

Г. В. Бадалян

### О некоторых граничных свойствах функций, представимых обобщенным рядом Тейлора

В настоящей работе доказываются аналоги теорем М. П. Щеглова «О поведении степенного ряда на круге сходимости» (см. [1]; 101—130) для обобщенного ряда Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad (1)$$

где

$$t \in (0, 1], \quad \omega_n(t) = \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}, \quad \omega_0(t) = 1, \quad (2)$$

$$\gamma_0 = 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty, \quad (3)$$

а простой контур  $C$  здесь и впредь, в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя подинтегральной функции.

В работе использован метод М. П. Щеглова, который существенным образом приспособлен для наших целей.

Предварительно докажем несколько вспомогательных предложений.

*Лемма А. Пусть функция  $g(t)$ ,  $t > 0$  обладает свойствами:*

1. существуют  $g'(t)$ ,  $g_2(t) = \left(\frac{g'(t)}{t^{n-1}}\right)'$  при  $t > 0$ ;
2.  $g(t_m) = o(1)$ , а  $t_m \rightarrow 0$  по последовательности  $\{t_m\}$ , где

$$(a) \begin{cases} t_m \downarrow 0, & m \rightarrow \infty, \\ \frac{t_m}{t_{m+1}} < d, & \text{где } d > 1 \text{ любое конечное число;} \end{cases}$$

3.  $t^{n+1} g_2(t) = o(1)$  при  $t \rightarrow 0$ ,

тогда

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Для доказательства рассмотрим формулу

$$g(t) - g(t_m) = \frac{g'(t_m)}{t_m^{\gamma_1 - 1}} \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 + \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_{t_m}^{t_1} g_2(t_2) dt_2 \quad (4)$$

см. [2], стр. 3.

Заметим также, что

$$\int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 = -t_m^{\gamma_1} \omega_1\left(\frac{t}{t_m}\right), \quad (5)$$

а

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_{t_m}^{t_1} dt_2 &= - \int_{t_m}^t t_1^{\gamma_1 - 1} \frac{t_m}{2\pi i} \int_{\zeta} \left(\frac{t_1}{t_m}\right)^{-\zeta} d\zeta dt_1 = \\ &= \frac{t_m^{\gamma_1 + 1}}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{\left(\frac{t}{t_m}\right)^{-\zeta + \gamma_1} d\zeta}{\zeta(\zeta + 1)(\zeta - \gamma_1)} = t_m^{\gamma_1 + 1} \omega_2\left(\frac{t}{t_m}\right), \end{aligned} \quad (5')$$

где

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta + \gamma_1)}, \quad \omega_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_1 + 1)} \quad (5'')$$

см. [2] стр. 6.

Из (4) в силу (5) и (5') получаем

$$\begin{aligned} g(t) - g(t_m) &= t_m g'(t_m) \omega_1\left(\frac{t}{t_m}\right) + \\ &+ g_2(\xi) t_m^{\gamma_1 + 1} \omega_2\left(\frac{t}{t_m}\right), \quad t \leq \xi \leq t_m. \end{aligned} \quad (4')$$

Согласно условиям леммы можно указать число  $\eta = \eta(\varepsilon)$ , такое, что

$$\begin{aligned} |g(t_m)| &< \varepsilon, \quad t_m \in (0, \eta), \\ |t_m^{\gamma_1 + 1} g_2(t)| &< \varepsilon, \quad t \in (0, \eta). \end{aligned} \quad (6)$$

Подберем числа  $r$  и  $s$  так, чтобы

$$0 < r < s < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1-r}{1-s} > d. \quad (7)$$

Последовательность  $\{t_m\}$  имеет хотя бы один, отличный от  $t_m$ , элемент, принадлежащий интервалу

$$(t_m - st_m, t_m - rt_m), \text{ см. [1], стр. 110.}$$

Пусть  $t_m^*$  тот элемент, который принадлежит  $(t_m - st_m, t_m - rt_m)$ . Составим

$$g(t_m^*) - g(t_m) = t_m g'(t_m) \omega_1\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right) + g_2(\xi) t_m^{n+1} \omega_2\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right), \quad (4'')$$

где

$$\omega_1(t) \text{ и } \omega_2(t) \text{ определены в (5''),}$$

и заметим, что  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  при  $t \in (0, 1]$  монотонно убывают, тогда из условия, что

$$t_m(1-s) < t_m^* < t_m(1-r) < t_m \quad (8)$$

следует, что

$$\omega_1(1-r) < \omega_1\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right) < \omega_1(1-s)$$

и

$$\omega_2(1-r) < \omega_2\left(\frac{t_m^*}{t_m}\right) < \omega_2(1-s). \quad (9)$$

Из (4'') в силу (9) получаем

$$|t_m g'(t_m)| \leq \frac{|g(t_m^*) - g(t_m)|}{\omega_1(1-r)} + |g_2(\xi) \xi^{n+1}| \left(\frac{t_m}{\xi}\right)^{n+1} \frac{\omega_2(1-s)}{\omega_1(1-r)}.$$

Таким образом, в силу (6) получаем

$$|t_m g'(t_m)| < \frac{2\varepsilon}{\omega_1(1-r)} + \varepsilon \left(\frac{t_m}{\xi}\right)^{n+1} \frac{\omega_2(1-s)}{\omega_1(1-r)}, \quad t_{m+1} \leq \xi < t_m,$$

но  $\frac{t_m}{\xi} \leq \frac{t_m}{t_m^*} < \frac{1}{1-s}$ , значит

$$|t_m g'(t_m)| < \varepsilon \cdot k,$$

где  $k = k(s, r) > 0$  конечное число.

Лемма В. Пусть функция  $g(t)$ ,  $t > 0$  обладает свойствами:

1. существуют  $g'(t)$ ,  $g_2(t)$ ,  $t > 0$ ,

2.  $g(t_m) = o(1)$ ,  $t_m \rightarrow 0$  по последовательности  $\{t_m\}$ , где  $\{t_m\}$  удовлетворяет условиям

$$(\beta) \quad t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+i}} = 1,$$

3.  $t^{n+1} g_2(t) = o(1)$ ,  $t \rightarrow 0$ ,

тогда

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad t_m \rightarrow 0.$$

Для доказательства заметим, что при заданном  $\varepsilon > 0$  и достаточно большом  $m$  будем иметь

$$|g(t_m)| < \varepsilon^{2n},$$

$$\frac{t_m}{t_{m+1}} < \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (10)$$

$$|g_2(t) t^{n+1}| < C < \infty, \quad \text{где } t \in (0, 1].$$

С другой стороны, начиная с некоторого номера, в интервал  $(t_m - \varepsilon t_m, t_m - \frac{\varepsilon}{3} t_m)$  попадает хотя бы одно из чисел  $t_m$ , иначе, если

$$t_{m_1} > t_m - \frac{\varepsilon}{3} t_m, \quad t_{m_1+1} < t_m - \varepsilon t_m,$$

то

$$\frac{t_{m_1}}{t_{m_1+1}} > \frac{1-\frac{\varepsilon}{3}}{1-\varepsilon}. \quad (\text{см. [1], стр. 120})$$

чего быть не может.

Это значит, что некоторый

$$t_m^* \in \{t_m\}, \quad t_m^* \in (t_m - \varepsilon t_m, t_m - \frac{\varepsilon}{3} t_m). \quad (11)$$

Заметим, наконец, что

$$\omega_1(1-\varepsilon) = C \cdot \varepsilon^{2n} + o(\varepsilon^{2n}), \quad (12)$$

а

$$\begin{aligned} \omega_2(1-\varepsilon) &= (1-\varepsilon)^{2n-1} \int_1^{1-\varepsilon} x^{-2n} \omega_1(x) dx \ll \\ &\ll (1-\varepsilon)^{2n-1} \cdot (1-\varepsilon)^{-2n} \cdot \omega_1(1-\varepsilon) \int_1^{1-\varepsilon} dx \end{aligned}$$

или

$$\omega_2(1-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \omega_1(1-\varepsilon). \quad (13)$$

Из (4<sup>n</sup>) в силу (10), (11), (12) и (13) получаем

$$|t_m g'(t_m)| \leq C_1 \varepsilon^{2n-1} + C \left(\frac{t_m}{\varepsilon}\right)^{n+1} \cdot \frac{\omega_2\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\omega_1(1-\varepsilon)}$$

или

$$|t_m g'(t_m)| \leq (C_1 + C_2) \varepsilon^{\delta}, \quad (14)$$

где

$$\delta = \min(\gamma_1, 1).$$

Этим лемма доказана.

Лемма С. Пусть функция  $g(t)$ ,  $t > 0$  обладает свойствами:

1. существует  $g_2(t)$  при  $t > 0$ ,
2.  $g(t_m) = 0(1)$ ,  $t_m \rightarrow 0$  по последовательности  $\{t_m\}$ , где последовательность  $\{t_m\}$  удовлетворяет условиям леммы А,
3.  $g_2(t) \cdot t^{\gamma+1} = 0(1)$ ,  $t \rightarrow 0$ ,

тогда

$$g'(t_m) t_m = 0(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Лемма доказывается повторением всего хода доказательства леммы А, поэтому мы его не приводим.

Теорема А. Пусть даны:

1.  $\{a_n\}$ ,  $a_n = o\left(\frac{1}{\gamma^n}\right)$ ,
  2.  $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$ ,  $t \in (0, 1]$ ,
  3.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S$ , где  $S$  — некоторое число (конечное), а  $t_m \rightarrow 0$  по последовательности, удовлетворяющей условиям (а) леммы А,
- тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S.$$

Доказательство.

Из условия 1 следует, что ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) \quad (15)$$

сходится в  $t \in (0, 1]$ .

Составим

$$g(t) = \varphi(t) - S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) - S \quad (15')$$

и покажем, что  $g(t)$  удовлетворяет всем условиям леммы А.

Действительно, зная, что внутри своего промежутка сходимости ряд (15) можно дифференцировать почленно в любое число раз (см. [2]), получаем

$$g_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta-\gamma-1}}{\prod_{\nu} (\zeta + \gamma_{\nu})} d\zeta \quad (16)$$

или

$$t^{n+1} g_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \gamma_n \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}; \quad (16')$$

значит

$$|t^{n+1} g_2(t)| \leq A \sum_{n=2}^N \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} + \\ + \varepsilon_N \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})},$$

где

$$A = \max_{2 < n < N} |\gamma_n \cdot a_n|, \quad \varepsilon_N = \max_{n > N} |a_n \gamma_n|,$$

или

$$|t^{n+1} g_2(t)| \leq A \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=2}^N \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} t^{-\zeta} d\zeta + \\ + \varepsilon_N \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} t^{-\zeta} d\zeta = \\ = A \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \left[ 1 - \prod_{\nu=2}^N \frac{\gamma_{\nu}}{\zeta + \gamma_{\nu}} \right] \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} + \\ + \varepsilon_N \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=2}^{N+1} \frac{\gamma_{\nu}}{\zeta + \gamma_{\nu}} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta. \quad (16'')$$

Известно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\prod_1^n \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_{s=0}^n (\zeta + \gamma_s)} = 1 \quad (\text{см. [3] стр. 8}).$$

Это значит, что для всякого  $\varepsilon < 0$  можно указать  $\eta > 0$ , такое, что

$$|t^{n+1} g_2(t)| < \varepsilon, \quad t \in (0, \eta). \quad (17)$$

т. е.

$$t^{n+1} g_2(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (17')$$

Из условия 3 и (15') следует, что

$$g(t_m) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (18)$$

Этим удовлетворены условия леммы А, значит

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad t_m \rightarrow 0. \quad (19)$$

Согласно условию 1 для каждого  $n$  существует число  $\varepsilon_n > |a_n \gamma_n|$ , где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , значит

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n - a_n \gamma_n) \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z-1} dz}{\prod_{s=1}^n (\zeta + \gamma_s)} > 0, \quad (20)$$

но

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_n \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z-1} dz}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_s)} = g'(t);$$

следовательно

$$\psi(t) = t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_s)} + g'(t). \quad (20')$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_s}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_s)} = o(1), \quad \text{когда } t \rightarrow 0 \quad (21)$$

в чем можно убедиться, повторяя ход оценки  $t^{n+1} g_2(t)$ .

Из (20') в силу (19) и (21) следует, что

$$t_m \psi(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Покажем теперь, что из (22) в силу свойств последовательности  $\{t_m\}$  следует, что

$$t \psi(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Действительно, из (20) следует, что

$$t^{\gamma_n-1} \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n - a_n \gamma_n) \frac{\prod_1^{\gamma_n} \gamma_n}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_n - \gamma_1)}. \quad (20'')$$

где каждый член ряда правой части (20'') при  $t \in (a, 1]$  монотонно убывает, следовательно, при  $t \rightarrow 0$

$$t^{1-\gamma_n} \cdot \psi(t)$$

монотонно возрастает.

Это значит, что

$$t_m^{1-\gamma_n} \psi(t_m) \leq t^{1-\gamma_n} \cdot \psi(t) \leq t_{m+1}^{1-\gamma_n} \psi(t_{m+1}), \quad (23)$$

где

$$t_{m+1} \leq t \leq t_m,$$

или

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t}{t_m}\right)^{\gamma_n} \leq t \psi(t) \leq \left(\frac{t}{t_{m+1}}\right)^{\gamma_n} t_{m+1} \psi(t_{m+1}). \quad (23')$$

Последнее неравенство еще более усилится, если его записать в виде

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t_{m+1}}{t_m}\right)^{\gamma_n} \leq t \psi(t) \leq \left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{\gamma_n} t_{m+1} \psi(t_{m+1}). \quad (23'')$$

Зная, что  $t_m \psi(t_m) = o(1)$  и  $1 < \frac{t_m}{t_{m+1}} \leq d < \infty$ , заключаем, что вообще

$$t \psi(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (24)$$

Возвращаясь теперь к

$$t \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\prod_1^{\gamma_n} \gamma_n}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_n)} + t g'(t), \quad (20''')$$

в силу (21) и (24) получаем, что

$$t g'(t) = o(1) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (25)$$

Из равенства

$$g(t) = g(t_m) + (t - t_m)g'(\xi), \quad t_{m+1} < t < \xi < t_m$$

в силу (18) и (25) следует, что

$$g(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (18')$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно вспомнить, что

$$g(t) = \varphi(t) - S,$$

откуда в силу (18') получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = S.$$

Этим теорема А доказана.

Теорема А'. Пусть последовательность чисел  $\{t_m\} \in (0, 1]$  обладает свойствами

$$(x) \quad \begin{cases} t_m \downarrow 0, & m \rightarrow \infty, \\ \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty, \end{cases}$$

тогда существует ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , такой, что

$$1. \quad a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \text{где} \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2} < \infty,$$

$$2. \quad \varphi(t_m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) = o(1),$$

где  $t_m \rightarrow 0$  по последовательности (x),

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \varphi(t).$$

Лемма А'. Если

$$a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right), \quad S_m = \sum_0^m a_n,$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

тогда справедливо соотношение

$$S_m = \varphi(t_m) + o(1), \quad (26)$$

где

$$\tau_m = \prod_{\nu=2}^m \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu} \right)^{1/\gamma_1}.$$

Доказательство леммы.

Действительно

$$S_m - \varphi(t) = \sum_{n=1}^m a_n [1 - \omega_n(t)] - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

согласно условию

$$|a_n| < \frac{\varepsilon_n}{\gamma_n}, \quad \text{где } \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\gamma_\nu^2}}\right). \quad (27)$$

Известно также, что

$$0 < 1 - \omega_n(t) < C \cdot t^{\gamma_1} \prod_{\nu=2}^n \frac{\gamma_1}{\gamma_\nu - \gamma_1}, \quad (28)$$

см. [4], стр. 9.

Это значит, что

$$\begin{aligned} |S_m - \varphi(t)| &< C t^{\gamma_1} \sum_{n=1}^m \varepsilon_n \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^n (\gamma_\nu - \gamma_1)} + \\ &+ \varepsilon'_m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)}, \quad \varepsilon'_m = \max_{n>m} \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Из факта  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  когда  $n \rightarrow \infty$  следует, что при достаточно большом  $m$

$$\prod_{\nu=2}^m \frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} \sum_{n=1}^m \varepsilon_n \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^n (\gamma_\nu - \gamma_1)} < \frac{\varepsilon}{C}, \quad (30)$$

(см. [3] стр. 3—4).

С другой стороны,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \frac{\prod_1^m \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=0}^m (\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^m \gamma_{\nu} \left[ \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta^2 \prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2 \prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} \right],$$

где контур  $C'$  — оставляет вне области точку  $\zeta = 0$ ;

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta^2 \prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{t^{-\zeta}}{\prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} \right)' = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[ \frac{t^{-\zeta} \ln \frac{1}{t}}{\prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} - \frac{t^{-\zeta}}{\prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\zeta + \gamma_{\nu}} \right] = \\ &= \frac{1}{\prod_{\nu=1}^m \gamma_{\nu}} \cdot \left( \ln \frac{1}{t} - \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Примем

$$t = \prod_{\nu=2}^m \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{\nu}} \right)^{1/\gamma_1}, \quad (31')$$

тогда

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{t} - \sum_{\nu=2}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}} &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{\nu=2}^m \ln \frac{\gamma_{\nu}}{\gamma_{\nu} - \gamma_1} - \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}} = \\ &= -\frac{1}{\gamma_1} \sum_{\nu=2}^m \ln \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_{\nu}} \right) - \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m \frac{\gamma_1}{\gamma_{\nu}^2} + \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^m \frac{\gamma_1^2}{\gamma_{\nu}^3} + \dots \end{aligned}$$

Это значит, что

$$0 < \ln \frac{1}{t} - \sum_{\nu=2}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}} < C \cdot \sum_{\nu=2}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}^2}. \quad (32)$$

Заметим еще, что

$$\frac{\prod_{\nu=1}^m \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2 \prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} \rightarrow 0, \quad \text{когда } t \in (0, 1), t \rightarrow 1,$$

следовательно

$$\frac{\prod_{\nu=1}^m \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2 \prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} = 0 \left( \sum_{\nu=2}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}^2} \right). \quad (33)$$

Из (29) в силу (27), (30), (31) и (33) получаем

$$\left| S_m - \varphi \left( \prod_{v=1}^m \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_v} \right) \right)^{1/\gamma_1} \right| < \varepsilon + o \left( \frac{1}{\sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2}} \right) \cdot O \left( \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v} \right) = \varepsilon_1. \quad (29')$$

Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность целых чисел

$$(m_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяющую условию

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_v} = \infty. \quad (34)$$

Докажем, что тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\prod_{v=2}^{m_{2i+1}} \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^{1/\gamma_1}}{\prod_{v=2}^{m_{2i}} \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^{1/\gamma_1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{m_{2i}+1}^{m_{2i+1}} \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^{1/\gamma_1} = \infty. \quad (35)$$

Действительно

$$\begin{aligned} \ln J_i &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{m_{2i}+1}^{m_{2i+1}} \ln \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{m_{2i}+1}^{m_{2i+1}} \ln \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) = \\ &= \sum_{m_{2i}+1}^{m_{2i+1}} \left[ \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} - \frac{\gamma_1}{2(\gamma_v - \gamma_1)^2} + \dots \right] > \frac{1}{2} \sum_{m_{2i}+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1}, \quad m_{2i} > n_0. \end{aligned}$$

Этим (35), в силу (34), доказано.

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  определим следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{когда } n \in [m_{2i}, m_{2i+1}] \\ \varepsilon_{m_{2i}} \cdot \gamma_n^{-1}, & \text{когда } n = m_{2i}, m_{2i} + 1, \dots, r_i, \\ -\varepsilon_{m_{2i+1}} \cdot \gamma_n^{-1}, & \text{когда } n = r_i + 1, \dots, m_{2i+1}, \end{cases} \quad (36)$$

где целое число  $r_i$  определено из условия

$$\sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} \geq \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n},$$

$$\sum_{n=m_{2i}}^{r_i-1} \frac{1}{\gamma_n} \leq \sum_{n=r_i}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n},$$
(37)

а числа  $\varepsilon'_{m_{2i}}$  и  $\varepsilon'_{m_{2i+1}}$  из условия

$$\varepsilon'_{m_{2i}} \sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} = \varepsilon'_{m_{2i+1}} \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} = A.$$
(38)

Из (37) имеем

$$2 \sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} \geq \sum_{n=m_{2i}}^{r_i} \frac{1}{\gamma_n} + \sum_{n=r_i+1}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}$$

и

$$2 \sum_{n=r_i}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} \geq \sum_{n=r_i}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n} + \sum_{n=m_{2i}}^{r_i-1} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}.$$
(39)

Это в силу (38) значит, что

$$\varepsilon'_{m_{2i}} \leq \frac{2A}{\sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}} \rightarrow 0, \text{ когда } i \rightarrow \infty$$
(40)

$$\varepsilon'_{m_{2i+1}} \leq \frac{2A}{\sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}} \rightarrow 0, \text{ когда } i \rightarrow \infty.$$

Теперь заметим, что в силу (36) частичные суммы ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$S_{m_{2i}}$  и  $S_{m_{2i+1}}$  соответственно равны

$$S_{m_{2i}} = \frac{\varepsilon'_{m_{2i}}}{\gamma_{m_{2i}}}, \quad S_{m_{2i+1}} = 0, \quad S_{r_i} = A,$$

где  $r_i$  определено в (37).

Для краткости обозначим

$$t_m = \prod_{\nu=2}^m \left( \frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} \right)^{1/\gamma_\nu}, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (41)$$

тогда в силу (35) из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$$t_{m_3} > t_{m_2} > \dots \rightarrow 0,$$

удовлетворяющую условию теоремы, а именно:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{t_{m_{2l}}}{t_{m_{2l+1}}} = \infty. \quad (35')$$

С другой стороны, в силу (26)

$$\varphi(t_{m_{2l}}) = o(1), \quad \varphi(t_{m_{2l+1}}) = o(1), \quad (42)$$

но в силу леммы

$$\varphi \left( \prod_{\nu=2}^{r_l} \left( \frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} \right)^{1/\gamma_\nu} \right) = A + o(1). \quad (43)$$

Из (42) и (43) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t).$$

Этим теорема доказана.

Теорема В. Пусть даны

$$1. \text{ числа } a_n = 0 \left( \frac{1}{\gamma_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$2. \text{ ряд } \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$3. \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S,$$

где  $S$  — некоторое число,  $t_m \rightarrow 0$  по последовательности  $\{t_m\}$ , удовлетворяющей условию (β) леммы В. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S.$$

Доказательство теоремы. Опять составляем

$$g(t) = \varphi(t) - S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) - S,$$

где

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m).$$

Покажем, что  $g(t)$  удовлетворяет всем условиям леммы В. Действительно

$$g(t_m) = \varphi(t_m) - S = o(1),$$

при условии

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t^{n+1} \varphi_2(t) = t^{n+1} g_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^a \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_\nu)} = o(1),$$

Из последних условий в силу леммы В имеем

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Для продолжения доказательства теоремы составим

$$t\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C - a_n \gamma_n) \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)},$$

где

$$C = \sup_{\{n\}} |a_n \gamma_n|.$$

Это значит, что

$$t\psi(t) = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)} + t g'(t), \quad (45)$$

но

$$t_m g'(t_m) = o(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Если заметить еще, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)} = 1, \quad (46)$$

то

$$t_m \psi(t_m) = C + o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Здесь также функция  $t^{l-1} \psi(t)$  монотонно убывающая, значит

$$t_m^{l-1} \psi(t_m) \leq t^{l-1} \psi(t) \leq t_{m+1}^{l-1} \psi(t_{m+1}),$$

где

$$t_{m+1} < t < t_m,$$

или

$$t_m \psi(t_m) \left(\frac{t}{t_m}\right)^l \leq t\psi(t) \leq t_{m+1} \psi(t_{m+1}) \left(\frac{t}{t_{m+1}}\right)^l,$$



г. е.

$$t_m \psi(t_m) d^{-\gamma_n} < t \psi(t) < t_{m+1} \psi(t_{m+1}) d^{\gamma_n}.$$

В силу (47) это значит, что

$$t \psi(t) = C + o(1) \quad (48)$$

или

$$t \psi(t) - t_m \psi(t_m) = o(1) \quad (49)$$

когда

$$t_m > t > t_{m+1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Но

$$tg'(t) = o(1) + t \psi(t) - t_m \psi(t_m).$$

Это значит, что

$$tg'(t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (50)$$

Таким образом, имеем

$$g(t_m) = o(1), \quad tg'(t) = o(1),$$

следовательно, из равенства

$$g(t) = g(t_m) + (t - t_m)g'(\xi)$$

получаем, что при  $t \rightarrow 0+$

$$g(t) = o(1).$$

Но

$$g(t) = \varphi(t) - S,$$

это значит, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S.$$

Теорема доказана.

Теорема В. Пусть последовательность  $\{t_m\} \in (0, 1]$  обладает свойствами

$$(\beta) \quad t_m \downarrow 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \frac{t_m}{t_{m+1}} = d,$$

где  $d \neq 1$  произвольное число, тогда существует ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$$

такой, что

$$1. \quad a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty,$$

$$2. \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S, \quad \text{где } \{t_m\} \text{ удовлетворяет условию } (\beta),$$

$S$  — некоторое число,

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$S_0 = 1, \quad S_n = \frac{1}{\lambda} \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_\nu}\right) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\lambda = \frac{2\pi}{\ln d}.$$

Покажем, что  $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  действительно

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\lambda} \left[ \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_\nu}\right) - \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_\nu}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_\nu}\right) \left(1 + \frac{i\lambda}{\gamma_n} - 1\right) = \frac{i}{\gamma_n} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i\lambda}{\gamma_\nu}\right). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$|a_n| = \frac{1}{\gamma_n} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\gamma_\nu^2}\right)^{1/2} < \frac{C}{\gamma_n}$$

так как  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu^2}$  сходится.

Рассмотрим теперь

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)},$$

правая часть которого после применения преобразования Абеля запишется:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\gamma_\nu - i\lambda)}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}, \end{aligned}$$

где здесь и везде

$$\prod_{\nu=k}^{k-1} \alpha_k = 1.$$

Нетрудно заметить, что при  $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\gamma_{\nu} - i\lambda)}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{1}{\zeta + i\lambda},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\gamma_{\nu} - i\lambda)}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{\nu})} t^{-\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} t^{-\zeta} d\zeta = t^{\lambda} = e^{i\lambda \ln t}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t)},$$

так как

$$\lim_{t \rightarrow 0+} e^{i\lambda \ln t} \neq \overline{\lim_{t \rightarrow 0+} e^{i\lambda \ln t}}.$$

Покажем теперь, что существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S \neq 0.$$

Действительно, возьмем произвольную пару целых чисел  $p, q > 0$  и рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi(t_p) - \varphi(t_q) &= \exp(i\lambda \ln t_p) - \exp(i\lambda \ln t_q) = \\ &= \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln(t_p t_q)\right) \left[ \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln \frac{t_p}{t_q}\right) - \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln \frac{t_q}{t_p}\right) \right]. \end{aligned}$$

Знаем также, что  $\frac{t_p}{t_q} = d^{q-p}$  и  $\lambda = \frac{2\pi}{\ln d}$ , значит

$$\begin{aligned} \varphi(t_p) - \varphi(t_q) &= 2i \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln(t_p t_q)\right) \sin \frac{2\pi}{\ln d} \cdot \frac{(q-p) \ln d}{2} = \\ &= 2i \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \ln(t_p t_q)\right) \sin [\pi(q-p)] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом построен пример функции  $\varphi(t)$  такой, что

$$\varphi(t_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

но

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t)$$

чем и доказана теорема.

Теорема С. Пусть

$$1. \quad a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2. \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

$$3. \quad \varphi(t_m) = O(1),$$

где  $t_m \rightarrow 1$ , по последовательности (а) леммы А. Тогда

$$\varphi(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}, \quad t \in (0, 1]$$

и покажем, что она удовлетворяет условиям леммы С.

Для этого заметим, что

$$\varphi_2(t) = \left(\frac{\varphi'(t)}{t^{n-1}}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta-n-1} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}. \quad (48)$$

Из (48) следует, что

$$\begin{aligned} |t^{n+1} \varphi_2(t)| &\leq \gamma_1 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n \gamma_n| \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} \leq \\ &\leq C^* \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=2}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{C^*}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = C^*, \end{aligned} \quad (48')$$

где  $C^* = \gamma_1 \max_{n>2} |a_n \gamma_n|$ .

Таким образом, в силу условия 3 теоремы и (48') функция  $\varphi(t)$  удовлетворяет всем требованиям леммы С, следовательно,

$$t_m \varphi'(t_m) = O(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (49)$$

Сравнивая  $t_m \varphi'(t_m)$  с

$$t\psi(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{C^*}{\gamma_1} - a_n \gamma_n \right) \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{C^*}{\gamma_1} - t\varphi(t)$$

закключаем, что

$$t_m \psi(t_m) = O(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Далее заметим, что на  $(0, 1]$  функция  $t^{1-n} \psi(t)$  монотонно убывает (для чего достаточно повторить соответствующие рассуждения теоремы А), значит

$$t_m^{1-n} \psi(t_m) < t^{1-n} \psi(t) < t_{m+1}^{1-n} \psi(t_{m+1}), \quad t \in (t_{m+1}, t_m)$$

или

$$t_m \psi(t_m) \left( \frac{t}{t_m} \right)^{n-1} < t\psi(t) < t_{m+1} \psi(t_{m+1}) \left( \frac{t}{t_{m+1}} \right)^{n-1},$$

следовательно и

$$t_m \psi(t_m) \left( \frac{t_{m+1}}{t_m} \right)^{n-1} < t\psi(t) < t_{m+1} \psi(t_{m+1}) \left( \frac{t_m}{t_{m+1}} \right)^{n-1}.$$

Это значит, что

$$t\psi(t) = O(1), \quad \text{когда } t \rightarrow 0+. \quad (50)$$

Вернемся снова к

$$\begin{aligned} t\psi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C - a_n \gamma_n) \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \\ &= C - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = C - t\varphi'(t). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (50) и (51) следует, что

$$t\varphi'(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (52)$$

Из формулы

$$\varphi(t) = \varphi(t_m) + (t - t_m) \varphi'(\xi), \quad t_{m+1} < t < \xi < t_m,$$

в силу условия 3 теоремы и (52) получаем

$$\varphi(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Этим теорема доказана.

Теорема  $\bar{C}$ . Пусть последовательность  $\{t_m\} \in (0, 1]$  удовлетворяет условию

$$(\bar{C}) \quad t_m \downarrow 0, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty,$$

тогда существует ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$$

такой, что

1.  $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$ ,
2.  $\varphi(t_m) = O(1), \quad m \rightarrow \infty$ ,
3.  $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = \infty$ .

Теорема доказывается путем повторения всего хода доказательства теоремы  $\bar{A}$ , но только вместо абсолютной постоянной  $A$ , взятой там, здесь нужно взять

$$A = A(m_{2i}, m_{2i+1})$$

так, чтобы

1.  $\lim_{i \rightarrow \infty} A(m_{2i}, m_{2i+1}) = +\infty$ ,
2.  $A(m_{2i}, m_{2i+1}) = o\left(\sum_{n=m_{2i}}^{m_{2i+1}} \frac{1}{\gamma_n}\right), \quad i \rightarrow \infty$ .

Последние условия в силу расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

всегда выполняемы.

В частном случае когда  $\gamma_n = \nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , получаются вышеотмеченные результаты М. П. Щеглова.

## 2. Չ. Բազայան

ՔԵՅԼՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՇԱՐՔՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ  
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒՅՑՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu}} = \infty$$

Թվային հաջորդականությունը և

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t)$$

 $t \in (0, 1]$  միջակայքում զուգամետ շարքը, որտեղ

$$\omega_n(t) = \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} dz}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma_{\nu})}$$

պարզ կոնտուր  $C$ -ն ընդգրկում է ընդհանուրապես ֆունկցիայի հայտարարի գերաների շրջակայքը:Յուրջ է տրվում, որ այս շարքերի համար տեղի ունեն աստիճանային շարքերի վերաբերյալ Մ. Պ. Շչեգլովի հայտնի թեորեմաների ընդհանրացումները, որոնք համընկնում են նրանց հետ, երբ  $\gamma_n = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ 

Նշենք այդ թեորեմաներից երկուսը.

A. Դիցուք արված են՝

$$1. \{a_n\}, \quad a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right),$$

$$2. \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$3. \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S.$$

որտեղ  $S$ -ը վերջավոր թիվ է, իսկ  $\{t_m\}$  բավարարում է նետեյալ պայմաններին՝

$$t_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \frac{t_m}{t_{m+1}} < d < \infty,$$

այդ դեպքում

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(s) = S.$$

Համ որում գոյություն ունի շարք

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

որանի

$$a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2} < \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

բայց

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t),$$

կրթ

$$t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty.$$

B. Գիցուք

1.  $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$

2.  $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$

3.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$

որանի  $S$ -ը վերջավոր թիվ է, իսկ  $\{t_m\}$  բավարարում է

$$t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = 1$$

պայմաններին, ապա

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = S,$$

բառ որում գոյություն ունի շարք

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t),$$

որանի

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right), \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2} < \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

բայց

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \varphi(t),$$

կրթ

$$t_m \downarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \frac{t_m}{t_{m+1}} = d \neq 1.$$

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Щеглов М. П. К вопросу о поведении степенного ряда на круге сходимости. Математический сборник, новая серия, т. 14 (56) 1944.
2. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций. Известия АН АрмССР, том VI, № 5—6, 1953.
3. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. Известия АН АрмССР, том XI, № 2, 1958.
4. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. Известия АН АрмССР, том XI, № 3, 1958.

С. Е. Карапетян

## Пара $A$ и некоторые свойства пары $T$

1. В этой статье рассматриваются две конгруэнции, которые удовлетворяют требованию, изложенному в пункте 2. В работе применен метод внешних форм Картана [1].

Инфинитезимальное перемещение свободного точечного репера  $\{A_i\}$  в проективном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (A)$$

где  $\omega_i^k$  — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства:

$$D\omega_i^k = [\omega_i^a \omega_a^k].$$

Рассмотрим две гиперболические конгруэнции  $k, k'$ , между лучами которых установлено взаимно-однозначное соответствие так, что соответствующие лучи не пересекаются.

Отнесем конгруэнцию  $k$  к координатному тетраэдру  $\{A_i\}$  первого порядка [2], т. е. совместим две вершины  $A_1, A_2$  тетраэдра с фокусами этой конгруэнции и две грани ее — с фокальными плоскостями; тогда компоненты инфинитезимального преобразования будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \quad (1)$$

При этом ребро тетраэдра  $A_3A_4$  остается совершенно произвольным. Поэтому, не нарушая общности, можно его совместить с соответствующим лучом второй конгруэнции.

Дифференциалы аналитических прямых  $(A_1A_2) \equiv [12], (A_3A_4) \equiv [34]$ , в силу уравнений (A) и (1), напишутся в виде:

$$\begin{aligned} d[12] &= (\omega_1^3 + \omega_2^3)[12] - \omega_1^4[23] + \omega_2^4[14], \\ d[34] &= (\omega_3^1 + \omega_4^1)[34] - \omega_4^2[23] + \omega_3^1[14] - \omega_1^4[13] - \omega_2^3[42]. \end{aligned} \quad (2)$$

Из первого уравнения этой системы следует, что  $\omega_1^3$  и  $\omega_2^3$  являются линейно независимыми формами. Так как установлено взаимнооднозначное соответствие между лучами конгруэнций  $(A_1A_2)$  и  $(A_3A_4)$ , то

все формы, от которых зависит луч  $(A_3A_4)$ , должны быть линейно зависимыми от форм  $\omega_1^2, \omega_2^2$

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^4, & \omega_4^2 &= b'\omega_1^3 + a'\omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= c\omega_1^3 + e\omega_2^4, & \omega_4^1 &= e'\omega_1^3 + c'\omega_2^4. \end{aligned} \quad (3)$$

2. В этом пункте познакомимся с понятием, приводящим к новой паре конгруэнций, для которой пара  $T$  является особым случаем.

С каждым лучом конгруэнции  $(A_1A_2)$  будем связывать принадлежащую этой конгруэнции некоторую линейчатую поверхность  $\omega_2^1 = \lambda\omega_1^3$ . Аналогичная линейчатая поверхность для второй конгруэнции пусть определяется уравнением  $\omega_2^1 = \lambda'\omega_1^3$  (вообще  $\lambda \neq \lambda'$ ). Потребуем, чтобы касательная плоскость каждой из этих линейчатых поверхностей вдоль каждого луча конгруэнции проходила через точку касания другой линейчатой поверхности.

Касательная плоскость линейчатой поверхности  $\omega_2^1 = \lambda\omega_1^3$  в точке  $A_1 + \rho A_2$  определяется тремя точками  $A_1, A_2, A_3 + \lambda\rho A_4$  и пересекается с соответствующим лучом  $A_3A_4$  в точке  $A_3 + \lambda\rho A_4$ . Касательная плоскость линейчатой поверхности  $\omega_2^1 = \lambda'\omega_1^3$  в точке  $A_3 + \lambda'\rho A_4$  определяется тремя точками

$$A_3, A_4, \{a + \lambda'b + \lambda\rho(e' + \lambda'c')\}A_1 + \{c + \lambda'e + \lambda\rho(b' + \lambda'a')\}A_2.$$

Эта плоскость пройдет через точку касания  $(A_1 + \rho A_2)$  линейчатой поверхности первой конгруэнции тогда и только тогда, когда будет выполнено уравнение

$$\rho^2\lambda(e' + \lambda'c') + \rho(a + \lambda'b - \lambda b' - \lambda\lambda'a') - c - \lambda'e = 0. \quad (4)$$

Это соотношение показывает, что вообще для каждой пары соответствующих лучей конгруэнций  $k$  и  $k'$  (с произвольными  $\lambda$  и  $\lambda'$ ) существуют только две точки, удовлетворяющие нашему требованию.

Наше требование выполняется для каждой точки соответствующих лучей конгруэнций только при условиях

$$\begin{aligned} e' + \lambda'c' &= 0, & c + \lambda'e &= 0, \\ a + \lambda'b - \lambda(b' + \lambda'a') &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из первых двух уравнений непосредственно получим

$$[\omega_3^2\omega_4^1] = 0 \quad (6)$$

—единственное условие, которому должны удовлетворять конгруэнции  $(kk')$ . Остальные два уравнения системы (5) однозначно определяют  $\lambda$  и  $\lambda'$ .

Естественно рассмотреть тот случай, когда через каждый луч проходит  $\infty^1$  линейчатых поверхностей, удовлетворяющих нашему требованию. Из системы (5) легко заметить, что для этого необходимо и достаточно выполнение уравнений

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (1) и (7) характеризуют пару Т Финикова [3], [4]. Эта пара определяется следующим образом: две конгруэнции, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, образуют пару Т, если можно так сопоставить фокусы соответствующих лучей, чтобы прямые, соединяющие сходственные фокусы, касались фокальных поверхностей и первой и второй конгруэнций.

В случае (7) одна из линейчатых поверхностей задается произвольно, а вторая линейчатая поверхность определяется последним уравнением (5).

