ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера

Функции системы Шаудера определяются следующим образом. Пусть $a<b$ и $\{W_i\}$ $i>2$ последовательности всех рациональных чисел интервала (a, b). Рассмотрим последовательность

$$W_1=a, \quad W_2=b, \quad W_3, \ldots, \; W_n \ldots$$

Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ определяются следующим образом: $\varphi_1(W_1)=1$, $\varphi_1(W_2)=0$ и $\varphi_1(t)$ линейна на $[a, b]$, $\varphi_2(W_1)=0$, $\varphi_2(W_2)=1$ и $\varphi_2(t)$ линейна на $[a, b]$.

Для $n>2$ отрезок $[a, b]$ точками $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ разделен на $n-2$ частичных интервалов и пусть (W_i, W_k) есть тот интервал из них, который содержит W_n.

Функция $\varphi_n(t)$ определяется следующим образом: $\varphi_n(t)=0$ вне интервала (W_i, W_k) (включая концы этого интервала), $\varphi_n(W_n)=1$ и линейна в каждом из интервалов (W_i, W_n), (W_n, W_k).

Известно, что система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ является базисом в пространстве непрерывных функций, определенных на $[a, b]$. Причем, если $f(t)$ непрерывная функция, определенная на $[a, b]$, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \tag{1}$$

где

$$c_1=f(W_1), \quad c_2=f(W_2) \ldots, \quad c_i=f(W_i)-\sum_{k=1}^{i-1} c_k \varphi_k(W_i) \;\; i>2 \tag{2}$$

равномерно на $[a, b]$ сходится к $f(t)$.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$*, существует ряд*

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры. В известной теореме Меньшова о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами [1] предполагается, что представимая функция конечна почти всюду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

который сходится к $f(x)$ *почти всюду на* $[a, b]$. *Причем*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Для доказательства теоремы нужна следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $f(x)$ *почти везде конечная измеримая функция, определенная почти всюду на* $[a, b]$.

Для любого $\varepsilon > 0$ *и целого положительного* n *можно определить действительные числа* $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ *и множество* $E \subset [a, b]$ *такие, что выполняются следующие условия*

1°. $|a_k| < \varepsilon \qquad n \leqslant k \leqslant m$

2°. $\operatorname{mes} E > 1 - \varepsilon$

3°. $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \varphi_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ *для любого* $x \in E$

4°. $\left|\sum_{k=n}^{s} a_k \varphi_k(x)\right| < |f(x)| + \varepsilon$ *для любого* $x \in E$

и $s = n, n+1, \ldots, m$.

Доказательство. В силу теоремы Лузина существуют непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x)$ и множество $F_0 \subset [a, b]$ такие, что

$$f(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in F_0 \tag{3}$$

$$\operatorname{mes} F_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Из построения системы $\{\varphi_n(x)\}$ и из (1) и (2) легко видеть, что для каждого из интервалов (W_i, W_k), полученных разделением отрезка $[a, b]$ конечным числом точек $W_1, W_2, \ldots, W_n$, некоторая бесконечная подпоследовательность $\varphi_{ik1}(x), \varphi_{ik2}(x), \ldots, \varphi_{ikj}(x), \ldots$ последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ будет обладать следующими свойствами:

a) $\varphi_{ikj}(x) = 0$ при $x \overline{\in} (W_i, W_k)$ $j = 1, 2, \ldots$

b) для любой непрерывной функции $\tau(x)$, определенной на интервале (W_i, W_k) и такой, что $\tau(W_i) = \tau(W_k) = 0$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{ikj} \varphi_{ikj}(x),$$

где

$$c_{ik1} = \tau(W_{ik1}), \ldots, \quad c_{ikj} = \tau(W_{ikj}) - \sum_{s=1}^{j-1} c_{iks} \varphi_{iks}(W_{ikj}),$$

а через W_{ikj}, $j=1, 2, \ldots$, обозначается j-тая рациональная точка последовательности рациональных точек W_2, $W_3, \ldots$, $W_n, \ldots$ отрезка $[a, b]$, попадающая в интервал (W_i, W_k), равномерно сходится к $\tau(x)$.

Заметив, что система $\varphi_{ik1}(x)$, $\varphi_{ik2}(x), \ldots$ для отрезка $[W_i, W_k]$ строится точно так же, как система $\{\varphi_n(x)\}$ для $[a, b]$, легко видеть, что имеют место также следующие условия

c) $$\left|\sum_{j=1}^{n} c_{ikj}\varphi_{ikj}(x)\right| \leqslant \max_{x\in(W_i, W_k)} |\tau(x)|,$$

для любого $x \in (W_i, W_k)$ и $n=1, 2, \ldots,$

d) $$|c_{ikj}| < 2 \max_{x\in(W_i, W_k)} |\tau(x)| \quad j=1, 2, \ldots$$

Пусть $N > n$ настолько большое число, что в каждом из интервалов (W_i, W_k), полученных разделением отрезка $[a, b]$ точками W_1, $W_2, \ldots$, W_N, колебание функции $g(x)$ меньше чем ε.

Внутри каждого интервала (W_i, W_k) возьмем интервал (W_i', W_k'), $W_i < W_i' < W_k' < W_k$ так, чтобы

$$W_k' - W_i' > W_k - W_i - \frac{\varepsilon}{2N}. \tag{5}$$

Функцию $g'(x)$ на отрезке $[a, b]$ определим следующим образом: для каждого интервала (W_i, W_k) полагаем

$$g'(x) = g(x) \text{ при } x \in (W_i', W_k'); \quad g'(W_i) = g'(W_k) = 0 \tag{6}$$

и линейна в промежутках (W_i, W_i') и (W_k', W_k).

Очевидно, $g'(x)$ будет обладать следующими свойствами

$$\max_{x\in(W_i, W_k)} |g'(x)| \leqslant \max_{x\in(W_i, W_k)} |g(x)|; \tag{7}$$

$$\operatorname{mes} E[g(x) \neq g'(x)] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

В силу условий b), c), d) для каждого интервала (W_i, W_k) можно определить действительные числа a_{ik1}, $a_{ik2}, \ldots$, a_{ikp} такие, что выполняются условия

$$\left|\sum_{j=1}^{p} a_{ikj}\varphi_{ikj}(x) - g'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } x \in (W_i, W_k); \tag{9}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}\varphi_{ikj}(x)\right| \leqslant \max_{x\in(W_i, W_k)} |g'(x)| \tag{10}$$

для любого $x \in (W_i, W_k)$ и $1 \leqslant s \leqslant p$;

$$|a_{ikj}| \leqslant 2 \max_{x\in(W_i, W_k)} |g'(x)| \quad j=1, 2, \ldots, p. \tag{11}$$

Перенумеруем функции $\varphi_{ikj}(x)$ в порядке их следования в последовательности $\{\varphi_k(x)\}$. Пусть эти функции будут $\varphi_{\nu_1}(x)$, $\varphi_{\nu_2}(x), \ldots,$ $\varphi_{\nu_s}(x)$.

Так как все эти функции получены после N-ого шага, где $N > n$, то $\nu_1 > n$.

Полагая $a_{\nu_q} = a_{ikj}$, если $\varphi_{\nu_q}(x) = \varphi_{ikj}$ $(q = 1, 2, \ldots, s)$ и $a_r = 0$ при $r \neq \nu_q$, $q = 1, 2, \ldots, s$ и принимая во внимание условие а), мы видим, что числа $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_l$, где полагается $l = \nu_s$, в силу (9), (10) и (11) будут удовлетворять следующим условиям

$$\alpha) \quad \left| \sum_{k=n}^{l} a_k \varphi_k(x) - g'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для любого } x \in [a, b];$$

β) для каждого интервала (W_i, W_k) имеет место

$$\left| \sum_{k=n}^{s} a_k \varphi_k(x) \right| < \max_{x \in (W_i, W_k)} |g'(x)|$$

для любого $x \in (W_i, W_k)$ и $n < s < l$;

$$\gamma) \quad |a_k| < 2 \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| \quad \text{для любого } n < k < l.$$

Принимая во внимание (7) и (8) и учитывая, что колебание функции $g(x)$ на каждом интервале (W_i, W_k) меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$, из условий α), β) и γ) мы видим, что нами доказано следующее.

Для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n можно определить действительные числа $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_l$ и множество $E_0 \subset [a, b]$ такие, что выполняются следующие условия

$$\alpha') \quad |a_k| < 2 \max_{x \in [a, b]} |g(x)|, \quad n \leqslant k \leqslant l$$

$$\beta') \quad \operatorname{mes} E_0 > 1 - \varepsilon$$

$$\gamma') \quad \left| \sum_{k=n}^{l} a_k \varphi_k(x) - g(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in E_0$$

$$\delta') \quad \left| \sum_{k=n}^{s} a_k \varphi_k(x) \right| < |g(x)| + \varepsilon$$

для любого $x \in E_0$ и $n < s < l$.

Ясно, что если мы возьмем целое положительное число Mнастолько большое, что

$$\max_{x \in [a, b]} \left| \frac{2g(x)}{M} \right| < \varepsilon.$$

и воспользуемся условиями α'), β'), γ'), δ') M раз, взяв в этих условиях $\frac{\varepsilon}{2M}$ вместо ε и каждый раз беря n больше чем номера всех функций, участвующих в предыдущих шагах, то мы определим действительные числа $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ и множество E_0' такие, что будут выполняться следующие условия:

1) $|a_k| < \varepsilon \quad k = n, n+1, \ldots, m$

2) $\operatorname{mes} E_0' > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

3) $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \varphi_k(x) - g(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in E_0'$

4) $\left| \sum_{k=n}^{s} a_k \varphi_k(x) \right| < |g(x)| + \varepsilon$

для любого $x \in E_0'$ и $n \leqslant s \leqslant m$.

Обозначим $E = F_0 \cdot E_0'$. В силу условий (4) и (2) будет

$$\operatorname{mes} E > b - a - \varepsilon,$$

а из условия (3), учитывая 1), 2), 3) и 4), мы видим, что выбранные нами числа $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ и множество E удовлетворяют условиям леммы.

Доказательство теоремы. Пусть $F(x)$ измеримая функция, определенная почти всюду на отрезке $[a, b]$. Обозначим через A_+ и A_- те множества, где функция соответственно равна $+\infty$ и $-\infty$, и через B — множество, где $f(x)$ принимает конечные значения.

Имеем:

$$\operatorname{mes} A_+ + \operatorname{mes} A_- + \operatorname{mes} B = b - a. \tag{12}$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \tag{13}$$

Функцию $f_1(x)$ определим следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in B \\ +1 & \text{при } x \in A_+ \\ -1 & \text{при } x \in A_-. \end{cases} \tag{14}$$

Применяя лемму для $f_1(x)$, $\varepsilon > 0$, $n = 1$, определим действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ и множество E_1, такие, что выполняются условия

1°. $|a_k| < \varepsilon_1$, $k = 1, 2, \ldots, n_1$

2°. $\operatorname{mes} E_1 > b - a - \varepsilon_1$

3°. $\left|\sum_{k=1}^{n_1} a_k \varphi_k(x) - f_1(x)\right| < \varepsilon_1$ для любого $x \in E_1$

4°. $\left|\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k(x)\right| < |f_1(x)| + \varepsilon_1$ для любого $x \in E_1$

и $s = 1, 2, \ldots, n_1$.

Предположим теперь, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, \ldots a_{n_2}, \ldots, a_{n_i}$ и множества $E_1, E_2, \ldots, E_i$ определены.

Положим

$$f_{i+1}(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) & \text{при } x \in B \\ +1 & \text{при } x \in A_+ \\ -1 & \text{при } x \in A_-. \end{cases} \tag{15}$$

Применяя лемму, для $f_{i+1}(x)$, ε_{i+1} и $n_i + 1$, определяем действительные числа $a_{n_i+1}, a_{n_i+2}, \ldots, a_{n_{i+1}}$ и множество E_{i+1} такие, что выполняются условия:

$A)$ $|a_k| < \varepsilon_{i+1}$, $n_i + 1 \leqslant n \leqslant n_{i+1}$

$B)$ $\operatorname{mes} E_{i+1} > b - a - \varepsilon_{i+1}$

$C)$ $\left|\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x) - f_{i+1}(x)\right| < \varepsilon_{i+1}$ для любого $x \in E_{i+1}$

$D)$ $\left|\sum_{k=n_i+1}^{s} a_k \varphi(x)\right| < |f_{i+1}(x)| + \varepsilon_{i+1}$

для любого $x \in E_{i+1}$, $n_i + 1 \leqslant s \leqslant n_{i+1}$.

Таким образом мы определяем последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$; и последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$, которые удовлетворяют условиям $A)$, $B)$, $C)$ и $D)$, а $f_{i+1}(x)$ определяется условием (15) для любого $i = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{16}$$

удовлетворяет условиям теоремы.

Из условия A) вытекает:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Положим

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} E_k. \tag{17}$$

В силу (13) будем иметь

$$\operatorname{mes} E = b - a. \tag{18}$$

Покажем, что на множестве E ряд (16) сходится к $f(x)$.

Пусть $x \in EA_+$.

Начиная с некоторого номера n_x будем иметь

$$x \in E_n A_+ \text{ для любого } n > n_x. \tag{19}$$

Пусть n_{i_0} — наименьшее число из чисел n_i, фигурирующих в условиях A), B), C) и D), для которых $i > n_x$, и пусть $n > n_{i_0}$. Ясно, что для некоторого i, $i \geqslant i_0$ будем иметь

$$n_i < n \leqslant n_{i+1}. \tag{20}$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n_{i_0}} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_{i_0}+1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{21}$$

$$\sum_{k=n_{i_0}+1}^{n} a_k \varphi_k(x) = \sum_{s=i_0}^{i} \sum_{k=n_s+1}^{n_s+1} a_k \varphi_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x). \tag{22}$$

В силу (19) и (15) $f_s(x) = 1$ для всех s, поэтому из условий C) и D) получаем:

$$\sum_{s=i_0}^{i} \sum_{k=n_s+1}^{n_s+1} a_k \varphi_k(x) > \sum_{s=i_0}^{i} (1 - \varepsilon_s), \tag{23}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x) \right| < 2(1 + \varepsilon_{i+1}). \tag{24}$$

Следовательно

$$\sum_{k=n_{i_0}+1}^{n} a_k \varphi_k(x) > \sum_{s=i_0}^{i} (1 - \varepsilon_s) - 2(1 + \varepsilon_{i+1}). \tag{25}$$

Если $n \to \infty$, то $i \to \infty$ и в силу (13), (21) и (25) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) = +\infty \quad \text{для любого } x \in EA_{+}. \tag{26}$$

Точно так же можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) = -\infty \quad \text{для любого } x \in EA_{-}. \tag{27}$$

Пусть теперь $x \in E\cdot B$. Для некоторого целого n_x будем иметь

$$x \in B\cdot E_n \quad \text{при} \quad n > n_x. \tag{28}$$

Возьмем i_0 настолько большое, что $i_0 - 1 > n_x$ и пусть $n > n_{i_0}$. Предположим, что n удовлетворяет неравенству

$$n_i < n \leqslant n_{i+1}. \tag{29}$$

В силу (15) и условия C), где вместо i подставлено $i-1$, будем иметь

$$\left|\sum_{k=1}^{n_i} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon_i, \tag{30}$$

а из (15) и (30) следует

$$|f_{i+1}(x)| < \varepsilon_i. \tag{31}$$

Из (29), (31) и условия D) следует

$$\left|\sum_{n_i+1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right| < \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}. \tag{32}$$

В силу (30) и (32) имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right| < 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}. \tag{33}$$

Очевидно $i\to\infty$, когда $n\to\infty$, и из (33) и (13) вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) = f(x),$$

где x произвольная точка из множества $E\cdot B$.

Теорема 1 доказана. Возникает вопрос, существуют ли ортонормальные системы, обладающие указанным в теореме 1 свойством системы Шаудера?

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Какова бы ни была полная ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[a, b]$, можно опреде-*

лить ортонормированную систему $\{\Phi_n(x)\}$, *обладающую следующими свойствами:*

а) *каждая функция* $\Phi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *есть конечная линейная комбинация функций системы* $\{\varphi_n(x)\}$.

б) *для любой измеримой функции* $f(x)$, *определенной на* $[a, b]$*, *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

который сходится к $f(x)$ *почти всюду на* $[a, b]$.

Мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в работе [2] (см. также [3], стр. 381; следствие леммы 3).

Лемма. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *полная ортонормированная система на* $[a, b]$ *и* $f(x) \in L_2[a, b]$.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ *и* $n > 1$ *можно определить действительные числа* $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_m$ *и множество* $E \subset [a, b]$, *обладающие следующими свойствами:*

1) $$\left| f(x) - \sum_{k=n+1}^{m} c_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \text{ при } x \in E$$

2) $\operatorname{mes} E > b - a - \varepsilon$

3) $|a_k| \leqslant \varepsilon \quad (k = n+1, n+2, \ldots, m)$.

Пусть $\{P_n(x)\}$ все полиномы с рациональными коэффициентами и $\{\varepsilon_n\}$ последовательность положительных чисел таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{34}$$

Применяя лемму, мы можем определить последовательность функций

$$\Phi_n^*(x) = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} c_i \varphi_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

и последовательность множеств $\{E_n\}$ такие, что

$$|\Phi_n^*(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n \quad \text{при} \quad x \in E_n \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

$$\operatorname{mes} E_n > b - a - \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{37}$$

При этом можно предполагать, что $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$

Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{\Phi_n^*(x)}{\|\Phi_n^*(x)\|} = \frac{\Phi_n^*(x)}{\left(\sum\limits_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} c_i^2\right)^{1/2}}. \tag{38}$$

Очевидно $\{\Phi_n(x)\}$ есть ортонормированная система.

* Функция $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Из (36) и (37) вытекает, что последовательность обладает следующим свойством.

Для произвольной, почти везде конечной измеримой функции $g(x)$, определенной на $[a, b]$, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и натуральное число N, существует функция $\Phi_n^*(x)$, где $n > N$, такая, что

$$mE(|\Phi_n^*(x) - g(x)| > \varepsilon) < \varepsilon. \tag{39}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$, и $\{\eta_k\}$ — последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty. \tag{40}$$

Возьмем последовательность $\{g_k(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций такую, что

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x) \tag{41}$$

почти всюду на $[a, b]$.

Легко видеть, что, применяя свойство (39), из последовательности $\{\Phi_n^*(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\Phi_{n_i}^*(x)\}$, обладающую следующим свойством

$$\operatorname{mes} E\left(\left|\sum_{i=1}^{k} \Phi_{n_i}^*(x) - g_k(x)\right| > \eta_k\right) < \eta_k. \tag{42}$$

Последовательность действительных чисел $\{a_s\}$ определим следующим образом

$$a_s = \begin{cases} \|\Phi_{n_i}^{(*)}(x)\| & \text{при} \quad s = n_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{при} \quad s \neq n_i \quad (i = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{43}$$

Ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s \Phi_s(x)$$

будет сходиться к $f(x)$ почти всюду.

В самом деле, из (38) и (43) следует, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s \Phi_s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{n_i}^*(x). \tag{44}$$

С другой стороны, из условий (40) и (42) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{k}\Phi^{*}_{n_i}(x)-g_k(x)\right]=0 \tag{45}$$

почти всюду на $[a, b]$ (см. например [3], стр. 372, лемма 1).

Из (41) и (45) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\Phi^{*}_{n_i}(x)=f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Отсюда, в силу (44), ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}a_s\Phi_s(x)$$

будет сходиться к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Теорема 2 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский гос. университет

Поступила 4 VII 1958

Ա. Ա. Թալալյան

ՑԱՆԿԱՑԱԾ ՉԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ԸՍՏ ՇԱՈՒԴԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները։

Թեորեմ 1. Ենթադրենք $\{\varphi_n(x)\}$-ը Շաուդերի սիստեմն է՝ որոշված $[a, b]$ հատվածում։ Այդ դեպքում ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$$

շարք, որը զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային համարյա ամենուրեք $[a, b]$ հատվածում, ընդ որում

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0.$$

Թեորեմ 2. Ցանկացած $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմի համար, որը օրթոնորմալ է և լրիվ $[a, b]$ հատվածում, կարելի է որոշել $[a, b]$-ում օրթոնորմալ $\{\Phi_n(x)\}$ սիստեմ, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

ա) Յուրաքանչյուր $\Phi_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ ֆունկցիա հանդիսանում է $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիա.

բ) $[a, b]$ հատվածում որոշված ցանկացած չափելի $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

շարք, որը զուգամիտում է $f(x)$-ին համարյա ամենուրեք։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меньшов Д. Е.* Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
2. *Талалян А. А.* Известия АН АрмССР (серия физико-метематических наук), т. X, № 3, 1957.
3. *Качмаж С.* и *Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Р. Фельдман

Об одном разностном способе исследования устойчивости и колебаний пластин

В предыдущей работе [1] был предложен способ исследования устойчивости и колебаний стержней переменного сечения.

В частности было показано применение этого способа к исследованию устойчивости ступенчатых стержней, подверженных действию сил, скачкообразно меняющихся по длине стержня.

В настоящей статье этот способ распространен на задачи, связанные с исследованием прочности, устойчивости и колебаний пластин и оболочек.

Решение задач, связанных с исследованием устойчивости пластин разностным методом сопряжено с громоздкими вычислениями. Объясняется это тем, что в целях повышения точности приходится увеличивать число делений исследуемой области, а это, как известно, влечет за собой повышение порядка определителя системы. Последнее приводит лишь к принципиальному, а не к фактическому, решению задачи [2].

Применяемый в работе синтез методов конечных разностей и Бубнова-Галеркина позволяет во многих случаях, сравнительно просто и с достаточной для нужд практики степенью точности, вне зависимости от плотности решетки, с помощью которой аппроксимируется заданная область, решать широкий класс задач, представляющих практический интерес [3—5].

§ 1. Метод решения

Пусть в результате решения проблемы, связанной с исследованием деформативности механической системы, установлена система разностных уравнений или система дифференциальных уравнений любого порядка.

Для определенности рассмотрим одно дифференциальное уравнение m-го порядка, хотя метод остается в силе и для системы линейных дифференциальных уравнений

$$K[w] = L[w] - \lambda N[w] - \phi = 0 \quad \text{в} \quad H, \tag{1}$$

где H — заданная область n — мерного Эвклидова пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $L[w]$, $N[w]$ — линейные однородные дифференциальные операторы порядка соответственно m и l с n независимыми переменными, главные части которых имеют вид

$$\sum_{\tau<m} C_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n} \frac{\partial^{\tau} w(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \ldots \partial x_n^{\tau_n}},$$

$$\sum_{\tau<l} M_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n} \frac{\partial^{\tau} w(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \ldots \partial x_n^{\tau_n}},$$

где $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$ — порядок производных

$$\frac{\partial^{\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \ldots \partial x_n^{\tau_n}} \quad \text{и} \quad \tau_j \geqslant 0,$$

$C_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n}$, $M_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n}$ и ϕ заданные функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой конечной замкнутой области H, а $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция тех же переменных, причем $m > l$.

Условиями на границах области могут быть значения функции или значения производных в направлении нормали к контуру $\partial w / \partial x_\nu$, или линейные комбинации функции w и ее частных производных до $(m-1)$-го порядка:

$$\sum_{\tau<m-1} E_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n} \frac{\partial^{\tau} w}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \ldots \partial x_n^{\tau_n}} = 0,$$

где $E_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n}$ — известные функции.

Для нахождения неизвестной функции w по заданным условиям на контуре области (в задачах прочности), или нахождения собственных значений λ (в задачах устойчивости и колебаний), представим заданную область системой узлов:

$$Q_j(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}) \quad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

находящихся внутри области и образующих прямоугольные решетки с ребрами h_j и числом узлов N.

Стороны прямоугольных ячеек направлены параллельно осям координат.

Значения функции w в узлах решетки обозначим через w_{ij}. Первый индекс i определяет номер координатной оси, а второй индекс j положение узла на этой оси.

