

А. Е. Аветисян

Некоторые применения теории обобщенных интегральных преобразований

В работе [1] были получены интегральные представления аналитических функций, имеющих определенный рост в области угла. Были получены также параметрические представления некоторых классов аналитических в угловых областях функций, удовлетворяющих условиям интегрируемости в квадрате модуля на определенной системе лучей комплексной плоскости, исходящих из начала координат. Из этих результатов, в частности, следовало следующее обобщение теоремы Палей и Винера ([2], стр. 8).

Теорема А. Класс $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ функций $f(z)$, аналитических в области $|\arg z| < \alpha$ ($\alpha < \pi$) и удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 r^{2\mu\varphi - \rho - 1} d\varphi < M < +\infty, \quad (|\varphi| < \alpha), \quad (1)$$

где $\alpha + \frac{\pi}{2\rho} = \pi$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, а M — постоянная, не зависящая от φ , совпадает с классом функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\pi} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\mu-1} v(x) dx, \quad (2)$$

где $v(x) \in L_2(0, \infty)$, а $E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$ — целая функция

типа Миттаг-Лефлера. При этом функции класса $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ почти всюду имеют конечные граничные значения $f(re^{\pm i\alpha})$, которые также удовлетворяют условию (1) и которые почти всюду определяются формулой

$$f(r^{1/\rho} e^{\pm i\alpha}) r^{\mu-1} = \frac{d}{dr} \left\{ r^{\mu} \int_0^{\pi} E_{\rho}(-r^{1/\rho} e^{\pm i\alpha} x^{1/\rho}; \mu+1) x^{\mu-1} v(x) dx \right\}. \quad (3)$$

В первой части настоящей статьи доказывается, что функции класса $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ разлагаются в ряд по специальной системе рациональных функций, полюсы которых лежат вне области регулярности разложимой функции. Во второй части приводится новая формула обращения для интегрального преобразования М. М. Джрбашяна (2), в котором используются значения функции $f(z)$ на полупрямой, лежащей в области регулярности этой функции.

Пользуясь случаем выражаю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за руководство.

1°. Пусть задана последовательность чисел $\{\gamma_n\}$:

$$-\frac{1}{2} < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{k+1}} = \infty.$$

Рассматривая функции

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i} e^{-\frac{x}{2}} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_\nu + 1) e^{-\zeta x}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)} d\zeta \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

где C_n — простой контур, охватывающий окрестности точек $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ (за C_n мы впредь будем брать окружность $|\zeta - \gamma_n| = \gamma_n + \frac{1}{2} - \eta$ ($\eta > 0$ — малое число), Г. В. Бадалян показал [3], что система функций $\{p_n(x)\}$ ортонормальна на полуоси, а при условии $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{k+1}} = \infty$ она замкнута в классе $L_2(0, \infty)$. Это значит, что для произвольной функции $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left| \varphi(x) - \sum_{k=0}^n a_k p_k(x) \right|^2 dx = 0,$$

где

$$a_k = \int_0^{\infty} \varphi(x) p_k(x) dx.$$

Отсюда следует, что если $\Phi(x)$ произвольная функция из класса $L_2(0, \infty)$, то

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \Phi(x) p_k(x) dx. \quad (1.2)$$

Теперь предположим, что функция $F(z)$ принадлежит классу

$N_2(\alpha, \rho, \mu)$. Тогда согласно теореме А при $|\arg z| < \alpha$ имеем представление

$$F(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} v(x) dx, \quad (1.3)$$

где $v(x) \in L_2(0, \infty)$. Из асимптотических свойств функции $E_{\rho}(z; \mu)$ [4] и из того, что $\alpha + \frac{\pi}{2\rho} = \pi$ следует, что при $|\arg z| < \alpha$

$$E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} \in L_2(0, \infty).$$

По формуле (1.2) имеем

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_0^{\infty} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} p_k(x) dx, \quad (1.4)$$

где

$$A_k = \int_0^{\infty} v(x) p_k(x) dx. \quad (1.5)$$

Подставляя в (1.4) под знаками интегралов значения $p_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) из (1.1) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} p_n(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} \frac{V2\gamma_n+1}{2\pi i} \int_{C_n}^{n-1} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_{\nu} + 1) e^{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)x}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_{\nu})} d\zeta dx = \\ &= \frac{V2\gamma_n+1}{2\pi i} \int_{C_n}^{n-1} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_{\nu} + 1)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_{\nu})} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)x} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} dx \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Изменение порядка интегрирования законно, так как интеграл с бесконечным пределом сходится равномерно по $\zeta \in C_n$. Значение интеграла в скобках известно (см. [5]).

Подставляя его значение в (1.6), получим:

$$\int_0^{\infty} E_{\rho}(-zx^{1/\rho}; \mu) x^{\alpha-1} p_n(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2\lambda_n+1}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_\nu + 1) \left[\left(\zeta + \frac{1}{2} \right)^{1/p} \right]^{1-\nu p}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu) \left[\left(\zeta + \frac{1}{2} \right)^{1/p} + z \right]} d\zeta = \\
 &= \frac{\sqrt{2\lambda_n}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \lambda_\nu) \zeta^{\gamma_\nu - \nu p}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \lambda_\nu) (\zeta^{1/p} + z)} d\zeta = R_n(z), \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

где $\lambda_k = \gamma_k + \frac{1}{2}$ ($k = 0, 1, \dots$), а контур C_n есть окружность $|\zeta - \lambda_n| = |\lambda_n - \gamma_0|$, которая охватывает окрестности точек $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Нетрудно видеть, что $R_n(z)$ есть рациональная функция, имеющая полюсы в точках $[-\lambda_k^{1/p}]$ ($k = 0, 1, \dots$). Если, в частности, $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, то

$$R_n(z) = \sqrt{2\lambda_n} \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\lambda_k + \lambda_\nu) \lambda_k^{\gamma_\nu - \nu p}}{\prod_{\nu=0}^n (\lambda_k + \lambda_\nu) (\lambda_k^{1/p} + z)}, \quad (1.8)$$

где штрих при знаке произведения в знаменателе означает, что в произведении ν не принимает значения k .

Из (1.4), (1.5), (1.7) следует разложение

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(z), \quad (1.9)$$

где

$$A_n = \int_0^{\infty} v(x) p_n(x) dx.$$

Покажем, что коэффициенты A_n могут быть выражены через граничные значения функции $F(z)$. Из равенства (1.7) имеем почти для всех y

$$R_k(y^{1/p} e^{\pm i\pi}) y^{n-1} = \frac{d}{dy} \left\{ y^n \int_0^{\infty} E_\tau(y^{1/p} x^{1/p} e^{\pm i\frac{\pi}{2p}}; p+1) x^{n-1} p_k(x) dx \right\}. \quad (1.10)$$

Обозначим

$$\Phi_m(\mp iy) = \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{e^{\pm i y x} - 1}{\pm i x} p_m(x) dx = \sqrt{2\lambda_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{m-1} (iy - \lambda_\nu)}{\prod_{\nu=0}^m (iy + \lambda_\nu)}. \quad (1.11)$$

Рациональные функции $\Phi_m(z)$ имеют полюсы в точках $\{-\lambda_n\}$. Система функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi_m(iy) \right\}$ ортонормальна на $(-\infty, \infty)$ [3]. Она может быть просто получена также из ортонормальной на единичной окружности системы рациональных функций Уолша отображением единичного круга на левую полуплоскость (см. [6] и [7]).

Из равенств (1.10) и (1.11), согласно обобщенной формуле Парсваля*, из теории обобщенных интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами

$$E_p(y^{1/p} x^{1/p} e^{\pm i \frac{\pi}{2p}}; \mu+1) x^{\mu-1} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\pm i y x} - 1}{\pm i x}$$

следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-i \frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \int_0^\infty \Phi_m(iy) R_k(y^{1/p} e^{-i\alpha}) y^{\mu-1} dy + \\ & + \frac{e^{i \frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \int_0^\infty \Phi_m(-iy) R_k(y^{1/p} e^{i\alpha}) y^{\mu-1} dy = \\ & = \int_0^\infty p_k(x) p_m(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k \neq m. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Это значит, что системы рациональных функций $\{R_k(z)\}$ и $\{\Phi_m(z)\}$ биортогональны в смысле (1.12). Используя это соотношение, из равенства (1.9) для коэффициентов A_n получим выражения

$$\begin{aligned} A_n = & \frac{e^{-i \frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \int_0^\infty F(y^{1/p} e^{-i\alpha}) y^{\mu-1} \Phi_n(iy) dy + \\ & + \frac{e^{i \frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \int_0^\infty F(y^{1/p} e^{i\alpha}) y^{\mu-1} \Phi_n(-iy) dy. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом доказана

* Эта формула М. М. Джрбашяном пока не опубликована.

Теорема 1. Если функция $F(z)$ принадлежит классу $N_2(\alpha, \rho, \mu)$, то

$$F(z) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(z),$$

где ряд сходится равномерно в каждой замкнутой части области $|\arg z| < \alpha$, $R_n(z)$ ($n=0, 1, \dots$) — определяемые формулой (1.7) рациональные функции, имеющие полюсы в точках $\{-\lambda_n^{1/\rho}\}$,

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \frac{1}{2}} = \infty,$$

а коэффициенты A_n определяются через граничные значения функции $F(z)$ формулой (1.13).

В частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\rho = 1$, параметр μ в определении класса $N_2\left(\frac{\pi}{2}, 1, \mu\right)$ может изменяться в интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Если положить $\mu = 1$, то из теоремы 1 будет следовать результат, отмеченный в работе Г. В. Бадаляна [3].

Заметим, что, исходя из последовательности $\{\beta_n\}_0^\infty$, где

$$\operatorname{Re} \beta_n > -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2\operatorname{Re} \beta_n}{1 + |\beta_n|^2} = \infty,$$

тем же способом можно было построить биортогональные системы рациональных функций $\{R_k(z)\}$ и $\{\Phi_m(z)\}$, полюсы которых, вообще говоря, комплексные и расположены соответственно в областях

$$|\arg z| > \alpha \quad \text{и} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{2}.$$

2°. Пусть снова $F(z) \in N_2(\alpha, \rho, \mu)$ и значит при $|\arg z| < \alpha$ имеет место представление

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho(-z\tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} U(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

где $U(\tau) \in L_2(0, \infty)$.

Как уже отмечали, граничные значения функции $F(z)$ будут определяться по формуле (3)

$$F(r^{1/\rho} e^{\pm i\alpha}) r^{\mu-1} = \frac{d}{dr} \left\{ r^\mu \int_0^\infty E_\rho(r^{1/\rho} \tau^{1/\rho} e^{\mp i\alpha}; \mu+1) \tau^{\mu-1} U(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.2)$$

Стоящие справа интегральные члены представляют собой обобщенные интегральные преобразования М. М. Джрбашяна с ядром типа Миттаг-Лефлера.

По известным формулам обращения [6], функция $U(z)$ почти всюду определяется по граничным значениям $F(r^{1/\rho} e^{\pm i\varphi})$ формулой

$$U(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{dz} \int_0^\infty \frac{e^{izt} - 1}{it} F(t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt + \\ + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{dz} \int_0^\infty \frac{e^{-izt} - 1}{-it} F(t^{1/\rho} e^{-i\varphi}) t^{\mu-1} dt. \quad (2.3)$$

Мы покажем, что формулы (2.1) и (2.2) можно обратить, используя только значения функции $F(z)$ на каком-нибудь луче $re^{i\varphi}$ ($0 < r < \infty$) из области $|\arg z| < \alpha$.

Теорема 2. Пусть функция $F(z)$ принадлежит классу $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ и, значит, справедливы представления (2.1) и (2.2). Тогда функцию $U(z)$ можно вычислить:

а) при $|\varphi| < \alpha$ формулой

$$U(z) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q(y)} dy, \quad (2.4)$$

где

$$q(y) = \frac{\pi\rho}{\Gamma(1-s)} \frac{e^{-i\varphi(s+\mu-1)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)}, \quad \left(s = \frac{1}{2} + iy\right); \quad (2.5)$$

б) при $|\varphi| = \alpha$ формулой

$$U(z) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{F^*(te^{i\varphi})}{t} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q_1(y)} dy, \quad (2.4')$$

где

$$F^*(te^{i\varphi}) = \int_0^t F(u^{1/\rho} e^{i\varphi}) u^{\mu-1} du$$

и

$$q_1(y) = \frac{\pi\rho}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{-i\alpha\rho(s+\mu-1)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)}, \quad \left(s = \frac{1}{2} + iy\right). \quad (2.5')$$

Из этой теоремы в частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (и, значит, $\rho = 1$), будет следовать теорема Палей-Винера об обращении инте-

грала Лапласа ([2], стр. 39), доказанная затем Doetsch-ем способом, которому в основном мы будем придерживаться ниже ([9], стр. 440).

Доказательство. Пусть сначала $|\varphi| < \alpha$. При $z = x^{1/p} e^{i\varphi}$ из (2.1) имеем

$$F(x^{1/p} e^{i\varphi}) = \int_0^\infty E_p(-x^{1/p} \tau^{1/p} e^{i\varphi}; \mu) \tau^{\mu-1} U(\tau) d\tau.$$

Заменим здесь x выражением e^z , положим $\tau = e^z$ и умножим обе части равенства на $e^{x(\mu - \frac{1}{2})}$. Получим

$$e^{x(\mu - \frac{1}{2})} F(e^{x/p} e^{i\varphi}) = \int_{-\infty}^\infty E_p(e^{x/p} e^{i(\varphi + \pi)}; \mu) e^{(\varphi + \pi)(\mu - \frac{1}{2})} [e^{\frac{z}{2}} U(e^z)] dz. \quad (2.6)$$

Введем обозначения

$$e^{x(\mu - \frac{1}{2})} F(e^{x/p} e^{i\varphi}) = H(x), \quad (2.7)$$

$$e^{\frac{x}{2}} U(e^x) = G(x), \quad (2.8)$$

$$E_p(e^{x/p} e^{i(\varphi + \pi)}; \mu) e^{x(\mu - \frac{1}{2})} = K(x). \quad (2.9)$$

Из того, что $F(z) \in N_2(\alpha, p, \mu)$ и $U(x) \in L_2(0, \infty)$, следует, что функции $H(x)$ и $G(x)$ принадлежат классу $L_2(-\infty, \infty)$. С другой стороны, $|\arg e^{x/p} e^{i(\varphi + \pi)}| > \frac{\pi}{2p}$, поэтому согласно асимптотическим свойствам функции $E_p(z, \mu)$ [4] при $x \rightarrow \infty$

$$|E_p(e^{x/p} e^{i(\varphi + \pi)}; \mu)| = O(e^{-\frac{x}{p}})$$

и, следовательно, функция $K(x)$ также принадлежит классу $L_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим

$$g(y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^\alpha e^{-ixy} G(x) dx = I^2[G]. \quad (2.10)$$

Аналогично введем обозначения для трансформаций Фурье функций $K(x)$ и $H(x)$:

$$I^2\{K\} = k(y), \quad I^2\{H\} = h(y). \quad (2.11)$$

Из теории Планшереля следует, что функции $k(y)$, $h(y)$, $g(y) \in L_2(-\infty, \infty)$. Однако из указанных свойств функции $E_p(z; \mu)$

следует, что $K(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Вычислим значение $k(x)$

$$\begin{aligned} k(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} E_p(e^{\frac{y}{p}} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu) e^{y(\mu-\frac{1}{2})} dy = \\ &= \int_0^{\infty} E_p(t^{1/p} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu) t^{\mu-1} t^{-\frac{1}{2}-ix} dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Введем положительный параметр y , заменяя в (2.12) t на ty

$$k(x) = \int_0^{\infty} E_p(t^{1/p} y^{1/p} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu) t^{\mu-1} y^{\mu-1} t^{-\frac{1}{2}-ix} y^{-\frac{1}{2}-ix} y dt,$$

или

$$k(-x) y^{-s} = y^{\mu-1} \int_0^{\infty} E_p(t^{1/p} y^{1/p} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu) t^{\mu-1} t^{s-1} dt \quad \left(s = \frac{1}{2} + ix\right). \quad (2.13)$$

Известно, что (см. [3], стр. 176)

$$\int_0^y E_p(t^{1/p} y^{1/p} e^{i\alpha}; \mu) y^{\mu-1} dy = y^{\mu} E_p(t^{1/p} y^{1/p} e^{i\alpha}; \mu+1). \quad (2.14)$$

Интегрируя обе части равенства (2.13) от 0 до y , а затем подставляя $y=1$, получим

$$\frac{k(-x)}{1-s} = \int_0^{\infty} E_p(t^{1/p} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) t^{\mu-1} t^{s-1} dt. \quad (2.15)$$

Справа стоит преобразование Меллина функции

$$E_p(t^{1/p} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) t^{\mu-1}.$$

В работе [8] доказывается, что преобразование Меллина этой функции существует в обычном смысле и равно

$$\frac{k(-x)}{1-s} = \frac{2\pi p}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - p(\pi+\varphi)(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-i2\pi p(s+\mu-1)}}, \quad (|\varphi| < \pi).$$

Таким образом

$$k(-x) = \frac{\pi p}{\Gamma(1-s)} \frac{e^{-i p \varphi (s+\mu-1)}}{\sin \pi p (s+\mu-1)}, \quad \left(s = \frac{1}{2} + ix\right). \quad (2.16)$$

Ясно, что $k(x)$ непрерывная функция и $k(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $k(x)$ ограниченная функция и значит $k(x) g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Равенство (2.6) в обозначениях (2.7) — (2.9) запишется в виде свертки функций $K(x)$ и $G(-x)$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x+\xi) G(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K(\eta) G[-(x-\eta)] d\eta = \\ &= K(x) * G(-x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Но преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований свертываемых функций. В наших обозначениях это означает

$$h(y) = k(y) \cdot g(-y),$$

или

$$g(y) = \frac{h(-y)}{k(-y)}. \quad (2.18)$$

Теперь, возвращаясь к функциям $G(x)$ и $H(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} G(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ixy} \frac{h(-y)}{k(-y)} dy = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)} dy \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Но

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)} \left[h(-y) - \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi) d\xi \right] dy \right|^2 \leq \\ &\leq \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dy}{|k(-y)|^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| h(-y) - \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi) d\xi \right|^2 dy \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)} h(-y) dy &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy}}{k(-y)} dy \int_{-\beta}^{\beta} e^{iy\xi} H(\xi) d\xi = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} H(\xi) d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(x+\xi)y} \frac{dy}{k(-y)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi) d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(x+\xi)y} \frac{dy}{k(-y)}. \quad (2.20)$$

Подставим вместо $G(x)$ и $H(x)$ их значения из (2.7) и (2.8), тогда будем иметь:

$$e^{\frac{x}{2}} U(e^x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(e^{\frac{\xi}{2}} e^{i\varphi}) e^{\frac{\xi}{2}(\mu - \frac{1}{2})} d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{ixy + i\frac{\xi}{2}y}}{k(-y)} dy.$$

Заменяя e^x через x и $e^{\frac{\xi}{2}}$ через t , окончательно получим:

$$U(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(t^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(xt)^{-\frac{1}{2} + iy}}{k(-y)} dy.$$

Это и есть утверждение пункта а) теоремы 2, при $k(-y) = q(y)$.

В случае, когда $|\varphi| = \alpha$, из (2.2) имеем

$$\begin{aligned} F^*(re^{i\varphi}) &= \int_0^r F(u^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}) u^{\mu-1} du = \\ &= r^{\mu} \int_0^{\infty} E_p(r^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) \tau^{\mu-1} U(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Заметим, что функция $F(u^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}) u^{\mu-1}$ принадлежит классу $L_2(0, \infty)$, следовательно этому классу принадлежит и функция $\frac{F^*(re^{i\varphi})}{r}$ (см. [10], стр. 289).

В (2.21) заменим r через e^x и τ через $e^{\frac{\xi}{2}}$

$$F^*(e^x e^{i\varphi}) = e^{x\mu} \int_{-\infty}^{\infty} E_p(e^{\frac{x+\xi}{2}} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) e^{\frac{\xi}{2}(\mu-1)} U(e^{\frac{\xi}{2}}) e^{\frac{\xi}{2}} d\xi,$$

или

$$e^{-\frac{x}{2}} F^*(e^x e^{i\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} E_p(e^{\frac{x+\xi}{2}} e^{i(\pi+\varphi)}; \mu+1) e^{(x+\xi)(\mu-\frac{1}{2})} [e^{\frac{\xi}{2}} U(e^{\frac{\xi}{2}})] d\xi.$$

Обозначим

$$e^{-\frac{x}{2}} F^*(e^x e^{i\alpha}) = H_1(x),$$

$$e^{\frac{x}{2}} U(e^x) = G_1(x),$$

$$E_p(e^{\frac{x}{2}} e^{i(x+\varphi)}; \mu+1) e^{x(\mu-\frac{1}{2})} = K_1(x).$$

Все эти функции принадлежат классу $L_2(-\infty, \infty)$. После этого, утверждение пункта б) теоремы 2 получается повторением рассуждений случая а) с той разницей, что вместо $H(x)$, $G(x)$ и $K(x)$ будут фигурировать соответственно функции $H_1(x)$, $G_1(x)$ и $H_1(x)$. Эти рассуждения мы опускаем. Таким образом теорема полностью доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 V 1959

Ս. Ե. Մ. Վեհապետյան

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[1] աշխատությունում ստացվել էին անկյան մեջ անալիտիկ և որոշակի աճ ունեցող ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ: Որոշ դեպքերում այդ ներկայացումները պարամետրական էին:

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցվում է, որ [1]-ում գիտարկված մի դասի ֆունկցիաները անկյան մեջ վեր են ածվում շարքի ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների հատուկ սխեմայի:

Ստացվում է նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի ընդհանրացած ինտեգրալ ձևափոխության համար նոր շրջման բանաձև:

Աշխատության մեջ ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1: Եթե $F(z)$ ֆունկցիան պատկանում է $|\arg z| < \alpha$ անկյան մեջ անալիտիկ և

$$\int_0^\infty |F e^{i\varphi}|^{2\mu p - p - 1} dr < M < \infty \quad (|\varphi| < \alpha)$$

$\left(\alpha + \frac{\pi}{2\varphi} = \pi, \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}, M\text{-ը } \varphi\text{-ից անկախ հաստատուն է}\right)$
պայմաններին բավարարող ֆունկցիաների $N_2(\alpha, \rho, \mu)$ դասին, ապա

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(z),$$

որտեղ շարքը $|\arg z| < \alpha$ տիրույթի ամեն մի ներքին, փակ մասում հավասարաչափ զուգամեծ է, $R_n(z)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)-երը բացանայա տեսքով գրվող ռացիոնալ ֆունկցիաներ են, որոնց բևեռները գտնվում են $(-\lambda_n^{1/\varphi})$ կետերում, որտեղ

$$0 < \lambda^0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \frac{1}{2}} = \infty,$$

իսկ A_n գործակիցները որոշվում են $F(z)$ -ի եզրային արժեքներով:

Փեռքեմ 2: Դիցուք $F(z)$ ֆունկցիան պահանջում է $N_{\alpha}(\alpha, \rho, \mu)$ դասին և ուրեմն, համաձայն [1] աշխատության արդյունքների, ներկայացվում է $|\arg z| < \alpha$ անկյան ներսում

$$F(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(-z\tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} U(\tau) d\tau$$

բանաձևով, որտեղ $U(\tau) \in L_2(0, \infty)$: Այդ դեպքում $U(\tau)$ ֆունկցիան կարելի է հաշվել

ա) երբ $|\varphi| < \alpha$

$$U(\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(i^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q(y)} dy$$

բանաձևով, որտեղ

$$q(y) = \frac{\pi\rho}{\Gamma(1-s) \sin \pi\rho(s+\mu-1)} e^{-i\rho\varphi(s+\mu-1)}, \quad \left(s = \frac{1}{2} + iy\right),$$

բ) երբ $|\varphi| = \alpha$

$$U(\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{F^*(te^{i\varphi})}{t} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\tau t)^{-\frac{1}{2}+iy}}{q_1(y)} dy$$

բանաձևով, որտեղ

$$q_1(y) = \frac{\pi\rho}{\Gamma(2-s) \sin \pi\rho(s+\mu-1)} e^{-i\rho\varphi(s+\mu-1)}, \quad \left(s = \frac{1}{2} + iy\right)$$

և

$$F^*(te^{i\varphi}) = \int_0^t F(u^{1/\rho} e^{i\varphi}) u^{\mu-1} du:$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М., Аветисян А. Е. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла. ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460.
2. Paley R., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.
3. Бадалян Г. В. Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), том VIII, № 5, 1955 и том IX, № 1, 1956.
4. Джрбашян М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Известия АН СССР, серия матем. 18 (1954), 427—448.
5. Джрбашян М. М. О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований. Известия АН АрмССР, том VII, № 6, 1954.
6. Walsin I. L. Interpolation and approximation by rational Functions (1935), pp. 305.
7. Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Известия АН АрмССР, том IX, № 7, 1956.

8. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Известия АН СССР, серия матем., 19 (1955), 133—190.
9. Doetsch C. Handbuch der Laplace-transformation, 1950.
10. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е. и Полиа Г. Неравенства, 1948.

М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян

О построении некоторых специальных биортогональных систем

Как было установлено в работах [1, 2, 3], интегральное преобразование с обычным ядром Фурье на полуоси $(0, +\infty)$ имеет не одну, а континуальное множество формул обращения, зависящих от непрерывного параметра $\rho > \frac{1}{2}$. Эти обращения осуществлялись посредством специальных ядер, образованных при помощи целых функций типа Миттаг-Лефлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad \left(\rho > \frac{1}{2}, \mu > 0 \right).$$

Одновременно были установлены также результаты обратного характера, — что интегральные преобразования посредством ядер, образованных при помощи функции $E_\rho(z; \mu)$, $\left(\rho > \frac{1}{2} \right)$, могут быть обращены обычным преобразованием Фурье. При специальном подборе значений параметров ρ и μ из указанных результатов, в частности, следовали, например, известные теоремы Планшереля о преобразованиях Фурье в классе функций $L_2(0, +\infty)$ или $L_2(-\infty, +\infty)^*$.

В п 1^о данной статьи излагается общий способ построения биортогональных систем целых функций на конечном отрезке. Затем в п 2^о этот способ конкретно осуществляется на примере функций, образованных из линейных комбинаций функций вида $E_\rho(z; \mu)$. При этом для построения биортогональной системы нам понадобилось исследовать существование счетного числа A_0 -точек, характер и асимптотику их распределения у специальной целой функции $\omega(z, \rho)$, образованной из функций вида $E_\rho(z; \mu)$.

Построенные нами биортогональные системы и разложения по этим системам тесно связаны с вопросами краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, что будет предметом наших последующих сообщений.

* В [4] в этом направлении были получены новые результаты, но существу соответствующие случаю, когда $\rho = \infty$.



1° Построение биортогональных систем функций на конечном отрезке. В этом пункте приводится один общий результат о построении биортогональных систем целых функций на конечном отрезке, на что мы будем существенно опираться как в данной статье, так и в некоторых наших последующих сообщениях.

Положим, что $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ — целые функции по λ , которые совместно со всеми своими частными производными по λ принадлежат классу $L_1(0, l)$ по переменной x при любом λ . Кроме того положим, что классу $L_1(0, l)$ принадлежат также все функции вида

$$\frac{\partial^r y(x, \lambda)}{\partial \lambda^r} \cdot \frac{\partial^s z(x, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*s}} \quad (r, s = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

при любых λ и λ^* . Предположим далее, что $\Omega(\lambda)$ также целая функция, связанная с функциями $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ интегральным соотношением

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \lambda^*) dx = \frac{\Omega(\lambda) - \Omega(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*}, \quad (1.2)$$

справедливым при любых λ и λ^* .

Сначала докажем одну лемму.

Лемма 1. Пусть для данного (вообще говоря, комплексного) числа $A_0 \neq \infty$ λ_0 есть нуль кратности $p \geq 1$ целой функции $\Omega(\lambda) - A_0$. Обозначим

$$b_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\}_{\lambda=\lambda_0}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.3)$$

тогда справедливы формулы

а)

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_0} \left\{ \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m y(x, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^m} \sum_{k=0}^{p-m-1} \frac{b_{p-m-k-1}}{k!} \frac{\partial^k z(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^k}; \quad (1.4)$$

б) Пусть λ_1 — нуль кратности $p_1 \geq 1$, а λ_2 — нуль кратности $p_2 \geq 1$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) целой функции $\Omega(\lambda) - A_0$, тогда

$$\int_0^l \frac{\partial^r y(x, \lambda_1)}{\partial \lambda_1^r} \frac{\partial^s z(x, \lambda_2)}{\partial \lambda_2^s} dx = \int_0^l \frac{\partial^s y(x, \lambda_2)}{\partial \lambda_2^s} \frac{\partial^r z(x, \lambda_1)}{\partial \lambda_1^r} dx = 0$$

при

$$\begin{aligned} r &= 0, 1, \dots, p_1 - 1, \\ s &= 0, 1, \dots, p_2 - 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Доказательство.

а) Имеем:

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_0} \left\{ \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_0)^p y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m \frac{\partial^m y(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \frac{\partial^{p-m-1}}{\partial \lambda^{p-m-1}} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_0)^p z(t, \lambda)}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\} = \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m \frac{\partial^m y(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{p-m-1} C_{p-m-1}^k \frac{\partial^k z(t, \lambda)}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{p-m-k-1}}{\partial \lambda^{p-m-k-1}} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right\}, \quad (1.6)
\end{aligned}$$

откуда в силу обозначения (1.3) следует формула (1.4).

Для доказательства формулы (1.5) заметим, что если λ и λ^* не являются нулями функции $\Omega(\lambda) - A_0$ и соответственно лежат в достаточно малых окрестностях точек λ_1 и λ_2 , то из (1.1) и (1.2) следует

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\partial^r y(x, \lambda)}{\partial \lambda^r} \frac{\partial^s z(x, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*s}} dx = \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^{*s}} \left\{ \frac{\Omega(\lambda) - \Omega(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} \right\} = \\
&= s! \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} \left\{ \frac{\Omega(\lambda) - A_0}{(\lambda - \lambda^*)^{s+1}} \right\} + r! \frac{\partial^s}{\partial \lambda^{*s}} \left\{ \frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda)^{r+1}} \right\}, \quad (1.7) \\
&(r, s = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Переходя к пределу в формуле (1.7), когда $\lambda \rightarrow \lambda_1$ и $\lambda^* \rightarrow \lambda_2$, получим первое из утверждений (1.5). Второе утверждение получится, если просто поменять местами λ_1 и λ_2 . Лемма полностью доказана.

Предполагая, что функция $\Omega(\lambda) - A_0$ имеет счетное множество нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, пронумерованных в порядке $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < \dots$, перейдем к построению биортогональной системы, образованной из функций $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$.

Пусть λ_n есть нуль порядка $p_n \geq 1$ целой функции $\Omega(\lambda) - A_0$. Отнесем нулю λ_n две системы функций

$$\frac{\partial^j y(x, \lambda_n)}{\partial \lambda_n^j} \quad (j = 0, 1, \dots, p_n - 1), \quad (1.8)$$

$$\sum_{k=0}^{p_n-j-1} \frac{b_{p_n-j-k-1}}{k! j!} \frac{\partial^k z(x, \lambda_n)}{\partial \lambda_n^k}, \quad (j = 0, 1, \dots, p_n - 1). \quad (1.9)$$

Заметим, что если $p_n = 1$, то в системах (1.8) и (1.9) содержится соответственно по одной функции

$$y(x, \lambda_n) \text{ и } b_0 z(x, \lambda_n). \quad (1.8')$$

Пусть, далее, $\{Y_\alpha(x)\}$ и $\{Z_\alpha(x)\}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) множество всех функций вида (1.8) и (1.9) соответственно, пронумерованных в порядке возрастания модулей чисел λ_n .

Теорема 1. Системы функций $\{Y_\alpha(x)\}$ и $\{Z_\beta(x)\}$ биортонормальны на отрезке $[0, 1]$, т. е.

$$\int_0^1 Y_\alpha(x) Z_\beta(x) dx = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots). \quad (1.10)$$

Доказательство. По определению функций $Y_\alpha(x)$ и $Z_\beta(x)$ существуют нули λ_{n_α} и λ_{n_β} функции $\Omega(\lambda) - A_0$ кратности соответственно $p_{n_\alpha} \geq 1$ и $p_{n_\beta} \geq 1$ и целые числа j_α ($0 \leq j_\alpha \leq p_{n_\alpha} - 1$) и j_β ($0 \leq j_\beta \leq p_{n_\beta} - 1$) такие, что

$$Y_\alpha(x) = \frac{\partial^{j_\alpha} y(x, \lambda_{n_\alpha})}{\partial \lambda_{n_\alpha}^{j_\alpha}}, \quad (1.11)$$

$$Z_\beta(x) = \sum_{k=0}^{p_{n_\beta}-j_\beta-1} \frac{b_{p_{n_\beta}-j_\beta-k-1}}{k! j_\beta!} \frac{\partial^k z(x, \lambda_{n_\beta})}{\partial \lambda_{n_\beta}^k}. \quad (1.12)$$

Тогда

а) если $\alpha \neq \beta$ и $\lambda_{n_\alpha} \neq \lambda_{n_\beta}$, то из (1.11) и (1.12), согласно формуле (1.5) леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 Y_\alpha(x) Z_\beta(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{p_{n_\beta}-j_\beta-1} \frac{b_{p_{n_\beta}-j_\beta-k-1}}{j_\beta! k!} \int_0^1 \frac{\partial^{j_\alpha} y(x, \lambda_{n_\alpha})}{\partial \lambda_{n_\alpha}^{j_\alpha}} \frac{\partial^k z(x, \lambda_{n_\beta})}{\partial \lambda_{n_\beta}^k} dx = 0; \end{aligned} \quad (1.13)$$

б) при $\lambda_{n_\alpha} = \lambda_{n_\beta} = \lambda_0$ ($p_{n_\alpha} = p_{n_\beta} = p$) из (1.11) и (1.12), учитывая формулу (1.7), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 Y_\alpha(x) Z_\beta(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} \frac{b_{p-j_\beta-k-1}}{k! j_\beta!} \int_0^1 \frac{\partial^{j_\alpha} y(x, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^{j_\alpha}} \frac{\partial^k z(x, \lambda_0)}{\partial \lambda_0^k} dx = \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \lambda^* \rightarrow \lambda_0}} \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} \frac{b_{p-j_\beta-k-1}}{j_\beta! k!} \left\{ j_\alpha! \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{\Omega(\lambda) - A_0}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + k! \frac{d^{j_\alpha}}{d\lambda^{j_\alpha}} \left(\frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda)^{k+1}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Предельный переход в (1.14) обоснован в силу условий, налагаемых на функции вида (1.1).