Таким образом: *одна из линейчатых поверхностей конгруэнций задается произвольно тогда и только тогда, когда эти конгруэнции образуют пару Т.*

3. В этом пункте рассмотрим случай, когда линейчатые поверхности  $\omega_2^1 = \lambda\omega_1^2$  и  $\omega_2^2 = \lambda'\omega_1^1$  соответствуют друг другу. В дальнейшем их назовем *главными линейчатыми поверхностями пары*.

Согласно этому требованию будем иметь:

$$\lambda = \lambda'. \quad (8)$$

В силу (8) из системы (5) получим (6) и еще два уравнения

$$c + e\lambda = 0, \quad ce(b - b') + a'c^2 - ae^2 = 0. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (9) определяет *единственную главную линейчатую поверхность* для пары конгруэнций  $(kk')$ , второе уравнение той же системы накладывает новое условие на  $(kk')$ . В дальнейшем, для краткости изложения, мы эту пару назовем *парой (А)*.

Если потребовать существование по меньшей мере двух главных линейчатых поверхностей, то из системы (5) получим уравнения (7) и еще одно квадратное уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^2 a' - \lambda(b - b') - a = 0. \quad (10)$$

Следовательно, и в этом пункте *неединственность главных линейчатых поверхностей приводит к паре Т.*

4. Как известно, каждая прямая проективного пространства  $P_3$  изображается в перенесении Плюккера точкой гиперквадрики  $Q_1^2$  в  $P_5$ . Двум прямым  $l_1$  и  $l_2$  в  $P_3$  соответствуют две точки  $L_1, L_2$  на гиперквадрике и, следовательно, прямая линия  $L_1L_2$  в  $P_5$ . Отсюда двум конгруэнциям, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, присоединено двупараметрическое семейство прямых в  $P_3$ . Известно также [5], что двупараметрическое семейство  $(L_1L_2)$  в  $P_5$  имеет два фокальных подсемейства только для пары Т, и это свойство характеризует пару Т.

Докажем следующую теорему: *для пары А, и только для нее, двупараметрическое семейство прямых  $(L_1L_2)$  в  $P_5$  обладает одним фокальным подсемейством.*

Действительно, если  $F = [12] + \rho[34]$  есть фокус луча  $L_1L_2$  и  $\omega_1^4 = \sigma\omega_1^3$  — уравнение подсемейства, то согласно (2) будем иметь

$$[\omega_1^3 + \rho\omega_2^3, \omega_2^4 - \sigma\omega_1^4] = 0, \quad [\omega_2^4 + \rho\omega_1^4, \omega_1^3 - \sigma\omega_2^3] = 0, \quad (11)$$

$$[\omega_1^4, \omega_2^4 - \sigma\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_2^3, \omega_1^4 - \sigma\omega_2^3] = 0. \quad (12)$$

Эти четыре уравнения для  $\rho$  и  $\sigma$  дадут одно решение только при условии

$$c + \sigma e = 0, \quad [\omega_3^1 \omega_4^2] = 0, \quad ce(b - b') + a'c^2 - ae^2 = 0. \quad (13)$$

Последние два уравнения системы (13) характеризуют пару (A), первое уравнение определяет  $\sigma$ , которая в силу (9) равна  $\lambda$ , т. е. *главные линейчатые поверхности пары (A) соответствуют развертывающимся поверхностям двупараметрического семейства прямых  $(L_1 L_2)$  в  $P_5$ .*

Системы (11) и (12) допускают два решения для  $\rho$  и  $\sigma$  тогда и только тогда, когда конгруэнции  $k$  и  $k'$  образуют пару  $T$ .

Таким образом получаем следующую более общую теорему: *двупараметрическое семейство прямых  $(L_1 L_2)$  в  $P_5$  является фокальным тогда и только тогда, когда оно является образом либо пары  $A$ , либо пары  $T$ , причем для пары  $A$  это семейство имеет только один фокус, а для пары  $T$  — два фокуса (действительных, различных, мнимых сопряженных или совпавших).*

Если пара конгруэнций  $(kk')$  составляет пару  $T$ , то развертывающиеся поверхности конгруэнции  $(L_1 L_2)$  в  $P_5$  (или, как Калапсо [7], [8] называет, главные направления пары  $T$ ) определяются из системы уравнений (11)

$$\sigma^2 a' - \sigma(b - b') - a = 0$$

и в силу (10) немедленно получим  $\sigma = \lambda$ , т. е. *направления главных линейчатых поверхностей пары  $T$  совпадают с главными направлениями той же пары.*

5. Рассмотрим случай, когда линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям первой фокальной поверхности, конгруэнции  $(A_1 A_2)$  пары  $T$ , совпадают с главными линейчатыми поверхностями. Как известно ([2], стр. 351), асимптотические линии поверхности  $(A_1)$  относительно тетраэдра первого порядка конгруэнции определяются дифференциальным уравнением

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (14)$$

В силу уравнения (10) дифференциальное уравнение главных линейчатых поверхностей напишется в виде

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + (b - b')\omega_1^3\omega_2^4 - a'(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (15)$$

Поверхности (14) и (15) совпадают тогда и только тогда, когда

$$b - b' = 0, \quad (16)$$

$$2a' + \gamma a = 0. \quad (17)$$

Как известно [3] и [4], пара  $T$  определяется уравнениями (1) и (7). Внешнее дифференцирование этих уравнений и их раскрытие приводят к линейным уравнениям

$$\begin{aligned}\omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= \alpha\omega_1^3 + b\omega_2^4, & \omega_4^2 &= b'\omega_1^3 + a'\omega_2^4,\end{aligned}\quad (18)$$

и еще к двум конечным уравнениям

$$\begin{aligned}a\gamma + a'a &= \beta(b - b'), \\ \alpha\gamma' + a'\gamma' &= \beta'(b' - b).\end{aligned}\quad (19)$$

В силу уравнения (16) из системы (19) получим либо

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha a' + \gamma a = 0, \quad (20)$$

либо

$$a = 0, \quad a' = 0. \quad (21)$$

В первом случае, когда выполняются уравнения (16) и (20), пара  $T$  образует известную конфигурацию Бианки (см. [3], стр. 259—262). Эта конфигурация характеризуется следующими свойствами: асимптотические линии на всех фокальных поверхностях пары  $T$  соответствуют друг другу, следовательно, все четыре конгруэнции этой пары являются конгруэнциями  $W$ .

Во втором случае, когда выполняются уравнения (16) и (21), главные линейчатые поверхности (15) становятся неопределенными, развертывающиеся поверхности конгруэнций  $(A_1A_2)$  и  $(A_3A_4)$  соответствуют накрест и, следовательно, вспомогательные конгруэнции  $(A_1A_3)$  и  $(A_2A_4)$  принадлежат одному и тому же линейному комплексу. В этом случае две конгруэнции  $(A_1A_2)$  и  $(A_3A_4)$  являются полярно сопряженными относительно нулевой системы этого линейного комплекса.

Таким образом: *если главные линейчатые поверхности пары  $T$  совпадают с линейчатыми поверхностями, соответствующими асимптотическим линиям какой-либо фокальной поверхности пары, то либо пара  $T$  является конфигурацией Бианки, либо ее вспомогательные конгруэнции принадлежат одному линейному комплексу.*

6. В этом пункте рассмотрим случай, когда главные линейчатые поверхности пары  $T$  соответствуют гармоническим линиям одной фокальной поверхности первой конгруэнции пары.

Как известно [8], [9], гармоническими одной фокальной поверхности называются такие линейчатые поверхности конгруэнции, квадрики Ли которых пересекаются с этой фокальной поверхностью по двум фокальным касательным.

Линии на этой фокальной поверхности, соответствующие гармоническим линейчатым поверхностям, называются гармоническими линиями [8], [10], [11], [12].

Гармонические линии фокальной поверхности  $(A_1)$  определяются уравнениями

$$\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (22)$$

Согласно требованию дифференциальные уравнения (22) и (15) должны определять одни и те же линии, а для этого необходимо и достаточно выполнение равенств

$$b - b' = 0, \quad \alpha a' - \gamma a = 0. \quad (23)$$

Система уравнений (19) в силу (23) напишется в виде

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad b - b' = 0.$$

Эти соотношения снова характеризуют пару  $T$ , вспомогательные конгруэнции которой принадлежат одному линейному комплексу. Итак: *гармонические линии одной фокальной поверхности пары  $T$  соответствуют главным линейчатым поверхностям тогда и только тогда, когда вспомогательные конгруэнции пары принадлежат одному линейному комплексу.*

Для такой пары  $T$ , как видно из уравнения (15), главные линейчатые поверхности станут неопределенными.

7. В этом пункте мы докажем следующую теорему: *главные линейчатые поверхности пары  $T$  и ее вспомогательной пары соответствуют друг другу.*

Уравнение главных линейчатых поверхностей (15), в силу (3), можно записать в виде

$$\omega_1^3 \omega_2^4 - \omega_2^4 \omega_1^3 = 0. \quad (24)$$

Изменим обозначения вершин пары  $T$  следующим образом

$$\bar{A}_1 = A_3, \quad \bar{A}_2 = A_1, \quad \bar{A}_3 = A_4, \quad \bar{A}_4 = A_2. \quad (25)$$

Согласно (25) пара  $T$  с конгруэнциями  $(\bar{A}_1 \bar{A}_2) \equiv (A_3 A_1)$ ,  $(\bar{A}_3 \bar{A}_4) \equiv (A_4 A_2)$  и ее компоненты  $\bar{\omega}_i^k$  получаются из первоначальной пары посредством замены индексов по закону  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Согласно (24) уравнение главных линейчатых поверхностей пары  $(\bar{A}_1 \bar{A}_2)$ ,  $(\bar{A}_3 \bar{A}_4)$  напишется в виде

$$\bar{\omega}_1^3 \bar{\omega}_3^1 - \bar{\omega}_2^4 \bar{\omega}_4^2 = 0,$$

которое, после замены индексов, равносильно уравнению

$$\omega_1^3 \omega_2^1 - \omega_3^4 \omega_4^2 = 0,$$

а последнее уравнение, в силу системы (3), эквивалентно уравнению

$$(\alpha\beta' + \beta\gamma')(\omega_1^3)^2 + (\gamma\gamma' - \alpha\alpha')\omega_1^3\omega_2^4 + (\beta\alpha' + \gamma\beta')(\omega_2^4)^2 = 0. \quad (26)$$

В силу условий (19) уравнения (15) и (26) совпадают. Обращение в нуль всех коэффициентов уравнения (26) означает, что конгруэнции  $(A_1A_2)$  и  $(A_3A_4)$  принадлежат к одному линейному комплексу.

Армянский пед. институт  
им. Х. Абовяна

Поступила 27 X 1958

### Ս. Ե. Կարապետյան

## Ա ՋՈՒՅԳԸ ԵՎ T ՋՈՒՅԳԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են  $k$  և  $k'$  երկու կոնգրուենցիաներ, որոնք միացվում են երրորդ կոնգրուենցիայով այնպես, որ վերջինի ֆոկալ (գծավոր) մակերևույթներից մեկը պատկանի  $k$ -ին, մյուսը  $k'$ -ին: Ապացուցվում է, որ՝

1. Այդ գծավոր մակերևույթները միակն են, եթե  $(kk')$  գույզը  $T$  չէ:
2. Եթե  $(kk')$  կոնգրուենցիաների գույզը  $T$  է, ապա գծավոր մակերևույթներից ցանկացած մեկը ընտրվում է կամավոր, իսկ մյուսը որոշվում է միարժեք ձևով:

Եթե այդ գծավոր մակերևույթները համապատասխանում են միմյանց, ապա նրանք կոչվում են գլխավոր գծավոր մակերևույթներ, իսկ  $(kk')$  գույզը կոչվում է  $A$  գույզ:

3.  $T$ -ից տարբեր  $A$  գույզի մեջ գոյություն ունի միակ գլխավոր մակերևույթը:

4.  $T$  գույզում գոյություն ունեն անվազն երկու գլխավոր մակերևույթներ: Այդ մակերևույթները համընկնում են նրանց գլխավոր ուղղությունների հետ:

5.  $k$  և  $k'$  գույզին համապատասխանող ուղիղների ընտանիքը  $P_3$ -ում ֆոկուսային է միմիայն այն դեպքում, երբ նա կամ  $A$  գույզի, կամ  $T$  գույզի արտապատկերումն է, ըստ որում  $A$  գույզի համար նա ունի միայն մեկ ֆոկուս, իսկ  $T$  գույզի համար՝ երկու ֆոկուս:

6. Եթե գույզի գլխավոր գծավոր մակերևույթները համընկնում են որևէ կոնգրուենցիայի ասիմպտոտական գծավոր մակերևույթների հետ, ապա  $T$ -ն զանում է կամ Բրանկիի կոնֆիրմացիան կամ նրա օժանդակ կոնգրուենցիաները պատկանում են միևնույն կամպլեքսին:

7.  $T$  գույզի և նրա օժանդակ գույզի գլխավոր գծավոր մակերևույթները իրար համապատասխանում են:

### ЛИТЕРАТУРА

1. Филиков С. П. Метод внешних форм Картана, М., 1948.
2. Филиков С. П. Теория конгруэнций, М., 1950.
3. Филиков С. П. Теория пар конгруэнций, М., 1956.
4. Филиков С. П. Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937.

5. Розенфельд Б. А., Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах. Математический сб., 22, 457—492, (1948).
6. Calapso (Calapso R.), Sur la configuration de M. Finikoff et sur les elements projectifs qui s'y rattachent. Mat. сб. 1935, 42, 451—458.
7. Calapso. Sur la configuration (T) de Finikoff et sur les elements projectifs qui s'y rattachent. ДАН СССР 1935 2, 441—446.
8. Карапетян С. Е., Геометрические значения некоторых инвариантов конгруэнций. Научные доклады ВШ., 1958, № 1.
9. Карапетян С. Е., Поверхность второго порядка ли для линейчатых поверхностей конгруэнции. ДАН СССР, 117, 2, (1957).
10. Карапетян С. Е., Гармонические квадрики и некоторые линейчатые поверхности конгруэнций. ДАН СССР, 122, 3, (1958).
11. Карапетян С. Е., Преобразование конгруэнций с помощью демиквадрик. Мат. сб., в печати.
12. Карапетян С. Е., Две конгруэнции с общими инвариантами  $F$  и  $F'$ . Научные доклады ВШ., 2, (1958).

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. С. Саркисян

Кручение многослойных призматических стержней  
прямоугольного поперечного сечения с учетом  
линейной ползучести

Задача кручения составного призматического упругого стержня через функцию кручения Сен-Венана была решена академиком Н. И. Мухелишвили [1], а через функции напряжений Прайдтля—К. С. Чобаняном [2]. Та же задача с учетом линейной ползучести через функции напряжений исследована Н. Х. Арутюняном и К. С. Чобаняном [3].

В настоящей работе рассматривается задача о кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением, составленных из нескольких отдельных призматических тел спаянных по боковым поверхностям, когда модуль сдвига и мера ползучести материалов этих тел различны.

Задача кручения анизотропного слоистого прямоугольного упругого стержня иным методом впервые решена С. Г. Лехвицким [4].

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается задача о кручении слоистых призматических стержней, составленных из нескольких упругих изотропных призматических тел, спаянных между собой вдоль боковых поверхностей. Решение представлено в виде бесконечных тригонометрических рядов, относительно коэффициентов которых получены рекуррентные уравнения.

Получены выражения для напряжений и жесткости. Как частный случай рассматривается кручение тонких (когда  $a \gg h_n$ ) многослойных стержней.

Во второй части исследуется кручение многослойных призматических стержней с учетом линейной ползучести.

Приводится решение задачи кручения тонких многослойных стержней; для этого даются формулы, определяющие изменение угла закручивания и компонентов напряжений в зависимости от времени. Полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами.

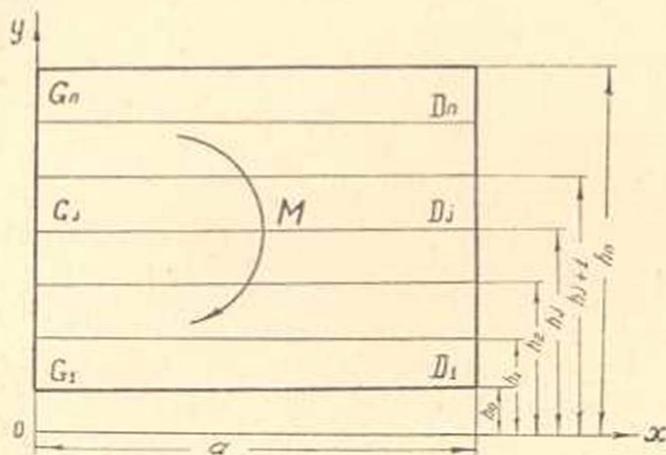
Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну, и доценту К. С. Чобаняну за постановку задачи и за руководство.

### § 1. Кручение слоистых упругих призматических стержней прямоугольного поперечного сечения

1°. Рассмотрим кручение призматического стержня прямоугольного сечения. Стержень состоит из  $n$  различных упругих изотропных слоев, спаянных по боковым поверхностям. Ширина слоев одинакова, а толщина в общем случае различна. Число слоев произвольно и равно  $n$ .

Прямоугольное поперечное сечение стержня  $D_0$  состоит из  $n$  прямоугольных областей  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , соответствующих различным материалам, разграниченных линиями раздела. Обозначим через  $L_0$  контур области всего поперечного сечения  $D_0$ , а через  $L_{ij}$  — линию раздела областей  $D_i$  и  $D_j$ .

Координатная система показана на фиг. 1.



Фиг. 1.

Напряженное состояние данного стержня рассматривается при воздействии двух закручивающих моментов  $M$ , приложенных на его торцах.

Модуль сдвига  $i$ -ого слоя обозначим через  $G_i$ , толщину слоя —  $h_i$ .

Задача о кручении составного стержня, как показано в работе [2], сводится к определению в области поперечного сечения  $D_0$  непрерывной функции напряжения  $F(x, y)$ , которая в каждой из областей  $D_i$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = -2G_i, \quad (1)$$

и на линиях раздела  $L_{ij}$  условиям

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial y} = \frac{1}{G_j} \frac{\partial F_j}{\partial y} \quad \text{на } L_{ij}; \quad (2)$$

$$F_i = F_j \quad \text{на } L_{ij}. \quad (3)$$

а также контурному условию

$$F = 0 \quad \text{на } L_0. \quad (4)$$

Решение уравнения (1) для прямоугольных областей представим так

$$F_i(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k,i}(y) \sin \alpha_k x \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $\alpha_k = \frac{\pi k}{a}$ .

Подставляя значения  $F_i(x, y)$  из выражения (5) в уравнения (1), после некоторых элементарных действий, для определения  $\varphi_{k,i}(y)$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\varphi_{k,i}''(y) - \alpha_k^2 \varphi_{k,i}(y) = -\frac{8G_i}{\pi k}. \quad (6)$$

После решения уравнения (6) выражение (5) примет следующий вид

$$F_i(x, y) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left\{ A_{k,i} \operatorname{sh} \alpha_k y + B_{k,i} \operatorname{ch} \alpha_k y + \frac{8G_i a^2}{\pi^3 k^3} \right\} \sin \alpha_k x \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_{k,i}$  и  $B_{k,i}$  запишем условия (2)–(4) в раскрытом виде, имея в виду выражения (7).

$$A_{k,j} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + A_{k,j} \operatorname{sh} \alpha_k h_j = q_{j,j+1} (A_{k,j+1} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + B_{k,j+1} \operatorname{sh} \alpha_k h_j);$$

$$[j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \quad (8)$$

$$A_{k,j} \operatorname{sh} \alpha_k h_j + B_{k,j} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + b_{k,j} = A_{k,j+1} \operatorname{sh} \alpha_k h_j + B_{k,j+1} \operatorname{ch} \alpha_k h_j + b_{k,j+1};$$

$$A_{k,1} \operatorname{sh} \alpha_k h_0 + B_{k,1} \operatorname{ch} \alpha_k h_0 + b_{k,1} = 0;$$

$$A_{k,n} \operatorname{sh} \alpha_k h_n + B_{k,n} \operatorname{ch} \alpha_k h_n + b_{k,n} = 0; \quad (9)$$

где

$$q_{j,j+1} = \frac{G_j}{G_{j+1}}, \quad b_{k,j} = \frac{8G_j a^2}{\pi^3 k^3}.$$

Из уравнений (8) легко получаются следующие рекуррентные формулы для  $A_{k,j+1}$  и  $A_{k,j}$ , выраженные через  $B_{k,j+1}$  и  $B_{k,j}$ :

$$A_{k,j} = \frac{2[B_{k,j+1} q_{j,j+1} + B_{k,j} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k h_j - q_{j,j+1} \operatorname{ch}^2 \alpha_k h_j)] +}{(q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2\alpha_k h_j} +$$

$$\frac{+ q_{j,j+1} (b_{k,j+1} - b_{k,j}) \operatorname{ch} \alpha_k h_j}{(q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2\alpha_k h_j};$$

$$[j = 1, 2, \dots, (n-1)], \quad (10)$$

$$A_{k,j+1} = \frac{2 [B_{k,j+1} (\operatorname{ch}^2 \alpha_k h_j - q_{j,j+1} \operatorname{sh}^2 \alpha_k h_j) - B_{k,j} + (q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2\alpha_k h_j + (b_{k,j+1} - b_{k,j}) \operatorname{ch} \alpha_k h_j]}{(q_{j,j+1} - 1) \operatorname{sh} 2\alpha_k h_j}$$

Уравнения (9) можно записать так

$$A_{k,1} = - \frac{B_{k,1} \operatorname{ch} \alpha_k h_0 + b_{k,1}}{\operatorname{sh} \alpha_k h_0};$$

$$A_{k,n} = - \frac{B_{k,n} \operatorname{ch} \alpha_k h_n + b_{k,n}}{\operatorname{sh} \alpha_k h_n}.$$
(11)

Итак, имеем  $2n$  уравнений (10) и (11) и столько же неизвестных постоянных с одним и тем же индексом  $k$ . Таким образом, с помощью уравнений (11), из уравнений (10) последовательно можем определить все неизвестные постоянные интегрирования. Следовательно, функции напряжений определяются.

Имея функцию напряжений, определим жесткость на кручение составного призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением [2]

$$C = 2 \sum_{i=1,2}^n \iint_{D_i} F_i(x, y) dx dy = 2 \int_0^a \left( \int_{h_0}^{h_1} F_1 dy + \int_{h_1}^{h_2} F_2 dy + \dots + \int_{h_{n-1}}^{h_n} F_n dy \right) dx.$$
(12)

Подставляя значения  $F_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в уравнение (12), интегрируя, окончательно получим:

$$C = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\alpha_k}{2} \sum_{i=1,2}^n b_{k,i} (h_i - h_{i-1}) + \sum_{i=1,2}^n A_{k,i} \operatorname{sh} \frac{\alpha_k (h_i + h_{i-1})}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sh} \alpha_k \frac{(h_i - h_{i-1})}{2} + \sum_{i=1,2}^n B_{k,i} \operatorname{sh} \frac{\alpha_k (h_i - h_{i-1})}{2} \operatorname{ch} \alpha_k \frac{(h_i + h_{i-1})}{2} \right\}.$$
(13)

Касательные напряжения в каждой из областей определяются так

$$\tau_{yz}^{(i)} = \theta \frac{\partial F_i}{\partial y},$$

$$\tau_{xz}^{(i)} = -\theta \frac{\partial F_i}{\partial x}.$$
(14)

Здесь  $\theta$  — угол закручивания на единицу длины стержня.

В качестве примера рассмотрим кручение симметричного стержня, составленного из трех ( $n=3$ ) изотропных слоев одинаковой толщины.

2°. Остановимся более подробно на случае симметричного трехслойного стержня, у которого все слои изотропны и имеют одинаковую толщину  $h$ .

Предположим, что наружные слои изготовлены из одного и того же материала с модулем сдвига  $G_1$ , а средний слой имеет другой модуль сдвига  $G_2$  (фиг. 2).

В формулах (10)–(13) предыдущего пункта нужно положить

$$n = 3, \quad h_0 = 0, \quad h_1 = h, \\ h_2 = 2h, \quad h_3 = 3h.$$

Решение уравнения (1) представим в виде (7) следующим образом

$$F_i(x, y) = \sum_{k=1, 3}^{\infty} [A_{k,i} \operatorname{sh} \alpha_k y + B_{k,i} \operatorname{ch} \alpha_k y + b_{k,i}] \sin \alpha_k x \quad (15)$$

$$(i-1)h \leq y \leq ih \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Выражения (15) содержат в себе шесть неизвестных постоянных  $A_{k,i}$ ,  $B_{k,i}$  ( $i=1, 2, 3$ ). При помощи уравнений (11) из рекуррентных формул (10) определяются все неизвестные постоянные интегрирования

$$A_{k,1} = b_{k,1} \frac{(\operatorname{ch} \beta_k - 1)[q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q(\operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k + 2)]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k};$$

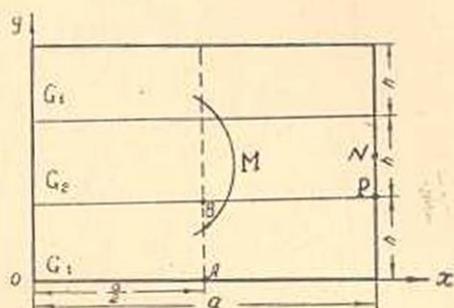
$$B_{k,1} = -b_{k,1};$$

$$A_{k,2} = b_{k,2} \frac{(\operatorname{ch} \beta_k - \operatorname{ch} 2\beta_k)[q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - (q + \operatorname{ch} \beta_k)^2]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k};$$

$$B_{k,2} = b_{k,2} \frac{(2 \operatorname{ch} \beta_k - 1)[q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k - \operatorname{ch}^2 \beta_k - 2q \operatorname{ch} \beta_k]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2]};$$

$$A_{k,3} = \frac{b_{k,1}}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} \{q^2 \operatorname{sh} \beta_k [\operatorname{sh} 3\beta_k \operatorname{ch} \beta_k - \\ - \operatorname{sh} \beta_k \operatorname{ch} 2\beta_k - \operatorname{sh} 2\beta_k] + 2q \operatorname{ch} \beta_k [2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + \operatorname{ch} 2\beta_k (1 - \operatorname{ch} \beta_k)] + \\ + \operatorname{sh}^2 2\beta_k (1 - \operatorname{ch} \beta_k) + \operatorname{ch}^2 \beta_k (\operatorname{ch} 2\beta_k - \operatorname{ch} \beta_k)\};$$

$$B_{k,3} = \frac{b_{k,1}}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} \{q^2 \operatorname{sh} \beta_k [\operatorname{sh} \beta_k \operatorname{sh} 2\beta_k + \operatorname{ch} 2\beta_k - \\ - \operatorname{ch} \beta_k \operatorname{ch} 3\beta_k] + 2q \operatorname{sh} \beta_k [\operatorname{ch}^2 \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k - 1) - \operatorname{ch} 2\beta_k] + \operatorname{ch}^2 \beta_k (\operatorname{sh} \beta_k + \\ + \operatorname{sh}^3 2\beta_k) + \operatorname{ch} 2\beta_k \operatorname{sh} 2\beta_k (\operatorname{ch} \beta_k - 2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - \operatorname{ch} 2\beta_k \operatorname{sh}^2 \beta_k)\};$$



Фиг. 2.

где

$$\beta_k = \alpha_k h = \frac{\pi k h}{a}, \quad b_{k,1} = \frac{8G_1 a^2}{\pi^3 k^3}, \quad q = \frac{G_1}{G_2}.$$

При помощи выражения (14) определим касательные напряжения в точках  $A$ ,  $B$ ,  $N$  и  $P$ :

$$(\tau_{x1})_A = \theta \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,1} \frac{(\operatorname{ch} \beta_k - 1) [q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q (\operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k + 2)]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (16)$$

$$(\tau_{x1})_B = \theta \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,1} \frac{(1 - \operatorname{ch} \beta_k) [q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - (q + \operatorname{ch} \beta_k)^2]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (17)$$

$$(\tau_{x2})_B = \theta \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,2} \frac{(1 - \operatorname{ch} \beta_k) [q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - (q + \operatorname{ch} \beta_k)^2]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{sh} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (18)$$

$$(\tau_{y2})_N = -\theta \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,2} \frac{\left[ q^2 \left( 1 + \operatorname{ch} \frac{\beta_k}{2} \right) \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q \operatorname{ch} \beta_k \left( \operatorname{ch} \beta_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k}{2} - 1 \right) + \operatorname{ch}^2 \beta_k \left( \operatorname{ch} \frac{\beta_k}{2} - 1 \right) \right]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2] \operatorname{ch} \beta_k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}; \quad (19)$$

$$(\tau_{y1})_P = -\theta \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha_k b_{k,1} \frac{2(\operatorname{ch} \beta_k - 1) [q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + q(2 \operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k (1 + \operatorname{ch} \beta_k)]}{[(1+q)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2]} (-1)^{\frac{k-1}{2}}. \quad (20)$$

Если предполагать, что  $\frac{h}{a} \rightarrow 0$ , т. е. имеем стержень сечением в виде узкого прямоугольника, тогда уравнения (16)–(20) примут следующий вид:

$$(\tau_{x1})_A = 3\theta G_1 h;$$

$$(\tau_{x1})_B = \theta G_1 h;$$

$$(\tau_{x2})_B = \theta G_2 h;$$

$$(\tau_{y1})_P = (\tau_{y2})_N = 0.$$

Такие приближенные формулы для напряжений в точках  $A$ ,  $B$ ,  $N$  и  $P$  иным путем получены С. Г. Лехницким [4].

Теперь перейдем к определению жесткости симметричного трехслойного призматического стержня.

Запишем уравнение (13) для рассматриваемого случая

$$C = 2 \int_0^a \int_0^h F_1(x, y) dy dy + 2 \int_0^a \int_h^{2h} F_2(x, y) dx dy + 2 \int_0^a \int_{2h}^{3h} F_3(x, y) dx dy,$$

или, используя симметричность  $F(x, y)$ ,

$$C = 4 \int_0^a \left[ \int_0^h F_1(x, y) dy + \int_h^{\frac{3}{2}h} F_2(x, y) dy \right] dx. \quad (21)$$

Подставляя значения  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$  из уравнений (15) в уравнение (21), интегрируя по  $x$  и по  $y$ , находим

$$C = \frac{32 ah^3}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{2G_1 Q(\beta_k, q) + G_2 P(\beta_k, q)}{\Omega(\beta_k, q)}, \quad (22)$$

где

$$Q(\beta_k, q) = (\operatorname{ch} \beta_k - 1)^2 [q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k + 2q (\operatorname{ch}^2 \beta_k + \operatorname{ch} \beta_k + 1) + \operatorname{ch} \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k + 2)] + (\beta_k - \operatorname{sh} \beta_k) [(1 + q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2) \operatorname{sh} \beta_k,$$

$$P(\beta_k, q) = \beta_k \operatorname{sh} \beta_k [(1 + q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2) + 2(q^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k - 2q \operatorname{ch} \beta_k - \operatorname{ch}^2 \beta_k) \times \\ \times \left[ \left( \operatorname{sh} \frac{3}{2} \beta_k - \operatorname{sh} \beta_k \right) (2 \operatorname{ch} \beta_k - 1) \operatorname{sh} \beta_k + (\operatorname{ch} \beta_k - \operatorname{ch} 2\beta_k) \times \right. \\ \left. \times \left( \operatorname{ch} \frac{3}{2} \beta_k - \operatorname{ch} \beta_k \right) \right];$$

$$\Omega(\beta_k, q) = \beta_k \operatorname{sh} \beta_k [(1 + q^2 \operatorname{ch}^2 \beta_k - q^2)].$$

Интересно рассмотреть жесткость стержня с узким прямоугольным сечением. Для этого в выражении (22) перейдем к пределу, когда  $\frac{h}{a}$  стремится к нулю. Получим для жесткости такого стержня следующее компактное выражение

$$C = \frac{(26 G_1 + G_2) ah^3}{3}. \quad (23)$$

Если принять  $G_1 = G_2$ , то для жесткости стержня получим хорошо известное выражение

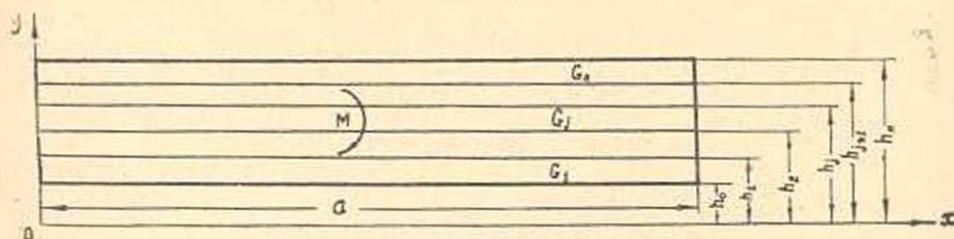
$$C = 9ah^3 G_1.$$

Для жесткости трехслойного стержня с узким прямоугольным сечением С. Г. Лехницкий получил неверный результат (5.14) [4].

Ошибка заключается в переходе к пределу в (5.5) [4], когда

$$C = \frac{a}{h} \text{ неограниченно возрастает.}$$

3°. Рассмотрим случай, когда сечение слоистого стержня имеет вид узкого прямоугольника ( $a \gg h_n$ ). Число слоев равно  $n$ . На торцах стержня действуют два крутящих момента. Предположим, что слои стержня изготовлены из различных материалов, т. е. с модулями сдвигов  $G_1$  в области первой,  $G_2$  — второй и т. д.,  $G_n$  — в  $n$ -ой области (фиг. 3).



Фиг. 3.

Так как сечение стержня представляет узкий прямоугольник, то изменением функции напряжения  $F(x, y)$  по направлению  $x$  можно пренебречь относительно изменения по  $y$ . При этом предположении уравнения (1) примут такой вид

$$\frac{d^2 F_i}{dy^2} = -2G_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

Интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения (24), находим

$$F_i(y) = -G_i y^2 + A_i y + B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

Из условий (2)–(4) получаются рекуррентные формулы:

$$A_j = G_j h_j + \frac{B_j - B_{j+1}}{h_j(1 - q_{j+1, j})} \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \quad (26)$$

$$A_{j-1} = A_j q_{j+1, j};$$

$$A_1 = G_1 h_0 - \frac{B_1}{h_0}, \quad (27)$$

$$A_n = G_n h_n - \frac{B_n}{h_n}.$$

Итак, с помощью уравнений (27), из уравнений (26) последовательно можно определить неизвестные постоянные  $A_j$ ,  $B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и, значит, — функцию напряжения.

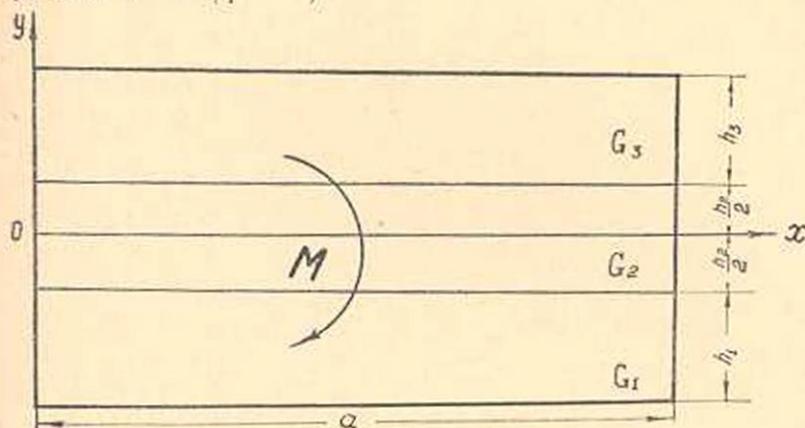
Жесткость на кручение многослойного призматического стержня с сечением в виде узкого прямоугольника определяется так

$$C = 2 \iint_{D_0} F(y) dx dy = 2a \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} F_i(y) dy,$$

или

$$C = 2a \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{C_i (h_i^3 - h_{i-1}^3)}{3} + \frac{A_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)}{2} + B_i (h_i - h_{i-1}) \right\}. \quad (28)$$

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим частный случай, когда  $n = 3$  (фиг. 4).



Фиг. 4.

При этом в формулах (26)–(28) нужно вместо  $h_i$  положить

$$h_0^* = -h_1 - \frac{h_2}{2}, \quad h_1^* = -\frac{h_2}{2}, \quad h_2^* = \frac{h_2}{2}, \quad h_3^* = h_3 + \frac{h_2}{2}.$$

Из условия симметрии

$$F_2(y) = F_2(-y),$$

$$A_2 = 0.$$

Решая уравнения (26) и (27) для этого случая, получим

$$A_1 = A_3 = 0;$$

$$B_1 = G_1 \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^2;$$

$$B_2 = G_2 \frac{h_2^2}{4} + G_1 (h_1^2 + h_1 h_2);$$

$$B_3 = G_3 \left( h_3 + \frac{h_2}{2} \right)^2.$$

Итак, функция напряжения  $F_i(y)$  определена.

Определим жесткость стержня, используя формулу (28)

$$C = \frac{[4h_1^3 + 6h_2^2(h_1 + h_2) + 3h_1^2h_2]G_1 + G_2h_2^3 + (4h_3^3 + 3h_2h_3^2)G_3}{3}a \quad (29)$$

Рассмотрим два простых случая.

а) Предположим  $h_1 = h_2 = h$ ,  $G_1 = G_3$ . Тогда (29) примет такой вид

$$C = \frac{[(8h^3 + 6h_2^2h + 6h^2h_2 + 6h_2^3)G_1 + h_2^3G_2]a}{3}$$

б) Предположим  $h_1 = h_2 = h_3 = h$ , тогда

$$C = \frac{(26G_1 + G_2)h^3a}{3}$$

Это выражение уже было получено в предыдущем пункте.

## § 2. Кручение многослойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с учетом ползучести

1°. Рассмотрим призматический стержень прямоугольного поперечного сечения, составленный из различных материалов. На торцах стержня действуют два крутящих момента  $M$  (фиг. 1). Исследуется случай, когда модули мгновенной деформации сдвига материалов изменяются во времени столь незначительно, что их можно считать постоянными  $G_i(t) = G_i = \text{const}$ .

Как известно [3], задача о кручении составного призматического стержня с учетом линейной ползучести приводится к определению непрерывной в области  $D_0$  функции напряжений  $F(x, y, t)$ , которая удовлетворяет в соответствующих областях  $D_i$  дифференциальным уравнениям

$$\Delta F_i = A_i(t), \quad (1)$$

контурному условию

$$F = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (2)$$

условиям непрерывности

$$F_i = F_j \quad \text{на } L_{ij} \quad (3)$$

и условиям разрыва ее нормальной производной на линиях раздела

$$\frac{1}{G_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial y} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial F_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau = \frac{1}{G_j} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial F_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau \quad \text{на } L_{ij}. \quad (4)$$

Здесь  $A_i(t)$  — неизвестная функция в области  $D_i$ , зависящая только от времени  $t$ ,  $\omega_i(t, \tau)$  — мера ползучести при чистом сдвиге. При этом, для определения функций  $A_i(t)$  и степени закручивания  $\theta(t)$ , имеются следующие соотношения [3]:

$$A_i(t) - G_i \int_0^t A_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau = -2G_i \theta(t); \quad (5)$$

$$M = 2 \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} F_i(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что решение дифференциального уравнения (1) можно представить в следующем виде

$$F_i(x, y, t) = \sum_{k=1, 3}^{\infty} [B_{k,i}(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + D_{k,i}(t) \operatorname{ch} \alpha_k y - A_i(t) b_k] \sin \alpha_k x, \quad (7)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad b_k = \frac{4a^2}{\pi^2 k^2}.$$

$B_{k,i}(t)$  и  $D_{k,i}(t)$  — неизвестные функции, которые получаются при интегрировании дифференциальных уравнений (1).