Как известно [6], каждому дифференциальному выражению отвечает разностное выражение, аппроксимирующее это дифференциальное выражение с любой степенью точности. Аппроксимируя в уравнении (1) производные соответствующими разностными отношениями, напишем для внутренних узлов решетки следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{z=-q}^{q} \left[\underset{i,\,j+z}{S}(x_{i,j}) \underset{i,\,j+z}{w}(x_{i,j}) - \lambda \underset{i,\,j}{R}(x_{i,j}) w_{i,j}(x_{i,j}) \right] = \underset{i,\,j}{\phi}(x_{i,j}), \tag{2}$$

где $2q$ — порядок разностного уравнения,
$S(x_{i,j})$, $R(x_{i,j})$ и $\phi(x_{i,j})$ — переменные коэффициенты, определяемые конкретными условиями задачи, $(x_{i,j})$ — координаты узла.

Каждой внутренней точке области будет соответствовать одно такое уравнение.

Аналогично, краевым условиям будут сопоставлены разностные краевые условия. Число алгебраических уравнений полученной системы соответствует числу неизвестных функций в узлах области.

В общем случае трудно что-либо сказать относительно разрешимости полученной системы уравнений.

Решение задачи, в соответствии с вышеизложенным, ищем в виде:

$$w(x_{i,j}) = \sum_{k,\,t,\dots,\,r} A_{k,\,t,\dots,\,r} \Psi_{1k}(x_{1j}) \Psi_{2t}(x_{2j}) \cdots \Psi_{nr}(x_{nj}), \tag{3}$$

где индексы суммирования $k, t, \dots, r$ — принимают указанные ниже последовательности значений

$$k = 1, 2, \dots, N_k$$
$$t = 1, 2, \dots, N_t$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$r = 1, 2, \dots, N_r.$$

Здесь N_k, $N_t, \dots N_r$ — число членов ряда разложения в направлении соответствующих координатных осей, $A_{k,\,t,\dots,\,r}$ — неизвестные обобщенные координаты, $\Psi_{i,\nu}(x_{i,j})$ $(\nu = k, t, \dots r)$ — координатные функции, удовлетворяющие всем без исключения контурным и начальным условиям исследуемой задачи. Выбранная последовательность координатных функций должна обладать полнотой, пренебрежение которой может привести к ошибкам [7—10].

Как известно, условие тождественного обращения в нуль уравнения (1) при заданных контурных условиях, можно заменить более слабым требованием, а именно, чтобы $K[w(x_{i,j})]$ было ортогонально ко всем выбранным функциям $\Psi_{i,\nu}(x_{i,j})$.

Выполняя действия в соответствии с указанным положением и произведя суммирование по всем направлениям в исследуемой области, получим в случае однородной задачи следующую систему уравнений:

$$\sum_{k,\,t,\dots,\,r} A_{k,\,t,\dots,\,r} \left\{ \sum_{z=-p} \left[\underset{i,\,\nu,\,j+z}{G}(x_{i,j}) \underset{i,\,\nu}{\Psi}(x_{i,j}) - \lambda \underset{i,\,\nu}{\Psi}(x_{i,j}) \right] \underset{i,\,\delta}{\Psi}(x_{i,j}) \right\} = 0, \tag{4}$$

где $G(x_{i,j})$ — переменные коэффициенты, определяемые конкретными условиями задачи.

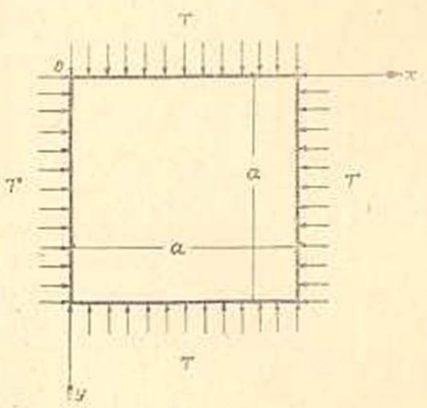
Чтобы полученная система уравнений (4) допускала нетривиальные решения, определитель системы должен быть равен нулю. Приравнивая его нулю получим уравнение, наименьший вещественный корень которого приближенно определяет первое собственное значение исследуемой задачи. Здесь следует отметить, что порядок определителя не зависит от плотности решетки, с помощью которой представлена заданная область, а зависит от числа обобщенных координат, входящих в уравнение (3).

В отношении сходимости процесса отметим, что она будет обеспечена во всех тех случаях, когда сходится процесс Бубнова-Галлеркина [7].

Решение неоднородной задачи сводится к нахождению неизвестных параметров $A_{k,l,\dots,r}$ аналогичным путем.

§ 2. Устойчивость и колебание квадратной пластины

Для иллюстрации метода и получения представления о достигаемой степени точности, рассмотрим задачу о колебании и устойчивости свободно опертой квадратной пластины (фиг. 1), подверженной действию равномерно распределенных сжимающих сил, лежащих в ее срединной плоскости и перпендикулярных к сторонам $x=0$; $x=a$, $y=0$ и $y=a$. Интенсивность сжимающих сил на единицу длины контура обозначим через T.



Фиг. 1.

Начало координат совместим с одной из вершин пластины. Координатные оси ox, oy, расположенные в срединной плоскости пластины, направим вдоль опертых ее краев.

Задача об исследовании собственных колебаний пластины при действии продольных сил T, как известно, приводится к рассмотрению дифференциального уравнения равновесия

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{T}{D}\nabla^2 w + \frac{\rho}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

где $w(x, y, t)$ — упругая поверхность пластины,

D — цилиндрическая жесткость пластины,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

ρ — масса пластины на единицу срединной площади.

Граничные условия

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=a$$
$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{и} \quad y=a. \tag{6}$$

Для отыскания собственных частот пластины p, функцию $w(x, y, t)$, описывающую гармонические колебания, представим в виде:

$$w(x, y, t)=u(x, y)\sin pt. \tag{7}$$

Подставив (7) в (5) получим

$$\nabla^2\nabla^2 u+\frac{T}{D}\nabla^2 u-\frac{\rho}{D}p^2 u=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) подстановкой

$$\xi=\frac{x}{a}; \qquad \eta=\frac{y}{a} \tag{9}$$

приводится к безразмерной форме

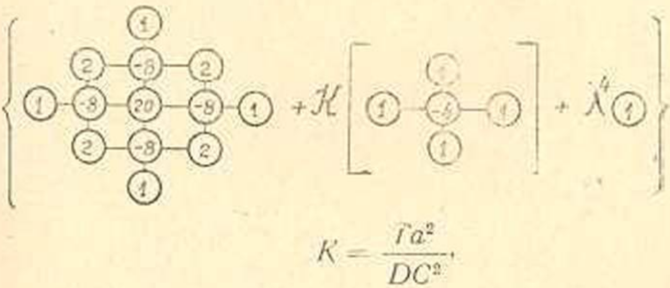
$$\nabla^2\nabla^2 u+S\nabla^2 u-\gamma^4 u=0, \tag{10}$$

где

$$S=\frac{Ta^2}{D}; \qquad \gamma^4=\frac{\rho a^4 p^2}{D}.$$

В уравнении (10) $\nabla^2\nabla^2 u$ и $\nabla^2 u$ берутся относительно переменных ξ и η.

Разобьем пластину квадратной сеткой со стороной $\frac{1}{C}$. Умножив (10) на $h^4=1/C^4$ и заменив $h^4\nabla^2\nabla^2 u$, $h^2\nabla^2 u$ разностными операторами [11], получим следующее разностное уравнение

 $u=0,$ (11)

где

$$K=\frac{Ta^2}{DC^2}, \tag{12}$$

$$\lambda=\frac{\gamma}{C}. \tag{13}$$

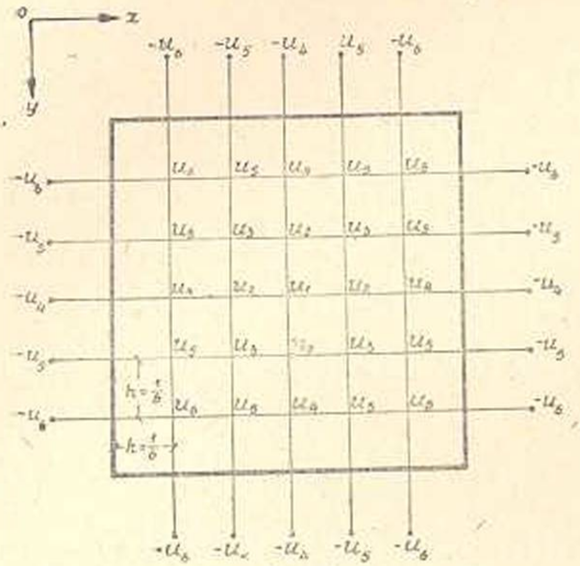
Для получения расчетной сетки пластины, проведены прямые параллельные осям координат. Расстояние между двумя смежными линиями сетки вдоль осей координат примем равными

$$h=\frac{1}{6} \ (\text{фиг. } 2).$$

В силу симметрии расчетной сетки, только шесть внутренних узловых точек будут иметь различные ординаты. Чтобы уравнение (11) имело смысл для внутренних узловых точек, находящихся вблизи контура, необходимо выразить значения функции u_i через фиктивные значения ее в узловых точках, лежащих вблизи контура вне пластины (на фиг. 2 указаны законтурные точки).

Необходимая зависимость устанавливается равенствами (6), а именно [12]:

$$u = 0; \quad u_л = -u_п \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = 1$$
$$u = 0; \quad u_b = -u_н \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad \text{и} \quad \eta = 1. \qquad (6')$$



Фиг. 2.

Написав уравнение (11) для указанных шести внутренних узловых точек с учетом (6′), получим следующую систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых отклонений u_i:

для точки 1

$$20u_1 - 32u_2 + 8u_3 + 4u_4 = = \lambda^4 u_1 - 4k(u_2 - u_1);$$

для точки 2

$$25u_2 - 16u_3 - 8u_4 - 8u_1 + + 6u_5 = \lambda^4 u_2 - k(u_1 - 4u_2 + + 2u_3 + u_4);$$

для точки 3

$$22u_3 - 16u_2 - 16u_5 + 4u_1 + 2u_6 + 2u_1 = \lambda^4 u_3 - 2k(u_2 - 2u_3 + u_5);$$

для точки 4 (14)

$$19u_4 - 16u_5 - 8u_2 + 4u_3 + 2u_6 + u_1 = \lambda^4 u_4 - k(u_2 - 4u_4 + 2u_5);$$

для точки 5

$$22u_5 - 8u_4 - 8u_6 - 8u_3 + 3u_2 = \lambda^4 u_5 - k(u_3 + u_4 - 4u_5 + u_6);$$

для точки 6

$$18u_6 - 16u_5 + 2u_3 + 2u_6 = \lambda^4 u_6 - 2k(u_5 - 2u_6).$$

Уравнение срединной упругой поверхности, удовлетворяющее условиям (6) на сторонах пластины, примем в виде:

$$u_i(\xi, \eta) = C \sin \pi\xi_i \sin \pi\eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \qquad (15)$$

Вычислим значения функции u_i в узловых точках и подставим их в систему уравнений (14), предварительно умножив каждое из уравнений соответственно на $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Просуммировав в заданной области полученную систему уравнений, получим однородное линейное уравнение относительно λ^4 и k. Зависимость между величиной частоты собственных колебаний пластины p и продольными сжимающими усилиями T, имеет вид:

$$p^2 = \frac{19}{\rho a^2}\left(\frac{19{,}69\,D}{a^2} - T\right). \tag{16}$$

Если величина сжимающих сил T известна, то p определится из полученной зависимости (16).

Полагая в уравнении (16) $p = 0$, получим минимальное значение критической силы T_{kp}

$$T_{kp} = 19{,}69\,\frac{D}{a^2}. \tag{17}$$

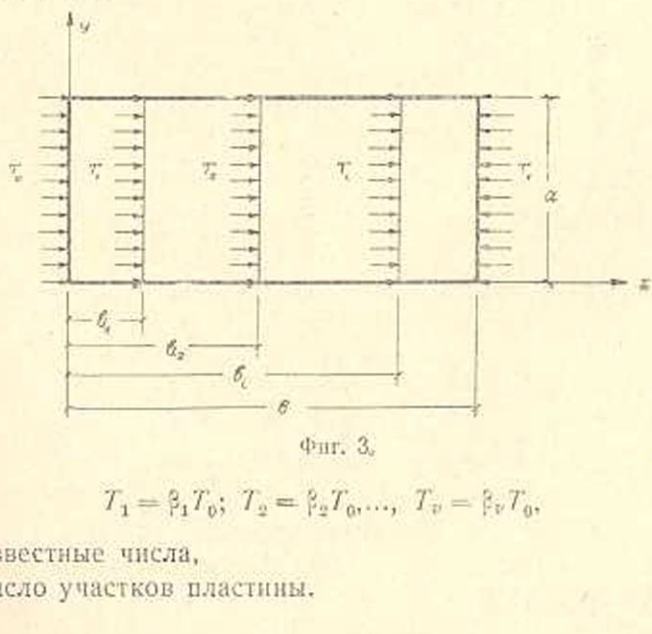
Принимая в уравнении (16) $T = 0$ получим основную собственную частоту колебаний

$$p = \frac{19{,}34}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho}}. \tag{18}$$

Полученные результаты (17) и (18) отличаются от точных решений менее чем на 2%.

§ 3. Устойчивость пластины переменной толщины, сжатой ступенчатой нагрузкой

Рассмотрим устойчивость прямоугольной пластины со ступенчатым изменением толщины, опертой любым способом по краям (фиг. 3). На пластину действуют (в ее плоскости) по линиям $x = b_i$ равномерно распределенные сжимающие силы $T_0, T_1, \ldots, T_v$. Силы, направленные в сторону оси ox, принимаем положительными, а в обратную сторону—отрицательными. Примем, что силы зависят от одного параметра T_0:



Фиг. 3.

$$T_1 = \beta_1 T_0;\; T_2 = \beta_2 T_0, \ldots,\; T_v = \beta_v T_0, \tag{19}$$

где β_i — известные числа,

v — число участков пластины.

Задача заключается в нахождении такого критического значения T_0, при котором плоская форма пластины перестает быть устойчивой формой равновесия.

В случае равномерного сжатия пластины вдоль оси ox, отклонения пластины u_i в точке (ξ_i, η_i) на каждом участке пластины удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array} + \lambda \frac{P_i}{R_i}\left(1 \;\; -2 \;\; 1\right)\right\} u_i = 0, \qquad (20)$$

где

$$P_i = \frac{T_0 + T_1 + \cdots + T_i}{T_0}; \qquad \lambda = \frac{a^2 T_0}{c^2 D_0}; \qquad R_i = \frac{D_i}{D_0};$$

D_0 — цилиндрическая жесткость первого участка $(\xi = 0)$.

Критическую нагрузку представим в следующей форме:

$$T_{kp} = V \frac{D_i}{a_{np}^2}, \qquad (21)$$

где V — константа, характеризующая T_{kp} для пластины постоянной толщины сжатой по контуру, $a_{np} = \alpha a$ — приведенная сторона пластины; α — коэффициент, зависящий от способа нагружения и контурных условий пластины. Таким образом в силу формулы (21), задача сводится к нахождению значений α для различных отношений P и R.

Принимая

$$\lambda \frac{P_i}{R_i} = \frac{V}{\alpha_i^2}, \qquad (22)$$

имеем

$$(T_0 + T_1 + \cdots + T_i)_{kp} = V \frac{D_i}{a_{np}^2}. \qquad (23)$$

Задаваясь различными отношениями P_i, R_i и $\frac{b_i}{a}$ получим значения α для любого фиксированного случая загружения пластины.

Из равенства (22) следует

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{VR_i}{\lambda P_i}}. \qquad (24)$$

Значения λ, входящие в равенство (24), нетрудно найти следуя § 1.

Рекомендуемый способ устраняет необходимость удовлетворять условиям сопряжения на границах участков пластины, в силу того, что упругая поверхность пластины аппроксимируется непрерывной функцией (3).

§ 4. Пример

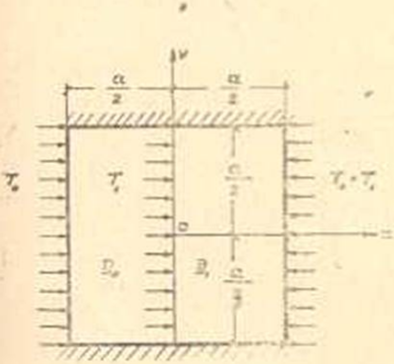
Рассмотрим квадратную пластину, равномерно сжатую параллельно оси ox (фиг. 4) по прямым $x=0$, $x=\frac{a}{2}$ и $x=-\frac{a}{2}$. Стороны параллельные оси ox жестко заделаны, а другие две стороны свободно оперты.

Отношения жесткостей участков R_i и отношения величин сжимающих сил P_i, приложенных к этим участкам полагаем заданными.

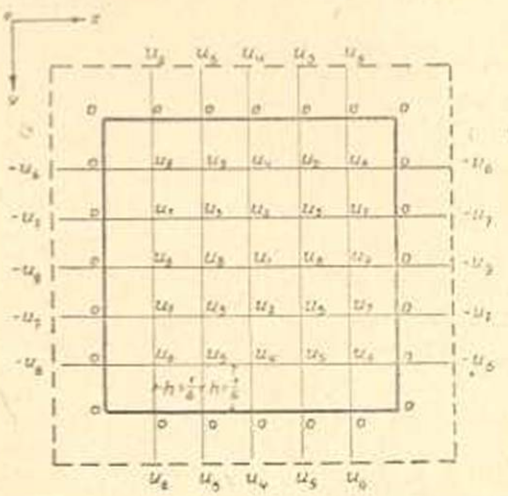
Граничные условия следующие:

$$
\begin{aligned}
&u=0;\quad u_з=-u_в \quad \text{при}\quad \xi=\pm 1/2 \quad (\text{опертые края}),\\
&u=0;\quad u_н=u_в \quad \text{при}\quad \eta=\pm 1/2 \quad (\text{зажатые края}).
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

Разобьем пластину на квадратные ячейки со стороной 1/6. В силу одноосной симметрии загружения пластины ступенчатой нагрузкой составим уравнения (20) для девяти внутренних узловых точек (фиг. 5):



Фиг. 4.



Фиг. 5.

для точки 1

$$20u_1-16u_5-16u_2+8u_3+2u_9+2u_4=-\lambda(u_5-u_1)U;$$

для точки 2

$$21u_2-16u_3-8u_4-8u_1+4u_5+4u_8+2u_7=-\lambda(u_3-u_2)U;$$

для точки 3

$$
\begin{aligned}
22u_3-8u_2-8u_5-8u_7-8u_8+2u_4+2u_6+2u_9+2u_1&=\\
=-\lambda(u_2-2u_3+u_7)U&;
\end{aligned}
$$

для точки 4

$$21u_4-16u_5-8u_2+4u_3-2u_8+u_1=-\lambda(u_5-u_4)U;$$

для точки 5

$$22u_5-8u_4-8u_6-8u_3+2u_7+2u_2+u_9=-\lambda(u_4-2u_5+u_6)U;$$

для точки 6

$$20u_6 - 8u_5 - 8u_7 + 2u_3 + u_4 + u_9 = -\lambda(u_5 - 2u_6)U; \tag{26}$$

для точки 7

$$20u_7 - 8u_3 - 8u_6 - 8u_9 + 2u_8 + 2u_5 + u_2 = -\lambda(u_3 - 2u_7)U;$$

для точки 8

$$21u_8 - 8u_1 - 8u_9 - 16u_3 + 4u_2 + 4u_7 + 2u_5 = -\lambda(u_1 - 2u_8 + u_9)U;$$

для точки 9

$$19u_9 - 8u_8 - 16u_7 + 4u_3 + u_1 + 2u_6 = -\lambda(u_5 - 2u_9)U,$$

где

$$U = 1 + \frac{P}{R}.$$

Уравнение упругой поверхности пластины, удовлетворяющее граничным условиям (25), примем в виде

$$u_i(\xi, \eta) = C(1 - 4\eta_i^2)^2 \cos\pi\xi_i. \tag{27}$$

Вычислим значения функции u_i во всех узлах сетки и подставим в систему уравнений (26).

Умножим результат подстановки последовательно на все u_i просуммируем в заданной области и результат приравняем нулю. Тогда получим линейное уравнение относительно λ. По найденному значению λ пользуясь формулой (23) находим значение критической нагрузки.

Значения коэффициентов длины $\alpha = a_{пр} : a$ для случая $b_1 : a = 0{,}5$ при различных отношениях P и R приведены в таблице 1 и на графике 1.

Значения α *Таблица 1*

R \ P	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,000	0,949	0,913	0,887	0,866	0,817
1,25	1,061	1,000	0,958	0,926	0,901	0,842
1,50	1,112	1,051	1,000	0,964	0,936	0,866
1,75	1,172	1,097	1,041	1,000	0,969	0,890
2,00	1,222	1,141	1,081	1,033	1,000	0,913
2,25	1,273	1,186	1,119	1,069	1,032	0,936
2,50	1,321	1,227	1,163	1,102	1,052	0,958
2,75	1,370	1,267	1,191	1,133	1,091	0,980
3,00	1,412	1,307	1,227	1,167	1,119	1,000

Вычислим значение T_{kp} для случая $P = 2{,}5$ и $R = 2$. Пользуясь графиком I находим значение $\alpha = 0{,}950$. Тогда, в соответствии с формулой (23), для T_{kp} получим следующее численное значение

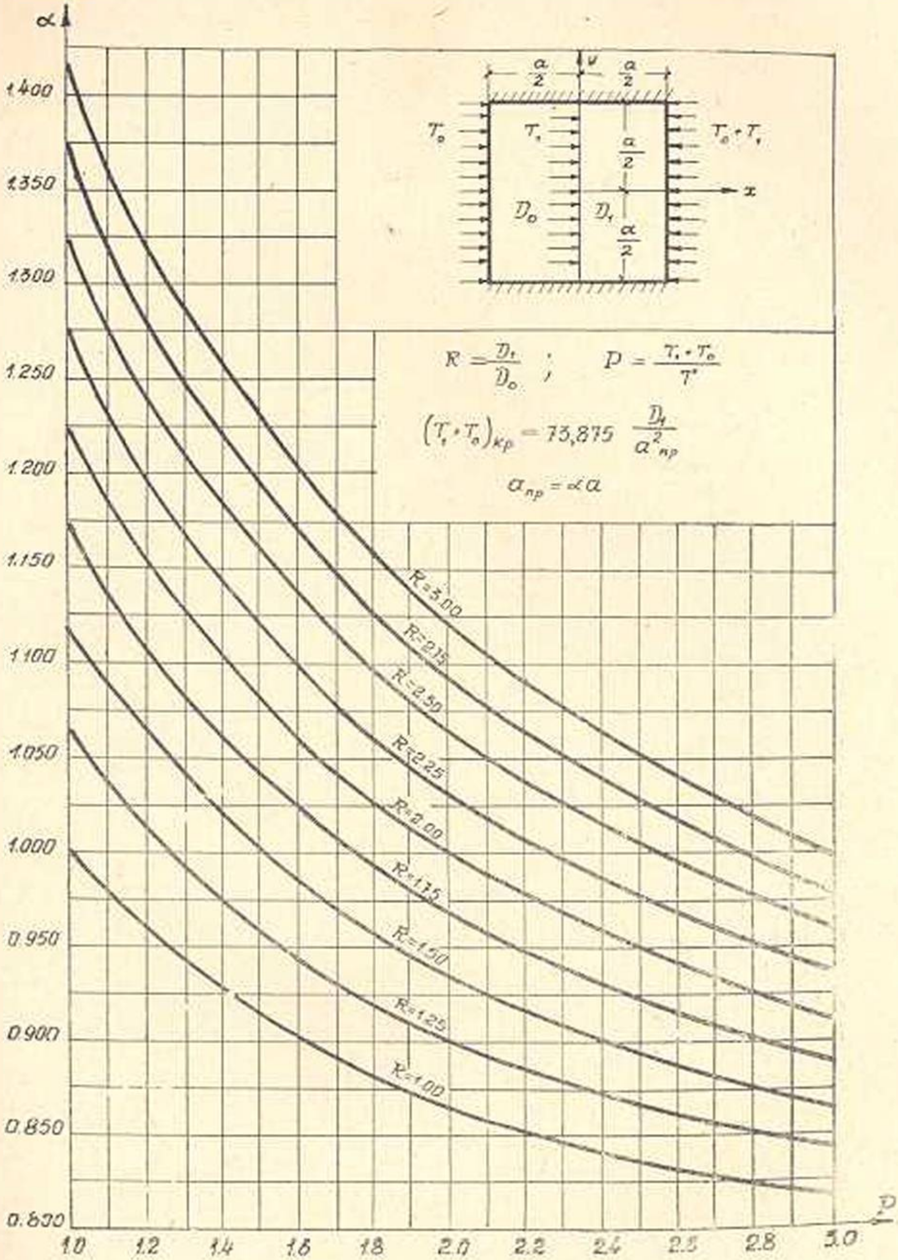


График 1.

$$(T_0 + T_1)_{kp} = 81,856 \frac{D_1}{a^2}.$$

Для других значений отношения b/a определение величины T_{kp} выполняется аналогично.