Из (1.14) и (1.3) получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 Y_\alpha(x) Z_\beta(x) dx = \\
 &= \lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \left\{ \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} \frac{j_\alpha! \left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(p-j_\beta-k-1)}}{(p-j_\beta-k-1)! k! j_\beta!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\Omega(\lambda) - A_0}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} \frac{j_\alpha! \left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(p-j_\beta-k-1)}}{(p-j_\beta-k-1)! j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda)^{k+1}} \right\} = \\
 &= \lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p-j_\beta-1)!} \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} C_{p-j_\beta-1}^k \left[\frac{\Omega(\lambda) - A_0}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} \right]^{(k)} \times \right. \\
 & \quad \times \left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(p-j_\beta-k-1)} + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \left[(\Omega(\lambda^*) - A_0) \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} \frac{\left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(p-j_\beta-k-1)}}{(p-j_\beta-k-1)!} (\lambda^* - \lambda)^{-k-1} \right] \right\} = \\
 &= \lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p-j_\beta-1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \left[\frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda)^{p-j_\beta}} \sum_{k=0}^{p-j_\beta-1} \frac{\left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(k)}}{k!} (\lambda^* - \lambda)^k \right] \right\} = \\
 &= \lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p-j_\beta-1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{(\lambda - \lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \left[\frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^* - \lambda)^{p-j_\beta}} \left(\frac{(\lambda^* - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda^*) - A_0} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - (\lambda^* - \lambda)^{p-j_\beta} \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} \frac{\left[\frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(k)}}{k!} (\lambda^* - \lambda)^{k-p+j_\beta} \right) \right] \right\} =
 \end{aligned}$$

* Здесь ради краткости введено обозначение $\frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda) \equiv [F(\lambda)]^{(k)}$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p-j_\beta-1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} \frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{(\lambda-\lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \frac{(\lambda^*-\lambda_0)^p}{(\lambda^*-\lambda)^{p-j_\beta}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \left[(\Omega(\lambda^*) - A_0) \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} \left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(*)} \frac{(\lambda^*-\lambda)^{k-p+j_\beta}}{k!} \right] \right\}. \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \left[(\Omega(\lambda^*) - A_0) \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} \left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{\Omega(\lambda) - A_0} \right]^{(*)} \frac{(\lambda^*-\lambda)^{k-p+j_\beta}}{k!} \right] = \\
&= \lim_{\lambda^* \rightarrow \lambda_0} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \left[(\lambda^*-\lambda_0)^p \frac{\Omega(\lambda^*) - A_0}{(\lambda^*-\lambda_0)^p} \sum_{k=p-j_\beta}^{\infty} b_k (\lambda^*-\lambda_0)^{k-p-j_\beta} \right] = \\
&= \lim_{\lambda^* \rightarrow \lambda_0} O((\lambda^*-\lambda_0)^{p-j_\alpha}) = 0, \quad (1.16)
\end{aligned}$$

так как $j_\alpha \leq p-1$.

Следовательно, из (1.15) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 Y_\alpha(x) Z_\beta(x) dx = \\
&= \lim_{\lambda, \lambda^* \rightarrow \lambda_0} \left\{ \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p-j_\beta-1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} \frac{(\lambda-\lambda_0)^p}{(\lambda-\lambda^*)^{j_\alpha+1}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j_\beta!} \frac{\partial^{j_\alpha}}{\partial \lambda^{j_\alpha}} \frac{(\lambda^*-\lambda_0)^p}{(\lambda^*-\lambda)^{p-j_\beta}} \right\} = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{j_\alpha!}{j_\beta! (p-j_\beta-1)!} \frac{\partial^{p-j_\beta-1}}{\partial \lambda^{p-j_\beta-1}} (\lambda-\lambda_0)^{p-j_\alpha-1} = \\
&= \begin{cases} 0, & j_\alpha \neq j_\beta \\ 1, & j_\alpha = j_\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots). \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Из (1.13) и (1.17) следует утверждение (1.10) теоремы.

2°. Биортогональные системы функций типа Миттаг-Лефлера и их асимптотика. Изложенный выше общий способ образования биортогональных систем целых функций осуществим теперь на конкретном примере, построив такие системы из комбинаций функций типа Миттаг-Лефлера.

Пусть a_j, b_j ($j = 1, 2$) — произвольные вещественные параметры, удовлетворяющие лишь условию

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1. \quad (2.1)$$

Введем в рассмотрение функции

$$y(x, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^2 a_j x^{\mu_j-1} E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \mu_j), \quad (2.2)$$

$$z(x, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^2 b_j (l-x)^{\nu_j-1} E_\rho(\lambda(l-x)^{\frac{1}{\rho}}; \nu_j), \quad (2.3)$$

где параметры μ_j и ν_j ($j = 1, 2$) пока подчинены лишь ограничениям

$$\mu_1 > \mu_2 > 0, \quad \nu_1 > \nu_2 > 0. \quad (2.4)$$

Так как при любых $\mu > 0$ и $\alpha > 0$, $E_\rho(\alpha z; \mu)$ есть целая функция порядка ρ и типа α^ρ , то из формул (2.2) и (2.3) следует, что

$$1) \text{ для всех } x \in (0, l) \quad \frac{\partial^k y(x, \lambda, \rho)}{\partial \lambda^k} \text{ и } \frac{\partial^k z(x, \lambda, \rho)}{\partial \lambda^k} \quad (k \geq 0) \text{ суть це-}$$

лые функции от λ порядка ρ и типа не выше, чем l ;

2) при любых $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$ функции

$$\frac{\partial^{k_1} y(x, \lambda, \rho)}{\partial \lambda^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2} z(x, \lambda, \rho)}{\partial \lambda^{k_2}} \text{ и } \frac{\partial^{k_1} y(x, \lambda, \rho)}{\partial \lambda^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2} z(x, \lambda, \rho)}{\partial \lambda^{k_2}}$$

из класса $L_1(0, l)$.

Наконец, составим целую функцию

$$\omega(\lambda, \rho) = \lambda \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1} + \nu_{j_2} - 1} E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}} \lambda; \mu_{j_1} + \nu_{j_2}). \quad (2.5)$$

Очевидно, что $\omega(\lambda, \rho)$ — целая функция от λ порядка ρ и типа l .

Лемма 2. При любых λ и λ^* ($\lambda \neq \lambda^*$) справедливы формулы

$$\begin{aligned} \int_0^l x^{\alpha-1} E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) (l-x)^{\beta-1} E_\rho(\lambda^* (l-x)^{\frac{1}{\rho}}; \beta) dx = \\ = \frac{\lambda E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}} \lambda; \alpha + \beta) - \lambda^* E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}} \lambda^*; \alpha + \beta)}{\lambda - \lambda^*} l^{\alpha+\beta-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_0^l y(x, \lambda, \rho) z(x, \lambda^*, \rho) dx = \frac{\omega(\lambda, \rho) - \omega(\lambda^*, \rho)}{\lambda - \lambda^*}, \quad (2.7)$$

$$(\alpha, \beta > 0).$$

Доказательство. Заметим сначала, что формула (2.7) следует из (2.6) в силу введенных выше обозначений (2.2), (2.3) и (2.5). Поэтому достаточно убедиться в справедливости формулы (2.6).

Исходя из разложения

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (2.8)$$

для любых λ и λ^* ($\lambda \neq \lambda^*$) имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^l x^{\alpha-1} E_p(\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) (l-x)^{\beta-1} E_p(\lambda^* (l-x)^{\frac{1}{\rho}}; \beta) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \lambda^{*m}}{\Gamma(\alpha + n\rho^{-1}) \Gamma(\beta + m\rho^{-1})} \int_0^l x^{\frac{n}{\rho} + \alpha - 1} (l-x)^{\frac{m}{\rho} + \beta - 1} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \lambda^{*m} l^{\frac{n+m}{\rho} + \alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+m)\rho^{-1})} = \\ &= l^{\alpha + \beta - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^n \lambda^{*k-n} l^{\frac{k}{\rho}}}{\Gamma(\alpha + \beta + k\rho^{-1})} = \\ &= l^{\alpha + \beta - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{*k} l^{\frac{k}{\rho}}}{\Gamma(\alpha + \beta + k\rho^{-1})} \sum_{n=0}^k \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)^n = \frac{l^{\alpha + \beta - 1}}{\lambda - \lambda^*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{\frac{k}{\rho}} (\lambda^{k+1} - \lambda^{*k+1})}{\Gamma(\alpha + \beta + k\rho^{-1})} \\ & \quad (\alpha, \beta > 0). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (2.8) получим требуемую формулу (2.6).

Установим теперь формулы, характеризующие асимптотическое поведение целых функций $y(x, \lambda, \rho)$, $z(x, \lambda, \rho)$ и $\omega(\lambda, \rho)$ в плоскости комплексного переменного λ . Эти формулы, как убедимся далее, позволяют доказать, что если $\rho > \frac{1}{2}$, то при любом вещественном

$A_0 \neq 0$ целая функция $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ имеет счетное множество нулей*. Это обстоятельство, в свою очередь, даст нам возможность построить по способу, изложенному в п. 1°, системы функций $\{y_\alpha^{\rho}(x)\}$ и $\{z_\alpha^{\rho}(x)\}$, ($\alpha = 1, 2, \dots$), биортогональные на отрезке $[0, l]$.

Для достижения намеченной цели воспользуемся известными [1, 2, 3] асимптотическими свойствами функции $E_p(z; \mu)$, которые заключаются в следующем:

А) Случай когда $\rho = \frac{1}{2}$. Для любого целого числа $\rho \geq 1$

а) при $0 < \arg z < \pi$, когда $|z| \rightarrow \infty$

* Как увидим ниже при $\rho=1$ имеется исключительный случай, когда нужно полагать, что $A_0 \neq \text{sign}(a_2 b_2)$.

$$E_{\frac{1}{2}}(z; \mu) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \left\{ e^{z^{\frac{1}{2}}} + e^{-i\pi(1-\mu)} e^{-z^{\frac{1}{2}}} \right\} - \\ - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - 2k)} + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right); \quad (2.9)$$

б) при $-\pi \leq \arg z \leq 0$, когда $|z| \rightarrow \infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z; \mu) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \left\{ e^{z^{\frac{1}{2}}} + e^{i\pi(1-\mu)} e^{-z^{\frac{1}{2}}} \right\} - \\ - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - 2k)} + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right); \quad (2.10)$$

в) когда $x \rightarrow +\infty$ ($\operatorname{Im} x = 0$)

$$E_{\frac{1}{2}}(-x; \mu) = x^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \cos \left[Vx + \frac{\pi}{2}(1-\mu) \right] - \\ - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k x^{-k}}{\Gamma(\mu - 2k)} + O\left(\frac{1}{x^{p+1}}\right). \quad (2.11)$$

Б) Случай когда $\rho > \frac{1}{2}$. Для любого целого числа $p \geq 1$, если α_0 фиксированное число из интервала

$$\frac{\pi}{2\rho} < \alpha_0 < \min \left\{ \pi, \frac{\pi}{\rho} \right\}, \quad (2.12)$$

то, когда $|z| \rightarrow \infty$, имеем

а) при $|\arg z| \leq \alpha_0$

$$E_p(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \\ - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right); \quad (2.13)$$

б) при $|\arg z| \geq \alpha_0$

$$E_p(z; \mu) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right). \quad (2.14)$$

Кроме того, во всех формулах порядок дополнительных членов равномерен относительно соответствующих углов.

Из формул (2.9), (2.10), (2.13) и (2.14) и из определений (2.2), (2.3) и (2.5) функций $y(x, \lambda, \rho)$, $z(x, \lambda, \rho)$ и $\omega(\lambda, \rho)$ вытекают следующие формулы, характеризующие их поведение при больших $|\lambda|$ в различных частях плоскости λ .

Лемма 3. Пусть $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ любое фиксированное число. Тогда при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

А) Случай, когда $\rho = \frac{1}{2}$

а) равномерно относительно $x \in [\varepsilon, l]$

$$y\left(x, \lambda, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{\frac{1}{2}(1-\mu_j)} \left\{ x^{\lambda^{\frac{1}{2}}} + e^{\mp i\pi(1-\mu_j)} e^{-x\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad (2.15)$$

б) равномерно относительно $x \in [0, l-\varepsilon]$

$$z\left(x, \lambda, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{\frac{1}{2}(1-\nu_j)} \left\{ e^{(l-x)\lambda^{\frac{1}{2}}} + e^{\mp i\pi(1-\nu_j)} e^{-(l-x)\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \omega\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{1+\frac{1}{2}(1-\mu_{j_1}-\nu_{j_2})} \left\{ e^{h^{\frac{1}{2}}} + e^{\mp i\pi(1-\mu_{j_1}-\nu_{j_2})} e^{-h^{\frac{1}{2}}} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(\frac{1}{2})}}{\lambda^{k-1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^p}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

В этих формулах знаки $-$ или $+$ берутся при $0 \leq \arg \lambda \leq \pi$ или $-\pi \leq \arg \lambda < 0$ соответственно. Значения постоянных коэффициентов $A_k^{(\frac{1}{2})}$ будут приведены ниже.

Б) Случай, когда $\rho > \frac{1}{2}$

а) пусть $|\arg \lambda| \leq \alpha_0$, тогда

$$y(x, \lambda, \rho) = \rho \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{\rho(1-\mu_j)} \right\} e^{x\lambda^\rho} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad x \in [\varepsilon, l], \quad (2.18)$$

$$z(x, \lambda, \rho) = \rho \left\{ \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{\rho(1-\nu_j)} \right\} e^{(l-x)\lambda^\rho} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad x \in [0, l-\varepsilon], \quad (2.19)$$

при этом равномерно относительно x в соответствующих отрезках.

$$\begin{aligned} \omega(\lambda, \rho) &= \rho \lambda^{1-\rho} \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{\rho(1-\mu_j)} \right\} \left\{ \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{\rho(1-\nu_j)} \right\} e^{\rho p} + \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(p)}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right) = \\ &= \rho \left\{ \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{1+\rho(1-\mu_{j_1}-\nu_{j_2})} \right\} e^{\rho p} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(p)}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$A_k^{(p)} = -l^{-l-\frac{k}{2}} \sum_{j_1, j_2=1}^2 \frac{a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1} + \nu_{j_2}}}{\Gamma(\mu_{j_1} + \nu_{j_2} - kp^{-1})}, \quad \left(\rho > \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots\right); \quad (2.21)$$

б) пусть $|\arg \lambda| > \alpha_0$, тогда

$$y(x, \lambda, \rho) = - \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{a_j x^{\mu_j - \rho^{-1} - 1}}{\Gamma(\mu_j - \rho^{-1})} \right\} \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (2.22)$$

$$z(x, \lambda, \rho) = - \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{b_j x^{\nu_j - \rho^{-1} - 1}}{\Gamma(\nu_j - \rho^{-1})} \right\} \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (2.23)$$

причем равномерно относительно x в соответствующих отрезках.

$$\omega(\lambda, \rho) = - \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(p)}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right). \quad (2.24)$$

Обозначим через e_0 множество тех комбинаций индексов j_1 и j_2 ($= 1, 2$), при которых произведения $a_{j_1} b_{j_2}$ отличны от нуля. На параметры $\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2$ будем накладывать дополнительные ограничения:

$$\min_{e_0} \{1 + \rho(1 - \mu_{j_1} - \nu_{j_2})\} > 0$$

и поэтому,

$$\tau_\rho = \max_{(j_1, j_2) \in e_0} \{1 + \rho(1 - \mu_{j_1} - \nu_{j_2})\} \geq 0, \quad \rho \geq \frac{1}{2}. \quad (2.25)$$

Иначе говоря

$$\mu_{j_1} + \nu_{j_2} \leq 1 + \rho^{-1}, \quad (j_1, j_2) \in e_0. \quad (2.25')$$

Заметим, что в силу условий (2.4)

$$\tau_\rho \leq 1 + \rho$$

кроме того, из формулы (2.5) заключаем, что

1) значение $\tau_\rho = 0$ может достигаться лишь при $a_1 = b_1 = 0$ и тогда

$$\omega(\lambda, \rho) = a_2 b_2 l^{\frac{1}{2}} \lambda E_\rho(l^{\frac{1}{2}} \lambda; 1 + \rho^{-1}) =$$

$$= \operatorname{sign}(a_2 b_2) \{E_p(l^{\frac{1}{2}} \lambda; 1) - 1\}; \quad (2.26)$$

2) значение $\tau_p > 0$ также может достигаться лишь при одной комбинации индексов $(r, s) \in e_0$:

$$\tau_p = 1 + \rho(1 - \alpha_r - \alpha_s), \quad (2.25'')$$

тогда асимптотические формулы (2.17) и (2.20), характеризующие поведение функции $\omega(\lambda, \rho)$, можно записать в более простом виде. Именно, когда $\rho = \frac{1}{2}$, имеем

$$\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} a_r b_s \lambda^{\frac{\tau_p}{2}} \left\{ e^{\frac{\rho}{2}} + e^{\pm 2\pi i \tau_p} e^{-\frac{\rho}{2}} \right\} + \\ + \varphi_1^{(\mp)}(\lambda) e^{\frac{\rho}{2}} + \varphi_2^{(\mp)}(\lambda) e^{-\frac{\rho}{2}} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(\frac{1}{2})}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \quad (2.17')$$

где функции $\varphi_1^{(\mp)}(\lambda)$ и $\varphi_2^{(\mp)}(\lambda)$ имеют порядок $O(\lambda^{-\alpha})$, ($\alpha > 0$), а знаки $-$ или $+$ берутся соответственно, когда $0 < \arg \lambda \leq \pi$ или $-\pi \leq \arg \lambda < 0$.

В случае же, когда $\rho > \frac{1}{2}$ и $|\arg \lambda| \leq \alpha_0$

$$\omega(\lambda, \rho) = \rho a_r b_s (1 + \tau(\lambda)) e^{\rho} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(\rho)}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \quad (2.20)$$

где $\varphi(\lambda)$ имеет порядок $O(\lambda^{-\alpha})$, ($\alpha > 0$).

3°. Нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$, при $\tau_p = 0$. Хотя нам достаточно было лишь установить существование счетного множества нулей у функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$, но в настоящем и в последующем пунктах в ряде лемм мы исследуем характер их распределения и асимптотику. При этом в основном мы будем придерживаться способа Вимана [5], впервые исследовавшего вопрос распределения нулей функции $E_p(z; 1)$.

Лемма 4. Пусть $\tau_p = 0$ ($\rho > \frac{1}{2}$) и

$$C_0 = \operatorname{sign}(a_2 b_2) A_0 + 1, \quad (3.1)$$

тогда:

а) при $\rho = \frac{1}{2}$ и $|C_0| \leq 1$ все нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ лежат на отрицательной полуоси $-\infty < \lambda \leq 0$ и представляются в виде

$$\gamma_k = -\left(\frac{\arccos C_0 + 2\pi k}{l}\right)^2, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (3.2)$$

кроме того, при $|C_0| < 1$ нули γ_k простые, а при $|C_0| = 1$ все они, кроме, быть может, первого имеют кратность, равную двум;

б) при $\rho = \frac{1}{2}$, $|C_0| > 1$ все нули функции $\omega\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) - A_0$ простые, лежат на параболе $\operatorname{Re} \lambda^{\frac{1}{2}} = z_0$, где $z_0 > 0$ есть корень уравнения $\operatorname{ch} l z_0 = |C_0|$, и представляются в виде

$$\tau_k = \left(z_0 + \frac{2\pi k}{l} i \right)^2, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ если } C_0 > 1, \quad (3.3)$$

$$\tau_k = \left(z_0 + \frac{2\pi \left(k + \frac{1}{2} \right)}{l} i \right)^2, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ если } C_0 < -1;$$

в) при $\rho > \frac{1}{2}$ для любого $0 < \delta < \min \left\{ \frac{\pi}{2\rho}, \pi - \frac{\pi}{2\rho} \right\}$ все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ простые, лежат внутри углов

$$\left| \arg \lambda - \frac{\pi}{2\rho} \right| < \delta, \quad \left| \arg \lambda + \frac{\pi}{2\rho} \right| < \delta, \quad (3.4)$$

при этом, нумеруя нули, лежащие соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ в порядке возрастания их модулей и обозначая их через $\{\tau_k^{(\pm)}\}$, будем иметь асимптотические формулы

$$\tau_k^{(\pm)} = \pm \frac{2\pi k}{l} i + \frac{\log C_0}{l}, \quad \rho = 1, \quad C_0 \neq 0, \quad (3.5)$$

$$\tau_k^{(\pm)} = e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} \left(\frac{2\pi k}{l} \right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k} \right) \right], \quad \rho \neq 1. \quad (3.6)$$

Доказательство. При $\tau_r = 0$, $\left(\rho > \frac{1}{2} \right)$ из (2.26) и (3.1) следует, что искомые нули суть корни уравнения

$$E_\rho(l^\rho \lambda; 1) = C_0. \quad (3.7)$$

Поэтому, когда $\rho = \frac{1}{2}$ или $\rho = 1$, вопрос соответственно сводится к простому подсчету корней уравнений

$$\operatorname{ch} l \sqrt{\lambda} = C_0 \quad \text{и} \quad e^{l\lambda} = C_0.$$

Отсюда легко приходим к утверждениям а), б) и к (3.5).

Из асимптотических формул (2.13) и (2.14) легко следует, что достаточно большие по модулю нули функции $E_\rho(l^\rho \lambda; 1) - C_0$ могут лежать только в угловых областях вида (3.4).

Для установления формулы (3.6) нужно различить два случая: $C_0 \neq 0$ и $C_0 = 0$.

Положим сначала $C_0 \neq 0$, тогда корни функции*

$$\omega_0(\lambda, \rho) = \rho e^{i\lambda} - C_0$$

простые, симметрично расположены в полуплоскостях $\text{Im} \lambda > 0$ и $\text{Im} \lambda < 0$ и представляются в виде

$$\begin{aligned} \mu_k^{(\pm)} &= \left\{ \pm \frac{2\pi k}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}} \text{ при } C_0 > 0, \\ \mu_k^{(\pm)} &= \left\{ \pm \frac{(2k+1)\pi}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}} \text{ при } C_0 < 0, \\ (k &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Все эти корни лежат на кривой

$$L_0: r^\rho \cos \rho\varphi = \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho}, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{\rho} \quad (3.9)$$

и соответственно перемежаются с точками

$$\begin{aligned} \nu_k^{(\pm)} &= \left\{ \pm \frac{(2k+1)\pi}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}}, \quad C_0 > 0, \\ \nu_k^{(\pm)} &= \left\{ \pm \frac{2k\pi}{l} i + \frac{1}{l} \log \frac{|C_0|}{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}}, \quad C_0 < 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

лежащими на той же кривой L_0 . При этом

$$\omega_0(\nu_k^{(-)}, \rho) = -2C_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Рассмотрим дугу l_k окружности $|\lambda| = |\nu_k^{(\pm)}|$, лежащую между верхними половинами кривых

$$L_0^{(\pm)}(\gamma): r^\rho \cos \rho\varphi = \frac{1}{l} \left\{ \log \frac{|C_0|}{\rho} \pm \gamma \right\}, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{\rho}, \quad (3.12)$$

где $\gamma > 0$ любое,

Очевидно, что верхняя половина кривой L_0 лежит между верхними половинами кривых $L_0^{(+)}(\gamma)$ и $L_0^{(-)}(\gamma)$.

Если точки $|\nu_k| e^{i\varphi_k}$ и $|\nu_k| e^{i\varphi_k^*}$ — суть начало и конец дуги l_k , то имеем

$$|\nu_k|^\rho \cos \rho\varphi_k = \frac{1}{l} \left\{ \log \frac{|C_0|}{\rho} + \gamma \right\},$$

* Мы имеем в виду лишь корни, лежащие в угловых областях (3.4).

$$|\nu_k|^p \cos \rho \varphi_k = \frac{1}{l} \left\{ \log \frac{|C_0|}{\rho} - \gamma \right\},$$

при этом $\lambda = |\nu_k| e^{i\varphi} \in l_k$, если $\varphi_k' \leq \varphi < \varphi_k''$.

Покажем теперь, что существует достаточно большой номер N_0 такой, что

$$|\omega_0(\lambda, \rho)| > |C_0| \quad \text{при} \quad \lambda \in l_k \text{ и } k \geq N_0. \quad (3.14)$$

Из формул (3.13) имеем:

$$|\nu_k|^p \sin \frac{\rho}{2} (\varphi_k' + \varphi_k'') \sin \frac{\rho}{2} (\varphi_k'' - \varphi_k') = \frac{2}{l} \quad (3.15)$$

в

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k' = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k'' = \frac{\pi}{2\rho},$$

поэтому

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\nu_k|^p \sin \frac{\rho}{2} (\varphi_k'' - \varphi_k') = \frac{2}{l}. \quad (3.16)$$

Далее, при $\lambda = |\nu_k| e^{i\varphi} \in l_k$ имеем:

$$\begin{aligned} \omega_0(\lambda, \rho) &= \rho e^{l|\nu_k|^p} e^{i\rho\varphi} - C_0 = \\ &= -C_0 \left[1 + e^{l|\nu_k|^p} (e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\varphi_k}) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где положено $\nu_k = |\nu_k| e^{i\varphi_k}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Но из (3.15), (3.16) и формулы

$$\begin{aligned} e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\varphi_k} &= -2 \sin \frac{\rho}{2} (\varphi + \varphi_k) \sin \frac{\rho}{2} (\varphi - \varphi_k) + \\ &+ 2i \cos \frac{\rho}{2} (\varphi + \varphi_k) \cos \frac{\rho}{2} (\varphi - \varphi_k) \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} |\nu_k|^p \operatorname{Im} (e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\varphi_k}) &= 0, \\ \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} |\nu_k|^p \operatorname{Re} (e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\varphi_k}) &\leq \frac{4}{l}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Наконец, из (3.17) и (3.18) вытекает, что при $\lambda \in l_k$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\omega_0(\lambda, \rho)| \geq C_0 (1 + e^{-1}),$$

откуда следует оценка (3.14).

Но на кривых $L_0^{(\pm)}$

$$|\omega_0(\lambda, \rho)| \geq |\rho e^{i\lambda \rho \cos \varphi} - C_0| = |C_0| |e^{\pm 1} - 1|, \quad (3.19)$$

поэтому в силу (3.14) и (3.19) будем иметь, что на контурах Δ_k криволинейных четырехугольников, ограниченных кусками кривых $L_0^{(\pm)}$ и дугами l_k и l_{k+1}

$$|\omega_0(\lambda, \rho)| \geq \frac{2}{3} |C_0|, \quad \lambda \in \Delta_k, \quad k \geq N_0. \quad (3.20)$$

Но из асимптотической формулы (2.13) имеем:

$$\left\{ E_p \left(l^{\frac{1}{p}}; 1 \right) - C_0 \right\} - \omega_0(\lambda, \rho) = O \left(\frac{1}{\lambda} \right), \quad (3.21)$$

поэтому по теореме Руше из (3.20) и (3.21) следует, что при $k \geq N_1 \geq N_0$ внутри контура Δ_k функция $E_p(l^{\frac{1}{p}}; 1) - C_0$ имеет точно один простой нуль $\gamma_k^{(+)}$. При этом ясно, что будем иметь

$$\gamma_k^{(+)} = \mu_k^{(+)} + \alpha_k \quad (k \geq N_0), \quad (3.22)$$

где $|\alpha_k| = O(d_k)$, d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k . Но, как легко видеть, периметр контура Δ_k при больших k имеет порядок $O(k^{\frac{1}{p}-1})$, поэтому имеем также $d_k = O(k^{\frac{1}{p}-1})$. Отсюда и из формул (3.8), (3.22) следует, что при $k \rightarrow +\infty$

$$\gamma_k^{(+)} = e^{i \frac{\pi}{2p}} \left(\frac{2\pi k}{l} \right)^{\frac{1}{p}} \left[1 + O \left(\frac{1}{k} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Так как все достаточно большие по модулю нули функций $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ лежат внутри углов (3.4), то, если λ_k любой из таких нулей, из (2.13) имеем

$$\rho e^{i\lambda_k \rho} = C_0 + O \left(\frac{1}{\lambda_k} \right),$$

или при $k \geq N_2$

$$\frac{1}{l} \left[\log \frac{|C_0|}{\rho} - \frac{1}{2} \right] < |\lambda_k|^p \cos p\varphi \arg \lambda_k < \frac{1}{l} \left[\log \frac{|C_0|}{\rho} + \frac{1}{2} \right].$$

Отсюда следует больше, чем утверждалось первоначально, а именно, что все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ лежат между кривыми $L_0^{(\pm)}(\gamma)$. Это значит, что если пронумеровать нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ в порядке возрастания их модулей, то формула (3.22) даст асимптотические выражения k -того нуля при $k \rightarrow +\infty$.

Аналогично, ввиду того, что $\gamma_k^{(-)} = \gamma_k^{(+)}$, для нулей функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 0$, получим асимптотическую формулу

$$\gamma_k^{(-)} = e^{-i \frac{\pi}{2\rho}} \left(\frac{2\pi k}{l} \right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad k \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, при $C_0 \neq 0$ мы получили лучшую асимптотику, чем утверждения (3.5) и (3.7) леммы.

Перейдем теперь к случаю, когда $C_0 = 0$ ($\rho > \frac{1}{2}$, $\rho \neq 1$). В этом

случае вопрос сводится к исследованию нулей функции $E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}} \lambda; 1)$. Эта задача, как отмечалось выше, была исследована Виманом, однако ради полноты изложения мы приводим здесь необходимые выкладки, которые несколько отличаются от способа Вимана, и установим формулы (3.5) и (3.7).

Согласно формуле (2.13) в угловых областях (3.4) имеем:

$$E_\rho(l^{\frac{1}{\rho}} \lambda; 1) = \rho e^{i\frac{\pi}{\rho}} - \frac{l^{\frac{1}{\rho}}}{\lambda \Gamma(1-\rho^{-1})} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (3.23)$$

Положим

$$\omega_0(\lambda, \rho) = \rho e^{i\frac{\pi}{\rho}} - \frac{l^{\frac{1}{\rho}}}{\lambda \Gamma(1-\rho^{-1})} \quad (3.24)$$

и аналогично случаю, когда $C_0 \neq 0$, рассмотрим кривую, бесконечные ветви которой лежат в угловых областях (3.4)

$$L_0: |\lambda e^{i\frac{\pi}{\rho}}| = C_\rho, \quad C_\rho = \frac{l^{\frac{1}{\rho}}}{\rho \Gamma(1-\rho^{-1})}. \quad (3.25)$$

При $\lambda = r e^{i\varphi} \in L_0$ имеем

$$l r^\rho \cos \rho \varphi = -\log r + \log C_\rho. \quad (3.26)$$

Если μ_k и μ_{k+1} ($|\mu_k| < |\mu_{k+1}|$) — два последовательных нуля функции $\omega_0(\lambda, \rho)$, лежащие в верхней полуплоскости на кривой L_0 , то при переходе λ по кривой L_0 от μ_k до μ_{k+1} $\arg \lambda e^{i\frac{\pi}{\rho}}$ увеличивается на 2π и, вследствие непрерывности, в некоторой промежуточной точке $\nu_k \in L_0$

($|\mu_k| < \nu_k < |\mu_{k+1}|$) должны иметь $\nu_k e^{i\frac{\pi}{\rho}} = -C_\rho$, т. е.

$$\nu_k \omega_0(\nu_k, \rho) = -2C_\rho. \quad (3.27)$$

Далее, рассмотрим дугу l_k окружности $|\lambda| = |\nu_k|$, лежащую в верхней полуплоскости между кривыми

$$L_0^{(\pm)}(\gamma): l r^\rho \cos \rho \varphi = -\log r + \log C_\rho \pm \gamma. \quad (3.28)$$

Тем же методом, что и при доказательстве (неравенства (3.20)), получим, что на контурах Δ_k криволинейных четырехугольников, оп-

раниченных дугами l_k и l_{k+1} и кусками кривых $L_0^{(\pm)}(\gamma)$, справедлива оценка

$$|\lambda \omega_0(\lambda, \rho)| \geq \frac{2}{3} |C_p|. \quad (3.29)$$

С другой стороны, как и в случае $C_0 \neq 0$, легко убедиться, что все достаточно большие по модулю нули функции $E_p(l^{\frac{1}{p}} \lambda; 1)$, лежащие между кривыми $L_0^{(\pm)}(\gamma)$.

Из (3.23), (3.24) и (3.29) применением теоремы Руше получим, что все достаточно большие по модулю нули функции $E_p(l^{\frac{1}{p}} \lambda; 1)$, лежащие в верхней полуплоскости, имеют вид

$$\gamma_k^{(+)} = \mu_k + \alpha_k, \quad (3.30)$$

где $|\alpha_k| = O(d_k)$, d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k .

Так как μ_k есть k -тая точка, лежащая на верхней половине контура L_0 , где функция $\omega_0(\lambda, \rho)$ обращается в нуль, то можно принять, что

$$\operatorname{Arg} \mu_k e^{l \mu_k^2} = 2\pi k + \theta, \quad (3.31)$$

где $|\theta| < \pi$ — некоторая постоянная.

Обозначая $\mu_k = |\mu_k| e^{i \varphi_k}$, из (3.26) и (3.31) имеем:

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\log |\mu_k|}{\rho l |\mu_k|^\rho} - \frac{\log |C_p|}{\rho l |\mu_k|^\rho} + O\left(\frac{(\log |\mu_k|)^2}{|\mu_k|^{3\rho}}\right), \quad (3.32)$$

$$\varphi_k + l |\mu_k|^\rho \sin \rho \varphi_k = 2\pi k + \theta. \quad (3.33)$$

Из (3.32) и (3.33) получим

$$|\mu_k|^\rho = \frac{2\pi k}{l} - \frac{\pi}{2l\rho} + O\left(\frac{(\log |\mu_k|)^2}{|\mu_k|^\rho}\right), \quad (3.34)$$

откуда следует, что при $k \rightarrow +\infty$

$$|\mu_k|^\rho \sim \frac{2\pi k}{l}, \quad \log |\mu_k| \sim \frac{1}{\rho} \log k$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |\mu_k| &= \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + O\left(\frac{\log^2 k}{k^2}\right)\right], \\ \varphi_k &= \frac{\pi}{2\rho} + O\left(\frac{\log k}{k}\right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Наконец, из формул (3.35) получим асимптотическую формулу

$$\mu_k = e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right)\right] \quad (3.36)$$

или, заметив, что $d_k = 0 (k^{\frac{1}{p}-1} \log k)$, из (3.36) и (3.30) приходим к формуле (3.6) для $\gamma_k^{(+)}$. Наконец, заметив, что $\gamma_k^{(-)} = \overline{\gamma_k^{(+)}}$, получим вторую из формул (3.6).