Для определения неизвестных функций  $B_{k,i}(t)$ ,  $D_{k,i}(t)$ ,  $A_i(t)$  и  $\theta(t)$ , имея в виду выражение (7), напомним уравнения (2)–(6)

$$B_{k,1}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_0 + D_{k,1}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_0 - A_1(t) b_k = 0; \quad (8)$$

$$B_{k,n}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_n + D_{k,n}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_n - A_n(t) b_k = 0;$$

$$B_{k,j}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j + D_{k,j}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j - A_j(t) b_k = B_{k,j+1}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j + \\ + D_{k,j+1}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j - A_{j+1}(t) b_k \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \quad (9)$$

$$\frac{1}{G_j} \{B_{k,j}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} - \\ - \int_0^t \{B_{k,j}(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} \frac{\partial \omega_j(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \frac{1}{G_{j+1}} \{B_{k,j+1}(t) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(t) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} - \\ - \int_0^t \{B_{k,j+1}(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k h_j\} \frac{\partial \omega_{j+1}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \\ [j = 1, 2, \dots, (n-1)]; \quad (10)$$

$$A_j(t) - G_j \int_0^t A_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau = -2G_j \theta(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (11)$$

$$M = 2 \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \int_{k=1}^{\infty} \{B_{k,j}(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + D_{k,j}(t) \operatorname{ch} \alpha_k y - A_j(t) b_k\} \sin \alpha_k x dx dy. \quad (12)$$

Предполагается, что во всех областях материал обладает ползучестью и для меры ползучести материала  $\omega_j(t, \tau)$  при чистом сдвиге принимается следующая зависимость [5]

$$\omega_j(t, \tau) = \varphi_j(\tau) [1 - e^{-\gamma_j(t-\tau)}] \quad \text{где} \quad \varphi_j(\tau) = \omega_{j0} + \frac{\omega_{j1}}{\tau}. \quad (13)$$

Причем  $\omega_{j0}$  — предельное значение меры ползучести данного материала при чистом сдвиге,  $\gamma_j$ ,  $\omega_{j1}$  — некоторые параметры, подобранные так, чтобы соотношение (13) лучше описывало экспериментальные кривые ползучести данного материала,  $\tau_1$  — возраст материала.

Принятое выражение для меры ползучести при чистом сдвиге —  $\omega_j(t, \tau)$  в форме (13) позволяет свести решение интегральных уравнений (10) и (11) к решению линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В самом деле, уравнение (11) дифференцируем по  $t$

$$\begin{aligned} A_j'(t) - G_j \int_{\tau_1}^t A_j(\tau) [\varphi_j'(\tau) + \gamma_j \varphi_j(\tau)] \gamma_j e^{-\gamma_j(t-\tau)} d\tau + A_j(t) \gamma_j G_j \varphi_j(t) = \\ = -2\theta'(t) G_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая значение интеграла из соотношений (11) и (14) и дифференцируя полученные равенства еще раз по  $t$ , получается следующее дифференциальное уравнение

$$A_j''(t) + A_j'(t) a_j(t) = -2\theta''(t) G_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

где

$$a_j(t) = \gamma_j [1 + \varphi_j(t) G_j].$$

При этом имеем следующие начальные условия

$$A_j(\tau_1) = -2G_j \theta(\tau_1)$$

$$A_j'(\tau_1) = 2G_j [\theta'(\tau_1) \gamma_j \varphi_j(\tau_1) G_j - \theta''(\tau_1)] \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Аналогично из уравнения (10) получается следующая система

$$\begin{aligned} [B_{k,j}''(t) + B_{k,j}'(t) a_j(t)] + [D_{k,j}''(t) + D_{k,j}'(t) a_j(t)] \operatorname{th} \alpha_k h_j = \\ = [B_{k,j+1}'(t) + B_{k,j+1}(t) a_{j+1}(t)] q_{k,j+1} + \\ + [D_{k,j+1}'(t) + D_{k,j+1}(t) a_{j+1}(t)] q_{j,j+1} \operatorname{th} \alpha_k h_j \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$q_{j,j+1} = \frac{G_j}{G_{j+1}},$$

при следующих начальных условиях

$$\begin{aligned}
 & B_{k,j}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j = \\
 & = q_{j,j+1} [B_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j]; \\
 & \frac{B'_{k,j}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D'_{k,j}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j}{G_j} + [B_{k,j}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j] \times \\
 & \times \gamma_j \varphi_j(\tau_1) = \frac{B'_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D'_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j}{G_{j+1}} + \\
 & + [B_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{ch} \alpha_k h_j + D_{k,j+1}(\tau_1) \operatorname{sh} \alpha_k h_j] \gamma_{j+1} \varphi_{j+1}(\tau_1) \\
 & [j = 1, 2, \dots, (n-1)].
 \end{aligned} \tag{18}$$

Присоединим к этим уравнениям уравнения (8), (9) и (12)

$$B_{k,1}(t) \operatorname{th} \alpha_k h_0 + D_{k,1}(t) = A_1(t) \frac{b_k}{\operatorname{ch} \alpha_k h_0}; \tag{8'}$$

$$B_{k,n}(t) \operatorname{th} \alpha_k h_n + D_{k,n}(t) = A_n(t) \frac{b_k}{\operatorname{ch} \alpha_k h_n};$$

$$\begin{aligned}
 & [B_{k,j}(t) - B_{k,j+1}(t)] \operatorname{th} \alpha_k h_j + [D_{k,j}(t) - D_{k,j+1}(t)] = \\
 & = [A_j(t) - A_{j+1}(t)] \frac{b_k}{\operatorname{ch} \alpha_k h_j}; \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)];
 \end{aligned} \tag{9'}$$

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n [d_{k,j} B_{k,j}(t) + e_{k,j} D_{k,j}(t) + f_{k,j} A_j(t)]. \tag{12'}$$

Здесь

$$d_{k,j} = \frac{4}{\alpha_k^2} (\operatorname{ch} \alpha_k h_j - \operatorname{ch} \alpha_k h_{j-1}); \quad e_{k,j} = \frac{4}{\alpha_k} (\operatorname{sh} \alpha_k h_j - \operatorname{sh} \alpha_k h_{j-1});$$

$$f_{k,j} = -\frac{b_k (h_j - h_{j-1})}{\alpha_k}.$$

Итак, имеем  $3n + 1$  уравнений в (15), (17), (8'), (9'), (12') и столько же неизвестных функций  $A_j(t)$ ,  $B_{k,j}(t)$ ,  $D_{k,j}(t)$ ,  $\theta(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Решая эти уравнения, получим все неизвестные функции, следовательно будем иметь  $F(x, y, t)$  в каждой области.

2°. Рассмотрим составной призматический стержень узкого прямоугольного сечения ( $a \gg h_n$ ) (фиг. 3). Предполагается, что слои стержня изготовлены из различных материалов. Число слоев равно  $n$ .

Для узкого прямоугольника уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 F_j}{dy^2} = A_j(t). \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (19), получим

$$F_j(y, t) = \frac{A_j(t) y^2}{2} + B_j(t) y + D_j(t). \quad (20)$$

Граничные и контактные условия (2)–(4), а также выражения (5) и (6) принимают вид:

$$\frac{A_1(t) h_0^2}{2} + B_1(t) h_0 + D_1(t) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{A_n(t) h_n^2}{2} + B_n(t) h_n + D_n(t) = 0;$$

$$[A_j(t) - A_{j+1}(t)] \frac{h_j^2}{2} + [B_j(t) - B_{j+1}(t)] h_j + [D_j(t) - D_{j+1}(t)] = 0; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_j} [A_j(t) h_j + B_j(t)] - \int_{\tau_1}^t [A_j(\tau) h_j + B_j(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{G_{j+1}} [A_{j+1}(t) h_j + B_{j+1}(t)] - \int_{\tau_1}^t [A_{j+1}(\tau) h_j + B_{j+1}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_{j+1}(t, \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_j(t)}{G_j} - \int_{\tau_1}^t A_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau &= \frac{A_{j+1}(t)}{G_{j+1}} - \int_{\tau_1}^t A_{j+1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_{j+1}(t, \tau) d\tau; \\ [j = 1, 2, \dots, (n-1)] \end{aligned} \quad (24)$$

$$M = 2a \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{A_j(t)}{6} (h_j^3 - h_{j-1}^3) + \frac{B_j(t)}{2} (h_j^2 - h_{j-1}^2) + D_j(t) (h_j - h_{j-1}) \right\}. \quad (25)$$

Имея в виду уравнение (24), из уравнения (23) легко получается

$$\begin{aligned} \frac{B_j(t)}{G_j} - \int_{\tau_1}^t B_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_j(t, \tau) d\tau &= \frac{B_{j+1}(t)}{G_{j+1}} - \int_{\tau_1}^t B_{j+1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_{j+1}(t, \tau) d\tau \\ [j = 1, 2, \dots, (n-1)]. \end{aligned} \quad (23')$$

Если иметь в виду выражения (13), то система (24) сводится к следующей системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$A_j'(t) + A_j'(t) a_j(t) = q_{j, j+1} [A_{j+1}'(t) + A_{j+1}'(t) a_{j+1}(t)], \quad (26)$$

при начальных условиях:

$$\begin{aligned} A_j(\tau_1) &= q_{j, j+1} A_{j+1}(\tau_1); & [j = 1, 2, \dots, (n-1)], \\ \frac{A_j'(\tau_1)}{G_j} + A_j(\tau_1) \gamma_j \varphi_j(\tau_1) &= \frac{A_{j+1}'(\tau_1)}{G_{j+1}} + A_{j+1}(\tau_1) \gamma_{j+1} \varphi_{j+1}(\tau_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично и для системы (23')

$$B_j^*(t) + B_j^*(t) a_j(t) = q_{j,j+1} [B_{j+1}^*(t) + B_{j+1}^*(t) a_{j+1}(t)]; \quad (28)$$

$$t = \tau_1$$

$$B_j(\tau_1) = q_{j,j+1} B_{j+1}(\tau_1); \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)],$$

$$\frac{B_j^*(\tau_1)}{G_j} + B_j(\tau_1) \gamma_j \varphi_j(\tau_1) = \frac{B_{j+1}^*(\tau_1)}{G_{j+1}} + B_{j+1}(\tau_1) \gamma_{j+1} \varphi_{j+1}(\tau_1). \quad (29)$$

Таким образом имеем  $3n$  уравнений в (21), (22), (25), (26), (28) и столько же неизвестных функций.

3°. Рассмотрим более конкретный случай, т. е. когда имеем трехслойный стержень узкого прямоугольного сечения (фиг. 4).

Функция напряжения принимает вид

$$F_j(y, t) = \frac{A_j(t)y^2}{2} + B_j(t)y + D_j(t) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (30)$$

Определим неизвестные функции  $A_j(t)$ ,  $B_j(t)$ ,  $D_j(t)$ .

Из условия симметричности  $F_2(y)$  во второй области следует

$$B_2(t) = 0. \quad (31)$$

Имея в виду выражение (31), из системы (23') находим

$$B_1(t) - G_1 \int_{\tau_1}^t B_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_1(t, \tau) d\tau = 0;$$

$$B_3(t) - G_3 \int_{\tau_1}^t B_3(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_3(t, \tau) d\tau = 0. \quad (32)$$

Система (32) однородных интегральных уравнений, как известно, не имеет решений отличных от нуля. Следовательно

$$B_1(t) = B_3(t) = 0. \quad (33)$$

Из соотношений (21) и (22), имея в виду (31) и (33), получаем:

$$D_1(t) = -\frac{A_1(t)}{8} (2h_1 + h_2)^2;$$

$$D_2(t) = -\frac{1}{8} [4A_1(t)(h_1^2 + h_1h_2) + A_3(t)h_2^2];$$

$$D_3(t) = -\frac{A_3(t)}{8} (2h_3 + h_2)^2. \quad (34)$$

Для определения  $A_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) имеем дифференциальные уравнения (26) с начальными условиями (27) и выражение (25)

$$\begin{aligned} A_1'(t) + A_1(t) a_1(t) &= q_{1,2} [A_2'(t) + A_2(t) a_2(t)]; \\ A_2'(t) + A_2(t) a_2(t) &= q_{2,3} [A_3'(t) + A_3(t) a_3(t)]; \end{aligned} \quad (35)$$

$$M = - [A_1(t) H_1 + A_2(t) H_2 + A_3(t) H_3], \quad (36)$$

где

$$H_1 = \frac{a}{6} (4h_1^3 + 9h_1^2 h_2 + 6h_1 h_2^2), \quad H_2 = \frac{ah_2^3}{6}, \quad H_3 = \frac{a}{6} (4h_3^3 + 3h_3^2 h_2).$$

При этом имеем следующие начальные условия:

$$A_1(\tau_1) = q_{1,2} A_2(\tau_1);$$

$$A_2(\tau_1) = q_{2,3} A_3(\tau_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{A_1'(\tau_1)}{G_1} + A_1(\tau_1) \gamma_{11} \varphi_1(\tau_1) &= \frac{A_2'(\tau_1)}{G_2} + A_2(\tau_1) \gamma_{22} \varphi_2(\tau_1); \\ \frac{A_2'(\tau_1)}{G_2} + A_2(\tau_1) \gamma_{22} \varphi_2(\tau_1) &= \frac{A_3'(\tau_1)}{G_3} + A_3(\tau_1) \gamma_{33} \varphi_3(\tau_1); \end{aligned} \quad (37)$$

$$M = - [A_1(\tau_1) H_1 + A_2(\tau_1) H_2 + A_3(\tau_1) H_3];$$

$$A_1'(\tau_1) H_1 + A_2'(\tau_1) H_2 + A_3'(\tau_1) H_3 = 0.$$

Подставив значение  $A_3(t)$  из уравнения (36) в систему (35), после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} A_2'(t) + A_2(t) \frac{H_2 G_2 a_3(t) + (H_1 G_1 + H_3 G_3) a_2(t)}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} + \\ + A_1'(t) \frac{H_1 G_1 [a_3(t) - a_1(t)]}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} = 0; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_1'(t) + A_1(t) \frac{H_1 G_1 a_3(t) + (H_2 G_2 + H_3 G_3) a_1(t)}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} + \\ + A_2'(t) \frac{H_2 G_2 [a_3(t) - a_2(t)]}{H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3} = 0. \end{aligned}$$

Итак, имеем два дифференциальных уравнения с начальными условиями (37), откуда и можно определить  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$ .

Систему дифференциальных уравнений (38) можно решить степенными рядами, как в работе [3].

Теперь решим эту систему иным методом в следующих случаях:

а) Предположим, что наружные слои стержня составлены из одного и того же материала, т. е.  $G_1 = G_3$ . Предположим также, что в первой и третьей областях меры ползучести одинаковы, т. е.  $\omega_1(t, \tau) = \omega_3(t, \tau)$ , а во второй области —  $\omega_2(t, \tau)$ .

Учитывая эти предположения, первое уравнение системы (38) запишем так:

$$A_2^*(t) + A_2^*(t) \left( r_2 + \frac{p_2}{t} \right) = 0, \quad (39)$$

где

$$r_2 = \frac{G_1(H_1 + H_3)(1 + G_2\omega_{02})\gamma_2 + G_2H_2\gamma_1(1 + G_1\omega_{01})}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3};$$

$$p_2 = \frac{G_1G_2\gamma_2\omega_{12}(H_1 + H_3) + G_2H_2\gamma_1G_1\omega_{11}}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}.$$

Интегрируя уравнение (39) и пользуясь обозначением функции влияния [5], находим

$$A_2(t) = d_1^{(2)} r_2^{-(1-p_2)} [\Phi(r_2 t, p_2) - \Phi(r_2 \tau_1, p_2)] + d_2^{(2)}, \quad (40)$$

где

$$\Phi(\xi, p) = \int_0^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau,$$

$d_1^{(2)}$  и  $d_2^{(2)}$  — постоянные интегрирования.

Подставляя значения  $A_2(t)$  и  $a_1(t)$  во второе уравнение системы (38), получим

$$A_1^*(t) + A_1^*(t) \left( r_1 + \frac{p_1}{t} \right) = \left( m + \frac{n}{t} \right) \frac{e^{-rt}}{t^{p_1}}. \quad (41)$$

Здесь

$$r_1 = \gamma_1(1 + \omega_{01}G_1);$$

$$p_1 = \gamma_1\omega_{11}G_1;$$

$$m = \frac{d_1^{(2)}G_1H_2[\gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_2G_2\omega_{02} - \gamma_1\omega_{01}G_1]}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3};$$

$$n = \frac{d_1^{(2)}H_2G_1[\gamma_2G_2\omega_{12} - \gamma_1G_1\omega_{11}]}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}.$$

Легко видеть, что решение уравнения (41) можно представить так

$$A_1(t) = d_1^{(1)} r_1^{-(1-p_1)} [\Phi(r_1 t, p_1) - \Phi(r_1 \tau_1, p_1)] +$$

$$+ m r_0^{-(1-p_0)} [\Phi(r_0 t, p_0) - \Phi(r_0 \tau_1, p_0)] +$$

$$+ n \int_{\tau_1}^t e^{-(1-k)\tau} [\Phi(c\tau, k) - \Phi(c\tau_1, k)] d\tau + d_2^{(1)}, \quad (42)$$

где

$$r_0 = r_2 - 2r_1; \quad c = r_1 - r_2;$$

$$p_0 = p_2 - 2p_1 - 1; \quad k = p_2 - p_1 - 1.$$

Для постоянных  $d_1^{(1)}$ ,  $d_1^{(2)}$ ,  $d_2^{(1)}$  и  $d_2^{(2)}$ , определяемых из начальных условий [27], получены следующие значения

$$d_1^{(1)} = - \frac{M[\gamma_{12}\bar{\varphi}_0(\tau_1)G_2 - \gamma_{11}\bar{\varphi}_1(\tau_1)G_1]G_1G_2H_2e^{\gamma_{11}\tau_1}}{[(H_1+H_2)G_1+H_2G_2]^2};$$

$$d_1^{(2)} = \frac{M[\gamma_{12}\bar{\varphi}_2(\tau_1)G_2 - \gamma_{11}\bar{\varphi}_1(\tau_1)G_1]G_1G_2(H_1+H_2)e^{\gamma_{11}\tau_1}}{[(H_1+H_2)G_1+H_2G_2]^2};$$

$$d_2^{(1)} = - \frac{MG_1}{(H_1+H_2)G_1+H_2G_2}; \quad d_2^{(2)} = - \frac{MG_2}{(H_1+H_2)G_1+H_2G_2}.$$

Имея функции  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$ , можем с помощью (36) определить  $A_3(t)$ . Следовательно, функции  $F_i(y, t)$  определены ( $i = 1, 2, 3$ ).

б) Предположим, что наружные слои стержня составлены из одного и того же материала, а средний слой подчиняется закону Гука, т. е.

$$\omega_1(t, \tau) = \omega_3(t, \tau),$$

$$\omega_2(t, \tau) = 0.$$

Имея в виду эти соотношения из системы (38) получим

$$A_2^*(t) + A_2^*(t) \left( r_2 + \frac{p_2}{t} \right) = 0;$$

$$A_1^*(t) + A_1^*(t) \left( r_1 + \frac{p_1}{t} \right) + A_2^*(t) \frac{a_1(t)}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3} = 0. \quad (43)$$

Здесь

$$r_2 = \frac{H_2G_2\gamma_{11}[1 + \omega_{10}G_1]}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}; \quad r_1 = \frac{\gamma_{11}(1 + \omega_{01}G_1)}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3};$$

$$p_2 = \frac{H_2G_2\gamma_{12}G_1\omega_{11}}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}; \quad p_1 = \frac{\gamma_{11}\omega_{11}G_1}{H_1G_1 + H_2G_2 + H_3G_3}.$$

Интегрируя первое уравнение системы (43) получаем:

$$A_2(t) = d_1^{(2)} r_2^{-(1-p_2)} [\Phi(r_2 t, p_2) - \Phi(r_2 \tau_1, p_2)] + d_2^{(2)}.$$

Остальные функции определяются аналогично первому случаю.

в) Предположим, что во второй области материал обладает ползучестью, а в первой и третьей областях справедлив закон Гука.

Тогда

$$\omega_1(t, \tau) = \omega_3(t, \tau) = 0, \quad \omega_2(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma_{11}(t-\tau)}].$$

Предполагается, что  $G_1 = G_3$ .

В этом случае получим

$$A_2^*(t) + A_2^*(t) \left( r + \frac{p}{t} \right) = 0;$$

$$A_1(t) = A_3(t) = - \frac{A_2(t) H_2}{H_1 + H_3} - \frac{M}{H_1 + H_3}; \quad (44)$$

$$t = \tau_1$$

$$A_2(\tau_1) = \frac{M_0}{1 + V};$$

$$A_2^*(\tau_1) = - \frac{M_0 G_2 \gamma \varphi(\tau_1)}{(1 + V)^2}, \quad (45)$$

где

$$r = \gamma + \frac{G_2 \gamma \omega_0}{1 + V}; \quad p = \frac{G_2 \gamma \omega_1}{1 + V}; \quad q = \frac{G_2}{G_1};$$

$$M_0 = - \frac{Mq}{H_1 + H_3}; \quad V = \frac{H_2 q}{H_1 + H_2}.$$

Из уравнения (44) для  $A_2(t)$  получаем такое компактное выражение

$$A_2(t) = d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)] + d_2.$$

Постоянные  $d_1$  и  $d_2$  определяются из условий (45)

$$d_1 = - \frac{M_0 \tau_1^p e^{-r\tau_1} G_2 \gamma \left( \omega_0 + \frac{\omega_1}{\tau_1} \right)}{(1 + V)^2};$$

$$d_2 = \frac{M_0}{(1 + V)}.$$

Определим касательное напряжение во втором слое:

$$\tau_{xz}^{(2)} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = A_2(t) y,$$

или

$$\tau_{xz}^{(2)} = y \{ d_1 r^{-1(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)] + d_2 \},$$

при

$$t = \tau_1 \quad \tau_{xz}^{(2)}(y, \tau_1) = d_2 y.$$

Напряжение  $\tau_{xz}^{(2)}$  в зависимости от времени можно представить в следующем виде

$$\tau_{xz}^{(2)}(y, t) = R_2(t, \tau_1) \tau_{xz}^{(2)}(y, \tau_1),$$

где

$$R_2(t, \tau_1) = 1 + \frac{d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)]}{d_2}.$$

Функция  $R_2(t, \tau_1)$  характеризует изменение напряженного состояния стержня во времени под влиянием линейной ползучести.

Аналогично определяются  $\tau_{xz}^{(1)}$  в первом слое

$$\tau_{xz}^{(1)}(y, t) = R_1(t, \tau_1) \tau_{xz}^{(1)}(y, \tau_1),$$

где

$$R_1(t, \tau_1) = 1 + \frac{H_2 d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)]}{M + H_2 d_2}$$

$R_1(t, \tau_1)$  — коэффициент, который характеризует изменения касательного напряжения в первом слое во времени под влиянием ползучести второго слоя.

Для определения жесткости составного стержня получается следующая формула

$$\theta(t) = \theta^*(t, \tau_1) \theta(\tau_1),$$

где

$$\theta^*(t, \tau_1) = 1 + \frac{H_2 d_1 r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)]}{M + H_2 d_2}$$

Ниже, в таблице, приводится результат вычислений значений коэффициентов  $R_1(t, \tau_1)$ ,  $R_2(t, \tau_1)$  и  $\theta^*(t, \tau_1)$  в зависимости от времени  $t$  для железобетонной балки с узким прямоугольным поперечным сечением, армированной с обеих сторон и находящейся под действием постоянных крутящих моментов  $M$ , приложенных на ее торцах в возрасте бетона  $\tau_1 = 14$  дней.

Приняты следующие характеристики меры ползучести бетона при чистом сдвиге:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 12,05 \cdot 10^{-5}; & \omega_0 &= 2,25 \cdot 10^{-5}; & \gamma &= 0,026; \\ G_1 &= G_3 = G_{ж} = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; & G_2 &= G_6 = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2; \\ q &= 0,1; & \tau_1 &= 14 \text{ дней}; & h_1 = h_3 &= \frac{1}{10} h; & h_2 &= h. \end{aligned}$$

Таблица

$t$ в днях	14	28	45	90	180	$\infty$
$R_1(t, \tau_1)$	1	1,0653	1,0973	1,1078	1,1085	1,1085
$R_2(t, \tau_1)$	1	0,5023	0,2904	0,2121	0,2087	0,2087
$\theta^*(t, \tau_1)$	1	1,0653	1,0973	1,1078	1,1085	1,1085

Из таблицы видно, что начальные касательные напряжения в бетоне  $\tau_{xz}^{(1)}$  с течением времени под влиянием линейной ползучести очень быстро затухают.

Վ. Ս. Սարգսյան

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ  
ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածի առաջին մասում քննարկված է ուղղանկյուն ընդլայնական հատվածք ունեցող բազմաշերտ իզոտրոպ առաձգական ձողերի ոլորման խնդիրը: Լուծումը ներկայացված է անվերջ եռանկյունաչափական շարքերի տեսքով, զործակիցների համար ստացված են սեկուրենտ հալտասարույթներ: Որպես մասնավոր դեպք առաջադրված է բարակ ( $\alpha \gg h_0$ ) բազմաշերտ առաձգական ձողերի ոլորման խնդիրը: Ստացված են լարումների կոչտոթվյան համար կոմպակտ արտահայտություններ:

Հողվածի երկրորդ մասում հետազոտված է բազադրյալ ձողերի ոլորման խնդիրը սողքի հաշվառումով:

Տրված է բարակ շերտավոր ձողերի ոլորման խնդրի լուծումը դժային սողքի հաշվառումով, ստացված են արտահայտություններ՝ կախված է ժամանակից ոլորման անկյան և լարումների կոմպոնենտների համար:

Վերջում, բարակ եռաշերտ ձողի ոլորման խնդրի լուծման ժամանակ ստացված արդյունքների համար կազմված է աղյուսակ:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической [теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
2. Чобанян К. С. Применение функции напряжения в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и технич. наук, т. VIII, № 2, 1955.
3. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести. Изв. АН СССР, отд. технических наук, № 6, 1956.
4. Лехницкий С. Г. Кручение многослойного прямоугольного стержня. Инженерный сборник, т. 23, 1956.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехнадат, М.—Л., 1952.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Каралетян

**Влияние старения бетона на зависимость  
 между напряжениями и деформациями ползучести**

Одной из основных предпосылок, положенных в основу существующих линейных теорий ползучести бетона, является принятие линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести. Однако, и на сегодня строго не определено то предельное напряжение, при котором кончается область линейной ползучести и начинается область нелинейной ползучести.

Предыдущими нашими исследованиями [6] было показано, что существовавшие до этого экспериментальные данные не могли служить основанием для правильного суждения о пределе пропорциональности между напряжениями и деформациями ползучести. Впервые нами было установлено, что этот предел в большей мере зависит от возраста бетона к моменту его длительного нагружения. Иначе говоря, фактор старения бетона в большей мере предreshает то напряжение, до которого имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Одновременно, впервые нами было выявлено, что бетон, находясь под длительной нагрузкой, в начальный период может претерпевать нелинейную ползучесть, а спустя некоторое время — линейную ползучесть. Эта особенность характерна для бетона, нагруженного в молодом возрасте.

В свете вышеизложенного, основная цель настоящей работы заключается в установлении границы линейной и нелинейной ползучести в зависимости от возраста бетона к моменту нагружения, а также характера развития деформации ползучести за пределом линейной ползучести. Одновременно постановка таких опытов даст возможность осветить и ряд других важных, малоизученных вопросов, как например, восстановление деформаций после разгрузки бетона, влияние длительного нагружения на прочность и деформативность бетона в зависимости от его возраста к моменту нагружения и величины напряжения.

**§ 1. О механизме ползучести бетона**

Исследования, проведенные ранее автором [6, 7, 8], а также работы Фрейсине [15], А. Е. Шейкина [17] И. И. Улицкого [13], О. Я.

Берга [2] дали возможность еще в работе [6] выдвинуть обобщенную гипотезу механизма ползучести бетона. Согласно этой гипотезе, ползучесть бетона до напряжения  $0,6R$  ( $R$  — предел прочности бетона на сжатие) является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня, так и капиллярных явлений, а при более высоких напряжениях еще и следствием появления и развития микротрещин в бетоне. Специальными исследованиями, по возможности, была выявлена роль каждого из упомянутых факторов в явлении ползучести бетона [7, 8]. При этом оказалось, что ползучесть, обусловленная тем или иным из этих факторов, зависит от температуры и влажности окружающей среды, возраста бетона к моменту нагружения, величины напряжения, длительности нагружения и т. д.

О. Я. Берг [2] при испытании бетонных призм на центральное сжатие, микроскопическими наблюдениями установил, что при определенных нагрузках на боковых поверхностях призм появляются необратимые микрощели.

Первые микрощели на призмах появлялись при относительных напряжениях  $0,55 \div 0,60$  и имели раскрытие  $10$  микрон и протяженность  $10 \div 20$  м. В момент обнаружения микрощелей относительные поперечные деформации бетона составляли в среднем  $\varepsilon_y = 1,0 \times 10^{-4}$ , что совпадает с величиной предельной деформации бетона при испытании на центральное растяжение. На основании этого О. Я. Берг пришел к выводу, что разрушение образцов является следствием образования и развития микрощелей. Этот вывод подтверждается тем, что, когда при испытании бетонного образца опорное трение устраняется, его разрушение происходит при нагрузках, близких к величине нагрузки, при которой образуются микрощели [2, 12].

Появлением и развитием микрощелей нами объяснялось нарушение линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести. К такому выводу мы пришли ранее на основе исследований ползучести бетона при высоких напряжениях [6]. Однако, тогда нам не удалось точно установить то предельное напряжение, после которого начинается нелинейная ползучесть. Дело в том, что в этих опытах бетонные образцы были нагружены длительной нагрузкой только при относительных напряжениях  $0,25$ ;  $0,50$  и  $0,70$  и в возрасте бетона  $7$ ,  $14$  и  $32$  дня.

Таким образом, отсутствовали опыты при относительном напряжении  $0,6$ , при котором, согласно опытам О. Я. Берга, появляются микрощели.

## § 2. Методика экспериментов

Для установления границы линейной и нелинейной ползучести с учетом старения бетона, а также зависимости между напряжениями и деформациями ползучести за пределом линейной ползучести, требовалась постановка опытов более широких масштабов, чем в прежней нашей работе [6].

Исходя из этого, в первую очередь необходимо было установить при каких относительных напряжениях осуществить загрузку образцов длительной нагрузкой для того, чтобы, по возможности, меньшим количеством образцов получить ответы на интересующие нас вопросы.

В прежних наших опытах линейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести наблюдалась, при  $\tau = 7$  дней, вплоть до относительного напряжения 0,70, а при  $\tau = 14$  и 32 дня — до 0,5. Однако, для  $\tau = 14$  и 32 дня, относительное напряжение 0,5, очевидно, не является предельным, до которого справедлива линейная зависимость.

Основной причиной нарушения линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести является образование и развитие микрощелей в бетоне [6], которые, как уже говорилось, образуются при относительном напряжении примерно 0,6. Поэтому надо было полагать, что если образцы загрузить относительным напряжением 0,6, то линейная зависимость сохранится до указанного напряжения.

Учитывая это обстоятельство, в новых опытах образцы в каждом возрасте были загружены при относительных напряжениях 0,25; 0,50; 0,60; 0,75; 0,90 и 0,95. Более частое изменение относительного напряжения выше  $\frac{\sigma}{R_n} = 0,6$  диктовалось необходимостью получения полной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести при высоких напряжениях.

Загрузка образцов длительной нагрузкой было осуществлено при возрасте бетона 7; 14; 29; 95 и 185 дней. В дальнейшем предполагается загрузить образцы при  $\tau = 1$  году.

Постановка таких опытов требовала изготовления большого количества образцов. Поэтому необходимо было установить наиболее целесообразные размеры испытываемых образцов. При этом мы исходили из того, чтобы по возможности малым числом замесов бетона изготовить необходимое количество образцов. Это было весьма важно для исключения тех дополнительных факторов, которые могли повлиять на точность экспериментов. С другой стороны, размеры образцов необходимо были принять такими, чтобы имеющимися в нашем распоряжении пружинными приспособлениями можно было обеспечить напряжение в бетоне равное 0,95 от предела прочности бетона, загружаемого при самом большом возрасте. Из этих соображений была принята сравнительно невысокая марка исследуемого бетона.

Исходя из вышесказанного, форма испытываемых образцов была принята, цилиндрической, диаметром 10 см, высотой 60 см. Опыты были поставлены над тяжелым бетоном мелким заполнителем которого является кварцевый песок, а крупным заполнителем — базальтовый щебень. В качестве вяжущего был применен портландцемент. Характеристика бетона приводится в табл. 1.

Таблица 1

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 куб.м бетона в кг				Объем, вес свежеуложенного бетона в $m^3$	Объем, вес бетона в месячном возрасте в $m^3$	Кубиковая прочность на сжатие в месячном возрасте в $кг/см^2$
	цемент	песок	щебень	вода			
1:4,79:3,53	230	1101	811	187	2,33	2,27	132

Из каждого замеса бетона изготавливались по 50 шт. цилиндрических образцов и 24 шт. кубиков разм.  $10 \times 10 \times 10$  см. По намеченной программе опытов такое количество цилиндрических образцов было достаточно для загрузки их в двух возрастах и для испытаний по определению цилиндрической прочности в момент загрузки образцов длительной нагрузкой. Помимо этого, на четырех образцах каждой серии определялись объемные изменения бетона во времени. Всего было сделано 5 замесов бетона и изготовлено 250 цилиндрических образцов и соответствующее количество кубиков. Количество изготовленных образцов было взято с некоторым запасом, для последующего загрузки их в более поздних возрастах.

Изготовление образцов производилось в металлических разборных формах, которые были снабжены соответствующими пробками для образования в бетонных образцах гнезд, в которые в последующем устанавливались металлические марки для измерения деформаций.

Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение — на виброплощадке при продолжительности вибрации 15 секунд. Образцы освобождались от форм через одни сутки. Все образцы, с момента изготовления, хранились в помещении с  $t = 20 \pm 5^\circ C$  и влажности  $P = 80 \pm 10\%$ .

Измерение деформаций бетонных образцов производилось с помощью переносного деформометра конструкции Максимова-Лисиченко [10].

Необходимо отметить, что деформометр указанной конструкции имеет тот существенный недостаток, что при измерении одной и той же величины дает нестабильные показания.

Для измерения деформаций деформометр снабжен двумя стальными кернами. А для этих кернов на стальных марках, установленных на бетонном образце, имеются соответствующие гнезда. При измерении деформаций, стальные керны деформометра своими остриями прикладываются к стальным маркам. Как показал опыт применения такого деформометра, колебания его показаний в большой мере зависят от степени прижатия деформометра к стальным маркам. Поскольку база измерения сравнительно большая (500 мм), в зависимости от степени прижатия, получается изгиб стальной трубы прибора, что и приводит к неточным результатам. Если же прибор недостаточно прижимается к стальным маркам, то неточность следует из-за неплотного прилегания стальных кернов к стальным маркам.

Для устранения указанных недостатков было внесено небольшое изменение в конструкцию деформометра. Стальные керны были заменены наконечниками штоков индикаторов часового типа, концы которых снабжены стальными шариками. Для этих шариков, по их размеру, на стальных марках путем вдавливания под определенным усилием, устраивались гнезда. В этом случае деформометр при измерении деформаций подвешивается к стальным маркам, в результате чего во всех случаях прижимается к ним своим собственным весом.

Деформации образцов измерялись с двух сторон цилиндрических образцов на базе 500 мм.

Загрузка образцов длительной нагрузкой осуществлялась пружинными приспособлениями [5, 6]. Количество загруженных образцов различных возрастов и напряжений указано в табл. 2.

Таблица 2

$t$ в днях	$R_{II}$ в кг/см <sup>2</sup>	$\varepsilon$ в кг/см <sup>2</sup>	$\frac{\varepsilon}{R_{II}}$	Количество загруженных образцов в штуках
7	41,2	10,3	0,25	2
		20,6	0,50	3
		24,7	0,60	3
		30,9	0,75	3
		37,1	0,90	4
		39,1	0,95	1
14	52,9	13,2	0,25	2
		26,4	0,50	3
		31,7	0,60	3
		39,7	0,75	3
		47,6	0,90	3
		50,3	0,95	1
29	64,3	16,1	0,25	3
		32,2	0,50	3
		38,6	0,60	3
		48,2	0,75	3
		57,9	0,90	3
		61,1	0,95	3
95	74,9	18,7	0,25	3
		37,4	0,50	3
		44,9	0,60	3
		56,1	0,75	3
		67,4	0,90	3
185	78,3	19,6	0,25	3
		39,2	0,50	3
		47,0	0,60	3
		58,7	0,75	3
		70,5	0,90	4
		74,4	0,95	2

### § 3. Влияние фактора времени на прочность и упругие деформации бетона

Для загрузки образцов при высоких относительных напряжениях, близких к пределу длительной прочности бетона, весьма важным являлось по возможности точное определение цилиндрической прочности бетона в момент каждого нагружения. С этой целью образцы при испытании строго центрировались. Кроме этого, каждый раз испытывались три, а иногда 4—5 образцов. Данные испытания цилиндрических образцов в различных возрастах приведены в табл. 3.

Таблица 3

$t$ в днях	$R_{ц}$ отдельных образцов в кг/см <sup>2</sup>	$R_{ц}$ средняя в кг/см <sup>2</sup>	% отклонения
3	23,1	22,0	+5,0
	21,7		-1,4
	21,9		-0,5
	20,8		-5,5
	22,3		+1,4
7	40,6	41,4	-1,5
	40,2		-2,4
	41,4		+0,5
	42,7		+3,6
14	55,2	52,9	+4,3
	51,6		-2,5
	51,9		-1,9
29	65,1	64,3	+1,2
	63,7		-1,0
	67,0		+4,2
	61,2		-4,8
95	73,8	74,9	-1,5
	77,7		+3,7
	73,1		-2,4
185	81,8	78,3	+4,5
	75,2		-4,1
	77,8		-0,6

Как показывают данные табл. 3, только в отдельных случаях максимальные отклонения  $R_{ц}$  образцов от среднего значения превышает  $\pm 5\%$ , а в большинстве случаев — намного меньше. Однако и такое отклонение, с нашей точки зрения, имеет существенное значение при нагружении образцов длительной нагрузкой при относительных напряжениях 0,90—0,95.