Днепропетровский
инженерно-строительный институт

Поступила 26 V 1958

Մ. Ռ. Ֆելդման

ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՒ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ կատարված է փոփոխական հատվածքի [1] ձողերի կայունության ու տատանումների հետազոտության եղանակի տարածումը այն խնդիրների վրա, որոնք կապված են թիթեղների ու թաղանթների ամրության, կայունության և տատանումների հետազոտության հետ։

Խնդրի լուծումը որոնվում է կոնտուրային ու սկզբնական պայմանները բավարարող [3] կոորդինատային ֆունկցիաների որոշող հաջորդականության տեսքով։

[3] ֆունկցիաները տեղադրելով [2] տարբերակային հավասարումների սիստեմի մեջ և գործողությունները կատարելով Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդին համապատասխանորեն, ստանում ենք [4] հավասարումների սիստեմը։

Ոչ տրիվիալ լուծում ստանալու համար անհրաժեշտ է, որ սիստեմի որոշիչը հավասար լինի զրոյի։

Որոշիչի ամենափոքր իրական արմատը տալիս է հետազոտվող խնդրի առաջին սեփական արժեքը։

Նկատենք, որ որոշիչի կարգը կախված է ոչ թե տիրույթում վերցված հանգույցների թվից, այլ [4] հավասարման մեջ մտնող ընդհանրացված կոորդինատների թվից։

Անհամասեռ խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ պարամետրերը [4]-ում համանմանման ճանապարհով գտնելուն։

Որպես կիրառություններ դիտարկվում են ազատ հենված քառակուսի թիթեղի տատանումների ու կայունության խնդիրները, երբ սալը իրեն հարթության մեջ բեռնավորված է հավասարաչափ բաշխված բեռով, ինչպես նաև աստիճանա-փոփոխական հաստությամբ այն քառակուսի թիթեղի կայունության խնդիրը, որը սեղմված է աստիճանական բեռով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фельдман М. Р.* Устойчивость стержней переменного сечения. Известия АН Армянской ССР (серия физ.-мат. наук), том X, № 4, 1957.
2. *Абрамов Г. Д.* Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями. Судпромгиз, 1951.
3. *Фельдман М. Р.* О применении метода Галеркина к конечноразностным уравнениям. Инженерный сборник. Институт механики Академии наук СССР, том. II, вып. 1, 1943.
4. *Фельдман М. Р.* Приближенный метод исследования статической и динамической устойчивости стержней. Материалы XV научно-технической конференции ДИСИ, 1955.
5. *Фельдман М. Р.* Определение критических угловых скоростей вала переменного сечения. Вопросы горной механики, том XXVII, Углетехиздат, 1957.
6. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. Издательство иностранной литературы, 1953.

7. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике, 195 .
8. *Лурье А. И.* Устойчивость пластинки, сжатой сосредоточенными силами. Труды ЛИИ, № 3, 1939 (раздел физ. мат. наук, в. 1).
9. *Филоненко-Бородич М. М.* Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. Прикладная математика и механика, № 1, 1946.
10. *Броуде Б. М.* Предельные состояния стальных балок. 1953.
11. *Сальвадори М. Д.* Численные методы в технике. Издательство иностранной литературы, 1955.
12. *Варвак П. М.* Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Издательство АН УССР, ч. I, 1948; ч. II, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

У Жуй-Фын

Неустановившаяся ползучесть составных цилиндрических труб в упругой среде

В настоящей работе рассматривается задача о равновесии составной цилиндрической трубы находящейся в упругой среде, под воздействием равномерного внутреннего давления, с учетом нелинейной ползучести. Задача решается методом линейных решений, данных в работе [1]. Особенность этого метода решения заключается в том, что в качестве первого приближения берется не упругое решение [4], а решение соответствующей задачи линейной ползучести. Именно благодаря этому значительно усиливается быстрота сходимости последовательных приближений.

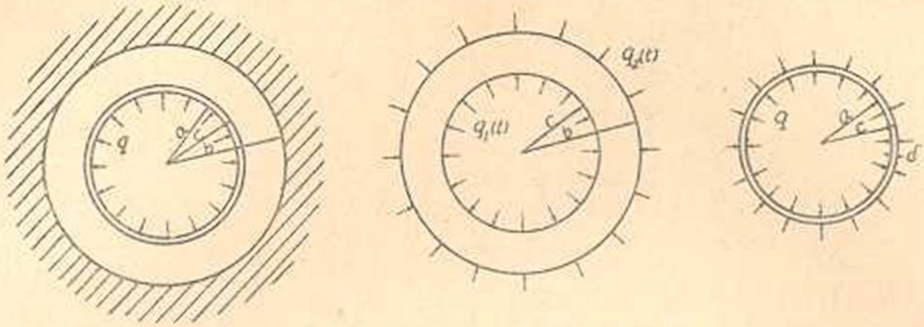
Решение этой задачи в предположении упругой стадии работы материала дано в работах В. Л. Федорова [2], [3]; Н. Х. Арутюняном, М. М. Манукяном дано решение задачи составных цилиндрических труб под действием внутреннего и внешнего равномерного давления с учетом нелинейной ползучести. Задача однородной трубы в упругой среде с учетом линейной ползучести материала была решена М. А. Задояном [5].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим круглую цилиндрическую трубу, состоящую из двух отдельных полых цилиндров с различными упругими свойствами, спаянных по поверхности их соприкосновения, находящуюся в упругой среде. Труба подвергается равномерному внутреннему давлению с интенсивностью q.

Обозначим через a, c, b радиусы двухслойной цилиндрической трубы (фиг. 1).

Не нарушая общности, для простоты будем считать внутренний слой тонкостенной трубой и допустим, что можно пренебречь ее ползучестью по сравнению с ползучестью внешнего слоя. В условиях совместной работы двух слоев тонкостенная труба будет находиться в состоянии равновесия под воздействием внутреннего и внешнего давления с интенсивностями q и $q_1(t)$, причем последнее является радиальной силой взаимодействия между двумя слоями. Внешний слой будет находиться в состоянии равновесия под воздействием $q_1(t)$ и $q_2(t)$.



Фиг. 1.

Здесь $q_2(t)$ является реактивной силой упругой среды. Принимаем гипотезу Винклера, т. е. $q_2(t) = -kU_b(t)$, где k — коэффициент упругости грунта ($кг/см^3$) и U_b — радиальное перемещение трубы при $r = b$. В силу симметрии касательные напряжения равны нулю.

§ 2. Основные уравнения и их решения

А. *Напряжения и перемещения тонкостенной трубы.*

Обозначим через $\sigma_{a\varphi}(t)$ и $U_a(t)$ тангенциальное напряжение и радиальное перемещение тонкостенной трубы. Как известно

$$\sigma_{a\varphi}(t) = \frac{aq - cq_1(t)}{\delta},$$

$$c = a + \delta, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{a\varphi}(t) = \frac{U_a(t)}{r} = \frac{aq - cq_1(t)}{\delta E_a}.$$

Откуда имеем

$$U_a(t)\Big|_{r=c} = \frac{acq - c^2 q_1(t)}{\delta E_a}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{a\varphi}(t)$ — тангенциальная деформация, E_a — модуль упругости тонкостенной трубы.

В. *Напряжения и перемещения внешнего слоя.*

Рассмотрим внешний слой как полый цилиндр под воздействием внешнего и внутреннего давлений $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

Принимая, что материал внешнего слоя несжимаем, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = 0$$

или

$$\frac{\partial U(t)}{\partial r} + \frac{U(t)}{r} = 0. \tag{3}$$

Интегрируя, получим

$$U(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c^2}{r} \theta(t),$$

$$U_b(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{c^2}{b}\theta(t),\qquad U_c(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}c\theta(t),$$

$$\varepsilon_r(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{c^2}{r^2}\theta(t),$$

и (4)

$$\varepsilon_\varphi(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{c^2}{r^2}\theta(t),$$

где $\theta(t)$ — пока неизвестная функция от времени.

В общем случае пространственного напряженного состояния, уравнения, связывающие интенсивность деформаций $\varepsilon_i(t)$ и интенсивность напряжений $\sigma_i(t)$ с учетом ползучести материала и изменения его модуля мгновенной деформации, имеют следующий вид [4]:

$$\varepsilon_i(t)=\frac{\sigma_i(t)}{3G(t)}-\int\limits_{\tau_1}^{t}\sigma_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G(\tau)}\right]d\tau-\int\limits_{\tau_1}^{t}F[\sigma_i(\tau)]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{5}$$

где $C(t,\tau)$ — мера ползучести материала при одноосном напряженном состоянии [6] и принято $C(t,\tau)=\varphi(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$; $F[\sigma_i(\tau)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, $G(t)$ — модуль мгновенной деформации сдвига, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки, t — время, γ — постоянная, определяемая из опыта.

При этом принято

$$\varepsilon_i(t)=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\varphi)^2+(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_r)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{r\varphi}^2+\gamma_{\varphi z}^2+\gamma_{rz}^2)},$$

$$\sigma_i(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\varphi)^2+(\sigma_\varphi-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6(\tau_{r\varphi}^2+\tau_{\varphi z}^2+\tau_{rz}^2)},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r-\sigma&=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_r, &\qquad \tau_{r\varphi}&=\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{r\varphi},\\
\sigma_\varphi-\sigma&=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_\varphi, &\qquad \tau_{\varphi z}&=\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{\varphi z},\\
\sigma_z-\sigma&=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_z, &\qquad \tau_{rz}&=\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{rz}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из (4) и (6) имеем

$$\varepsilon_i(t)=\frac{c^2}{r^2}\theta(t),$$

(7)

$$\sigma_r(t)-\sigma_\varphi(t)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i(t).$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_r(t)}{dr}+\frac{\sigma_r(t)-\sigma_\varphi(t)}{r}=0. \tag{8}$$

Внося (7) в (8) и интегрируя, получим

$$\sigma_r(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_c^r \frac{\sigma_i(t)}{r}\, dr + c_1.$$

Из условий при $r = c$, $\sigma_r(t) = -q_1(t)$ и при $r = b$, $\sigma_r(t) = -u_b k = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c^2 k}{b}\theta(t)$, находим

$$\sigma_r(t) + q_1(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_c^r \frac{\sigma_i(t)}{r}\, dr,$$

$$q_1(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c^2}{b} k\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_c^b \frac{\sigma_i(t)}{r}\, dr. \tag{9}$$

Для простоты, принимая $G(t) = G = \mathrm{const}$, из (5) и (7) получим

$$\frac{c^2}{r^2}\theta(t) = \frac{\sigma_i(t)}{3G} - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_i(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau. \tag{10}$$

Приняв

$$F[\sigma_i(\tau)] = \alpha\sigma_i(\tau) + \beta\sigma_i^m(\tau) \tag{11}$$

перепишем (10) в следующем виде

$$\sigma_i(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) K(t, \tau)\, d\tau - \beta \int_{\tau_1}^t [\sigma_i(\tau)]^m K(t, \tau)\, d\tau = M(r)\,\theta(t), \tag{12}$$

где

$$K(t, \tau) = 3G \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \qquad M(r) = \frac{3Gc^2}{r^2}.$$

Пользуясь методом последовательных приближений [1] и ограничиваясь первыми двумя членами, решение уравнения (12) ищем в следующей форме

$$\sigma_i(t) = \sigma_i^{(0)}(t) + \beta\sigma_i^{(1)}(t) + O(\beta^2).$$

В предыдущей формуле

$$\sigma_i^{(0)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_i^{(0)}(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = M(r)\,\theta(t), \tag{13}$$

$$\sigma_i^{(1)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_i^{(1)}(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = \int_{\tau_1}^t [\sigma_i^{(0)}(\tau)]^m K(t, \tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$\sigma_i^{(0)}(t) = M(r)\,\theta(t)\, H_0(t, \tau_1), \tag{15}$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = \left[1 + \frac{\alpha}{\theta(t)} \int_{\tau_1}^{t} \theta(\tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau\right],$$

$R(t, \tau, \alpha)$ [1] — резольвента ядра $K(t, \tau)$ и

$$R(t, \tau, \alpha) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta''(\tau) + \eta'^2(\tau) - \gamma\eta'(\tau)] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(z)} dz,$$

$$\eta(t) = \gamma \int_{\tau_1}^{t} [1 + 3G\alpha\varphi(\tau)] d\tau. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (14) и решая полученное уравнение, получим

$$\varepsilon_i^{(1)}(t) = [M(r)]^m H_1(t, \tau_1) + \alpha [M(r)]^m \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau, \tag{17}$$

где

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} [\theta(\tau) H_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau,$$

и

$$\sigma_i(t) = M(r)\theta(t) H_0(t, \tau_1) + \beta \Big\{ H_1(t, \tau_1) [M(r)]^m +$$

$$+ \alpha [M(r)]^m \int_{\tau_1}^{t} R(t, \tau, \alpha) H_1(\tau, \tau_1) d\tau \Big\}. \tag{18}$$

Внося $\sigma_i(t)$ из (18) в (19), получим

$$q_1(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c^2}{b} k\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{c}^{b} \frac{\sigma_i(t)}{r} dr. \tag{19a}$$

Из условия совместности радиальных перемещений в соприкасающихся поверхностях двух слоев трубы

$$U_a(t)\Big|_{r=c} = U(t)\Big|_{r=c},$$

получаем

$$q_1(t) = \frac{aq}{c} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta E_a}{c} \theta(t).$$

Подставляя последнее в (19a) и интегрируя по r от $r = c$ до $r = b$, получим

$$\frac{\sqrt{3}\, aq}{c} - S\theta(t) = \alpha N \int_{\tau_1}^{t} \theta(\tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau +$$

$$+ T\beta\left\{H_1(t, \tau_1) + \alpha\int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha)\, d\tau\right\}, \tag{19}$$

где

$$S = \frac{3}{2}\,\frac{c^2k}{b} + \frac{3}{2}\,\frac{\delta E_a}{c} + \frac{3G(b^2 - c^2)}{b^2},$$

$$N = \frac{3G(b^2 - c^2)}{b^2}, \qquad T = \frac{(3G)^m}{m}\cdot\frac{b^{2m} - c^{2m}}{b^{2m}}.$$

Уравнение (19) решается так же, как и уравнение (12)

$$\theta_0(t) + \frac{\alpha N}{S}\int_{\tau_1}^{t}\theta_0(\tau) R(t, \tau, \alpha)\, d\tau = \frac{\sqrt{3}\, aq}{cS}, \tag{20}$$

$$\theta_1(t) + \frac{\alpha N}{S}\int_{\tau_1}^{t}\theta_1(\tau) R(t, \tau, \alpha)\, d\tau =$$

$$= -\frac{T}{S}\left\{H_1(t, \tau_1) + \alpha\int_{\tau_1}^{t} R(t, \tau, \alpha) H_1(\tau, \tau_1)\, d\tau\right\}. \tag{21}$$

Рассматривая $R(t, \tau, \alpha)$ как новое ядро, находим

$$\theta_0(t) = \frac{\sqrt{3}\, aq}{cS}\left[1 + \frac{\alpha N}{S}\int_{\tau_1}^{t}\tilde{R}(\tau, \alpha)\, d\tau\right]. \tag{22}$$

$$\theta_1(t) = -\frac{T}{S}\left\{H_1(t, \tau_1) + \alpha\int_{\tau_1}^{t} R(t, \tau, \alpha) H_1(\tau, \tau_1)\, d\tau\right\} -$$

$$-\frac{\alpha N}{S}\int_{\tau_1}^{t}\frac{T}{S}\left\{H_1(\tau, \tau_1) + \alpha\int_{\tau_1}^{\tau} R(\tau, z, \alpha) H_1(z, \tau_1)\, dz\right\}\tilde{R}(\tau, \alpha)\, d\tau, \tag{23}$$

где $\tilde{R}(\tau, \alpha)$ — новая резольвента ядра $R(t, \tau, \alpha)$

$$\tilde{R}(\tau, \alpha) = 3G\gamma\alpha\varphi(\tau_1)\, e^{-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}\left[1 + 3G\alpha\varphi(z)\left(1 - \frac{\alpha N}{S}\right)\right] dz}, \tag{24}$$

а

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \beta\theta_1(t) + O(\beta^2). \tag{25}$$

Подставляя (24) и (25) в (18), получим

$$\sigma_i(t) = M(r)\,\theta_0(t)\, H_0(t, \tau_1) + \beta M(r)\,\theta_1(t)\, H_0(t, \tau_1) +$$

$$+ \beta\,[M(r)]^m\left\{\int_{\tau_1}^{t}[\theta(\tau) H_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau)\, dr +\right.$$

$$+\alpha\int_{\tau_1}^{t}R(t,\tau,\alpha)\,d\tau\int_{\tau_1}^{\tau}[\theta(z)H_0(z,\tau_1)]^m K(\tau,z)\,dz\Big\}. \tag{26}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned}\theta_0(t)+\alpha\int_{\tau_1}^{t}\theta_0(\tau)R(t,\tau,\alpha)\,d\tau=\psi_1(t,\tau_1)\\ \theta_1(t)+\alpha\int_{\tau_1}^{t}\theta_1(\tau)R(t,r,\alpha)\,d\tau=\psi_2(t,\tau_1)\end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i^{(0)}(t)=M(r)[\psi_1(t,\tau_1)+\beta\psi_2(t,\tau_1)]\\ \sigma_i^{(1)}(t)=[M(r)]^m[\psi_3(t,\tau_1)+\psi_4(t,\tau_1)]\end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\psi_3(t,\tau_1)&=\int_{\tau_1}^{t}[\psi_1(\tau,\tau_1)+\beta\psi_2(\tau,\tau_1)]^m K(t,\tau)\,d\tau\\ \psi_4(t,\tau_1)&=\alpha\int_{\tau_1}^{t}R(t,\tau,\alpha)\,d\tau\int_{\tau_1}^{\tau}[\psi_1(z,\tau_1)+\beta\psi_2(z,\tau_1)]^m K(\tau,z)\,dz\end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Уравнение (26) приводим к виду

$$\sigma_i(t)=M(r)\psi_1(t,\tau_1)+\beta\{M(r)\psi_2(t,\tau_1)+$$
$$+[M(r)]^m[\psi_3(t,\tau_1)+\psi_4(t,\tau_1)]\} \tag{30}$$

$\theta_0(t)$ и $\psi_1(t,\tau_1)$ назовем функциями влияния линейной ползучести, а $\theta_1(t)$, $\psi_2(t,\tau_1)$, $\psi_3(t,\tau_1)$ и $\psi_4(t,\tau_1)$ — функциями нелинейной ползучести.

Из (15), (20), (24), (27), (29) имеем

$$\left.\begin{aligned}&H_0(\tau_1,\tau_1)=1,\\ &\psi_1(\tau_1,\tau_1)=\theta_0(\tau_1)=\frac{\sqrt{3}\,aq}{cs},\\ &\psi_2(\tau_1,\tau_1)=\psi_3(\tau_1,\tau_1)=\psi_4(\tau_1,\tau_1)=\theta_1(\tau_1)=H_1(\tau_1,\tau_1)=0\end{aligned}\right\}. \tag{31}$$

Подставляя (30) в (9) и интегрируя, получим

$$\sigma_r(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\delta E_a}{c}[\theta_0(t)+\beta\theta_1(t)]+\frac{\sqrt{3}\,G(r^2-c^2)}{r^2}\times$$
$$\times[(\psi_1(t,\tau_1)+\beta\psi_2(t,\tau_1)]+$$
$$+\frac{(3G)^m}{\sqrt{3}\cdot m}\cdot\frac{r^{2m}-c^{2m}}{r^{2m}}\cdot\beta[\psi_3(t,\tau_1)+\psi_4(t,\tau_1)]-\frac{aq}{c}. \tag{32}$$

Из (7) и (23) получим

$$\sigma_\varphi(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\delta E_a}{c}[\theta_0(t)+\beta\theta_1(t)] + \sqrt{3}G\left(1+\frac{c^2}{r^2}\right)\psi_1(t,\tau_1) +$$

$$+\beta\left\{\sqrt{3}G\left(1+\frac{c^2}{r^2}\right)\psi_2(t,\tau_1) + \frac{(3G)^m}{\sqrt{3}\cdot m}\left[1+(2m-1)\cdot\frac{c^{2m}}{r^{2m}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times[\psi_3(t,\tau_1)+\psi_4(t,\tau_1)]\right\}. \qquad (33)$$

Из (4) и (25) получим

$$U(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{c^2}{r}[\theta_0(t)+\beta\theta_1(t)]. \qquad (34)$$

§ 3. Железобетонная труба

А. *Мера ползучести и функция* $F(\sigma)$.

Мы попытались описать экспериментальные кривые ползучести бетона, полученные К. С. Карапетяном [6] в лаборатории ползучести и прочности Института математики и механики АН Армянской ССР. Получено следующее соотношение между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon_a(t) = \left(\frac{4450}{\tau^2+3030}+0{,}28\right)[1-e^{-0{,}03(t-\tau)}][\alpha\sigma(t)+\beta\sigma^4(t)]\times 10^{-5}.$$

Здесь $\alpha = 0{,}999995$, $\beta = 5\cdot 10^{-6}$ *см*^{6}/*кг*^{3}, $\alpha+\beta = 1$,

$$\varphi(\tau) = \left(\frac{4450}{\tau^2+3030}+0{,}28\right)\times 10^{-5}.$$

При $\sigma = 1$ получаем меру ползучести $C(t,\tau)$ для $\sigma \geqslant 0{,}5\,R$, где R — прочность данного бетона.

$$C(t,\tau) = \left(\frac{4450}{\tau^2+3030}+0{,}28\right)[1-e^{-0{,}03(t-\tau)}]\times 10^{-5}\ кг/см^2. \qquad (35)$$

При $\tau \geqslant 14$ дней и $(t-\tau) \geqslant 40$ дней уравнение (34) хорошо совпадает с экспериментальными кривыми. Наибольшая погрешность не превышает 20%. При $\sigma < 0{,}5\,R$ наибольшая погрешность не превышает 26%.

В. *Пример*. В качестве приложения рассмотрим железобетонную трубу, находящуюся под воздействием равномерного внутреннего давления q в упругой среде, причем $a = 200$ *см*, $b = 300$ *см*, $c = 200{,}6$ *см*, $\delta = 0{,}6$ *см*, $G_c = 0{,}7\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, $E_a = 2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $\nu_a = 0{,}3$, $\tau_1 = 180$ дней, $k = 100$ *кг/см*^{3}, $R = 40$ *кг/см*^{2} (прочность армированного бетона на растяжение).

Для простоты вычислений принимаем

$$\varphi(\tau) = C_0 = 0{,}28\cdot 10^{-5};\ \text{т. е.}\ C(t,\tau) = 0{,}28\,[1-e^{-0{,}03(t-\tau)}]\times 10^{-5}\ см^2/кг.$$

По формулам (22)—(34) при помощи численного интегрирования по формуле Симпсона получены результаты, которые приведены в табл. 1 (при $q = 10\ кг/см^2$), в табл. 2 (при $q = 15\ кг/см^2$) и в табл. 3 (при $q = 20\ кг/см^2$).