4°. Нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ при $\tau_p > 0$. Переходим теперь к выяснению вопроса о распределении нулей функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ ($Jm A_0 = 0$) в случае, когда

$$\tau_p = 1 + \rho(1 - \mu_r - \nu_s) > 0, \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 5. Пусть $\tau_p > 0$. Тогда:

а) Для любого фиксированного числа $\tau_0 > 0$ все достаточно большие по модулю нули функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ лежат в области D_{τ_0} , ограниченной параболой

$$lr^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} = \tau_0, \quad |\varphi| < \pi \quad (4.1)$$

и содержащей полуось $(-\infty, 0]$;

б) функция $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ имеет счетное множество нулей, при этом все нули, лежащие вне достаточно большого круга, простые, лежат на отрицательной полуоси $(-\infty, 0]$ и, если пронумеровать их в порядке возрастания их модулей, то справедлива асимптотическая формула

$$\gamma_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]. \quad (4.2)$$

Доказательство.

а) Для фиксированного значения $\tau_0 > 0$ выберем число $\gamma_0 (0 < \gamma_0 < 1)$ из условия

$$\frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0} = e^{\tau_0}. \quad (4.3)$$

Намереваясь ниже воспользоваться асимптотическими формулами (2.17'), выберем число $R_0 > 0$ так, чтобы

$$|1 + \varphi_1^{(-)}(\lambda)| > 1 - \gamma_0, \quad |1 + l^{\frac{1}{2}} \varphi_2^{(-)}(\lambda)| < 1 + \gamma_0, \quad |\lambda| > R_0. \quad (4.4)$$

Ввиду (4.3) и (4.4), заметив, что в дополнительной к D_{τ_0} области G_{τ_0}

$$Re \{l^{\frac{1}{2}}\} > \tau_0,$$

будем иметь: при $\lambda \in G_{\tau_0}$, $|\lambda| > R_0$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} a_r b_s \lambda^{\frac{\tau_1}{2}} \left\{ e^{\rho \frac{\tau_1}{2}} (1 + \varphi_1^{(\mp)}(\lambda)) + e^{-\rho \frac{\tau_1}{2}} (e^{\mp i 2 \pi \tau_1} + \varphi_2^{(\mp)}(\lambda)) \right\} | \geq \\
& \geq \frac{1}{2} |a_r b_s| |\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}} \{ e^{\tau_0} (1 - \gamma_0) - e^{-\tau_0} (1 + \gamma_0) \} = \\
& = \frac{1}{2} |a_r b_s| (1 - \gamma_0) (e^{\tau_0} - 1) |\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Выберем теперь число $R_1 \geq R_0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$|A_1^{(\frac{1}{2})} - A_0 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)| \leq 1 + |A_1^{(\frac{1}{2})} - A_0|, \quad |\lambda| \geq R_1, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |a_r b_s| (1 - \gamma_0) (e^{\tau_0} - 1) |\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}} - 1 - |A_1^{(\frac{1}{2})} - A_0| \geq \\
& \geq \frac{1}{4} |a_r b_s| (1 - \gamma_0) (e^{\tau_0} - 1) |\lambda|^{\frac{\tau_1}{2}} > 1, \quad |\lambda| \geq R_1. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Из оценок (4.5), (4.6) и (4.7), ввиду (2.17'), получим:

$$\left| \omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0 \right| \geq 1, \quad \lambda \in G_{\sigma_0}, \quad |\lambda| \geq R_1,$$

откуда следует первое утверждение леммы.

б) Так как при фиксированном значении $\sigma_0 > 0$ достаточно большие по модулю нули функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ лежат внутри области

D_{σ_0} , где $0 \leq \operatorname{Re} \lambda^{\frac{1}{2}} < \sigma_0$, то для выяснения асимптотического поведения этих нулей взамен (2.17') можно воспользоваться более простой формулой

$$\begin{aligned}
\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} a_r b_s \lambda^{\frac{\tau_1}{2}} \left\{ e^{\rho \frac{\tau_1}{2}} + e^{\mp i 2 \pi \tau_1} e^{-\rho \frac{\tau_1}{2}} \right\} + A_1^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \frac{A_1^{(\frac{1}{2})}}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) + O(\lambda^{\frac{\tau_1}{2} - 2}), \quad \alpha > 0, \quad \lambda \in D_{\sigma_0}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Заметив, что $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right)$ вещественна при $\operatorname{Im} \lambda = 0$, при $\lambda = -r$, $0 < r < +\infty$ будем иметь асимптотические представления

$$\begin{aligned}
\omega\left(-r; \frac{1}{2}\right) - A_0 &= a_r b_s r^{\frac{\tau_1}{2}} \cos \left[l r^{\frac{1}{2}} + \pi \tau_1 \right] + \\
&+ (A_1^{(\frac{1}{2})} - A_0) + O(r^{-1}) + O(r^{\frac{\tau_1}{2} - 2}), \quad \text{при } A_0 \neq A_1^{(\frac{1}{2})}, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\left[\omega\left(-r; \frac{1}{2}\right) - A_0 \right] r = a, b, r^{1+\gamma_1} \cos \left[l \sqrt{r} + \pi \tau_1 \right] + \\ + A_2^{(1)} + O(r^{-1}) + O(r^{1+\gamma_1-\alpha}), \text{ при } A_0 = A_1^{(1)}. \quad (4.10)$$

Из того, что левые части формул (4.9) и (4.10) вещественные функции от $r \in (0, +\infty)$, а главные члены правых частей обращаются в нуль в точках вида $l\sqrt{r} + \pi\tau_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \geq 1$), легко следует, что уравнение $\omega\left(-r; \frac{1}{2}\right) - A_0$ при $r \geq r_0$ имеет счетное множество нулей r_k , притом таких, что в достаточно малых вещественных окрестностях точек $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \geq k_0$) лежит лишь одна точка вида $lr_k^{1/2} + \pi\tau_1$.

Поэтому имеет место формула

$$lr_k^{1/2} + \pi\tau_1 = k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha_k, \quad (4.11)$$

где $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Подставляя значение (4.11) в (4.9) или (4.10), в обоих случаях получим, что

$$\alpha_k = O(r_k^{-\gamma_1}), \quad \gamma_1 > 0$$

и так как по (4.11)

$$r_k^{1/2} \sim \frac{\pi}{l} k,$$

то асимптотическую формулу (4.11) можно записать в виде

$$lr_k^{1/2} + \pi\tau_1 = k\pi + \frac{\pi}{2} + O(k^{-\gamma_1}), \quad \gamma_1 = 2\gamma. \quad (4.11')$$

Из (4.11) следует следующее асимптотическое представление для вещественных нулей функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$

$$-r_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{k^{1+\gamma_1}}\right) \right] \quad (\gamma_1 > 0). \quad (4.11'')$$

Покажем теперь, что все нули $\{-r_k\}$ функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$, начиная с некоторого номера $k \geq k_1$, простые. С этой целью заметим, что в силу формулы

$$E_{\frac{1}{2}}(z; \mu) = \frac{1}{2z} \{E_{\frac{1}{2}}(z; \mu-1) + (1-\mu)E_{\frac{1}{2}}(z; \mu)\}$$

из (2.5) имеем

$$\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) = \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} I^{\nu_{j_1}-\nu_{j_2}-1} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \nu_{j_1} - \nu_{j_2}) \right] \times \right. \\ \left. \times E_{\frac{1}{2}}(E\lambda; \nu_{j_2} + \nu_{j_1}) + \frac{1}{2} E_{\frac{1}{2}}(E\lambda; \nu_{j_1} + \nu_{j_2} - 1) \right\}.$$

Отсюда следует, что при $r \rightarrow +\infty$

$$\omega\left(-r; \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} l a_1 b_1 r^{\tau_1-\frac{1}{2}} \sin[l\sqrt{r} + \pi\tau_1] + \\ + O(r^{\tau_1-\frac{1}{2}-\alpha_1}), \quad \alpha_1 > 0. \quad (4.12)$$

Из (4.11') и (4.12) вытекает, что $\omega(-r_k; \frac{1}{2}) \neq 0$ при $k \geq k_1$, т. е. нули $\{-r_k\}$ при $k \geq k_1$ простые.

Но из (4.8) следует далее, что для больших $\lambda \in D\sigma_0$ уравнение

$$\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0 = 0 \text{ эквивалентно:}$$

1) при $A_0 \neq A_1^{(1)}$ уравнению вида

$$\operatorname{ch}[l\sqrt{\lambda} \pm \pi\tau_1] = c_1 e^{\pm i\pi\tau_1 \lambda^{-1-\tau_1}} + O(\lambda^{-\varepsilon}), \quad (4.13)$$

где

$$c_1 = \frac{A_0 - A_1^{(1)}}{a_1 b_1};$$

2) при $A_0 = A_1^{(1)}$ уравнению вида

$$\operatorname{ch}[l\sqrt{\lambda} \pm \pi\tau_1] - A_2^{(1)} e^{\pm i\pi\tau_1 \lambda^{-1-\tau_1}} + O(\lambda^{-\varepsilon}), \quad (4.13')$$

причем знаки $+$ или $-$ берутся, когда точки $\lambda \in D\sigma_0$ соответственно лежат в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ или $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Не останавливаясь на дальнейших деталях, укажем что из обеих формул (4.13) и (4.13') вытекает, что возможные достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda; \frac{1}{2}) - A_0$ должны лежать в кругах с центром в точках $\lambda = -r_k$ и с радиусом $R_k = O(r_k^{\frac{1}{2}})$.

Далее, на основании асимптотики функций $\omega(\lambda; \frac{1}{2}) - A_0$ и $\omega'(\lambda; \frac{1}{2})$ можно подсчитать, что функция $\omega(\lambda; \frac{1}{2}) - A_0$ в круге $|\lambda + r_k| \leq R_k$ имеет точно один нуль, т. е., что она обращается в нуль лишь в центре $\lambda = -r_k$ этого круга.

Наконец, если пронумеровать все нули функции $\omega\left(\lambda; \frac{1}{2}\right) - A_0$ в порядке возрастания их модулей, то вместо (4.11'') будем иметь асимптотическую формулу (4.2) леммы.

Лемма 6. Пусть $\rho > \frac{1}{2}$ и $\tau_\rho > 0$. Тогда:

а) для любого $0 < \delta < \min\left\{\frac{\pi}{2\rho}, \pi - \frac{\pi}{2\rho}\right\}$ все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda, \rho) - A_0$ простые, лежат внутри углов

$$\left|\arg \lambda - \frac{\pi}{2\rho}\right| < \delta, \quad \left|\arg \lambda + \frac{\pi}{2\rho}\right| < \delta; \quad (4.14)$$

б) пронумеруя нули, лежащие соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ в порядке возрастания их модулей, и обозначая их через $\{\gamma_k^\pm\}$, будем иметь асимптотические формулы

$$\gamma_k^{(\pm)} = e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right)\right]. \quad (4.15)$$

Доказательство. Что все далекие от начала координат нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ могут лежать лишь в угловых областях вида (4.14), легко следует из асимптотических формул (2.20) и (2.24).

Для исследования характера распределения нулей функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ в областях вида (3.14) заметим, что согласно (2.20') там при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \omega(\lambda; \rho) &= \rho a_r b_s \lambda^{\tau_\rho} \{1 + \varphi(\lambda)\} e^{\rho \lambda} + \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{A_k^{(p)}}{\lambda^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \quad (\rho \geq 1), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$\tau_\rho = 1 + \rho(1 - \mu_r - \nu_s), \quad a_r b_s \neq 0,$$

а функция $\varphi(\lambda)$ имеет порядок $O(\lambda^{-\alpha})$, где $\alpha > 0$.

Различим два случая:

1) $A_0 \neq A_1^{(p)}$, и тогда обозначив

$$\omega_0(\lambda; \rho) = \lambda^{\tau_\rho} [1 + \varphi(\lambda)] e^{\rho \lambda} - C_\rho, \quad (4.17)$$

где

$$C_\rho = \frac{A_0 - A_1^{(p)}}{\rho a_r b_s},$$

в силу (4.16) при больших $|\lambda|$ в областях вида (4.14) будем иметь

$$\omega(\lambda; \rho) - A_0 = \rho a_r b_r \left\{ \omega_0(\lambda; \rho) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}. \quad (4.18)$$

Рассмотрим кривую, бесконечные ветви которой лежат в областях (4.14):

$$L_0: |\lambda|^{\tau_p} [1 + \varphi(\lambda)] e^{i\theta_p} = |C_p|. \quad (4.19)$$

Далее доказательство проводится по той же схеме, что и в пункте а) леммы 4. Положив, что $\lambda = re^{i\varphi} \in L_0$, запишем уравнение кривой L_0 в виде

$$L_0: lr^p \cos p\varphi = -\tau_p \log r - \log |1 + \varphi(re^{i\varphi})| + \log |C_p|. \quad (4.20)$$

Если μ_k и μ_{k+1} два последовательных, достаточно далеких от начала координат $\lambda = 0$, нуля функции $\omega_0(\lambda; \rho)$, лежащие в верхней полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ на кривой L_0 , то, как и при доказательстве формулы (3.27), заключаем, что между ними находится точка $\nu_k \in L_0$, где

$$|\omega_0(\nu_k, \rho)| = 2|C_p|. \quad (4.21)$$

Рассмотрим дугу l_k окружности $|\lambda| = |\nu_k|$, лежащую между верхними половинками кривых

$$L_0^{(\pm)}: lr^p \cos p\varphi = -\tau_p \log r - \log |1 + \varphi(re^{i\varphi})| + \log |C_p| \pm 1, \quad (4.20')$$

тогда тем же методом, что и при доказательстве формулы (3.20) леммы 4, получим, что на контурах Δ_k четырехугольников, ограниченных дугами l_k и l_{k+1} и кусками кривых $L_0^{(\pm)}$, справедлива оценка

$$|\omega_0(\lambda; \rho)| \geq \frac{2}{3} |C_p|, \quad \lambda \in \Delta_k, \quad k \geq N_0. \quad (4.22)$$

С другой стороны, опять как и при доказательстве леммы 4, из формулы (4.18) легко убедиться, что все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$ лежат между кривыми (4.20') $L_0^{(\pm)}$.

Наконец, применением теоремы Руше из формул (4.22) и (4.18) заключаем, что достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda; \rho) - A_0$, лежащие в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$, простые и представляются в виде

$$\gamma_k^{(+)} = \mu_k + O(d_k), \quad k \geq k_0, \quad (4.23)$$

где d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k .

Но из (4.20), как и при доказательстве формулы (3.36), получим, что при $k \rightarrow +\infty$

$$\mu_k = e^{\frac{i\pi}{2p}} \left(\frac{2\pi k}{l} \right)^{\frac{1}{p}} \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right]. \quad (4.24)$$

Наконец, заметив, что $d_k = 0 \left(k^{\frac{1}{2}-1} \log k \right)$, из (4.23) и (4.24) получим формулу (4.15) для $\gamma_k^{(+)}$ и, следовательно, для $\gamma_k^{(-)}$.

2) $A_0 = A_1^{(p)}$, тогда, обозначив

$$\omega_0(\lambda; \rho) = \lambda^{\tau_p} e^{i\lambda^p} \{1 + \varphi(\lambda)\} - \frac{C_p}{\lambda}, \quad (4.25)$$

где

$$C_p = \frac{A_2^{(p)}}{\rho a_r b_s},$$

очевидно в областях вида (4.14) будем иметь

$$\omega(\lambda; \rho) - A_0 = \rho a_r b_s \left\{ \omega_0(\lambda; \rho) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}.$$

Далее, рассматривая кривую

$$L_0: |\lambda^{\tau_p+1} [1 + \varphi(\lambda)] e^{i\lambda^p}| = |C_p|$$

вполне аналогичными рассуждениями, что и в случае 1), получим опять формулу (4.15).

Институт математики и механики

АН Армянской ССР,

Ереванский государственный университет

Поступила 9 IX 1959

Մ. Մ. Ջրբաշյան, Լ. Բ. Ներսիսյան

ՈՐՈՇ ՀԱՏՈՒԿ ԲԻՈՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ինչպես ցույց է տրված [1, 2, 3] աշխատություններում, առանցքի վրա ֆուրյեի սովորական կորիզով ինտեգրալ ձևախոսություն ունի ոչ թե մեկ, այլ կոնտինյում բազմություն շրջման բանաձևեր, կախված $\rho \geq \frac{1}{2}$ անընդհատ պարամետրից: Այդ շրջումներն իրականացվում են հատուկ կորիզների միջոցով, որոնք կազմվում են Միտտագ-Լեֆլերի

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad \left(\rho \geq \frac{1}{2}, \mu > 0 \right)$$

ամբողջ ֆունկցիաների օգնությամբ:

Միաժամանակ ստացվել են հակադարձ բնույթի արդյունքներ, որ

$E_\rho(z, \mu)$, $\left(\rho \geq \frac{1}{2} \right)$ ֆունկցիայի օգնությամբ կազմված կորիզներով ինտե-

գրալ ձևափոխությունները կարող են շրջվել ֆուրյեի սովորական ձևափոխությունում, քի μ պարամետրների արժեքների որոշակի ընտրության դեպքում:

Ներկա հոդվածի առաջին պարագրաֆում շարադրում է վերջավոր հաստատվածում ֆունկցիայի բիրթոգոնալ սխեմայի կառուցման ընդհանուր մեթոդ: Այնուհետև երկրորդ պարագրաֆում այդ մեթոդը կոնկրետ կերպով իրականացվում է $E_p(z, \mu)$ տիպի ֆունկցիաներից գծային կոմբինացիաների նկատմամբ: Ընդ որում բիրթոգոնալ սխեման կառուցելու համար հարկ եղավ հետադուռել $E_p(z, \mu)$ տեսքի ֆունկցիաներով կապված $\omega(z, \rho)$ հատուկ ֆունկցիայի A_0 — կետերի բաշխումը հարթության վրա:

Կառուցված բիրթոգոնալ սխեմաները և վերլուծությունները ըստ այդ սխեմաների (որ կլինի մեր երկրորդ հաղորդման առարկան) սերտորեն կապված են կոտորակային կարգի գիֆերենցիալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների հետ: Վերջին հարցին նվիրված կլինեն մեր հետագա հաղորդումները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на не-скольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Известия АН СССР, серия матем., 18, 1954, стр. 427—448.
2. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Известия АН СССР, серия матем., 19, 1955, стр. 133—190.
3. Джрбашян М. М. Об асимптотическом поведении функций типа Минтаг-Лефлера. ДАН АрмССР, т. XIX, № 3, 1954.
4. Джрбашян М. М. К теории интегральных преобразований с ядрами Вольтерра. ДАН СССР, т. 124, 1959, стр. 22—25.
5. Wiman A. Über die Nullstellen der Funktionen $E_a(x)$. Acta Mathematica, 29 1905, 217—234.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. П. Геонджян

К теории стесненного кручения сплошных
призматических стержней

В работе дается метод решения задачи кручения сплошного призматического стержня, на одном или на двух торцах которого имеются диафрагмы, устраняющие деформацию и искажения торцовых сечений в своих плоскостях. Крутящие моменты приложены к торцам стержня.

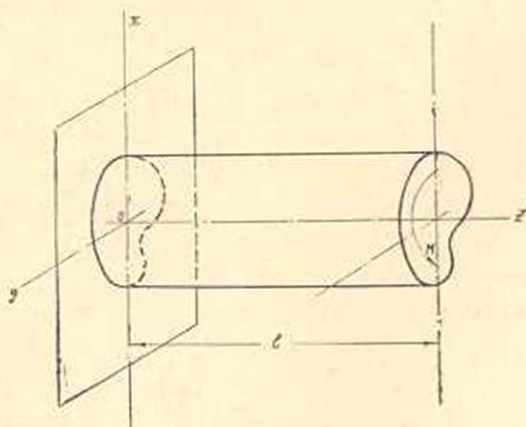
Предполагается, что закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня аналогичен закону деформации при свободном кручении того же стержня [1].

Кроме того предполагается, что известно решение задачи кручения рассматриваемого стержня по Сен-Венану. Рассматриваются лишь такие стержни, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии.

Стесненному кручению сплошных призматических стержней посвящен ряд работ [2—7].

§ 1. Построение решения задачи

Рассмотрим задачу кручения сплошного призматического стержня (фиг. 1), когда на основании $z = 0$ имеется диафрагма.



Фиг. 1.

Напряженное состояние представим в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = 0, \\ \sigma_z &= -2f'(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= f''(z) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \tau_{xz}^0, \\ \tau_{yz} &= f''(z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \tau_{yz}^0, \\ \tau_{xy} &= -f'''(z) \Phi(x, y).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь $f(z)$ и $\Phi(x, y)$ пока неизвестные функции, а τ_{xz}^0 и τ_{yz}^0 касательные напряжения свободного кручения.

Система напряжений (1.1) удовлетворяет условиям равновесия при любых $f(z)$ и $\Phi(x, y)$.

Так как боковая поверхность стержня свободна от внешних поверхностных сил, то на боковой поверхности будем иметь следующие условия

$$\begin{aligned}\tau_{xy}m &= 0, \\ \tau_{xy}l &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m &= 0,\end{aligned}\quad (1.2)$$

где $l = \cos(n, x)$, а $m = \cos(n, y)$ (n — внешняя нормаль к боковой поверхности).

Из (1.2) следует, что на контуре поперечного сечения стержня Γ

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(n, y) = 0,$$

что эквивалентно следующим условиям

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (1.4)$$

Докажем, что система напряжений (1.1) в каждом поперечном сечении стержня статически эквивалентна паре сил, лежащей в плоскости данного поперечного сечения, то есть крутящему моменту.

Для этого достаточно доказать следующие соотношения

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \tau_z d\Omega &= 0, \\ \iint_{\Omega} x \sigma_z d\Omega &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} y \sigma_z d\Omega &= 0, \\
 \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega &= 0, \\
 \iint_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega &= 0, \\
 \iint_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) d\Omega &= \iint_{\Omega} (x \tau_{yz}^0 - y \tau_{xz}^0) d\Omega = M.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Подставляя значение σ_z из (1.1) в первое соотношение (1.5) и используя формулу Грина, получим

$$\iint_{\Omega} \sigma_z d\Omega = -2f'(z) \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} d\Omega = -2f'(z) \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0,$$

так как $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ на контуре поперечного сечения стержня равняется нулю.

Аналогичным образом можно доказать и справедливость остальных соотношений (1.5).

§ 2. Определение функции $\Phi(x, y)$

Исходя из основного предположения, нормальное напряжение σ_z представим в виде

$$\sigma_z = f(z) \varphi(x, y)
 \tag{2.1}$$

где $\varphi(x, y)$ — функция кручения Сен-Венана при свободном кручении того же стержня.

Из формул (1.1) и (2.1) следует

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \varphi(x, y).
 \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) математически утверждает тот факт, что среди класса функций $\{\Phi(x, y)\}$ существует некоторая функция $\Phi_1(x, y)$, смешанная производная которой, с точностью до постоянного множителя, совпадает с функцией деформации.

Таким образом, для определения $\Phi(x, y)$ будем иметь дифференциальное уравнение (2.2) и на контуре поперечного сечения стержня следующие граничные условия

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.
 \tag{2.3}$$

§ 3. Определение $f(z)$

Для нахождения функции $f(z)$ применим вариационное уравнение Кастильяно

$$\delta\Pi = \int \int (u\delta X_v + v\delta Y_v + w\delta Z_v) ds. \quad (3.1)$$

В нашем случае поверхностный интеграл исчезает, так как в сечении стержня $z=0$, ввиду стесненного кручения, упругие перемещения u, v, w равны нулю, а на остальной части поверхности стержня заданы лишь силы.

Таким образом, будем иметь

$$\delta\Pi = 0. \quad (3.2)$$

Для потенциальной энергии деформации, как известно, имеем:

$$\Pi = \int_0^l \int_{\Omega} \left[\frac{z_z^2}{2E} + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] d\Omega dz. \quad (3.3)$$

Подставляя значения напряжений из (1.1) в (3.3), получим

$$\Pi = \frac{1}{2G} \int_0^l \left[\frac{J_1}{2(1+\mu)} f''(z) + J_2 f''(z) + J_3 f''''(z) + J_4 f'(z) + T \right] dz, \quad (3.4)$$

где

$$J_1 = \int_{\Omega} \varphi^2(x, y) d\Omega, \quad (3.5)$$

$$J_2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega, \quad (3.6)$$

$$J_3 = \int_{\Omega} \Phi^2(x, y) d\Omega, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= 2G\theta \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] d\Omega = \\ &= 4G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} d\Omega = 4G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$T = \int_{\Omega} (\tau_{xz}^0 + \tau_{yz}^0) d\Omega. \quad (3.9)$$

Здесь интегралы берутся по сечению стержня.

Подставляя (3.4) в (3.2), получим

$$\oint_0^l \left[\frac{J_1}{2(1+\mu)} f''(z) + J_2 f''^2(z) + J_3 f''''^2(z) + J_4 f''(z) + T \right] dz = 0. \quad (3.10)$$

Для вариационной задачи (3.10) уравнение Эйлера будет иметь следующий вид:

$$f^{VI}(z) - 2r^2 f^{IV}(z) + s^4 f''(z) = 0, \quad (3.11)$$

где

$$2r^2 = \frac{J_2}{J_3}; \quad s^4 = \frac{J_4}{2(1+\mu)J_3}. \quad (3.12)$$

Общий интеграл уравнения (3.11) можно представить в виде

$$f(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z) + c_3 v_3(z) + c_4 v_4(z) + c_5 z + c_6. \quad (3.13)$$

Из (3.5) — (3.7) и (3.12) легко видеть, что $r \neq 0$ и $s \neq 0$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $s > r$

Функции $v_i(z)$ будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \operatorname{sh} \alpha z \cos \beta z, \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} \alpha z \cos \beta z, \\ v_3(z) &= \operatorname{ch} \alpha z \sin \beta z, \\ v_4(z) &= \operatorname{sh} \alpha z \sin \beta z, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}. \quad (3.15)$$

Или в силу (3.12)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{\frac{2J_1}{(1+\mu)J_3}} + \frac{J_2}{J_3}}, \\ \beta &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{\frac{2J_1}{(1+\mu)J_3}} - \frac{J_2}{J_3}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

2) $s < r$

тогда

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \operatorname{sh} \lambda_1 z, \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} \lambda_1 z, \\ v_3(z) &= \operatorname{sh} \lambda_2 z, \\ v_4(z) &= \operatorname{ch} \lambda_2 z, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Или в силу (3.12)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sqrt{\frac{J_2}{2J_3}} + \sqrt{\frac{J_2^2}{4J_3^2} - \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{J_1}{J_3}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{J_2}{2J_3}} - \sqrt{\frac{J_2^2}{4J_3^2} - \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{J_1}{J_3}}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

3) $s=r$, тогда

$$\begin{aligned}v_1(z) &= \operatorname{sh} rz, \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} rz, \\ v_3(z) &= z \operatorname{ch} rz, \\ v_4(z) &= z \operatorname{sh} rz,\end{aligned}\quad (3.20)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{J_2}{2J_3}}. \quad (3.21)$$

Перейдем к выяснению граничных условий функции $f(z)$. Известно, что

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}. \quad (3.22)$$

Подставляя значение σ_z из (2.1) в (3.22) и учитывая, что $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, можно написать

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{f'(z) \varphi(x, y)}{E}.$$

Интегрируя получим

$$w = \frac{f(z) \varphi(x, y)}{E} + \Omega(x, y), \quad (3.23)$$

где $\Omega(x, y)$ — произвольная функция, которая определяется из условия:

$$w(x, y, 0) = 0. \quad (3.24)$$

В силу (3.24) из (3.23) для $\Omega(x, y)$ получим

$$\Omega(x, y) = - \frac{f(0) \varphi(x, y)}{E}. \quad (3.25)$$

Подставляя значение $\Omega(x, y)$ из (3.25) в (3.23), для w получим:

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(z) - f(0)]. \quad (3.26)$$

Напомним, что здесь $\varphi(x, y)$ — функция кручения Сен-Венана при свободном кручении.

Будем предполагать, что при неограниченном увеличении длины стержня

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(l) = 0. \quad (3.27)$$

Кроме того, естественно предположить, что при $l \rightarrow \infty$ деформация свободного торца стержня стремится к деформации того же стержня при свободном кручении, т. е.

$$w_{l \rightarrow \infty} = w^0 = \theta \varphi(x, y). \quad (3.28)$$

Используя уравнение (3.26) и имея в виду (3.27) и (3.28), получим

$$f(0) = -E\theta. \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.26), для w будем иметь

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(z) + E\theta]. \quad (3.30)$$

Основание стержня $z = 0$ не искажается, т. е.

$$\gamma_{xy}|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \tau_{xy}|_{z=0} = 0.$$

Тогда из (1.1) вытекает

$$f'''(z) = 0. \quad (3.31)$$

Нормальные напряжения σ_z на свободном торце стержня равны нулю, а касательные напряжения, как было указано выше, распределены по тому же закону, что и при свободном кручении. Поэтому из (1.1) следует

$$f'(l) = 0, \quad (3.32)$$

$$f''(l) = 0. \quad (3.33)$$

Таким образом, окончательно для $f(z)$ получим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} f(0) &= -E\theta, \\ f'''(0) &= 0, \\ f'(l) &= 0, \\ f''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

и следующее условие на бесконечности

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(l) = 0. \quad (3.35)$$

Пологая $\epsilon_0 = 0$, из условий (3.34) и (3.35) определим постоянные интегрирования.

В первом случае, когда $s = r$, будем иметь:

$$c_1 = E\theta \frac{\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)(\beta \operatorname{sh} 2\alpha l - \alpha \sin 2\beta l)}{2[\beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2) \operatorname{sh}^2 \alpha l - \alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2) \sin^2 \beta l - 4\alpha^2\beta^2]},$$

Решение дифференциального уравнения (4.2), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), можно представить следующим образом

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \int_{h(y)}^x \int_{g(x)}^y \xi \eta d\xi d\eta, \quad (4.3)$$

где

$$g(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad h(y) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Произведя интегрирование, получим

$$\Phi(x, y) = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{16 (a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (4.4)$$

Здесь одновременно приведем значения геометрических характеристик эллиптического сечения.

Из (3.5)–(3.7), (4.1) и (4.4) получим

$$J_1 = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 a^3 b^3}{24 (a^2 + b^2)^2}, \quad (4.5)$$

$$J_2 = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 a^3 b^3}{384 (a^2 + b^2)^2}, \quad (4.6)$$

$$J_3 = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 a^5 b^5}{1280 (a^2 + b^2)^2}. \quad (4.7)$$

2. *Прямоугольное сечение.* Пусть уравнение контура прямоугольника дано в следующем виде

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0 \quad (a > b).$$

Функция кручения Сен-Венана имеет вид

$$\varphi(x, y) = -xy + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (2.2), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} xy - \frac{16b^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}. \quad (4.9)$$

Решение (4.9), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), можно представить следующим образом

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2} \int_a^x \int_b^y \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.8) в (4.10) и интегрируя, получим

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{8} (a^2 - x^2) (b^2 - y^2) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 2b^4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2b} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}\right)}{n^5}. \quad (4.11)$$

Аналогичным образом приведем геометрические характеристики J_1 , J_2 , J_3 для прямоугольника

$$J_1 = \frac{4a^3b^3}{9} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^7 16b^6 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} \left[\frac{\pi a}{b} - \frac{3 \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b}}{n} + \frac{\pi a}{2b \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \right], \quad (4.12)$$

$$J_2 = \frac{2a^3b^3(a^2 + b^2)}{45} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^8 8b^6 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^8} \left[\operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} - \frac{n\pi a}{2b} + \frac{1}{3} \left(\frac{n\pi a}{2b} \right)^3 \right], \quad (4.13)$$

$$J_3 = \frac{4a^5b^5}{225} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{11} 4b^{10} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^{11}} \left[4 \frac{n\pi a}{2b} - 5 \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} - \frac{2}{3} \left(\frac{n\pi a}{2b} \right)^3 + \frac{n\pi a}{2b \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \right]. \quad (4.14)$$

§ 5. Определение нормального напряжения σ_z

Имея функции $\Phi(x, y)$ и $f(z)$ по (1.1) легко можно определить составляющие напряжения. Здесь мы будем заниматься лишь определением нормального напряжения σ_z вдоль оси стержня, которое представляет наибольший интерес при решении задачи стесненного кручения.

Из (2.1) для σ_z в сечении $z=0$ получим

$$\sigma_z|_{z=0} = f'(0) \varphi(x, y). \quad (5.1)$$

Максимальное значение σ_z получится в тех точках поперечного сечения стержня, где функция Сен-Венана $\varphi(x, y)$ достигает своего максимума, следовательно для сечения $z=0$ можем написать

$$|\sigma_z|_{\max} = |f'(0) \varphi_{\max}(x, y)|. \quad (5.2)$$

Приведем окончательные выражения для $|\sigma_z|_{\max}$ в трех ранее рассмотренных случаях

а) $s > r$

$$|\sigma_z|_{\max} = E\theta \left| \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) (\beta \operatorname{sh} 2\alpha l - \alpha \sin 2\beta l)}{\beta^2 (\beta^2 - 3\alpha^2) \operatorname{sh}^2 \alpha l - \alpha^2 (\alpha^2 - 3\beta^2) \sin^2 \beta l - 4\alpha^2 \beta^2} \max [\varphi(x, y)] \right|. \quad (5.3)$$

б) $s < r$

$$|\sigma_z|_{\max} = E\theta \left| \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_1 l \operatorname{ch} \lambda_2 l - \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l)}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2 - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4) \operatorname{ch} \lambda_1 l \operatorname{ch} \lambda_2 l + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \operatorname{sh} \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l} \max [\varphi(x, y)] \right|. \quad (5.4)$$

в) $s = r$

$$|\sigma_z|_{\max} = E\theta \frac{r (\operatorname{sh} 2rl - 2rl)}{1 + r^2 l^2 + 3 \operatorname{ch}^2 rl} |\varphi_{\max}(x, y)|. \quad (5.5)$$

В таблицах 1 и 2 приведены некоторые численные значения для

$$|\sigma_z|_{\max} \text{ и } |\tau_z|_{\max} \text{ при } \mu = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{l}{a} \geq 3.$$

Эллиптическое сечение

Прямоугольное сечение

Таблица 1

Таблица 2

a/b	2	10	∞
$\frac{ \sigma_z _{\max}}{E\theta b}$	0.616	1.179	1.225
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	1.342	1.493	1.500
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	0.600	0.743	0.750
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	1.025	1.587	1.635
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	2.236	2.010	2.000
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$			

a/b	2	10	∞
$\frac{ \sigma_z _{\max}}{E\theta b}$	0.750	1.704	1.940
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	1.387	1.872	2.121
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	0.697	0.750	0.750
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$	1.074	2.272	2.586
$\frac{ \sigma_z _{\max}^*}{E\theta b}$	1.990	2.495	2.828
$\frac{ \tau_z _{\max}}{E\theta b}$			

§ 6. Стесненное кручение стержней с двумя жесткими диафрагмами

Приведем решение задачи о стесненном кручении сплошного призматического стержня, на торцах которого имеются диафрагмы, устраняющие деформацию и искажения торцевых сечений в своих плоскостях. Крутящие моменты приложены на диафрагмах.