Как уже отмечалось, эталонные образцы для определения цилиндрической прочности и образцы предназначенные для длительного нагружения изготавливались из одного и того же замеса бетона.

Однако, из табл. 3 следует, что цилиндрические прочности эталонных образцов, хоть и незначительно, но все же отличались друг от друга. Фактическая же прочность каждого загружаемого

образца нам не может быть известна, так как пока нет такого метода, который дал бы возможность достоверно установить прочность бетона без его разрушения.

По этой причине при нагружении какого либо образца относительным напряжением 0,95, исходя из данных испытаний эталонных образцов, фактическое относительное напряжение в нем может оказаться больше или меньше 0,95. В случае, если фактическое относительное напряжение в момент нагружения окажется больше 0,95, то это может тут же привести к разрушению образца или оно может произойти через некоторое время после интенсивного развития деформаций. Это обстоятельство может явиться причиной и того, что дефор-

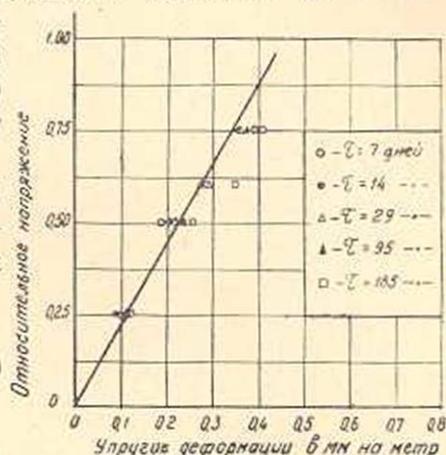
мации образцов, нагруженных при одном и том же  $\tau$  и относительном напряжении, существенно будут отличаться друг от друга. Особенно заметно это может иметь место при нагружении бетона в старом возрасте, когда дальнейшее нарастание прочности бетона во времени незначительно и поэтому влияние образования и развития трещин на деформации бетона протекает гораздо интенсивнее и длительнее.

На фиг. 1 приведены кривые изменения кубиковой  $R_k$  и цилиндрической  $R_{ц}$  прочностей исследуемого бетона во времени. Кривые построены на основании формул (1) и (2), которые хорошо описывают экспериментальные данные.

Кубиковая и цилиндрическая прочности, подсчитанные по приведенным формулам для различных  $\tau$ , сведены в табл. 4.

$$R_k = \frac{100\tau}{3,5 + 0,65\tau} \quad (1)$$

$$R_{ц} = \frac{100\tau}{8,4 + 1,25\tau} \quad (2)$$



Фиг. 1.

В той же таблице прочность бетона при разных  $\tau$  выражена в % от прочности бетона в месячном возрасте. Одновременно приводится отношение  $\frac{R_{ц}}{R_k}$ .

Таблица 4

$\tau$ в днях	Предел прочности на сжатие в кг/см <sup>2</sup>		$\frac{R_{ц}}{R_k}$	Предел прочности на сжатие в % от месячной прочности бетона	
	$R_k$	$R_{ц}$		$R_k$	$R_{ц}$
3	55	25	0,45	42	38
7	87	41	0,47	67	63
14	111	54	0,49	85	83
29	130	65	0,50	100	100
95	146	75	0,51	112	115
185	150	77	0,51	115	119

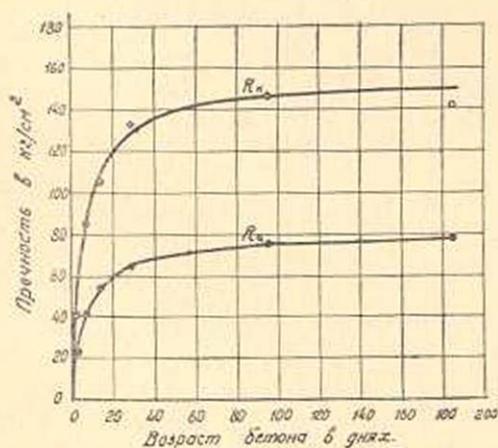
Данные табл. 4 показывают, что прочность бетона наиболее интенсивно нарастает до месячного возраста, а после трехмесячного возраста дальнейший рост прочности практически прекращается. Одновременно из табл. 4 следует, что при данных размерах образцов коэффициент перехода от кубиковой к цилиндрической прочности почти не зависит от возраста бетона. Аналогичная закономерность наблюдалась и в ранее проведенных нами исследованиях [9]. Так

например, при испытании цилиндрических образцов диаметром 14 см, высотой 60 см и кубиков разм.  $20 \times 20 \times 20$  см из тяжелого бетона в возрастах бетона 7, 28 дней 3, 5, 15 месяцев и 3 года коэффициент перехода от кубиковой прочности к цилиндрической прочности колеблется в пределах от 0,73—0,80.

Отмеченная закономерность является важной так как определив коэффициент перехода от кубиковой к цилиндрической или призмочной прочности в каком либо возрасте бетона, можно его отнести к любому другому возрасту бетона.

Коэффициент перехода от кубиковой прочности к цилиндрической по данным табл. 4 получился намного меньше (0,45—0,5!), чем в прежних опытах (0,73—0,80) [9]. Это обстоятельство, в основном, является следствием того, что в одном случае отношение высоты цилиндрического образца к его диаметру составляет 6, а в другом случае 4,3. Отчасти это обусловлено также разными размерами испытанных кубиков.

В момент загрузки цилиндрических образцов длительной нагрузкой, для каждого возраста бетона и относительного напряжения, определялись упругие деформации. При этом оказалось, что при одинаковых относительных напряжениях упругие деформации, соответствующие различным возрастам бетона к моменту испытания, незначи-



Фиг. 2.

тельно отличаются друг от друга. Таким образом можно считать, что при одинаковом относительном напряжении возраст бетона не оказывает влияния на упругие деформации бетона. Это наглядно видно из фиг. 2, где нанесены экспериментальные точки, соответствующие различным возрастам бетона к моменту испытания и различным относительным напряжениям.

Благодаря отмеченной закономерности представляется

возможным выразить зависимость между упругими деформациями и относительными напряжениями для всех возрастов бетона одной общей линейной зависимостью по формуле:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2100} \times \frac{\sigma}{R_n} \quad (3)$$

Откуда для модуля упругости вытекает следующая зависимость

$$E = 2100R_n \quad (4)$$

Подставляя в формулу (4) значение  $R_n$  по формуле (2), получим

$$E = \frac{2,1\tau}{8,5 + 1,25\tau} \times 10^5. \quad (5)$$

В табл. 5 приведены значения модулей упругости для различных возрастов бетона, подсчитанные на основании формулы (5).

Таблица 5

$\tau$ в днях	Предел прочности на сжатие в $\text{кг/см}^2$		Модуль упругости в $\text{кг/см}^2$	Модуль упругости в % от модуля упругости в месячном возрасте
	$R_k$	$R_n$		
3	55	25	52000	38
7	87	41	86000	63
14	111	54	113000	83
29	130	65	136000	100
95	146	75	157000	115
185	150	77	162000	119

В наших опытах модуль деформации для данной марки бетона получился намного ниже, чем это следует из известных формул Графа, Роша и Шюле [12]. Основной причиной этого является то, что в наших опытах отношение высоты цилиндра к диаметру составляет  $\frac{h}{d_n} = 6$ , в то время как формулы Графа, Роша и Шюле получены на основании испытания призматических образцов при отношении высоты к стороне сечения призмы  $\frac{h}{a} = 2 - 3$ .

По американским нормам, модуль деформации бетона принимается пропорциональным цилиндрической прочности [12]

$$E = 1000R_n. \quad (6)$$

Причем эта формула соответствует  $\frac{h}{d_n} = 2$ .

Однако, как известно, формула (6) не отвечает действительности [12], что вытекает и из наших опытов.

По формуле (4) модуль упругости бетона в месячном возрасте составляет  $136000 \text{ кг/см}^2$ , а по формуле (6)— $65000 \text{ кг/см}^2$ . Правда, здесь необходимо учесть то, что по формуле (6) определяется не модуль упругости, а модуль полных деформаций, однако, как известно, они отличаются друг от друга незначительно, в пределах 10—15%.

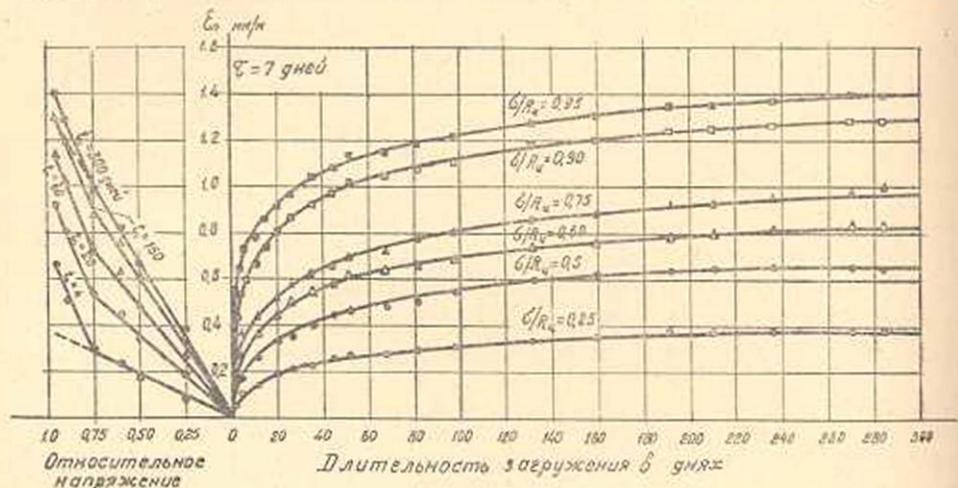
При одинаковом относительном напряжении независимость упругих деформаций от возраста бетона к моменту испытания является весьма важной закономерностью. Причем, на основании наших других

опытов, она подтверждается и в отношении полных деформаций бетона [9].

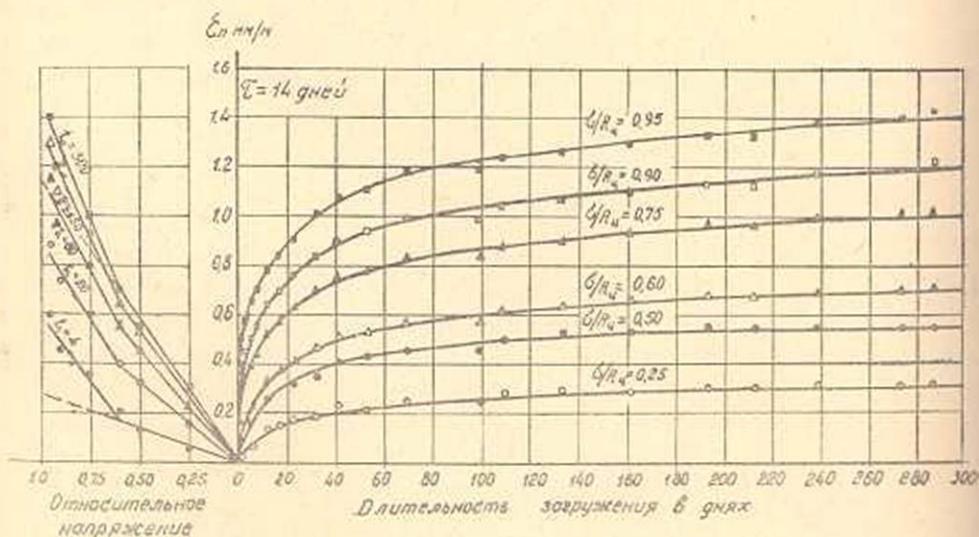
Имея зависимость между прочностью бетона и его возрастом, путем определения изменения упругих или полных деформаций в зависимости от относительного напряжения при каком-либо молодом возрасте бетона, мы можем получить интересующие нас модули для любого возраста.

#### § 4. Влияние возраста бетона к моменту загрузки на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести

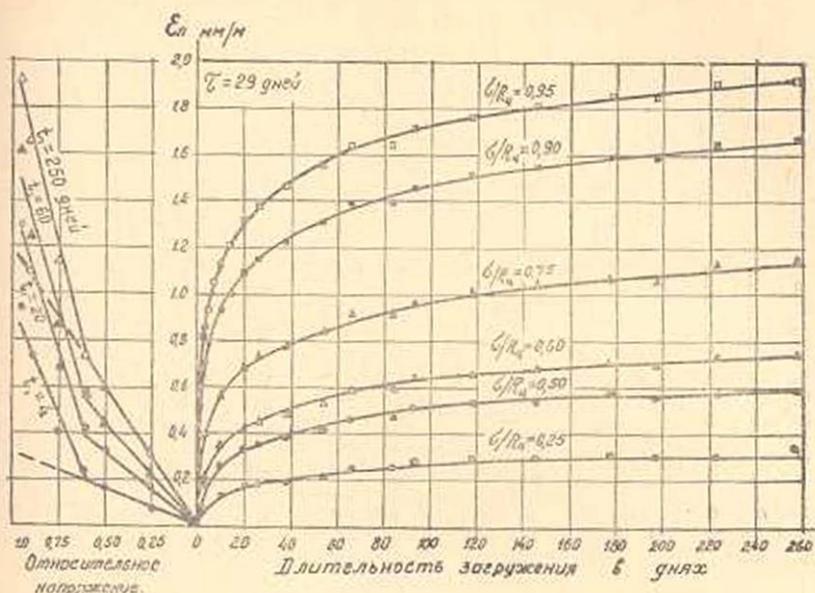
На фиг. 3—7 представлены полученные экспериментальные кривые ползучести бетона. Кривые на каждой фигуре соответствуют од-



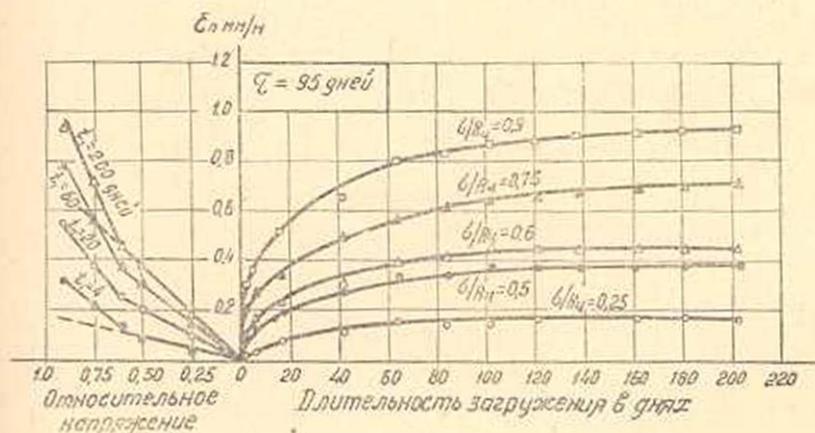
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



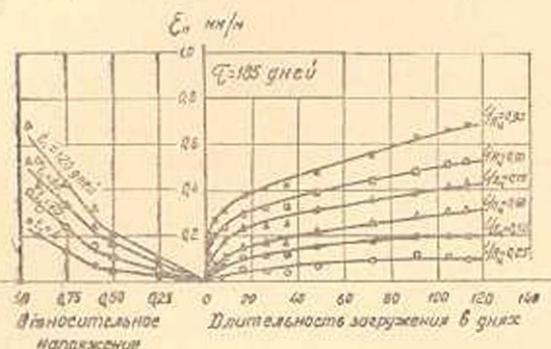
Фиг. 6.

ному возрасту и различным относительным напряжениям. Одновременно, на основании кривых ползучести построены зависимости между относительными напряжениями и деформациями ползучести для различных длительностей загрузки.

Мы уже отмечали, что до сих пор считают, что до определенных, еще строго не установленных напряжений, имеет место линейная ползучесть, а при более высоких напряжениях — нелинейная ползучесть. Причем, как уже указывалось, предельное напряжение, до которого справедлива линейная ползучесть, существенно зависит от возраста бетона к моменту его загрузки.

На фиг. 3—7 связь между напряжениями и деформациями ползучести принята в виде двух прямых линий. Принятие такой закономерности лучше отвечает экспериментальным данным, чем принятие криволинейной зависимости.

Как видно из фиг. 3—7, во всех случаях при одном и том же  $\tau$ , но разных длительностях загрузки ( $t - \tau$ ), пересечения двух



Фиг. 7.

данными. Эта закономерность выражается в том, что хотя начальная линейная зависимость выше определенного напряжения не сохраняется, однако и далее между напряжениями и деформациями ползучести имеет место линейная зависимость. Разница заключается лишь в том, что одинаковому приращению  $\frac{\sigma}{R_n}$  при высоких напряжениях соответствует большее значение деформации ползучести.

Такое явление, с нашей точки зрения, весьма закономерно и исходит из механизма ползучести бетона.

При напряжениях выше примерно 0,6 от предела прочности бетона, ползучесть, помимо вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня и капиллярных явлений, еще обусловлена появлением и развитием микротрещин в бетоне. Таким образом, при указанном напряжении появляется новый фактор, который приводит к нарушению прежней линейной зависимости благодаря увеличению интенсивности деформаций. Однако, влияние этого нового фактора также выражается линейным законом.

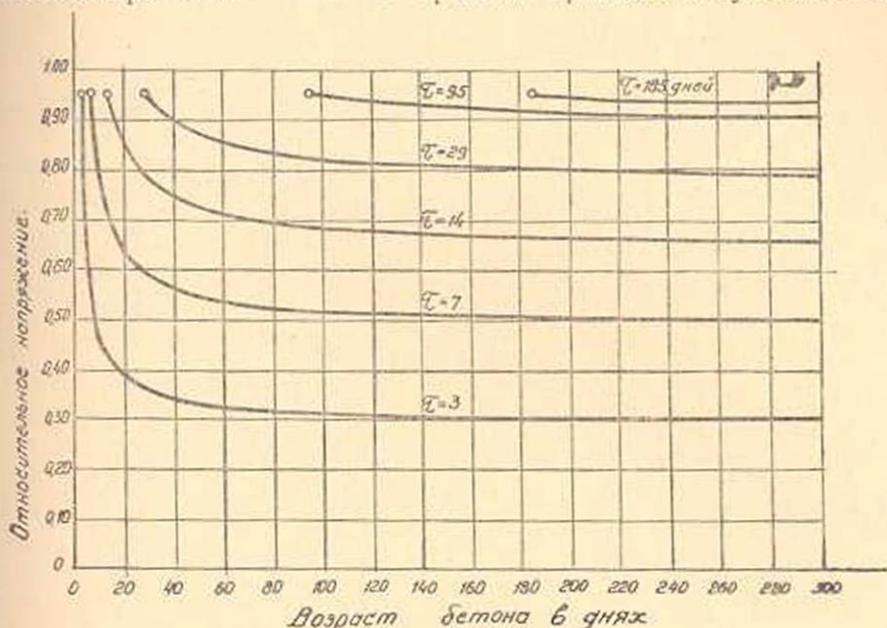
Относительное напряжение, при котором происходит переход от первой области линейной ползучести во вторую область линейной ползучести, в большой мере зависит от возраста бетона к моменту его загрузки. И вполне понятно, почему для бетона, загруженного в молодом возрасте (7 дней), этот переход происходит при более высоком относительном напряжении, чем в остальных случаях. Для объяснения причин этого явления обратимся к фиг. 8, где для примера приведены кривые падения относительного напряжения для различных возрастов бетона к моменту загрузки в результате нарастания цилиндрической прочности бетона во времени.

прямым имеют место при одном и том же относительном напряжении. Так, например, при  $\tau = 7$  дней это относительное напряжение составляет 0,75, а при  $\tau = 14, 29, 94$  и 185 дней — 0,6.

Таким образом, здесь наблюдается новая закономерность, которая подтверждается столь многочисленными опытными

В данном случае указанные кривые соответствуют тому случаю, когда относительное напряжение в момент загрузки составляло 0,95, т. е. самое высокое, которое было в наших опытах. Кривые построены использованием формулы (2).

Рассмотрение кривых фиг. 8 показывает, что нарастание цилиндрической прочности бетона во времени приводит к существенному



Фиг. 8.

падению относительного напряжения в бетоне после его загрузки. И чем меньше возраст бетона к моменту загрузки, тем интенсивнее и больше падает относительное напряжение.

В тех случаях, когда  $\frac{\sigma}{R_y} < 0,95$  рост прочности бетона приведет к еще меньшим конечным величинам относительных напряжений. Этим, в основном, и следует объяснить то, что в наших опытах для  $\tau = 7$  дней первая область линейной ползучести сначала не сохраняется до относительного напряжения 0,75. При  $\frac{\sigma}{R_y} = 0,75$ , хотя в бетоне и развиваются микротрещины и это приводит к более интенсивным деформациям, однако, это длится недолго. После того как относительное напряжение падает и становится  $< 0,6$ , дальнейшие деформации, обусловленные появлением и развитием микротрещин, прекращаются и дальнейшая ползучесть протекает лишь за счет вязкости гелевой составляющей цементного камня и капиллярных явлений. Такое объяснение вытекало из наших прежних исследований [6] и оно вновь подтверждается теперешними опытными данными.

Здесь еще раз подтверждается и то отмеченное нами ранее явление, что при одном и том же  $\tau$  (когда  $\tau \leq 7$  дней) с увеличением

длительности загрузки имеет место постепенный переход нелинейной ползучести в линейную ползучесть. Однако, на основании теперешних опытов и при высоких напряжениях связь между напряжениями и деформациями ползучести выражается линейной зависимостью. Поэтому правильнее будет сказать, что с увеличением длительности загрузки имеет место постепенный переход второй области линейной ползучести в первую область линейной ползучести. Это видно из фиг. 3, если сравнить между собой зависимости между напряжениями и деформациями ползучести, которые соответствуют длительностям загрузки 4 и 300 дней.

Для наглядности на фиг. 3 прямые, которые выражают линейную ползучесть первой области при указанных длительностях загрузок, пунктиром продолжены до  $\frac{\sigma}{R_n} = 0,95$ . И, как видно, для длительности

загрузки 300 дней линейную ползучесть первой области без особой погрешности можно распространить до относительного напряжения 0,95.

Сказанное относилось к бетону, загруженному при  $\tau = 7$  дней, что, по-видимому, в еще большей мере справедливо для случаев  $\tau < 7$  дней. При  $\tau < 7$  дней деформации бетона, обусловленные появлением и развитием трещин, еще быстрее прекратятся вследствие более быстрого падения относительного напряжения благодаря росту прочности бетона во времени. Поэтому не исключена возможность, что в таких случаях линейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести может сохраниться вплоть до относительного напряжения 0,95.

Рассмотрим аналогичные кривые ползучести при  $\tau = 14$  дней (фиг. 4). В этом случае падение относительного напряжения также значительно (фиг. 8), однако, в итоге все же конечное относительное напряжение сохраняется  $> 0,6$ . По этой причине деформации, которые развиваются за счет образования и развития трещин, хотя и несколько затухают, однако, частично продолжают развиваться в процессе всего длительного загрузки. В результате этого с увеличением длительности загрузки уже не имеет места уменьшение отклонения прямой второй области ползучести от прямой ползучести первой области. А, наоборот, при  $\tau = 14$  дней, поскольку дальнейший рост прочности бетона недостаточен, чтобы полностью приостановить развитие деформаций за счет образования и развития трещин, с увеличением длительности загрузок имеет место постепенное увеличение отклонения прямой второй области ползучести от прямой первой области ползучести. При этом, это отклонение возрастает как с увеличением длительности загрузки, так и возраста бетона к моменту его загрузки.

Таким образом, проведенные опыты наглядно показывают, какое существенное влияние оказывает возраст бетона к моменту загрузки на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести и на то предельное напряжение, до которого справедлива первая область линейной ползучести. Иными словами, зависимость

между напряжениями и деформациями ползучести в большой мере зависит от фактора старения бетона.

Как уже отмечалось, одной из основных предпосылок, на которой базируются существующие линейные теории ползучести бетона, является принятие линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести. Поэтому важно установить пределы применимости указанных теорий с точки зрения данной предпосылки.

Из наших опытов следует, что в тех случаях, когда  $\tau \leq 7$  дней указанная предпосылка справедлива до напряжения, составляющего 0,75 от предела прочности бетона, а при  $\tau > 7$  дней—0,6. Однако, поскольку наибольший практический интерес представляют те случаи, когда  $\tau > 7$  дней, то можно считать, что линейные теории ползучести справедливы до относительного напряжения 0,6.

Проведенные исследования еще раз подтверждают наш тот вывод, что основной причиной нарушения начальной линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести, после относительного напряжения 0,6, является образование и развитие микротрещин в бетоне. Рассмотрение фиг. 3—7 показывает, что при одном и том же  $\tau$ , чем больше относительное напряжение, тем интенсивнее развиваются деформации ползучести. В случае молодого бетона ( $\tau = 7; 14$  дней) кривые ползучести независимо от величины напряжения имеют затухающий характер, в то время как при  $\tau > 14$  дней то же самое имеет место до относительного напряжения 0,6—0,75. В остальных случаях, т. е. когда  $\tau > 14$  дней и  $\frac{\sigma}{R_u} > 0,75$ , деформации

ползучести до конца развиваются тем интенсивнее, чем больше возраст бетона к моменту загрузки и относительное напряжения.

Особенно это наглядно видно из фиг. 7, где деформации при относительных напряжениях 0,9 и 0,95 до конца развиваются установившейся скоростью, не показывая признаков затухания. Дальнейшее развитие этих деформаций в конечном счете может привести к разрушению бетона.

В табл. 6 приведена характеристика ползучести бетона при различных возрастах бетона к моменту загрузки в зависимости от относительного напряжения и длительности загрузки.

Как известно, характеристика ползучести

$$\varphi_t = \frac{\varepsilon_{\kappa}(t_1)}{\varepsilon_0}$$

где  $\varepsilon_{\kappa}(t_1)$  — деформация ползучести при длительности загрузки  $t_1$ ;  
 $\varepsilon_0$  — упругая деформация в момент загрузки, т. е. при  $t_1 = 0$ .

При рассмотрении наших опытных данных (фиг. 3, 4, 5, 6 и 7) было отмечено наличие линейной зависимости между относительными напряжениями и деформациями ползучести. Причем для  $\tau = 7$  дней

первая область линейной ползучести распространяется до  $\frac{\sigma}{R_n} = 0,75$ , а для  $\tau > 7$  дней — 0,6.

Таблица 6

$\tau$ в днях	$\frac{\sigma}{R_n}$	Характеристика ползучести бетона $\varphi_t$ , при длительности загрузки					
		20 дней	60 дней	100 дней	150 дней	250 дней	300 дней
7	0,25	1,51	2,27	2,60	2,85	3,19	3,19
	0,50	1,47	2,02	2,35	2,60	2,77	2,77
	0,60	1,57	2,16	2,45	2,62	2,79	2,87
	0,75	1,48	2,01	2,27	2,44	2,66	2,72
	0,90	1,83	2,38	2,61	2,80	2,93	2,98
	0,95	2,03	2,50	2,70	2,87	3,05	3,09
14	0,25	1,34	1,85	2,18	2,35	2,52	2,52
	0,50	1,34	1,85	2,06	2,18	2,27	2,27
	0,60	1,40	1,83	2,10	2,28	2,38	2,42
	0,75	1,68	2,24	2,41	2,53	2,77	2,80
	0,90	1,70	2,24	2,33	2,42	2,75	2,77
	0,95	1,94	2,52	2,72	2,85	3,05	3,09
29	0,25	1,34	1,85	2,18	2,44	2,60	—
	0,50	1,34	1,85	2,18	2,35	2,48	—
	0,60	1,47	2,00	2,24	2,38	2,56	—
	0,75	1,90	2,41	2,69	2,91	3,19	—
	0,90	2,56	3,12	3,40	3,61	3,84	—
	0,95	2,87	3,54	3,80	4,00	4,24	—
95	0,25	0,67	1,18	1,34	1,43	—	—
	0,50	0,84	1,20	1,51	1,55	—	—
	0,60	0,91	1,33	1,51	1,58	—	—
	0,75	1,06	1,57	1,82	1,93	—	—
	0,90	1,28	1,82	2,03	2,14	—	—
	0,95	—	—	—	—	—	—
185	0,25	0,42	0,67	0,84	—	—	—
	0,50	0,42	0,71	0,84	—	—	—
	0,60	0,56	0,81	1,02	—	—	—
	0,75	0,67	0,92	1,12	—	—	—
	0,90	0,72	0,98	1,17	—	—	—
	0,95	0,86	1,15	1,41	—	—	—

Линейная зависимость получилась также между напряжениями и упругими (мгновенными) деформациями (фиг. 2). А поскольку характеристика ползучести есть отношение деформации ползучести к упругим деформациям, то при одном и том же  $\tau$  и длительности загрузки, но разных относительных напряжениях, она будет выражаться одним и тем же числом. Это наглядно видно из табл. 6, где на основании экспериментальных данных в указанных случаях характеристики ползучести незначительно отличаются друг от друга, тем самым подтверждая наличие линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Из данных табл. 6 следует, что с увеличением длительности загрузки характеристика ползучести во всех случаях возрастает.

Если же рассматривать при одинаковых длительности загрузки и относительном напряжении, то с увеличением возраста бетона к моменту загрузки  $\varphi_t$  уменьшается.

Данные табл. 6 показывают, что в зависимости от ряда факторов характеристика ползучести может достигнуть величины 4,25.

### § 5. Влияние старения бетона на ползучесть

Несмотря на ряд работ, все же до сих пор влияние старения бетона на деформации ползучести мало изучено.

До исследований автора [6], для изучения влияния старения на ползучесть бетона при сжатии, последний в различных возрастах загружался одной и той же нагрузкой. При этом, обычно, напряжение не превышало половины предела прочности бетона на сжатие.

В результате таких опытов были отмечены следующие основные закономерности:

1. При одинаковых длительности загрузки и величине напряжения, чем больше возраст бетона к моменту загрузки, тем меньше ползучесть.

2. При одинаковом напряжении кривые ползучести, соответствующие различным возрастам бетона к моменту загрузки, после некоторой длительности загрузки, параллельны друг другу.

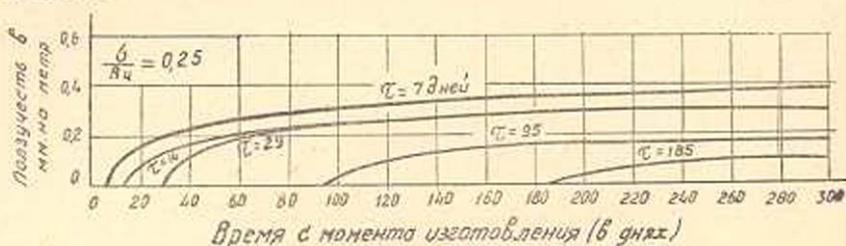
Установление указанных закономерностей дало возможность принять гипотезу о „параллельности“ кривых ползучести, которая использована при построении одной из существующих теорий ползучести бетона — теории старения.

Необходимо, однако отметить, что указанная выше методика изучения влияния старения бетона на ползучесть верна в тех случаях, когда напряжение, которым загружается бетон в различных возрастах, не превышает  $0,6R$ . В противном случае отмеченные выше закономерности нарушаются, что вытекает также из принятой нами гипотезы механизма ползучести бетона.

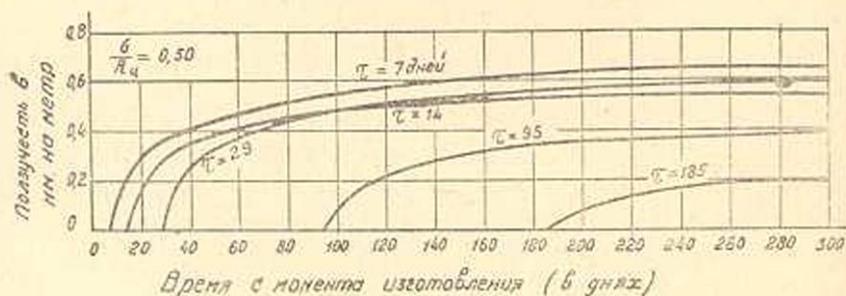
Дело в том, что когда для какого-либо возраста напряжение, которым загружается бетон в различных возрастах, больше  $0,6R$ , то в этом случае деформации ползучести развиваются за счет вязкости геля, капиллярных явлений и за счет образования и развития микротрещин в бетоне. А для тех возрастов, для которых напряжение в момент загрузки  $< 0,6R$ , деформации ползучести, обусловленные образованием и развитием микротрещин, будут отсутствовать. Таким образом, с точки зрения механизма ползучести, бетон будет находиться в неодинаковых условиях и поэтому там, где напряжение  $> 0,6R$  это приведет к нарушению отмеченных выше закономерностей.

Учитывая это обстоятельство, при изучении влияния старения на ползучесть бетона, особенно при высоких напряжениях ( $> 0,6R$ ), необходимо бетон в различных возрастах загружать не одинаковым напряжением, а одинаковым относительным напряжением.

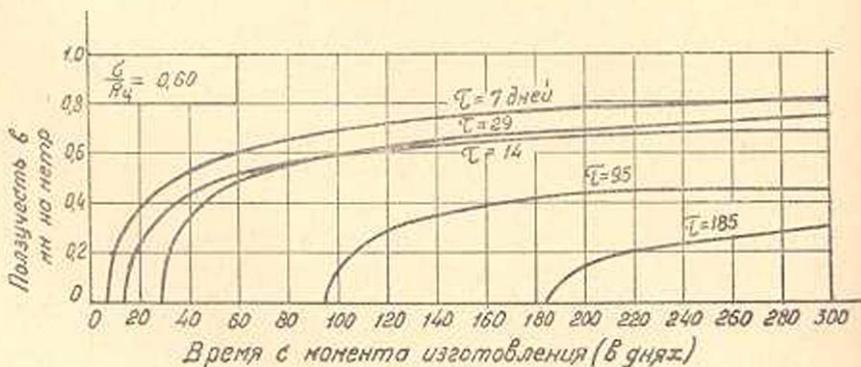
На фиг. 9, 10, 11, 12, 13 и 14 приведены экспериментальные кривые ползучести, соответствующие различным возрастам бетона к моменту загрузки при относительных напряжениях 0,25; 0,50; 0,60; 0,75; 0,90 и 0,95. Рассмотрение семейства кривых ползучести при различных относительных напряжениях показывает, что независимо от величины относительного напряжения, чем моложе бетон к моменту загрузки, тем интенсивнее происходит затухание деформаций ползучести бетона во времени. Указанная закономерность впервые нами была отмечена в работе [6] и объяснялась тем, что чем моложе бетон к моменту загрузки, тем больше дальнейшее нарастание его прочности во времени, которое приводит к падению начального относительного напряжения и, благодаря этому, к затуханию деформаций ползучести.



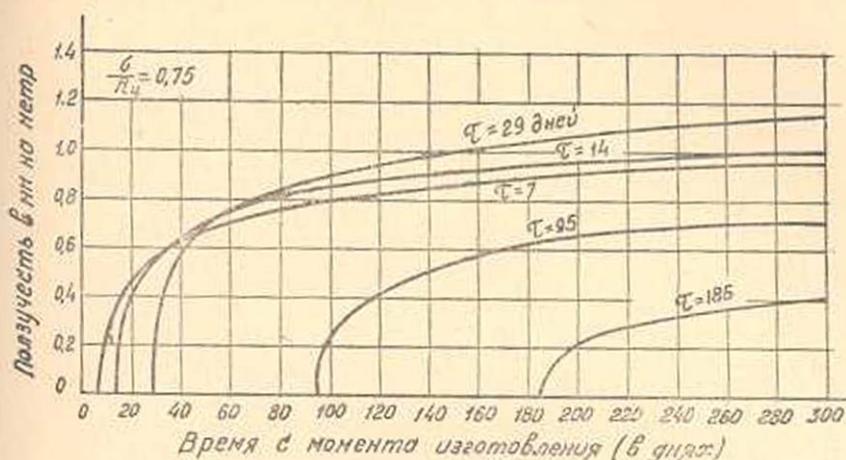
Фиг. 9.



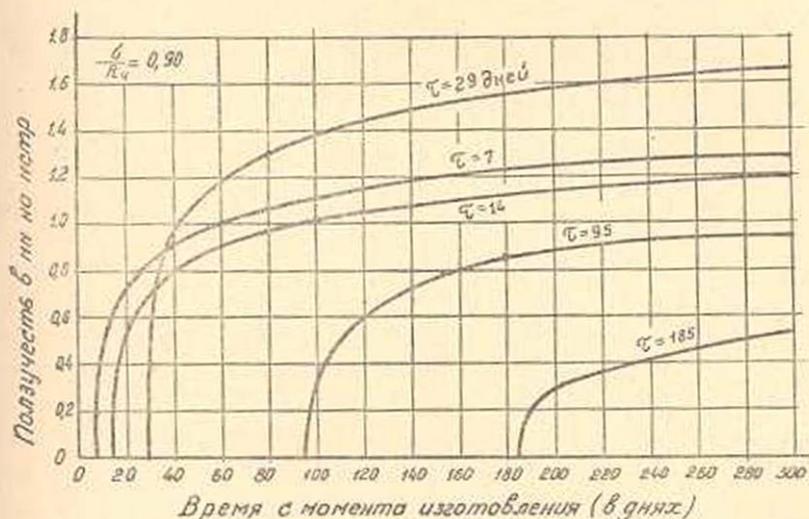
Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

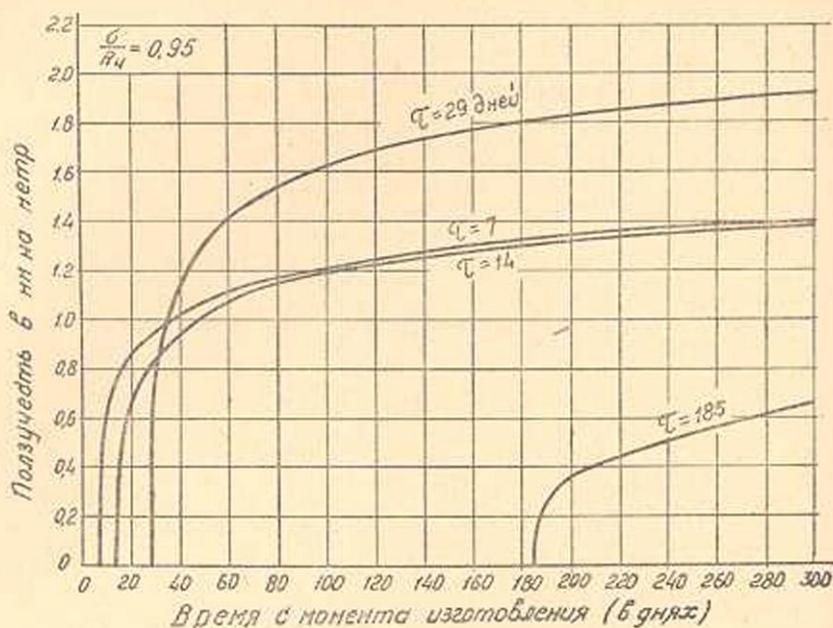


Фиг. 13.

На этом вопросе мы подробно остановились в предыдущем параграфе при рассмотрении зависимости между напряжениями и деформациями ползучести.