Таблица 1

Напряжения (в $кг/см^2$) и перемещения (в *мм*) при $\tau = 180$ *дней* и $q = 10\ кг/см^2$

t (*дней*)	С учетом линейной ползучести						С учетом нелинейной ползучести					
	$\sigma_\varphi(t)$ $(r=c)$	$\sigma_\varphi(t)$ $(r=b)$	$\sigma_r(t)$ $r=c$	$\sigma_r(t)$ $r=b$	$\sigma_{a\varphi}(t)$	$U_c(t)$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=c$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=b$	$\sigma_r(t)$ $r=c$	$\sigma_r(t)$ $r=b$	$\sigma_{a\varphi}(t)$	$U_c(t)$
180	19.30	11.35	−9.39	−1.38	204.9	0.205	19.30	11.35	−9.39	−1.38	204.9	0.205
210	17.53	10.24	−9.23	−1.72	259.6	0.260	17.13	9.90	−9.23	−1.83	258.1	0.259
240	16.46	9.46	−9.16	−1.99	281.6	0.278	15.93	9.03	−9.17	−2.12	277.1	0.278
330	14.69	8.23	−9.13	−2.43	291.0	0.288	14.06	7.69	−9.14	−2.58	287.5	0.288
510	14.44	8.10	−9.13	−2.49	291.0	0.288	13.80	7.54	−9.14	−2.64	287.5	0.288

Таблица 2

Напряжения (в $кг/см^2$) и перемещения (в *мм*) при $\tau = 180$ *дней* и $q = 15\ кг/см^2$

t (*дней*)	С учетом линейной ползучести						С учетом нелинейной ползучести					
	$\sigma_\varphi(t)$ $r=c$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=b$	$\sigma_r(t)$ $r=c$	$\sigma_r(t)$ $r=b$	$\sigma_{a\varphi}(t)$	$U_c(t)$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=c$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=b$	$\sigma_r(t)$ $r=c$	$\sigma_r(t)$ $r=b$	$\sigma_{a\varphi}(t)$	$U_c(t)$
180	29.3	16.94	−14.06	−2.13	306.5	0.21	29.30	16.94	−14.06	−2.13	306.5	0.210
210	27.11	15.46	−13.89	−2.13	389.7	0.39	23.64	14.60	−13.80	−2.84	382.8	0.380
240	25.29	14.12	−13.70	−2.52	420.9	0.422	21.50	12.21	−13.68	−3.30	407.2	0.410
330	22.85	12.46	−13.65	−3.13	432.5	0.438	18.79	10.22	−13.64	−4.03	422.6	0.424
510	22.35	12.06	−13.65	−3.22	432.5	0.438	18.23	9.74	−13.64	−4.12	422.6	0.424

Талбица 3

Напряжения (в $кг/см^2$) и перемещения (в *мм*) при $\tau = 180$ *дней* и $q = 20\ кг/см^2$

t (*дней*)	С учетом линейной ползучести						С учетом нелинейной ползучести					
	$\sigma_\varphi(t)$ $r=c$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=b$	$\sigma_r(t)$ $r=c$	$\sigma_r(t)$ $r=b$	$\sigma_{a\varphi}(t)$	$U_c(t)$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=c$	$\sigma_\varphi(t)$ $r=b$	$\sigma_r(t)$ $r=c$	$\sigma_r(t)$ $r=b$	$\sigma_{a\varphi}(t)$	$U_c(t)$
180	38.67	22.71	−18.71	−2.76	409.8	0.411	38.67	22.71	−18.71	−2.76	409.8	0.411
210	35.32	20.47	−18.40	−3.74	519.3	0.519	24.86	17.88	−18.50	−4.30	495.7	0.497
240	32.92	18.86	−18.24	−4.28	561.2	0.563	22.34	15.91	−18.40	−6.00	519.3	0.521
330	29.38	16.47	−18.20	−4.85	582.0	0.584	16.76	12.65	−18.30	−7.24	538.7	0.540
510	28.88	16.20	−18.20	−4.99	582.0	0.584	16.20	12.37	−18.30	−7.50	538.6	0.540

Одновременно по формуле В. Л. Федорова [2]

$$\sigma_{a\varphi} = \frac{qaE_a}{\delta E_a + kb\left(a + \frac{\delta}{2}\right)}$$

для случая, когда бетон не работает на растяжение при $q = 20\ кг/см^2$ получим $\sigma_{a\varphi} = 1110\ кг/см^2$.

Из рассмотрения таблиц 1, 2 и 3 приходим к заключениям:

1) Напряжение $\sigma_\varphi(t)$, вследствие ползучести бетона, затухает. При низком напряжении влияние нелинейной ползучести очень малое, а с возрастанием напряжений деформация нелинейной ползучести сильно влияет на напряжения; в данном случае при $q=10\,кг/см^2$ влияние линейной и нелинейной ползучести почти одинаково, а при $q=15\,кг/см^2$ и $q=20\,кг/см^2$ затухание напряжений $\sigma_\varphi(t)$ с учетом линейной ползучести достигает до 24% и 26%, а с учетом нелинейной ползучести уже до 38% и 57%, т. е. при большом напряжении учет влияния нелинейной ползучести стал необходимым.

2) Напряжение $\sigma_r(t)$, вследствие ползучести бетона, растет. Но в данном случае, с инженерной точки зрения, рост напряжений $\sigma_r(t)$ не имеет практического значения.

3) Напряжение в арматуре $\sigma_{a\varphi}(t)$, вследствие ползучести бетона, увеличивается до 45%. При учете влияния нелинейной ползучести рост напряжений $\sigma_{a\varphi}(t)$ уменьшается.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 III 1959

Ու Ժույ-ֆին

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՉԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ոչ-գծային սողքի հաշվառումով ուսումնասիրվում է առաձգական միջավայրում գտնվող բաղադրյալ գլանային խողովակի հավասարակշռությունը ներքին հավասարաչափ ճնշման ազդեցության տակ։ Օգտագործելով հավասարակշռության հավասարումը և ընդունելով արտաքին շերտի նյութը անսեղմելի, խնդիրը բերվում է լարումների ինտենսիվության նկատմամբ Վոլտերրի տիպի ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարման։

Այդ հավասարման լուծումը որոնվում է փոքր պարամետրի նկատմամբ աստիճանային շարքի տեսքով։ Առաջին մոտավորությունը ներկայացնում է խնդրի լուծումը գծային սողքի հաշվառումով։

Երկաթբետոնե խողովակի համար բերված են թվային օրինակներ և կազմված են աղյուսակներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.*, Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. „Прикладная математика и механика", № 6, 1958.
2. *Федоров В. Л.* Расчет облицовок напорных гидротехнических тоннелей на внутреннее давление. Изв. НИИГ, т. 26, 1939.
3. *Галеркин Б. Г.* Напряженное состояние цилиндрической трубы в упругой среде Собрание сочинений, т. 1, 1952.

4. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Ползучесть составных цилиндрических труб. Изв АН Армянской ССР, т. 10, № 6, 1951.
5. *Задоян М. А.* Напряженное состояние цилиндрической трубы в упругой среде с учетом ползучести материала. Изв. АН Армянской ССР, т. 9, № 9, 1956.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.–Л., 1952.
7. *Карапетян К. С.* (в печати).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

ФИЗИКА

Р. С. Оганесян

О гравитационной неустойчивости слоя с внутренним магнитным полем, направленным вдоль слоя

В настоящей работе получены критерии неустойчивости плоского слоя проводящей несжимаемой жидкости под действием собственного гравитационного поля и внутреннего магнитного поля, параллельного граничным плоскостям.

1. В работе [1] был рассмотрен вопрос неустойчивости плоско-параллельного слоя проводящей жидкости под действием собственного поля гравитационных сил в присутствии магнитного поля, перпендикулярного к его плоскости.

Интересным является и тот случай, когда протяженное магнитное поле, параллельное граничным плоскостям слоя, сосредоточено только внутри его. При этом неустойчивость рассматривается по отношению к малым одномерным поперечным возмущениям, изменяющим форму свободной поверхности равновесного слоя.

Представим себе проводящий жидкий плоскопараллельный слой бесконечной длины, толщиной $2h$, внутри которого действует однородное протяженное магнитное поле напряженностью H_0. Выберем систему прямоугольных координат так, чтобы горизонтальная ось x совпадала с невозмущенным верхним уровнем слоя, а ось y была направлена вертикально вверх.

Будем предполагать (как это делалось в работе [1]), что слой подвергается некоторому возмущению, симметрично по отношению к центральной плоскости $y = -h$. Исходя из этой симметрии можно ограничиться рассмотрением только верхнего полуслоя [2].

Напишем уравнение свободной поверхности слоя после возмущения в виде

$$y = f(x). \tag{1}$$

Задача решается в линейном приближении, предполагая, что $|f(x)| \ll h$.

Произвольное возмущение $f(x)$, по теореме Фурье, можно заменить суммой его слагающих типа $a \cos kx$ и, в силу линейности, рассматривать устойчивость слоя по отношению к каждой слагающей отдельно.

Здесь a — амплитула, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Решение задачи устойчивости или неустойчивости слоя по отношению к возмущениям типа $y = a \cos kx$, при наличии внутреннего магнитного поля, сводится к подсчету изменения суммарной (потенциальной и магнитной) энергии.

Изменение потенциальной энергии гравитирующей массы, отнесенное к единице длины слоя, определяется по формуле [1]

$$\delta\Omega = \pi G \rho^2 h a^2 \left[1 - \frac{1}{z\,(1 + thz)}\right] \tag{2}$$

где ρ — макроскопическая плотность массы

G — гравитационная постоянная

$$z = kh = 2\,\pi h/\lambda. \tag{3}$$

В вопросах устойчивости тех или другух геометрических форм гравитирующей материи определяющим является эффект дальности действия сил, связывающий свойства среды на макроскопических расстояниях [3]. Дальнодействующий характер гравитационных взаимодействий, при подсчете изменения энергии (2), был учтен путем комбинации законов гравитации с гипотезой сплошности материальной среды (именно, с помощью уравнения макроскопической гидродинамики) [4].

2. Изменение магнитной энергии единицы длины слоя будем подсчитывать по методу Чандрасекара и Ферми [5], используя теорему сохранения магнитного потока, в предположении бесконечной электропроводности гравитирующей среды. Условие неизменности магнитного потока через любое сечение, перпендикулярное к оси x, можно выразить следующим образом:

$$\int_{-h}^{0} H_0 dy = \int_{-h}^{a\cos kx} (H + h_x)\, dy = \mathrm{const}, \tag{4}$$

где H_0 — первоначальное поле, H — некоторое среднее поле по направлению оси x, h_x — компонента добавочного магнитного поля $\vec{h}$. В рассматриваемом случае $\vec{h}$ можно представить в виде:

$$h = \mathrm{grad}\, \Psi, \tag{5}$$

где $\Psi(x, y)$ является магнитостатическим потенциалом и удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \Psi = 0$.

Решение для функции $\Psi(x, y)$ представим в виде ряда по степеням амплитуды возмущения

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n B_n}{nk} \,\mathrm{ch}\, kn\,(h + y) \sin knx \tag{6}$$

где $\{B_n\}$ $n = 1, 2, 3, \cdots$ — неизвестные константы, подлежащие определению.

Из (4), (5) и (6) можно написать

$$N = \int\limits_{-h}^{a\cos kx} [H + aB_1 \operatorname{ch} k(h+y) \cos kx + a^2 B_2 \operatorname{ch} 2k(h+y) \cos 2kx + \cdots] dy.$$

С точностью до второго порядка относительно a, найдем

$$N = H(a\cos kx + h) + \frac{aB_1}{k} \operatorname{sh} kh \cos kx +$$

$$+ a^2 B_1 \operatorname{ch} kh \cos^2 kx + \frac{a^2 B_2}{2k} \operatorname{sh} 2kh \cos 2kx. \tag{7}$$

С другой стороны $N = H_0 h$. Тождественное равенство последних двух выражений приводит к следующей системе уравнений:

$$H_0 h = Hh + \frac{1}{2} a^2 B_1 \operatorname{ch} kh;$$

$$Ha + \frac{aB_1}{k} \operatorname{sh} kh = 0; \tag{8}$$

$$a^2 B_1 \operatorname{ch} kh + \frac{a^2 B_2}{k} \operatorname{sh} 2kh = 0.$$

Решая эту систему, найдем:

$$B_1 = -\frac{Hz}{h \operatorname{sh} z};$$

$$B_2 = -\frac{Hz^2}{h^2 \operatorname{sh}^2 z}; \tag{9}$$

$$H_0 = H\left(1 - \frac{a^2}{2h} \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\right),$$

где $z = kh$.

В рассматриваемом приближении, из последнего соотношения (9) получим:

$$H = H_0\left(1 + \frac{a^2}{2h} \cdot \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\right). \tag{10}$$

Следовательно, возмущение приводит к увеличению среднего значения магнитного поля внутри слоя. Важно отметить, что это значение зависит от волнового числа и в рассматриваемом приближении — порядка a^2. Изменение магнитной энергии, отнесенное к единице длины, можно подсчитать по формуле:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi\lambda} \left\{ \int\limits_0^\lambda dx \left[\int\limits_{-h}^{a\cos kx} (H^2 + 2(\vec{H}\vec{h}) + h_x^2 + h_y^2)\, dy - \int\limits_{-h}^{0} H_0^2 dy \right] \right\} \tag{11}$$

Имея в виду (5), (6), из (11) получим:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi\lambda}\left\{\int_0^\lambda dx\left[\int_{-h}^{a\cos kx} H^2 dy + 2HaB_1\cos kx\int_{-h}^{a\cos kx}\operatorname{ch} k(h+y)\,dy + \right.\right.$$

$$+ 2Ha^2B_2\cos 2kx\int_{-h}^{a\cos kx}\operatorname{ch} 2k(h+y)\,dy + a^2B_1^2\int_{-h}^{a\cos kx}[\operatorname{ch}^2 k(h+y)\cos^2 kx +$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh}^2 k(h+y)\operatorname{sh}^2 kx]\,dy - \int_{-h}^{0} H_0^2 dy\right]\right\}. \quad (12)$$

Выполняя интегрирование, найдем

$$\delta M = \frac{a^2 H_0^2}{16\pi h}\cdot\frac{z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (13)$$

Изменение суммарной энергии будет (см. (2) и (13))

$$\delta\Omega + \delta M = \pi G\rho^2 h a^2 F_s(z) \quad (14)$$

где

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1+thz)} + \left(\frac{H}{H_s}\right)^2\frac{z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \quad (15)$$

и

$$H_s = 4\pi\rho h\sqrt{G} \quad (16)$$

(знак нуль у H опущен).

Асимптотические значения функции $F_s(z)$ таковы:

$$\lim_{z\to 0} F_s(z) = -\infty; \qquad \lim_{z\to\infty} F_s(z) \to +\infty, \quad (17)$$

следовательно:

$$\delta\Omega + \delta M > 0 \quad \text{при всех} \quad z > z_s$$

$$\delta\Omega + \delta M < 0 \quad \text{при всех} \quad z < z_s,$$

где z_s является корнем уравнения

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1+thz)} + \left(\frac{H}{H_s}\right)^2 z\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, все гармоники возмущения, для которых $z > z_s$ являются устойчивыми, а в противном случае $z < z_s$ — неустойчивыми. Неустойчивость наступает при сравнительно больших длинах волн. Критическое значение длины волны, начиная с которой возникает неустойчивость ($\lambda_s = 2\pi h/z_s$) сильно зависит от напряженности магнитного поля.

С увеличением напряженности магнитного поля сдвигается предельная длина волны неустойчивости в направлении сокращения области неустойчивых гармоник.

Уравнение (18) таким образом выражает критерий неустойчивости слоя при наличии внутреннего магнитного поля, направленного вдоль слоя.

Для нахождения критического значения z_s (следовательно и λ_s) можно решить уравнение (18) графическим путем. Однако, имея в виду, что при $H = H_s$; $z_s = 0,368$ и при увеличении H, z_s уменьшается, можно ограничиться решением следующего уравнения:

$$z^2 + z + c = 0; \quad \text{где} \quad c = -\left[1 + \left(\frac{H}{H_s}\right)^2\right],$$

которое получается путем замены гиперболических функций их главными значениями при $z \to 0$ (берется положительный корень, так как $0 \leqslant z \leqslant \infty$).

3. Найдем, среди неустойчивых, грамонику обладающую максимальной неустойчивостью. Предполагая зависимость амплитуды от времени, выведем уравнение движения в форме Лагранжа.

Кинетическая энергия жидких частиц, приходящая на единицу длины, была расчитана нами в работе [1], она выражается формулой.

$$\delta T = \frac{h\rho \operatorname{ch} z}{4 z \operatorname{sh} z}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \tag{19}$$

Для функции Лангража найдем (см. (14) и (19))

$$L = \frac{h\rho \operatorname{ch} z}{4z \operatorname{sh} z}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \pi G\rho^2 h a^2 F_s(z).$$

Уравнение движения будет иметь вид:

$$\ddot{a} + 4\pi G\rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z)\, a = 0,$$

решение которого суть:

$$a = \operatorname{const} \exp\left(\pm P_s t\right),$$

где

$$P_s^2 = -4\pi G\rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z),$$

или

$$P_s^2 = -4\pi G\rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\left\{1 - \frac{1}{z(1 + thz)} + \left(\frac{H}{H_s}\right)^2 \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\right\}.$$

Исследование поведения функции $P_s^2(z)$ в интервале $0 \leqslant z \leqslant \infty$ приводит к выводу, что для всех устойчивых гармоник ($z > z_s$) изменение амплитуды во времени, как и следовало ожидать, совершается периодически. Для неустойчивых гармоник амплитуда неограниченно возрастает со временем и следовательно слой должен распадаться.

Максимально неустойчивую грамонику, при которой амплитуда нарастает наиболее быстро, можно найти из условия:

$$\frac{d}{dz}\{P_s^2(z)\}=0.$$

При $H=H_s$ корень этого уравнения есть $z_m=0{,}175$, следовательно при $H=H_s$ мы можем заменить гиперболические функции своими аргументами и приблизительно ограничиться членами, содержащим z не выше второй степени, что даст:

$$Az^2+Bz-1=0,$$

где

$$A=2\left[1+\left(\frac{H}{H_s}\right)^2\right];\qquad B=3+2\left(\frac{H}{H_s}\right)^2.$$

В рассматриваемом приближении максимальное значение P_s при котором наступает максимальная неустойчивость, будет:

$$P_{sm}=(4\pi G\rho)^{1/2}\left\{\frac{z_m}{1+z_m}-z_m^2+\left(\frac{H}{H_s}\right)^2 z_m\right\}^{1/2}.$$

Обычно, длина волны максимально неустойчивой гармоники $\lambda_m=2\pi h/z_m$ рассматривается как линейный размер сечения тех образований, на которые распадается слой, а P_{sm}^{-1} — как время релаксации, т. е. время, необходимое для перехода одной конфигурации в другую.

В качестве конкретного примера рассмотрим галактический слой, предполагая, что протяженное магнитное поле сосредоточено только внутри слоя параллельно граничным плоскостям.

Положим

$$h=100\,пс,\quad \rho=2\cdot10^{-23}гр/см^3.$$

При этом найдем $H_s=2\cdot10^{-5}$ *гаусс*. Задавая ряд конкретных значений отношению H/H_s с помощью полученных формул можно вычислить z_s; z_m $P_{sm}/(4\pi G\rho)^{1/2}$ (табл. 1) и соответственно с этими λ_s; λ_m; P_{sm}^{-1} (табл. 2).

Таблица 1

Зависимость z_s; z_m; $P_{sm}/(4\pi G\rho)^{1/2}$ от отношения H/H_s

H/H_s	z_s	z_m	$P_{sm}/(4\pi G\rho)^{1/2}$
0	0,64	0,3	0,371
1	0,366	0,175	0,296
1,2	0,312	0,151	0,268
1,5	0,247	0,120	0,242
1,75	0,204	0,100	0,223
2	0,168	0,084	0,200
3	0,086	0,045	0,148
5	0,036	0,018	0,095
7	0,020	0,009	0,70
10	0,009	0,005	0,005

Таблица 2

Зависимость λ_s; λ_m; P_{sm}^{-1} от напряженности магнитного поля

H 10^{-5} гаусс	λ_s парсек	λ_m парсек	P_{sm}^{-1} годы
0	$0{,}980\cdot10^3$	$2{,}100\cdot10^3$	$2{,}086\cdot10^7$
2	$1{,}716\cdot10^3$	$3{,}584\cdot10^3$	$2{,}614\cdot10^7$
2,4	$2{,}013\cdot10^3$	$4{,}161\cdot10^3$	$2{,}888\cdot10^7$
3	$2{,}544\cdot10^3$	$5{,}235\cdot10^3$	$3{,}144\cdot10^7$
3,50	$3{,}080\cdot10^3$	$6{,}283\cdot10^3$	$3{,}475\cdot10^7$
4	$3{,}740\cdot10^3$	$7{,}480\cdot10^3$	$3{,}870\cdot10^7$
6	$7{,}308\cdot10^3$	$1{,}396\cdot10^4$	$5{,}230\cdot10^7$
10	$2{,}023\cdot10^4$	$3{,}490\cdot10^4$	$8{,}190\cdot10^7$
14	$3{,}141\cdot10^4$	$6{,}980\cdot10^4$	$1{,}105\cdot10^8$
20	$6{,}980\cdot10^4$	$1{,}256\cdot10^5$	$1{,}548\cdot10^8$

Анализ полученных результатов, а также численных данных приводимых в таблицах 1 и 2, показывает, что неустойчивость слоя при наличии внутреннего магнитного поля, направленного вдоль слоя, возможна при любом конечном значении H. Однако, с ростом H/H_s возрастают длины волн неустойчивых и максимально неустойчивых гармоник, а также время релаксации.

Совершенно иной картина гравитационной неустойчивости слоя при наличии магнитного поля, перпендикулярного к его плоскости, рассмотренная в работе [1]. Там, при значении $H = H_s$, совершенно исключалась возможность появления неустойчивых гармоник при любой длине волн.

Следовательно, при одинаковых значениях напряженности магнитных полей, картина гравитационной неустойчивости может резко меняться в зависимости от направления этих полей.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить профессора А. А. Власова за ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22 IX 1958

Ռ. Ս. Հովհաննիսյան

ՇԵՐՏԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՆՐԱ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ՈՒՂՂՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված է հեղուկ հաղորդիչ շերտի գրավիտացիոն անկայունության հարցը լայնական տատանումների նկատմամբ իր սեփական գրավիտացիոն դաշտի և շերտի երկարությամբ ուղղված ներքին մագնիսական դաշտի ներկայությամբ։

Ստացված է շերտի անկայունության չափանիշը՝ կախված մագնիսական դաշտի լարվածությունից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оганесян Р. С.* О гравитационной неустойчивости плоскопараллельного слоя проводящей жидкости при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, XI, № 4, 1958.
2. *Власов А. А.* О переносе массы и заряда поверхностными волнами. ЖЭТФ, т. 27, вып. 2 (8), 1954.
3. *Власов А. А.* Теория многих частиц. Гостехиздат, 1950.
4. *Оганесян Р. С.* О гравитационной устойчивости цилиндрической конфигурации. Астр. журн. т. 33, вып. 6.
5. *Чандрасекар С.* и *Ферми Э.* Проблемы современной физики (магнитная гидродинамика), 2, 108, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

ФИЗИКА

Г. М. Гарибян и Г. А. Чаликян

Черенковское и переходное излучения частицы, пролетающей через пластинку*

В работе [1] было определено поле излучения, возникающего при движении заряженной частицы из одной полубесконечной среды ($z<0$) в другую ($z>0$), различающиеся между собой в отношении диэлектрических и магнитных свойств. В настоящей работе методом, использованным в [1] исследовано переходное и черенковское излучения, возникающие при движении заряженной частицы через пластину вещества.

Аналогичная задача была рассмотрена также Пафомовым [2], следуя работе [3]. Приведенную в [2] формулу для переходного излучения можно получить из результатов настоящей работы, если предположить что $R \gg a$, где R — расстояние от точки входа (или выхода) частицы в пластину до точки поля, а a — толщина пластины.

1. Пусть заряженная частица, обладающая скоростью v, движется вдоль положительного направления оси z и пересекает пластину вещества, ограниченную плоскостями $z=0$ и $z=a$ и расположенную в вакууме (ε — диэлектрическая постоянная вещества).