Расположим координатные оси так, как показано на фиг. 2. Напряжения примем в виде (1.1). Как и ранее, $\Phi(x, y)$ определяется из (2.2) и (2.3), а функция $f(z)$ из (3.11) и имеет следующий вид

* По Рейснеру.

$$f(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z) + c_3 v_3(z) + c_4 v_4(z) + c_5 z + c_6. \quad (6.1)$$

Перейдем к выявлению граничных условий для рассматриваемого случая.

По (3.23) имеем

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} f(z) + \Omega(x, y). \quad (6.2)$$

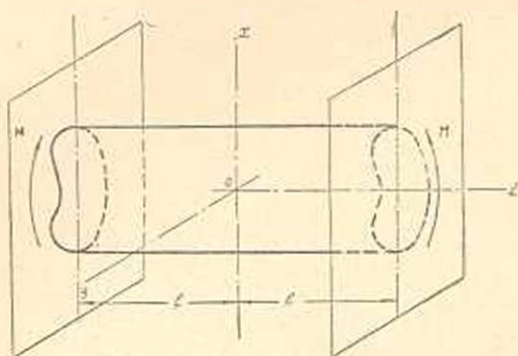
Но так как диафрагмы устраняют деформацию сечений, можем написать

$$w(x, y, z)|_{z=\pm l} = 0 \quad (6.3)$$

полагаем, что в сечении $z = 0$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w|_{z=0} = \theta \varphi(x, y). \quad (6.4)$$

Это вытекает из того факта, что, при неограниченном возрастании длины стержня, деформация среднего сечения будет стремиться к деформации того же стержня при свободном кручении.



Фиг. 2.

Кроме того, примем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(0) = 0. \quad (6.5)$$

Тогда, используя (6.2) и (6.4), можем написать

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w|_{z=0} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(x, y)}{E} f(0) + \Omega(x, y) \right] = \theta \varphi(x, y),$$

откуда, имея в виду (6.5), получим

$$\Omega(x, y) = \theta \varphi(x, y).$$

Подставляя значение $\Omega(x, y)$ в (6.2), получим

$$w = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(z) + E\theta]. \quad (6.6)$$

Из граничного условия (6.3) имеем

$$w|_{z=\pm l} = \frac{\varphi(x, y)}{E} [f(\pm l) + E\theta] = 0,$$

откуда

$$f(\pm l) = -\theta E. \quad (6.7)$$

Из (6.7) вытекает, что функция $f(z)$ четная и, следовательно, в силу (6.1) можем написать

$$f(z) = c_2 v_2(z) + c_4 v_4(z) + c_6. \quad (6.8)$$

Но так как торцовые сечения стержня в своих плоскостях не искажаются, то

$$\gamma_{xy}|_{z=\pm l} = 0 \quad \text{или} \quad \tau_{xy}|_{z=\pm l} = 0. \quad (6.9)$$

В силу (1.1) условие (6.9) примет вид

$$f'''(\pm l) = 0. \quad (6.10)$$

Используя граничные условия (6.7), (6.10) и (6.5), можем определить постоянные интегрирования. Подставляя эти постоянные в (6.8), будем иметь

$$f(z) = \frac{\theta E}{D} [v_2'''(l) v_4(z) - v_4'''(l) v_2(z)], \quad (6.11)$$

где

$$D = v_2(l) v_4'''(l) - v_4(l) v_2'''(l). \quad (6.12)$$

В силу (2.1) и (6.11) для нормального напряжения σ_z будем иметь

$$\sigma_z = \frac{E\theta}{D} [v_2'''(l) v_4'(z) - v_4'''(l) v_2'(z)] \varphi(x, y),$$

где D определяется из (6.12), а $\varphi(x, y)$ — функция кручения Сен-Венана при свободном кручении того же стержня. Функции $v_2(z)$ и $v_4(z)$ при $s > r$, $s < r$ и $s = r$ соответственно имеют вид (3.14), (3.17) и (3.20).

§ 7. Определение жесткости при стесненном кручении

Под жесткостью C^* при стесненном кручении стержня будем подразумевать отношение крутящего момента M к среднему относительному углу закручивания стержня θ^* , т. е.

$$C^* = \frac{M}{\theta^*}. \quad (7.1)$$

Угол кручения ψ можно определить из уравнения работы крутящего момента

$$\frac{1}{2} M \psi = \Pi, \quad (7.2)$$

где Π — потенциальная энергия деформации всего стержня. С другой стороны по определению

$$\theta^* = \frac{\psi}{l}. \quad (7.3)$$

Из (7.2) и (7.3) получим

$$\frac{1}{2} M l \theta^* = \Pi. \quad (7.4)$$

При свободном кручении того же стержня будем иметь

$$C_0 = \frac{M}{\theta} \quad (7.5)$$

Используя (7.1), (7.4) и (7.5) легко получить формулу для жесткости C^* при стесненном кручении

$$C^* = \frac{\theta^2 I C_0^2}{2\pi} \quad (7.6)$$

Приведем двухстороннюю оценку для жесткости при стесненном кручении. По принципу Кастильяно из всех напряженных состояний, удовлетворяющих уравнениям равновесия и условиям на поверхности, на той части тела, где даны поверхностные силы, наименьшую потенциальную энергию деформации сообщают телу действительно существующие напряжения.

Таким образом, из (7.6) следует, что

$$C^* \leq C, \quad (7.7)$$

где C истинная жесткость.

С другой стороны, при применении принципа возможных перемещений Лагранжа, когда предварительно даются упругие перемещения, в том или ином частном виде (например, как это сделано у Н. В. Зволинского [4]) налагаются связи на вариации перемещений, что делает систему более жесткой. Следовательно, при приближенном решении задачи о стесненном кручении с применением вариационного принципа Лагранжа, жесткость стержня при кручении получится больше истинной, т. е.

$$C^{**} > C, \quad (7.8)$$

где C^{**} приближенное значение жесткости при кручении, полученное при применении принципа Лагранжа.

Таким образом, используя (7.7) и (7.8), можем дать двухстороннюю оценку жесткости при стесненном кручении

$$C^* \leq C \leq C^{**}. \quad (7.9)$$

Приведем один численный пример для стержня с эллиптическим поперечным сечением.

$$\text{Пусть } \frac{a}{b} = 10, \quad \frac{l}{a} = 3, \quad \nu = \frac{1}{3}$$

Вычисляя жесткость по формуле (7.6), получим

$$C^* = 0.00318 Ga^4. \quad (7.10)$$

По Зволинскому [4] будем иметь

$$C^{**} = 0.00358 Ga^4. \quad (7.11)$$

Таким образом, можем написать

$$0.00318 Ga^4 \leq C \leq 0.00358 Ga^4. \quad (7.12)$$

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить Н. Х. Арутюняна за постановку задачи и за ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 IV 1959

Գ. Պ. Գյումրյան

ՀՈԾ ՊՐԻՋՄԱՅԱԶԵԿ ԶՈՂԵՐԻ ԿԱՇԿԱՆԴՎԱԾ ՈԼՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ արվում է հոծ պրիզմայաձև ձողի կաշկանդված ոլորման խնդրի լուծման մեթոդ, երբ ձողի մեկ կամ երկու հիմքերում կան դիաֆրագմաներ, որոնք թույլ չեն տալիս աղ կտրվածքների դեպլանացիա և աղճատում:

Ենթադրվում է, որ ձողի լայնական կտրվածքում նորմալ լարումների բաշխման օրենքը նման է ձողի ազատ ոլորման դեպլանացիայի օրենքին:

Դիտարկվում են ամբողջական կաշկանդված ոլորումը, որոնց լայնական կտրվածքներն ունեն համաչափության երկու առանցքներ:

Խնդրի լուծումը արվում է Կաստիլիանոյի վարիացիոն հավասարման օգտագործմամբ:

Աշխատության մեջ լուծված են ուղղանկյուն և էլիպսաձև կտրվածքներով պրիզմայաձև ձողերի կաշկանդված ոլորման խնդիրները:

Այդ դեպքերի համար հաշվված են նորմալ և շոշափող լարումները:

Աշխատության փերջում արված է կաշկանդված ոլորման դեպքում, ձողի կոշտության երկրորդանի գնահատական:

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожеевникова М. К., Новожилов В. В. Приближенная теория стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля, учитывающая искривления поперечных сечений. Известия АН СССР, серия ОТН, № 9, 1956, 72—83.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
3. Феппель А. и Феппель Л. Сила и деформация. т. II, ОНТИ, М.—Л., 1936.
4. Зволлинский Н. В. Приближенное решение задачи кручения упругого цилиндрического бруса с одним неизменяемым сечением. Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1939.
5. Непребко В. П. Стесненное кручение упругого параллелепипеда. Вестник Московского университета, № 6, 1956, 11—25.
6. Новинский Ю. Некоторые вопросы неравномерного кручения призматических стержней, решенные в напряжениях. Бюл. Польской АН, отд. 4, № 3, 1956, 149—154.
7. Рейснер Э. О неоднородном кручении цилиндрических стержней. Сб. пер. Механика, № 5, 1953.

А. А. Хачатрян

К расчету трехслойной ортотропной оболочки

1. Рассмотрим тонкую трехслойную оболочку, составленную из однородных ортотропных слоев. Пусть в каждой точке каждого слоя одна из плоскостей упругой симметрии параллельна внешним параллельным поверхностям оболочки, а остальные две — перпендикулярны линиям главной кривизны координатной поверхности.

За координатную поверхность принимаем срединную поверхность среднего слоя. Пусть α и β являются криволинейными ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности, γ — расстояние по нормали от точки (α, β) координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки.

Считаем, что коэффициенты первой квадратичной формы $A(\alpha, \beta)$ и $B(\alpha, \beta)$, а также главные кривизны координатной поверхности $k_1(\alpha, \beta)$ и $k_2(\alpha, \beta)$ при дифференцировании ведут себя как постоянные [1, 2].

Предположим также, что слои после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Здесь, следуя [1], в основу кладутся следующие предположения:

а) в каждом слое нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины,

б) при определении деформаций* $e_{\alpha\alpha}^i$ и $e_{\beta\beta}^i$ пренебрегаем напряжением σ_γ^i по сравнению с σ_α^i и σ_β^i ,

в) при определении деформаций $e_{\alpha\gamma}^i$ и $e_{\beta\gamma}^i$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}^i$ и $\tau_{\beta\gamma}^i$ не отличаются от соответствующих напряжений, найденных в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом.

Касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}^i$ и $\tau_{\beta\gamma}^i$, в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, могут быть получены аналогично работам [1, 3] и имеют вид:

$$\tau_{\alpha\gamma}^0 = -(\gamma + \delta_0) E_1^0 + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) E_3^0 - E_5,$$

$$\tau_{\beta\gamma}^0 = -(\gamma + \delta_0) E_2^0 + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) E_4^0 - E_6.$$

* В дальнейшем индекс сверху показывает номер слоя, причем 0, I, II относятся соответственно к среднему, нижнему и верхнему слоям.

$$\tau'_{xy} = -(\delta_1 + \gamma) E'_1 - \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \gamma^2) E'_3, \quad (1.1)$$

$$\tau'_{yz} = -(\delta_1 + \gamma) E'_2 - \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \gamma^2) E'_3,$$

$$\tau''_{xy} = (\delta_2 - \gamma) E''_1 - \frac{1}{2} (\delta_2^2 - \gamma^2) E''_3,$$

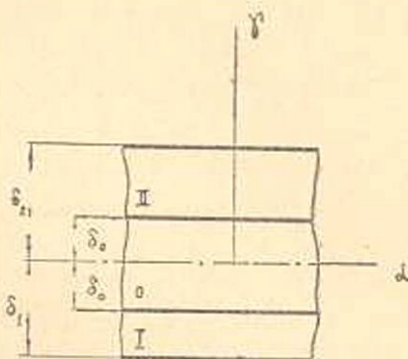
$$\tau''_{yz} = (\delta_2 - \gamma) E''_2 - \frac{1}{2} (\delta_2^2 - \gamma^2) E''_4,$$

где

$$\begin{aligned} E_1^i &= \left(B_{11}^i \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66}^i \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u_0 + (B_{12}^i + B_{66}^i) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \beta} + \\ &\quad + (k_1 B_{11}^i + k_2 B_{12}^i) \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ E_2^i &= (B_{12}^i + B_{66}^i) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \beta} + \left(B_{66}^i \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22}^i \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v_0 + \\ &\quad + (k_1 B_{12}^i + k_2 B_{22}^i) \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$E_3^i = \left[B_{11}^i \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] w_0,$$

$$E_4^i = \left[(B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + B_{22}^i \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] w_0,$$



Фиг. 1.

$$E_5 = (\delta_1 - \delta_0) E'_1 + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_0^2) E'_3,$$

$$E_6 = (\delta_1 - \delta_0) E'_2 + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_0^2) E'_3,$$

$2\delta_0$, $\delta_1 - \delta_0$, $\delta_2 - \delta_0$ — толщины соответственно среднего, нижнего и верхнего слоев (рис. 1).

B_{jk}^i — известные коэффициенты упругости i -го слоя [1, 4]. u_0 , v_0 , w_0 — перемещения точек координатной поверхности оболочки соответ-

ственно по осям x , β и γ , в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом.

Напряжения (1.1), как нетрудно заметить, удовлетворяют следующим условиям:

- 1) при $\gamma = -\delta_1$ $\tau'_{\alpha\gamma} = \tau'_{\beta\gamma} = 0$,
- 2) при $\gamma = \delta_2$ $\tau'_{\alpha\gamma} = \tau'_{\beta\gamma} = 0$,
- 3) при $\gamma = -\delta_0$ $\tau^0_{\alpha\gamma} = \tau'_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma} = \tau'_{\beta\gamma}$,
- 4) при $\gamma = \delta_0$ $\tau^0_{\alpha\gamma} = \tau''_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma} = \tau''_{\beta\gamma}$.

Удовлетворение первых трех условий очевидно. Что же касается четвертого условия, то в его справедливости можно убедиться, учитывая третье условие и первые два уравнения равновесия в перемещениях, выведенные при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом. Здесь мы не приводим эти уравнения, но их можно получить из системы уравнений (2.13), если в последних все величины со звездочками принять равными нулю и вместо u, v, w написать соответственно u_0, v_0, w_0 .

2. Обобщенный закон Гука для i -го слоя с учетом второй гипотезы принимает вид [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^i &= B_{11}^i e_{\alpha\alpha}^i + B_{12}^i e_{\beta\beta}^i, \\ \sigma_{\beta}^i &= B_{12}^i e_{\alpha\alpha}^i + B_{22}^i e_{\beta\beta}^i,\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta}^i &= B_{66}^i e_{\alpha\beta}^i, \\ \tau_{\alpha\gamma}^i &= B_{55}^i e_{\alpha\gamma}^i, \\ \tau_{\beta\gamma}^i &= B_{44}^i e_{\beta\gamma}^i.\end{aligned}\quad (2.2)$$

В силу первой гипотезы имеем $e_{\gamma\gamma}^i = \frac{du_{\gamma}^i}{d\gamma} = 0$, откуда

$$u_{\gamma}^i = w(\alpha, \beta). \quad (2.3)$$

Значит, если в точке (α, β) координатной поверхности провести нормаль, то перемещения по нормали всех точек, находящихся на этой нормали, равны нормальному перемещению точки (α, β) координатной поверхности.

Учитывая (2.3), для компонентов деформаций получаем:

$$\begin{aligned}e_{\alpha\alpha}^i &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial \alpha} + k_1 w, \\ e_{\beta\beta}^i &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial \beta} + k_2 w,\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}e_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial \alpha}, \\ e_{\alpha\gamma}^i &= \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial \gamma} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ e_{\beta\gamma}^i &= \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial \gamma} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

В силу третьей гипотезы в (2.2) заменяя значения напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^l$ и $\tau_{\beta\gamma}^l$ их выражениями, данными в (1.1), подставив полученные значения $e_{\alpha\gamma}^l$ и $e_{\beta\gamma}^l$ в (2.5) и интегрируя по γ , для компонентов перемещений получим:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^0 &= u - \gamma \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B_{55}^0} \left\{ \left(\frac{\gamma^2}{2} + \delta_0 \gamma \right) E_1^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^3}{3} - \delta_0^2 \gamma \right) E_3^0 + \gamma E_5^0 \right\}, \\ u_{\beta}^0 &= v - \gamma \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{B_{44}^0} \left\{ \left(\frac{\gamma^2}{2} + \delta_0 \gamma \right) E_2^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^3}{3} - \delta_0^2 \gamma \right) E_4^0 + \gamma E_6^0 \right\}, \\ u_{\alpha}^{\gamma} &= u - \gamma \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{B_{55}^0} E_7 - \frac{1}{B_{55}^0} \left\{ \left[\delta_1 (\gamma + \delta_0) + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_1^{\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\delta_1^2}{2} (\gamma + \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 + \delta_0^3) \right] E_3^{\gamma} \right\}, \\ u_{\beta}^{\gamma} &= v - \gamma \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{B_{44}^0} E_8 - \frac{1}{B_{44}^0} \left\{ \left[\delta_1 (\gamma + \delta_0) + \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_2^{\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\delta_1^2}{2} (\gamma + \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 + \delta_0^3) \right] E_4^{\gamma} \right\}, \\ u_{\alpha}^{\gamma} &= u - \gamma \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B_{55}^0} (\delta_2^2 E_1^0 + E_7) + \frac{1}{B_{55}^0} \left\{ \left[\delta_2 (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_1^{\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\delta_2^2}{2} (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 - \delta_0^3) \right] E_3^{\gamma} \right\}, \\ u_{\beta}^{\gamma} &= v - \gamma \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{B_{44}^0} (\delta_2^2 E_2^0 + E_8) + \frac{1}{B_{44}^0} \left\{ \left[\delta_2 (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{2} (\gamma^2 - \delta_0^2) \right] E_2^{\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\delta_2^2}{2} (\gamma - \delta_0) - \frac{1}{6} (\gamma^3 - \delta_0^3) \right] E_4^{\gamma} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$E_7 = \frac{\delta_0^2}{2} E_1^0 + \frac{\delta_0^3}{3} E_3^0 + \delta_0 E_5^0,$$

$$E_8 = \frac{\delta_0^2}{2} E_2^0 + \frac{\delta_0^3}{3} E_4^0 + \delta_0 E_6^0.$$

u, v — тангенциальные перемещения точек координатной поверхности.

При определении компонентов перемещений (2.6) учитывалось, что они удовлетворяют следующим условиям: при $\gamma = -\delta_0$ $u_{\alpha}^0 = u_{\alpha}$, $u_{\beta}^0 = u_{\beta}$, при $\gamma = \delta_0$ $u_{\alpha}^0 = u_{\alpha}$, $u_{\beta}^0 = u_{\beta}$, при $\gamma = 0$ $u_{\alpha}^0 = u$, $u_{\beta}^0 = v$.

Учитывая (2.6), (2.4) и (2.1), для внутренних сил (T_1, T_2, S) и моментов (M_1, M_2, H), которые определяются обычным способом [5, 6], получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
T_1 &= C_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) w - \\
&\quad - \left(K_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + T_1^*, \\
T_2 &= C_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) w - \\
&\quad - \left(K_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + T_2^*,
\end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
S &= C_{66} \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + C_{66} \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - 2K_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + S^*, \\
M_1 &= K_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 K_{11} + k_2 K_{12}) w - \\
&\quad - \left(D_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + M_1^*, \\
M_2 &= K_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1 K_{12} + k_2 K_{22}) w - \\
&\quad - \left(D_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + M_2^*,
\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$H = K_{66} \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + K_{66} \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - 2D_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + H^*,$$

где

$$\begin{aligned}
C_{ik} &= 2\delta_0 B_{ik}^0 + (\delta_1 - \delta_0) B_{ik}^1 + (\delta_2 - \delta_0) B_{ik}^2, \\
K_{ik} &= \frac{1}{2} [(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{ik}^1 - (\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{ik}^2],
\end{aligned} \quad (2.9)$$

$$D_{ik} = \frac{1}{3} [2\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta_1^3 - \delta_0^3) B_{ik}^1 + (\delta_2^3 - \delta_0^3) B_{ik}^2],$$

$$\begin{aligned}
T_1^* &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\delta_0^3}{3} \frac{B_{11}^0}{B_{55}^0} E_1^0 + (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}^1}{B_{55}^0} E_1^1 - (\delta_2 - \delta_0) \frac{B_{11}^2}{B_{55}^0} (\delta_0^2 E_1^0 + E_1^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^1}{B_{55}^0} \left(E_1^1 + \frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{8} E_3^1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^2}{B_{55}^0} \left(E_1^2 - \frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{8} E_3^2 \right) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{44}^0} E_2^0 + (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}^1}{B_{44}^0} E_2^1 - (\delta_2 - \delta_0) \frac{B_{12}^2}{B_{44}^0} (\delta_0^2 E_2^0 + E_2^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{12}^1}{B_{44}^0} \left(E_2^1 + \frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{8} E_4^1 \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^*}{B_{44}} \left(E_2 - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4 \right),$$

$$T_2^* = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{55}} E_1^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{12}^*}{B_{55}} E_7 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{12}^*}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_1^0 + E_7) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^*}{B_{55}} \left(E_1' + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3' \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{12}^*}{B_{55}} \left(E_1' - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3' \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{22}^0}{B_{44}} E_2^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{22}^*}{B_{44}} E_8 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{22}^*}{B_{44}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_2^0 + E_8) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{22}^*}{B_{44}} \left(E_2' + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4' \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{22}^*}{B_{44}} \left(E_2' - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4' \right) \right\}, \quad (2.10)$$

$$S^* = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{55}} E_1^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{55}} E_7 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_1^0 + E_7) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{55}} \left(E_1' + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3' \right) + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{55}} \left(E_1' - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_3' \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{44}} E_2^0 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{44}} E_8 - (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \frac{B_{66}^*}{B_{44}} (\bar{\epsilon}_0^2 E_2^0 + E_8) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{44}} \left(E_2' + \frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4' \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3 \frac{B_{66}^*}{B_{44}} \left(E_2' - \frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{8} E_4' \right) \right\},$$

$$M_1^* = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{2\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{11}^0}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0 E_1^0 + \frac{2\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_3^0 + E_5) - \right.$$

$$\left. -\frac{\bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_0^2}{2} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} E_7 - \frac{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0)^3}{12} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} \left(\frac{5\bar{\epsilon}_1 + 3\bar{\epsilon}_0}{2} E_1' + \frac{8\bar{\epsilon}_1^2 + 9\bar{\epsilon}_1\bar{\epsilon}_0 + 3\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_3' \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\bar{\epsilon}_2^2 - \bar{\epsilon}_0^2}{2} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} (\bar{\epsilon}_0 E_1' + E_7) + \right.$$

$$\left. + \frac{(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0)^3}{12} \frac{B_{11}^*}{B_{55}} \left(\frac{5\bar{\epsilon}_2 + 3\bar{\epsilon}_0}{2} E_1' - \frac{8\bar{\epsilon}_2^2 + 9\bar{\epsilon}_2\bar{\epsilon}_0 + 3\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_3' \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\bar{\epsilon}_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{44}} (\bar{\epsilon}_0 E_2^0 + \frac{2\bar{\epsilon}_0^2}{5} E_4^0 + E_6) - \frac{\bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_0^2}{2} \frac{B_{12}^*}{B_{44}} E_8 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_2' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{12}'}{B_{44}'} (\delta_0^2 E_2^0 + E_8) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_2' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right), \\
M_2^* = & \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{55}^0} (\delta_0 E_1^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_3^0 + E_5) - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} E_7 - \right. \\
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_1' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} (\delta_0^2 E_1^0 + E_7) + \\
& + \left. \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{12}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_1' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{22}^0}{B_{44}^0} (\delta_0 E_2^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_4^0 + E_8) - \right. \\
& - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} E_8 - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_2' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} (\delta_0^2 E_2^0 + E_8) + \\
& + \left. \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{22}'}{B_{44}'} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_2' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) \right\}, \quad (2.11) \\
H^* = & \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{55}^0} (\delta_0 E_1^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_3^0 + E_5) - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} E_7 - \right. \\
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_1' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) - \\
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} (\delta_0^2 E_1^0 + E_7) + \\
& + \left. \frac{(\delta_2 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{66}'}{B_{55}^0} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_1' - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3' \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ - \frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} (\delta_0 E_2^0 + \frac{2\delta_0^2}{5} E_4^0 + E_8) - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}'}{B_{44}^0} E_8 - \right. \\
& - \frac{(\delta_1 - \delta_0)^3}{12} \frac{B_{66}'}{B_{44}^0} \left(\frac{5\delta_1 + 3\delta_0}{2} E_2' + \frac{8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_4' \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta_2^2 - \delta_0^2}{2} \frac{B_{66}}{B_{44}} (\delta_0^2 E_2^* + E_3) + \\
& + \frac{(\delta_2 - \delta_0)^2}{12} \frac{B_{66}}{B_{44}} \left(\frac{5\delta_2 + 3\delta_0}{2} E_2^* - \frac{8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2}{5} E_3^* \right) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Внутренние силы (2.7) и моменты (2.8) в случае, когда оболочка нагружена лишь нормально приложенной нагрузкой, должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0, \\
\frac{1}{A} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} &= 0,
\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 - \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} \right) + q = 0.$$

Подставляя значения сил и моментов из (2.7) и (2.8) в (2.12), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно перемещений u , v и w :

$$\begin{aligned}
& \left(C_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \\
& + (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \left[K_{11} \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] w = \\
& = - \frac{1}{A} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial S^*}{\partial \beta}, \\
& (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + \left(C_{66} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v + \\
& + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + K_{22} \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] w = \\
& = - \frac{1}{A} \frac{\partial S^*}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial T_2^*}{\partial \beta}, \\
& (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} - \left[K_{11} \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] u + \\
& + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + K_{22} \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] v + \\
& + \left\{ k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22} \right\} - \\
& - 2 \left[(k_1 K_{11} + k_2 K_{12}) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (k_1 K_{12} + k_2 K_{22}) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] + \\
& + \left[D_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] w =
\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$= -q - (\kappa_1 T_1^* + \kappa_2 T_2^*) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H^*}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2}.$$

Здесь очевидно, что граничные условия задачи ничем не отличаются от обычных граничных условий.

Впервые аналогичная теория для двухслойных анизотропных оболочек была построена в работе [1].

Рассмотрим частные случаи.

3. Прямоугольная шарнирно-опертая по контуру пластинка, слою которой симметрично расположены относительно координатной поверхности, несет нагрузку, распределенную по закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi \alpha}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}. \quad (3.1)$$

Оси координат выбраны так, что $A = B = 1$.

Как показывают наши исследования, в общем случае трехслойной пластинки, когда слой расположены несимметрично относительно координатной поверхности, перемещения координатной поверхности представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_0 (1 + \lambda_1), \\ v &= v_0 (1 + \lambda_2), \\ w &= w_0 (1 + \lambda_3), \end{aligned} \quad (3.2)$$

но значения λ_i здесь не приводим ввиду их чрезвычайной громоздкости.

Для рассматриваемой пластинки имеем:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 = \delta, \\ B_{ik}^* &= B_{ik}^0 = B_{ik}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В силу (3.3) выражения для жесткостей (2.9) принимают вид:

$$\begin{aligned} K_{ik} &= 0, \\ C_{ik} &= 2 [\delta_0 B_{ik}^0 + (\delta - \delta_0) B_{ik}], \\ D_{ik} &= \frac{2}{3} [\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для решения этой задачи надо полагать [3.4]:

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (3.5)$$

В рассматриваемом случае на основании (3.5) и (3.2) имеем:

$$u = v = 0. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.5) и (3.6), из (2.10) получаем

$$T_1^* = T_2^* = S^* = 0. \quad (3.7)$$

При этом первые два уравнения системы (2.13) будут удовлетворяться тождественно, а последнее уравнение примет вид:

$$\left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] w =$$

$$= -q + \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2}, \quad (3.8)$$

где

$$M_1^* = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2\delta_0}{3} \frac{B_{11}^0}{B_{55}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}}{B_{55}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}}{B_{55}} E_3 \Big\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{44}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{44}} E_4 \Big\},$$

$$M_2^* = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{12}^0}{B_{55}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{55}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{12}}{B_{55}} E_3 \Big\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{22}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{22}}{B_{44}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_4 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{22}}{B_{44}} E_4 \Big\}, \quad (3.9)$$

$$H^* = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{55}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) - \right.$$

$$- \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{66}}{B_{55}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_3 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_3 \right) -$$

$$- \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{66}}{B_{55}} E_3 \Big\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2\delta_0^3}{3} \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{2\delta_0^2}{5} E_4^0 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \right. \\
& - \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2) \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} \left(\frac{\delta_0^2}{3} E_4^0 + \frac{\delta^2 - \delta_0^2}{2} E_4 \right) - \\
& \left. - \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{66}^0}{B_{44}^0} E_4 \right\}, \\
& E_3^i = \left[B_{11}^i \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2} \right] w_0, \\
& E_4^i = \left[(B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta} + B_{22}^i \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] w_0.
\end{aligned}$$

При (3.1) решение задачи трехслойной симметрично собранной, опертой по контуру прямоугольной пластинки, в случае принятия гипотезы недеформируемых нормалей, представляется в виде [4]:

$$w_0 = \bar{w}_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \quad (3.10)$$

где

$$\bar{w}_0 = \frac{q_0}{\pi^4 \left[\frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right]}. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом, решение уравнения (3.8) ищем в форме:

$$w = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \quad (3.12)$$

что удовлетворяет условиям свободного опирания по контуру.

Подставляя (3.9), (3.10), (3.12) в (3.8) и учитывая (3.11), для прогиба w получаем:

$$\begin{aligned}
w = \bar{w}_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{D_{np}} \left[\frac{4\delta_0^5}{15} \left(\frac{d_{01}^2}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{02}^2}{b^2 B_{44}^0} \right) + \right. \right. \\
+ \frac{2\delta_0^3}{3} (\delta^2 - \delta_0^2) \left(\frac{d_{01} d_{11}}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{02} d_{12}}{b^2 B_{44}^0} \right) + \frac{1}{2} \delta_0 (\delta^2 - \delta_0^2)^2 \left(\frac{d_{11}^2}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{12}^2}{b^2 B_{44}^0} \right) + \\
\left. \left. + \frac{1}{30} (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \left(\frac{d_{11}^2}{a^2 B_{55}^0} + \frac{d_{12}^2}{b^2 B_{44}^0} \right) \right] \right\}, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{01} &= \frac{B_{11}^0}{a^2} + \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{b^2}, & d_{11} &= \frac{B_{11}^0}{a^2} + \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{b^2}, \\
d_{02} &= \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{a^2} + \frac{B_{22}^0}{b^2}, & d_{12} &= \frac{B_{12}^0 + 2B_{66}^0}{a^2} + \frac{B_{22}^0}{b^2},
\end{aligned} \quad (3.14)$$

$$D_{np} = \frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4}.$$

Как видно из (3.13), первый член формулы представляет собой прогиб пластинки, найденный по классической теории слоистых пластинок [4.7], а остальные члены — поправку к нему.

Численный пример. Рассмотрим квадратную ($b=a$) пластинку, составленную из трансверсально-изотропных слоев, плоскости изотропии которых параллельны координатной поверхности пластинки. При этом для коэффициентов упругости B'_{ij} имеем [1.4]: для крайних слоев

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad B_{12} = \frac{\mu E}{1 - \mu^2}, \\ B_{33} = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad B_{44} = B_{55} = G,$$

для среднего слоя

$$B_{11}^0 = B_{22}^0 = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2}, \quad B_{12}^0 = \frac{\mu_0 E_0}{1 - \mu_0^2}, \\ B_{33}^0 = \frac{E_0}{2(1 + \mu_0)}, \quad B_{44}^0 = B_{55}^0 = G_0,$$

где E , μ и E_0 , μ_0 — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно крайних и среднего слоев,

G , G_0 — модули сдвига соответственно крайних и среднего слоев, характеризующие искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярным к ней.

Для простоты расчета принимаем также $\mu = \mu_0 = 0$, $\frac{E}{G} = \frac{E_0}{G_0} = k$

и $\delta = 2\delta_0 = \frac{h}{2}$. Тогда из (3.13) для прогиба пластинки получим:

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{160} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot k \cdot \frac{8 + 113n + 135n^2}{1 + 7n} \right\},$$

где $n = \frac{E}{E_0}$, h — толщина пластинки.

В таблице 1 даются значения отношения $\frac{w}{w_0}$ при $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$, для различных значений n и k .

Таблица 1

$n \backslash k$	2	5	10
1	1.0395	1.0987	1.1974
2	1.0637	1.1591	1.3183
5	1.1353	1.3382	1.6765
10	1.2544	1.6359	2.2718
20	1.4214	2.0535	3.1070
0,5	1.0269	1.0673	1.1347
0,2	1.0185	1.0463	1.0925
0,1	1.0150	1.0375	1.0749
0,05	1.0128	1.0320	1.0639

В этой таблице столбец $k=2$ относится к случаю, когда все слои пластинки состоят из изотропных материалов.