Падением относительного напряжения, вследствие роста прочности бетона во времени, было объяснено и то явление, что бетон при высоких напряжениях в начальный период загрузки претерпевает нелинейную ползучесть, а далее линейную ползучесть.

На основании кривых ползучести фиг. 9, 10 и 11 можно отметить что, при одинаковом относительном напряжении, когда последнее не превышает 0,6, с увеличением возраста бетона к моменту загрузки ползучесть уменьшается. При более высоких относительных напряжениях указанная закономерность нарушается и остается в силе только для тех случаев, когда  $\tau > 29$  дней. На фиг. 12, где приведены кривые



Фиг. 14.

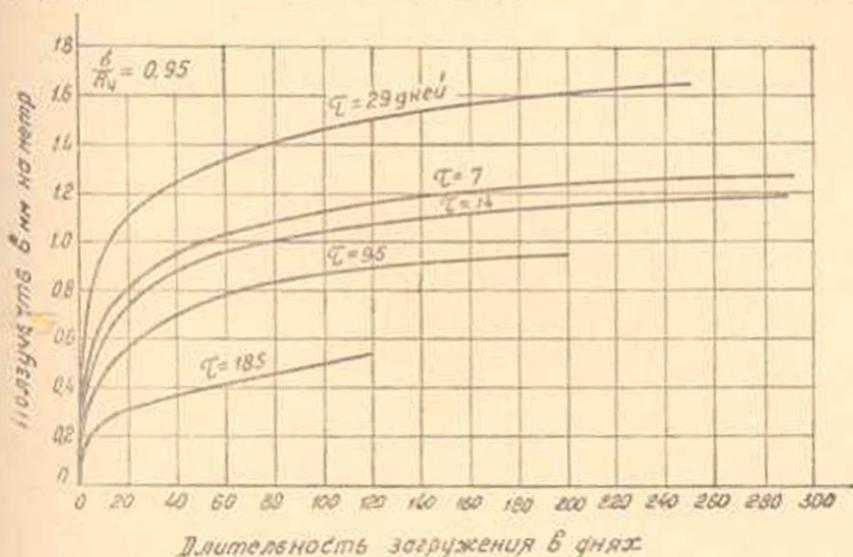
ползучести для различных возрастов при  $\frac{\sigma}{R_{tt}} = 0,75$ , кривая ползучести, соответствующая возрасту 7 дней, после длительности нагружения примерно 22 дня, пересекает кривую для возраста 14 дней и далее располагается ниже последней. Что касается кривой ползучести возраста 29 дней, то она через некоторую длительность нагружения пересекает кривые ползучести более молодых возрастов (7 и 14 дней) и располагается выше. То же самое имеет место и при более высоких относительных напряжениях (фиг. 13 и 14). Причем, с увеличением относительного напряжения, деформации образцов, нагруженных при  $\tau = 29$  дней, все больше превышают деформации образцов, нагруженных при  $\tau = 7$  и 14 дней.

Таким образом, когда  $\frac{\sigma}{R_{tt}} > 0,6$  и  $\tau < 29$  дней, с увеличением возраста бетона к моменту нагружения, ползучесть возрастает. Такая же закономерность была получена в наших прежних опытах, когда бетонные образцы были нагружены при  $\tau = 7, 14$  и 32 дня и относительном напряжении 0,7 [6]. Аналогичные результаты, но при сравнительно кратковременных опытах, были получены П. И. Васильевым [4].

Однако, новые опыты автора, которые поставлены при более широком изменении возраста бетона к моменту нагружения, показывают, что указанная закономерность при  $\tau > 29$  дней нарушается. Как видно из фиг. 12, 13 и 14, кривые ползучести, которые соответствуют возрастам 95 и 185 дней, расположились ниже кривых ползучести более ранних возрастов. Поэтому после возраста 29 дней получается,

та известная закономерность, что с увеличением возраста, несмотря на высокие относительные напряжения, ползучесть уменьшается.

Для наглядности на фиг. 15 представлены кривые ползучести бетона при разных возрастах с совмещением их начал. Как видно из фиг. 15, кривые ползучести для  $\tau = 7, 14, 29$  и 95 дней после некоторой длительности загрузки имеют затухающий характер в то



Фиг. 15.

время, как этого при  $\tau = 185$  дней не наблюдается. В последнем случае деформации продолжают и далее развиваться интенсивно и, очевидно, с увеличением длительности загрузки намного приблизятся по величине к деформациям бетона, загруженного при более ранних возрастах.

Рассмотрение кривой нарастания цилиндрической прочности бетона во времени (фиг. 2) показало, что после трехмесячного возраста дальнейшее нарастание прочности бетона во времени незначительно, а после возраста 6 месяцев — практически прекращается. Поэтому можно считать, что при высоких напряжениях ( $> 0,6R$ ) деформации бетона, загруженного длительной нагрузкой при возрасте 185 дней, в основном протекают за счет образования и развития микротрещин в бетоне. Деформации, обусловленные другими факторами (вязкостью геля и капиллярными явлениями), будут незначительны, так как бетон старый. Если это так, то при загрузке бетона в более старом возрасте ( $\tau > 185$  дней) примерно должна получиться та же кривая ползучести, которую мы получили для  $\tau = 185$  дней.

На основании вышеизложенного, как будто вполне понятно, почему при относительных напряжениях  $> 0,6$  в наших опытах деформации ползучести при возрасте бетона к моменту загрузки 29 дней получились намного больше, чем при возрасте 95 дней, а в последнем

случае больше, чем при возрасте 185 дней. Очевидно, это явление следует объяснить более интенсивным развитием деформаций за счет вязкости геля и капиллярных явлениях. Как известно, деформации, обусловленные указанными факторами, развиваются интенсивнее в молодом возрасте бетона. Естественно, возникает вопрос: если это так, то почему деформации образцов, которые были загружены при возрасте 7 и 14 дней, оказались намного меньше, чем при возрасте 29 дней. Причиной этого опять является падение относительного напряжения вследствие нарастания прочности бетона во времени, которое, как уже было показано, происходит тем интенсивнее и больше, чем моложе бетон к моменту его загрузки (фиг. 8).

Если, например, загружая бетон в различных возрастах, можно было бы с момента загрузки сохранить неизменность во времени его физико-механических свойств, то нет сомнения, что все кривые ползучести по отношению друг к другу расположились бы по обычной, нам известной, закономерности. В этом случае кривая ползучести самого молодого бетона расположилась бы выше всех остальных кривых, а кривая ползучести наиболее старого бетона—ниже всех. Однако, поскольку в действительности при  $\tau=7$  и 14 дней, относительное напряжение в бетоне с момента загрузки существенно падает, это приводит к меньшим деформациям ползучести, чем при  $\tau=29$  дней. Конечно, и в последнем случае имеет место падение относительного напряжения благодаря нарастанию прочности бетона во времени, однако, все же в итоге относительное напряжение сохраняется высоким (фиг. 8). По этой причине деформации ползучести интенсивно развиваются как за счет вязкости геля и капиллярных явлений, так и за счет образования и развития микротрещин в бетоне. По мере дальнейшего увеличения возраста бетона к моменту загрузки ( $\tau > 29$  дней) деформации, обусловленные вязкостью геля и капиллярными явлениями, уменьшаются, а деформации, обусловленные образованием и развитием трещин, увеличиваются. Поэтому, очевидно, при некоторой длительности загрузки деформации ползучести, вызванные первыми двумя факторами, будут равны деформациям, вызванным третьим фактором.

На основании вышесказанного, рассматривая фиг. 15, можно прийти к выводу, что при давних температурно-влажностных условиях хранения бетона все же деформации развивающиеся вследствие вязкости геля и капиллярных явлений, намного превосходят деформации, вызванные образованием и развитием микротрещин в бетоне. Однако, сказанное справедливо до некоторого  $\tau$ . В бетоне, загруженном в старом возрасте, деформации ползучести в основном протекают за счет образования и развития микротрещин в бетоне.

Загружение образцов в годичном возрасте даст нам возможность в дальнейшем еще больше уточнить указанные выводы.

Таким образом, влияние старения бетона на ползучесть при высоких относительных напряжениях выражается весьма сложной зако-

номерностью, так как здесь одновременно участвует ряд факторов, которые в совокупности обуславливают полученные нами результаты.

В заключении этого параграфа следует отметить, что, как показывают наши многолетние экспериментальные исследования ползучести как легких, так и тяжелых бетонов, гипотеза о „параллельности“ кривых деформаций ползучести бетона, положенная в основу теории старения, справедлива лишь в случае старых бетонов, т. е. когда фактически деформации ползучести приобретают свои предельные значения. Поэтому утверждения некоторых авторов (Уйтней, Фрайфельд) о том, что решение различных задач на основании теории старения, которая является частным случаем теории упруго-ползучего тела, приводит почти к одинаковым результатам, следует считать несостоятельным (16).

### § 6. Влияние длительного нагружения бетона на его прочность и деформативность

Обычно длительное нагружение бетона статической нагрузкой, когда величина последней не превышает определенные пределы, как это установлено [11, 13], положительно сказывается на прочности бетона. При этом бетон, твердеющий под нагрузкой, как правило, имеет большую прочность и модуль упругости, чем бетон, твердеющий без нагрузки. Однако, эффект данного явления существенно зависит от возраста бетона к моменту его нагружения, а также ряда факторов.

В тех случаях, когда интенсивность напряжения превышает упомянутые пределы, имеет место отрицательный эффект.

По нашим опытам пока рано судить, как качественно и количественно влияет длительное нагружение бетона на его прочность и деформативность в зависимости от возраста к моменту нагружения и величины напряжения, так как образцы еще не разгружены и не испытаны. Однако, поскольку на сегодня еще ни один образец (даже из числа тех, которые были нагружены относительным напряжением 0,9, 0,95) не разрушился, можно считать, что длительная прочность указанного бетона  $> 0,95 R$ . Особенно это можно утверждать в отношении тех случаев, когда возраст бетона к моменту нагружения  $< 3$  месяцев. В этом случае, как это следует из соответствующих кривых ползучести, последние даже при относительных напряжениях 0,9 и 0,95 имеют затухающий характер. Поэтому вряд ли дальнейшее нахождение бетона под нагрузкой может привести к его разрушению. Что касается бетона, нагруженного при  $\tau = 185$  дней, то в отношении этого пока рано делать окончательный вывод, так как длительность нагружения сравнительно небольшая, причем кривые ползучести при относительных напряжениях 0,9 и 0,95 показывают дальнейший интенсивный рост деформаций ползучести.

### § 7. Описание экспериментальных кривых ползучести

В предыдущих параграфах, путем анализа полученных экспериментальных данных, были показаны те зависимости, которые имеют место между напряжениями и деформациями ползучести при различных возрастах бетона к моменту загрузки. Описание столь сложных закономерностей единой математической зависимостью, естественно, связано с определенными трудностями, ибо, с одной стороны данная зависимость должна быть по возможности простой, а с другой стороны—должна хорошо отвечать экспериментальным данным. Известно, что получить по возможности простую, удобную для практических расчетов зависимость большей частью удается лишь за счет худшего описания результатов экспериментов, поэтому в таких случаях приходится принимать какое-то среднее, во всех отношениях приемлемое, решение.

При рассмотрении экспериментальных данных, зависимость между напряжениями и деформациями ползучести при различных возрастах бетона к моменту загрузки нами была принята в виде двух прямых, из коих нижняя прямая выражает первую область линейной ползучести, а верхняя прямая—вторую область линейной ползучести. Причем, относительное напряжение, при котором кончается первая область и начинается вторая область линейной ползучести для  $\tau > 7$  дней составляет 0,6.

Для описания экспериментальных кривых ползучести мы воспользовались теорией упруго-ползучего тела, как наиболее общей теорией, которая учитывает также старение бетона [1].

Согласно теории упруго-ползучего тела, мера ползучести бетона

$$C(t_1, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau), \quad (7)$$

где  $\varphi(\tau)$ —функция, учитывающая старение бетона, а

$f(t - \tau)$ —функция, учитывающая длительность загрузки бетона.

На основании наших экспериментальных данных, мера ползучести бетона для первой области линейной ползучести выражается следующей зависимостью:

$$C = \left(3 + \frac{700}{\tau + 16}\right) \left[1 - e^{-0,03(t-\tau)}\right] 10^{-6} \quad (8)$$

Кривые меры ползучести бетона на основании формулы (8) приведены на фиг. 16 пунктиром и, как видим, они дают удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. Исходя из формулы (8), для всех возрастов бетона к моменту загрузки будем иметь:

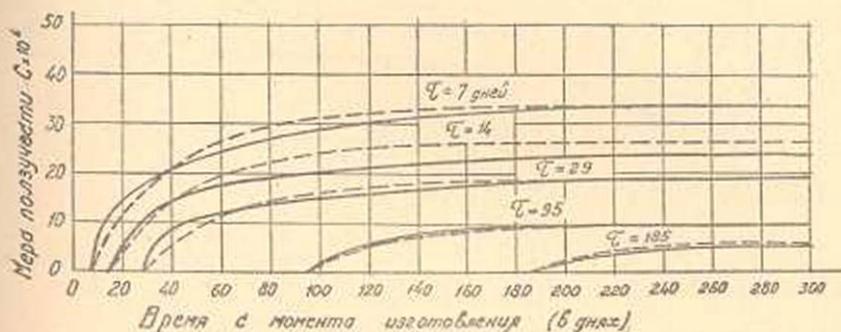
$$\varepsilon_n = \left(3 + \frac{700}{\tau + 16}\right) \left(\frac{100\tau}{8,4 + 1,25\tau}\right) \left[1 - e^{-0,03(t-\tau)}\right] \frac{\sigma}{R_n} 10^{-6} \quad (9)$$

или

$$\varepsilon_n = \left( 235 + \frac{56000}{\tau + 27} \right) \left[ 1 - e^{-0,03(t-\tau)} \right] \frac{\sigma}{R_n} 10^{-6}. \quad (10)$$

Для описания кривых ползучести при относительных напряжениях  $> 0,6$  и  $\tau > 29$  дней, мы получили следующую формулу:

$$\varepsilon_n = \left( 150 + \frac{149000}{0,01\tau^2 + 62} \right) \left( \frac{\sigma}{R_n} - 0,6 \right) 10^{-6} + \left( 235 + \frac{56000}{\tau + 27} \right) \times \\ \times \left\{ \left[ 1 - e^{-0,03(t-\tau)} \right] 0,6 + \left[ 1 - e^{-0,01(t-\tau)} \right] \left( \frac{\sigma}{R_n} - 0,6 \right) \right\} 10^{-6}, \quad (11)$$



Фиг. 16.

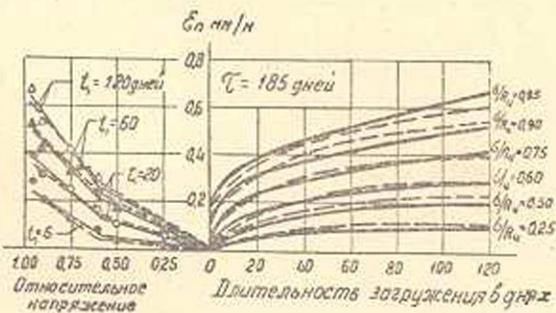
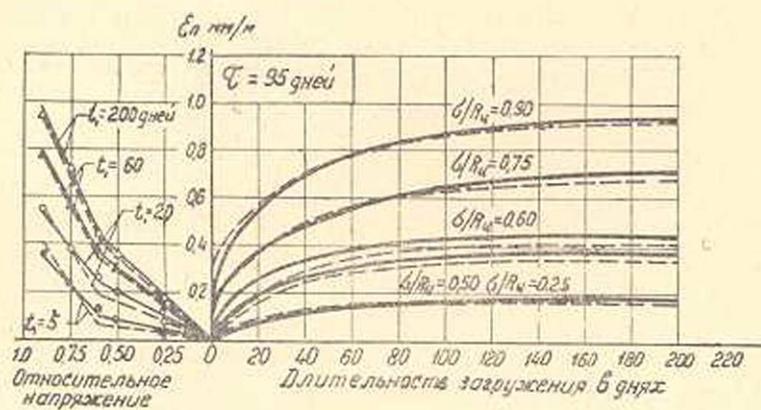
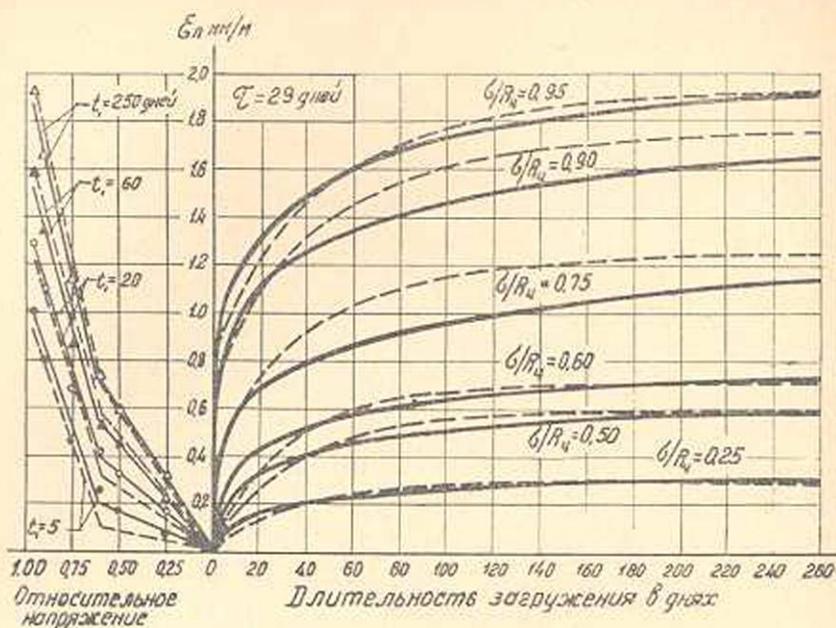
Первый член этой формулы представляет деформации ползучести за первые 30—40 часов после приложения нагрузки в зависимости от возраста бетона к моменту нагружения и величины относительного напряжения. Поскольку время 30—40 часов незначительно по сравнению с общей длительностью опытов, деформации, развивающиеся за это время, условно приняты независимыми от длительности нагружения. Это допущение было сделано для лучшего описания экспериментальных кривых ползучести при относительных напряжениях  $> 0,6$ .

На фиг. 17 нанесены как экспериментальные кривые, так и кривые построенные по формулам (10) и (11). Причем кривые, построенные по формулам, нанесены пунктиром.

Рассмотрение фиг. 17 показывает, что формулы (10) и (11) хорошо описывают экспериментальные кривые ползучести бетона после длительности нагружения 3—5 дней особенно при  $\frac{\sigma}{R_n} > 0,6$ .

Аспирантом Института математики и механики АН АрмССР У Жуй-Финном для решения ряда практических задач была сделана попытка описать полученные нами экспериментальные кривые ползучести бетона более простой зависимостью (14).

Для этой цели им была использована зависимость следующего вида, предложенная в свое время П. И. Васильевым (3).



Фиг. 17.

$$\varepsilon_n = C(t, \tau) [\alpha + \beta \tau^n], \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $n$  — постоянные, определяемые из опыта.

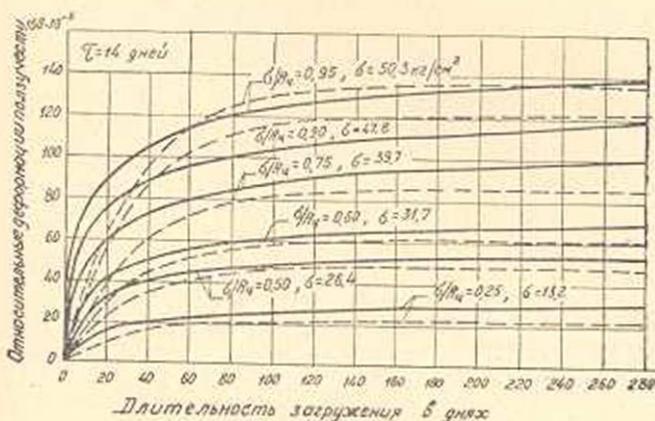
При этом должно быть удовлетворено условие  $\alpha + \beta = 1$ .

Подобрав соответствующую зависимость для меры ползучести и постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $n$  У Жуй-Фын получил для деформации ползучести следующую зависимость:

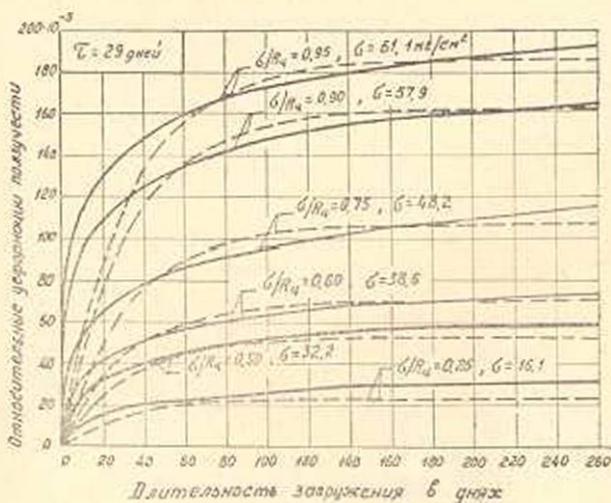
$$\varepsilon_n = \left( 0,28 + \frac{4450}{\tau^2 + 3030} \right) [1 - e^{-0,03(t-\tau)}] [0,999995\sigma + 0,000005\sigma^4] \cdot 10^{-5}, \quad (13)$$

которая действительна при  $\tau \geq 14$  дней.

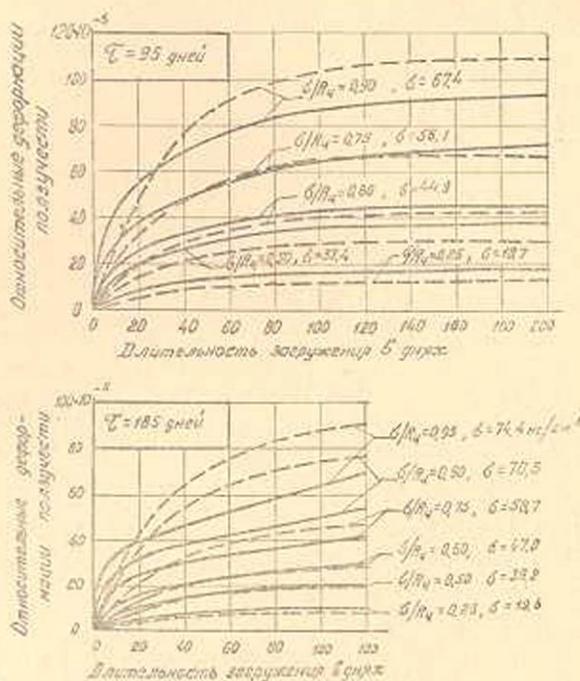
Экспериментальные кривые ползучести, описанные по формуле (13) при различных  $\tau$ , приведены на фиг. 18 и 19.



Фиг. 18.



Фиг. 18б.



Фиг. 19.

Рассмотрение фиг. 18 и 19 показывает, что данную формулу можно считать удовлетворительной только после длительности загрузки 40—60 дней.

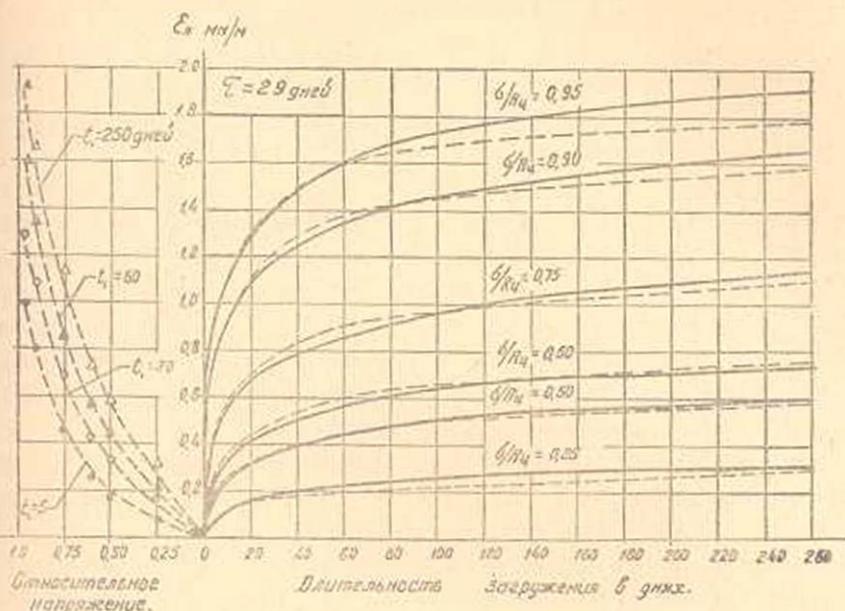
В дальнейшем мы попытались аналогичной зависимостью лучше описать экспериментальные кривые ползучести. Однако, при этом даже для одного возраста зависимость получается такой сложной и громоздкой, что уже не может быть речи о получении общей формулы, которая охватила бы все возраста бетона.

Так, например, для возраста бетона к моменту загрузки 29 дней, была получена следующая зависимость:

$$\epsilon_n = 19 \left[ 1 - e^{-0,01(t-1)} \right] \left[ \left( \frac{643}{t_1 + 1} + 0,083t_1 + 33 \right) \frac{\sigma}{R_n} + \left( \frac{1300}{t_1} + 45 \right) \left( \frac{\sigma}{R_n} \right)^4 \right] 10^{-6}. \quad (14)$$

Таким образом, в данном случае  $\alpha$  и  $\beta$  не являются постоянными, а зависят от длительности загрузки. Именно это и приводит к лучшему описанию экспериментальных данных, чем формулой (13). Однако, формула (14) отвечает только одному возрасту.

Экспериментальные кривые и кривые соответствующие формуле (14) приведены на фиг. 20.



Фиг. 20.

Очевидно, формулой типа (13) можно удовлетворительно описать только сравнительно кратковременные опыты, при которых коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  можно принять постоянными.

Анализируя приведенные выше различные зависимости для описания полученных экспериментальных кривых ползучести, приходим к выводу, что наиболее лучшими из них являются (10) и (11).

Однако, при решении определенных задач не исключена целесообразность применения зависимости типа (13).

Необходимо отметить, что приведенными здесь зависимостями не исчерпываются возможности получения других относительно более простых зависимостей.

### Выводы

1. Возраст бетона к моменту нагружения  $\tau$  оказывает существенное влияние на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести.

2. Связь между напряжениями и деформациями ползучести, вплоть до относительного напряжения 0,95, может быть выражена двумя линейными законами. Относительное напряжение  $\frac{\sigma}{R_u}$ , при котором имеет место переход от первого линейного закона ко второму определяется возрастом бетона к моменту нагружения. Для  $\tau \leq 7$  дней, это относительное напряжение составляет 0,75, и в остальных случаях — 0,6.

3. Переход от первой во вторую область линейной ползучести происходит благодаря тому, что при относительном напряжении примерно 0,6 наступает новое состояние бетона, вследствие начала образования и развития микротрещин. Развитие микротрещин приводит также к деформациям бетона.

4. Сравнительно высокое относительное напряжение, при котором происходит переход от первой области линейной ползучести во вторую, в случае молодого бетона ( $\tau \leq 7$  дней), является следствием более интенсивного дальнейшего нарастания прочности бетона во времени с момента его длительного нагружения. Упрочнение бетона приводит к быстрому падению начального высокого относительного напряжения и тем самым к затуханию деформаций, обусловленных образованием и развитием микротрещин.

5. При молодом бетоне, когда  $\tau \leq 7$  дней, по мере увеличения длительности нагружения отклонение прямой второй области ползучести от прямой первой области ползучести уменьшается. Благодаря такой закономерности, для длительности нагружения  $> 300$  дней, первую область линейной ползучести можно распространить до относительного напряжения 0,9—0,95.

В тех случаях, когда  $\tau > 14$  дней, указанная закономерность нарушается, и, с увеличением длительности нагружения, отмеченное выше отклонение увеличивается.

6. При одинаковых относительных напряжениях, когда последний  $< 0,6$ , с увеличением  $\tau$  ползучесть уменьшается. Если же относительное напряжение  $> 0,6$ , то до месячного возраста с увеличением  $\tau$  ползучесть возрастает, а после месячного возраста с дальнейшим увеличением  $\tau$  ползучесть уменьшается.

7. Первая область линейной ползучести бетона для  $\tau \leq 7$  дней справедлива до относительного напряжения 0,75, а для  $\tau > 7$  дней—0,6.

8. Упругие и полные деформации бетона при обычных кратковременных испытаниях, соответствующие разным возрастам при одинаковых относительных напряжениях, незначительно отличаются друг от друга.

9. Связь между напряжениями и деформациями ползучести, до относительного напряжения 0,9—0,95, с учетом старения бетона, при подборе соответствующих параметров, могут быть описаны зависимостями теории упруго-ползучего тела.

## Կ. Ս. Կարապետյան

## ԲԵՏՈՆԻ ԾԵՐԱՑՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍՈՂՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԵՂԱԾ ԱՌՆՉՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Բետոնի սողքի զեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած գծալին կապի օրինքը, հանդիսանում է գծալին սողքի տեսություն հիմնական նախադրյալներից մեկը: Բայց մինչև օրս պարզված չէր այն սահմանային լարվածությունը, որի դեպքում վերջանում է գծալին սողքի տիրույթը և սկսվում է ոչ գծալին սողքի տիրույթը: Դեռևս [6] աշխատանքում մեր կողմից ցույց էր տրված, որ հիշյալ սահմանային լարվածությունը մեծ չափով կախված է երկարատև բևեռավորման մոմենտին համապատասխանող բետոնի հասակից:

Հոդվածում բերված են բետոնի սողքի զեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կապի էքսպերիմենտալ հետազոտությունների արդյունքները հաշվի առնելով նրա ձևադրումը:

Կատարված են 7, 14, 29, 85 և 185 օր հասակ ունեցող ծանր բետոնի զրանաձև նմուշների փորձարկումները՝ 0,25, 0,50, 0,60, 0,75, 0,90 և 0,95 հարաբերական լարումների դեպքում: Փորձերի հիման վրա պարզված է, որ, երբ բետոնի հասակը բևեռավորման մոմենտին 7 օրից ավել է, մինչև 0,60 հարաբերական լարումները, սողքի զեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կապը գծալին է: 7 օր հասակ ունեցող բետոնի համար արդ հարաբերական լարվածության մեծությունը հասնում է 0,75: Պարզված է նաև, որ ավելի բարձր հարաբերական լարումների դեպքում (0,60—0,95) սողքի զեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կապը նույնպես գծալին է, միայն այն տարբերությամբ, որ արդ տիրույթում՝ հարաբերական լարումների միևնույն աճի դեպքում, սողքի զեֆորմացիաների մեծությունները ավելի բարձր են:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян, Н. А., Некоторые вопросы теории ползучести, Гос. изд. техн. теор. лит., 1932.
2. Берг О. Я., К вопросу о прочности и пластичности бетона, ДАН СССР, том XII, № 4, 1950.
3. Васильев П. И., Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетом времени, Изв. ВНИИГ, том 45, 1951.
4. Васильев П. И., Влияние старения бетона на вид кривых ползучести, Изв. ВНИИГ, том 75, 1957.
5. Карапетян К. С., О ползучести туфобетона, Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том V, № 4, 1952.
6. Карапетян К. С., Ползучесть бетона при высоких напряжениях, Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), том VI, № 2, 1953.
7. Карапетян К. С., Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона, Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), том IX, № 1, 1956.
8. Карапетян К. С., Экспериментальное исследование ползучести легкого бетона на естественных пористых заполнителях, Диссертация, 1956.
9. Карапетян К. С., Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона на литонидной пемзе и некоторые другие его свойства, Сборник статей «Гидротехнический бетон на литонидной пемзе», Изд. АН АрмССР, 1959.

10. Лисиченко В. А., Деформометр новой конструкции. Изв. АН АзяССР, том 1, № 6, 1948.
11. Саташкин А. В., Семченко Б. А., Ранее нагружение бетона и железобетона в мостостроении. Автогосиздат, 1955.
12. Столяров Н. В., Введение в теорию железобетона, Стройиздат, 1956.
13. Улицкий И. И., Ползучесть бетона, Госстезиздат Украины, 1948.
14. У Жуй-Фын, Неустойчивая ползучесть составных цилиндрических труб в упругой среде. Известия АН АзяССР (серия ФМ наук), том XII, № 3, 1959.
15. Фрейсман Е., Переворот в технике бетона ОНТИ, 1938.
16. Фрайфельд С. Е., Основные вопросы теории деформации бетона. Сборник статей «Теория расчета и конструирования жел. бет. конструкций», 1957.
17. Шейкин А. Е., К вопросу прочности, упругости и пластичности бетона. Труды МНИТ, вып. 89, Трансжелдориздат, 1946.

Л. А. Мовсисян

### К расчету анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки вращения

В настоящей работе даются решения температурной задачи и задачи прочности симметрично нагруженной анизотропной цилиндрической оболочки вращения, когда материал оболочки обладает анизотропией достаточно общего вида.

1. Рассмотрим цилиндрическую оболочку с радиусом кривизны  $r$ . Положение какой-либо точки оболочки будем определять безразмерными координатами  $\xi$  и  $\theta$ , где  $\xi$  — безразмерная длина образующей, т. е. отношение истинной длины образующей к радиусу оболочки  $r$ ,  $\theta$  — центральный угол, отсчитываемый от начальной прямолинейной образующей. Геометрические характеристики срединной поверхности при этом будут:  $A = B = r$ ,  $R_1 = \infty$  и  $R_2 = r$ .

Считаем, что материал оболочки обладает анизотропией достаточно общего вида, т. е. в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки.

Считается, что рассматриваемая оболочка нагружена нормально приложенной поверхностной нагрузкой, симметричной относительно оси вращения, и имеет соответствующие симметричные граничные условия.

Ввиду полной симметрии оболочки относительно оси вращения (симметрия в геометрии срединной поверхности, симметрия нагрузки, симметрия граничных условий и симметрия упругих свойств) полагаем, что оболочка деформируется, оставаясь телом вращения, т. е. считаем, что расчетные величины не зависят от параметра  $\theta$ , определяющего положение точки в каком-либо поперечном сечении оболочки.

Уравнения равновесия элемента цилиндрической оболочки имеют вид [1,8]:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\xi} &= 0 & \frac{dH_1}{d\xi} + rN_2 &= 0 \\ \frac{dS_1}{d\xi} - N_2 &= 0 & \frac{dG_1}{d\xi} - rN_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$T_z + \frac{dN_1}{d\xi} + rZ = 0, \quad S_1 + S_2 + \frac{H_2}{r} = 0.$$

В уравнениях (1.1) принимается, что внешняя нагрузка имеет лишь одну составляющую, нормальную к срединной поверхности оболочки.

В рассматриваемой системе координат геометрические уравнения имеют вид [1,8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{r} \frac{du}{d\xi}, & \varepsilon_2 &= -\frac{w}{r}, & \omega &= \frac{1}{r} \frac{dv}{d\xi}, \\ \kappa_1 &= \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}, & \kappa_2 &= 0, & \tau &= \frac{2}{r^2} \frac{dv}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соотношения упругости берем в форме [2]

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega, & G_1 &= -\frac{h^2}{12}[C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2 + C_{16}\tau], \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\omega, & G_2 &= -\frac{h^2}{12}[C_{12}\kappa_1 + C_{22}\kappa_2 + C_{26}\tau], \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= -S_2 = S = C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\omega, \\ H_1 &= -H_2 = H = \frac{h^2}{12}[C_{16}\kappa_1 + C_{26}\kappa_2 + C_{66}\tau], \end{aligned}$$

в связи с чем шестое уравнение равновесия (1.1) будет удовлетворяться приближенно.

Из (1.1)–(1.3) получаем следующие уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{12} \frac{dw}{d\xi} &= 0, \\ C_{16} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{66} \left(1 + \frac{h^2}{6r^2}\right) \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{26} \frac{dw}{d\xi} + \frac{h^2}{12r^2} C_{16} \frac{d^2 w}{d\xi^2} &= 0, \\ C_{12} \frac{du}{d\xi} + C_{26} \frac{dv}{d\xi} - \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{22} w - \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \frac{d^2 w}{d\xi^2} &= r^2 Z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Как известно [1,2], систему уравнений (1.4) можно свести к интегрированию одного разрешающего уравнения. Для этого достаточно принять

$$\begin{aligned} u &= (C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}) \frac{d^3 \Phi}{d\xi^3} + \frac{h^2}{12r^2} C_{16}^2 \frac{d^5 \Phi}{d\xi^5}, \\ v &= (C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}) \frac{d^3 \Phi}{d\xi^3} - \frac{h^2}{12r^2} C_{11}C_{16} \frac{d^5 \Phi}{d\xi^5}, \\ w &= (C_{11}C_{66} - C_{16}^2) \frac{d^4 \Phi}{d\xi^4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В силу (1.5), тождественно удовлетворяем первым двум уравнениям системы (1.4), а из третьего уравнения получаем следующее дифференциальное уравнение восьмого порядка, относительно искомой функции  $\Phi(\xi)$ :

$$\frac{d^8\Phi}{d\xi^8} + 2m \frac{d^6\Phi}{d\xi^6} + n \frac{d^4\Phi}{d\xi^4} = \frac{12r^4}{h^2 C_{11} (C_{11} C_{00} - C_{16}^2)} Z, \quad (1.6)$$

где

$$m = \frac{3}{2} \frac{C_{10} (C_{11} C_{20} - C_{12} C_{10})}{C_{11} (C_{11} C_{00} - C_{16}^2)}, \quad n = \frac{12r^2}{h^2} \frac{\Omega}{C_{11} (C_{11} C_{00} - C_{16}^2)}, \quad (1.7)$$

$$\Omega = (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{00} + 2C_{12} C_{10} C_{20} - C_{22} C_{16}^2 - C_{11} C_{26}^2.$$

Укажем, что соотношения (1.5) удовлетворяют второму уравнению системы (1.4) с точностью  $h^2/r$  по сравнению с единицей.