Суммарное электромагнитное поле в каждой части пространства слагается из поля движущейся заряженной частицы и поля излучения. Очевидно, что в области $z<0$ поле излучения будет состоять из отраженных волн, в области $z>a$ — из волн движущихся только в положительном направлении оси z, а в пластинке будут присутствовать оба типа волн. Ввиду этого в областях $z<0$ и $z>a$ будем, соответственно, иметь

$$\begin{aligned} E_0^{''}(r,t) &= \int E_0^{''}(k)\, e^{i(\vec{x}\,\vec{\rho}-\lambda_0 z-\omega t)}dk \\ E_1^{'}(r,t) &= \int E_1^{'}(k)\, e^{i(\vec{x}\,\vec{\rho}+\lambda_1 z-\omega t)}dk, \end{aligned} \tag{1}$$

тогда как в пластине

$$E_2^{'}(r,t)+E_2^{''}(r,t)=\int [E_2^{'}(k)\, e^{i\lambda_2 z}+E_2^{''}(k)\, e^{-i\lambda_2 z}]\, e^{i(\vec{x}\,\vec{\rho}-\omega t)}dk. \tag{2}$$

* Краткая сводка результатов настоящей работы приведена в [4].

Здесь $\vec{\rho}$ и $\vec{\varkappa}$ — компоненты $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{k}$ в плоскости (x, y), $\omega = k_z v$, $\lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2$, $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2$. Действительные и мнимые части λ_0 и λ положительны [1].

Далее надо написать условия непрерывности тангенциальных компонент полей и нормальных компонент их индукций на границах пластины. Так же как и в [1], можно убедиться, что из условий, налагаемых на магнитные поля следует только, что фурье-компоненты тангенциальных слагаемых электрических полей направлены по вектору $\vec{\varkappa}$. Принимая это во внимание, мы получим четыре уравнения для определения фурье-компонент тангенциальных слагаемых электрических полей.

Из них, для полей излучения возникших в вакууме, можно получить следующие выражения:

$$E_{0t}^{'}(\boldsymbol{k}) = \frac{ei\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)\alpha e^{-i\lambda a} + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\beta e^{i\lambda a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\gamma e^{ik_z a}\right\}, \tag{3}$$

$$E_{1t}^{'}(\boldsymbol{k}) = -\frac{ei\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\alpha e^{i\lambda a} + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)\beta e^{-i\lambda a} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\delta e^{-ik_z a}\right\} e^{-i(\lambda_0 - k_z)a}, \tag{4}$$

где введены следующие обозначения

$$F = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{\pm\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{\mp\frac{1}{\lambda} + \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon},$$
$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ \delta\end{matrix}\right\} = \frac{\mp\frac{1}{\lambda_0} + \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{\pm\frac{1}{\lambda_0\varepsilon} - \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}. \tag{6}$$

Нормальные компоненты электрических полей и магнитные поля получаются согласно формул:

$$E_{0n}^{'}(\boldsymbol{k}) = \frac{\varkappa}{\lambda_0}E_{0t}^{'}(\boldsymbol{k}), \qquad E_{1n}^{'}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\varkappa}{\lambda_0}E_{1t}^{'}(\boldsymbol{k}),$$
$$H_0^{'}(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{\omega}\left[\vec{\varkappa} - \boldsymbol{n}\lambda_0,\ E_{0t}^{'}(\boldsymbol{k})\right], \quad H_1^{'}(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{\omega}\left[\vec{\varkappa} + \boldsymbol{n}\lambda_0,\ E_{1t}^{'}(\boldsymbol{k})\right] \tag{7}$$

($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор оси z). Нетрудно убедиться, что при $a=0$ поля (3) и (4) обращаются в нуль. При $a \to \infty$ формула (3) выражает фурье-компоненту соответствующего поля работы [1], что и следовало ожидать.

2. Произведем теперь в формулах (1) интегрирование по $dk_x dk_y = \varkappa d\varkappa d\Phi$, где Φ-угол между $\vec{\varkappa}$ и $\vec{\rho}$. Интегралы по Φ легко выражаются через функции Бесселя $I_0(\varkappa\rho)$ и $I_1(\varkappa\rho)$.

Рассмотрим сначала излучение в области $z<0$. Введем величины R и θ посредством соотношений: $\rho = R\sin\theta$, $z=-R\cos\theta$. Для больших R и не очень малых значений угла θ воспользуемся асимптотическим разложением функций Бесселя. Тогда получим:

$$E^{r}_{0\rho}(\boldsymbol{r}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi}{R\sin\theta}}\int E^{r}_{0t}(\boldsymbol{k})\left(e^{f(\varkappa)R-\frac{3\pi i}{4}} + e^{\varphi(\varkappa)R+\frac{3}{4}\pi i}\right)e^{-i\omega t}\sqrt{\varkappa}\, d\varkappa dk_z, \tag{8}$$

где $\qquad f(\varkappa) = i\varkappa\sin\theta + i\lambda_0\cos\theta, \qquad \varphi(\varkappa) = -i\varkappa\sin\theta + i\lambda_0\cos\theta.$

Интегрирование по $\varkappa$ произведем методом перевала, аналогично тому, как это сделано [1]. Для применимости метода перевала должно быть $R \gg \lambda/\sin^2\theta$. При этом R может быть как порядка и больше (если $a \gg \lambda/\sin^2\theta$), так и много больше толщины пластины a.

В первом случае на положение точки перевала могут оказать влияние экспоненты $\exp(i\lambda a)$, имеющиеся в выражении для E^{r}_{0t}. Влияние их проще всего учесть разложив $1/F$ в ряд по малой величине $\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 / \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2$. Возникающие при этом в знаменателях формул нули связаны с неприменимостью обычного метода перевала и устраняются способом, указанным в [1].

Во втором случае, когда

$$a \ll R, \tag{9}$$

для точки перевала будем иметь прежнее значение $\frac{\omega}{c}\sin\theta$. Действуя далее обычным образом, нетрудно получить формулу для переходного излучения, совпадающую с приведенной в [2]. Рассмотрим подробнее крайне-релятивистский случай. Имеем:

$$E^{r}_{0\rho}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{\pi v R}\cdot\frac{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}-1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}+1}\times$$

$$\times\frac{-2i\sin\left(\frac{\omega}{c}a\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)\cdot e^{i\frac{\omega}{c}a\sqrt{\varepsilon}}}{\left[1-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right)^2 e^{2i\frac{\omega}{c}a\sqrt{\varepsilon}}\right]}e^{i\frac{\omega}{c}(R-ct)}\,d\omega. \tag{10}$$

Выражение в квадратных скобках, стоящее в знаменателе последней формулы, может быть разложено в ряд по малой величине $(\sqrt{\varepsilon}-1)^2/(\sqrt{\varepsilon}+1)^2$. Это разложение соответствует полям, приходящим в данную точку в результате многократного отражения от стенок пластинки. Ограничиваясь первым членом этого ряда и крайне релятивистским случаем, когда $\theta \sim \mu/E$, и принимая также во внимание, что согласно (7) $E^{*}_{0n} \simeq \frac{\mu}{E} E^{*}_{0\rho}$ и $H^{*}_{0\varphi} = E^{*}_{0\rho}$, получим для потока вектора Пойтинга в течение всего времени пролета частицы в телесном угле $d\Omega$:

$$\frac{dW^{*}_{\text{пер.}}}{d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{4\sin^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}-1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}+1}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{c} a \sqrt{\varepsilon(\omega)}\right) d\omega. \quad (11)$$

При этом для простоты положено, что ε — действительно*. Нетрудно видеть, что при $a\sqrt{\varepsilon} \ll \lambda$, где λ — длина волны излучения деленная на 2π, переходного излучения не образуется.

Если в области частот (ω_1, ω_2) ε постоянно, то для энергии переходного излучения, испущенного в этом интервале частот, получим следующее выражение

$$\frac{dW^{*}_{\text{пер.}}}{d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{2\sin^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right)^2 (\omega_2-\omega_1). \quad (12)$$

при этом дополнительно предположено $|\sqrt{\varepsilon}| \gg \frac{c}{\omega a}$ т. е. $a\sqrt{\varepsilon} \gg \lambda$

Интегрируя по углам получим

$$W^{*}_{\text{пер.}} = 2\frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right)^2 \left(\ln\frac{2}{1-\beta} - 1\right)(\omega_2-\omega_1). \quad (13)$$

Принимая во внимание также (9) получаем, что формулы (12) и (13) имеют место при выполнении условия:

$$\lambda/\sqrt{\varepsilon} \ll a \ll R. \quad (14)$$

Для излучения в области $z > a$ будем иметь при тех же допущениях:

$$\frac{dW'_{\text{пер.}}}{d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{4\sin^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \int_0^\infty \sin^2\left(\frac{\omega}{2c} a(\sqrt{\varepsilon}-1)\right) d\omega =$$

$$= \frac{e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{2\sin^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} (\omega_2-\omega_1) \quad (15)$$

* Когда ε комплексно в подобного рода формулах надо брать абсолютные значения подинтегральных выражений.

$$\dot{W}_{\text{пер.}} = 2\frac{e^2}{\pi c}\left(\ln\frac{2}{1-\beta} - 1\right)(\omega_2 - \omega_1), \tag{16}$$

при этом дополнительно предположено, что $|\sqrt{\varepsilon} - 1| \gg \frac{c}{\omega a}\cdot$ Принимая также во внимание (9) получаем, что формулы (15) и (16) имеют место при выполнении условия:

$$\lambda/|\sqrt{\varepsilon} - 1| \ll a \ll R. \tag{17}$$

Из сравнения формул (13) и (16) видно, что переходное излучение вперед больше на фактор $(\sqrt{\varepsilon}+1)^2/(\sqrt{\varepsilon}-1)^2$.

3. Отметим, что при деформировании контура интегрирования в линию кратчайшего спуска, необходимо также брать вычеты подинтегрального выражения в нулях функции $\varkappa^2 - \frac{\omega^2}{v^2}(\beta^2\varepsilon - 1)$, содержащейся в знаменателях β, γ и δ (см. фиг. 4 статьи [1]). Они соответствуют черенковскому излучению.

Из формул (3) и (4) видно, что черенковского излучения не будет, если $a \ll \lambda$.

Если же $\lambda \lesssim a \lesssim R$, то при нахождении линии перевала необходимо также учитывать экспоненты, имеющиеся в выражении для $\dot{E}_{0t}$. Разлагая $\dot{E}_{0t}$ в этом случае в ряд по малой величине, так как это было указано в предыдущем пункте, мы будем иметь:

$$\dot{E}_{0\rho}(\text{чер.}) = 2\pi i\, Res\left(\frac{-e}{2\pi^2 v}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\varkappa^{3/2}\frac{\left[\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\beta e^{ik_1a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\gamma e^{ik_2a}\right]}{\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2}\times$$

$$\times e^{-i\omega t - \frac{3\pi i}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}}\right)^{2n} e^{K\left(f(\varkappa) + i\frac{a}{R}\lambda(2n+1)\right)} \tag{18}$$

где Res означает вычет в полюсе $\varkappa = \frac{\omega}{v}\sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega) - 1}$, если он окажется левее соответствующей линии кратчайшего спуска. Легко видеть, что члены в квадратных скобках имеют разные линии перевала. В том случае, если полюс оказывается левее линий перевала соответствующих обоим членам в квадратных скобках, мы берем вычеты от обоих членов и они, как легко показать, взаимно уничтожаются. Поэтому только для тех частот, при которых полюс $\varkappa = \frac{\omega}{v}\sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega) - 1}$ оказывается левее линии перевала соответствующей члену с γ и правее линии перевала члена с β (для каждого из членов ряда (18)), вычеты взаимно не уничтожаются, так как вычета от члена с β брать не надо.

Таким образом, мы будем иметь следующие полосы черенковских частот $\Delta\omega_n^*$ определяемые из соотношений:

$$\beta\sin\theta\left(1-\frac{a}{R}\frac{\cos^2\theta\cdot s}{\sqrt{\varepsilon(\omega)-\sin^2\theta}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega)-1}\leqslant\beta\sin\theta\left(1-\frac{a}{R}\frac{\cos^2\theta\cdot t}{\sqrt{\varepsilon(\omega)-\sin^2\theta}}\right), \tag{19}$$

где $s=2n+2$, $t=2n+1$ (ε — действительно). Принимая во внимание, что черенковское и переходное излучения между собой не интерферируют*, получим для потока черенковского излучения через круговую площадку ρ, $\rho+d\rho$ за все время пролета частицы выражение:

$$\frac{dW^*_{\text{чер.}}}{d\rho}=\frac{4e^2}{v^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Delta\omega_n^*}\frac{\left[1-\varepsilon\sqrt{1+\beta^2(1-\varepsilon)}\right]^{4n+2}}{\left[1+\varepsilon\sqrt{1+\beta^2(1-\varepsilon)}\right]^{4n+4}}\times$$

$$\times\sqrt{(\beta^2\varepsilon-1)[1+\beta^2(1-\varepsilon)]}\,\omega d\omega. \tag{20}$$

Так же как в [1] можно убедиться, что черенковское поле частоты ω распространяется под углом $\theta(\omega)$, определяемом равенством $\sin\theta(\omega)=\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega)-1}$.

Производя аналогичные выкладки для излучения в области $z>a$ получим:

$$\frac{dW'_{\text{чер.}}}{d\rho}=\frac{4e^2}{v^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Delta\omega'_n}\frac{\left[1-\varepsilon\sqrt{1+\beta^2(1-\varepsilon)}\right]^{4n}}{\left[1+\varepsilon\sqrt{1+\beta^2(1-\varepsilon)}\right]^{4n+2}}\sqrt{(\beta^2\varepsilon-1)(1+\beta^2(1-\varepsilon))}\,\omega d\omega, \tag{21}$$

где полосы черенковских частот определяются из (19) с $s=2n+1$, $t=2n$. Очевидно, что разложение в ряд в формулах (20), (21) соответствует черенковскому излучению, пришедшему в данную точку поля в результате многократного отражения от стенок пластинки.

Полагая теперь $a\ll R$ из (19) получаем, что в данной точке поля под углом θ будет двигаться пакет волн с узким частотным спектром $\Delta\omega\sim\frac{a}{R}\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)^{-1}$ с основной частотой, определяемой из соотношения $\sin\theta=\frac{1}{R}\sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega)-1}$. Таким образом, интенсивность че-

* Это связано с тем, что на больших расстояниях черенковское и переходное поля будут иметь разные экспоненты (см. также формулу (27) работы [1]). Ввиду этого при вычислении энергии интерференционные члены обратятся в нуль при усреднении по небольшому интервалу углов, так как они будут содержать экспоненты, зависящие от R и θ.

ренковского излучения через круговую площадку ρ, $\rho + d\rho$ при $R \to \infty$ будет стремиться к нулю. Если же мы хотим вычислить все испущенное черенковское излучение, то надо вычислить поток электромагнитной энергии, прошедший через определенный телесный угол. Не трудно убедиться, что этот поток не будет зависеть от R. Действительно, для вычисления $\dfrac{dW}{d\Omega}$ мы должны поток вектора Пойтинга умножить на R^2, что дает лишнее R по сравнению с (20) и (21), которое сократится с R, имеющимся в $\Delta\omega_n'$ и $\Delta\omega_n''$.

Авторы благодарны А. Ц. Аматуни и И. И. Гольдману за интересные дискуссии и Б. М. Болотовскому и В. Е. Пафомову за полезное обсуждение результатов работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 22 X 1958

Գ. Մ. Ղարիբյան և Գ. Ա. Չալիկյան

ԹԻԹԵՂԻԿՈՎ ԱՆՑՆՈՂ ՄԱՍՆԻԿԻ ՉԵՐԵՆԿՈՎՅԱՆ ԵՎ ԱՆՑՄԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄՆԵՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ուսումնասիրված է մասնիկի էլեկտրամագնիսական դաշտի խնդիրը, երբ նա անցնում է թիթեղիկով։

Վակուումում ստացված են Պոյնտինգի վեկտորների բանաձևերը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарибян Г. М.* ЖЭТФ, 33, 1403, 1957.
2. *Пафомов В. Е.* ЖЭТФ, 33, 1074, 1957.
3. *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* ЖЭТФ, 16, 15, 1946.
4. *Гарибян Г. М., Чаликян Г. А.* ЖЭТФ, 35, № 11, 1958

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. Алоян

О динамической устойчивости круговой арки переменного сечения

В технической литературе имеется ряд работ [1, 3, 5, 7, 8], посвященных решению задач о динамической устойчивости круговых арок и колец постоянного поперечного сечения. Насколько нам известно, те же задачи для арок и колец переменного поперечного сечения мало исследованы, и решений конкретных задач не имеется.

В данной статье рассматривается динамическая устойчивость двухшарнирных и защемленных в пятах арок, когда один из размеров прямоугольного поперечного сечения арки (высота или ширина) остается постоянным, а другой изменяется линейно от ключа к опорам. Решение дается применением приближенного метода Б. Г. Галеркина.

§ 1. Основное дифференциальное уравнение задачи и его решение

Дифференциальное уравнение плоских колебаний круговой арки непрерывно переменного сечения, нагруженной периодической равномерно распределенной нагрузкой $q(t)$, можно получить из динамических уравнений Кирхгоффа [7]

$$\frac{\partial N_x}{\partial \theta} + (1 + R\delta x) N_z + RT_x = m(\theta) R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial \theta} - (1 + R\delta x) N_x + RT_z = m(\theta) R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \theta} + RN_x = 0$$

и из известных соотношений

$$\beta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\right), \qquad u = \frac{\partial w}{\partial \theta}, \qquad (1.2)$$

$$M_y = B(\theta)\,\delta x, \qquad \delta x = \frac{1}{R}\frac{\partial \beta}{\partial \theta}, \qquad (1.3)$$

где M_y, N_x, N_z — соответственно изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила, T_x — проекция внешней нагрузки на ось, нормальную к деформированной оси арки, T_z — на ось, касательную к деформированной оси арки, u и w — соответственно радиальное и касательное перемещения точек оси арки, β — угол поворота сечения вокруг его центральной оси инерции, направленной перпендикулярно к плоскости арки, R — радиус кривизны арки, $\delta\varkappa$ — приращение радиуса кривизны, θ — центральный угол, отсчитываемый от ключевого сечения, $B(\theta)$ — переменная жесткость изгиба в плоскости арки, $m(\theta)$ — масса единицы длины, t — время.

Полагая, что $N_z = -q(t)\cdot R + N_z'$, где N_z' — весьма малая величина, и исключив из уравнений (1.1) M_y, N_x и N_z, при помощи соотношений (1.2), (1.3), пренебрегая малыми величинами высших порядков, получаем основное дифференциальное уравнение задачи в виде:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left[B(\theta)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right]+R^3 q(t)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+$$
$$+R^4\left(T_z-\frac{\partial T_x}{\partial\theta}\right)+R^4\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(m(\theta)\frac{\partial^3 w}{\partial\theta\,\partial t^2}\right)-m(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=0. \qquad (1.4)$$

Если считать, что внешняя нагрузка после деформирования оси арки остается нормальной к деформированной оси арки, то $T_z=0$ и $T_x = q(t)$, поэтому $T_z-\frac{\partial T_x}{\partial\theta}=0$, и дифференциальное уравнение задачи примет вид:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left[B(\theta)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right]+R^3 q(t)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+$$
$$+R^4\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(m(\theta)\frac{\partial^3 w}{\partial\theta\,\partial t^2}\right)-m(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=0. \qquad (1.5)$$

Легко показать, что в случае незамкнутой круговой арки постоянного сечения и, тем более, круговой арки переменного сечения, точное разделение переменных невозможно. Поэтому решение задачи приходится выполнять приближенными методами, среди которых наиболее удобным является метод Б. Г. Галеркина.

Пользуясь этим методом, решение уравнения (1.5) будем искать в виде

$$w(\theta,\ t)=W(\theta)\cdot T(t), \qquad (1.6)$$

где $W(\theta)$ аппроксимирует функции задачи о собственных колебаниях, соответствующих низшим частотам антисимметричных или симметричных колебаний круговой арки. Метод Б. Г. Галеркина позволяет разделять переменные приближенно и для функции $T(t)$ получить следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 \left(1 - \frac{q(t)}{q_{kp}}\right) T(t) = 0 \tag{1.7}$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{R^4} \frac{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} \{[B(\theta)(W^{\rm III} + W^{\rm I})]^{\rm III} + [B(\theta)(W^{\rm III} + W^{\rm I})]^{\rm I}\} W d\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} [(m(\theta)\, W^{\rm I})^{\rm I} - m(\theta)\, W]\, W d\theta} \tag{1.8}$$

приближенное значение для квадрата частоты свободных плоских колебаний ненагруженной круговой арки переменного сечения, а

$$q_{kp} = -\frac{1}{R^3} \frac{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} \{[B(\theta)(W^{\rm III} + W^{\rm I})]^{\rm III} + [B(\theta)(W^{\rm III} + W^{\rm I})]^{\rm I}\} W d\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} (W^{\rm IV} + W^{\rm II})\, W d\theta} \tag{1.9}$$

приближенное значение равномерно распределенной критической нагрузки, 2α — центральный угол арки. В выражениях (1.8) и (1.9) штрихи обозначают производные по θ, в (1.7) точки—производные по t.

Если $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$, то уравнение (1.7) приводится к известному уравнению Матье

$$\ddot{T}(t) + \omega_q^2 (1 - \mu \cos pt)\, T(t) = 0,$$

где

$$\omega_q^2 = \omega^2 (1 - q_1/q_{kp}) \tag{1.10}$$

квадрат частоты плоских свободных колебаний круговой арки, нагруженной постоянной составляющей силы $q(t)$,

$$\mu = \frac{q_0}{q_{kp} - q_1} \tag{1.11}$$

коэффициент пульсации.

Будут ли колебания арки устойчивыми или нет, зависит от функции $T(t)$. Если $T(t)$ будет ограниченная периодическая функция, то перемещения точек оси арки согласно (1.6) тоже будут ограниченными, и начальная круговая форма арки динамически устойчива. Если же $T(t)$ будет неограниченно возрастать, тогда первоначальная круговая форма арки станет динамически неустойчивой.

Известно, что при определенных соотношениях между ω_q и μ, $T(t)$ неограниченно возрастает. Совокупность всех тех точек в плоскости параметров (μ, $2\omega_q/p$), для которых $T(t)$ неограниченно возрастает, образует области динамической неустойчивости. Практически, наиболее опасным является первая область динамической неустойчивости, границы которой при действии нагрузки вида $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$ определяются так [2]

$$1 - \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 - \frac{55}{512}\mu^3 + \cdots \leqslant \frac{4\omega_q^2}{p^2} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 + \frac{55}{512}\mu^3 + \cdots$$

В общем случае изменения внешней нагрузки по закону $q(t)=q_1+q_0(t)$, где $q_0(t)=q_0(t+l)$ — периодическая функция с периодом l, уравнение (1.7) приводится к уравнению Хилла

$$\ddot{T}(t)+\omega_q^2\left[1-\mu q_0(t)\right]T(t)=0.$$

В этом случае уравнение можно решить методом разложения $T(t)$ по малому параметру μ. Условие отсутствия „вековых" членов в решении $T(t)$, т. е. требование периодичности решений, дает границы областей динамической неустойчивости.

Для определения областей динамической неустойчивости сначала необходимо в каждом случае определять ω_q^2 и μ из (1.8)—(1.11).

§ 2. Круговая двухшарнирная арка переменного сечения

Граничные условия двухшарнирной арки имеют вид:

$$u=w=M_y=0 \quad \text{при} \quad \theta=\pm\alpha. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание (1.6) и соотношения (1.2), (1.3), перепишем условия (2.1) в виде:

$$W=W^{\mathrm{I}}=W^{\mathrm{III}}=0 \quad \text{при} \quad \theta=\pm\alpha. \tag{2.2}$$

Коэффициент ω^2 и $q_{кр}$ дифференциального уравнения (1.7) определяем из (1.8) и (1.9). Интегрируя и учитывая (2.2) приводим выражения (1.8) и (1.9) к виду:

$$\omega^2=\frac{1}{R^4}\cdot\frac{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}B(\theta)\left(W^{\mathrm{III}}+W^{\mathrm{I}}\right)^2d\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}m(\theta)\left[\left(W^{\mathrm{I}}\right)^2+W^2\right]d\theta}, \tag{2.3}$$

$$q_{кр}=\frac{1}{R^3}\cdot\frac{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}B(\theta)\left(W^{\mathrm{III}}+W^{\mathrm{I}}\right)^2d\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\left(W^{\mathrm{IV}}+W^{\mathrm{II}}\right)W\,d\theta}. \tag{2.4}$$

Пользуясь (2.3) и (2.4), можно определить приближенные значения ω^2 и $q_{кр}$.