4. Осесимметрично нагруженная круговая цилиндрическая оболочка длиной l свободно опирается по торцам и несет распределенную нагрузку q , которая по поверхности оболочки изменяется по закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4.1)$$

При этом очевидно, что все величины не зависят от координаты β .

В рассматриваемом случае имеем:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}, \quad v = v_0 = 0, \quad (4.2)$$

$$S = S^* = H = H^* = 0.$$

В силу (4.2) система (2.13) принимает вид:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{C_{12}}{R} \frac{d}{dx} - K_{11} \frac{d^3}{dx^3} \right) w &= - \frac{dT_1^*}{dx}, \\ \left(\frac{C_{12}}{R} \frac{d}{dx} - K_{11} \frac{d^3}{dx^3} \right) u + \left(\frac{C_{22}}{R^2} - \frac{2K_{12}}{R} \frac{d^2}{dx^2} + D_{11} \frac{d^4}{dx^4} \right) w &= \\ &= -q - \frac{T_2^*}{R} + \frac{d^2 M_1^*}{dx^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} T_1^* &= a_1 \frac{d^3 u_0}{dx^3} + \left(b_1 \frac{d^2}{dx^2} + b_2 \frac{d^4}{dx^4} \right) w_0, \\ \frac{T_2^*}{R} &= a_2 \frac{d^3 u_0}{dx^3} + \left(b_3 \frac{d^2}{dx^2} + b_4 \frac{d^4}{dx^4} \right) w_0, \\ M_1^* &= -a_3 \frac{d^3 u_0}{dx^3} - \left(b_5 \frac{d^2}{dx^2} + b_6 \frac{d^4}{dx^4} \right) w_0, \\ a_1 &= - \frac{\delta_0^2 B_{11}^0}{6B_{55}^0} [2\delta_0 B_{11}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + \\ &+ \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}^1}{B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^2}{3B_{55}^0} + \\ &+ (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^2}{3B_{55}^0}, \\ b_1 &= - \frac{\delta_0^2 B_{12}^0}{6RB_{55}^0} [2\delta_0 B_{11}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + \\ &+ \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}^1}{RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}^1 - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}^2] + \\ &+ (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^1 B_{12}^1}{3RB_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11}^1 B_{12}^1}{3RB_{55}^0}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
b_2 = & \frac{\delta_0^3 B_{11}^0}{3B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}'}{2B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{11}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{11}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0}, \\
a_2 = & - \frac{\delta_0^2 B_{11}^0}{6RB_{55}^0} [2\delta_0 B_{12}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}'}{RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{11} B_{12}'}{3RB_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{11} B_{12}'}{2RB_{55}^0}, \\
b_3 = & - \frac{\delta_0^2 B_{12}^0}{6R^2 B_{55}^0} [2\delta_0 B_{12}^0 - 3(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' + 9(\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}'}{R^2 B_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 \frac{B_{12}^{'2}}{3R^2 B_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 \frac{B_{12}^{'2}}{3R^2 B_{55}^0}, \\
b_4 = & \frac{\delta_0^3 B_{11}^0}{3RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}'}{2RB_{55}^0} [(\delta_1 - \delta_0) B_{12}' - (\delta_2 - \delta_0) B_{12}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0}, \quad (4.5) \\
a_3 = & \frac{\delta_0^2 B_{11}^0}{12B_{55}^0} [8\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 9(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{11}'}{6B_{55}^0} [4\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 3(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11}^{'2}}{24B_{55}^0}, \\
b_5 = & \frac{\delta_0^2 B_{12}^0}{12RB_{55}^0} [8\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 9(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + \delta_0 (\delta_1 - \delta_0) \frac{B_{12}'}{6RB_{55}^0} [4\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 3(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] + \\
& + (\delta_1 - \delta_0)^3 (5\delta_1 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0} - (\delta_2 - \delta_0)^3 (5\delta_2 + 3\delta_0) \frac{B_{11} B_{12}'}{24RB_{55}^0},
\end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{\delta_0^3 B_{11}^0}{30 B_{55}^0} [8\delta_0^2 B_{11}^0 + 5(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 5(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] +$$

$$+ \delta_0 (\delta_1^2 - \delta_0^2) \frac{B_{11}'}{12 B_{55}^0} [4\delta_0^2 B_{11}^0 + 3(\delta_1^2 - \delta_0^2) B_{11}' + 3(\delta_2^2 - \delta_0^2) B_{11}'] +$$

$$+ (\delta_1 - \delta_0)^3 (8\delta_1^2 + 9\delta_1\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}'}{60 B_{55}^0} + (\delta_2 - \delta_0)^3 (8\delta_2^2 + 9\delta_2\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}'}{60 B_{55}^0}.$$

При (4.1) решение поставленной задачи, с учетом гипотезы недеформируемых нормалей, представляется в виде:

$$w_0 = \bar{w}_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_0 = \bar{u}_0 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (4.6)$$

где

$$\bar{w}_0 = \frac{a_{11} q_0}{\Delta}, \quad \bar{u}_0 = \frac{a_{12} q_0}{\Delta},$$

$$a_{11} = \frac{\pi^2}{l^2} C_{11}, \quad a_{12} = \frac{\pi}{l} \left(\frac{C_{12}}{R} + \frac{\pi^2}{l^2} K_{11} \right), \quad (4.7)$$

$$a_{22} = \frac{C_{22}}{R^2} + \frac{2\pi^2 K_{12}}{R l^2} + \frac{\pi^4}{l^4} D_{11}, \quad \Delta = -(a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

Аналогичным образом, решения системы (4.3) ищем в форме:

$$w = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u = \bar{u} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (4.8)$$

что удовлетворяет условиям свободного опирания по торцам.

Подставляя (4.4), (4.6), (4.8) в (4.3) и учитывая (4.7), для перемещений получаем:

$$u = u_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta a_{12}} \left[a_{12} (A_2 a_{12} - A_1 a_{22}) + a_{11} (B_1 a_{22} - B_2 a_{12}) \right] \right\}, \quad (4.9)$$

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta a_{11}} \left[a_{12} (A_2 a_{11} - A_1 a_{12}) + a_{11} (B_1 a_{12} - B_2 a_{11}) \right] \right\}, \quad (4.10)$$

где

$$A_1 = \frac{\pi^4}{l^4} a_1, \quad A_2 = \frac{\pi^3}{l^3} \left(a_2 - \frac{\pi^2}{l^2} a_3 \right),$$

$$B_1 = \frac{\pi^3}{l^3} \left(b_1 - \frac{\pi^2}{l^2} b_2 \right), \quad B_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \left[b_3 - \frac{\pi^2}{l^2} (b_4 + b_5) + \frac{\pi^4}{l^4} b_6 \right].$$

Если слои симметрично расположены относительно координатной поверхности, то $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $B_{ik}' = B_{ik}'' = B_{ik}$ и, следовательно,

$$K_{ik} = 0,$$

$$C_{ik} = 2 [\delta_0 B_{ik}^0 + (\delta - \delta_0) B_{ik}],$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik} \right].$$

При этом выражения для перемещений (4.9) и (4.10) примут вид:

$$u = u_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{l^2} \left[\frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\pi^4}{l^4} b_7 + b_8 \right) + b_9 \right] \right\}, \quad (4.11)$$

$$\omega = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\pi^4}{l^4} b_7 + b_8 \right) \right\}, \quad (4.12)$$

где

$$u_0 = - \frac{q_0}{\Delta_1} \frac{l}{\pi R} \frac{C_{12}}{C_{11}} \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$\omega_0 = - \frac{q_0}{\Delta_1} \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\Delta_1 = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{R^2 C_{11}} + \frac{\pi^4}{l^4} D_{11},$$

$$b_7 = \frac{\delta_0}{B_{55}^0} \left[\frac{4\delta_0^4}{15} (B_{11}^0)^2 + \frac{2}{3} \delta_0^2 (\delta^2 - \delta_0^2) B_{11}^0 B_{11} + \frac{1}{2} (\delta^2 - \delta_0^2)^2 B_{11}^0 \right] +$$

$$+ (\delta - \delta_0)^3 (8\delta^2 + 9\delta\delta_0 + 3\delta_0^2) \frac{B_{11}^2}{30 B_{55}},$$

$$b_8 = \frac{8\delta_0^2 (\delta - \delta_0)^2}{3 R^2 C_{11}^2} (B_{11}^0 B_{12} - B_{11} B_{12}^0)^2 \left(\frac{\delta - \delta_0}{B_{55}} + \frac{\delta_0}{B_{55}^0} \right),$$

$$b_9 = \frac{2\delta_0 (\delta - \delta_0)}{C_{11} C_{12}} (B_{11} B_{12}^0 - B_{11}^0 B_{12}) \left\{ \frac{2}{3} (\delta - \delta_0)^2 \frac{B_{11}}{B_{55}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_0}{B_{55}^0} \left[\frac{\delta_0}{3} B_{11}^0 + (\delta - \delta_0) B_{11} \right] \right\}.$$

Численный пример. Для простоты расчета рассмотрим случай, когда слои симметрично расположены относительно координатной поверхности оболочки и изготовлены из трансверсально-изотропных материалов, плоскости изотропии которых в каждой точке каждого слоя параллельны срединной поверхности оболочки. Кроме того, как и в п. 3, принимаем $\mu = \mu_0 = 0$, $\frac{E_0}{G_0} = \frac{E}{G} = k$, $\delta = 2\delta_0 = \frac{h}{2}$.

В силу этого из (4.11) и (4.12) получим:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\pi^2}{320} \frac{h^2}{l^2} \frac{k(8 + 113n + 135n^2)}{1 + 7n + \frac{48}{\pi^4} \frac{l^4}{R^2 h^2} (1 + n)},$$

где h — полная толщина оболочки, $n = \frac{E}{E_0}$.

В таблице 2 даны значения $\frac{w}{w_0}$ или $\left(\frac{u}{u_0}\right)$ при $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$, $\frac{l}{R} = 1$ для различных значений n и k .

Таблица 2

$n \backslash k$	2	5	10
1	1,0015	1,0037	1,0074
2	1,0029	1,0073	1,0147
10	1,0147	1,0368	1,0735
0.5	1,0008	1,0019	1,0039

5. Из рассмотренных численных примеров, результаты которых приведены в таблицах 1 и 2, замечаем, что при увеличении $n = \frac{E}{E_0}$ прогиб w начинает больше отличаться от w_0 и эта разница тем больше, чем больше k . При уменьшении n , даже при больших значениях k , w мало отличается от w_0 . Это значит, что если материал среднего слоя жестче материала крайних слоев, то классическая теория слоистых пластин и оболочек, основанная на гипотезе Кирхгоффа-Лява, даст достаточно хорошие результаты. А когда материал среднего слоя существенно слабее материала крайних слоев, как видно из вышеприведенных примеров, необходимо считаться с поправками к классической теории.

Но надо отметить, что эти замечания в основном относятся к пластинкам. В случае же осесимметричной цилиндрической оболочки (п. 4) эта поправка незначительна, и это естественно, так как в этом случае главную роль играет безмоментная часть напряжений [8], чем и объясняется незначительность поправки, даже при больших значениях n и k .

Институт математики и механики
АН Армянской ССР.

Поступила 28 V 1959

Ս. Ս. Խաչատրյան

ԵՌԱՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հորիզոնական դիտարկում են կապերով օրթոտրոպ փաթր կորույթուն աճնկող թաղանթներ:

Առաջարկող տեսության հիմքում ընկած են անիզոտրոպ թաղանթների համար Ս. Ս. Համբարձումյանի կողմից արված հետևյալ ընդունելությունները.

1. Թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ դժային էլիմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունները,

2. ε_{γ} նորմալ լարումները էական ազդեցություն են ունենում ε_{xx} , ε_{yy} և ε_{xy} զեֆորմացիաների վրա,

3. $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ և $\varepsilon_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ոչնչով չեն տարբերվում Կիրիսովի հիպոթեզի ընդունման ժամանակ ստացված համապատասխան շոշափող լարումներից:

Ընդունված ենթադրությունների հիման վրա շարադրված է օրթոտրոպ եռաշերտ փոքր կորություն ունեցող թաղանթների ընդհանուր տեսությունը: Լուծված են հետևյալ խնդիրները՝

ա) եզրերով ազատ հենված ուղղանկյան սալի ծուռքը, երբ շերտերը սիմետրիկ են դասավորված միջին մակերևույթի նկատմամբ,

բ) առանցքասիմետրիկ բևեռավորված, միջին մակերևույթի նկատմամբ ոչ սիմետրիկ շերտերով կտր դասալին թաղանթը, որից օրպես մասնավոր դեպք ստացված է հաս սիմետրիկ դասավորված շերտերի դեպքը: Արդյունքները համեմատված են կլասիկ տեսությամբ ստացվող համապատասխան արդյունքների հետ և ցույց է տրվում, որ դրանք բավականաչափ տարբերվում են իրարից և այդ տարբերությունը մեծ է հատկապես սալերի դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН АрмССР, X, 2, 1957.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Амбарцумян С. А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, VIII, 5, 1948.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
5. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
6. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. ДАН АрмССР, XI, 2, 1949.
7. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, VI, 3, 1953.
8. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, XII, 1, 1959.

Ф. Р. Арутюнян

Упругое рассеяние протонов на ядрах

В настоящей работе исследовано рассеяние протонов с энергией от 66 до 195 Мэв в свинцовых пластинах толщиной 7 и 4 мм и от 40 до 72 Мэв в медных пластинах толщиной 5 и 2 мм, расположенных в камере Вильсона. Отбирались протоны космического излучения, ионизационно остановившиеся в пластинах камеры Вильсона, импульс которых до входа их в камеру измерялся магнитным масс-спектрометром. Предварительные данные по исследованию многократного рассеяния протонов были нами опубликованы в работе [1].

Исследуемые протоны в зависимости от их импульса были разделены на четыре группы (I, II, III, IV).

При сравнении экспериментально полученных распределений углов рассеяния с теоретическими кривыми многократного кулоновского рассеяния, следует учитывать ряд поправок и уточнений, связанных с неопределенностью в измерении импульса в точке рассеяния, реальной толщиной рассеивающих пластин, учетом геометрии прибора и т. п. факторов.

Все эти уточнения детально обсуждаются нами в работе [2].

Для исследования рассеяния протонов были отобраны 2000 частиц, измеренное значение масс которых лежит в интервале $1500 \div 2300 m_e$ и которые дают около 7000 исследуемых случаев рассеяния.

Условия отбора протонов для исследования их рассеяния такие, что можно наблюдать только упругое рассеяние. При неупругом рассеянии протона, масса его, измеренная по импульсу и пробегу, будет намного больше правильной массы протона, поэтому такие случаи не исследуются. Но существует разброс масс протонов из-за ошибок в измерении импульса и пробега. Если предположить, что измеренное значение массы протона дало верхний предел отбираемого интервала масс протонов — $2300 m_e$ не из-за ошибок, а за счет неупругого рассеяния, то величина передаваемого при этом импульса будет равна $\Delta p_{\text{неуп.}} = 0,8 \cdot 10^8$ эв/с, что составляет всего 15% от импульса самой частицы.

Спектр масс протонов хорошо аппроксимируется кривой нормального распределения. Это указывает на то, что разброс масс обусловлен ошибками в измерении импульса и пробега, а не какими-либо неупругими процессами. Кроме того, сравнительно малое значение

$\Delta p_{\text{нестр.}}$ дает основание полагать, что изучаемое рассеяние является чисто упругим.

§ 1. К теории упругого рассеяния ядерно-активных частиц

При взаимодействии протонов и π -мезонов (ядерно-активных частиц) с ядрами, кроме рассеяния в чисто кулоновском поле, происходит их поглощение этими ядрами, что вызывает дополнительное возмущение падающей волны и, следовательно, приводит к дополнительному упругому рассеянию.

Это упругое рассеяние, обусловленное наличием поглощающего рассеивателя, в случае малых длин волны ($\lambda \ll R_{\text{я.}}$), аналогично дифракции света от абсолютно черного шара и потому называется дифракционным рассеянием.

Феноменологическая трактовка ядра как непрозрачного, поглощающего частицы, экрана возможна в тех случаях, когда энергия частиц не превосходит нескольких десятков Мэв для легких ядер и нескольких сотен Мэв для тяжелых. При больших энергиях частиц начинает сказываться прозрачность ядер для попадающих на них быстрых частиц.

При точном решении задачи о рассеянии заряженных ядерно-активных частиц, следует пользоваться общей теорией рассеяния, то есть по сумме амплитуд кулоновского и упругого ядерного рассеяний $f(\theta)$ определяется дифференциальное сечение упругого рассеяния по формуле

$$\sigma(\theta) d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (1)$$

Характер дифракционного рассеяния для заряженных и нейтральных частиц одинаков и различие между ними проявляется только в фазе амплитуды рассеяния.

Упругое рассеяние протонов на ядрах в области малых углов обуславливается преимущественно кулоновским рассеянием. С увеличением угла роль дифракционного рассеяния усиливается, так как при больших углах сечение дифракционного рассеяния в среднем обратно пропорционально кубу угла рассеяния, а не четвертой степени, как это имеет место при рассеянии в чисто кулоновском поле. По мере того, как сечение кулоновского рассеяния уменьшается и становится малым по сравнению с сечением дифракционного, рассеяние практически приобретает чисто ядерный характер.

Размеры ядра при рассеянии в кулоновском поле и дифракционное рассеяние начинают сказываться когда величина импульса, передаваемого рассеивающейся частицей, становится порядка "импульса ядра" — $\Delta p = p\theta \sim h/R_{\text{я.}}$, то есть при углах $\theta \gtrsim h/R_{\text{я.}}$ (когда частица пролетает на расстоянии $\sim R_{\text{я.}}$ от центра ядра). Следовательно, учет конечных размеров ядра в кулоновском рассеянии и учет дифракционного рассеяния нужно производить одновременно.

Рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле ядра и влияние конечных размеров ядра при этом детально обсуждаются в работе [3].

Для дифференциального поперечного сечения дифракционного рассеяния воспользуемся нейтронными данными для „абсолютно черного ядра“ [4]

$$\sigma_{\theta}(\theta) d\Omega = R^2 \left| \frac{I_1\left(\theta \frac{R}{\lambda}\right)}{\theta} \right|^2 d\Omega, \quad (2)$$

где $I_1\left(\theta \frac{R}{\lambda}\right)$ — функция Бесселя первого рода.

Дифференциальное сечение дифракционного рассеяния, для проекций углов рассеяния, будет определяться интегралом

$$\sigma_{\theta}(\theta_z) d\theta_z = 2R^2 \cdot d\theta_z \int_{\theta_z=0}^{\infty} \frac{I_1^2\left(\frac{R}{\lambda} \sqrt{\theta_z^2 + \theta_z^2}\right)}{\theta_z^2 + \theta_z^2} d\theta_z, \quad (3)$$

решение которого приводит к формуле

$$\sigma_{\theta}(\theta_z) d\theta_z = R\lambda \cdot H_1\left(2\theta_z \cdot \frac{R}{\lambda}\right) \frac{d\theta_z}{\theta_z^2}, \quad (4)$$

где $H_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} \sin zt dt$ является функцией Струве [5].

В области малых углов рассеяния, когда $\theta_z \ll \lambda/R$, то-есть при $\theta_z \frac{R}{\lambda} \ll 1$, функция Струве может быть заменена ее асимптотическим выражением

$$H_1\left(2\theta_z \frac{R}{\lambda}\right) = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \theta_z^3, \quad \theta_z \ll \lambda/R \quad (5)$$

и поэтому

$$\sigma_{\theta}(\theta_z) d\theta_z = \frac{8R^3}{3\pi\lambda} d\theta_z, \quad \theta_z \ll \lambda/R. \quad (6)$$

Таким образом, при очень малых углах, дифференциальное сечение стремится к постоянному пределу.

Если углы θ_z удовлетворяют условию $1 \gg \theta_z \gg \lambda/R$, то-есть $\theta_z \frac{R}{\lambda} \gg 1$, функция Струве может быть заменена ее асимптотическим выражением

$$H_1\left(2\theta_z \frac{R}{\lambda}\right) \simeq \frac{2}{\pi} + \left(\frac{\lambda}{\pi R \theta_z}\right)^{1/2} \sin\left(2\theta_z \frac{R}{\lambda} - \frac{3}{4}\pi\right), \quad (7)$$

$$1 \gg \theta_z \gg \lambda/R$$

и дифференциальное сечение дифракционного рассеяния имеет вид

$$\sigma_d(\theta_\varphi) d\theta_\varphi = \frac{2}{\pi} R \lambda \frac{d\theta_\varphi}{\theta_\varphi^2} + \left(\frac{\lambda^3 R}{\pi} \right)^{1/2} \sin \left(2\theta_\varphi \frac{R}{\lambda} - \frac{3}{4} \pi \right) \frac{d\theta_\varphi}{\theta_\varphi^{3/2}},$$

$$1 \gg \theta_\varphi \gg \lambda/R. \quad (8)$$

Эффективное сечение рассеяния в этой области углов состоит из двух составляющих. Первая постоянная составляющая убывает обратно пропорционально квадрату угла рассеяния, вторая же составляющая осциллирует с частотой $2 \frac{R}{\lambda}$, причем амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально степени $5/2$ угла рассеяния.

В области больших углов рассеяния $\left(\theta_\varphi \frac{R}{\lambda} \gg 1 \right)$, где сечение кулоновского рассеяния становится очень малым по сравнению с сечением дифракционного, а следовательно не играет роли и их интерференция, рассеяние практически становится чисто дифракционным.

Из формулы (8) можно получить интегральное поперечное сечение дифракционного рассеяния, для проекций углов рассеяния более чем θ_ϕ , в виде двух интегралов

$$\sigma(\theta_\varphi > \theta_\phi) = 2 \left\{ \frac{2}{\pi} R \lambda \int_{\theta_\phi}^{\infty} \frac{d\theta_\varphi}{\theta_\varphi^2} + \left(\frac{\lambda^3 R}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\theta_\phi}^{\infty} \sin \left(2\theta_\varphi \frac{R}{\lambda} - \frac{3}{4} \pi \right) \frac{d\theta_\varphi}{\theta_\varphi^{3/2}} \right\}. \quad (9)$$

Второй интеграл равен нулю и

$$\sigma(\theta_\varphi > \theta_\phi) = \frac{4}{\pi} R \lambda \frac{1}{\theta_\phi}. \quad (10)$$

Это сечение, отнесенное к геометрическому, будет

$$\frac{\sigma(\theta_\varphi > \theta_\phi)}{\sigma_{\text{геометр.}}} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\lambda}{R} \frac{1}{\theta_\phi}. \quad (11)$$

Из формул для дифференциальных сечений кулоновского рассеяния

$$\sigma_k = 8\pi\alpha^2\lambda^2 F_{\text{яд}} \frac{d\theta}{\theta^2}, \quad (\alpha = Ze^2/\hbar v) \quad (12)$$

и дифракционного рассеяния (12) видно, что при малых углах кулоновский поперечник забывает ядерный и обратное явление имеет место при больших углах. При некотором угле θ_1 эти сечения долж-

ны сравниваться. Из формул (2) и (12) можно показать, что грубо $\theta_1 \approx \alpha(\lambda/R)$ (см. также [4]).

Если угол θ_1 значительно превышает характеристический угол многократного рассеяния $\chi_c B^{1/2} (\alpha \gg 1)$, то кулоновское взаимодействие остается преобладающим над ядерным в интересующей нас области углов. Тогда законно учитывать размеры ядра, которые сказываются при углах λ/R , и не учитывать ядерного рассеяния, которое становится порядка кулоновского при углах, много больших чем λ/R .

При $\alpha \sim 1$ влияние размеров ядра и ядерного рассеяния — эффекты одного порядка, а при $\alpha \gg 1$ ядерное рассеяние сказывается значительно раньше, чем ядерный форм-фактор в кулоновском рассеянии.

Действительное положение вещей значительно сложнее из-за отсутствия теоретических и экспериментальных данных для точного дифференциального сечения однократного рассеяния.

В общем случае, дифференциальное сечение полного упругого рассеяния имеет вид [4]

$$\sigma_n(\theta) d\Omega = \sigma_p(\theta) N \left(\theta \frac{R}{\lambda}, \alpha \right) d\Omega, \quad (13)$$

где N — множитель, определяющий отклонение сечения от формулы Резерфорда, то-есть он учитывает одновременно влияние конечных размеров ядра и дифракционного рассеяния.

Если следовать расчетам [4], то можно просто использовать коэффициент N , на который надо умножить сечение рассеяния по Резерфорду, чтобы получить правильную формулу сечения однократного рассеяния, на основании которой далее уже получить кривую многократного рассеяния, с которой и должны сравниваться полученные экспериментальные данные.

§ 2. Экспериментальные результаты и их обсуждение

После всех необходимых поправок и уточнений, анализ которых приводится в [2], строились угловые распределения углов рассеяния для протонов.

На рис. 1, 2, 3 и 4 представлены экспериментально полученные распределения углов рассеяния протонов для каждой группы (I, II, III, IV) в отдельности для рассеивателя толщиной 7 мм Pb и соответствующие теоретические кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного (1) и протяженного (2) ядер, а на рис. 5 — для всех четырех групп вместе.

Сравним эти данные с расчетами работы [4] и имеющимися экспериментальными данными по рассеянию протонов на ядрах. Экспериментальных данных по рассеянию протонов в области малых углов рассеяния, где в основном имеет место многократное кулоновское рассеяние, в исследуемых областях энергий и вещества нет.

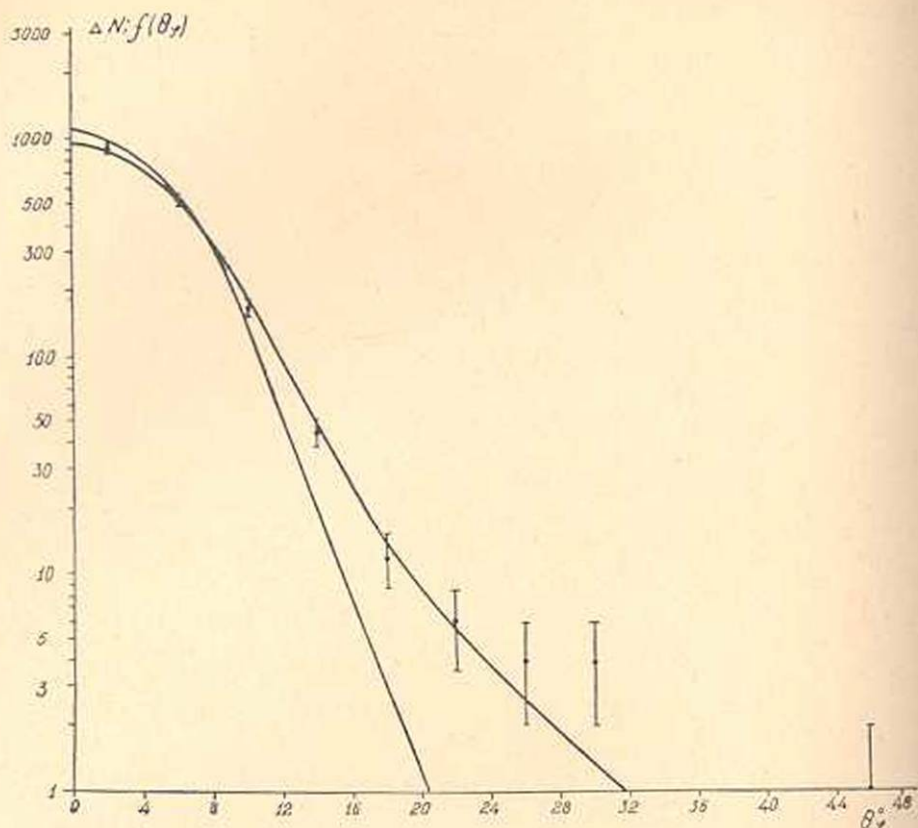


Рис. 1. Дифференциальное распределение углов рассеяния для протонов в свинцовых пластинах толщиной 7 мм для группы 1 [$p = (4,6 \pm 0,25) \times 10^9$ эв/с] и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного и протяженного ядер. $N = 1668$.

Имеется серия экспериментальных работ [6—14], которые дают зависимость $N = \frac{\sigma_n}{\sigma_p}$ от угла рассеяния для протонов с энергией от 6,5 Мэв до 22 Мэв для различных элементов. Наиболее полные данные содержатся в работе [14], где исследовано рассеяние протонов с энергией 22 Мэв на многих элементах от Be до Th, которые и используются для сравнения. Из этих кривых видно, что когда $\alpha \ll 1$ (для легких ядер), то N в среднем больше единицы, причем для очень легких элементов (Be) значение N достигает 50, для тяжелых же элементов $N \lesssim 1$.

Если эти экспериментальные данные объяснить в свете теоретических расчетов [4], то кривые N зависят только от величины α . Имея интервал скоростей исследуемых протонов ($\beta = 0,44 \div 0,55$ для свинцовых пластин и $\beta = 0,3 \div 0,35$ для медных), можно определить величину α для них: $\alpha_{pb} = 1,37 \div 1,1$ и $\alpha_{cu} = 0,723 \div 0,625$. Далее, определяются те эквивалентные элементы для протонов с энергией 22

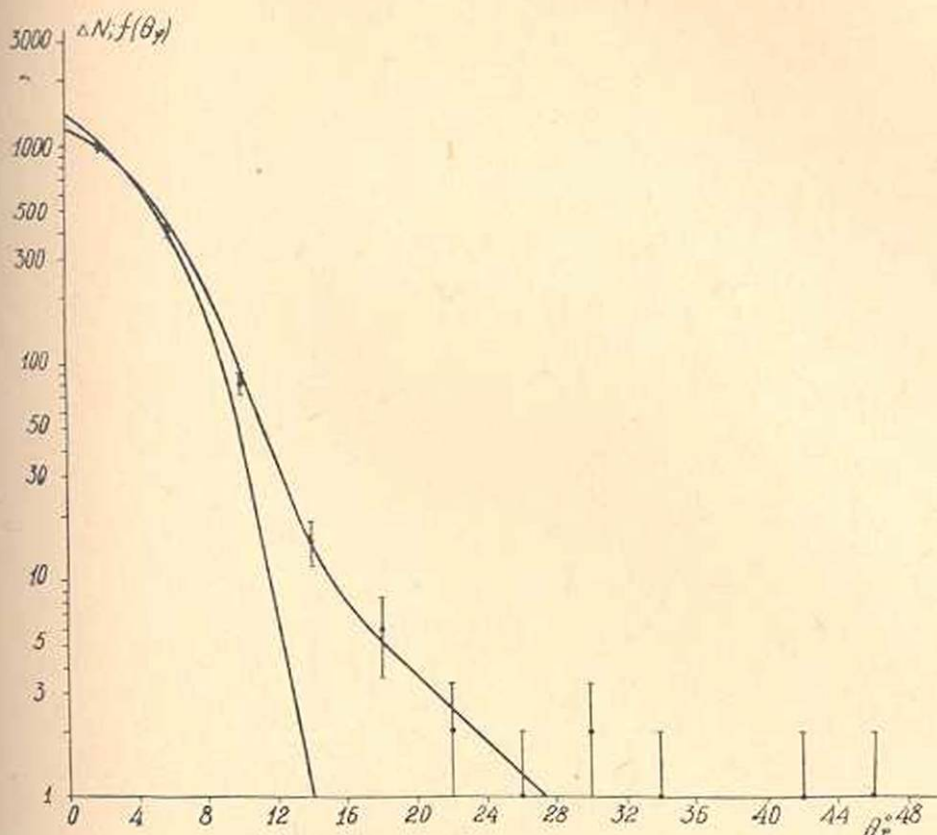


Рис. 2 Дифференциальное распределение углов рассеяния для протонов в свинцовых пластинах толщиной 7 мм для группы II [$p = (5,15 \pm 0,24) \times 10^5$ эв/с] и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного и протяженного ядер. $N = 1470$.

Мэв, которые соответствуют полученным значениям α_{Pb} и α_{Cu} по соотношению $Z_{экв.} = 137 \alpha^2 E = 22$ экв.

Таковыми элементами для свинцовых и медных пластин оказались соответственно Nb и Fe .

В таблицах 1 и 2 приведены значения коэффициента N соответственно для свинцовых (из кривой для Nb) и медных (из кривой для Fe) пластин в области тех углов, которые исследуются. Заметим, что углу рассеяния исследуемых энергий и вещества соответствует другой угол для протонов с энергией 22 Мэв и эквивалентного вещества, который получается из равенства значений $\theta \frac{R}{\lambda}$ для них.

В тех же таблицах 1 и 2 приведены значения N согласно расчетам работы [4] для двух различных значений α ($\alpha = 0,2$ и $\alpha = 1,73$).

Значения N по экспериментальным данным мало отличаются от единицы по всему интервалу исследуемых углов.

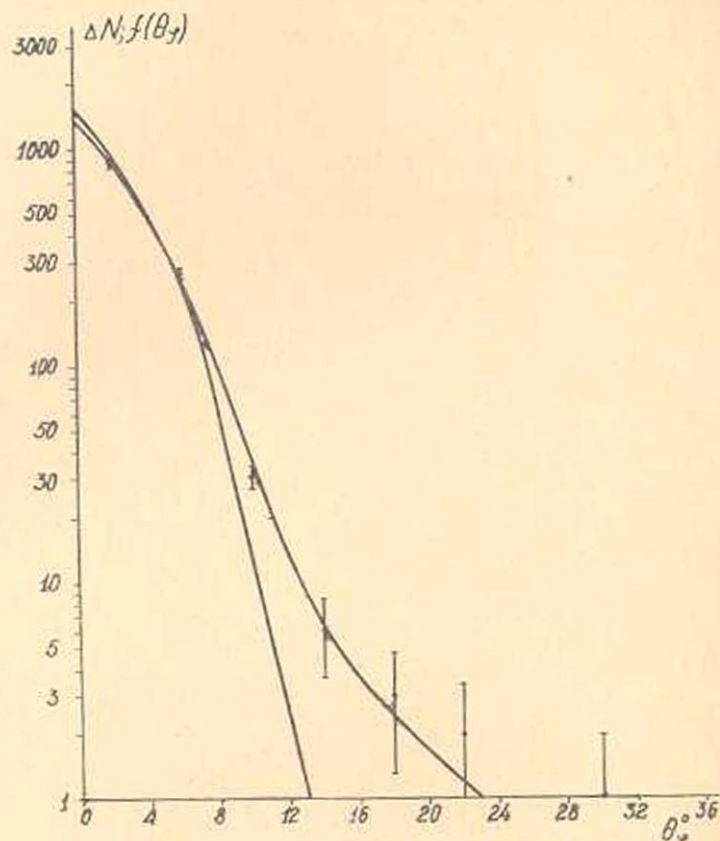


Рис. 3. Дифференциальное распределение углов рассеяния для протонов в свинцовых пластинах толщиной 7 мм для групп III [$p = (5,6 \pm 0,24) \times 10^9$ эв/с] и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного и протяженного ядер. $N = 1200$.