Из (1.6), в силу последнего из уравнений (1.5), получим:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2m \frac{d^2 w}{d\xi^2} + n w = \frac{12r^4}{h^2 C_{11}} Z. \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$w = e^{-\alpha\xi} (C_1 \sin \beta\xi + C_2 \cos \beta\xi) + e^{\alpha\xi} (C_3 \sin \beta\xi + C_4 \cos \beta\xi) + w_0, \quad (1.9)$$

где  $C_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) — постоянные интегрирования;  $w_0$  — частное решение уравнения (1.8), отвечающее грузовому члену;

$$\alpha = \sqrt{\frac{Vn-m}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{Vn+m}{2}}. \quad (1.10)$$

В силу (1.1), (1.2), (1.3) и (1.5) для расчетных величин получаем следующие выражения:

$$T_1 = 0, \quad (1.11)$$

$$T_2 = -\frac{1}{r} \frac{\Omega}{C_{11} C_{00} - C_{16}^2} w + \frac{h^2}{12r^3} C_{16} \frac{C_{12} C_{00} - C_{10} C_{20}}{C_{11} C_{00} - C_{16}^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.12)$$

$$S = -\frac{h^2}{12r^3} C_{16} \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.13)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{10} \frac{C_{11} C_{20} - C_{12} C_{10}}{C_{11} C_{00} - C_{16}^2} w - \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11} C_{00} - C_{16}^2} \right] \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.14)$$

$$G_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{20} \frac{C_{11} C_{20} - C_{12} C_{10}}{C_{11} C_{00} - C_{16}^2} w - \frac{h^2}{12r^2} \left[ C_{12} - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11} C_{10} C_{20}}{C_{11} C_{00} - C_{16}^2} \right] \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad (1.15)$$

$$H = \frac{h^2}{6r^2} C_{00} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \bar{w} + \frac{h^2 C_{10}}{12r^2} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{00}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2}, \quad (1.16)$$

$$N_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{10} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\xi} - \frac{h^2}{12r^2} C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{10}^2}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2}, \quad (1.17)$$

$$N_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{00} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\xi} - \frac{h^2}{12r^2} C_{10} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{00}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2}, \quad (1.18)$$

$$u = \frac{C_{12}C_{00} - C_{10}C_{06}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \int w d\xi + \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{10}^2}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\xi} + a, \quad (1.19)$$

$$v = \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \int w d\xi - \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{11}C_{10}}{C_{11}C_{00} - C_{10}^2} \frac{d\bar{w}}{d\xi} + b, \quad (1.20)$$

где в силу (1.9)

$$\frac{d\bar{w}}{d\xi} = e^{-\alpha\xi} [-(\alpha C_1 + \beta C_2) \sin \beta\xi + (\beta C_1 - \alpha C_2) \cos \beta\xi] + e^{\alpha\xi} [(\alpha C_3 - \beta C_4) \sin \beta\xi + (\alpha C_4 + \beta C_3) \cos \beta\xi] + \frac{d\bar{w}_0}{d\xi}, \quad (1.21)$$

$$\frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} = e^{-\alpha\xi} [(\alpha^2 C_1 + 2\alpha\beta C_2 - \beta^2 C_1) \sin \beta\xi + (\alpha^2 C_2 - 2\alpha\beta C_1 - \beta^2 C_2) \cos \beta\xi] + e^{\alpha\xi} [(\alpha^2 C_3 - 2\alpha\beta C_4 - \beta^2 C_3) \sin \beta\xi + (\alpha^2 C_4 + 2\alpha\beta C_3 - \beta^2 C_4) \cos \beta\xi] + \frac{d^2 \bar{w}_0}{d\xi^2}, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{w}}{d\xi^3} = e^{-\alpha\xi} [(-\alpha^3 C_1 - 3\alpha^2\beta C_2 + 3\alpha\beta^2 C_1 + \beta^3 C_2) \sin \beta\xi + \\ + (-\alpha^3 C_2 + 3\alpha^2\beta C_1 + 3\alpha\beta^2 C_2 - \beta^3 C_1) \cos \beta\xi] + \\ + e^{\alpha\xi} [(\alpha^3 C_3 - 3\alpha^2\beta C_4 - 3\alpha\beta^2 C_3 + \beta^3 C_4) \sin \beta\xi + \\ + (\alpha^3 C_4 + 3\alpha^2\beta C_3 - 3\alpha\beta^2 C_4 - \beta^3 C_3) \cos \beta\xi] + \frac{d^3 \bar{w}_0}{d\xi^3}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\int w d\xi = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [e^{-\alpha\xi} [(-\alpha C_1 + \beta C_2) \sin \beta\xi - (\beta C_1 + \alpha C_2) \cos \beta\xi] + e^{\alpha\xi} [(\alpha C_3 + \beta C_4) \sin \beta\xi + (\alpha C_4 - \beta C_3) \cos \beta\xi]] + \int \bar{w}_0 d\xi \quad (1.24)$$

$a$  и  $b$  — произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотрим два примера.

а) Бесконечная цилиндрическая оболочка нагружена в сечении  $\xi=0$  силами  $p$ , равномерно распределенными по окружности этого сечения.

Рассмотрим часть цилиндра правее от сечения  $\xi=0$ . В сечении  $\xi=0$  имеем [3, 4, 10]

$$\frac{dw}{d\xi} = 0, \quad N_1 = -\frac{p}{2}. \quad (1.25)$$

Полагая  $C_3 = C_4 = 0$  (в бесконечности все решения должны быть равны нулю) и удовлетворяя условиям (1.25), получим для постоянных интегрирования следующие значения

$$C_1 = \frac{A}{\beta} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{A}{\alpha} \quad (1.26)$$

$$A = \frac{3r^3}{h^2} \frac{p}{C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] (\alpha^2 + \beta^2)}$$

Из (1.10)–(1.24) в силу (1.26) для расчетных величин имеем

$$w = Ae^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.27)$$

$$T_2 = -\frac{A}{r} \frac{\Omega}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12r^3} C_{16} \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.28)$$

$$S = -\frac{h^2}{12r^3} C_{16} A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.29)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} Ae^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] -$$

$$-\frac{h^2}{12r^2} C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.30)$$

$$G_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{26} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} Ae^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] -$$

$$-\frac{h^2}{12r^2} \left[ C_{12} - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.31)$$

$$H = \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} Ae^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi + \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12r^2} C_{16} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{1}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{1}{\alpha} \cos \beta\xi \right], \quad (1.32)$$

$$N_1 = \frac{h^2}{6r^3} C_{16} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} A e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi -$$

$$- \frac{h^2}{12r^3} C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta\xi + 2 \cos \beta\xi \right] \quad (1.33)$$

$$N_2 = \frac{h^2}{6r^3} C_{66} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} A e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi -$$

$$- \frac{h^2}{12r^3} C_{16} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] A (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta\xi + 2 \cos \beta\xi \right] \quad (1.34)$$

Неизвестные  $a$  и  $b$  определяются из условий, что при  $\xi = 0$ ;  $u = 0$ ,  $v = 0$ , тогда окончательно для  $u$  и  $v$  получим

$$u = \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{A}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta\xi - 2 \cos \beta\xi \right] + 2 \right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} A \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.35)$$

$$v = \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{A}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin \beta\xi - 2 \cos \beta\xi \right] + 2 \right\} +$$

$$+ \frac{h^2}{12r^2} \frac{C_{11}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} A \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi. \quad (1.36)$$

В частном случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости материала совпадают с координатными линиями оболочки ( $C_{16} = C_{26} = 0$ ), из полученных результатов получаем результаты работы [10], а для оболочек изотропного материала — работы [3].

Сравнивая эти результаты замечаем, что как и в работе [5], в отличие от изотропных и ортотропных (когда главные направления упругости совпадают с координатными направлениями) оболочек, в общем случае анизотропии появляются внутренние усилия  $S$ ,  $H$ ,  $N_2$  и перемещение  $v$ . Таким образом замечаем, что, несмотря на полную симметрию задачи, под действием симметричной, нормально приложенной нагрузки круговая цилиндрическая оболочка претерпевает деформации кручения и сдвига.

в) Достаточно длинная цилиндрическая оболочка шарнирно закреплена в торцевом сечении ( $\xi = 0$ ). Оболочка несет нормальное к срединной поверхности внешнее давление с интенсивностью  $q$ , т. е.  $Z = -q$ .

В сечении  $\xi = 0$  имеем следующие граничные условия:

$$u = v = w = \bar{G}_1 = 0. \quad (1.37)$$

Частное решение уравнения (1.8) берем в виде:

$$w_0 = -\frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q. \quad (1.38)$$

Учитывая (1.9), (1.14), (1.22) и удовлетворяя последним двум условиям (1.37), для постоянных интегрирования получим (члены содержащие  $C_3$  и  $C_4$  по тем же соображениям, что и в первом примере, отбрасываются):

$$C_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} C_{20}, \quad C_2 = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q. \quad (1.39)$$

Подставляя (1.38) и (1.39) в (1.10)–(1.20), имея в виду (1.21)–(1.24), для расчетных величин получим:

$$w = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\}, \quad (1.40)$$

$$T_2 = -rq \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} + \\ + \frac{h^2}{24r} q C_{16} \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}C_{20}}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.41)$$

$$S = -\frac{qh^2}{24r} C_{16} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.42)$$

$$G_1 = -\frac{qh^2}{6} C_{16} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} - \\ - \frac{qh^2}{24} C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.43)$$

$$G_2 = -\frac{qh^2}{6} C_{20} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} - \\ - \frac{qh^2}{24} \left[ C_{12} - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{16}C_{20}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.44)$$

$$H = \frac{qh^2}{6} C_{03} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi + \cos \beta\xi \right] - 1 \right\} + \\ + \frac{qh^2}{24} C_{16} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \right] \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} e^{-\alpha\xi} \sin \beta\xi, \quad (1.45)$$

$$N_1 = \frac{qh^2}{12r} C_{16} \frac{C_{11}C_{20} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{qh^2}{24r} C_{11} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{16}^2}{C_{11}C_{22} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{22} - C_{16}^2}{\Omega} \times \\
 & \times \frac{(a^2 + \beta^2)^2}{a\beta} e^{-\alpha\xi} (\alpha \sin \beta\xi - \beta \cos \beta\xi), \quad (1.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 = & \frac{qh^2}{12r} C_{22} \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{16}}{\Omega} \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] + \\
 & + \frac{qh^2}{24r} C_{16} \left[ 1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{16}^2} \right] \frac{C_{11}C_{22} - C_{16}^2}{\Omega} \times \\
 & \times \frac{(a^2 + \beta^2)^2}{a\beta} e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi - \beta \cos \beta\xi], \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u = & r^2 q \frac{C_{12}C_{22} - C_{16}C_{24}}{2\Omega} \frac{1}{a^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{3\beta^2 - a^2}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{3a^2 - \beta^2}{a} \cos \beta\xi \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{3a^2 - \beta^2}{a} \right\} - \frac{qh^2}{24} \frac{C_{16}^2}{\Omega} \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} \{ e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] - \beta \} + \\
 & + \frac{C_{12}C_{22} - C_{16}C_{24}}{\Omega} r^2 q \xi, \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & r^2 q \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{16}}{2\Omega} \frac{1}{a^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha\xi} \left[ \frac{3\beta^2 - a^2}{\beta} \sin \beta\xi - \frac{3a^2 - \beta^2}{a} \cos \beta\xi \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{3a^2 - \beta^2}{a} \right\} - \frac{qh^2}{24} \frac{C_{11}C_{16}}{\Omega} \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} \{ e^{-\alpha\xi} [\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi] - \beta \} + \\
 & + \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{16}}{\Omega} r^2 q \xi, \quad (1.49)
 \end{aligned}$$

Как и в первом примере, для оболочек из изотропного или ортотропного материалов величины  $S$ ,  $H$ ,  $N_2$  и  $v$  равны нулю.

Здесь также можно сделать вывод, аналогичный выводу, сделанному в конце примера „а“.

2. В работе [2] построена общая теория анизотропных оболочек с большим показателем изменчивости. В частном случае рассматриваемой цилиндрической оболочки, полагая, что искомые величины не зависят от параметра  $\theta$ , получим следующее уравнение задачи:

$$\frac{B_{13}}{B_{22}} (B_{11}B_{22} - B_{12}^2) \frac{1}{r^3} \frac{d^3\Phi}{d\xi^3} + \frac{12\Omega'}{r^3 h^2} \frac{d^3\Phi}{d\xi^3} = \frac{12}{h^3} Z, \quad (2.1)$$

где

$$\Omega' = \frac{1}{B_{16}^2} [(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) (B_{22}B_{33} - B_{23}^2) - (B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23})^2] \quad (2.2)$$

и расчетные величины:

$$T_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$T_2 = -h\Omega' \frac{1}{r^5} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.4)$$

$$S = 0, \quad (2.5)$$

$$G_1 = -\frac{h^3}{12r^6} \frac{B_{11}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^6\Phi}{d\xi^6}, \quad (2.6)$$

$$G_2 = -\frac{h^3}{12r^6} \frac{B_{12}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^6\Phi}{d\xi^6}, \quad (2.7)$$

$$H = \frac{h^3}{12r^6} \frac{B_{16}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^6\Phi}{d\xi^6}, \quad (2.8)$$

$$N_1 = -\frac{h^3}{12r^2} \frac{B_{11}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^2\Phi}{d\xi^2}, \quad (2.9)$$

$$N_2 = -\frac{h^3}{12r^2} \frac{B_{12}}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{d^2\Phi}{d\xi^2}, \quad (2.10)$$

$$w = \frac{1}{B_{66}} (B_{11}B_{66} - B_{16}^2) \frac{1}{r^4} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.11)$$

$$u = \frac{B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26}}{B_{66}} \frac{1}{r^4} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}, \quad (2.12)$$

$$v = \frac{B_{11}B_{26} - B_{12}B_{16}}{B_{66}} \frac{1}{r^4} \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}. \quad (2.13)$$

Здесь так же, как и в  $p^{\circ}1$ , можно получить разрешающее уравнение относительно  $w$ . Из (2.1) в силу (2.11) получим

$$\frac{d^4w}{d\xi^4} + \frac{12r^2}{h^2} \frac{\Omega}{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)} w = \frac{12r^4}{h^2 C_{11}} Z, \quad (2.14)$$

где  $\Omega$  имеет значение (1.7).

Общее решение уравнения (2.14) имеет вид:

$$w = e^{-\alpha_1 \xi} [C_1 \sin \alpha_1 \xi + C_2 \cos \alpha_1 \xi] + e^{\alpha_1 \xi} [C_3 \sin \alpha_1 \xi + C_4 \cos \alpha_1 \xi] + w_0, \quad (2.15)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{\frac{n}{4}}, \quad n = \frac{12r^2}{h^2} \frac{\Omega}{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}. \quad (2.16)$$

Из (2.3)–(2.13) в силу (2.11) и (2.15) для расчетных величин получим:

$$T_2 = -\frac{1}{r} \frac{\Omega}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_1 \sin \alpha_1 \xi + C_2 \cos \alpha_1 \xi] + e^{\alpha_1 \xi} [C_3 \sin \alpha_1 \xi + C_4 \cos \alpha_1 \xi] + w_0 \}, \quad (2.17)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{11} \alpha_1^2 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_2 \sin \alpha_1 \xi - C_1 \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-C_4 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} \right\}. \quad (2.18)$$

$$G_2 = -\frac{h^2}{6r^2} C_{12} \alpha_1^2 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_2 \sin \alpha_1 \xi - C_1 \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-C_4 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} \right\}. \quad (2.19)$$

$$H = \frac{h^2}{6r^2} C_{16} \alpha_1^2 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [C_2 \sin \alpha_1 \xi - C_1 \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-C_4 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} \right\}, \quad (2.20)$$

$$N_1 = -\frac{h^2}{6r^3} C_{11} \alpha_1^3 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(C_1 - C_2) \sin \alpha_1 \xi + (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_3 - C_4) \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^3} \frac{d^3 w_0}{d\xi^3} \right\}, \quad (2.21)$$

$$N_2 = -\frac{h^2}{6r^3} C_{16} \alpha_1^3 \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(C_1 - C_2) \sin \alpha_1 \xi + (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [-(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_3 - C_4) \cos \alpha_1 \xi] + \frac{1}{2\alpha_1^3} \frac{d^3 w_0}{d\xi^3} \right\}. \quad (2.22)$$

$$u = \frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \frac{1}{2\alpha_1} \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(-C_1 + C_2) \sin \alpha_1 \xi - (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_4 - C_3) \cos \alpha_1 \xi] \right\} + \\ + \frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \int w_0 d\xi + a, \quad (2.23)$$

$$v = \frac{C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \frac{1}{2\alpha_1} \left\{ e^{-\alpha_1 \xi} [(-C_1 + C_2) \sin \alpha_1 \xi - (C_1 + C_2) \cos \alpha_1 \xi] + \right. \\ \left. + e^{\alpha_1 \xi} [(C_3 + C_4) \sin \alpha_1 \xi + (C_4 - C_3) \cos \alpha_1 \xi] \right\} + \\ + \frac{C_{12} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \int w_0 d\xi + b. \quad (2.24)$$

Приведем ранее рассмотренные примеры.

а) Бесконечная цилиндрическая оболочка нагружена в сечении  $\xi = 0$  силами  $p$ , равномерно распределенными по окружности этого сечения.

Поступая так, как и в п<sup>1</sup>, для постоянных интегрирования получим:

$$C_1 = C_2 = C = \frac{3r^2}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^3} \quad (2.25)$$

Подстановка (2.25) в (2.17)–(2.24) дает следующие выражения для расчетных величин:

$$w = \frac{3r^2}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^3} e^{-\alpha_1\xi} [\sin \alpha_1\xi + \cos \alpha_1\xi], \quad (2.26)$$

$$T_2 = -\frac{3r^2}{2h^2} \frac{\Omega}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^3} e^{-\alpha_1\xi} [\sin \alpha_1\xi + \cos \alpha_1\xi], \quad (2.27)$$

$$G_1 = -\frac{r}{4} \frac{p}{\alpha_1} e^{-\alpha_1\xi} [\sin \alpha_1\xi - \cos \alpha_1\xi], \quad (2.28)$$

$$G_2 = -\frac{r}{4} \frac{C_{12}p}{C_{11}\alpha_1} e^{-\alpha_1\xi} [\sin \alpha_1\xi - \cos \alpha_1\xi], \quad (2.29)$$

$$H = \frac{r}{4} \frac{C_{16}p}{C_{11}\alpha_1} e^{-\alpha_1\xi} [\sin \alpha_1\xi - \cos \alpha_1\xi], \quad (2.30)$$

$$N_1 = -\frac{p}{2} e^{-\alpha_1\xi} \cos \alpha_1\xi, \quad (2.31)$$

$$N_2 = -\frac{C_{16}}{C_{11}} \frac{p}{2} e^{-\alpha_1\xi} \cos \alpha_1\xi, \quad (2.32)$$

$$u = -\frac{3r^2}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^4} \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} [e^{-\alpha_1\xi} \cos \alpha_1\xi - 1], \quad (2.33)$$

$$v = -\frac{3r^2}{2h^2} \frac{p}{C_{11}\alpha_1^4} \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} [e^{-\alpha_1\xi} \cos \alpha_1\xi - 1]. \quad (2.34)$$

в) Полубесконечная цилиндрическая оболочка в торцевом сечении ( $\xi = 0$ ) шарнирно закреплена. Оболочка несет нормальное к срединной поверхности внешнее давление  $Z = -q$ . Как и в п<sup>о</sup>1, частное решение уравнения (2.14) берем в виде (1.38).

Удовлетворяя условиям (1.37), для постоянных интегрирования, получим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q. \quad (2.35)$$

Для расчетных величин получаем следующие выражения:

$$w = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega} r^2 q [e^{-\alpha_1\xi} \cos \alpha_1\xi - 1], \quad (2.36)$$

$$T_2 = -r q [e^{-\alpha_1\xi} \cos \alpha_1\xi - 1], \quad (2.37)$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{6} \frac{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} q \alpha_1^2 e^{-\alpha_1\xi} \sin \alpha_1\xi, \quad (2.38)$$

$$G_z = -\frac{h^2}{6} \frac{C_{12}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} qz_1^2 e^{-\alpha_1 z_1} \sin \alpha_1 z_1, \quad (2.39)$$

$$H = \frac{h^2}{6} \frac{C_{16}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} qz_1^2 e^{-\alpha_1 z_1} \sin \alpha_1 z_1, \quad (2.40)$$

$$N_1 = -\frac{h^2}{6r} \frac{C_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} qz_1^2 e^{-\alpha_1 z_1} [\cos \alpha_1 z_1 - \sin \alpha_1 z_1], \quad (2.41)$$

$$N_2 = -\frac{h^2}{6r} \frac{C_{16}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{\Omega} qz_1^2 e^{-\alpha_1 z_1} [\cos \alpha_1 z_1 - \sin \alpha_1 z_1], \quad (2.42)$$

$$u = \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{2\alpha_1 \Omega} r^2 q [e^{-\alpha_1 z_1} \sin \alpha_1 z_1 - \cos \alpha_1 z_1] + 1 + 2\alpha_1 z_1, \quad (2.43)$$

$$v = \frac{C_{11}C_{26} - C_{16}C_{16}}{2\alpha_1 \Omega} r^2 q [e^{-\alpha_1 z_1} (\sin \alpha_1 z_1 - \cos \alpha_1 z_1) + 1 + 2\alpha_1 z_1]. \quad (2.44)$$

Из обоих примеров легко видеть, что для оболочек из ортотропного и изотропного материалов, получаемые расчетные величины совпадают с соответственными величинами п<sup>о</sup>1.

3. Сравним результаты, полученные в п<sup>о</sup>1 и п<sup>о</sup>2. Разрешающее уравнение (2.14) отличается от (1.8) членом при второй производной  $w$ , вследствие чего имеем  $\alpha < \alpha_1$ ,  $\exp(-\alpha z_1) > \exp(-\alpha_1 z_1)$  (для положительных  $z_1$ ), т. е. значения расчетных величин по точным формулам, при увеличении  $z_1$ , стремятся к нулю медленнее, чем по формулам для оболочек с большим показателем изменчивости.

Основное отличие расчетных величин заключается в том, что в теории пологих оболочек сдвигающее усилие  $S$  вообще равно нулю, в то время как та же величина, определенная по точной теории, отлична от нуля.

Приведем численное сравнение расчетных величин, получаемых по двум рассмотренным теориям.

Пример расчета. Для коэффициентов деформаций берем\*.

$$a_{11} = 0,781 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \quad a_{12} = -0,006 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг};$$

$$a_{22} = 1,531 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \quad a_{16} = -0,541 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг};$$

$$a_{26} = -0,758 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}; \quad a_{66} = 2,575 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Рассматриваются два случая отношений толщины оболочки  $h$  к радиусу кривизны, а именно  $h/r = \frac{1}{10}, \frac{1}{50}$ .

В таблицах 1 и 2 приводятся значения  $wr^{-1} \cdot 10^5$  и  $wr^{-1} q^{-1} 10^5$  соответственно для примеров „а“ и „в“.

\* Упругие постоянные  $B_{ik}$  выражаются через коэффициенты  $a_{ik}$  известным образом [11].

Таблица 1

$\xi$	0,00	0,25	0,50	1,00	№№ формул
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	25,795	15,734	4,232	-1,093	(1.27)
	25,681	15,672	4,265	-1,041	(2.26)
	26,432	15,739	3,696	-1,037	(1.27)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	287,360	28,693	-9,417	0,204	(1.27)
	287,120	28,821	-9,400	0,203	(2.26)
	301,020	22,672	-8,345	0,114	(1.27)

Таблица 2

$\xi$	0,25	0,50	1,00	№№ формул
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	-10,926	-15,658	-15,837	(1.40)
	-10,888	-15,613	-15,832	(2.36)
	-11,255	-15,801	-15,733	(1.40)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	-80,096	-78,021	-76,533	(1.40)
	-80,068	-77,576	-76,532	(2.36)
	-80,677	-77,606	-76,550	(1.40)

В первых строках таблиц, для каждого отношения  $\frac{h}{r}$ , помещены значения, рассчитанные по формулам (1.27) и (1.40), во вторых— по формулам (2.26) и (2.36) и в третьих— рассчитанные для ортотропной оболочки.

В таблице 3 приводятся значения  $G_1 h^{-1} p^{-1}$  для первого примера, где, как и в таблицах 1 и 2, в первой строке помещены значения, рассчитанные по формулам (1.30), а во второй— по (2.28).

Таблица 3

$\xi$	0,00	0,25	0,50	1,00	№№ формул
$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}$	0,740	-0,029	-0,154	-0,019	(1.30)
	0,746	-0,024	-0,154	-0,020	(2.28)
$\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$	1,664	-0,321	-0,009	0,000	(1.30)
	1,666	-0,320	-0,010	0,000	(2.28)

Из приведенных таблиц видно, что величины, рассчитанные по формулам для пологих оболочек, незначительно отличаются от величин, вычисленных по точным формулам. В сечении  $\xi = 0$ , что и важно, расчетные величины, подсчитанные по двум теориям, отличаются примерно на 0,5%.

Как видно из п<sup>o</sup>. 1, для ортотропного материала  $\alpha$  больше, чем для анизотропного, поэтому величины с множителями  $\exp(-\alpha z)$  стремятся к нулю быстрее для ортотропного материала, чем для анизотропного, т. е. зона затухания краевого эффекта меньше для оболочек из ортотропного материала, чем для оболочек из анизотропного материала. Это же подтверждается и численными примерами.

4. Пусть рассматриваемая выше оболочка подвергается действию температуры. Тогда обобщенный закон Гука для материала, имеющего плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности оболочки, имеет следующий вид [12]

$$\begin{aligned} e_{11} &= a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + a_{13}\tau_z + a_{16}\tau_{z\theta} + \alpha_1 t, \\ e_{22} &= a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 + a_{23}\tau_z + a_{26}\tau_{z\theta} + \alpha_2 t, \\ e_{33} &= a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{33}\tau_z + a_{36}\tau_{z\theta} + \alpha_3 t, \\ \gamma_{\theta z} &= a_{44}\tau_{z\theta} + a_{45}\tau_{zr} + \alpha_{23} t, \\ \gamma_{rz} &= a_{45}\tau_{z\theta} + a_{55}\tau_{zr} + \alpha_{13} t, \\ \gamma_{z\theta} &= a_{16}\sigma_1 + a_{26}\sigma_2 + a_{36}\sigma_3 + a_{66}\tau_{z\theta} + \alpha_{12} t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\alpha_i$  — коэффициенты температурного расширения,  $\alpha_{ij}$  — коэффициенты температурного сдвига.

В силу гипотезы недеформируемых нормалей из (4.1) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_{11}e_{11} + B_{12}e_{22} + B_{16}\gamma_{z\theta} - \beta_1 t, \\ \sigma_2 &= B_{12}e_{11} + B_{22}e_{22} + B_{26}\gamma_{z\theta} - \beta_2 t, \\ \tau_{z\theta} &= B_{16}e_{11} + B_{26}e_{22} + B_{66}\gamma_{z\theta} - \beta_{12} t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где коэффициенты  $B_{ik}$  через  $a_{ik}$  выражаются известным образом [11], а через  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_{12}$  обозначены следующие выражения [13]:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= B_{11}\alpha_1 + B_{12}\alpha_2 + B_{16}\alpha_{12}, \\ \beta_2 &= B_{12}\alpha_1 + B_{22}\alpha_2 + B_{26}\alpha_{12}, \\ \beta_{12} &= B_{16}\alpha_1 + B_{26}\alpha_2 + B_{66}\alpha_{12}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Представим  $t$  в виде [13, 14]  $t = t_1 + t_2$ , где  $t_1$  — нечетная функция от координаты  $z$ , а  $t_2$  — четная, тогда в силу (4.2) для усилий и моментов получим [13].

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega - \beta_1 T_1, & G_1 &= -[D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + D_{16}r] + \beta_1 M_1, \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\omega - \beta_2 T_2, & G_2 &= -[D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{26}r] + \beta_2 M_1, \\ S &= C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\omega - \beta_{12} T_2, & H &= D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + D_{66}r - \beta_{12} M_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$T_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_i dz, \quad M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_i z dz. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4) в (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{12} \frac{d w}{d\xi} &= \beta_1 r \frac{dT_t}{d\xi}, \\ C_{16} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + C_{66} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - C_{26} \frac{d w}{d\xi} + \frac{h^2}{12 r^2} C_{16} \frac{d^3 w}{d\xi^3} &= \beta_{12} r \frac{dT_t}{d\xi} + \beta_{12} \frac{dM_t}{d\xi}, \\ C_{12} \frac{d u}{d\xi} + C_{26} \frac{d v}{d\xi} - \frac{h^2}{6 r^2} C_{16} \frac{d^3 v}{d\xi^3} - C_{22} w - \frac{h^2}{12 r^2} C_{11} \frac{d^3 w}{d\xi^3} &= \\ &= -r^2 Z - \beta_2 r T_t + \beta_1 \frac{d^2 M_t}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Уравнения (4.6) отличаются от (1.4) лишь правыми частями.

Из первых двух уравнений системы (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d u}{d\xi} \frac{1}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \left\{ (C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}) w + \frac{h^2}{12 r^2} C_{16}^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \right. \\ \left. + (C_{66} \beta_1 - C_{16} \beta_{12}) r T_t - \beta_{12} C_{16} M_t + a C_{66} - C_{16} b \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d v}{d\xi} = \frac{1}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \left\{ (C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}) w - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12 r^2} C_{11} C_{16} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (C_{11} \beta_{12} - C_{16} \beta_1) r T_t + \beta_{12} C_{11} M_t + C_{11} b - C_{16} a \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $a$  и  $b$  постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Подставляя (4.7) и (4.8) в последнее уравнение (4.6), получим следующее дифференциальное уравнение относительно нормального перемещения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 2m \frac{d^2 w}{d\xi^2} + n w = \frac{12 r^4}{h^2 C_{11}} Z + P T_t + R M_t + \\ + E \frac{d^2 T_t}{d\xi^2} + F \frac{d^2 M_t}{d\xi^2} + A a + B b, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где наряду с (1.7) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P &= \frac{12 r^3}{h^2 C_{11} (C_{11} C_{66} - C_{16}^2)} \left\{ (C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}) \beta_1 - (C_{11} C_{66} - C_{16}^2) \beta_2 + \right. \\ &\quad \left. + (C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}) \beta_{12} \right\}, \\ R &= \frac{12 r^3 \beta_{12}}{h^2 C_{11} (C_{11} C_{66} - C_{16}^2)} (C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}), \\ E &= \frac{2 r C_{16}}{C_{11} (C_{11} C_{66} - C_{16}^2)} (\beta_1 C_{16} - C_{11} \beta_{12}), \end{aligned}$$

$$F = \frac{12r^2}{h^2 C_{11}} \left( \beta_1 - \frac{h^2}{6r^2} \frac{C_{11} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \beta_{12} \right),$$

$$A = \frac{12r^2}{h^2 C_{11}} \frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2},$$

$$B = \frac{12r^2}{h^2 C_{11}} \frac{C_{11} C_{26} - C_{12} C_{16}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2}.$$

Как и в предыдущих параграфах, решение уравнения (4.7) можно представить в следующем виде:

$$w = e^{-\alpha \xi} [C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi] + e^{\alpha \xi} [C_3 \sin \beta \xi + C_4 \cos \beta \xi] + w_0, \quad (4.10)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  имеют значения (1.10), а  $w_0$  — частное решение, отвечающее правой части уравнения (4.9).

Граничные условия формулируются так, как обычно.

Для иллюстрации хода определения постоянных интегрирования, рассмотрим следующую задачу.

Длинная оболочка жестко прикреплена на обоих концах, т. е. имеем

$$u = v = w = \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = \frac{l}{r}. \quad (4.11)$$

На оболочку действует постоянная по толщине температура, заданная в виде  $t = t_0 e^{-\omega \xi}$ , где  $t_0$  — температура нулевого сечения, а  $\omega$  — постоянное число. Для определенности примем, что  $\omega$  не совпадает с корнями характеристического уравнения (4.10).

Как следует из (4.5)

$$T_t = ht_0 e^{-\omega \xi}, \quad M_t = 0. \quad (4.12)$$

Частное решение, отвечающее (4.12), имеет вид

$$w_0 = \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} ht_0 e^{-\omega \xi} + \frac{A}{n} a + \frac{B}{n} b. \quad (4.13)$$

Из (4.7), (4.8), (4.10) и (4.13), удовлетворяя условиям (4.11), для определения постоянных интегрирования получим следующую систему уравнений:

$$C_2 + \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} ht_0 + \frac{A}{n} a + \frac{B}{n} b = 0,$$

$$\beta C_1 - \alpha C_2 - \omega \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} ht_0 = 0,$$

$$\frac{C_{12} C_{66} - C_{16} C_{26}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \left[ \frac{\beta C_1 + \alpha C_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} \frac{ht_0}{\omega} \right] +$$

$$+ \frac{C_{66} \beta_1 - C_{16} \beta_{12}}{C_{11} C_{66} - C_{16}^2} \frac{rht_0}{\omega} - a' = 0,$$

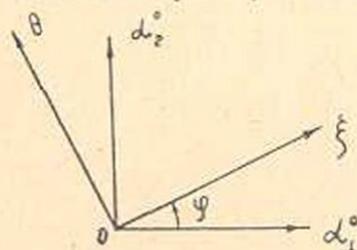
$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[ \frac{\beta C_1 + \alpha C_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{P + \omega^2 E}{\omega^4 + 2m\omega^2 + n} \frac{ht_0}{\omega} \right] + \\ & + \frac{C_{66}\beta_{12} - C_{16}\beta_{11}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{rht_0}{\omega} - b' = 0, \\ & C_4 + \frac{A}{n} a + \frac{B}{n} b = 0, \\ & \alpha C_4 + \beta C_3 = 0, \\ & \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[ \frac{\alpha C_4 + \beta C_3}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{A}{n} a \frac{l}{r} + \frac{B}{n} b \frac{l}{r} \right] + \\ & + \frac{C_{66}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} a - \frac{C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} b + a' = 0, \\ & \frac{C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \left[ \frac{\alpha C_4 + \beta C_3}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{A}{n} \frac{l}{r} a + \frac{B}{n} \frac{l}{r} b \right] + \\ & + \frac{C_{11}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} b - \frac{C_{16}}{C_{11}C_{66} - C_{16}^2} \frac{l}{r} a + b' = 0, \end{aligned}$$

где  $a'$  и  $b'$  постоянные, которые появляются при интегрировании (4.7) и (4.8).

В заключение возвратимся к коэффициентам температурного расширения и температурного сдвига.

Если оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что одно из главных направлений упругости составляет угол  $\varphi$  с одной из координатных линий (фиг. 1), для коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_{12}$  получим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1^0 \cos^2 \varphi + \alpha_2^0 \sin^2 \varphi, \\ \alpha_2 &= \alpha_1^0 \sin^2 \varphi + \alpha_2^0 \cos^2 \varphi, \\ \alpha_{12} &= (\alpha_2^0 - \alpha_1^0) \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (4.19)$$



Фиг. 1.

где через  $\alpha_1^0$  и  $\alpha_2^0$  обозначены коэффициенты температурного расширения для главных направлений ортотропного материала.

Считаю своим долгом выразить благодарность С. А. Амбарцумяну за руководство настоящей и [5] работами.

## Է. Ա. Մոփոխում

ՊՏՏՄԱՆ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ (ՈՉ ՕՐԹՈՏՐՈՊ) ԳԼԱՆԱՅԻՆ  
ՔԱՂԱՆՔԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության առաջին մասում արվում է անիզոտրոպ, սիմետրիկ բևեռավորված պտտման դիսկային թաղանթի խնդրի լուծումը:

Ենթադրվում է, որ դլանի նյութը ենթարկվում է Հակի բնականացած օրենքին և ամեն մի կետում ունի ստաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն, որը զուգահեռ է միջին մակերևույթին:

Խնդրի սիմետրիկությանից (երկրաչափական և ստատիկ) ենթադրվում է, որ թաղանթը դեֆորմացիայի ենթարկվում է մնալով պտտման թաղանթ, որի հետևանքով բոլոր հաշվարկային մեծությունները միայն մեկ կոորդինատի ֆունկցիա են դառնում: Խնդրի լուծումը բերվում է նորմալ տեղափոխության նկատմամբ (1.8) զիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը: Դիտարկվում էն երկու խնդիրներ, որոնցից մասնավոր դեպքերում ստացվում են [3] և [10] արդյունքները:

Աշխատության երկրորդ մասում գիտարկվում են նույն խնդիրները ելնելով փոքր կորություն թաղանթների [2] գրվածքից: Այստեղ, ի տարբերություն առաջինի, սահքի  $S$  ճիգը բոլորովին բացակայում է, իսկ թվային հաշիվները ցույց են տալիս, որ երկու դեպքերում էլ հաշվարկային մեծությունները կարևոր կարվածքներում շատ քչով են տարբերվում:

Քննարկվում է նաև նույն անիզոտրոպ թաղանթի ջերմային մեկ խնդիր, որը բերվում է (4.9) հավասարմանը:

Վերջում, (4.19) արվում են ջերմային ընդարձակման և ջերմային սահքի գործակիցների ձևափոխության բանաձևերը, կոր նյութը օրթոտրոպ է, որի ստաձգականության գլխավոր առանցքները կոորդինատային առանցքների հետ անկյուն են կազմում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голдштейн А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
2. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных нологих оболочек. ПММ, т. XII, № 1, 1948.
3. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек, 1947.
5. Мовсисян Л. А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР (серия ФМН), том XI, № 4, 1953.
6. Амбарцумян С. А. Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения. Доклады АН АрмССР, т. IX, № 5, 1948.
7. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. Доклады АН АрмССР, т. XI, № 2, 1949.
8. Новожилов В. В. Теория тонких упругих оболочек. Судпромгиз, 1951.
9. Амбарцумян С. А. Длинные анизотропные оболочки вращения. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), IV, № 6, 1951.

10. Амбарцумян С. А. К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, укрепленных поперечными ребрами. Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1955.
11. Дехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
12. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. Journal of Applied Physics, 27, № 3, 1956.
13. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Известия АН АрмССР, т. V, № 6, 1957.
14. Медан Э. и Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Госиздат ф.-м. литературы, 1958.

А. Т. Дадаян, Г. В. Бадалян

## Магнитный спектрометр Алиханяна-Алиханова с двумя большими камерами Вильсона

### В в е д е н и е

Одним из основных методов исследования космических лучей является метод магнитного масс-спектрометра Алиханяна-Алиханова [1].

Обладая рядом существенных преимуществ перед другими методами (большая разрешающая способность по измерению импульса, определение знака заряда частиц и т. д.), магнитный масс-спектрометр стал рабочей установкой в ряде лабораторий по изучению космических лучей, в частности на высокогорной Арагацской станции Физического института АН Армянской ССР [2, 3, 4]. За последние 10—15 лет с помощью этого прибора достигнуты большие успехи в области физики космических лучей, как например, изучение спектра масс частиц, энергетические распределения космического излучения, взаимодействие частиц высоких энергий с веществом и т. д. За этот период магнитный масс-спектрометр претерпевал много конструктивных изменений и усовершенствований, благодаря чему область применения его значительно расширилась.

Для надежной идентификации частицы необходимо, наряду с импульсом, иметь точное значение ее пробега. Однако с помощью годоскопическо-улавливающего устройства не всегда возможно точное определение характера остановки частиц, а следовательно и пробега.

Существенным дополнением к магнитному масс-спектрометру оказался пропорциональный счетчик, впервые примененный Алиханяном, Харитоновым и Марикианом [5, 6]. Измерение ионизации давало возможность определить массу частицы независимым от пробега способом (ионизация-импульс).

