поступила 25 VI 1959

#### Վ. Ա. Շահբազյան

### ԶԵՐՈ ՍՄԻՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԿՎԱՆՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ԳՐԳՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԲԱՐԵԼԱՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

#### Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կատարված է երկրիցք սենյորմալիզացիոն խումբ սկալյար (պսևդոսկալյար) մասնիկների և էլեկտրամագնիսական դաշտի փոխազդման տեսության մեջ: Լինգ ամրն Գրինի ֆոտոնային ֆունկցիայի արամաշարիակումը ևնթադրվել է կամալական: Հետազոտված է ինվարիանտային լիցքերի վարքը ֆազային չարթաթյուն վրա: Պարզվում է, որ թույլ կապի ախրուլթից ևլքը մեղրոնային դաշտի ոչ դծային փոխազդում տվող լիցքով ավելի շուտ է տեղի ունենում, քան էլեկտրականով: Աւարամանուշակադուլն տիրուլթում ռղերուլի մոտավորությամբ [9] դոնված են մեղրոնի և ֆոտոնի Գրինի ֆունկցիայի համար իմպուլսային ախրագոտոնիկներ: Գոնված են նաև սխեմարիկ ախրագոտոնիկներ դադաթային մասի և քառադադաթ դիագրամի համար:



## ЛИТЕРАТУРА

1. Neuman M. and Furry W. H. On the interactions of Mesons with the Electromagnetic field, Phys. Rev., 76, 1677, 1949.
2. Kinoshita T. On the interaction of mesons with the electromagnetic field I, Progr. Theor. Phys., 5, 473, 1950.
3. Kinoshita T. and Nambu J. On the interaction of mesons with the electromagnetic field II, Progr. Theor. Phys., 5, 749, 1950.
4. Matthews P. T. Spinless mesons in the Electromagnetic field, Phys. Rev., 80, 292, 1950.
5. Peaslee D. C. Boson Current Corrections to second Order, Phys. Rev., 81, 94, 1951.
6. Salam A. Renormalised S-matrix for scalar electrodynamics, Phys. Rev., 86, 731, 1952.
7. Salam A. Renormalisation of scalar electrodynamics using  $\beta$ -formalism, PROC. ROY. Soc., A211, 276, 1952.
8. Горьков Л. П. и Халатников И. М. Электродинамика заряженных скалярных частиц, ЖЭТФ, 31, 1062, 1956.
9. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М. Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона в квантовой электродинамике, ДАН СССР, 95, 773, 1954.  
Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М. Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике, ДАН СССР, 95, 1177, 1954.  
Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М. Масса электрона в квантовой электродинамике, ДАН СССР, 96, 261, 1954.
10. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей, ГИИТТ, 1957.
11. Лозунов А. А. Об одном обобщении ренормализационной группы, ЖЭТФ, 30, 793, 1956.