Имеющиеся отклонения значений N от единицы, а следовательно и отклонение полного сечения однократного рассеяния от формулы

Таблица 1

θ°	$N\left(\theta \frac{R}{\lambda}, \alpha\right)$		
	по [4] $\alpha=0,2$	по [4] $\alpha=1,73$	по [14]
0	1,00	1,00	1,00
4	7,10	3,50	1,10
8	12,10	6,40	1,20
12	5,00	2,60	1,20
16	—	—	1,00
20	—	—	0,90
24	—	—	0,70
28	—	—	1,00
32	—	—	1,10
36	—	—	1,30
40	—	—	1,00

Таблица 2

θ°	$N\left(\theta \frac{R}{\lambda}, \alpha\right)$		
	по [4] $\alpha=0,2$	по [4] $\alpha=1,73$	по [14]
0	1,00	1,00	1,00
2	1,00	1,00	1,00
4	1,00	1,00	1,00
6	3,40	1,00	1,00
8	4,00	1,40	1,05
10	4,20	1,50	1,15
12	5,60	2,00	1,20
14	6,50	3,40	1,17
16	9,00	5,50	1,10

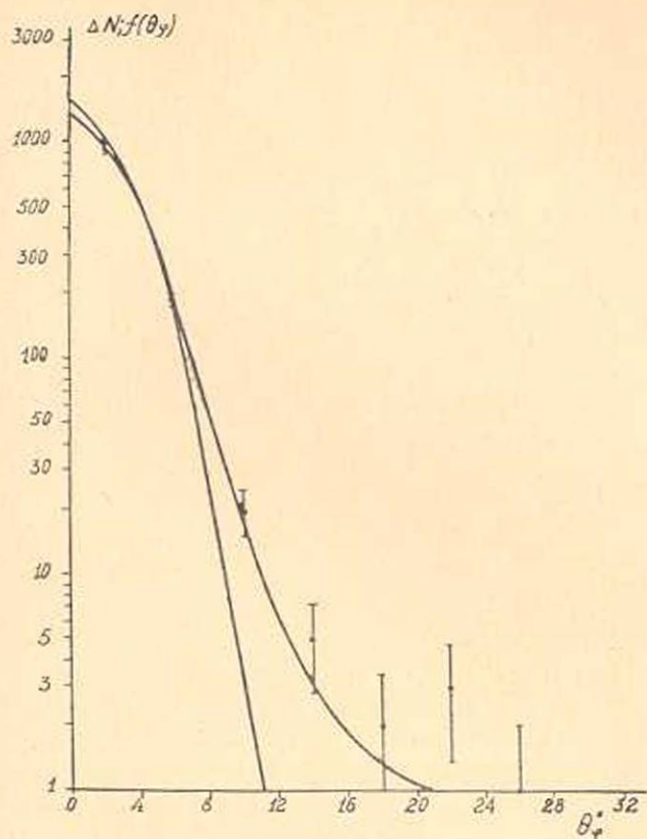


Рис. 4. Дифференциальное распределение углов рассеяния для протонов в свинцовых пластинах толщиной 7 мм группы IV [$p = (5,6 \pm 0,21) \times 10^8$ эв/с] и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного и протяженного ядер. $N = 1169$.

Резерфорда, почти не отразится на кривой многократного рассеяния. Это видно из того, что такое же отличие величины $F_{\text{яд.}} \left(\theta \frac{R}{\lambda} \right)$ от единицы при $\theta \sim (0,5 \div 1,0) \frac{\lambda}{R}$ [3] почти не изменяет кривую многократного рассеяния для точечного ядра.

Значения N по расчетам работы [4] значительно завышены. Это завышение возможно из-за того, что в них не учитывалась диффузность краев ядра, а также, возможно, существующая некоторая его прозрачность. Что касается степени черноты, то для нейтронов и протонов с энергией от 15 до 150 Мэв, длина пробега в ядерном веществе примерно постоянная, изменяясь от 3×10^{-13} см до 4×10^{-13} см [15].

Таким образом, полученные результаты (рис. 1, 2, 3, 4 и 5) по рассеянию протонов с энергией от 95 до 195 Мэв в свинцовых пла-

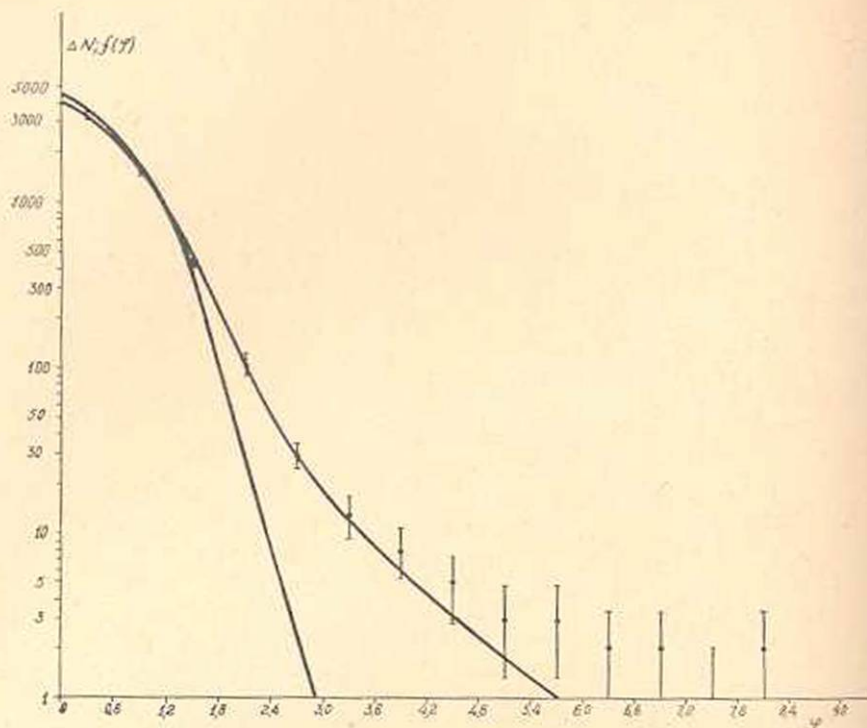


Рис. 5. Дифференциальное распределение углов рассеяния для протонов в свинцовых пластинах толщиной 7 мм по всем группам вместе [$p = (4,35 \div 6,33) \times 10^8$ эв/с] и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного (1) и протяженного (2) ядер. $N = 5507$.

стинах толщиной 7 мм хорошо согласуются с экспериментальными данными работы [14], полученными для протонов с энергией 22 Мэв. Экспериментальные данные хорошо согласуются с кривой многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра ($N = 1$). Заметим, что сравнение и с другими экспериментальными данными [6—13] по рассеянию протонов с энергией от 6,5 до 18 Мэв, дает для имеющих значений α тот же результат.

Экспериментальных данных по рассеянию протонов с энергией от 66 до 199 Мэв в свинцовых пластинах толщиной 4 мм сравнительно меньше и поэтому не производится их разделение на группы, а приводится полная кривая (рис. 6) для всех групп, взятых вместе. Из этой кривой видно, что экспериментальные данные хорошо согласуются опять таки с кривой многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра.

Экспериментальные данные по рассеянию протонов с энергией от 40 до 72 Мэв в медных пластинах толщиной 5 мм и 2 мм соответственно представлены на рис. 7. Эти данные сравниваются только с кривой многократного кулоновского рассеяния для точечно-

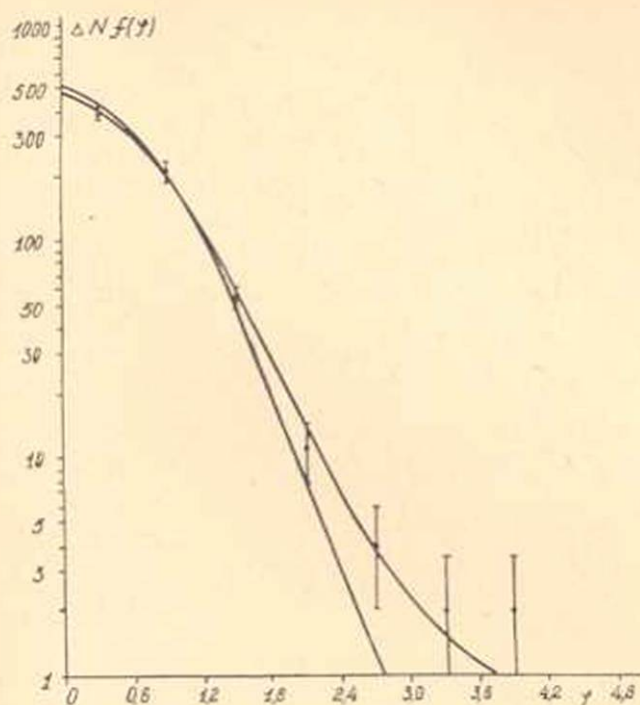


Рис. 6. Дифференциальное распределение углов рассеяния для протонов в свинцовых пластинах толщиной 4 мм [$p = (3.55 - 4.6) \times 10^8$ эв/с] и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного и протяженного ядер. $N = 680$.

го ядра, ибо для ядра меди и исследуемых энергий протонов влияние конечных размеров ядра ничтожное.

В то время, как характеристические углы многократного кулоновского рассеяния $\chi_c B^{1/2}$ (усредненные по всем группам) для свинцовых и медных пластин почти одинаковые ($\sim 5^\circ$), значение угла λ/R для меди ($\sim 7^\circ$) в 1.7 раза больше того же значения для свинца ($\sim 2.6^\circ$). Это приводит к тому, что влияние дифракционного рассеяния также ничтожное и экспериментальные точки должны хорошо согласоваться с кривыми многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра. Вышеизложенное хорошо видно из приведенных кривых рис. 7 и таблицы 2, где значения N очень близки к единице.

Из всего вышеизложенного следует, что в зависимости от энергии протонов, вещества и толщины пластин, в которых исследуется их рассеяние, дифракционное рассеяние проявляется различным образом. Если угол λ/R меньше угла $\chi_c B^{1/2}$, то дифракционное рассеяние сказывается уже в области многократного рассеяния; если же угол λ/R больше угла $\chi_c B^{1/2}$, то оно проявляется только при углах значительно больших, чем угол $\chi_c B^{1/2}$. Чем больше влияние конечных разме-

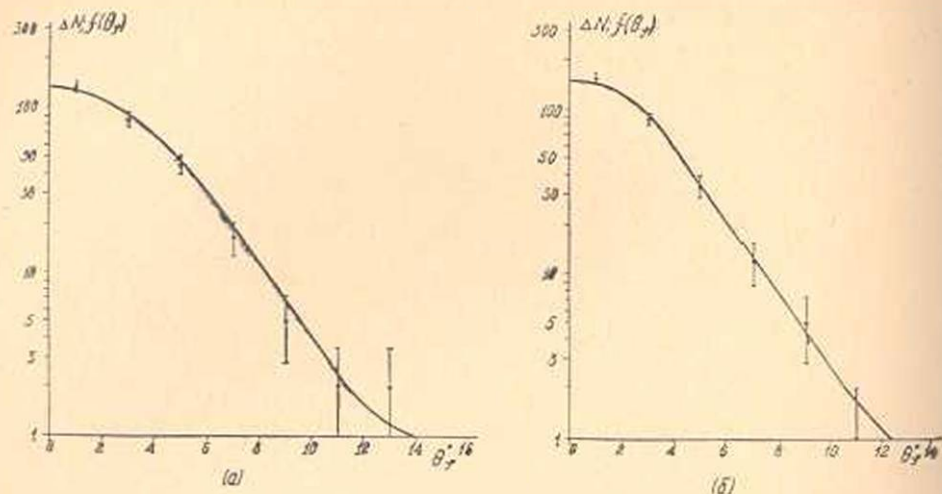


Рис. 7 Дифференциальные распределения углов рассеяния для протонов в медных пластинках толщиной 5 мм и 2 мм и соответствующие кривые многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра. $N_{5\text{мм}} = 290$, $N_{2\text{мм}} = 290$.

ров ядра, тем больше и влияние дифракционного рассеяния, то-есть конечные размеры ядра и дифракционное рассеяние проявляют себя как два взаимно компенсирующих фактора, в итоге чего упругое рассеяние протонов распределяется по кривой многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра.

В области углов $\varphi = 3,6 \div 5,4$ (рис. 5), где рассеяние еще не успело стать чисто дифракционным, влияние конечных размеров ядра проявляется слабее, чем влияние дифракционного рассеяния. Кривая многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра круче, чем экспериментальная. Это объясняется тем, что при больших углах сечение дифракционного рассеяния в среднем обратно пропорционально квадрату угла рассеяния (8), а сечение чисто кулоновского рассеяния — кубу.

В области больших углов рассеяния ($\varphi > 5,4$), где кулоновское рассеяние очень мало, а следовательно не играет роли и интерференция кулоновского рассеяния с ядерным, все случаи рассеяния можно считать чисто ядерными. Число рассеяний на угол больше чем $\varphi = 5,4$ для протонов рассеявшихся в свинцовых пластинках толщиной 7 мм, (рис. 5) за вычетом ожидаемого числа рассеяний по кривой многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра равно 9, что соответствует поперечному сечению $\sigma_{\varphi > 5,4} = (0,032 \pm 0,011) \sigma_{\text{геомтр.}}$. Интегральное поперечное сечение дифракционного рассеяния для проекций углов рассеяний более, чем $\varphi = 5,4$ по формуле (11) равно $\sigma = 0,0340 \sigma_{\text{геомтр.}}$, что хорошо согласуется с экспериментально полученным его значением.

Автор выражает благодарность проф. А. И. Алиханяну за участие в обсуждении работы и М. Л. Тер-Микаеляну за разработку тео-

рии рассеяния, приводимую в статье и участие в обсуждении полученных результатов.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 28 IX 1958

Յ. Ռ. Հարությունյան

ՊՐՈՏՈՆՆԵՐԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՑՐՈՒՄԸ ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրվել է 66 — 195 մեվ էներգիայի պրոտոնների առաձգական ցրումը կապարե թիթեղներում և 40 — 72 մեվ էներգիայի պրոտոններինը պղնձե թիթեղներում:

Էքսպերիմենտալ տվյալները համեմատվում են կետային և վերջավոր չափերով միջուկի վրա բաղմամպատիկ կուլոնյան ցրման կորերի հետ: Դիֆրակցիոն ցրման առկայությունը բերում է նրան, որ էքսպերիմենտալ տվյալները համընկնում են կետային միջուկի համար ցրման բաշխման կորի հետ: Պարզված է, որ որքան մեծ է միջուկի վերջավոր չափերի ազդեցությունը, աչնքան անգամ էլ մեծ է դիֆրակցիոն ցրման ազդեցությունը, այսինքն՝ միջուկի վերջավոր չափերը և դիֆրակցիոն ցրումը ցուցաբերում են իրենց որակա կերպով փոխարարձ չեզոքացնող ազդակներ, որի շնորհիվ պրոտոնների առաձգական ցրումը կատարվում է ըստ կետային միջուկի համար կուլոնյան բաղմամպատիկ ցրման կորի:

Մեծ անկյունների դեպքում ստացվել է, որ պրոտոնների միջուկային ցրման ինտեգրալ կտրվածքը՝ $\sigma = (0,032 - 0,011) \text{ ս երկրաչ.}$, որը լավ համաձայնվում է «բացարձակ սև» միջուկի համար օպտիկական մոդելով հաշված կտրվածքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Ф. Р. Исследование многократного рассеяния протонов. ЖЭТФ, 34, 800 (1958).
2. Адиханян А. И., Арутюнян Ф. Р. Рассеяние μ -мезонов в свинце. ЖЭТФ, 36, 32 (1959).
3. Тер-Микаелян М. Л. К теории многократного рассеяния, ЖЭТФ, 36, 253 (1959).
4. Ахмезер А. И., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра, М., 1950.
5. Batson I. H. Теория бесселевых функций, М., 1949.
6. Baker C. I., Dodd I. N., Simmons D. H. The Scattering of 9.6-Mev Protons by Carbon, Aluminum, and Magnesium, Phys. Rev., 85, 1051, (1952).
7. Burcham W. E., Gibson W. M., Hossian A., Rothblat I. Scattering of 9.5-Mev Protons by Carbon and Oxygen, Phys. Rev., 92, 1266 (1953).
8. Goldman L. M. Elastic Scattering of 6.5-Mev Protons from Copper, Phys. Rev., 89, 349 (1953).
9. Dayton I. E. The Elastic Scattering of 18-Mev Protons by Al, Fe, Ni, and Cu, Phys. Rev., 95, 754 (1954).
10. Fischer G. E. Scattering of 10-Mev Protons on Carbon and Magnesium, Phys. Rev., 96, 704 (1954).

11. *Freemantle R. G., Prowse D. I., Rotblat I.* Scattering of 9.5-Mev Protons by Nitrogen, *Phys. Rev.*, 96, 1268 (1954).
12. *Burkig I. W., Wright B. T.* Survey Experiment on Elastic Scattering, *Phys. Rev.*, 82, 451 (1951).
13. *Gudelot P. C.* Some Data on the Elastic Scattering of 18.3-Mev Protons, *Phys. Rev.*, 87, 525 (1952).
14. *Cohen B. L., Neidigh R. V.* Angular Distributions of 22-Mev Protons Elastically Scattered by Various Elements, *Phys. Rev.*, 93, 282 (1954).
15. *Peaslee D. C.* *Amr. Rev. Nucl. Sci.*, 5, 126 (1955).

Г. М. Гарибян, О. С. Мергелян

Черенковское и переходное излучение заряженной нити, несущей ток

В работах [1—8] было рассмотрено переходное и черенковское излучение движущегося заряда при различном числе и типах плоских границ раздела сред. В работе [9] было рассмотрено излучение движущейся заряженной нити несущей ток, которая при своем движении не переходила из одной среды в другую. В настоящей работе, методом использованным в [3], решена задача о переходном и черенковском излучении токонесущей заряженной нити. Решению последней задачи предпосылается решение той же задачи в однородной среде, так как оно существенно необходимо для решения основной задачи.

1. Пусть нить с линейной плотностью заряда ρ_0 и током силы j_0 , направленным в положительном направлении оси y , движется в плоскости $z = 0$ из $x = -\infty$ в $x = +\infty$, оставаясь параллельной оси y . Тогда электрическое и магнитное поля будут описываться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\rho_0 \vec{v} + \vec{j}_0) \delta(x - vt) \delta(z), \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_0 \delta(x - vt) \delta(z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{v}$ направлено по оси x , а $\vec{j}_0$ — по оси y .
 Представим δ -функции в виде

$$\delta(x - vt) \delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i \vec{x} \cdot (\vec{p} - v\vec{t})} d\vec{x}, \quad (2)$$

где $\vec{p}$ — радиус-вектор в плоскости (x, z) , а $\vec{x}(k_x, k_z)$ — волновой вектор в той же плоскости.

Обозначив через $\omega = \vec{x} \cdot \vec{v} = k_x v$, выражения для полей будем искать в виде следующего интеграла Фурье:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{z}) e^{i(\vec{z} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{z}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (1) для Фурье компонент полей получим выражения:

а) для полей, вызванных линейной плотностью заряда ρ_0 ,

$$\vec{E}^{\rho}(\vec{z}) = -\frac{i\rho_0}{\pi\varepsilon} \frac{\frac{\vec{z} \cdot \vec{v}}{c^2} \varepsilon\mu}{z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu}, \quad (4)$$

$$\vec{H}^{\rho}(\vec{z}) = \frac{i\rho_0}{\pi c} \frac{[\vec{z} \vec{v}]}{z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu}; \quad (5)$$

б) для полей, вызванных током $\vec{j}_0$

$$\vec{E}^j(\vec{z}) = \frac{i}{\pi c^2} \frac{\omega\mu\vec{j}_0}{z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu}, \quad (6)$$

$$\vec{H}^j(\vec{z}) = \frac{i}{\pi c} \frac{[\vec{z} \vec{j}_0]}{z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu}. \quad (7)$$

Из формул (4)–(7) видно, что в первом случае электрическое поле имеет компоненты, направленные по осям x и y , тогда как магнитное — только по оси z , а во втором случае — наоборот. Очевидно, что в общем случае, поля будут аддитивно складываться из полей (4)–(7).

Для получения частотного разложения полей, надо в формулах типа (3) произвести интегрирование по переменной k_z . Например, в первом случае для E_x мы имеем выражение

$$E_x^{\rho}(\vec{r}, t) = \frac{i\rho_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega\varepsilon(\omega)} e^{i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)} \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2\varepsilon\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_z z}}{\frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2\varepsilon\mu - 1) - k_z^2} dk_z. \quad (8)$$

При интегрировании по k_z нужно принять во внимание, что подынтегральное выражение имеет два полюса: один в верхней, а другой в нижней полуплоскости комплексного переменного k_z . Замыкая контур интегрирования верхней полуокружностью при $z > 0$ и нижней при $z < 0$ и воспользовавшись леммой Жордана, мы получим

$$E_x^{\rho}(\vec{r}, t) = -\frac{\rho_0}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V \sqrt{\beta^2\varepsilon\mu - 1}}{\varepsilon(\omega)} e^{i\left(\frac{\omega}{v} V \sqrt{\beta^2\varepsilon\mu - 1} z + \frac{\omega}{v} x - \omega t\right)} d\omega \quad (9)$$

и аналогичные выражения для полей E_z^{ρ} и H_z^{ρ} .

Для полей, вызванных током, будем иметь:

$$E_y^i(\vec{r}, t) = -\frac{j_0}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\omega)}{\sqrt{\beta^2 \varepsilon \mu - 1}} e^{i\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2 \varepsilon \mu - 1} z + \frac{\omega}{v} x - \omega t\right)} d\omega \quad (10)$$

и аналогичные выражения для H_x^i и H_z^i .

При вычислении энергии, излученной единицей длины нити за время ее пролета через 2 единичные площадки симметрично расположенные на расстоянии z от плоскости (xy), надо принять во внимание, что для боровских частот, удовлетворяющих условию $\beta^2 \varepsilon'(\omega) \mu(\omega) - 1 \leq 0$ ($\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\varepsilon'' > 0$, μ — действительно), излучение будет сильно затухать, тогда как для черенковских частот ($\beta^2 \varepsilon'(\omega) \mu(\omega) - 1 > 0$) будем иметь

$$\frac{d\omega^2}{dx} = 2 \frac{j_0^2}{v} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{V \sqrt{\beta^2 \varepsilon' \mu - 1}}{\varepsilon(\omega)} e^{-\frac{\beta^2 \varepsilon'' \mu}{V \sqrt{\beta^2 \varepsilon' \mu - 1}} |z| \frac{\omega}{v}} d\omega, \quad (11)$$

$$\frac{d\omega^2}{dx} = 2 \frac{j_0^2}{c^2 v} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\mu(\omega)}{V \sqrt{\beta^2 \varepsilon \mu - 1}} e^{-\frac{\beta^2 \varepsilon'' \mu}{V \sqrt{\beta^2 \varepsilon \mu - 1}} |z| \frac{\omega}{v}} d\omega. \quad (12)$$

Из вида экспонент в формулах (9) и (10) видно, что угол, под которым движется черенковское поле частоты ω относительно плоскости (xy), определяется выражением $\cos \theta = \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon' \mu}}$.

Нетрудно убедиться, что интерференции между обоими потоками энергии не будет.

Полученные формулы при $\varepsilon'' = 0$ дают полные потери энергии на единице пути и совпадают с соответствующими формулами, полученными Морозовым [9].

2. Пусть теперь нить, двигаясь также как и в предыдущем случае, переходит из среды с постоянными ε_1 и μ_1 в среду с постоянными ε_2 и μ_2 , причем границей раздела является плоскость $x = 0$.

Чтобы удовлетворить граничным условиям, добавим к имеющимся у нас частным решениям (3) неоднородных уравнений Максвелла решения однородных уравнений в виде

$$\vec{E}_{1,2}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_{1,2}(\vec{z}) e^{i(k_z z + a_{1,2} x - \omega t)} d\vec{z}, \quad (13)$$

где $a_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} - k_z^2$. Обозначив $a_{1,2} = a'_{1,2} + i a''_{1,2}$ нетрудно видеть,

что $a'_1 < 0$, $a''_1 < 0$, $a'_2 > 0$, $a''_2 > 0$, так как в первой среде имеются только отраженные волны, а во второй — только волны, движущиеся в положительном направлении оси x .

Разложив поля на нормальную и тангенциальную составляющие, запишем условия поперечности полей в виде

$$\begin{aligned}k_z \vec{E}_{1,2t}(\vec{r}) + \alpha_{1,2} \vec{E}_{1,2n}(\vec{r}) &= 0, \\k_z \vec{H}_{1,2t}(\vec{r}) + \alpha_{1,2} \vec{H}_{1,2n}(\vec{r}) &= 0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

С другой стороны, электрическое и магнитное поля связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}\vec{H}_{1,2}(\vec{r}) &= \frac{c}{\omega \varepsilon_{1,2}} [\vec{n}_z k_z + \vec{n}_x \alpha_{1,2}, \vec{E}_{1,2}(\vec{r})], \\ \vec{E}_{1,2}(\vec{r}) &= -\frac{c}{\omega \varepsilon_{1,2}} [\vec{n}_z k_z + \vec{n}_x \alpha_{1,2}, \vec{H}_{1,2}(\vec{r})],\end{aligned}\quad (15)$$

где $\vec{n}_x$ и $\vec{n}_z$ — единичные векторы осей x и z .

Далее необходимо написать условия сшивки полей на границе раздела сред, откуда получаются следующие выражения для Фурье — компонент полей ($\chi_1 = \varepsilon_1 \mu_1$, $\chi_2 = \varepsilon_2 \mu_2$):

$$E_{1z}^p(\vec{r}) = \alpha_1 \eta, \quad E_{1x}^p(\vec{r}) = -k_z \eta, \quad H_{1y}^p(\vec{r}) = -\frac{\varepsilon_1}{c} \omega \eta, \quad (16)$$

$$E_{1y}^f(\vec{r}) = \frac{\omega}{c} \mu_1 \zeta, \quad H_{1x}^f(\vec{r}) = -k_z \zeta, \quad H_{1z}^f(\vec{r}) = \alpha_1 \zeta, \quad (17)$$

где

$$\eta = \frac{i \varphi_0}{\pi} \frac{k_z}{\varepsilon_2 \alpha_1 - \varepsilon_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{v}{\omega} \alpha_2}{\chi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1} + \frac{-1 + \frac{v}{\omega} \alpha_2}{\chi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \chi_2} \right\}, \quad (18)$$

$$\zeta = \frac{i j_0}{\pi c} \frac{1}{\mu_1 \alpha_2 - \mu_2 \alpha_1} \left\{ \frac{\frac{\omega}{v} \mu_2 - \mu_1 \alpha_2}{\chi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1} + \frac{-\frac{\omega}{v} \mu_2 + \mu_2 \alpha_2}{\chi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \chi_2} \right\}. \quad (19)$$

Поля излучения во второй среде получаются взаимной заменой индексов 1 и 2 в вышеприведенных формулах. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\mu_1 = \mu_2$, как и следовало ожидать, поля излучения (16) и (17) обращаются в нуль.

3. Чтобы получить частотное распределение полей излучения, необходимо в интегралах типа (13) проинтегрировать по k_z . Способ интегрирования по k_z укажем только для случая E_{1z}^p поля. Остальные интегралы вычисляются аналогичным образом. Имеем

$$E_{1z}^p(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1 \eta e^{i(k_z z + \alpha_1 x)} dk_z. \quad (20)$$

Введем новые координаты ρ и θ следующим образом: $z = \rho \sin \theta$, $x = -\rho \cos \theta$. Интеграл по k_z можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} \alpha_1 \gamma (e^{f(k_z)\rho} - e^{\varphi(k_z)\rho}) dk_z,$$

где $f(k_z) = ik_z \sin \theta - i\alpha_1 \cos \theta$, $\varphi(k_z) = -ik_z \sin \theta - i\alpha_1 \cos \theta$. Интегрирование будем производить деформированием пути интегрирования в плоскости комплексного переменного k_z . Однако, наличие в подынтегральной функции квадратных корней α_1 и α_2 делает ее неоднозначной, что можно устранить произведя соответствующие разрезы (см. рис. 1 работы [3]). Тогда интегрирование возможно произвести методом перелома, аналогично тому как это было сделано в [3].

Для полей переходного излучения, возникающих от заряженной нити в первой среде, получим выражения на больших расстояниях:

$$E_1^{\parallel}(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0 \sin \theta \cos \theta}{v \sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^{-1/2} \chi_1^{1/2} \gamma e^{i\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\chi_1^2 - \omega^2} - \omega t\right)} d\omega, \quad (21)$$

$$H_{1\varphi}^{\parallel}(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0 \sin \theta \cos \theta}{v \sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^{-1/2} \chi_1^{1/2} \gamma e^{i\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\chi_1^2 - \omega^2} - \omega t\right)} d\omega, \quad (22)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{\chi_1} \cos \theta + \varepsilon_1 \sqrt{\chi_2 - \chi_1 \sin^2 \theta}} \left[\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \beta \sqrt{\chi_2 - \chi_1 \sin^2 \theta}}{\frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \chi_1 \cos^2 \theta)} - \frac{\frac{v^2}{\omega^2}}{1 + \beta \sqrt{\chi_2 - \chi_1 \sin^2 \theta}} \right], \quad (23)$$

причем электрическое поле направлено перпендикулярно $\vec{\rho}$.

Переходное излучение возникающее благодаря току нити будет равно

$$H_1^{\perp}(\vec{r}, t) = \frac{j_0 \cos \theta}{v \sqrt{2\pi\rho c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^{-1/2} (\chi_1)^{1/2} \delta e^{i\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\chi_1^2 - \omega^2} - \omega t\right)} d\omega, \quad (24)$$

$$E_{1\varphi}^{\perp}(\vec{r}, t) = -\frac{j_0 \cos \theta}{v \sqrt{2\pi\rho c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^{-1/2} (\chi_1)^{1/2} \delta e^{i\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\chi_1^2 - \omega^2} - \omega t\right)} d\omega, \quad (25)$$

где

$$\delta^1 = \frac{1}{\mu_1 \sqrt{\chi_1 \cos \theta} + \mu_2 \sqrt{\chi_2 - \chi_1 \sin^2 \theta}} \left\{ \frac{\mu_2 - \mu_1 \beta \sqrt{\chi_2 - \chi_1 \sin^2 \theta}}{1 - \beta^2 \chi_1 \cos^2 \theta} + \frac{\mu_2}{1 + \beta \sqrt{\chi_2 - \chi_1 \sin^2 \theta}} \right\}, \quad (26)$$

причем магнитное поле перпендикулярно направлению $\vec{p}$.

Вектор Пойтинга направлен по вектору $\vec{p}$ и количество переходного излучения, испущенного единицей длины нити за все время ее пролета в угол θ , $\theta + d\theta$, будет равно

$$dW^p = \frac{\rho_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{2\pi c^2 v^2} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{V \mu_1} (\chi_1)^{3/2} |\tau|^2 \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon_1}) d\omega, \quad (27)$$

$$dW^j = \frac{\rho_0^2 \cos^2 \theta d\theta}{2\pi c^2} \int_0^\infty \frac{|\chi_1|^{3/2}}{\omega} |\varepsilon|^2 \frac{V \mu_1}{|\varepsilon_1|} \operatorname{Re}(V \varepsilon_1) d\omega. \quad (28)$$

Энергия прошедшая через площадку $\rho d\theta$ получится умножением подынтегрального выражения в (27) и (28) на $\exp\left(-\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{V \mu_1 \varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \rho\right)$, которая учитывает поглощение излучения в среде.

Предел применимости полученных формул, возникающий из-за использования метода перевала при интегрировании по κ_z , определяется соотношением $\rho \gg \lambda / \sin^2 \theta$, где λ — длина волны излучения, деленная на 2π .

4. При деформировании пути интегрирования в линию кратчайшего спуска, мы не учитывали полюсов подынтегрального выражения. В том случае, если они находятся внутри контура интегрирования (см. рис. 4 работы [3]) они дадут вклад в интеграл. Таким полюсом является $k_z = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\beta^2 \chi_1 - 1}$.

Для простоты мы будем полагать $\varepsilon_1 = 0$. Тогда полюс даст вклад в интеграл, если

$$0 < \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1 < \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta. \quad (29)$$

Получающиеся при этом поля описывают черенковское излучение, образовавшееся в первой среде и частично отразившееся от границы раздела сред. Соответствующие потоки черенковского излучения, прошедшего за все время пролета нити через две единичные площадки симметрично расположенные относительно плоскости xu , будут равны:

$$\frac{dW^p}{dx} = 2 \frac{\rho_0^2}{v} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{V \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1}{\varepsilon_1(\omega)} \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sqrt{\beta^2 (\chi_2 - \chi_1) - 1}}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \sqrt{\beta^2 (\chi_2 - \chi_1) - 1}} \right|^2 d\omega, \quad (30)$$

$$\frac{dW^f}{dx} = 2 \frac{\tilde{I}_0^2}{c^2 v} R e \int_0^\infty \frac{p_1}{V \beta^2 \chi_1 - 1} \left| \frac{p_2 - p_1 \sqrt{\beta^2 (\chi_2 - \chi_1) - 1}}{p_2 + p_1 \sqrt{\beta^2 (\chi_2 - \chi_1) - 1}} \right|^2 d\omega, \quad (31)$$

причем интегрирование производится по частотам, удовлетворяющим условию (29).

Во второй среде вклад от полюсов даст черенковское излучение образовавшееся в первой среде и частично прошедшее во вторую среду и черенковское излучение, образовавшееся во второй среде. В последнем случае оно задается полем движущейся нити, из которого вычитается вычет поля излучения. Это приводит к тому, что черенковское излучение во второй среде распространяется в области ограниченной двумя плоскостями, проходящими через ось y и образующими с плоскостью (xy) углы $\pm \theta$, где $\cos \theta = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$.