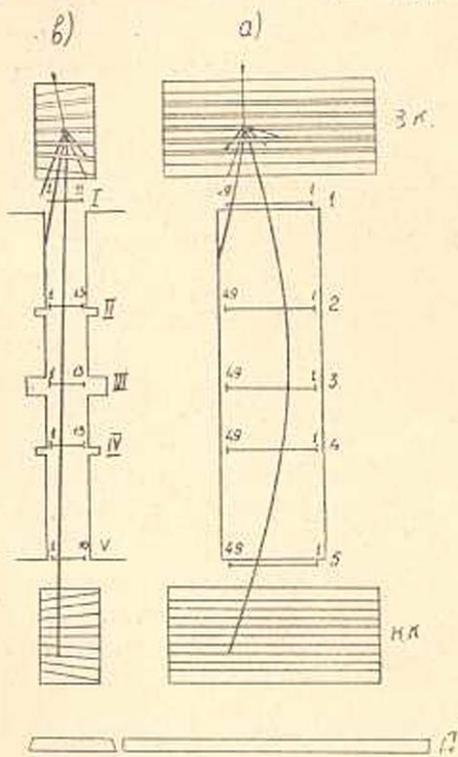
В 1953 г. в лаборатории „Большой Электромагнит“ Арагацской станции годоскопическо-улавливающее устройство под магнитным полем было заменено большой прямоугольной камерой Вильсона [7, 8, 9]. Тем самым существенно был улучшен отбор ионизационных остатков заряженных космических частиц в пластинках камеры.

В 1954 г. в этой же лаборатории над установкой была поставлена вторая камера Вильсона [10].

Новый прибор, — магнитный спектрометр с двумя камерами Вильсона — позволял не только идентифицировать частицу, исследовать характер ее остановки в пластинах нижней камеры и последующее поведение, но и получить сведения о том, откуда взялась частица, пришла ли она извне или же образовалась в результате какого-то процесса в веществе верхней камеры.

Непрерывная эксплуатация нового прибора в последующие годы дала ряд сведений относительно существования и происхождения частиц с массой 500—600  $m_e$ , о механизме генерации частиц в веществе верхней камеры и т. д.

В настоящей статье дается краткое описание нового прибора, его особенностей и общая эффективность. На фиг. 1 приведен разрез прибора в 2-х взаимноперпендикулярных проекциях.



Фиг. 1. Общий вид установки.

доскопической системы счетчиков („телескоп“), расположенной в этом поле [2, 9].

Основными узлами прибора являются:

а) собственно магнитный спектрометр;

б) нижняя камера Вильсона (Н. К.);

в) верхняя камера Вильсона (В. К.);

г) электронные схемы управления.

## 1. Магнитный спектрометр

Магнитный спектрометр большой разрешающей силы служит для измерения импульсов заряженных космических частиц. Он состоит из большого электромагнита, создающего в межполюсном пространстве размерами  $100 \times 30 \times 12$  см однородное магнитное поле вплоть до  $1:000$  эрст и го-

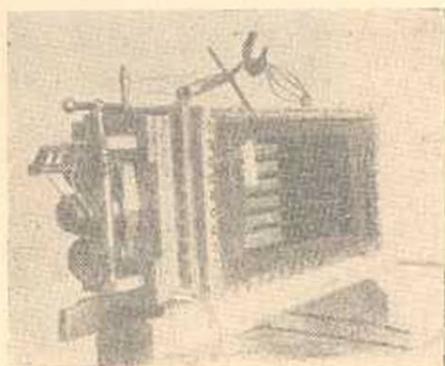
## 2. Нижняя камера

По выходе из магнитного поля частица попадает в расположенную вплотную под полюсами магнита большую прямоугольную камеру Вильсона размерами  $620 \times 280 \times 180$  мм, служащую для наблю-

дения остановок и взаимодействий заряженных частиц в пластинах внутри камеры. Прямоугольная форма и большой объем (более 30 л) камеры позволяют лучше охватывать телесный угол, вырезаемый телескопом. Камера пневматического типа с двухсторонним расширением, сконструирована и построена в ФИАН СССР Дайоном и Федоровым [8, 11].

### 3. Верхняя камера

До входа в магнитный спектрометр частица проходит через верхнюю прямоугольную камеру Вильсона таких же размеров как и нижняя. Эта камера конструктивно почти точно повторяет нижнюю камеру (фиг. 2). В отличие от нижней, в верхней камере в каждой расширительной головке подвижные решетки (перемещением которых достигается увеличение или уменьшение хода резиновой диафрагмы, а соответственно и степени расширения) двигаются самостоятельно, независимо друг от друга, в то время как в случае нижней камеры эти решетки сцеплены друг с другом передающим валиком, проходящим под камерой. Корпус камеры изготовлен в ФИАН СССР, а все остальные узлы — в Ереване, причем сборка вспомогательных блоков, а также окончательная наладка и введение в действие камеры произведены ФИАН Армянской ССР авторами, при участии Н. В. Шостакович.



Фиг. 2. Общий вид верхней камеры Вильсона.

В рабочей области камеры крышка и дно имеют толщину  $\sim 1,0$  см (латунь), а внутри рабочего объема установлены 5 свинцовых пластин толщиной 1 см каждая. Камера наполняется аргоном до избыточного давления 2 атм и рабочей смесью 25–30 см<sup>3</sup> (75% этилового спирта + 25% дистиллированной воды). Оптимальный режим работы камеры достигается при степени расширения  $\sim 1,06$ , при температурах: окружающей среды  $24 \pm 1^\circ$ , термостатированной воды (охлаждающей торцевые части рабочего объема камеры):  $19^\circ$ .

Освещение камеры производится аналогичным Н. К. образом „на просвет“ двумя импульсными лампами ИПК-600 (ИПС-500, ИФП-500), через которые разряжаются заряженные до  $\sim 3,5$  кВ конденсаторы емкостью каждый по  $\sim 100 \mu F$ . Фотографирование производится стереоскопическим фотоаппаратом с объективами „Юпитер-3“ и базой 80 мм на расстоянии 85 см от центра камеры.

На фигуре 3 приведен снимок, полученный на верхней камере.



Фиг. 3. Случай генерации частиц в ядерных расщеплениях в пластинках верхней камеры.

#### 4. Управление системой. Работа прибора

По назначению всю электронную систему можно разбить на ряд блоков:

- а) блок выделения совпадений и антисовпадений;
- б) блок управления телескопом;
- в) блок управления нижней камерой;
- г) блок управления верхней камерой;
- д) схема блокировки.

Все схемы в основном состоят из стандартных узлов и существенно не отличаются от схем, уже описанных в литературе [3, 9, 12].

Схема блокировки обеспечивает „выжидание“ установки за мертвое время камер ( $\sim 1$  мик).

Загорания неоновых лампочек телескопа и следы заряженных частиц в камерах Вильсона фотографируются отдельными фотоаппаратами на кинолентке.

Далее производится отбор кадров и их предварительная обработка, заключающаяся в „сшивании“ следов частиц: в спектрометре и камерах, определение ее импульса и пробега (в случае ионизационной остановки) и идентификация по ним массы покоя [9, 10]. Точность измерений существенно образом зависит от геометрических параметров установки и энергии частиц. Подробно об этих вопросах см. [3, 4, 9, 16].

### 5. Светосила

При физической обработке статистического материала большое значение имеет учет поправки на светосилу т. е. на вероятность регистрации частиц. Пренебрежение этим фактором может привести, подчас, к большим искажениям при физической интерпретации результатов эксперимента. Ряд методов расчета светосилы применительно к магнитным спектрометрам, описывался в литературе [3, 13, 14]. При новой конструкции нашего прибора постановка задачи светосилы несколько иная, а именно: определяется вероятность регистрации полных траекторий, т. е. траекторий частиц, которые не только регистрировались в телескопе, но и имеют полный след в освещенных областях Н. К. и В. К. В работе [15] приведен удобный графоаналитический способ расчета светосилы для нашего прибора. Расчеты приводят к следующим выводам:

а) светосила существенно зависит от импульса частицы, уменьшаясь с уменьшением импульса,

б) сильно влияет на светосилу место остановки и место появления частицы соответственно в рабочих объемах Н. К. и В. К.,

в) влияние углового распределения на светосилу частиц, падающих на телескоп, при больших импульсах незначительно и становится значительным при малых импульсах.

Для более подробного ознакомления с методикой расчета и кривыми, отсылаем читателя к вышеупомянутой работе [15].

### 6. Соображения по выбору оптимального магнитного поля

Пусть нас интересует определенный интервал импульсов  $\Delta p$ , причем  $p$  — средний импульс этого интервала. Согласно известной формуле

$$p = 300 H \rho. \quad (1)$$

Тогда очевидно, что при заданном  $p$  поле  $H$  и радиус траектории частицы  $\rho$  взаимно определяют друг друга. Однако с величиной радиуса противоположным друг другу образом связаны две важные характеристики:

а) точность измерения импульса  $T(\rho)$ ,

б) вероятность регистрации („светосила“)  $W(\rho)$  (см. § 5).

В поисках компромисса, введем новую функцию в виде произведения вышеуказанных величин:

$$F(\rho) = T(\rho) \cdot W(\rho) \quad (2)$$

(последнюю, не совсем удачно, можно называть „эффективным“ разрешением). Тогда задача сводится к отысканию того оптимального значения радиуса  $\rho_0$ , при котором нововведенная функция будет иметь максимум.

Из анализа ошибок измерения импульса известно [4]

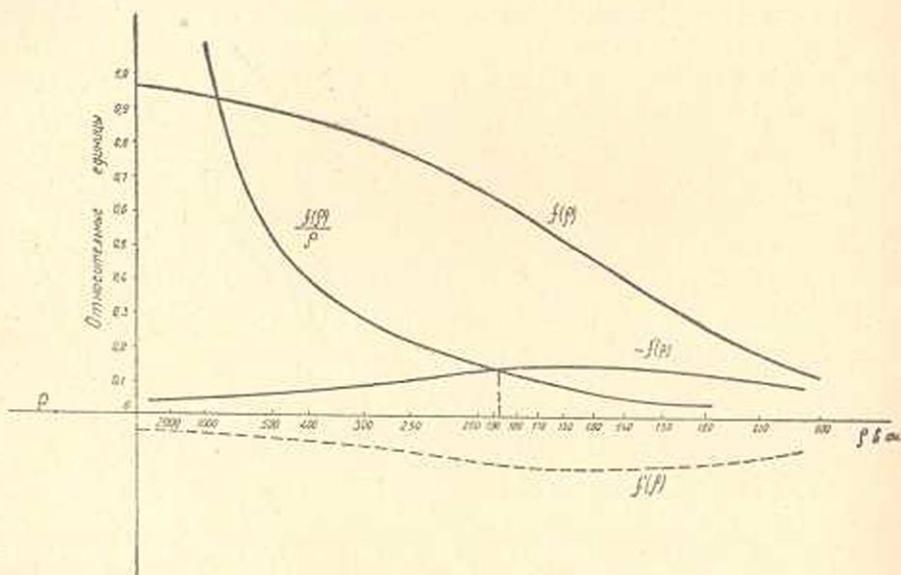
$$T = \frac{k}{p}, \quad (3)$$

тогда как функция вероятности регистрации  $W(p)$  дается в виде графика. Подставляя (3) в (2) и приравнявая производную функции  $F(p)$  нулю, получим

$$\frac{W(p_0)}{p_0} = -W'(p_0). \quad (4)$$

Решая уравнение (4) графически, мы находим  $p_0$ , а через него согласно (1) определяем искомое  $H_{\text{опт}}$ .

В одной серии измерений [10] нас интересовала наиболее эффективная регистрация частиц с массой 500—600  $m_e$ . В этом случае интервал импульсов  $\Delta p$  предопределялся интервалом пробегов в нижней камере, где данные частицы останавливаются ионизационным образом. Средний импульс этого интервала  $p = 2,5 \cdot 10^6$  эв/с. На фиг. 4



Фиг. 4. К определению оптимального магнитного поля.

дано графическое решение уравнения (4) для нашего прибора, причем за  $W(p)$  взята кривая светосилы, соответствующей остановкам частиц в серединной области рабочего объема Н. К. (см. § 5). Вычисление дает  $p_0 \approx 189$  эв/с, отсюда, согласно (1),  $H_{\text{опт}} = 4400$  эрст. Было выбрано  $H = 4500$  эрст.

## 7. Экспериментальная проверка эффективности установки

При помощи установки, описание которой приведено выше, производилась регистрация траекторий большого числа частиц космического излучения, испытавших остановку в Н. К..

Все частицы, зарегистрированные таким образом, просматривались по верхней камере, т. е. до входа в магнитный спектромер. При этом оказалось, что многие траектории прослеживаются от крышки до дна и с вычетом случаев генерации в крышке принадлежат частицам, идущим из воздуха. Ряд траекторий берет свое начало в пластинах камеры (например из звезды) — это случаи локальной генерации (фиг. 3). Имеются также траектории, которые выходят из неосвещенных зон камеры, или же благодаря различным дефектам снимка (туман, пустой кадр, наложение кадров, уход частицы в стекло и т. д.) не могут быть идентифицированы по верхней камере.

Для однозначного вывода важно, чтобы след в В. К. можно было проследить до крышки камеры (см. о светосиле [15]). Таким образом зарегистрированные по Н. К. частицы не всегда (в основном из-за боковых неосвещенных зон) имеют след в В. К., причем эффективность по В. К. существенно зависит от импульса частицы: она значительна для тяжелых частиц и очень мала для „мягких“ мезонов, большинство которых выходит из торцевых частей В. К. и сначала неизбежно проходит через неосвещенные области.

Мы рассмотрели эффективность прохождения следа в освещенной зоне В. К. большого числа ( $\sim 2000$ ) протонов и мезонов, ионизационно остановившихся в интервале пробегов 1,2–5,4 см Pb Н. К.

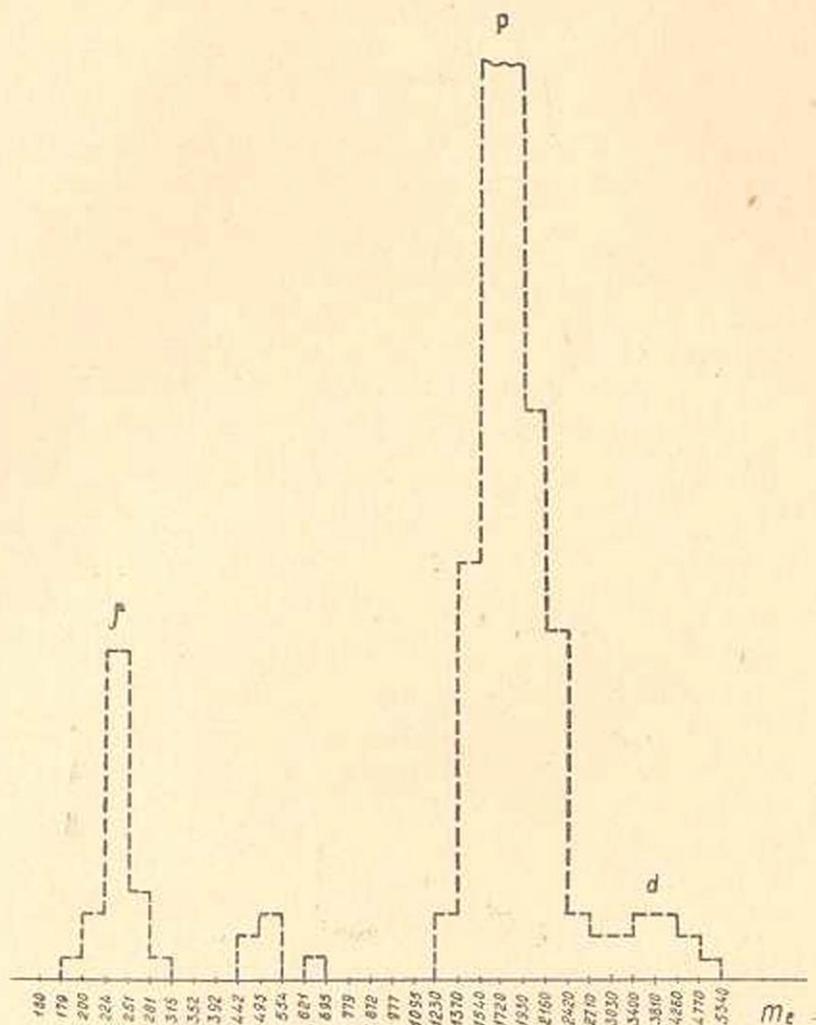
В таблице I вместе с экспериментально полученными цифрами приведены ожидаемые эффективности, определенные на основании расчетов светосилы.

Таблица I

Тип частицы	Расчетная эффективность по В. К.	Экспериментальная эффективность по В. К.
Легкие мезоны ( $\mu + \pi$ )	0,21	0,22
Протоны	0,895	0,90

Если учесть также невозможность использования ряда полученных снимков В. К. из-за тумана в камере и т. д., то фактически эффективность по В. К. для протонов составит  $\sim 80\%$ , и для легких мезонов  $\sim 19\%$ .

Об общей эффективности работы нового прибора можно судить по ряду работ выполненных за последние годы [10, 16–18]. В качестве иллюстрации мы приведем данные, заимствованные из работы [10] полученные на новой установке. На фиг. 5 приведен спектр масс частиц идущих из воздуха (простреливающих всю толщу В. К.). Как видно в спектре не присутствуют  $\pi$  и  $k$ -мезоны, которые, вследствие очень короткого времени жизни, почти отсутствуют в равновесном потоке космического излучения. На фиг. 6 приведен спектр частиц, локально генерированных в ядерных взаимодействиях в пластинах В. К. Из рисунка видно, что в спектре присутствуют  $\pi$ ,  $k$ -ме-

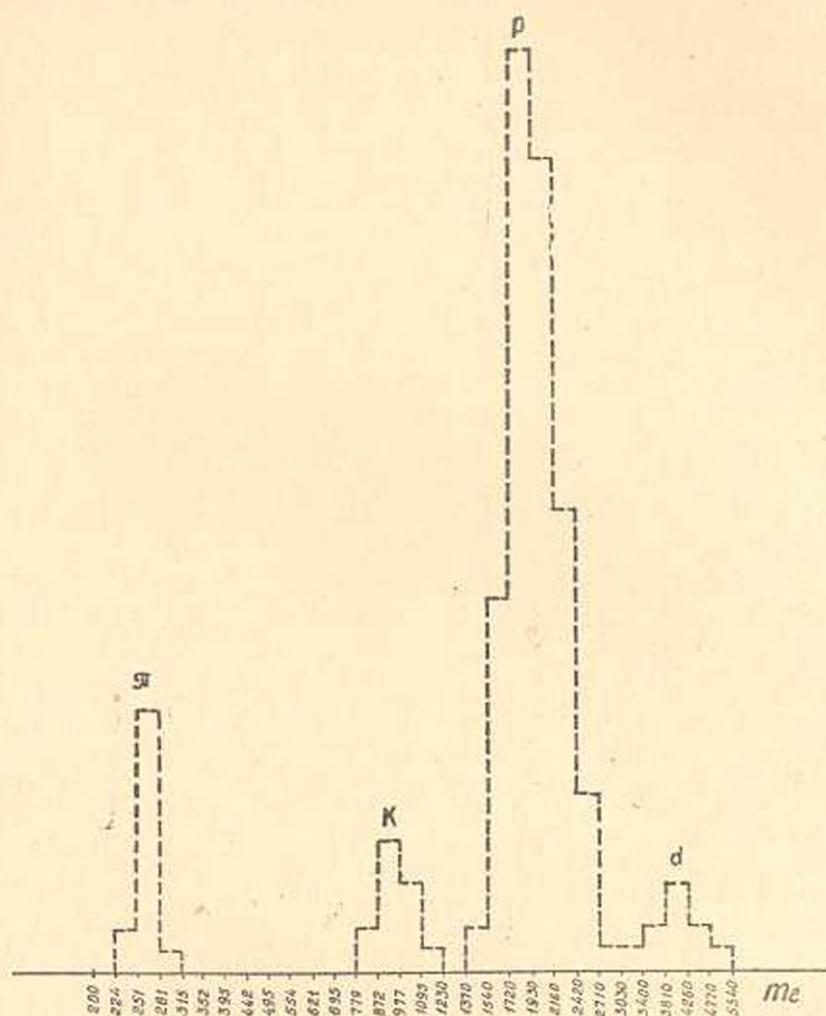


Фиг. 5. Спектр масс идущих из воздуха частиц  
(без поправки на светосилу).

зоны, протоны, дейтроны и т. д., но отсутствуют  $\rho$ -мезоны и частицы с массой 500–600  $m_e$ . Этот факт говорит о том, что, повидимому, последние частицы не рождаются в ядерных взаимодействиях, а являются долгоживущим продуктом распада других нестабильных частиц.

### З а к л ю ч е н и е

За период своего существования, новый прибор претерпевал ряд усовершенствований и дополнений. В частности Харитоновым, Багдасаряном и Марикьяном разработан и осуществлен новый 5-слойный пропорциональный счетчик [19], позволяющий, параллельно с измере-



Фиг. 6. Спектр масс частиц, генерированных в веществе верхней камеры (без поправки на светосилу).

нием импульса и пробега частицы, с большой точностью измерять ионизацию. Однако, использованы далеко не все возможности нового прибора.

В настоящее время в лаборатории разрабатывается схема более рационального включения антисовпадений с тем, чтобы повысить эффективность регистрации ядерных расщеплений высоких энергий. Очень существенным будет переход к 2-слойным координатным рядам счетчиков, а также переход к большим напряженностям магнитного поля и т. д. Комплекс этих мероприятий даст возможность ввести в тематику физических исследований новые задачи, изучить ядерные взаимодействия частиц с энергией до  $\sim 10^{11} \text{ев}$ .

Авторы глубоко благодарны проф. А. И. Алиханяну, под руководством и при активном содействии которого была осуществлена но-

вая установка, а также Н. В. Шостакович и М. И. Дайону за ценную помощь при наладке новой аппаратуры.

Физический институт  
Академии наук Армянской ССР

Поступила 25 III 1959

Ս. Տ. Գաղաթյան, Լ. Վ. Բաղաթյան

## ԱՆԻՒԱՆՅԱՆ-ԱՆԻՒԱՆՈՎԻ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՍՊԵԿՏՐՈՍԵՏՐԸ ՎԻՍՈՐՆԻ ԵՐԿՈՒ ՄԵԾ ԿԱՄԵՐԱՆԵՐԻ ՇԵՏ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում նկարագրվում է կոսմիկական հասադայթների ուսումնասիրման Արագածի կայանում զործող նոր, կատարելագործված սարքավորումը՝ մագնիսական սպեկտրոմետրը՝ Վիսոնի երկու մեծ աղղանկյուն կամերաների հետ միակցված:

Այդ զործիքի առավելությունը նախորդների նկատմամբ այն է, որ հնարավոր է գիտել ոչ միայն լիցքավորված մասնիկների կանդաուսները մագնիսական սպեկտրոմետրի ասկ սեղավորված կամերայում, այլև, շնորհիվ վերևում գրված երկրորդ կամերայի, նրանց վարքը (օրինակ՝ ծնունդը) մինչև մագնիսական դաշտ մտնելու:

Մանրամասն նկարագրված են վերի կամերայի կոնստրուկտիվ և աշխատանքային առանձնահատկությունները, քննարկված է նոր սարքավորման լուսավոր և ալյու:

Վերջում բերվում են նոր զործիքի էֆեկտիվությունը ցուցադրող մի շարք էքսպերիմենտալ արդյունքներ:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алиханян А. И., Алиханов А. И., Вайсберг А. О. О существовании в космических лучах положительных и отрицательных частиц с массой, большей массы мезона. ЖЭТФ, 18, 301, 1948.
2. Алиханян А. И., Дадаян А. Т., Шостакович Н. В., Аюбян Г. С., Дайон М. И. О новом магнитном спектрометре. ДАН ССР, 10, 37, 1951.
3. Харитонов В. М. Кандидатская диссертация, 1948.
4. Кочарян Н. М. Докторская диссертация, 1955.
5. Харитонов В. М., Мариам Г. А., Алиханян А. И. Определение ионизирующей способности частиц с массой, промежуточной между массой мезона и протона. ДАН СССР, 80, 201, 1952.
6. Алиханян А. И., Харитонов В. М. О частицах с массой, промежуточной между массой мезона и протона. ДАН, 85, 293, 1952.
7. Алиханян А. И., Кириллов-Угрюмов В. Г., Шостакович Н. В., Федоров В. М. Магнитный масс-спектрометр в сочетании с камерой Вильсона. ДАН СССР, 1953, 92, 235.
8. Дайон М. И., Федоров В. М. Большая прямоугольная камера Вильсона с двусторонним расширением. ЖЭТФ, т. XXV, 771, 1955.
9. Дайон М. И., Федоров В. М., Мерзон Г. И., Шостакович Н. В. Магнитный спектрометр Аляханяна-Алиханова в сочетании с большой прямоугольной камерой Вильсона. ПТЭ, № 1, 1957.

10. Алиханян А. И., Шостакович Н. В., Бадалян А. Т., Федоров В. М., Дерязин Б. Н. О спектре масс заряженных частиц космического излучения. ЖЭТФ, 31, 953, 1956.
11. Федоров В. М., Мерзон Г. И., Дайон М. И. О применении метода фотометрирования для оценки ионизирующей способности частиц в камере Вильсона. Изв. АН СССР, XIX, 750, 1955.
12. Кириллов-Угрюмов В. Г. Диссертация, Москва, 1953.
13. Кочарян Н. М., Кайтмазов С. Д. Расчет светогилы магнитного масс-спектрометра. Изв. АН АрмССР, сер. ФМЕТ наук, 7, № 2, 1954.
14. Саакян Г. С. О светосиле магнитного спектрометра. Изв. АН АрмССР, сер. ФМЕТ наук, 7, № 4, 1954.
15. Бадалян Г. В. Вероятность регистрации заряженных частиц в системе магнитного масс-спектрометра с двумя камерами Вильсона. Изв. АН АрмССР, сер. ФМЕТ наук, 10, 75, 1957.
16. Бадалян Г. В. Наблюдение быстрых дейтронов в системе магнитного спектрометра с двумя камерами Вильсона. Изв. АН АрмССР, сер. ФМЕТ наук, 11, 29, 1958.
17. Бадалян Г. В. Исследование быстрых дейтронов на высоте 3200 м. над уровнем моря. ЖЭТФ, 35, 303, 1958.
18. Бадалян Г. В. Генерации быстрых дейтронов в свинце и меди нуклонной компонентой космического излучения. Изв. АН АрмССР, сер. ФМЕТ наук, 11, № 6, 1958.
19. Багдасарян Л. С., Харитонов В. М., Марикян Г. А. Многоканальный амплитудный анализатор импульсов с логарифмической характеристикой. Изв. АН АрмССР, сер. ФМЕТ наук, 11, 79, 1958.

Ф. Р. Арутюнян

## Относительно измерения углов в камере Вильсона

При исследовании взаимодействия элементарных частиц с веществом, очень часто требуется знание углов, на которые отклоняются частицы при том или ином акте взаимодействия. Если взаимодействие наблюдается в пластинах вещества, расположенных внутри камеры Вильсона, то измерение пространственного угла является весьма кропотливой процедурой, отнимающей очень много времени, так как число таких углов для отдельных задач может достигать нескольких десятков тысяч. Кроме того, пространственный угол может быть измерен с небольшой точностью и поэтому часто измеряют просто проекцию угла на плоскость фотографирования. Углы рассеяния в пластинах измеряются по фотографиям следов частиц в камере Вильсона при помощи специальных угломеров. Точность в измерении углов ограничивается, в основном, искажениями, связанными с работой камеры Вильсона (диффузность следов, турбулентные завихрения и т. п.). Но при исследовании рассеяния, углы измеренные таким образом нельзя непосредственно сравнивать с теоретической кривой рассеяния, которая обычно выводится для проекций углов рассеяния на плоскость, проходящую через первоначальную траекторию\*.

Проекция угла на плоскость фотографирования в общем случае отлична от проекции угла на плоскость проходящую через первоначальную траекторию и эти углы равны лишь в том случае, если траектория до акта рассеяния параллельна плоскости фотографирования.

Однако, первоначальная траектория составляет с плоскостью фотографирования некоторый угол  $\gamma$ , который в многопластинных камерах Вильсона, если частица входит в камеру вертикально, обусловлен рассеянием частицы в предыдущих пластинах. Это обстоятельство приводит к тому, что измеренный на фотографии угол оказывается большим, чем проекция угла на плоскость, проходящую через первоначальную траекторию.

Кроме того, если частица проходит в боковой части камеры на достаточно большом расстоянии от оптической оси фотообъектива

\* На это обстоятельство обратил наше внимание М. И. Дайон.



$$\operatorname{tg} \theta_2 = \operatorname{tg} \xi_2 \pm \delta_2, \quad \delta_1 = \frac{r_2 l_2}{a_2 D_2}. \quad (16)$$

Определив с помощью стереокомпаратора координаты входа и выхода частицы из пластины, можно для каждого угла рассеяния в отдельности определить величину  $\Delta_1 = \theta_1 - \psi$ , которая в зависимости от угла  $\beta$  (фиг. 1) может быть как положительной, так и отрицательной.

Пусть проекция траектории на плоскость перпендикулярную к плоскости фотографирования, составляет с последней угол  $\gamma$ , а проекцию угла рассеяния на плоскость проходящую через первоначальную траекторию обозначим через  $\Lambda$ . Угол  $\Lambda = \lambda_1 \pm \lambda_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются соответственно проекциями углов  $\xi_1$  и  $\xi_2$  на плоскость, проходящую через первоначальную траекторию. Тогда

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \xi_1 \cos \gamma, \quad (2a)$$

и

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \operatorname{tg} \xi_2 \cos \gamma. \quad (2b)$$

Зная координаты точек траектории, можно определить угол  $\gamma$ , а следовательно, и угол  $\Lambda = \lambda_1 \pm \lambda_2$  для каждого случая рассеяния в отдельности. При  $\gamma$  отличном от нуля, угол  $\Lambda$  всегда меньше, чем угол  $\psi$ , то-есть  $\Lambda < \psi$ .

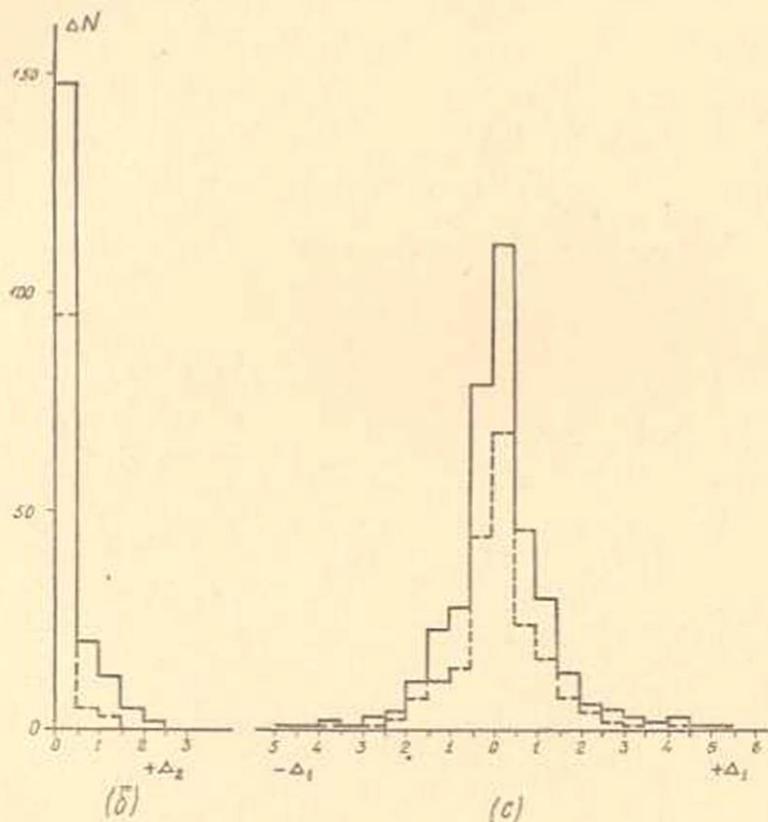
При исследовании рассеяния протонов,  $\mu$ - и  $\pi$ -мезонов с помощью магнитного масс-спектрометра в сочетании с многопластинными камерами Вильсона, результаты которых изложены в работах [1] и [2], траектории мезонов из-за большой кривизны их в магнитном поле попадают в боковые части камеры и, кроме того, рассеиваются в пластинах на сравнительно большие углы, вследствие чего, для них имеет место указанное выше несоответствие углов. С помощью стереокомпаратора, для мезонов содержащих углы рассеяния  $\theta_1 < 20^\circ$ , для каждого в отдельности определялись координаты точек пересечения траектории с пластинами, имея которые вычислялись  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\gamma$ . Затем по вышеприведенным формулам вычислялись углы  $\psi$  и  $\Lambda$ .

Было исследовано 187 углов рассеяния мезонов с  $\theta_1 > 20^\circ$ . Отметим, что величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , а следовательно и угол  $\psi$ , зависят от того, снимок которого из двух фотообъективов используется (различные значения  $l$  для разных фотообъективов). Углы  $\psi$  для всех 187 случаев вычислялись для одного и другого фотообъективов отдельно. На фиг. 2 и 3 соответственно приведены распределения величин  $\Delta_1 = \theta_1 - \psi$  и  $\Delta_2 = \psi - \Lambda$  для всех углов  $\theta_1 > 20^\circ$  и для углов в интервале  $\theta_1 = 20^\circ - 25^\circ$  отдельно, причем, распределение по  $\Delta_1$  приводится для обоих фотообъективов вместе. Из этих распределений видно, что величины  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  по-видимому мало зависят от абсолютного значения угла рассеяния.

Из распределения по  $\Delta_1$  видно, что  $\Delta_1$  может быть как положительным, так и отрицательным. Среднее значение  $\langle \Delta_1 \rangle$  положительное, что указывает на то, что „невыгодная геометрия“ в среднем приводит к завышению углов, непосредственно измеренных на фото-

графин. То обстоятельство, что траектория составляет с плоскостью фотографирования некий угол  $\gamma$ , приводит только к завышению измеренных углов.

Для углов  $\theta_p < 20^\circ$  такое исправление каждого угла в отдельности является слишком громоздкой процедурой, причем неоправданной, ибо точность измерения углов с помощью стереокомпаратора мала ( $\sim 5^\circ$ ). Поэтому, для углов  $\theta_p < 20^\circ$ , которые измерялись невзирая на то, снимок которого из двух фотообъективов используется, систематическое завышение углов непосредственно измеренных на фотографии —  $\langle \Delta \rangle$  определялось из распределений по  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  для углов в интервале  $\theta_p = 20^\circ - 25^\circ$  (фиг. 2 и 3), которое равно  $\langle \Delta \rangle = -0.45^\circ$ . На эту величину были уменьшены все углы  $\theta_p < 20^\circ$ .



Фиг. 2.

Фиг. 3.

Протоны, из-за малой кривизны их траекторий в магнитном поле, попадают в основном в центральную часть камеры и идут под небольшими углами  $\gamma$  к плоскости фотографирования (из-за малых углов рассеяния). Поэтому, все углы рассеяния для протонов были уменьшены на величину  $\langle \Delta \rangle$ .

Подобное исправление углов рассеяния необходимо не только для используемой нами экспериментальной установки. Рассеяние ча-

стиц очень часто исследуется с помощью только многопластинных камер Вильсона, где помимо рассеяния частиц в пластинах вышедших над исследуемой, частицы уже входят в камеру под углами к плоскости фотографирования, отличными от нуля. Если, кроме того, фотоаппарат расположен сравнительно близко к камере, то подобное исправление углов обязательно.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук М. И. Дайону за участие в обсуждении настоящей работы, а также Б. Н. Лучкову, принявшему участие в обработке экспериментальных данных.

Физический институт  
Академии наук Армянской ССР

Поступила 1 XII 1958

### Ֆ. Ռ. Հարությունյան

## ՎԻՍՈՆԻ ԿԱՄԵՐԱՅՈՒՄ ԱՆՎՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶԱՓՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

*Լիցքավորված մասնիկների ցրումը բազմաթիվեղանի Վիլսոնի կամերայում ուսումնասիրելու ժամանակ, լուսանկարի վրա անմիջականորեն չափված անկյունների պրոյեկցիաները չի կարելի համեմատել ցրման տեսական կորի հետ: Ներկա աշխատության մեջ մշակված է լուսանկարի վրա չափված անկյունների պրոյեկցիաներից դեպի ցրման կորի հետ անմիջականորեն համեմատող անկյունները անցնելու մեթոդ:*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Ф. Р. Исследование многократного рассеяния протонов. ЖЭТФ, 34, 800 (1958).
2. Алиханян А. И., Арутюнян Ф. Р. Рассеяние  $\mu$ -мезонов в свинце ЖЭТФ (в печати 1958).

С. Р. Месчян

### О влиянии скорости загрузки на деформативные свойства связных грунтов

Исследованиями К. Лангера [1] установлено, что уплотнение грунтов ненарушенной структуры в компрессионных приборах в значительной степени зависит от скорости загрузки образцов. Н. Я. Денисов [2] указывает на влияние темпов повышения давления на уплотняемость глинистых плест. О влиянии скорости загрузки на компрессионные свойства грунтов указывает и М. Н. Гольдштейн [3].

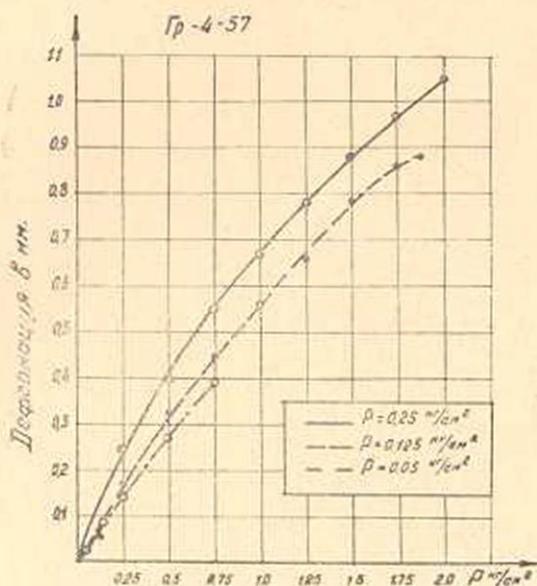
В целях выяснения вопроса о влиянии скорости загрузки на деформативные свойства связных грунтов нарушенной структуры, нами исследовано влияние указанного фактора на величину полной деформации, деформации ползучести и на изменимость модуля мгновенной деформации при ступенчатом нагружении образцов в компрессионном приборе. Исследованы также зависимость между мгновенными деформациями и напряжениями при малых значениях последних и влияние указанного выше фактора на „старение“ [4] грунтов при уплотнении их.

Рассмотрим результаты экспериментального исследования влияния скоростей загрузки на величину полной деформации образцов при их нагружении ступенями по 0.25, 0.125 и 0.05 кг/см<sup>2</sup> в сутки. Образцы испытывались в течение 15 дней с доведением внешних уплотняющих нагрузок до 3.75, 1.875 и 0.75 кг/см<sup>2</sup> соответственно.