Рассмотрим теперь два частных случая изменения поперечного сечения арки, которые с точки зрения их практического применения представляются наиболее важными.

а) *Первый случай.* Сечение арки прямоугольное, ширина возрастает от ключа к опорам (или наоборот) по линейному закону, а высота остается постоянной. Тогда для жесткости изгиба и массы арки в сечении θ имеем:

$$
\left.\begin{aligned}
B(\theta) &= B_{kл}\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha}\theta\right)\\
m(\theta) &= m_{kл}\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\alpha \leqslant \theta \leqslant 0
$$

$$
\left.\begin{aligned}
B(\theta) &= B_{kл}\left(1+\frac{\beta_1}{\alpha}\theta\right)\\
m(\theta) &= m_{kл}\left(1+\frac{\beta_1}{\alpha}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha \tag{2.5}
$$

где $\beta_1 = (b_n - b_{kл}) : b_{kл}$, b_n — ширина сечения у опор, $b_{kл}$ — ширина ключевого сечения, $B_{kл} = E\dfrac{b_{kл}h^3}{12}$ — жесткость изгиба ключевого сечения, $m_{kл} = \dfrac{\gamma}{g} b_{kл}\cdot h$ — масса единицы длины в ключевом сечении, $h = \text{const}$ — высота сечения, γ — объемный вес, E — модуль упругости материала арки, g — ускорение силы тяжести.

б) *Второй случай.* Сечение арки прямоугольное, высота возрастает от ключа к опорам по линейному закону, а ширина остается постоянной. Тогда для жесткости изгиба и массы в сечении θ имеем:

$$
\left.\begin{aligned}
B(\theta) &= B_{kл}\left(1-\frac{\beta_2}{\alpha}\theta\right)^3\\
m(\theta) &= m_{kл}\left(1-\frac{\beta_2}{\alpha}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\alpha \leqslant \theta \leqslant 0
$$

$$
\left.\begin{aligned}
B(\theta) &= B_{kл}\left(1+\frac{\beta_2}{\alpha}\theta\right)^3\\
m(\theta) &= m_{kл}\left(1+\frac{\beta_2}{\alpha}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha \tag{2.6}
$$

где $\beta_2 = (h_n - h_{kл}) : h_{kл}$, h_n — высота сечения у опор, $h_{kл}$ — высота ключевого сечения, $B_{kл} = E\dfrac{bh_{kл}^3}{12}$, $m_{kл} = \dfrac{\gamma}{g} bh_{kл}$.

Займемся теперь определением ω^2 и q_{kp} для упомянутых случаев изменения поперечных сечений. Рассмотрим антисимметричные (по двум полуволнам) и симметричные (по трем полуволнам) колебания круговой арки.

1°. *Антисимметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функции, удовлетворяющей (2.2), принимаем [9]

$$W(\theta) = a\left(1 + \cos\frac{\pi}{\alpha}\theta\right), \tag{2.7}$$

где a — неопределенный коэффициент.

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (2.7) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим:

$$\omega^2 = \frac{\chi^2(\chi^2-1)^2(1+\beta_1/2)}{(\chi^2+3)(1+\beta_1/2)-8\beta_1/\pi^2}\cdot\frac{B_{k\lambda}}{m_{k\lambda}R^4} \tag{2.8}$$

$$q_{kp} = (\chi^2-1)\left(1+\frac{\beta_1}{2}\right)\cdot\frac{B_{k\lambda}}{R^3}, \tag{2.9}$$

где $\chi = \frac{\pi}{\alpha}\cdot$

Выражения (2.8) и (2.9) получены также в работе [10].

Критическую сжимающую силу $N_{kp} = q_{kp}\cdot R$ можно написать в виде

$$N_{kp} = K_1\frac{B_n}{S^2},$$

где

$$K_1 = 4\alpha^2(\chi^2-1)\left(1+\frac{\beta_1}{2}\right)i \tag{2.10}$$

коэффициент устойчивости, S — длина дуги арки, B_n — жесткость изгиба сечения у опор, $i = B_{k\lambda}/B_n$.

В предельном случае, когда $\alpha = 0$, имеем прямолинейный стержень, сжатый продольной силой N. В этом случае

$$K_1 = 4\pi^2(1+\beta_1/2)\,i.$$

Значения коэффициента устойчивости K_1 в зависимости от 2α и i приведены в таблице 1 и сопоставлены с результатами А. Н. Динника [6].

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (2.7) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{\chi^2(\chi^2-1)^2 C_0}{(\chi^2+3)(1+\beta_2/2)-8\beta_2/\pi^2}\cdot\frac{B_{k\lambda}}{m_{k\lambda}R^4}$$

$$q_{kp} = (\chi^2-1)\,C_0\cdot\frac{B_{k\lambda}}{R^3}.$$

Критическую сжимающую силу $N_{kp} = q_{kp}\cdot R$ можно представить в виде

$$N_{kp} = K_2\cdot\frac{B_n}{S^2},$$

где

$$K_2 = 4\alpha^2(\chi^2-1)\,C_0 i,$$

Таблица 1

2α	0°: K_1	0°: K_2	60°: K_1	60°: K_2	120°: K_1	120°: K_2	180°: K_1	180°: K_2	
	18,68	13,12	18,16	12,74	16,64	11,70	14,13	9,94	1
0,1	21,70	16,3	21,11	15,73	19,3	14,39	16,28	12,14	2
	16,0	24,4	16,0	25,0	16,2	23,0	15,5	22,1	3
	21,64	18,08	21,04	17,57	19,27	16,10	16,32	13,65	1
0,2	23,68	20,10	23,02	19,61	21,05	17,93	17,76	15,13	2
	9,6	11,05	9,6	11,6	9,1	11,36	9,0	11,25	3
	26,72	25,03	25,93	24,46	23,77	22,36	20,08	18,42	1
0,4	27,6	26,06	26,87	25,36	24,56	23,19	20,73	19,56	2
	3,4	4,25	3,9	3,51	3,2	3,52	3,1	6,18	3
	31,21	30,64	30,31	29,82	27,76	27,23	23,45	22,99	1
0,6	31,6	31,00	30,70	30,14	28,07	27,56	23,69	23,25	2
	1,3	1,31	1,3	1,14	0,97	1,32	1,2	1,08	3
	35,42	35,32	34,47	34,35	31,52	31,42	26,62	26,5	1
0,8	35,45	35,4	34,54	34,42	31,58	31,46	26,64	26,55	2
	0,14	0,28	0,11	0,20	0,25	0,13	0,15	0,18	3
	$4\pi^2$	$4\pi^2$	38,38	38,38	35,09	35,09	29,61	29,61	1
1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	38,38	38,38	35,09	35,09	29,61	29,61	2
	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3

Примечание: В таблицах 1 и 2 в строке 1 приведены значения коэффициентов устойчивости по А. Н. Диннику, в строке 2 приведены значения коэффициентов устойчивости, полученные в настоящей работе, в строке 3 разность в процентах.

$$C_0 = 1 + \frac{3}{2}\beta_2 + \frac{2\pi^2 - 3}{2\pi^2}\beta_2^2 + \frac{\pi^2 - 3}{4\pi^2}\beta_2^3.$$

В предельном случае $\alpha = 0$ коэффициент устойчивости

$$K_2 = 4\pi^2 C_0 i.$$

Некоторые значения коэффициента устойчивости K_2 приведены в таблице 1.

2°. *Симметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функций, удовлетворяющей (2.2), принимаем [4]

$$W(\theta) = a\left(\sin\frac{\pi}{2\alpha}\theta + \sin\frac{3\pi}{2\alpha}\theta\right). \tag{2.11}$$

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (2.11) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим:

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 \left[(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + C_1\beta_1 \right]}{16\left\{ (5\chi^2 + 4) + \left[\frac{1}{2}(5\chi^2 + 4) - \frac{8}{9\pi^2}(9\chi^2 + 4) \right] \beta_1 \right\}} \cdot \frac{B_{кл}}{m_{кл} R^4} \tag{2.12}$$

$$q_{kp} = \frac{(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + C_1\beta_1}{4(41\chi^2 - 20)} \cdot \frac{B_{кл}}{R^3}, \tag{2.13}$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2}(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) - \frac{1}{\pi^2}(136\chi^4 - 320\chi^2 + 128).$$

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (2.11) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 \left[(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + 3C_1\beta_2 + C_2\beta_2^2 + C_3\beta_2^3 \right]}{16\left\{ (5\chi^2 + 4) + \left[\frac{1}{2}(5\chi^2 + 4) - \frac{8}{9\pi^2}(9\chi^2 + 4) \right] \beta_2 \right\}} \cdot \frac{B_{кл}}{m_{кл} R^4},$$

$$q_{kp} = \frac{(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) + 3C_1\beta_2 + C_2\beta_2^2 + C_3\beta_2^3}{4(41\chi^2 - 20)} \cdot \frac{B_{кл}}{R^3}$$

где

$$C_2 = (365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) - \frac{3}{\pi^2}(122{,}5\chi^4 - 260\chi^2 + 104)$$

$$C_3 = \frac{1}{4}(365\chi^4 - 328\chi^2 + 80) - \frac{3}{2\pi^2}(122{,}5\chi^4 - 260\chi^2 + 104) + \\ + \frac{16}{3\pi^4}(72\chi^4 - 288\chi^2 + 128),$$

а C_1 имеет то же значение, что и в выражениях (2.12) и (2.13).

§ 3. Круговая бесшарнирная арка переменного сечения

Граничные условия бесшарнирной арки имеют вид:

$$u = w = \beta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm\alpha. \tag{3.1}$$

Принимая во внимание (1.6) и (1.2), перепишем (3.1) в виде:

$$W = W' = W'' = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm\alpha. \tag{3.2}$$

Коэфициенты ω^2 и q_{kp} дифференциального уравнения (1.7) определяем из (1.8) и (1.9), которые интегрируя и учитывая (3.2), приводятся опять к (2.3) и (2.4).

Рассмотрим опять вышеупомянутые два случая изменения поперечных сечений арки.

1°. *Антисимметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функции, удовлетворяющей условиям (3.2), принимаем [9]

$$W(\theta)=a\left(3\cos\frac{\pi}{2\alpha}\theta+\cos\frac{3\pi}{2\alpha}\theta\right). \tag{3.3}$$

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (3.3) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2=\frac{9\chi^2\left[(41\chi^4-40\chi^2+16)+C_4\beta_1\right]}{16\left\{(9\chi^2+20)+\left[\frac{1}{2}(9\chi^2+20)-\frac{8}{9\pi^2}(9\chi^2+68)\right]\beta_1\right\}}\cdot\frac{B_{k\pi}}{m_{k\pi}R^4} \tag{3.4}$$

$$q_{\kappa p}=K_3\frac{B_n}{R^3},$$

где

$$K_3=\frac{(41\chi^4-40\chi^2+16)+C_4\beta_1}{4(5\chi^2-4)}i$$

$$C_4=\frac{1}{2}(41\chi^4-40\chi^2+16)-\frac{1}{9\pi^2}(72\chi^4-576\chi^2+128).$$

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (3.3) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2=\frac{9\chi^2\left[(41\chi^4-40\chi^2+16)+3C_4\beta_2+C_5\beta_2^2+C_6\beta_2^3\right]}{16\left\{(9\chi^2+20)+\left[\frac{1}{2}(9\chi^2+20)-\frac{8}{9\pi^2}(9\chi^2+68)\right]\beta_2\right\}}\cdot\frac{B_{k\pi}}{m_{k\pi}R^4}$$

$$q_{\kappa p}=K_4\cdot\frac{B_n}{R^3},$$

где

$$K_4=\frac{(41\chi^4-40\chi^2+16)+3C_4\beta_2+C_5\beta_2^2+C_6\beta_2^3}{4(5\chi^2-4)}i,$$

$$C_5=(41\chi^4-40\chi^2+16)-\frac{1}{6\pi^2}(225\chi^4-1512\chi^2+400),$$

$$C_6=\frac{1}{4}(41\chi^4-40\chi^2+16)-\frac{1}{12\pi^2}(225\chi^4-1512\chi^2+400)+$$

$$+\frac{32}{27\pi^4}(81\chi^4-360\chi^2+80),$$

а C_4 имеет то же значение, что и в (3.4).

Некоторые значения коэффициентов устойчивости K_3 и K_4 приведены в таблице 2.

2°. *Симметричные колебания.* В качестве аппроксимирующей функции, удовлетворяющей условиям (3.2), принимаем [4]

$$W(\theta)=a\left(\sin\frac{\pi}{\alpha}\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{\alpha}\theta\right). \tag{3.5}$$

Таблица 2

l \ 2α	60°		120°		180°		
	K_3	K_4	K_3	K_4	K_3	K_4	
	33,2	24,1	8,25	6,05	3,70	2,73	1
0,1	39,35	31,32	9,93	7,99	4,56	3,73	2
	18,5	29,95	20,00	32,1	23,2	36,6	3
	39,1	33,6	9,76	8,39	4,36	3,66	1
0,2	43,14	37,90	10,85	9,57	4,94	4,40	2
	10,33	12,80	11,16	14,1	13,3	20,22	3
	49,1	46,7	12,2	11,7	5,45	5,19	1
0,4	50,72	48,4	12,67	12,11	5,71	5,47	2
	3,3	3,64	3,85	3,5	4,77	5,4	3
	57,8	56,5	14,4	14,1	6,39	6,27	1
0,6	58,3	57,43	14,5	14,29	6,47	6,38	2
	0,86	1,65	0,69	1,34	1,25	1,75	3
	65,8	65,8	16,3	16,3	7,21	7,21	1
0,8	65,88	65,68	16,33	16,28	7,23	7,22	2
	0,13	−0,18	0,18	−0,12	0,28	0,14	3
	73,3	73,3	18,1	18,1	8,00	8,00	1
1,0	73,45	73,45	18,15	18,15	8,00	8,00	2
	0,2	0,2	0,28	0,28	0,00	0,00	3

а) Для первого случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.5), $W(\theta)$ и ее производных из (3.5) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{4\chi^2\left[(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + C_7\beta_1\right]}{\left\{(8\chi^2+5) + \left[\frac{1}{2}(8\chi^2+5) - \frac{32}{9\pi^2}(5\chi^2+2)\right]\beta_1\right\}} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{m_{k\lambda}R^4} \tag{3.6}$$

$$q_{kp} = \frac{(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + C_7\beta_1}{5\chi^2 - 2} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{R^3}$$

где

$$C_7 = \frac{1}{2}(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) - \frac{40}{9\pi^2}(4\chi^4 - 5\chi^2 + 1).$$

б) Для второго случая изменения поперечных сечений, подстановкой значений $B(\theta)$, $m(\theta)$ из (2.6), $W(\theta)$ и ее производных из (3.5) в (2.3) и (2.4), после интегрирования получим

$$\omega^2 = \frac{4\chi^2\left[(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + 3C_7\beta_2 + C_8\beta_2^2 + C_9\beta_2^3\right]}{\left\{(8\chi^2+5) + \left[\frac{1}{2}(8\chi^2+5) - \frac{32}{9\pi^2}(5\chi^2+2)\right]\beta_2\right\}} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{m_{k\lambda}R^4}$$

$$q_{kp} = \frac{(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) + 3C_7\beta_2 + C_8\beta_2^2 + C_9\beta_2^3}{5\chi^2 - 2} \cdot \frac{B_{k\lambda}}{R^3},$$

где

$$C_8 = (17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) - \frac{1}{24\pi^2}(1100\chi^4 - 1456\chi^2 + 275),$$

$$C_9 = \frac{1}{4}(17\chi^4 - 10\chi^2 + 2) - \frac{1}{48\pi^2}(1100\chi^4 - 1456\chi^2 + 275) +$$

$$+ \frac{656}{27\pi^4}(4\chi^4 - 5\chi^2 + 1),$$

а C_7 имеет то же значение, что и в выражении (3.6).

* * *

Таким образом, для рассмотренных случаев изменения поперечных сечений двухшарнирной и бесшарнирной арок переменного сечения получены приближенные выражения для частот собственных колебаний и критической статической нагрузки. Известно, что точность этих приближенных выражений в большой степени зависит от удачного выбора аппроксимирующих функций. В настоящей работе в качестве аппроксимирующих функций приняты функции, предложенные А. И. Оседелько [9] и Е. Б. Васерманом [4]. Вычисления показывают, что, при постоянной жесткости арки, расхождения точных и приближенных значений ω и q_{kp} не только не велики, но и одного и того же порядка. Это обстоятельство говорит о том, что принятые функции хорошо аппроксимируют тангенциальные перемещения точек оси арки постоянного сечения.

При переменной жесткости, когда $I_{kл}/I_n > 0{,}4$, расхождение значений q_{kp} от точных, как это видно из таблиц 1 и 2, в большинстве случаев составляет до 5%.

Имея в виду, что эти функции более „родственны" собственным функциям свободных колебаний, чем формам потери статической устойчивости, можно заключить, что точность приближенных выражений частот свободных колебаний во всяком случае не ниже точности критической нагрузки.

При $I_{kл}/I_n = 0{,}2$ расхождение составляет от 9% до 15%. Но имея в виду, что в практике очень часто встречаются случаи, когда отношение $I_{kл}/I_n$ колеблется в пределах 1,0—0,2, можно сказать, что приближенные выражения для q_{kp} и ω^2, полученные в настоящей работе, дают удовлетворительные для практических целей результаты.

При $I_{kл}/I_n < 0{,}2$ расхождение больше 15%. Объясняется это тем, что при этом принятые функции недостаточно хорошо аппроксимируют тангенциальные перемещения точек оси арки при ее свободных колебаниях и формах потерь статической устойчивости.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 31 III 1958

Մ. Հ. Ալոյան

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԿԱՄԱՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է փոփոխական կտրվածք ունեցող շրջանային կամարների դինամիկ կայունության խնդիրը։ Բ. Գ. Գալյորկինի մոտավոր եղանակով, խնդրի լուծումը բերվում է (1.7) դիֆերենցիալ հավասարմանը, իսկ վերջինս, կախված տրվող արտաքին, ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող բեռից, բերվում է Մատյեի կամ Խիլլի դիֆերենցիալ հավասարումներին։

Երկհոդակապային և ամրակցված ծայրերով կամարների, նրանց կտրվածքի փոփոխման երկու հիմնական դեպքերի համար որոշված են՝ կրիտիկական ստատիկական բեռի մեծությունը, սեփական տատանումների հաճախականությունը, իսկ այնուհետև՝ Մատյեի դիֆերենցիալ հավասարման գործակիցները և տրված է դինամիկ անկայունության տիրույթը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейлин Е. А.* О динамической устойчивости стержней с упруго закрепленными концами. Научные труды Ленинградского инж.-строительного института, вып. 13, 1952.
2. *Боднер Б. А.* Устойчивость пластин под действием продольных периодических сил. ПММ, т. II, вып. 1, 1938.
3. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
4. *Васерман Е. Б.* Свободные колебания нагруженных упругих круговых арок и колец. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к. т. н. Рига, 1956.
5. *Джанелидзе Г. Ю.* и *Радциг М. А.* Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил. ПММ, т. IV, вып. 5—6, 1940.
6. *Динник А. Н.* Устойчивость упругих систем. ОНТИ, М.—Л., 1935.
7. *Макушин В. М.* Динамическая устойчивость деформированного состояния упругих стержней. Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Баумана, раздел III, „Колебания, устойчивость и равновесие упругих стержней", 1947.
8. *Малкина Р. Л.* Устойчивость круговых арок под действием продольных сил. Институт механики АН СССР. Инженерный сборник, т. XIV, М., 1953.
9. *Оселедько А. И.* Влияние упругости закрепления концов круговой арки на частоту ее собственных колебаний. Статья в сборнике „Исследования по теории сооружений". Сборник статей под редакцией А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича, М. М. Филоненко-Бородича. Стройиздат, 1949.
10. *Пратусевич Я. А.* О колебаниях круговых арок. Труды МИИТ-а им. Сталина, вып. 76, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

Исследование влияния высоты образца на деформативные свойства связных водонасыщенных грунтов

В связи с новыми представлениями о природе деформирования связных водонасыщенных грунтов, введенными в науку за последнее время [1], в течение последних пяти лет был опубликован ряд теоретических [2, 3] и экспериментальных работ [4, 5, 6, 7], посвященных решению задач уплотнения с учетом ползучести скелета грунта и экспериментальному исследованию их деформативных свойств с учетом фактора времени.

Работы автора настоящих строк [4, 5, 6], посвящены вопросу установления основных закономерностей деформации ползучести скелета связного грунта при его сжатии в условиях отсутствия бокового расширения, выполнены в целях учета ползучести скелета в задачах уплотнения. Поэтому при выполнении экспериментальных работ были использованы образцы одинаковой толщины (10 или 20 *мм*), не затрагивая вопроса о влиянии высоты образца грунта на их деформативные свойства.

Для определения закономерностей ползучести скелета грунта в указанных работах пользовались водонасыщенными образцами, в деформациях которых, помимо фактора вязкого перемещения структурных элементов и частиц грунта друг относительно друга, участвовал и фактор выжимания воды из его пор. Однако полагали, что доля влияния фильтрационных явлений в процессе деформирования образцов небольшой толщины (10–20 *мм*) незначительна и ею можно пренебречь.

В целях, как проверки принятой нами методики экспериментального определения закономерностей ползучести скелета связных грунтов путем испытания водонасыщенных образцов небольшой толщины, так и для изучения природы деформирования их во времени, нами в 1957–1958 гг. была выполнена настоящая работа по исследованию влияния размеров, в частности высоты, образцов на их деформативные свойства, некоторые основные положения и выводы которой были кратко изложены в работе [8].

Исследованию влияния высоты образца на деформативные свойства грунтов посвящена также работа [9].

Известно [10], что процесс деформирования слоев связного водонасыщенного грунта различной толщины при сжатии, в зависимости от его консистенции, может идти как в соответствии с теорией фильтрационной консолидации, так и в соответствии с законом деформирования твердых тел, обладающих свойством ползучести, когда фильтрационные явления не оказывают никакого влияния на продолжительность деформирования, когда этот процесс протекает только за счет ползучести скелета.

Соотношение между продолжительностью сжатия T_ω и t_ω слоев различной толщины H и h в общем случае можно выразить зависимостью [10]:

$$T_\omega = t_\omega \left(\frac{H}{h}\right)^n, \tag{1}$$

где H — мощность слоя, для которого ведется определение;

T_ω — время, необходимое для уплотнения данного слоя под нагрузкой P до достижения влажности ω;

h — мощность меньшего слоя, время уплотнения которого известно;

t — время уплотнения меньшего слоя под той же нагрузкой до той же влажности ω;

n — показатель консистенции, зависящей от физико-механических свойств грунта.

В случае протекания процесса уплотнения в соответствии с теорией фильтрационной консолидации, когда ролью ползучести скелета грунта можно пренебречь, показатель $n = 2$ (продолжительность сжатия слоев различной толщины прямо пропорциональна квадрату толщины этих слоев), а в случае же, когда этот процесс протекает только за счет ползучести скелета $n = 0$, т. е.

$$T_\omega = t_\omega, \tag{2}$$

откуда следует, что, при отсутствии влияния фильтрационных явлений, длительность деформирования не зависит от высоты образца.

Таким образом, критерием, определяющим применимость той или иной схемы деформирования к связным водонасыщенным грунтам, могут служить результаты определения продолжительности деформирования образцов различной толщины при их испытании одинаковыми нагрузками [8, 10].

Принимая во внимание вышеизложенное, для проверки принятой нами методики определения, характеристик ползучести скелета грунта, необходимо сопоставить результаты определения развивающихся во времени, деформаций образцов различной толщины. Если окажется, что длительность и скорости деформирования образцов различной толщины равны между собой, то это будет означать, что высота образца не играет роли и процесс деформирования протекает за счет ползучести скелета грунта [8].

Основываясь на эти же рассуждения, можно установить границу и продолжительность влияния как явления выжимания воды из пор, так и ползучести скелета грунта.

Для исследования влияния высоты образца на явления деформирования связных водонасыщенных грунтов нарушенной структуры нами были испытаны образцы высотою 10, 20 и 60 *мм*.