Ереванский государственный университет

Поступила 6 II 1959

Գ. Մ. Ղաթիբյան, Հ. Ս. Մերգելյան

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ԹԵԼԻ ՉԵՐԵՆԿՈՎՅԱՆ ԵՎ ԱՆՑՄԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է չերենկովյան ճառագայթումը, որը առաջանում է թելի լիցքի և թելի միջով անցնող հոսանքի հետևանքով: Ուսումնասիրված է նաև անցման ճառագայթումը, որը առաջ է գալիս թելի մի միջավայրից մյուսը անցնելիս:

Ստացված են բանաձևեր չերենկովյան և անցման ճառագայթումների էներգիայի հստակ համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, 16, 15, 1946.
2. Клепиков Н. П. Теория переходного излучения. Вестн. МГУ, 8, 61, 1951.
3. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения. ЖЭТФ, 33, 1403, 1957.
4. Коржазян Н. А. Решение задачи о переходном излучении методом изображений. Изв. АН АрмССР, 10, № 4, 1957.
5. Пафомов В. Е. Излучение электрона, пролетающего через пластинку. ЖЭТФ, 33, 1074, 1957.
6. Гарибян Г. М., Чаликян Г. А., Черенковское и переходное излучения заряженной частицы, пролетающей через пластинку. ЖЭТФ, 35, 1282, 1958; Изв. АН Арм. ССР 12, №3, 1959.
7. Гарибян Г. М. Излучение заряженной частицы, пролетающей через слоистую среду. ЖЭТФ 35, 1435, 1958.
8. Гарибян Г. М. К теории переходных эффектов в электродинамике. Изв. АН Арм. ССР, 11, № 4, 1958.
9. Морозов А. И. Взаимодействие между движущейся нитью с током и проводящей стенкой. ЖЭТФ, 31, 1079, 1956; Вестн. МГУ, 12, № 1, 1957.

Г. С. Саакян

Индукцированное тормозное излучение и поглощение

В присутствии внешнего поля излучения, помимо обычного явления тормозного излучения, появляется добавочное явление—индуцированное тормозное излучение, а также поглощение квантов. Суть тормозного поглощения состоит в том, что электрон, отклоняясь в кулоновском поле ядра, не испускает, а, наоборот, из внешнего поля излучения поглощает квант. Следовательно, в результате индуцированного поглощения, энергия конечного состояния электрона оказывается больше энергии его начального состояния, т. е. частица проходя мимо ядра не замедляется, а ускоряется.

Вычислим вероятности индуцированного поглощения и излучения. Пусть кроме вещества, в пространстве имеется внешнее поле электромагнитного излучения. Матричный элемент процесса, при котором электрон отклоняясь в кулоновском поле ядра испускает квант, определяется формулой [1]

$$S_{if} = \frac{2\pi Ze^2}{q^2 \sqrt{2\omega}} \sqrt{n_k + 1} (\bar{u}_2 Q u_1) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad (1)$$

где Ze — заряд ядра, ω — энергия кванта, n_k — число квантов с определенным четырехмерным импульсом $\vec{k}$ ($\vec{k}, i\omega$) во внешнем поле, $u_1(\vec{p}_1)$ и $u_2(\vec{p}_2)$ — амплитуды Дирака соответственно для начального и конечного состояний электрона, $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{k}$ — импульс, переданный ядру и Q — оператор, имеющий вид

$$Q = \gamma_\nu \frac{i(\vec{p}_2 + \vec{k}) - m}{(\vec{p}_2 + \vec{k})^2 + m^2} \beta + \beta \frac{i(\vec{p}_1 - \vec{k}) - m}{(\vec{p}_1 - \vec{k})^2 + m^2} \gamma_\nu. \quad (2)$$

Здесь γ_ν — проекция матрицы $\vec{\gamma}$ на направление поляризации кванта (кванты поля n_k и испущенный квант являются идентичными), $\vec{p} = \vec{p}_1$ и $\beta = \gamma_4$ — матрица Дирака. Мы пользуемся системой единиц

$$\hbar = c = 1; \quad \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Из (1), общезвестным методом, находим вероятность перехода в единицу времени

$$dW = (n_k + 1) d\dot{W}_0. \quad (3)$$

Здесь, чтобы не усложнять результаты предположено, что внешнее поле излучения не поляризовано. dW_0 есть вероятность обычного тормозного излучения в отсутствие внешнего поля излучения

$$dW_0 = \frac{Z^2 e^3}{2\omega q^4} \frac{k^2 dk d\Omega p_2 \varepsilon_2 d\Omega_2}{(2\pi)^5 8\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sum_{\lambda} Sp Q (ip_1^{\lambda} - m) \beta Q^{\lambda} \beta (ip_2^{\lambda} - m), \quad (4)$$

где ε_1 и ε_2 — энергии начального и конечного состояний электрона, $d\Omega$ и $d\Omega_2$ — элементы телесных углов в направлениях $\vec{k}$ и $\vec{p}_2$, $\sum_{\lambda}$ — означает суммирование по поляризациям фотонов.

В (3) целесообразно n_k выразить через плотность энергии поля. Имеем

$$n_k \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega} d\omega d\Omega, \quad (5)$$

где $\rho(\omega, \vartheta, \varphi) d\omega d\Omega$ — плотность энергии излучения, имеющего направление распространения внутри элемента телесного угла $d\Omega$ и частоты в интервале $\omega, \omega + d\omega$. Итак из (3) и (5) получаем

$$dW = \left[1 + 8\pi^3 \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega^3} \right] dW_0. \quad (3')$$

Теперь перейдем к рассмотрению явления тормозного поглощения кванта электроном. Матричный элемент перехода для этого процесса равен

$$S_{if} = \frac{2\pi Z e^3}{q_1^2 V 2\omega} V n_k (\bar{u}_2 F u_1) \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \omega), \quad (6)$$

где F — оператор следующего вида

$$F = \gamma_5 \frac{i(\vec{p}_2 - \vec{k}) - m}{(\vec{p}_2 - \vec{k})^2 + m^2} \beta + \beta \frac{i(\vec{p}_1 + \vec{k}) - m}{(\vec{p}_1 + \vec{k})^2 + m^2} \gamma_5, \quad (7)$$

а $\vec{q}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{k}$ — импульс, переданный ядру. Сравнение (7) с (2) показывает, что F получается от Q если в последнем $\vec{k}$ заменим через $-\vec{k}$.

Для вероятности перехода в единицу времени из (6) находим

$$dW' = \frac{Z^2 e^6}{2\omega q_1^4} n_k \frac{p_2 \varepsilon_2 d\Omega_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{8\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sum_{\lambda} Sp F (ip_1^{\lambda} - m) \beta F^{\lambda} \beta (ip_2^{\lambda} - m), \quad (8)$$

где $d\Omega_2$ — элемент телесного угла в направлении $\vec{p}_2$. (8) есть вероятность для поглощения фотона с строго определенным импульсом $\vec{k}$. Спектр излучения в природе обычно является непрерывным по-

тому представляет интерес найти вероятность поглощения фотона, имеющего импульс в интервале $\vec{k}$, $\vec{k} + d\vec{k}$. Для нахождения этой вероятности следует в (8) произвести следующую замену

$$n_k \rightarrow n_k \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} d\Omega = \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega} d\omega d\Omega. \quad (9)$$

В результате получаем

$$dW' = 8\pi^3 \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega^3} dW'_0, \quad (10)$$

где

$$dW'_0 = \frac{Z^2 e^8}{2\omega q^4} \frac{k^2 dk d\Omega p_2 \varepsilon_2 d\Omega_2}{(2\pi)^5 8\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sum_s \text{Sp} F(\hat{p}_1 - m) \beta F \beta (\hat{p}_2 - m). \quad (11)$$

Отметим, что dW'_0 получится из (4) если в ней везде импульс фотона $\vec{k}$ заменить на $-\vec{k}$. Поэтому нам достаточно выписать формулы для случая испускания квантов.

В случае малых энергий $p_1 \ll m$ известно, что [1]

$$dW_0 = \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{\varepsilon_1} \frac{d\Omega d\Omega_2}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^4} \frac{[\vec{k}, \vec{p}_1 - \vec{p}_2]}{\omega^2}, \quad (12)$$

где α — постоянная тонкой структуры. При релятивистских энергиях, вероятность определяется известной формулой Бете и Гайгlera

$$dW_0 = \frac{Z^2 \alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{\varepsilon_1} \frac{d\Omega d\Omega_2}{q^4} \frac{4}{m^4} \left\{ 4 \left[\vec{k}, \frac{\varepsilon_1 \vec{p}_2}{\chi_1} + \frac{\varepsilon_2 \vec{p}_1}{\chi_2} \right]^2 - \right. \\ \left. - q^2 \left[\vec{k}, \frac{\vec{p}_2}{\chi_1} + \frac{\vec{p}_1}{\chi_2} \right]^2 - \frac{2\omega^2}{\chi_1 \chi_2} \left[\vec{k}, \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \right]^2 \right\}, \quad (13)$$

где

$$m^2 \chi_1 = 2\vec{p}_2 \vec{k} = -2\omega(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2), \\ m^2 \chi_2 = -2\vec{p}_1 \vec{k} = 2\omega(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1), \quad (14)$$

ϑ_1 и ϑ_2 — углы, образованные векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ с $\vec{k}$.

Сравнение (12) и (13) с соответствующими формулами для dW'_0 (как уже было сказано выше, последние получаются из первых заменой $\vec{k}$ на $-\vec{k}$ и ω на $-\omega$) показывает, что при заданной начальной энергии ε_1 всегда имеет место

$$dW'_0 > dW_0. \quad (15)$$

(15) означает, что вероятность индуцированного тормозного поглощения всегда больше вероятности индуцированного испускания кванта.

Теперь посмотрим, при каких условиях вероятность индуцированного излучения превосходит вероятность обычного тормозного излучения. Из (3) видно, что это имеет место при соблюдении условия

$$n_k = 8\pi^3 \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega^3} > 1. \quad (16)$$

Такие интенсивные поля излучения имеются только во внутренних областях солнца и звезд, а также в нижних слоях их атмосфер. Не совершая большой ошибки, можно предположить, что поле излучения в звездах является полем черного излучения. Тогда

$$8\pi^3 \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega^3} = \left(e^{\frac{\omega}{aT}} - 1 \right)^{-1}, \quad (17)$$

где a — постоянная Больцмана. В этом случае в формулах (3') и (10) можно по телесным углам $d\Omega$ и $d\Omega_2$ произвести интегрирование. В результате получаем

$$W(\varepsilon_1, \omega) d\omega dx = \left(1 - e^{-\frac{\omega}{aT}} \right)^{-1} dW_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega dx, \quad (18)$$

где $W_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega dx$ — вероятность того, что электрон с энергией ε_1 , пройдя слой вещества dx в г/см^2 , испустит фотон с энергией в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. В целях сравнения вероятностей тормозного поглощения и испускания квантов, здесь мы выпишем формулы лишь для случая, когда экранировка отсутствует* [1, 2].

$$W_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega = 4\bar{\Phi} \frac{N}{A} \left[1 + (1-u)^2 - \frac{2}{3}(1-u) \right] \times \\ \times \left[\ln \frac{2\varepsilon_1(1-u)}{mu} - \frac{1}{2} \right] \frac{du}{u}, \quad (19)$$

где N — число Авогадро, A — атомный вес, $u = \frac{\omega}{\varepsilon_1}$ и $\bar{\Phi} = Z^2 \pi r_0^2 = = Z^2 5,71 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$; r_0 — классический радиус электрона. При нерелятивистских энергиях $p_1 \ll m$ имеем

$$W_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega = \frac{8}{3} \bar{\Phi} \frac{N}{A} \frac{m}{T_1} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{(V T_1 + V T_1 - \omega)^2}{\omega}, \quad (20)$$

где $T_1 = \varepsilon_1 - m$.

В случае поглощения, из (10) имеем

$$W'(\varepsilon_1, \omega) d\omega dx = e^{-\frac{\omega}{aT}} \left(1 - e^{-\frac{\omega}{aT}} \right)^{-1} W_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega dx, \quad (21)$$

* Здесь мы не будем обсуждать вопроса экранировки кулоновского поля ядра, атомными электронами. Этот вопрос требует специального исследования, так как, из-за особых физических условий существующих в звездах, явление экранировки, повидимому, будет иначе выглядеть, чем это имеет место в земных условиях.

где при отсутствии экранировки

$$W'_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega = 4\pi \frac{N}{A} \times \\ \times \frac{du}{u} \left[1 + (1+u)^2 - \frac{2}{3} (1+u) \right] \left[\ln \frac{2\varepsilon_1(1+u)}{mu} - \frac{1}{2} \right], \quad (22)$$

а при нерелятивистских энергиях

$$W'_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega = \frac{8}{3} \pi \frac{N}{A} \frac{m d\omega}{T_1 \omega} \ln \frac{(V T_1 + V T_1 + \omega)^2}{\omega}. \quad (23)$$

Из (16) или (18) следует, что при температурах

$$T > \frac{\omega}{a} \quad (24)$$

вероятность индуцированных процессов превышает вероятность обычного тормозного излучения. А при $\omega \ll aT$ вероятности тормозного поглощения и испускания квантов становятся равными. При $\omega = 1 \text{ mev}$, соответствующая температура равна 10^{10} градусов. Такие температуры существуют во внутренних областях некоторых звезд. При температурах (24), вероятности торможения и ускорения частиц, приблизительно равны. При меньших температурах вероятность торможения больше вероятности ускорения и лишь сравнительно небольшая часть частиц будет ускоряться.

В заключение выражаю благодарность И. И. Гольдману за ценное обсуждение настоящей работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 4 III 1959

Գ. Ս. Սահակյան

ԻՆԴՈՒԿՑԿԱԾ ԱՐԳԵԼԱԿԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅՅՈՒՄ ԵՎ ԿԼԱՆՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ երբ միջավայրում գոյություն ունի ճառագայթման դաշտ, ապա լիցքավորված մասնիկների համար, բացի սովորական արգելված ճառագայթման երևույթից, հանդես են գալիս նաև ինդուկցիոն ճառագայթման և կլանման երևույթները:

Սև ճառագայթման դաշտի դեպքում քվանտ առաքելու հավանականությունը տրվում է

$$W(\varepsilon_1, \omega) d\omega = \left(1 - e^{-\frac{\omega}{aT}} \right)^{-1} W'_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega \quad (1)$$

բանաձևով, իսկ քվանտ կլանելու հավանականությունը՝

$$W''(\varepsilon_1, \omega) d\omega = e^{-\frac{\omega}{aT}} \left(1 - e^{-\frac{\omega}{aT}} \right)^{-1} W'_0(\varepsilon_1, \omega) d\omega \quad (2)$$

բանաձևով: Այստեղ ω — կլանվող և առաքվող քվանտի էներգիան է, T — ջերմաստիճանը, α — Բոլցմանի հաստատունն է, $W_0(\varepsilon, \omega)$ $d\omega$ — սովորական արդիական ճառագայթման հավանականությունն է, ε_1 — մասնիկի լրիվ էներգիան է, իսկ

$$W'_0(\varepsilon_1, \omega) = W_0(\varepsilon_1, -\omega):$$

(1) և (2) համեմատությունից երևում է, որ $\alpha T \gg \omega$ ջերմաստիճանների դեպքում արդիական, կլանման և առաքման հավանականությունները դառնում են իրար հավասար: Այսպիսի ֆիզիկական պայմաններ գոյություն ունեն Արեգակի և աստղերի մեջ: Մեզ թվում է, որ աստղերի ներսի տիրույթներում, արդիական կլանման երևույթի շնորհիվ, կարող են առաջանալ շատ մեծ էներգիայի էլեկտրոններ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ахнєзер А. И. и Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. ГИТТЛ, М., 1953.
2. Гайлер В. А. Квантовая теория излучения. ИИЛ, М., 1956.

С. А. Хейфец

Возбуждение фазовых колебаний частиц в электронном синхротроне шумами магнитного поля, частоты и напряжения ускоряющего поля

В настоящей работе приращение амплитуды фазовых колебаний, вызванное действием различных возмущений, вычислено с учетом адиабатического и излучательного затухания. Результаты получены в виде универсальных однопараметрических функций.

1. Уравнение фазовых колебаний

Уравнение фазовых колебаний с учетом возмущений имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \left(\frac{\dot{E}}{E} + \frac{2\bar{P}_{\text{из}}}{E} \right) \dot{\varphi} + \Omega^2 \varphi - \omega \alpha \frac{\bar{P}_{\text{из}}}{E} (2n-1) \frac{r}{\rho} = \\ = -\omega \alpha \frac{p(t)}{E} + \frac{d}{dt} \Delta \omega - \frac{\omega \alpha}{H} \frac{d}{dt} \Delta H + \frac{\omega \alpha e c}{EL} \cos \Phi_s \Delta V_0 - \\ - \omega \alpha \frac{4\bar{P}_{\text{из}}}{E} \frac{\Delta H}{H} + \left(\frac{\dot{E}}{E} + \frac{2\bar{P}_{\text{из}}}{E} \right) \Delta \omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Omega = (\omega \alpha e V_0 c \sin \Phi_s / EL)^{1/2}$ — частота фазовых колебаний, E — полная энергия электрона, ω , V_0 — частота и амплитуда напряжения ускоряющего поля, $\bar{P}_{\text{из}}$ — средняя мгновенная мощность излучения, $p(t)$ — флуктуационная часть мощности излучения, α — логарифмическая производная длины орбиты по импульсу, L , ρ — длина и радиус кривизны орбиты, r — радиальное отклонение от идеальной равновесной орбиты.

Не все члены уравнения (1) имеют одинаковый порядок. Действительно, обычно выполняется неравенство $\Omega \gg \bar{P}_{\text{из}}/E$. Поэтому последние два слагаемых много меньше других членов в правой части уравнения. В дальнейшем мы не будем их рассматривать. Член содержащий $r = r_{\text{пер}} + r_{\text{св}}$, после усреднения по длине орбиты, дает дополнительное затухание [2]. Так как $\langle n r_{\text{св}} \rangle = 0$ ввиду несоизмеримости частоты изменения функций n и $r_{\text{св}}$, то после усреднения получим:

$$\left\langle \omega \frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E} (2n-1) \frac{r}{\rho} \right\rangle \approx \frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E} \left\langle \frac{(2n-1) \psi}{\rho} \right\rangle \dot{\varphi}, \quad (2)$$

где ψ — периодическое решение, определяемое равенством $r_{\text{пер}} = \psi \Delta E / E$.

Член, содержащий флюктуационную часть излучения $p(t)$, обуславливает раскочку фазовых колебаний. В электронном ускорителе он играет основную роль в динамике амплитуды фазовых колебаний. Его влияние с учетом затухания было рассмотрено в работе [3]. Наконец, остальные члены в правой части описывают влияние шумовой модуляции радио частоты, магнитного поля и амплитуды напряжения ускоряющего поля.

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2i} e^{i \int_0^t \Omega dt' - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma dt'} \times \\ & \times \frac{1}{V \varepsilon \Omega} \int_0^t dt' F(t') \sqrt{\frac{E}{\Omega}} e^{-i \int_0^{t'} \Omega dt'' + \frac{1}{2} \int_0^{t'} \gamma dt''} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $F(t)$ — означает возмущение, находящееся в правой части уравнения (1), $\gamma = \frac{2\bar{P}_{\gamma s}}{E} \left[1 - \left\langle \frac{(n-1/2) \psi}{\rho} \right\rangle \right]$.

2. Среднеквадратичная амплитуда фазовых колебаний

Рассмотрим случай, когда возмущение может быть разложено в ряд Фурье:

$$F(t) = \sum_k C_k e^{2\pi i f_k t}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2i} \frac{\exp \left\{ i \int_0^t \Omega dt' - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma dt' \right\}}{V E \Omega} \times \\ & \times \sum_k C_k \int_0^t dt' \sqrt{\frac{E}{\Omega}} e^{2\pi i f_k t' - i \int_0^{t'} \Omega dt'' + \frac{1}{2} \int_0^{t'} \gamma dt''} + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Очевидно, что основной вклад в интеграл, входящий в это выражение, дают те моменты времени, когда показатель экспоненты в под-

интегральном выражении близок к нулю. Действительно, в противном случае под интегралом стоит осциллирующая функция, интеграл от которой близок к нулю.

С физической точки зрения такие моменты соответствуют резонансам возмущающей силы, так как мгновенное значение частоты колебаний совпадает с частотой одной из гармоник возмущения.

Разложим Ω вблизи точки t_k , определенной уравнением $\Omega(t_k) = 2\pi f k$, в ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$\Omega \simeq 2\pi f k + \dot{\Omega}(t_k)(t - t_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \sqrt{\frac{E_k}{\Omega}} e^{i\left(2\pi f k t' - \int_0^{t'} \Omega dt''\right) + \frac{1}{2} \int_0^{t'} \gamma dt''} \simeq \\ & \simeq \sqrt{\frac{E_k}{\Omega_k}} e^{\frac{1}{2} \int_0^{t_k} \gamma dt} \int_0^t e^{-\frac{i}{2} \dot{\Omega}_k (t' - t_k)^2} dt'. \end{aligned}$$

Справа все функции вынесены из-под знака интеграла в момент $t = t_k$ (что отмечено индексом k). Последний интеграл можно выразить через интегралы Френеля [4]:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\frac{i}{2} \dot{\Omega}_k (t' - t_k)^2} dt' & \simeq \sqrt{\frac{\pi}{\dot{\Omega}_k}} (C - iS) \\ |C - iS| & = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Собирая вместе эти выражения, получим для φ :

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{E\Omega}} \sum_k |C_k| \sqrt{\frac{2\pi E_k}{\Omega_k \dot{\Omega}_k}} e^{\frac{1}{2} \int_0^{t_k} \gamma dt} \sin\left(\int_0^t \Omega dt' + \alpha_k\right). \quad (4)$$

Возведем φ в квадрат и усредним по фазам прохождения через резонансы. Ввиду случайности этих фаз, среднее от перекрестных членов даст нуль, а квадраты синусов будут равны 1/2. Для среднеквадратичной фазы получим:

$$\begin{aligned} & -\int_0^t \gamma dt' \quad \int_0^{t_k} \gamma dt \\ \bar{\varphi}^2 & = \pi \frac{e}{E\Omega} \sum_k |C_k|^2 \frac{E_k}{\Omega_k \dot{\Omega}_k} e^{\int_0^{t_k} \gamma dt} \quad (5) \end{aligned}$$

Так как $\Omega \gg 2\pi f$, то суммирование можно заменить интегрированием. Для этого совершаем замену

$$\frac{1}{\Omega_k} = \frac{dt}{d\Omega} = \frac{dt}{2\pi f}$$

$$\bar{\varphi}^2 = \pi \frac{e}{E\Omega} \int_0^t dt' \frac{E}{\Omega} \eta(t') e^{-\int_0^{t'} \gamma dt''} \quad (6)$$

Здесь $\eta = |C_k|^2/2\pi f$ — аналог спектральной интенсивности шума. $\eta(t)$ зависит от времени потому, что амплитуды C_k являются функциями k , т. е. номера, по которому производится суммирование в (6).

Замечая, наконец, что $\bar{\varphi}_{\max}^2 = 2\bar{\varphi}^2$, получим выражение для среднеквадратичной амплитуды фазовых колебаний:

$$\bar{\varphi}_{\max}^2 = 2\pi \frac{e}{E\Omega} \int_0^t dt' \frac{E}{\Omega} \eta e^{-\int_0^{t'} \gamma dt''} \quad (7)$$

Если E можно приближенно считать постоянной, то функцию, входящую в (7), можно представить в универсальном виде. Учтя, что мощность излучения $\bar{P}_{\gamma k}$ пропорциональна четвертой степени энергии, легко получить, что

$$\int_0^t \gamma dt' = (1 + \beta)\zeta; \quad (8)$$

где $\zeta = \bar{P}_{\gamma k}/E$, а β константа, зависящая от параметров ускорителя. Переменная ζ в свою очередь пропорциональна четвертой степени энергии:

$$\zeta = (bE)^4. \quad (9)$$

Перейдем от интегрирования по t к интегрированию по ζ . Тогда для среднеквадратичной амплитуды фазовых колебаний получим:

$$\bar{\varphi}_{\max}^2 = \frac{\pi}{2Eb d^2} A_\beta(\zeta), \quad (10)$$

где d определено равенством

$$\Omega = d\zeta^{-1/4} (1 + \zeta)^{1/4}, \quad (11)$$

а b из (9). Функция $A_\beta(\zeta)$ имеет вид:

$$A_\beta(\zeta) = \frac{e^{-(1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/4} (1+\zeta)^{1/4}} \int_\zeta^\infty du \frac{\eta(u) e^{-(1+\beta)u}}{u^{1/4} (1+u)^{1/4}}. \quad (12)$$

Если в начале ускорения излучением можно пренебречь ($\zeta \ll 1$), то:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{2\pi b}{E d^2} A_0 \quad (13)$$

$$A_0 = E \int_{E_0}^E dE E^{1/2} \eta(E). \quad (14)$$

3. Возбуждение фазовых колебаний шумами

Рассмотрим увеличение амплитуды фазовых колебаний, вызванное наличием шумов в устройствах ускорителя.

Модуляция радиочастоты.

В этом случае, как следует из (1), функция

$$F(t) = \frac{d}{dt} \Delta \omega = 2\pi \frac{d}{dt} \Delta \nu.$$

Разложим $\Delta \nu$ в ряд Фурье:

$$\Delta \nu = \sum_k w_k^m \exp(2\pi i f k t).$$

В этом случае функция η , входящая в (12), принимает вид:

$$\eta = \frac{2\pi d^2}{f} |w_k^m|^2 \frac{1 + \zeta}{\zeta^{1/2}}.$$

Подставляя в (10) и (12), получим выражение для среднеквадратичной амплитуды, вызванной модуляцией частоты:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{\pi^2 |w_k^m|^2}{E f b} A_{\beta}^{(1)}(\zeta), \quad (15)$$

$$A_{\beta}^{(1)}(\zeta) = \frac{e^{-(1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/2} (1+\zeta)^{1/2}} \int_0^{\zeta} du \frac{e^{-(1+\beta)u}}{u^{1/2}} (1+u)^{1/2}.$$

При выводе (15) было предположено, что амплитуда w_k^m постоянна в интересующем нас интервале частот: $w_k^m = w^m$.

Функция $A_{\beta}^{(1)}(\zeta)$ для $\beta = -0,30; -0,40; -0,70$ приведена на рис. 1 (кривые *a*, *b* и *b* соответственно).

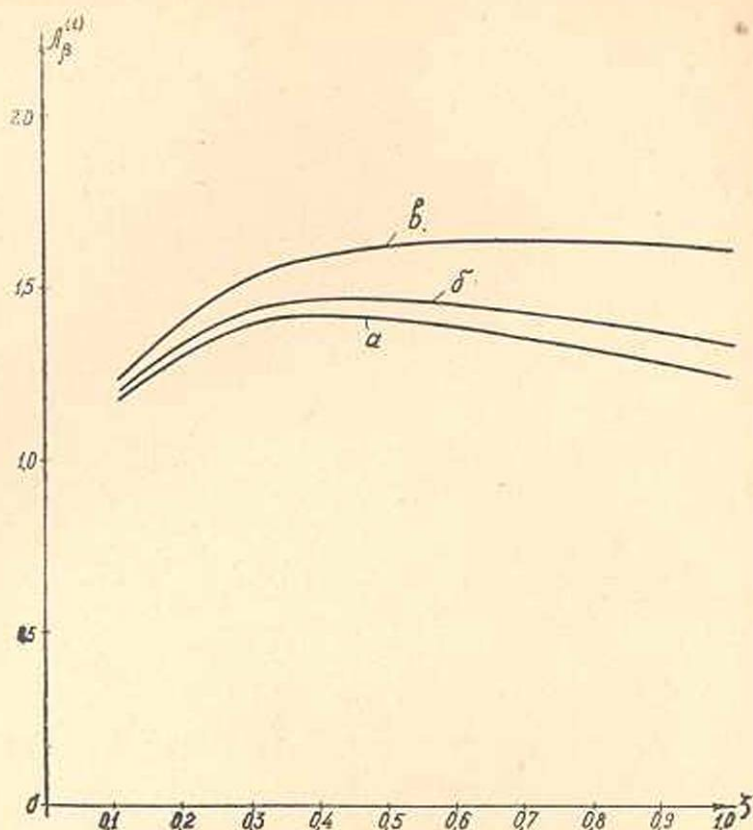


Рис. 1. Функция $A_{\beta}^{(1)}(\zeta)$. Кривые a , b и σ соответствуют параметрам затухания β равным $-0,30$; $-0,40$; $-0,70$.

Модуляция амплитуды ускоряющего напряжения.

В этом случае

$$F(t) = \frac{\Omega^2}{\operatorname{tg} \Phi_s} \frac{\Delta V_0}{V_0}.$$

Разберем отдельно две возможности:

$$a) \Delta V_0 / V_0 = \sum_k w_{1k}^V \exp \{2\pi i f k t\},$$

$$б) \Delta V_0 = \sum_k w_{2k}^V \exp \{2\pi i f k t\}.$$

а) В первом случае будем считать, что не зависящей от k является амплитуда относительного шума: $w_{1k}^V = w_1^V$. Тогда аналогично (15) получим:

$$\bar{\varphi}_{\max}^2 = \frac{d^2}{4\dot{E}f b t g^2 \Phi_s} |u_1^V|^2 A_{\beta}^{(2)}(\zeta) \quad (16)$$

$$A_{\beta}^{(2)}(\zeta) = \frac{e^{- (1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/2} (1+\zeta)^{1/2}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} du \frac{e^{(1+\beta)u}}{u^{1/2} (1+u)^{1/2}}.$$

На рис. 2 приведены графики функции $A_{\beta}^{(2)}(\zeta)$ для трех значений параметра затухания $\beta = -0,30; -0,40; -0,70$ (кривые $a, б, в$)

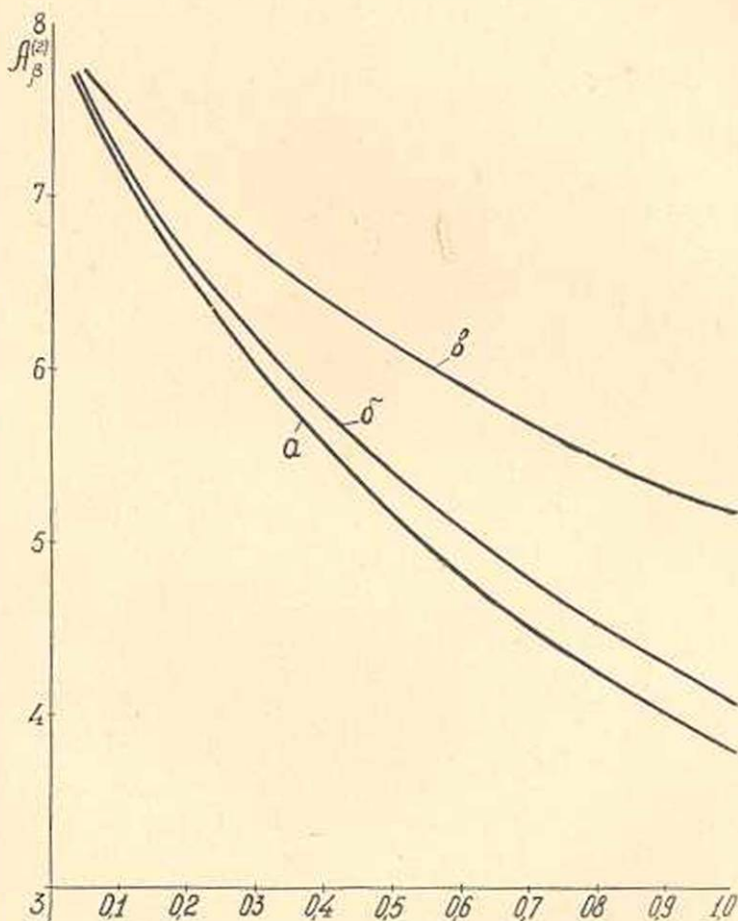


Рис. 2. Функция $A_{\beta}^{(2)}(\zeta)$. Кривые $a, б$ и $в$ соответствуют параметрам затухания β равным $-0,30; -0,40; -0,70$.

б) Во втором случае примем, что не зависящей от k является амплитуда абсолютного шума: $m_{2k}^V = m_2^V$. Тогда:

$$\bar{\varphi}_{\max}^2 = \frac{b\Omega_0^4}{4\dot{E}f d^2 t g^2 \Phi_s} \frac{|m_2^V|^2}{V_{(0)}^2} A_{\beta}^{(3)}(\zeta) \quad (17)$$

$$A_{\beta}^{(3)}(\zeta) = \frac{e^{- (1+\beta)\zeta}}{\zeta^{1/2} (1+\zeta)^{1/2}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} du \frac{e^{(1+\beta)u}}{u^{1/2} (1+u)^{1/2}}.$$

Здесь введены обозначения Ω_0 , V_{00} — частота фазовых колебаний и амплитуда ускоряющего напряжения в начальный момент.

На рис. 3 приведены графики функций $A_\beta^{(3)}(\zeta)$ для значений параметра затухания $\beta = -0,30$; $-0,40$; $-0,70$ (кривые a , b , $в$).