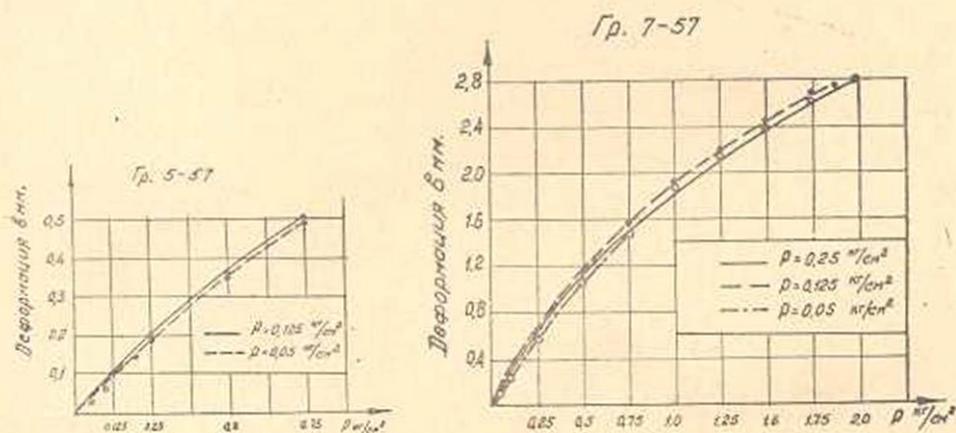
Испытания образцов проводились в приборах нашей конструкции [4], при высоте 20 мм, диаметре 70 мм. Для исключения влияния неровностей поверхности образцов, все образцы предварительно уплотнялись в течение одних суток нагрузками 0.25 кг/см<sup>2</sup>. Учитывая то обстоятельство, что приращение деформации от предварительно уплотняющей нагрузки после первых суток загрузки было незначительным, мы пренебрегли его влиянием на результаты испытания образцов заданными скоростями.

Деформации и напряжения образцов грунта перед испытанием заданными скоростями были приняты нулевыми.

На фиг. 1, 2 и 3 приведены графики кривых зависимостей между напряжениями и полными деформациями образцов трех различных грунтов, данные об основных физических свойствах которых сведены в таблицу 1. На фиг. 4 приведены схемы их загрузки.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

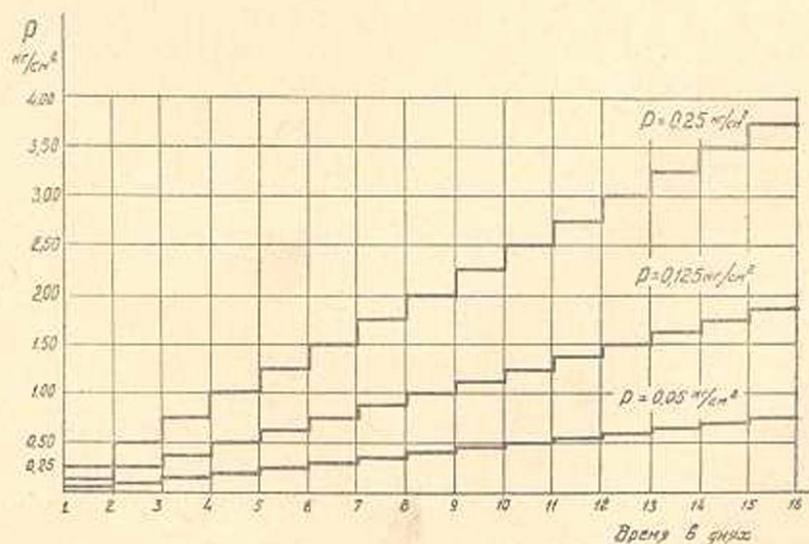
Фиг. 3.

Рассматривая графики кривых зависимостей между напряжениями и полными деформациями (фиг. 2, 3), замечаем, что кривые, определенные испытанием образцов разными скоростями загрузки, отличаются друг от друга незначительно. Следовательно, скорость загрузки практически не влияет на величину деформации образцов грунтов 5—57 и 7—57. Образцы грунта 4—57 ведут себя несколько иначе. Как показывают результаты экспериментов (фиг. 1), в этом случае значения деформации образцов в некоторой степени зависят от скорости их загрузки.

Влияние скорости загрузки на процесс деформирования грунта 4—57 можно объяснить упрочнением грунта за счет возникновения

Таблица 1

№№ опытов	Количество испытаний образцов в шт	Удельный вес в г/см <sup>3</sup>	Объемный вес в г/см <sup>3</sup>	Влажность в %	Пределы пластичности			Верхняя ступень пластиц., на-внешн. на-гр. в кг/см <sup>2</sup>
					граница теку-чести	граница пла-стичн.	число пла-стичн.	
<b>Грунт 4—67 (актинская глина)</b>								
4 174—175	2	2,70	1,79	40,8	41,2	23,2	18,0	0,25
4 176—177	2		1,79	40,8				0,125
4 178—179	2		1,80	40,8				0,05
<b>Грунт 5—57 (диатомитовый грунт)</b>								
5 144—146	3	2,59	1,62	56,9	58,10	32,23	25,87	0,125
5 148—149	2		1,61	56,9				0,05
<b>Грунт 7—57 (ново-швейцарская глина)</b>								
7 192—195	2	2,63	1,59	61,45	64,37	30,45	33,92	0,25
1 194—195	2		1,58	61,45				0,125
7 196—197	2		1,58	61,45				0,05



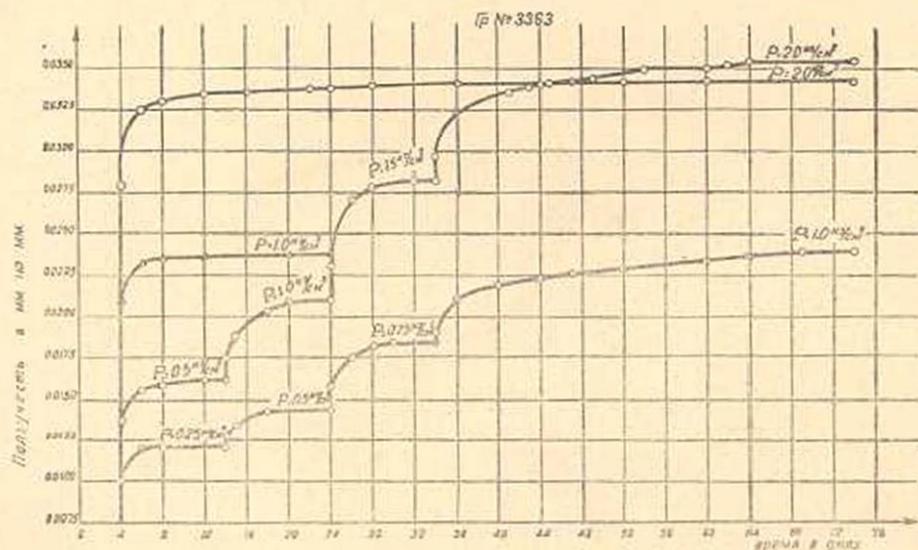
Фиг. 4.

новых (тиксотропных) связей (сцепление упрочнения), которые и оказывают влияние на ход процесса деформирования [5].

Для выяснения влияния тиксотропного упрочнения (сцепление упрочнения) на деформативные свойства связных грунтов нарушенной структуры, воспользуемся графиками ползучести трех других грунтов (таблица 2) нарушенной структуры, определенными\* при их нагружении ступенчато приложенными нагрузками по 0,25, 0,5, 1,0 и 2,0 кг/см<sup>2</sup> через 10–32 сутки (фиг. 5, 6, 7).

Таблица 2

Лаб. №№ грунтов	Удельн. вес $\gamma$ /см <sup>3</sup>	Объемный вес в испы- тан. образ- цах $\gamma$ /см <sup>3</sup>	Влажность испытан. образцов W %	Пределы пластичности		
				граница теку- чести	граница пластич- ности	число пластич- ности
3363	2,69	1,87	34,6	46,8	26,4	20,4
3371	2,69	1,77	43,6	40,4	24,1	16,3
34.4	2,76	1,84	34,7	—	—	—



Фиг. 5.

Из приведенных на фиг. 5, 6 и 7 графиков следует, что между деформациями ползучести образцов, нагруженных разными скоростями, при значении нагрузки 0,5 кг/см<sup>2</sup>, наблюдается расхождение. А именно: деформации ползучести образцов, нагруженных ступенями по 0,25 кг/см<sup>2</sup>, меньше, чем деформации ползучести, которые определя-

\* Опыты выполнены нами в Институте стройматериалов и сооружений АН Армянской ССР в 1955 г.

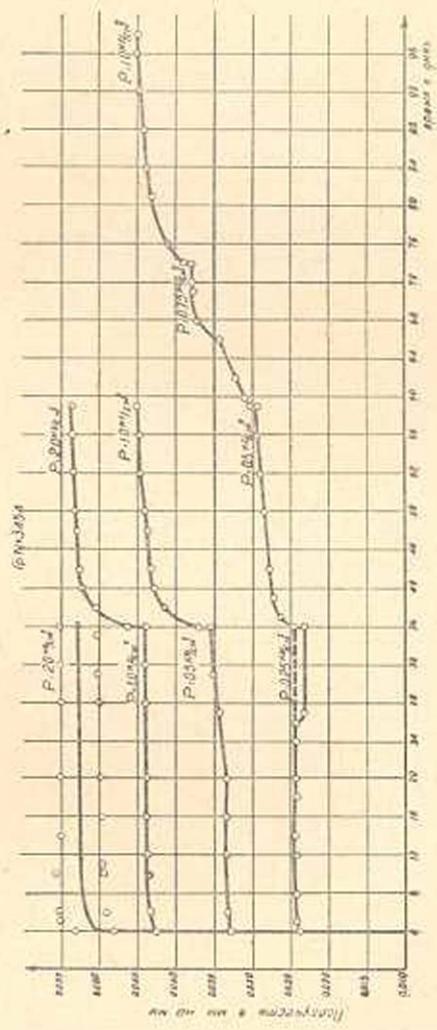
лись приложением только одной ступени нагрузки  $0.5 \text{ кг/см}^2$ . Что же касается более высоких значений нагрузок ( $1.0\text{--}2.0 \text{ кг/см}^2$ ), то в этом случае расхождение между указанными деформациями не наблюдается.

Процесс деформирования образцов грунтов 3363, 3371 и 3454, загруженных скоростями  $0.25, 0.5, 1.0$  и  $2.0 \text{ кг/см}^2$  в  $10\text{--}32$  сутки, можно объяснить следующим образом. При загрузке образцов ступенями по  $0.25 \text{ кг/см}^2$  и длительном выдерживании их под первыми ступенями нагрузок имеет место упрочнение грунта в результате проявления новых структурных связей (сцепление упрочнения) [5]. Когда на упрочненный образец прикладывается вторая ступень нагрузки в размере  $0.25 \text{ кг/см}^2$ , то в этом случае, благодаря наличию структурных связей, последние оказывают определенное влияние на процесс деформирования от данной ступени нагрузки. Влияние структурных связей проявляется в уменьшении деформации ползучести по сравнению с деформациями ползучести образцов, загруженных нагрузками  $0.5 \text{ кг/см}^2$ . Поэтому и имеет место указанное выше расхождение между конечными значениями деформации ползучести при одинаковых значениях нагрузок в размере  $0.5 \text{ кг/см}^2$ . Однако, при дальнейшем загрузке образцов, после того как напряжения увеличиваются настолько, что они в состоянии разрушить ранее образованные структурные связи, деформации образцов, загруженных разными скоростями, при одинаковых значениях нагрузок становятся равными. При загрузке образцов более высокими значениями ступеней нагрузок ( $0.5 \text{ кг/см}^2$  и более), ввиду сравнительно небольших значений величин сил структурного сцепления и их разрушения в процессе уплотнения указанными нагрузками, они не могут повлиять на процесс деформирования грунтов и поэтому как величины ступеней нагрузок, так и скорость загрузки их не оказывают влияния на конечные значения деформации [6, 7].

Деформации образцов грунта 4—57 (фиг. 1) протекают в соответствии с вышеизложенными положениями, только с той разницей, что в данном случае не имеет места разрушение структурных связей и поэтому в рассматриваемых интервалах нагрузок значения деформации не выравниваются. Что же касается деформирования образцов гр. 5—57 и 7—57 (фиг. 2 и 3), загруженных по  $0.25, 0.125$  и  $0.05 \text{ кг/см}^2$  в сутки, то можно сказать, что, ввиду сравнительно небольшой продолжительности действия ступеней нагрузок, большой пористости (влажности) и сравнительно больших скоростей деформирования, они, за счет возникновения структурных связей, не упрочняются настолько, чтобы могли оказывать существенное влияние на ход их деформирования.

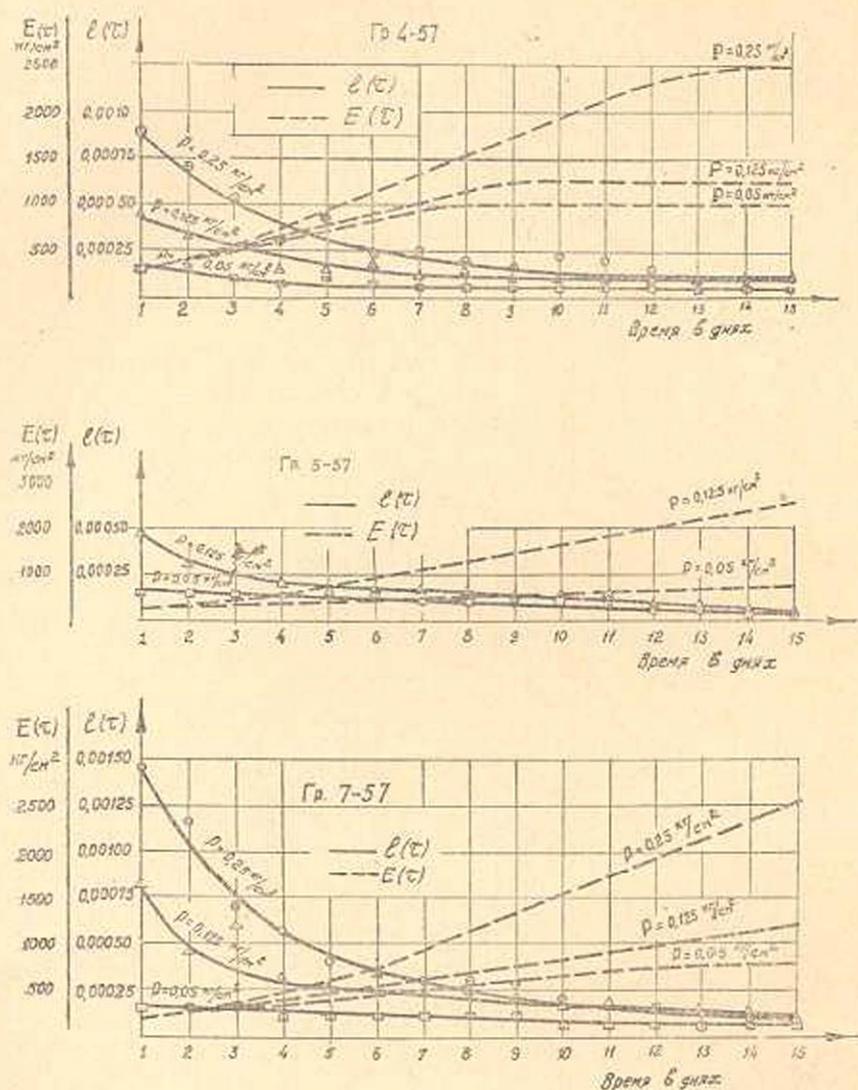
Резюмируя вышесказанное, можно отметить, что деформативные свойства образцов грунта нарушенной структуры зависят как от величины ступеней нагрузок, продолжительности их действия, так и от способности грунта к тиксотропному упрочнению.





Фиг. 7.

Рассмотрим результаты экспериментального исследования изменчивости мгновенных деформаций и деформаций ползучести образцов грунтов 4—57, 5—57 и 7—57 (таблица 1, фиг. 8, 9) при их уплотнении ступенчато-приложенными нагрузками, со скоростями 0,25, 0,125 и 0,05 кг/см<sup>2</sup> в сутки. Аналогичные опыты нами проводились и рань-



Фиг. 8.

ше [4], однако, тогда эти исследования были выполнены при нагружении только ступенями 0,25 кг/см<sup>2</sup>, а нагрузки ограничивались четырьмя или пятью ступенями.

Из графиков кривых изменчивости мгновенных деформаций  $l(t)$  и деформаций ползучести  $\varphi(t)$  следует, что, по мере перехода от одной ступени нагрузки к другой, в результате уплотнения образцов

(„старение“). имеет место постепенное уменьшение как мгновенных, так и ползучих деформаций, причем указанные выше деформации и, постепенно уменьшаясь, стремятся к некоторой постоянной величине, а скорость уменьшения этих деформаций падает с уменьшением скоростей их загрузки.

Кривые изменчивости мгновенных деформаций и деформаций ползучести образцов (фиг. 8, 9), независимо от скоростей их загрузки, с достаточной точностью могут быть описаны выражениями (1) и (2) теории упруго ползучего тела [8] (кривые, вычисленные выражениями (1) и (-), показаны пунктирами).

$$l(\tau) = l_0 + \frac{K_0}{\tau}; \quad l(\tau) = l_0 + \frac{K_0}{\tau^2 + D_0}, \quad (1)$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}; \quad \varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau^2 + B_1}, \quad (2)$$

где  $C_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $l_0$ ,  $K_0$  и  $D_0$  — параметры,  $\tau$  — „возраст“ материала.

На основании зависимостей (2) изменчивости мгновенных деформаций, вычислены значения модулей мгновенных деформаций по выражению (3)

$$E(\tau) = \frac{P}{l(\tau)}, \quad (3)$$

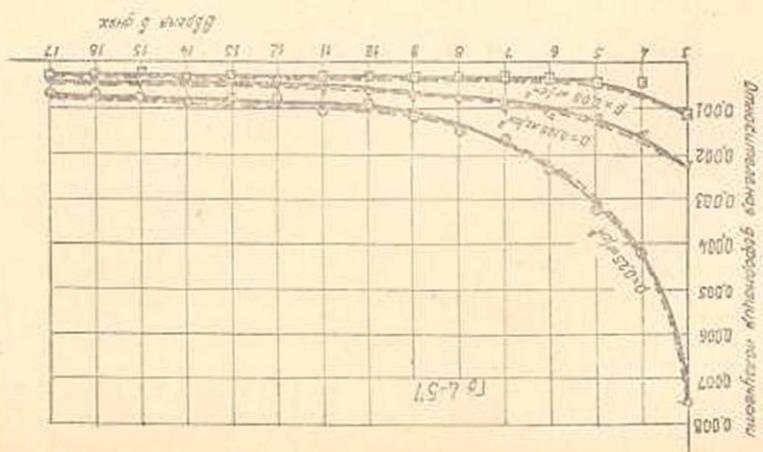
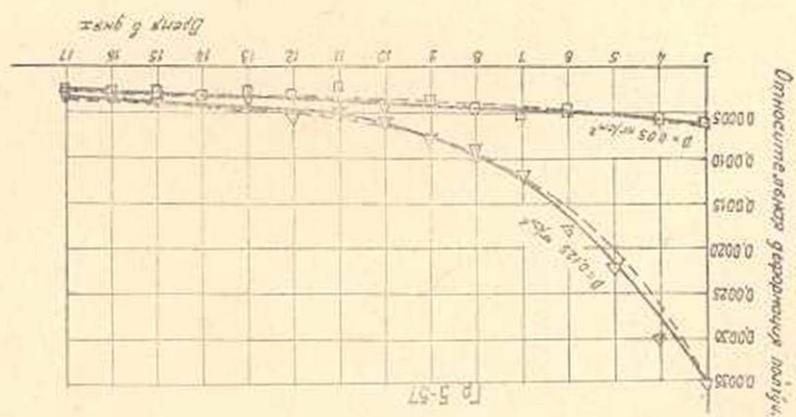
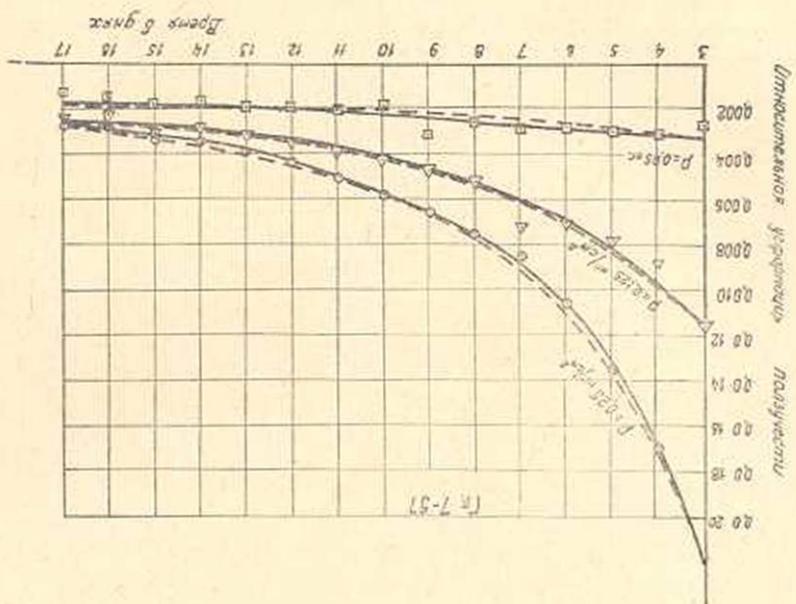
где  $P$  — величина ступени нагрузки в  $кг/см^2$ .

Кривые  $E(\tau)$ , построенные на основании выражения [3], показаны на графиках фиг. 8.

Из графиков, приведенных на фиг. 8, следует, что как мгновенные деформации, так и их модули, по мере уплотнения образцов, стремятся к некоторой постоянной величине. Постоянство значений указанных выше величин наступает тогда, когда приращения деформации уплотнения от приращения внешних нагрузок принимают такие значения, которые не вносят существенных изменений в механические свойства грунтов.

Из приведенных на фиг. 8 кривых  $E(\tau)$  образцов грунта 7—57, также следует, что при одинаковых значениях общих деформаций, наблюдается увеличение модулей мгновенных деформаций по мере уменьшения величин ступеней нагрузок. Причем, если значения модулей мгновенных деформаций определенных приложением ступеней 0.25 и 0.125  $кг/см^2$  отличаются друг от друга в порядке 10%, то в случае испытания образцов нагрузками 0.05  $кг/см^2$ , расхождение между  $E(\tau)$  доходит до 25%. Расхождение в значениях модулей мгновенных деформаций определенных разными значениями ступеней нагрузок, можно объяснить как точностью измерения мгновенных деформаций (0.001 мм), так и точностью их определения. Дело в том, что при сравнительно больших скоростях деформирования образцов, при приложении больших значений ступеней нагрузок (0.25, 0.125  $кг/см^2$ ), к

Фиг. 9.



значениям истинных величин мгновенных деформаций в некоторой степени суммируются и деформации ползучести. Конечно, указанное обстоятельство зависит и от точности описания кривых  $I(\tau)$ .

Аналогичное явление, только в значительно меньшей степени наблюдается и при исследовании образцов гр. 4-57 и 5-57 (фиг. 8).

Наконец, рассмотрим результаты экспериментального определения зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями.

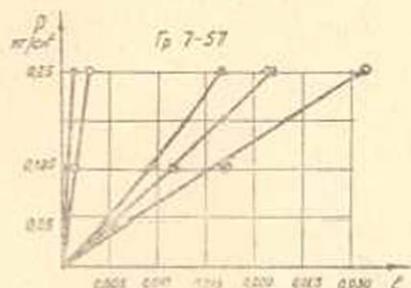
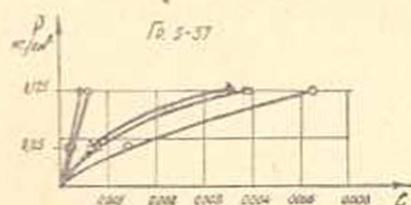
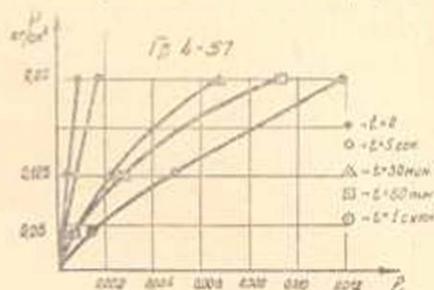
Как уже было отмечено, чем выше значения величины сжимающих нагрузок, тем меньше точность определения величины мгновенных деформаций, и наоборот. Чтобы проверить полученные нами ранее результаты исследования зависимостей между мгновенными деформациями и напряжениями, определенных при значениях нагрузок 0.25, 0.5, 1.0 и 2.0  $\text{кг}/\text{см}^2$ , были выполнены приведенные ниже эксперименты при малых значениях сжимающих нагрузок (0.25, 0.125 и 0.05  $\text{кг}/\text{см}^2$ ).

На фиг. 10 приведены результаты определения указанных выше зависимостей образцов грунтов 4-57, 5-57 и 7-57 нарушенной структуры (таблица 1).

Для определения зависимости между мгновенными деформациями и напряжениями, как и ранее [4, 9], была использована методика параллельного испытания образцов-близнецов разными нагрузками. Чтобы устранить влияние неровностей поверхности образцов, перед приложением указанных выше нагрузок все образцы предварительно уплотнялись нагрузками 0.25  $\text{кг}/\text{см}^2$  в течение одних суток.

Из графиков кривых фиг. 10 следует, что указанная выше зависимость с достаточной точностью выражается линейной зависимостью. Этот результат еще раз подтверждает правильность полученных ранее результатов, т. е. при  $t \approx 0$ , для грунтов нарушенной структуры, закон Гука справедлив.

Следует обратить внимание еще на то, что указанная выше линейная зависимость остается в силе и для „условно мгновенных“ де-



Фиг. 10.

формаций, т. е. для деформаций, соответствующих пятой секунде после момента приложения нагрузок.

Величины модулей мгновенных деформаций, вычисленные на основании выполненных ранее [4] и приведенных здесь экспериментов (фиг. 10), сведены в таблицу 3.

Таблица 3

	Лабораторные №№ грунтов								
	3363	3371	3454	3455	1-57	2-57	4-57	5-57	7-57
$E$ в кг/см <sup>2</sup>	74	87	83	87	91	142	278	280	167

Если сравнивать полученные нами значения модулей мгновенных деформаций грунтов нарушенной структуры, определенных при сжатии их в условиях отсутствия бокового расширения, с результатами опытов Н. Я. Денисова и Б. Ф. Рельова [10] посвященных определению динамического модуля сдвига  $G$  кембрийской глины нарушенной структуры ( $G = 20-60$  кг/см<sup>2</sup>), нетрудно заметить, что порядок их величин один и тот же. Действительно, если от динамического модуля сдвига  $G$  перейти к динамическому модулю упругости  $E$ , принимая коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$ , для  $E$  получим значения  $E = 60-180$  кг/см<sup>2</sup>.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 15 III 1959

### Ս. Ռ. Մեսչյան

## ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ շԱՏԿՐԻՔՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ՝ ԲԵՒՆԱՎՈՐՄԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են երեք տարբեր կապակցված գրունտների փորձարկումները 0,25, 0,125 և 0,05 կգ/սմ<sup>2</sup> մեկ օրում արագությամբ աստիճանաձև աճող բեռներով սեղմելիս, երբ նմուշի կողային ընդարձակման հնարավորությունը բացակայում է:

Պարզված է, որ խախտված ստրուկտուրա ունեցող կապակցված գրունտների զեֆորմացիոն հատկությունները կախված են ինչպես բեռնավորման աստիճանի մեծությունից և աղման տեղումնից, այնպես էլ գրունտի տիկստրուկտիկ ամրապնդման առկայությունից:

Հոդվածում բերված են նաև երեք տարբեր գրունտների ակնթարթալին և սողի զեֆորմացիաների ուսումնասիրությունները նրանց աստիճանաձև (վերը բերված տարբեր արագություններով) բեռնավորելիս զեղքում, ժամանակի ընթացքում այդ զեֆորմացիաների զրաֆիկները և նրանց զրանցման առնչությունները:

Յույց է տրված, որ հեղինակի կողմից ստացված ակնթարթային մո-  
դուլների մեծությունները և [10] աշխատության մեջ բերված դինամիկական  
առաձգականության մոդուլների մեծությունները միևնույն կարգի են:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Proceedings of the International Conference on soil mechanics and Foundation Engineering, 1936.
2. Денисов Н. Я., Строительные свойства глинистых пород и их использование в гидротехническом строительстве. Гостехиздат, М.—Л., 1956.
3. Гольдштейн М. Н., Механические свойства грунтов. Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, М., 1952.
4. Месчан С. Р., О ползучести связного грунта при сжатии в условиях невозможности бокового расширения. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XI, № 4, 1958.
5. Денисов Н. Я., О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота, М., 1951.
6. Месчан С. Р., К вопросу о влиянии продолжительности нагружения на ползучесть связных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР, том XXIII, № 2, 1956.
7. Гольдштейн М. Н., О структуре и сжимаемости грунтов. В кн. Вопросы геотехники. Трансжелдориздат, М., 1956.
8. Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести. Изд. техникотеоретической литературы, М., 1952.

М. Л. Тер-Микаелян

### К теории переходного излучения

Рассмотрим задачу о переходном излучении [1], т. е. излучении, возникающем при переходе частицы из среды с диэлектрической постоянной  $\epsilon_1$ , в среду с диэлектрической постоянной  $\epsilon_2$ .

Ось  $z$  направим вдоль скорости частицы  $v = \text{const}$  и примем, что плоскость раздела двух сред ( $z = 0$ ) перпендикулярна направлению движения частицы. Решение уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \Delta A - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} ev \delta(r - vt), \\ \Delta \varphi - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon_1} e \delta(r - vt) \end{aligned} \quad (1)$$

слева от поверхности раздела, будем искать, разлагая все величины в четырехкратные интегралы Фурье, например:

$$A(rt) = \int A(k\omega) e^{ikr - i\omega t} d^3k d\omega. \quad (2)$$

Для нахождения электрического поля воспользуемся формулой

$$E(k\omega) = \frac{i\omega}{c} A(k\omega) - ik\varphi(k\omega). \quad (3)$$

Легко видеть, что решение неоднородного уравнения приводит к значению:

$$E_1(k\omega) = \frac{ie}{2\pi^2} \left[ \frac{\omega v}{c^2} - \frac{k}{\epsilon_1} \right] \frac{\delta(\omega - kv)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1}. \quad (4)$$

Решение однородного уравнения можно представить в виде:

$$E_1^*(k\omega) = E_1'(k\omega) \delta \left( k^2 - \frac{\epsilon_1}{c^2} \omega^2 \right). \quad (5)$$

Выражение для электрического поля справа от поверхности раздела получим, заменяя в (4) и (5) индекс 1 на 2.

Из условий непрерывности тангенциальных составляющих при  $z=0$  имеем:

$$\int \{E_{1t}(k\omega) + E'_{1t}(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega = \int \{E_{2t}(k\omega) + E'_{2t}(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega. \quad (6)$$

Далее, непрерывность нормальных составляющих  $D$  приводит к условию при  $z=0$

$$\begin{aligned} & \int \varepsilon_1 \{E_{1n}(k\omega) + E'_{1n}(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega = \\ & = \int \varepsilon_2 \{E_{2n}(k\omega) + E'_{2n}(k\omega)\} e^{ikr-i\omega t} d^3k d\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме этих условий мы имеем  $\operatorname{div} E_{1,2} = 0$  везде, как слева, так и справа от поверхности раздела:

$$\begin{aligned} kE_1 &= k_p E_{1t} + k_z E'_{1n}, \\ kE_2 &= k_p E_{2t} + k_z E'_{2n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти уравнения однозначно определяют  $E_1(k\omega)$ ,  $E_2(k\omega)$ .

Для нахождения последних, уравнения (6) и (7) проинтегрируем по  $k_z$ . Использование дельта функции приведет к замене  $k_z$  на  $k_{z1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} - k_p^2}$ , где индекс 1 относится к выражениям слева от поверхности раздела, а индекс 2—справа. Заметим, что  $k_{z1}$  должно быть отрицательным, а  $k_{z2}$  положительным (при  $\omega > 0$ ), так как волны должны распространяться от поверхности раздела в левое и правое полупространства. При  $z=0$  экспоненты всех выражений оказываются равными, и мы имеем систему уравнений для определения полей излучения

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{ie\varepsilon_1}{2\pi^2} \left[ \frac{\omega v^2}{c^2} - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right] \frac{1}{v^2 \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \\ & + \left\{ \frac{\varepsilon_1 E'_{1n}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z1} = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_p^2}} = \\ & = \left\{ \frac{\varepsilon_2 ie}{2\pi^2} \left[ \frac{\omega v^2}{c^2} - \frac{\omega}{\varepsilon_2} \right] \frac{1}{v^2 \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \\ & + \left\{ \frac{\varepsilon_2 E'_{2n}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_p^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{iek_p}{2\pi^2\varepsilon_1 v \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{E'_{1t}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z1}} = \\
 & = \left\{ \frac{iek_p}{2\pi^2\varepsilon_2 v \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{E'_{2t}(k\omega)}{2k_z} \right\}_{k_z = k_{z2}}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Соотношение (8) можно переписать:

$$E'_{1t} = -\frac{k_z}{k_p} E'_{1n}, \quad E'_{2t} = -\frac{k_z}{k_p} E'_{2n}. \quad (11)$$

Из уравнений (9), (10), (11) определим  $E'_{1n}$ ,  $E'_{2n}$

$$E'_{1n} = \frac{iek_{z1}k_p^2}{\pi^2 v (k_{z2}\varepsilon_1 - k_{z1}\varepsilon_2)} \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{v}{\omega} k_{z2}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} + \frac{-1 + \frac{v}{\omega} k_{z2}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right\}, \quad (12)$$

$$E'_{2n} = \frac{iek_{z2}k_p^2}{\pi^2 v (k_{z1}\varepsilon_2 - k_{z2}\varepsilon_1)} \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{v}{\omega} k_{z1}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} + \frac{-1 + \frac{v}{\omega} k_{z1}}{\frac{\omega^2}{v^2} + k_p^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} \right\}. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) исходя из граничных условий были ранее получены в работе [2]. Нужно отметить, что слева от поверхности раздела:

$$k_p^2 = \frac{\varepsilon_1 \omega^2}{c^2} + k_{z1}^2 = k^2 \sin^2 \theta_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1, \quad (14)$$

где  $\theta_1$  — угол между направлением излучения и нормалью к плоскости раздела. Аналогично, в формуле (13)  $k_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2$ .

Таким образом слева от поверхности раздела мы имеем:

$$E'(rt) = \int \frac{E'_{1t}}{2k_{z1}} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t} dk_x, dk_y, d\omega. \quad (15)$$

Аналогичное выражение имеет место справа от поверхности. Найдем угловое и частотное распределения переходного излучения\*.

\* При нахождении углового и частотного распределений автор, вначале, пользовался волновой функцией фотона в среде, модуль квадрат которой прямо приводит к формулам (21) и (22). Однако, в беседе с Гинзбургом В. Л. и Силиным В. П., выяснилось, что естественнее формулировать этот вывод на классическом языке.

Для этого вычислим поток излучения за все время пролета частицы через плоскость, перпендикулярную направлению движения и отстоящую от поверхности раздела на расстоянии  $z_1 \rightarrow \infty$ . Задача сводится к нахождению проекции вектора Пойтинга на нормаль к поверхности раздела. Вычислим его значение для левого полупространства:

$$S_1 \cos \theta_1 = \frac{c}{4\pi} \int \frac{E_{1t}^2(r, t)}{V \varepsilon_1} dx dy dt. \quad (16)$$

Заметим, что при  $z_1 \rightarrow \infty$ ;  $S$  отлична от нуля только для положительных и действительных  $z$ , т. е. для прозрачной среды. Частоты, для которых  $\varepsilon(\omega)$  отрицательно или комплексно, вдоль оси  $z$  не распространяются.

Подставив разложение (15) в выражение (16) получим (индексами 1 и 2 будем обозначать величины, относящиеся соответственно к левому и правому полупространствам)

$$S_1 \cos \theta_1 = \frac{4\pi^2 c}{V \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_0^{\infty} \left| \frac{E_{1t}}{2k_{z1}} \right|^2 d\omega.$$

Учитывая, что  $dk_x dk_y = 2\pi k_y dk_y = 2\pi k^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1$ , получим

$$dS_1 \cos \theta_1 = \frac{4\pi^2 c}{V \varepsilon_1} \left| \frac{E_{1t}}{2k_{z1}} \right|^2 k^2 \cos \theta_1 d\Omega d\omega. \quad (17)$$

Легко сообразить, что после сокращения на  $\cos \theta_1$  мы получим излученную энергию в направлении  $\theta_1$ . Выражение (17) решает поставленную задачу. Вычислим, используя (17), (12), (11), (13), интенсивности переходного излучения  $dS_1$  и  $dS_2$ .

Приведем для справок значения отдельных членов, входящих в (12) и (13)

$$|E_{1t}| = |E_{1n}| \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1}, \quad (18)$$

$$|k_{z1\varepsilon_2} - k_{z2\varepsilon_1}| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} |z_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \theta_1}|. \quad (19)$$

Аналогичные выражения для правого полупространства отличаются перестановкой индексов 1 и 2. Приведем еще выражение для члена, стоящего в фигурных скобках формулы (12)

$$\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - \beta^2 z_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}{\beta^2 \varepsilon_1 (1 - \beta^2 z_1 \cos^2 \theta_1) (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}, \quad (20)$$

здесь  $\beta = \frac{v}{c}$ . Выражение в фигурных скобках формулы (13) отличается от (20) заменой индексов 1 и 2 и изменением знака перед  $\beta$ .

Учитывая (18)—(20) и сократив на  $\cos \theta_1$ , перепишем (17) в виде

$$dS_1 = \frac{d\omega d\Omega e^2 v^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1}{\pi^2 c^3 \varepsilon_1^{3/2}} \times \left| \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sin^2 \theta_1)}{(1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1) (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sin^2 \theta_1)} (\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} \sin^2 \theta_1) \right|^2. \quad (21)$$

Полагая  $\varepsilon_1 = 1$  мы получим формулу, приведенную в [1 и 2]. Аналогичным образом получим выражение для излученной энергии в правое полупространство

$$dS_2 = \frac{d\omega e^2 v^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 d\Omega}{c^3 \pi^2 \varepsilon_2^{3/2}} \times \left| \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (1 - \beta^2 \varepsilon_2 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \sin^2 \theta_2)}{(1 - \beta^2 \varepsilon_2 \cos^2 \theta_2) (1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \sin^2 \theta_2)} (\varepsilon_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2} \sin^2 \theta_2) \right|^2. \quad (22)$$

При  $\varepsilon_2 = 1$  мы приходим к формуле, полученной в [2].

Формулы (21) и (22) дают решение поставленной задачи.

Физический институт

Академии наук Армянской ССР

Поступила 24 IV 1959

### Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼԻԱՆ

## ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ելնելով (2) աշխատության մեջ բերված բանաձևերից, պարզ եղանակով ստացված են արաճալուստությունների ընդհանուր դեպքում անցումային ճառագայթման ինտենսիվության համար:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гинзбург В. Л. Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ 16, 16 (1946).
2. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения ЖЭТФ 33, 1403 (1957). Здесь же приведены ссылки на работы других авторов.