Учитывая то обстоятельство, что при испытании образцов на сжатие в условиях отсутствия бокового расширения, боковое трение о стенки грунтового кольца может повлиять на их деформацию, специально было исследовано влияние бокового трения при испытании образцов разной толщины.

Были испытаны образцы следующих размеров: 1) высотой 60 *мм*, диаметром 70 *мм*; 2) высотой 60 *мм*, диаметром 210 *мм*. Для испытания образцов диаметром 70 *мм* были использованы компрессионные приборы нашей конструкции [6], для испытания же образцов диаметром 210 *мм* были использованы большие компрессионные приборы аналогичной конструкции. Испытание проводилось при одностороннем движении отжимаемой воды (снизу вверх).

Рассмотрим результаты испытания образцов пылеватого суглинка нарушенной структуры, основные данные о физических свойствах которого приведены в табл. 1.

Таблица 1

Лаб. № грунта	Мех. состав, фракции в *мм* в %			Удельн. вес в $г/см^3$	Пределы пластичности		
	>0,05	0,05–0,005	<0,005		граница текучести	граница пластичности	число пластичности
2–57	21,8	67,4	10,8	2,66	31,3	18,6	12,7

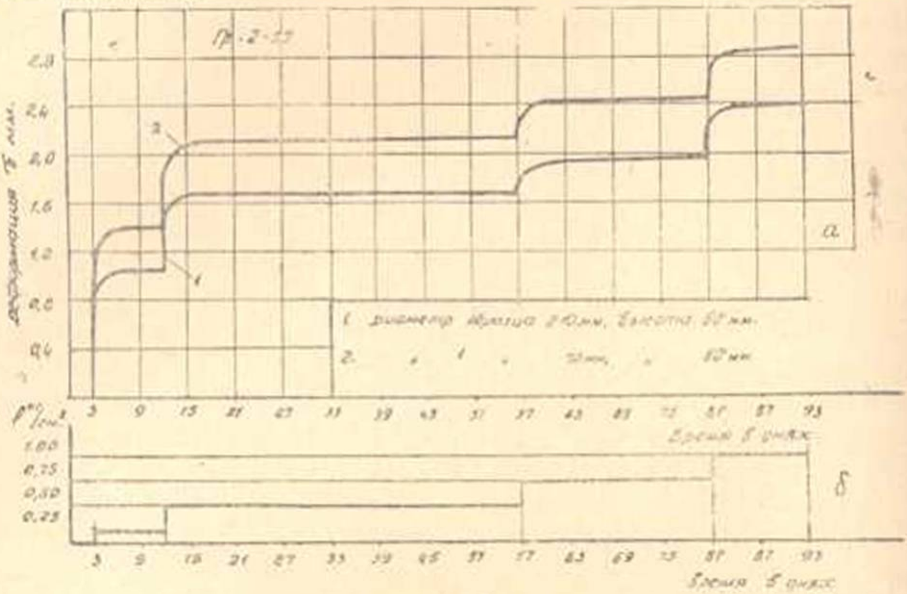
Для определения влияния бокового трения попарно испытывались четыре образца нагрузками, приложенными ступенями по 0,125 и 0,25 $кг/см^2$ с выдерживанием их под этими ступенями от 9 до 44 дней.

В табл. 2 приведены основные данные о физических свойствах как образцов указанных выше размеров, так и образцов высотой 20 *мм*, диаметром 70 *мм*.

Таблица 2

№ опытов	Размеры образцов: высота в *мм*	Размеры образцов: диаметр в *мм*	Удельный вес в $г/см^3$	Объемный вес в $г/см^3$	Влажность в %	Коэффиц. влажности
2/57	20	70	2,66	1,83	34,4	0,96
2/58	20	70	2,66	1,82	34,4	0,97
2/55	60	70	2,66	1,81	34,4	0,98
2/56	60	70	2,66	1,80	34,4	0,99
2/59	60	210	2,66	1,80	34,4	0,99
2/60	60	210	2,66	1,79	34,4	1,00

Для сравнения результатов испытания образцов толщиной 60 *мм*, диаметрами 70 и 210 *мм* на фиг. 1а приведены кривые полных деформаций в зависимости от времени и ступенчато-приложенных нагрузок (фиг. 1б).



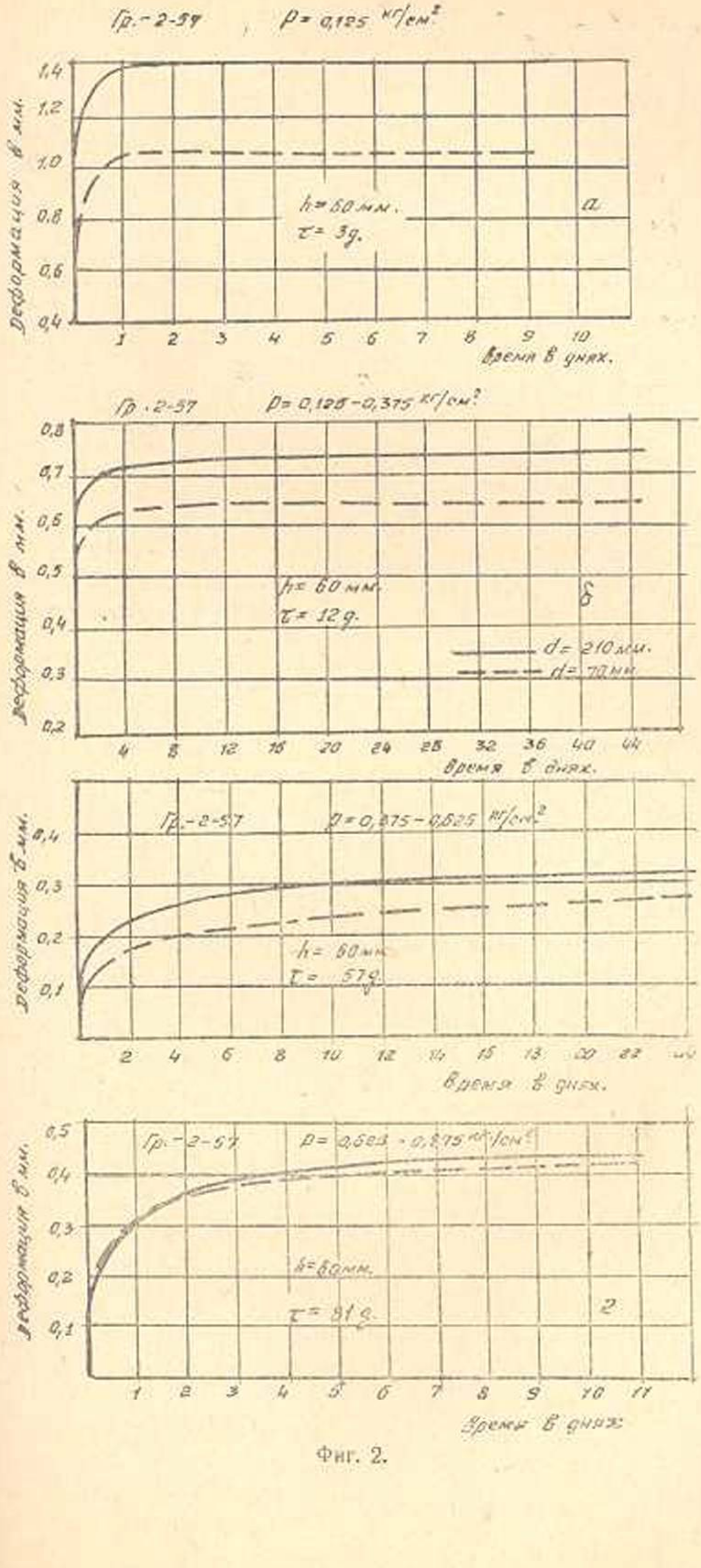
Фиг. 1.

Из указанного графика следует, что, несмотря на одинаковые значения высоты образцов, ввиду влияния бокового трения, при их сжатии имеет место существенное расхождение между указанными выше кривыми, достигающее при первой ступени нагрузки до 30%.

Если теперь рассмотреть результаты этих опытов для каждой ступени нагрузки в отдельности (фиг. 2), то нетрудно будет прийти к выводу, что существующее расхождение между кривыми деформации во времени указанных выше образцов при переходе от одной ступени нагрузки к другой постепенно уменьшается, и, при четвертой ступени нагрузки, достигает незначительной величины.

Указанное обстоятельство, по-видимому, можно объяснить тем, что коэффициент бокового давления не является постоянной величиной и что он уменьшается по мере уплотнения грунта. Отсюда приходим к выводу, что при определении влияния высоты образца на деформативные свойства грунтов нарушенной структуры, во избежание влияния бокового трения, желательно, а для грунтов текучей консистенции необходимо, пользоваться образцами с постоянным значением отношения диаметра к их высоте.

Учитывая вышеизложенное, для сравнения полученных результатов испытания образцов высотою 20 и 60 *мм*, пользовались приборами с диаметром грунтовых колец 70 и 210 *мм*; что же касается образцов высотою 10 и 20 *мм*, то в этом случае пользовались при-


Гр.-2-57
р = 0,125 кг/см²
Деформация в мм.
h=60 мм.
τ= 3д.
а
Время в днях.
Гр.-2-57
р= 0,125–0,375 кг/см²
Деформация в мм.
h= 60 мм.
τ= 12 д.
б
d= 210 мм.
d= 70 мм.
Время в днях.
Гр.-2-57
р=0,375–0,625 кг/см²
Деформация в мм.
h= 60 мм
τ= 57д.
Время в днях.
Гр.-2-57
Деформация в мм.
h=60мм.
τ= 81 д.
г
Время в днях.

Фиг. 2.

борами с диаметром грунтовых колец 70 *мм*. Хотя в последнем случае не соблюдается необходимое условие, но, как мы увидим ниже, это не вносит существенного различия в значениях деформаций.

В целях исследования влияния высоты образца на деформативные свойства связных водонасыщенных образцов грунта нарушенной структуры, были использованы: 1) суглинок из Ахтинского района Армянской ССР (лаб. № 2—57), 2) глина из Ахтинского района Армянской ССР (лаб. № 4—57), 3) диатомитовый грунт из Сисианского района Армянской ССР (лаб. № 5—57), 4) Часов-ярская глина (лаб. № 6—57), 5) Ново-швейцарская глина (лаб. № 7—57).

Некоторые основные физические свойства перечисленных выше грунтов приведены в табл. 1 и 3.

В табл. 2 и 3 приведены основные данные о физических свойствах образцов испытанных грунтов.

В общей сложности было испытано 46 образцов, причем образцы грунтов за № 2—57 и 6—57 исследованы при значениях их высот $h = 10$, 20 и 60 *мм*. Образцы толщиною 20 и 60 *мм* испытывались только при одностороннем движении отжимаемой воды (снизу вверх), а при $h = 20$ *мм* — как при одностороннем, так и двухстороннем движениях отжимаемой воды.

На фиг. 3, 4, 5 и 6 приведены графики кривых относительных деформаций грунта во времени, определенных испытанием образцов различной толщины при четырех „возрастах", соответствующих четырем ступеням нагрузок, в интервале времени от одного до 24 часов; на фиг. 8, 9, 10, 11 и 12 приведены эти же графики в интервалах времени от 5 до 55 дней, а на фиг. 1, 7—схемы их загружения.

Для определения влияния высоты образца на процесс его деформирования, сопоставим кривые относительных деформаций, полученные испытанием образцов $h = 10$, 20 и 60 *мм* при одностороннем движении отжимаемой воды (фиг. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 и 12).

Рассматривая графики фиг. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 и 12, замечаем, что в самом начале нагружения, в период влияния выжимания воды из пор грунта, имеет место некоторое расхождение между кривыми, определенными испытанием образцов $h = 10$, 20 и 60 *мм*, т. е. деформации образцов толщиною 60 *мм* протекают медленнее, чем деформации образцов толщиною 20 *мм*, и соответственно деформации образцов $h = 20$ *мм* протекают медленнее, чем образцов $h = 10$ *мм*. Однако, указанное расхождение в течение времени, по мере падения избыточных напоров в поровой воде, уменьшается и, в зависимости от точности выполнения опытов, кривые деформации или сливаются в одну или идут параллельно друг другу.

Ясно, что начиная с того момента, когда эти кривые сливаются или идут параллельно друг другу (что говорит об одинаковой скорости деформирования образцов), явления выжимания воды из пор грунта больше не влияют на процесс деформирования, и деформации образцов протекают только за счет ползучести скелета [8].

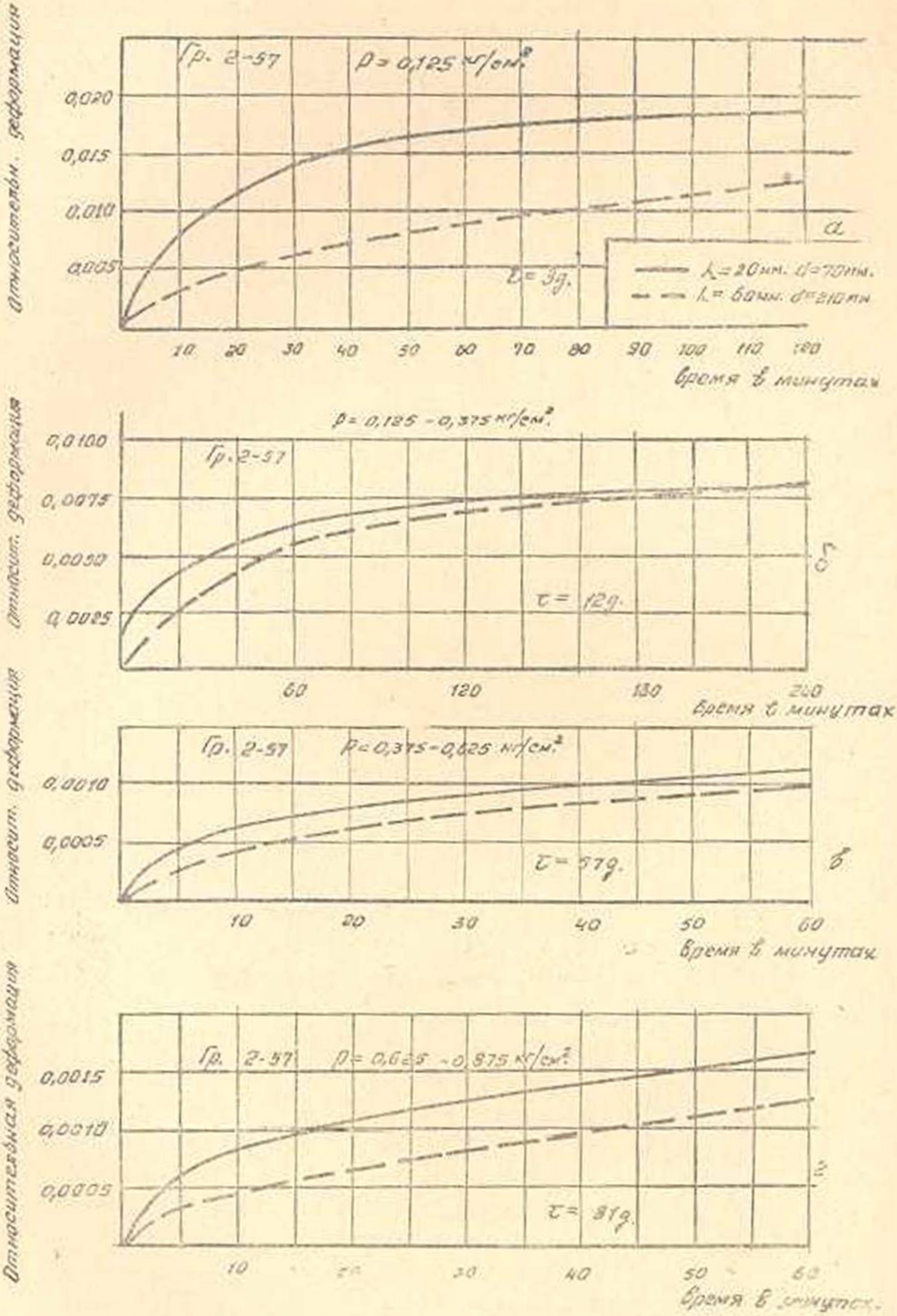
Таблица 3

№№ опытов	Размеры образцов		Колич. испытан. образцов	Удельн. вес в $г/см^3$	Объемный вес в $г/см^3$	Влажность в %	Пределы пластичности		
	высота в *мм*	диаметр в *мм*					граница текуч.	граница пластичности	число пластичности
				Грунт № 4—57 (Ахтинская глина)					
4 / 162—164	60	210	3	2,70	1,74	40,8	41,2	23,2	18,0
4 / 165—167	20	70	3		1,80	40,8			
4 / 168—170	10	70	3		1,81	40,8			
4 / 171—173	20	70	3*		1,79	40,8			
				Грунт № 5—57 (Диатомитовый грунт)					
5 / 132—134	60	210	3	2,59	1,56	56,9	58,10	32,23	25,87
5 / 135—137	20	70	3		1,61	56,9			
5 / 138—140	10	70	3		1,66	56,9			
5 / 141—143	20	70	3*		1,62	56,9			
				Грунт № 6—57 (Часов-ярская глина)					
6 / 84—85	60	210	2	2,65	1,59	57,25	59,07	21,20	37,87
6 / 88—89	20	70	2		1,60	57,25			
				Грунт № 7—57 (Новошвейцарская глина)					
7 / 180—182	60	210	3	2,63	1,54	61,45	64,37	30,45	33,92
7 / 183—185	20	70	3		1,58	61,45			
7 / 186—188	10	70	3		1,59	61,45			
7 / 189—191	20	70	3*		1,58	61,45			

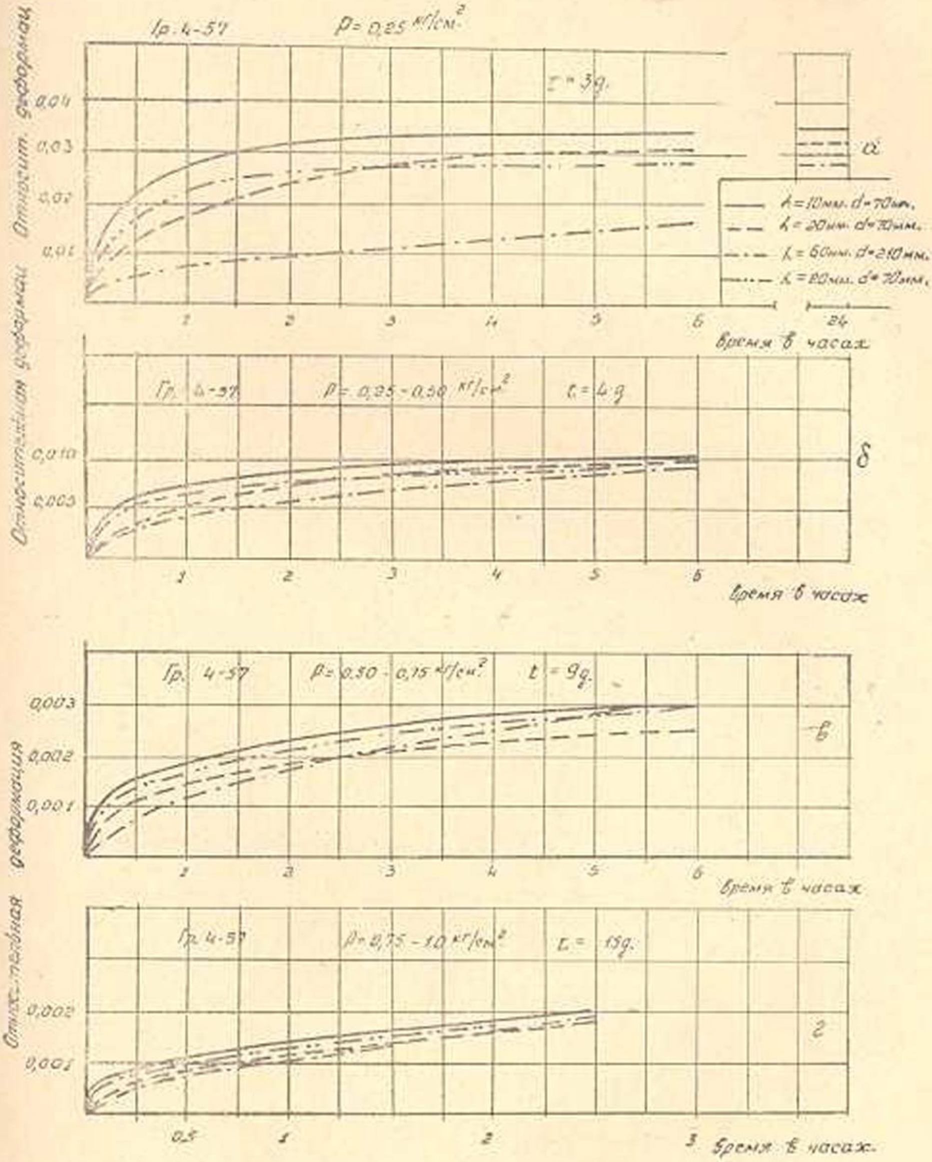
* Образцы испытывались при двухстороннем движении отжимаемой воды.

Значения продолжительности влияния фильтрационных явлений исследованных нами грунтов в зависимости от высоты сравниваемых образцов и ступеней нагрузок приведены в табл. 4.