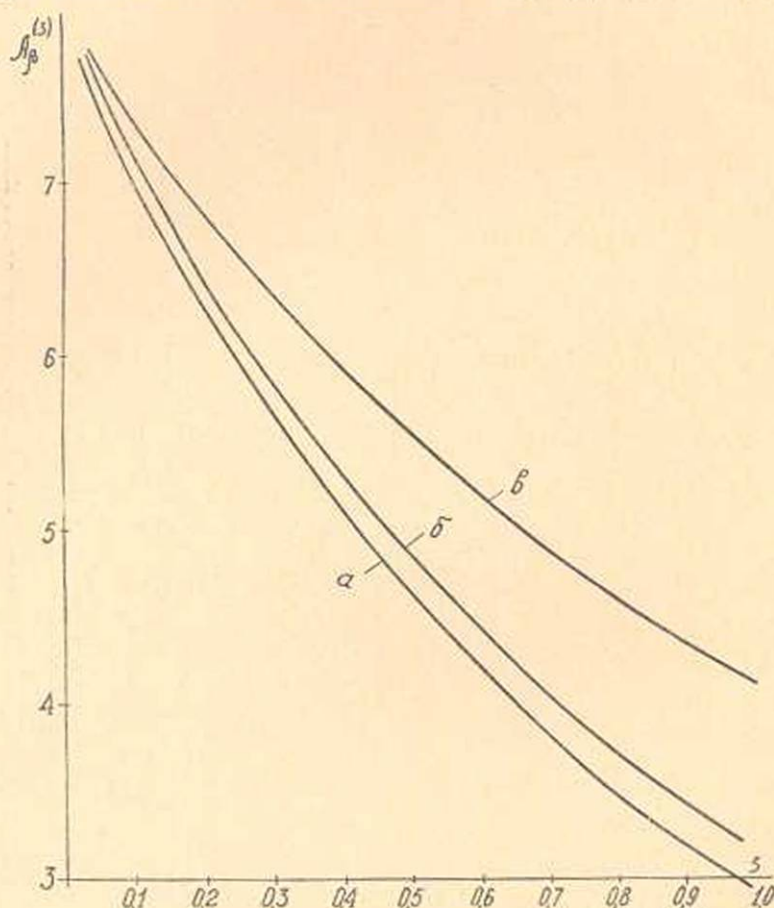


Рис. 3. Функция $A_\beta^{(3)}(\zeta)$. Кривые a , b и $в$ соответствуют параметрам затухания β равным $-0,30$; $-0,40$; $-0,70$.

Модуляция напряженности магнитного поля.

Этот тип возмущения дает в правой части уравнения (1) член:

$$F(t) = \frac{\omega z}{H} \frac{d}{dt} \Delta H.$$

Если магнитное поле модулировано из-за модуляции питающего напряжения V_M , то

$$\frac{1}{H} \frac{d}{dt} \Delta H = \frac{\Delta V_M}{V_M}.$$

Разложив $\Delta V_M/V_M$ в ряд Фурье

$$\Delta V_M / V_M = \sum_k w_k^H \exp \{2\pi i f k t\}.$$

и приняв, что амплитуды w_k^H не зависят от k получим:

$$\overline{\varphi^2}_{\max} = \frac{\omega^2 a^2 b \bar{E}}{4 d^2 f} |w^H|^2 A_p^{(3)}(\zeta), \quad (18)$$

где функция $A_p^{(3)}$ определена в (17).

Автор приносит Ю. Ф. Орлову глубокую благодарность за участие в обсуждении работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 17 III 1959 г.

Ս. Ս. ԽԵՆԴԵԿ

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ, ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳԱՑՆՈՂ
ԴԱՇՏԻ ԱՂՄՈՒԿՆԵՐՈՎ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՖԱԶԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ
ԳՐԳՌՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՍԻՆԽՐՈՏՐՈՆՈՒՄ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ւ Մ.

Աշխատության մեջ հաշվված է ֆազային տատանումների ամպլիտուդայի աճը տարբեր զրգուղմների ազդեցության հետևանքով, հաշվի առնելով աղիարատիկ և ճառագայթային մարումները: Արդյունքներն ստացված են ռելյեֆիսով մեկ պարամետրանի ֆունկցիաների տեսքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольдин Л. Л., Кошкарев Д. Г. Synchrotron oscillations in strong-focusing accelerators (Linear theory). Nuovo Cimento, 2, 1251, 1955.
Синхротронные колебания в сильнофокусирующем ускорителе (линейная теория), ЖЭТФ, 11, 803 1956.
2. Орлов Ю. Ф., Тарасов Е. К. Затухание колебаний в электронном циклическом ускорителе, ЖЭТФ, 34, 651 1958.
3. Орлов Ю. Ф., Тарасов Е. К. Возбуждение колебаний в электронном циклическом ускорителе квантовыми флуктуациями излучения. ПТЭ, 5, 17, 1958.
4. Таблицы интегралов Френеля, М., 1953, изд. АН СССР.

ТЕРМОДИНАМИКА

А. А. Акопян

Дидактические заметки по термодинамике

§ 1. Второе начало

1. Цель настоящей заметки — указать простой вывод всего содержания второго начала термодинамики из постулата Томсона.

Следует заметить, что из трех постулатов — Клаузиуса, Каратеодори, Томсона, — которые обычно кладутся в основу второго начала, преимущественно принадлежит последнему, как имеющему непосредственные применения и более общему, чем постулат Каратеодори.

2. Постулат Томсона.

Обозначим через DW_e и DQ элементарную внешнюю работу и элементарное количество теплоты, а через W_e и Q внешнюю работу и теплоту в течение цикла:

$$W_e = \oint DW_e, \quad (1.1)$$

$$Q = \oint DQ. \quad (1.2)$$

Согласно первому началу

$$Q + W_e = 0. \quad (1.3)$$

Постулат Томсона состоит в следующем:

В монотермическом* цикле внешняя работа не может быть отрицательной, т. е.

$$\oint DW_e > 0, \quad (1.4)$$

или по (1.3)

$$\oint DQ < 0. \quad (1.5)$$

Легко доказать, что знак $=$ относится к обратимым монотермическим циклам. Но в таких циклах температура t должна быть постоянной; поэтому, ограничиваясь обратимыми монотермическими циклами, вместо (1.5) имеем

* Монотермическим называется цикл (или процесс), в течение которого система находится в тепловом общении только с одним источником.

$$\oint D_t Q = 0 \quad (1.6)$$

(индекс t указывает на постоянство температуры).

(1.6) применимо к *любому* обратимому монотермическому циклу, а отсюда, как известно, вытекает, что должна существовать функция φ состояния, удовлетворяющая условию

$$D_t Q = d_t \varphi. \quad (1.7)$$

Если параметрами системы являются $t, x, y, z, \dots$, то

$$\varphi = \varphi(t, x, y, z, \dots). \quad (1.8)$$

3. Пусть $\theta = \theta(t)$ одинаковая для всех систем функция эмпирической температуры* t . Тогда, разделив φ на θ , получим новую функцию состояния $\psi(t, x, y, z, \dots)$.

$$\frac{\varphi(t, x, y, z, \dots)}{\theta(t)} = \psi(t, x, y, z, \dots) \quad (1.9)$$

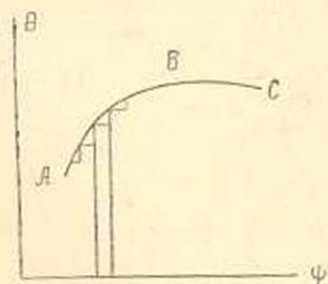
и (1.7) примет вид

$$D_t Q = \theta d_t \psi. \quad (1.10)$$

Очевидно, (1.10) справедливо и для любого (неизотермического) обратимого процесса.

В этом проще всего убедиться, рассмотрев какой-нибудь обратимый процесс в координатной системе $\theta - \psi$ (фиг. 1).

Пусть ABC линия такого процесса. Заменим эту линию ступенчатой, с бесконечно малыми отрезками, параллельными осям $O\theta$ и $O\psi$. Площадь полоски, бесконечно малое основание которой параллельно $O\psi$, равна $D_t Q$ согласно (1.10). Отсюда следует, что



$$Q_{ABC} = \int_A^C \theta d\psi.$$

Итак в случае любого обратимого элементарного процесса

$$\frac{DQ}{\theta} = d\psi(t, x, y, z, \dots). \quad (1.11)$$

Фиг. 1.

4. Функцию $\theta(t)$ можно определить, пользуясь тем, что она одна и та же для всех систем.

Для этого удобнее всего обратиться к идеальным газам постоянного состава.

Как известно, в таком газе молярная внутренняя энергия функция только температуры и поэтому приращение всей внутренней энергии

* Температура t , измеряемая произвольным термометром, называется эмпирической.

$$dU = nc_v dt,$$

где n — число молей, а молярная теплоемкость c_v (при постоянном объеме) — функция температуры: $c_v = c_v(t)$.

Таким образом первое начало

$$DQ = dU + p dV$$

дает (так как $p dV = nRT d \ln v$)

$$DQ = nT \left(\frac{c_v}{T} dt + R d \ln v \right).$$

Введем функцию $\omega(t)$, определяемую условием

$$d\omega(t) = \frac{c_v}{T} dt.$$

Тогда, окончательно,

$$\frac{DQ}{T} = n [d\omega(t) + R d \ln v] = d [n [\omega(t) + R \ln v]] \quad (1.12)$$

($n = \text{const}$).

В (1.11) и (1.12) правые части — дифференциалы функции состояния, следовательно, $\frac{DQ}{\theta}$ и $\frac{DQ}{T}$ — полные дифференциалы.

5. (1.11) и (1.12) применимы к одному и тому же произвольно-обратимому процессу в идеальном газе. В случае одного и того же произвольного цикла в идеальном газе имеем

$$\oint \frac{DQ}{\theta} = 0, \quad \oint \frac{DQ}{T} = 0. \quad (1.13)$$

Ввиду произвольности цикла и ввиду того, что θ — функция t или T , (1.13) возможно только при условии, что

$$\theta = aT, \quad (1.14)$$

где a — произвольная постоянная, которую обычно принимают равной единице.

Вспомнив, что θ — одна и та же функция температуры для всех систем (и положив $a = 1$), заключаем:

В случае произвольного элементарного процесса в любой системе

$$\frac{DQ}{\theta} = \frac{DQ}{T} = d\psi(t, x, y, z, \dots).$$

Функция ψ состояния называется энтропией s .

6. Из постулата Томсона можно вывести еще заключения о необратимых процессах:

а) $d_{as} > 0$,

где индекс a означает „в необратимом адиабатном процессе“.

б) Если обратимый изотермический процесс и необратимый монотермический процесс имеют общее начало и общий конец, то теплота первого процесса больше теплоты второго.

Обоснование этих заключений можно найти в книгах [1].

Легко также доказать, что постулат Каратеодори — следствие постулата Томсона [2].

§ 2. Об одном выводе правила фаз Гиббса

1. Недавно я познакомился со статьей „The State Principle“ [3], вызвавшей оживленную дискуссию [4].

Основная идея статьи в том, что правило фаз Гиббса может быть выведено без пользования первым и вторым началами термодинамики, если принять:

а) подходящее определение понятия „компонент“.

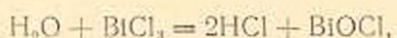
б) положение, выражающее число независимых (экстенсивных и интенсивных) признаков системы посредством числа компонентов.

2. Данное авторами определение понятия „компонент“ можно — при желании быть кратким — высказать так.

Компоненты — это те химически определенные вещества, которые, будучи взяты в наименьшем числе, позволяют образовать каждую фазу рассматриваемой системы в количестве, независимом от масс других фаз.

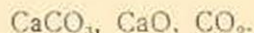
Условие независимости масс фаз очень важно и иллюстрируется авторами на примере системы, состоящей из двух фаз: твердой BiOCl и жидкой смеси $\text{H}_2\text{O} + \text{HCl} + \text{BiCl}_3$.

Если эта система образована H_2O и BiCl_3 согласно уравнению реакции



то масса твердой фазы зависит от массы жидкой. Следовательно, число компонентов должно быть больше двух. За компоненты могут быть приняты H_2O , BiCl_3 и HCl ; теперь прибавлением HCl можно сделать массу твердой фазы независимой от массы жидкой.

Более простой пример являет трехфазная система $\text{CaCO}_3 + \text{CaO} + \text{CO}_2$. Если предположить, что система образована разложением CaCO_3 , числа молей CaO и CO_2 должны быть одинаковы. Таким образом требование независимости масс фаз будет выполнено только, если число компонентов равно двум; за компоненты можно принять любую пару веществ из трех:



Нужно иметь в виду, что при обычном выводе независимость масс фаз является следствием правила фаз.

3. Число всех независимых признаков легко выразить посредством числа фаз. В самом деле, частное от деления экстенсивного

признака фазы на ее массу равно соответствующему интенсивному признаку. Таким образом, если известны все интенсивные признаки, то можно определить также все экстенсивные признаки каждой фазы, зная ее массу.

Пусть ν — число независимых интенсивных признаков; по ним можно найти все интенсивные признаки, а по последним и по массам фаз — все экстенсивные признаки. Следовательно, если φ — число фаз, а r — число всех независимых (интенсивных и экстенсивных) признаков, то

$$r = \nu + \varphi. \quad (2.1)$$

Эти рассуждения не новы; я с ними познакомился в книге [5].

Чтобы использовать (2.1), авторы постулируют без какой-нибудь аргументации положение:

Число r всех независимых признаков любой системы (подверженной одному и тому же давлению)

$$r = c + 2, \quad (2.2)$$

где c — число компонентов.

Сопоставление (2.1) и (2.2) приводит к правилу фаз

$$\nu = c + 2 - \varphi. \quad (2.3)$$

4. Положение (2.2) общепринято, когда система однородна. В самом деле, независимыми интенсивными признаками однородной системы являются состав, давление, температура. Состав фазы, образованной c компонентами, определяется $c-1$ весовыми или молярными долями x_i , так как $x_1 + x_2 + \dots + x_c = 1$.

Для определения экстенсивных признаков нужно знать еще массу. Таким образом

$$r = (c-1) + 2 + 1 = c + 2,$$

т. е. (2.2).

Пользуясь свойствами химических потенциалов, можно этот результат распространить на систему с любым числом фаз.

Действительно, для определения состава и массы каждой фазы нужно $(c-1)+1=c$ данных. Для определения состава и массы всех φ фаз нужно $c\varphi$ данных. Кроме того имеются давление (одинаковое на все фазы) и температура. Всего $c\varphi+2$ величин. Однако, очевидно, весовые (или молярные) доли не являются независимыми, так как химические потенциалы компонента в фазе зависят от $c-1$ весовых долей, давления и температуры

$$\mu = \mu(x_1, x_2, \dots, x_{c-1}, p, t),$$

а химические потенциалы компонента A_k во всех фазах одинаковы, т. е.

$$\mu_k^1 = \mu_k^2 = \dots = \mu_k^\varphi.$$

Это дает $\varphi-1$ зависимостей для одного компонента или $c(\varphi-1)$ зависимостей для c компонентов.

Таким образом из числа $c\varphi + 2$ величин нужно вычесть $c(\varphi - 1)$ зависимостей между ними и число независимых признаков окажется равным $c + 2$, независимо от числа фаз.

Наконец, очевидно, в общем случае (2.2) является непосредственным следствием правила фаз (2.3) и (2.1).

5. Итак в рассматриваемой статье вывод правила фаз основан на определении понятия компонент и на (2.2). Но как требование независимости масс фаз, включенное в это определение, так и (2.2) являются следствиями правила фаз.

Следовательно предлагаемый в статье „The State Principle“ вывод правила фаз не имеет научного значения.

Этот вывод мог быть дидактически полезным, если бы положение (2.2) легко воспринималось в качестве постулата.

Но этого нет: даже выведя (2.2) для однородных систем, нельзя усмотреть его правильность в общем случае без новых выкладок.

§ 3. Об использовании константы равновесия

1. В 1930—34 годах происходила дискуссия, вызванная фактом, нарушавшим установившиеся представления: было обнаружено, что иногда изобарно-изотермическое введение в равновесную смесь газов NH_3 , N_2 и H_2 некоторого количества N_2 вызывает частичное разложение NH_3 , вместо обычного при этом образования нового количества NH_3 .

Вопрос в конце концов был решен с помощью термодинамического и химического потенциалов.

Однако, объяснять поведение равновесной смеси газов призвана константа равновесия. Поэтому было бы естественно объяснить и упомянутый факт, пользуясь константой равновесия, тем более, что полная теория равновесия смеси идеальных газов может быть построена без указанных потенциалов.

Здесь с помощью константы равновесия рассмотрен вопрос, вызвавший дискуссию, и аналогичный другой вопрос.

2. Пусть смесь состоит из газов $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_l$, а уравнение реакции

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = 0, \quad (3.1)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — стехиометрические числа, причем одни из них положительны, другие — отрицательны.

Из (3.1) следует, что газы $A_1, A_2, \dots, A_k$ — активные, а $A_{k+1}, \dots, A_l$ — инертные (нейтральные).

Обозначим через n_r и p_r число молей и парциальное давление газа A_r ($r = 1, 2, \dots, k, \dots, l$), а общее число молей в смеси и общее давление — через n и p

$$\left. \begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_l \\ p &= p_1 + p_2 + \dots + p_l \end{aligned} \right\}. \quad (3.2)$$

Как известно,

$$\frac{dn_1}{\alpha_1} = \frac{dn_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{dn_k}{\alpha_k} \quad (3.3)$$

и поэтому

$$\frac{dn_r}{\alpha_r} = \frac{d(n_1 + n_2 + \dots + n_k)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}.$$

Так как

$$dn_{k+1} = dn_{k+2} = \dots = dn_l = 0,$$

то, положив

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \quad (3.4)$$

имеем

$$\frac{dn_r}{\alpha_r} = \frac{dn}{\alpha}, \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (3.5)$$

Наконец, мы будем пользоваться тем, что

$$\frac{p_r}{p} = \frac{n_r}{n}, \quad p_r = \frac{p}{n} n_r. \quad (3.6)$$

3. Константа равновесия может быть выражена как посредством чисел молей, так и посредством парциальных давлений:

$$\ln K_n = \sum_1^k \alpha_r \ln n_r, \quad (3.7)$$

$$\ln K_p = \sum_1^k \alpha_r \ln p_r. \quad (3.8)$$

Из (3.6) следует, что

$$\ln K_p = \ln K_n + \alpha \ln p - \alpha \ln n, \quad (3.9)$$

а из (3.5) получим

$$d \ln K_n = \sum_1^k \alpha_r \frac{dn_r}{n_r} = \left(\sum_1^k \frac{\alpha_r^2}{n_r} \right) \frac{dn}{\alpha} = B \frac{dn}{\alpha}, \quad (3.10)$$

где

$$B = \sum_1^k \frac{\alpha_r^2}{n_r} > 0 \text{ всегда.} \quad (3.11)$$

Вот одно из применений (3.10).

Известно, что

$$\ln K_n = \alpha \ln V + \omega(t)$$

(t — температура, $\omega(t)$ — функция температуры).

Отсюда

$$\left(\frac{\partial \ln K_n}{\partial \ln V} \right)_t = \alpha,$$

а по (3.10)

$$\left(\frac{\partial \ln K_n}{\partial \ln V} \right)_t = B \left(\frac{\partial n}{\partial \ln V} \right)_t \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом

$$B \left(\frac{\partial n}{\partial \ln V} \right)_t = \alpha^2. \quad (3.12)$$

Согласно (3.11) и (3.12)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial \ln V} \right)_t &= 0, & \text{если } \alpha &= 0, \\ \left(\frac{\partial n}{\partial \ln V} \right)_t &> 0, & \text{если } \alpha &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Зависимости (3.13) хорошо известны.

Изотермическое изменение объема равновесной смеси идеальных газов

а) не изменяет ее состава, если реакция оставляет неизменным общее число молей,

б) вызывает ту из двух противоположных реакций, в которой знак изменения числа молей совпадает со знаком изменения объема.

В последующем нужно помнить, что в выражение K_n (3.7) входят только числа молей активных газов, поэтому

[3, А]. Изменение количества нейтральных газов не может изменить K_n .

4. Влияние нейтральных газов на состав равновесной смеси идеальных газов при постоянных давлении и температуре.

Условимся обозначать через n_n число молей какого-нибудь нейтрального газа, через δ (δn , $\delta \ln K_p$, $\delta \ln K_n$) — изменения величин, вызванные внесением извне элементарного количества какого-нибудь газа, а через d (dn , $d \ln K_p$, $d \ln K_n$) — изменения, вызванные реакцией.

При изобарно-изотермическом внесении δn_n молей нейтрального газа

$$\delta n = \delta n_n.$$

Согласно [3, А] из (3.9) имеем

$$\delta \ln K_p = -\alpha \frac{\delta n_n}{n}. \quad (3.14)$$

Известно, что K_p — функция температуры, поэтому из (3.14) следует, что если $\alpha \neq 0$, то внесение нейтрального газа нарушит равновесие, т. е. вызовет реакцию, при которой по (3.9) и (3.10)

$$d \ln K_p = d \ln K_n - \alpha \frac{dn}{n} = B \frac{dn}{\alpha} - \alpha \frac{dn}{n}$$

(так как $p = \text{const}$),

или

$$d \ln K_p = \left(B - \frac{\alpha^2}{n} \right) \frac{dn}{\alpha}. \quad (3.15)$$

Новое равновесие установится только при условии, что полное изменение K_p (вызванное внесением δn_n молей нейтрального газа и последующей реакцией) равно 0, т. е.

$$\delta \ln K_p + d \ln K_p = 0, \quad (3.16)$$

или по (3.14) и (3.15)

$$\left(B - \frac{\alpha^2}{n} \right) dn = \alpha^2 \frac{\delta n_n}{n}. \quad (3.17)$$

Легко убедиться на примерах (и это же можно строго доказать), что

$$B - \frac{\alpha^2}{n} > 0 \text{ всегда.} \quad (3.18)$$

Таким образом при $\alpha \neq 0$ dn и δn_n имеют один и тот же знак, а если $\alpha = 0$, то $dn = 0$.

Следовательно

[3, Б]. Изобарно-изотермическое внесение в равновесную смесь идеальных газов нейтрального газа

а) не вызывает реакции, если при реакции общее число молей не изменяется,

б) в противном случае вызывает реакцию, увеличивающую общее число молей смеси.

5. Влияние активных газов на состав равновесной смеси идеальных газов при постоянных давлении и температуре.

Вначале в равновесную смесь вносим δn_r молей одного из активных газов A_r ($r = 1, 2, \dots, k$). Теперь $\delta n = \delta n_r$, $\delta \ln K_n = \alpha_r \frac{\delta n_r}{n_r}$. Поэтому при $p = \text{const.}$,

$$\delta \ln K_p = \delta \ln K_n - \alpha \frac{\delta n}{n} = \left(\frac{\alpha_r}{n_r} - \frac{\alpha}{n} \right) \delta n_r. \quad (3.19)$$

Так как $\delta \ln K_p \neq 0$, то внесение δn_r молей газа A_r должно вызвать реакцию, в течение которой пусть $\ln K_p$ изменится на $d \ln K_p$, причем по (3.15) и (3.5)

$$d \ln K_p = \left(B - \frac{\alpha^2}{n} \right) \frac{dn}{\alpha} = \left(B - \frac{\alpha^2}{n} \right) \frac{dn_r}{\alpha_r}. \quad (3.20)$$

Согласно (3.16), (3.19) и (3.20) равновесие наступит, когда

$$\left(B - \frac{\alpha^2}{n}\right) dn_r = \left(\frac{\alpha\alpha_r}{n} - \frac{\alpha_r^2}{n_r}\right) \delta n_r. \quad (3.21)$$

Помня (3.18), из (3.21) заключаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } dn_r &= 0, \text{ если } \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha_r}{n_r} = 0, \\ \text{б) } \text{знаки } dn_r \text{ и } \delta n_r &\text{ одинаковы, если } \frac{\alpha\alpha_r}{n} - \frac{\alpha_r^2}{n_r} > 0, \\ \text{в) } \text{знаки } dn_r \text{ и } \delta n_r &\text{ различны, если } \frac{\alpha\alpha_r}{n} - \frac{\alpha_r^2}{n_r} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Заметим, что знак произведения $\alpha\alpha_r$ не зависит от направления реакции и что при $\alpha\alpha_r < 0$

$$\frac{\alpha\alpha_r}{n} - \frac{\alpha_r^2}{n_r} < 0,$$

следовательно знаки dn_r и δn_r различны.

Таким образом условие $\alpha\alpha_r > 0$ необходимо для того, чтобы δn_r и dn_r были одного знака.

В качестве примера рассмотрим смесь газов NH_3 , N_2 и H_2 ; уравнение реакции



Отнесем индексы 1, 2, 3 соответственно к NH_3 , N_2 и H_2 ; тогда

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -3, \quad \alpha = -2,$$

$$\alpha\alpha_1 = -4, \quad \alpha\alpha_2 = +2, \quad \alpha\alpha_3 = +6.$$

Положив $r = 1$, видим, что $\alpha\alpha_1 < 0$ и поэтому изобарно-изотермическое внесение некоторого количества NH_3 не может вызвать реакцию образования NH_3 . А изобарно-изотермическое внесение N_2 ($r = 2$) может вызвать реакцию разложения NH_3 , т. е. реакцию образования N_2 .

Однако надо помнить, что условие $\alpha\alpha_r > 0$ необходимо для того, чтобы δn_r и dn_r имели один и то же знак, но может оказаться недостаточным. Условием же необходимым и достаточным является (3.22), б):

$$\frac{\alpha\alpha_r}{n} - \frac{\alpha_r^2}{n_r} > 0.$$

В случае системы $\text{NH}_3 + \text{N}_2 + \text{H}_2$ при $r = 2$ имеем

$$\frac{\alpha\alpha_2}{n} - \frac{\alpha_2^2}{n_2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n_2}. \quad (3.24)$$

Предположим, что в равновесной смеси NH_3 , N_2 и H_2 числа молей NH_3 и H_2 , т. е. n_1 и n_3 , очень малы; тогда

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \approx n_2$$

и (3.24) примет вид

$$\frac{\alpha x_2}{n} - \frac{\alpha_2^2}{n_2} = \frac{1}{n_2} > 0,$$

т. е. имеет место случай (3.22, б) и, следовательно, в этих условиях изобарно-изотермическое внесение N_2 в равновесную смесь вызовет частичное разложение NH_3 , т. е. образование некоторого количества N_2 .

Следует также иметь в виду теоретически возможный случай (3.22, а), когда изобарно-изотермическое внесение активного газа не вызывает никакой реакции.

6. Результат [3, Б] может быть получен без вычислений, выполненных в пункте 4. Но способ, о котором идет речь, неприменим к случаям, когда в смесь вводится активный газ.

Этот способ основан на общеизвестном положении, которое — применительно к нашей системе — может быть выражено так: Каким бы способом ни производилось внесение газа, новый равновесный состав определяется конечными давлением и температурой.

Внесем *изохорно*-изотермическим образом некоторое количество нейтрального газа. Согласно [3, А] это не вызовет последующей реакции, но повысит общее давление. Следовательно, чтобы при неизменной температуре привести давление к начальному значению, нужно некоторое изотермическое увеличение объема; к этому процессу применим (3.13). Отсюда [3, Б].

§ 4. Об одном классе двойных двухфазных систем

1. Одна из теорем Гиббса-Коновалова такова:

[4, А] Если изотермическим изменением состояния двойной двухфазной системы можно достичь одинаковости составов обеих фаз, то в этом состоянии давление имеет экстремум.

Общих признаков, позволяющих предсказать будет ли экстремум максимумом или минимумом, не существует.

В книге [6] приведены графики, показывающие, что для одного класса систем экстремум является минимумом. Однако теоретического обоснования нет.

Этот пробел восполнен здесь.

2. Рассмотрим систему, состоящую из смеси газов A_1 и A_2 и конденсированной фазы, представляющей химическое соединение A_1 и A_2 согласно уравнению

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0. \quad (4.1)$$

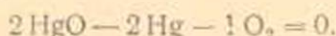
Примеры таких систем:

- а) конденсированная фаза $Hg_2Cl_2(A_3)$; газовая фаза — смесь $HgCl_2$ и $Hg(A_1, A_2)$;
- б) конденсированная фаза HgO ; газовая фаза — смесь Hg и O_2 ;
- в) конденсированная фаза NH_2CONH_2O ; газовая фаза — смесь CO_2 и NH_3 ;

г) конденсированная фаза NH_4Cl ; газовая фаза — смесь NH_3 и HCl .

В уравнении реакции (4.1), очевидно, α_1 и α_2 имеют один и тот же знак, а α_3 — им противоположный.

Так, в системе а)



Обозначая конденсированную фазу индексом k , а молярную долю буквой x , имеем: молярные доли x_{1k} и x_{2k} компонентов A_1 и A_2 в конденсированной фазе

$$x_{1k} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad x_{2k} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \frac{x_{1k}}{x_{2k}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (4.2)$$

Парциальные давления p_1 и p_2 , числа молей n_1 и n_2 и молярные доли x_1 и x_2 в газовой фазе связаны отношениями

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{x_1}{x_2}. \quad (4.3)$$

При реакции (4.1) изменяются массы фаз, состав конденсированной фазы постоянен, молярные доли x_1 и x_2 газовой смеси в общем случае изменяются; x_1 и x_2 окажутся неизменными только в том случае, если выполнено условие

$$x_1 = x_{1k}, \quad x_2 = x_{2k}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (4.4)$$

При условии (4.4) газовая смесь может быть получена разложением соединения и вся система должна считаться однокомпонентной.

3. Так как A_3 образует конденсированную фазу, то константы K_p и K_x равновесия газовой смеси выразятся так:

$$\ln K_p = \alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2, \quad \ln K_x = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2. \quad (4.5)$$

Кроме того

$$\frac{p_1}{p} = \frac{n_1}{n} = x_1, \quad \frac{p_2}{p} = \frac{n_2}{n} = x_2,$$

где n — общее число молей газовой смеси; поэтому из (4.5) получаем

$$\ln K_p = \ln K_x + \alpha \ln p. \quad (4.6)$$

(4.5) и (4.6) позволяют установить зависимость состава газовой смеси (например зависимость x_1) от давления.

В самом деле, K_p — функция только температуры; поэтому, дифференцируя (4.6) при $t = \text{const}$, имеем по (4.5)

$$d \ln K_p = \alpha_1 \frac{dx_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha \frac{dp}{p} = 0.$$

Но $dx_2 = -dx_1$ (так как $x_1 + x_2 = 1$); следовательно, предыдущее равенство можно переписать так

$$\left(\frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1}\right) dx_1 = z \frac{dp}{p}. \quad (4.7)$$

Уже было сказано, что z_1 , z_2 и $z (= z_1 + z_2)$ имеют один и тот же знак. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать z_1 , z_2 и z положительными. Тогда из (4.7) следует:

$$\text{при } dp > 0 \text{ также } \left(\frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1}\right) dx_1 > 0. \quad (4.8)$$

Так как по (4.2)

$$\frac{z_2}{x_{2k}} - \frac{z_1}{x_{1k}} = 0 \quad (4.9)$$

то, очевидно, при

$$\begin{aligned} x_1 &> x_{1k} \text{ и } x_2 < x_{2k} \\ \frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1} &> 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

а при

$$\begin{aligned} x_1 < x_{1k}, \quad x_2 > x_{2k} \\ \frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1} < 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.8) и (4.10) заключаем

$$dx_1 > 0 \text{ при } dp > 0, \text{ если } x_1 > x_{1k}. \quad (4.12)$$

(4.8) и (4.11) дают

$$dx_1 < 0 \text{ при } dp > 0, \text{ если } x_1 < x_{1k}. \quad (4.13)$$

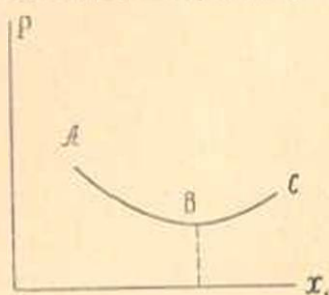
Наконец, из (4.8), (4.9) и (4.2) следует

$$dx_1 = 0, \quad dp = 0, \text{ если } x_1 = x_{1k} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}. \quad (4.14)$$

(4.12) — (4.14) означают, что в координатной системе $p - x_1$ изотерма имеет вид линии ABC , причем в B (когда $x_1 = x_{1k}$) p достигает минимума (фиг. 2).

Полученный результат можно формулировать так.

[4. Б]. В теореме [4. А] экстремум является минимумом, если в двойной двухфазной системе газовая фаза представляет смесь двух газов, а конденсированная фаза является химическим соединением этих газов.



Фиг. 2

Поступила 30 III 1959.

Ս. Ս. Հակոբյան

ԴԻԴԱԿՏԻԿ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԹԵՐՄՈԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածը պարունակում է գիտությունների չորս տարբեր հարցերի ներկայացումը:

1. Թեմանի պոստուլատի օգտագործմամբ պարզ ձևով արտածված է թերմոդինամիկայի երկրորդ սկզբունքի ամբողջ բովանդակությունը:

2. Ըստ „The State Principle“ [3], [4] աշխատությունների ֆազերի կանոնին կարելի է հանգել, չդիմելով թերմոդինամիկայի առաջին և երկրորդ սկզբունքներին:

3. Այսակց ցույց է տրված, որ այդ եղանակը չունի ոչ գիտական, ոչ էլ գիղատիպ արժեք:

Իդեալական գազերի համասարակշիռ խառնուրդի վրա ակտիվ և չհզոր գազերի իզոթերմ-իզոխոր և իզոթերմ-իզոորոնա ներմուծումների ադիպությունը այժմ սովորաբար ուսումնասիրվում է թերմոդինամիկական կամ քիմիական պոստուլատների միջոցով:

Այսակց նույն արդյունքներն ստացված են նոր եղանակով, որը հանդիս է (3, 10) անհաղթյան վրա:

4. Գիրբս-Կենոնային թերմոդինամիկայի մեկը հետևյալն է՝

«Եթե կրկնակի երկֆազանի սխեմայի վիճակի իզոթերմ փոփոխումով կարելի է հանգել ֆազերի միևնույն լադադրությունը, ապա այդ վիճակում ճնշումն ունի էքստրեմում»:

Էքստրեմումի մաքսիմում կամ մինիմում լինելու հարցը որոշելու համար ընդհանուր հատկանիշներ չկան:

Այսուկց ապացուցված է որ հիշված էքստրեմումը հանդիսանում է միևնույն կամ երկֆազանի սխեմայում գազային ֆազը ներկայացնում է երկու գազերի խառնուրդ, իսկ կոնդենսացած ֆազը հանդիսանում է այդ գազերի քիմիական միացումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Акопян А. А. Общая термодинамика, Госэнергоиздат, Москва, 1955, стр. 374 и 429.
2. Акопян А. А. Общая термодинамика, стр. 358.
3. Kline S. J. and Koenig F. O. The State Principle, Journal of Applied Mechanics, 1957, № 1, pp 29—34.
4. Journal of Applied Mechanics, 1957, № 4, pp 625-630.
5. Denbigh K. G. The Principles of Chemical Equilibrium, Cambridge University Press, 1955, pp 7, 8.
6. Jänecke E. Die Welt der chemischen Körper bei hohen und tiefen Temperaturen und Drucken, Verlag Chemie, GMBH, Weinheim Bergstr. 1950, пар. 4 и 4а.