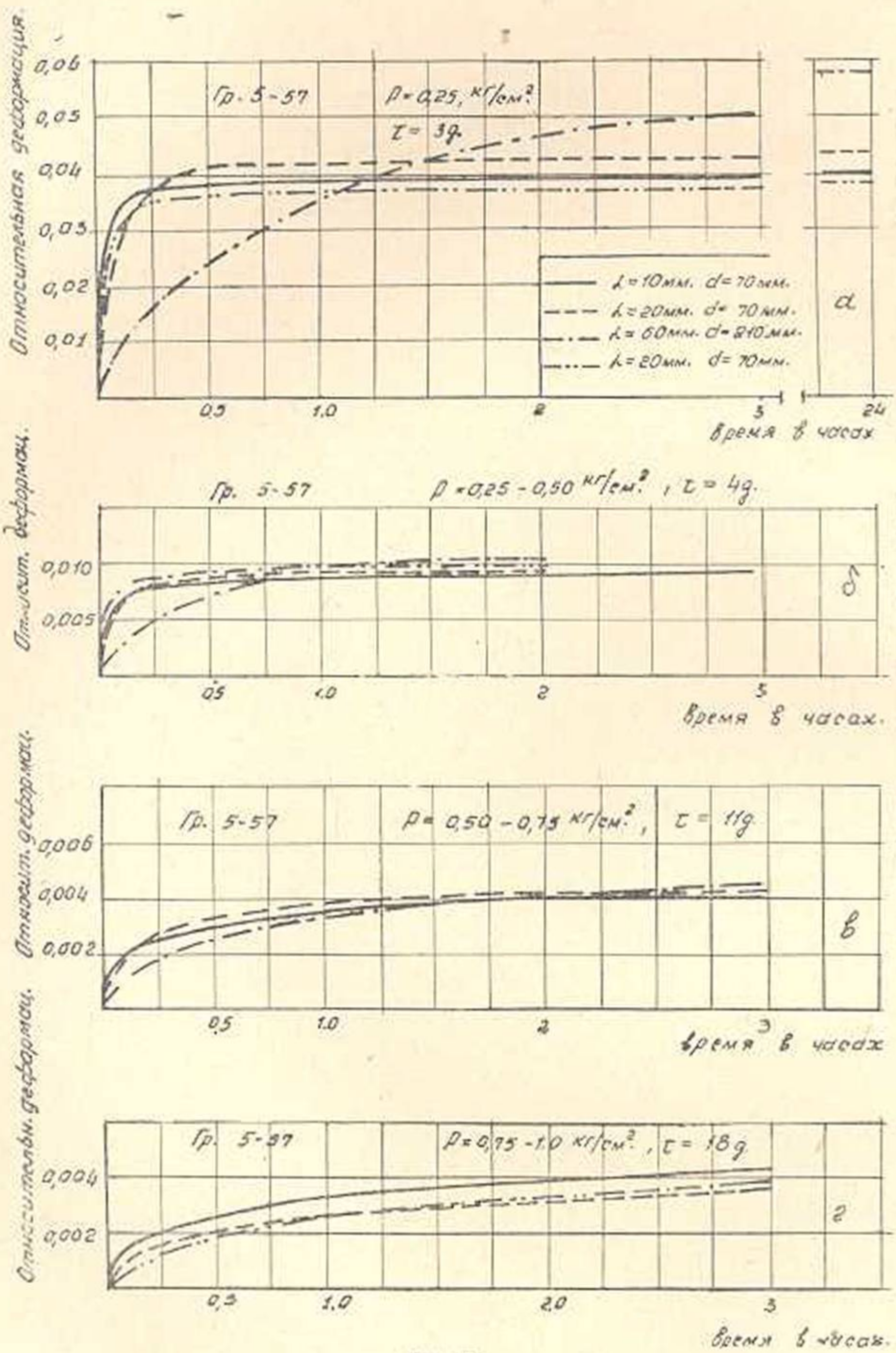
Из графиков фиг. 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11 и 12 и данных, приведенных в табл. 4 о продолжительности влияния фактора фильтрации на процесс деформирования образцов грунта следует, что указанная продолжительность меняется, как в зависимости от высоты сравни-


Относительн. деформация
Гр. 2-57
p = 0,125 кг/см²
0,020
0,015
0,010
0,005
τ = 9д.
h = 20мм. d = 70мм.
h = 60мм. d = 210мм
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120
время в минутах
а
p = 0,125 – 0,375 кг/см²
Относит. деформация
Гр. 2-57
0,0100
0,0075
0,0050
0,0025
τ = 12д.
60 120 180 240
время в минутах
б
Относит. деформация
Гр. 2-57
p = 0,375 – 0,625 кг/см²
0,0010
0,0005
τ = 57д.
10 20 30 40 50 60
время в минутах
в
Относительная деформация
Гр. 2-57
p = 0,625 – 0,875 кг/см²
0,0015
0,0010
0,0005
τ = 81д.
10 20 30 40 50 60
время в минутах
г

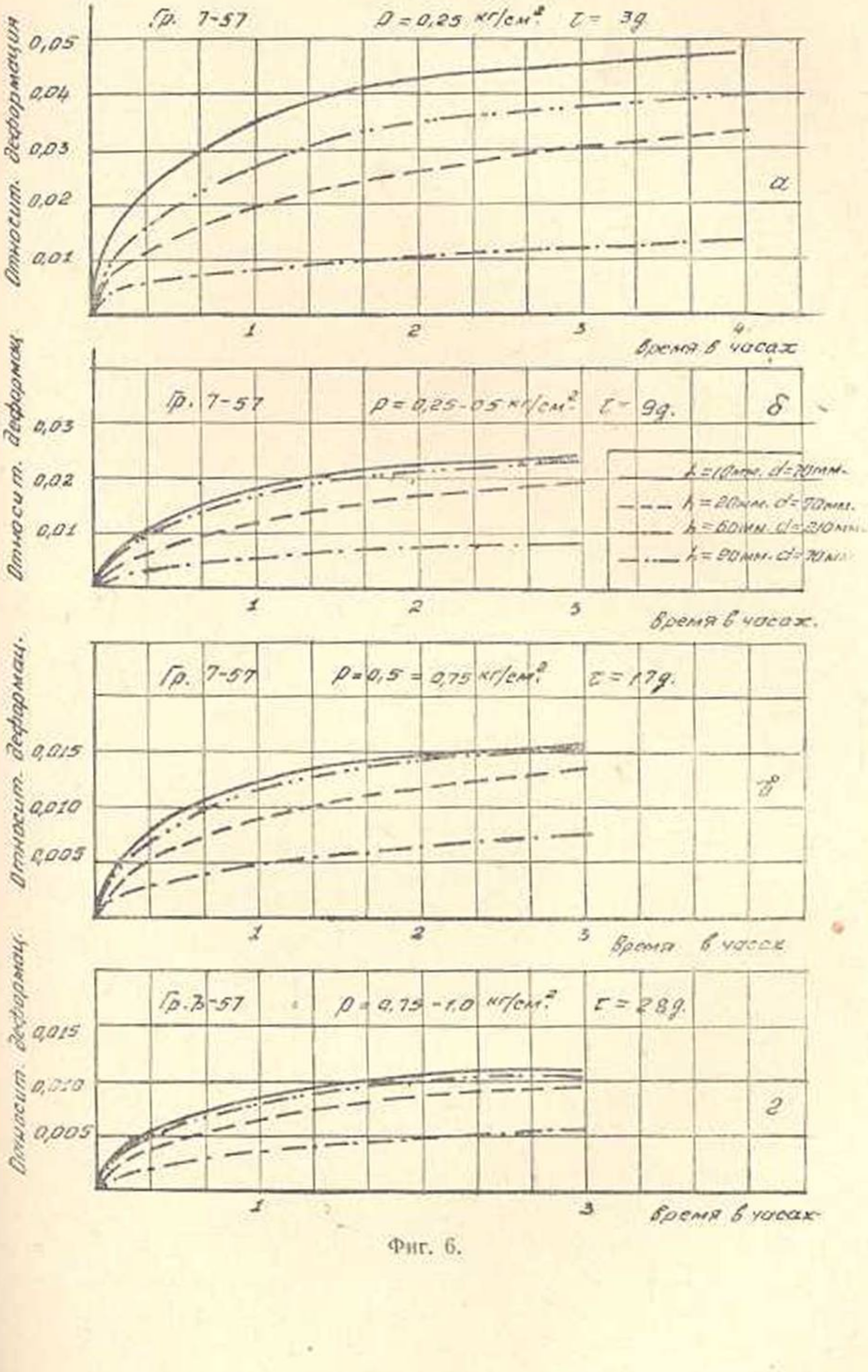
Фиг. 3.


Гр. 4-57
p= 0,25 кг/см²
t = 3д.
а
h=10мм. d=70мм.
h=20мм. d=70мм.
h=60мм. d=210мм.
h=80мм. d=70мм.
Время в часах
Гр. 4-57
p= 0,25 - 0,50 кг/см²
t = 4д.
б
время в часах
Гр. 4-57
p= 0,50 - 0,75 кг/см²
t = 9д.
в
время в часах
Гр. 4-57
p= 0,75 - 1,0 кг/см²
t = 15д.
г
Время в часах.
Относит. деформац
Относительная деформац
Относительная деформация

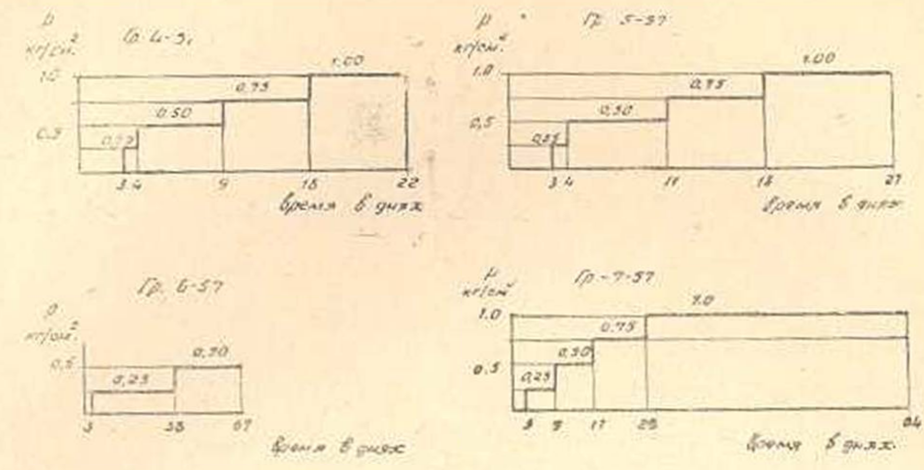
Фиг. 4.


Гр. 5-57
p = 0,25, кг/см²
τ = 3д.
Относительная деформация
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
h = 10мм. d = 70мм.
h = 20мм. d = 70мм.
h = 60мм. d = 210мм.
h = 20мм. d = 70мм.
а
0,5
1,0
2
3
24
время в часах
Гр. 5-57
p = 0,25 - 0,50 кг/см², τ = 4д.
Относит. деформац.
0,010
0,005
б
0,5
1,0
2
3
время в часах.
Гр. 5-57
p = 0,50 - 0,75 кг/см², τ = 11д.
Относит. деформац.
0,006
0,004
0,002
в
0,5
1,0
2
3
время в часах
Гр. 5-57
p = 0,75 - 1,0 кг/см², τ = 18д.
Относительн. деформац.
0,004
0,002
г
0,5
1,0
2,0
3
время в часах.

Фиг. 5.


Гр. 7-57
p = 0,25 кг/см²
τ = 3д
Относит. деформация
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
а
1
2
3
4
время в часах
Гр. 7-57
p = 0,25-0,5 кг/см²
τ = 9д.
б
Относит. деформац.
0,03
0,02
0,01
h=10мм. d=70мм.
h=20мм. d=70мм.
h=60мм. d=210мм.
h=90мм. d=70мм.
1
2
3
время в часах.
Гр. 7-57
p = 0,5 = 0,75 кг/см²
τ = 17д.
Относит. деформац.
0,015
0,010
0,005
в
1
2
3
Время в часах
Гр. 7-57
p = 0,75 -1,0 кг/см²
τ = 28д.
Относит. деформац.
0,015
0,010
0,005
г
1
3
время в часах

Фиг. 6.



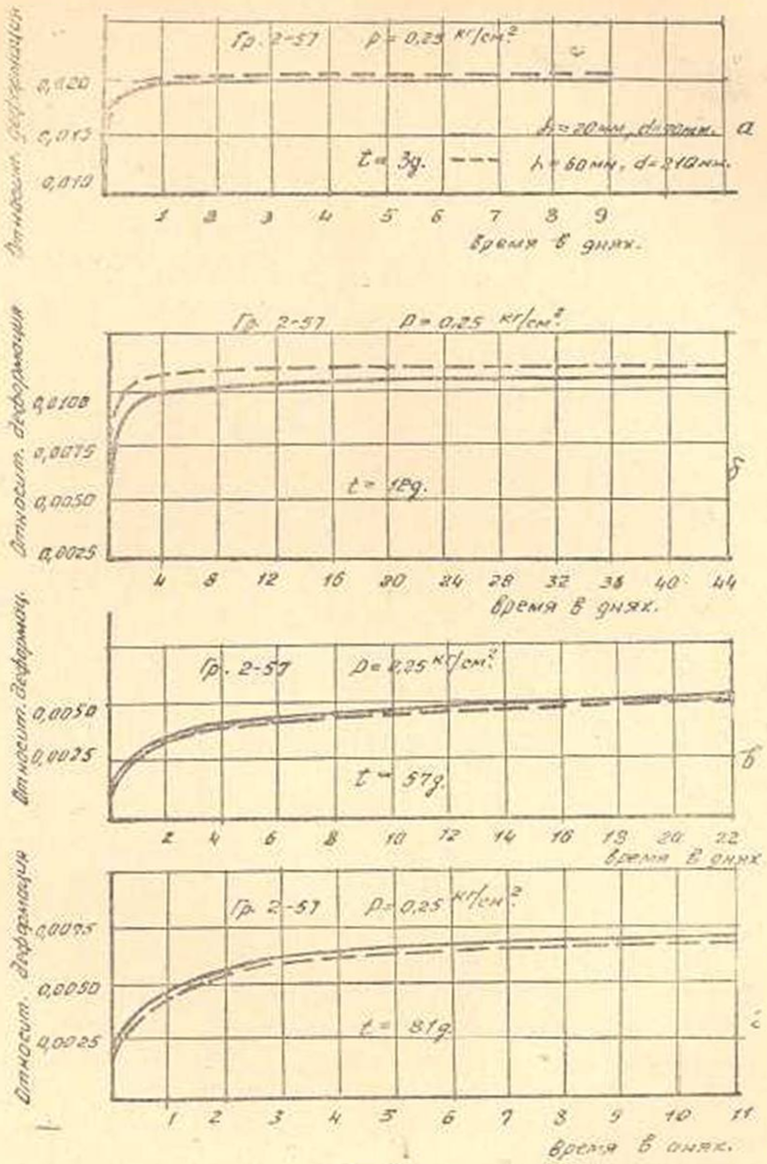
Фиг. 7.

Таблица 4

№ пп	Размеры (высота) сравниваемых образцов в *мм*	Ступень нагрузки	Продолжительность влияния фильтрационных явлений в часах				
			Лабораторные номера грунтов				
			2—57	4—57	5—57	6—67	7—57
1	10—20	I	—	4	1	—	>4
2	20—60		12	~24	6	288	120
3	10—20	II	—	2—3	0,5	—	~3
4	20—60		4	~24	2	192	96
5	10—20	III	—	<0,5	0,25	—	~2
6	20—60		0,5	<24	2	—	48
7	10—20	IV	—	<0,5	0,25	—	<1
8	20—60		<0,5	6	0,5	—	40

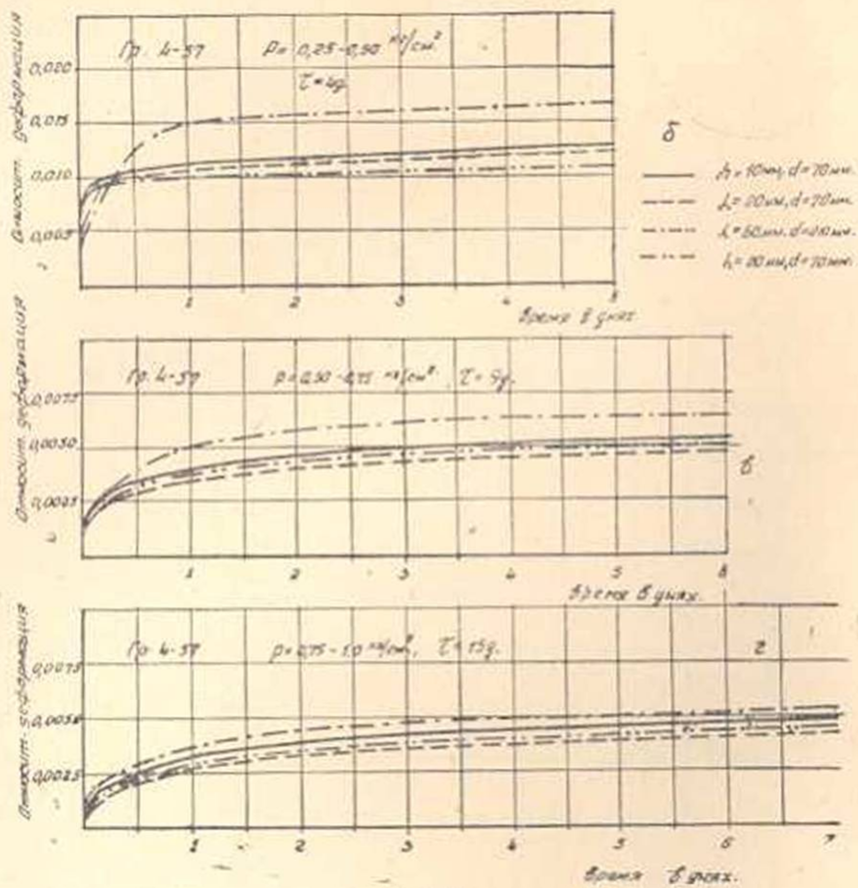
ваемых образцов, так и от свойств грунтов. Если она для образцов высотою 10 и 20 *мм* (гр. 4—57) равна 4 часам, то для образцов высотою 20 и 60 *мм* равна 24 часам. Что же касается влияния свойств исследованных грунтов, то сравнивая кривые деформирования образцов высотою 20 и 60 *мм*, соответствующие первым ступеням нагрузок, замечаем, что продолжительность влияния фильтрационных явлений колеблется от 6 до 288 часов (фиг. 5, 8, 9, 11 и 12). Наибольшее значение, 288 часов, соответствует Часов-ярской глине, обладающей наименьшей водопроницаемостью ($k \approx i \times 10^{-8}$ *см/сек*). Наименьшее значение длительности действия фактора фильтрации соответствует диатомитовому грунту.

Ясно, что продолжительность действия фактора фильтрации зависит не только от водопроницаемости грунта, но и от значения величины сопротивления между частицами и агрегатами грунта при их перемещении друг относительно друга.



Фиг. 8.

Необходимо обратить внимание еще на то, что по мере перехода от одной ступени нагрузки к другой, за счет уплотнения и повышения сцепления между частицами и агрегатами грунта, период влияния явления выжимания воды из пор на процесс деформирования постепенно уменьшается [8, 9]. Например, если этот период для первой ступени нагрузки грунта 2—57 ($h = 20—60$ *мм*) равен 12 часам, то для второй ступени он равен 4 часам, для третьей и четвертой ступеней нагрузок едва доходит до 30 минут (фиг. 3, табл. 4).

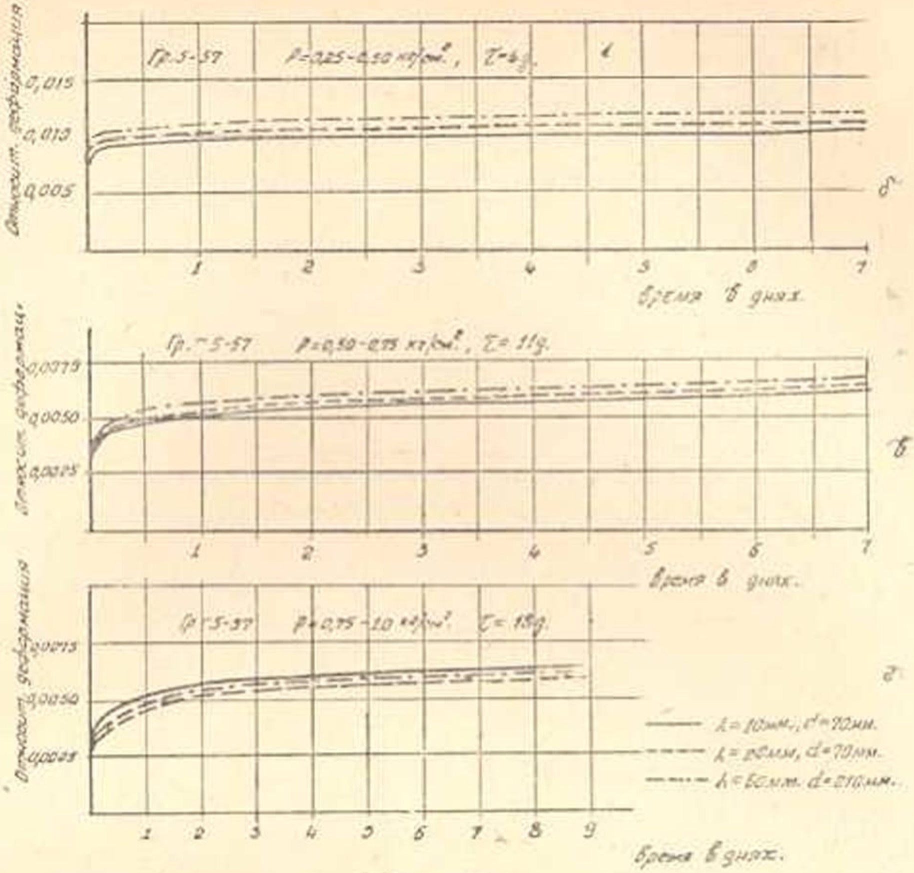


Фиг. 9.

Для определения продолжительности фильтрационного уплотнения и ползучести скелета, С. А. Роза и А. И. Котовым [7] была использована величина изменения избыточного давления воды во времени.

Известно, что, при выполнении экспериментальных работ, в целях исключения влияния неровностей поверхности образцов, обычно, результаты, полученные от первых ступеней нагрузок, не рассматриваются [6]. Кроме того, если учесть то, что наши опыты проведены в условиях одностороннего движения отжимаемой воды из пор, то на основании данных табл. 4 можно прийти к выводу, что для исследованных нами образцов грунтов нарушенной структуры толщиною 10—20 *мм*, продолжительность влияния фактора фильтрации ограничится величинами порядка 0,25—1 час.

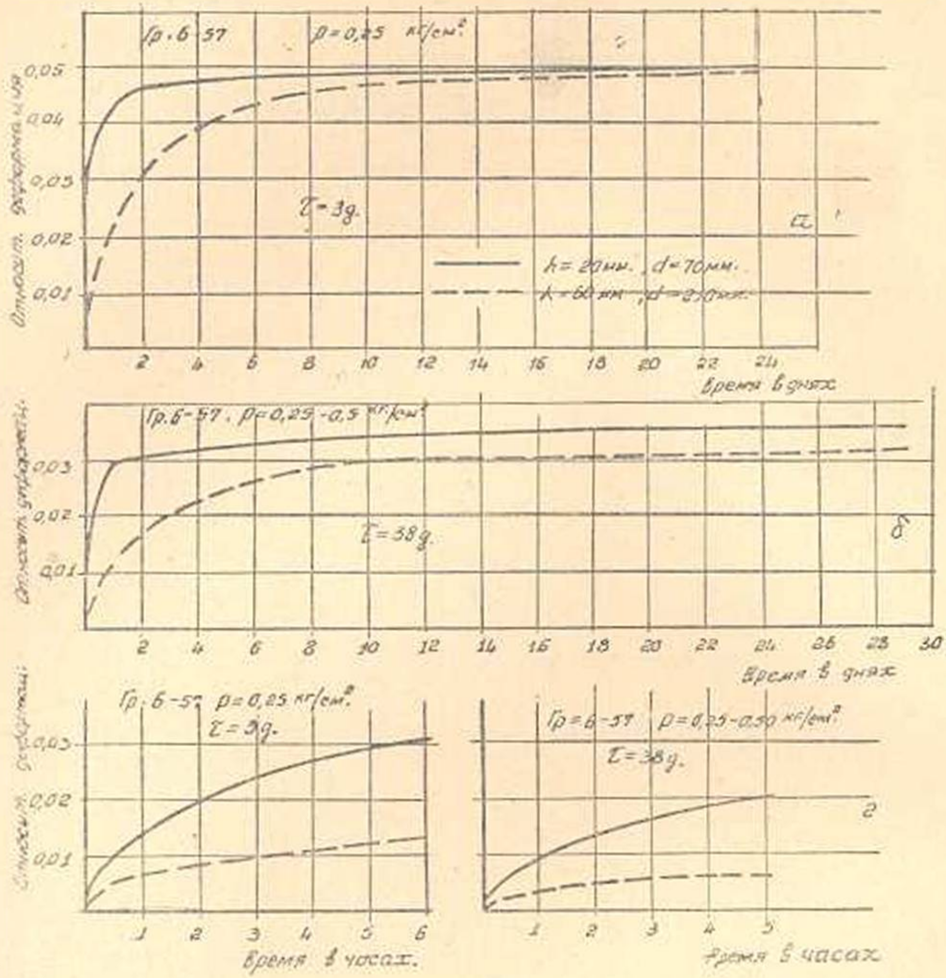
Учитывая вышеизложенное и то обстоятельство, что в указанных интервалах времени (0,25—1 час) расхождение между скоростями деформирования образцов высотою 10 и 20 *мм* небольшое, влиянием выжимания воды из пор образцов указанных размеров можно пренебречь [8].



Фиг. 10.

Таким образом, *для изучения основных закономерностей ползучести скелета грунта нарушенной структуры можно использовать водонасыщенные образцы высотою 10—20 мм.* При исследовании глин с малой водопроницаемостью желательно пользоваться образцами высотою 10 *мм*.

Если теперь сравнить кривые деформации во времени двухсантиметровых образцов, испытанных при двухстороннем движении отжимаемой воды (кривые изображены пунктирными линиями с двумя точками) с кривыми, полученными испытанием образцов высотою 10 *мм* при одностороннем движении отжимаемой воды (фиг. 4, 5, 6, 9 и 12), заметим, что они настолько близки, что почти во всех случаях накладываются друг на друга. Отсюда следует, что деформирование слоя грунта толщиною $2h$ при двухсторонней фильтрации тождественно с деформированием слоя толщиною h при одностороннем движении отжимаемой воды [11]. Кроме этого, приходим и к такому выводу, что боковое трение образцов 10, 20 *мм*, диаметром 70 *мм* о стенки грунтовых колец не вносит существенных изменений в значения их относительных деформаций.



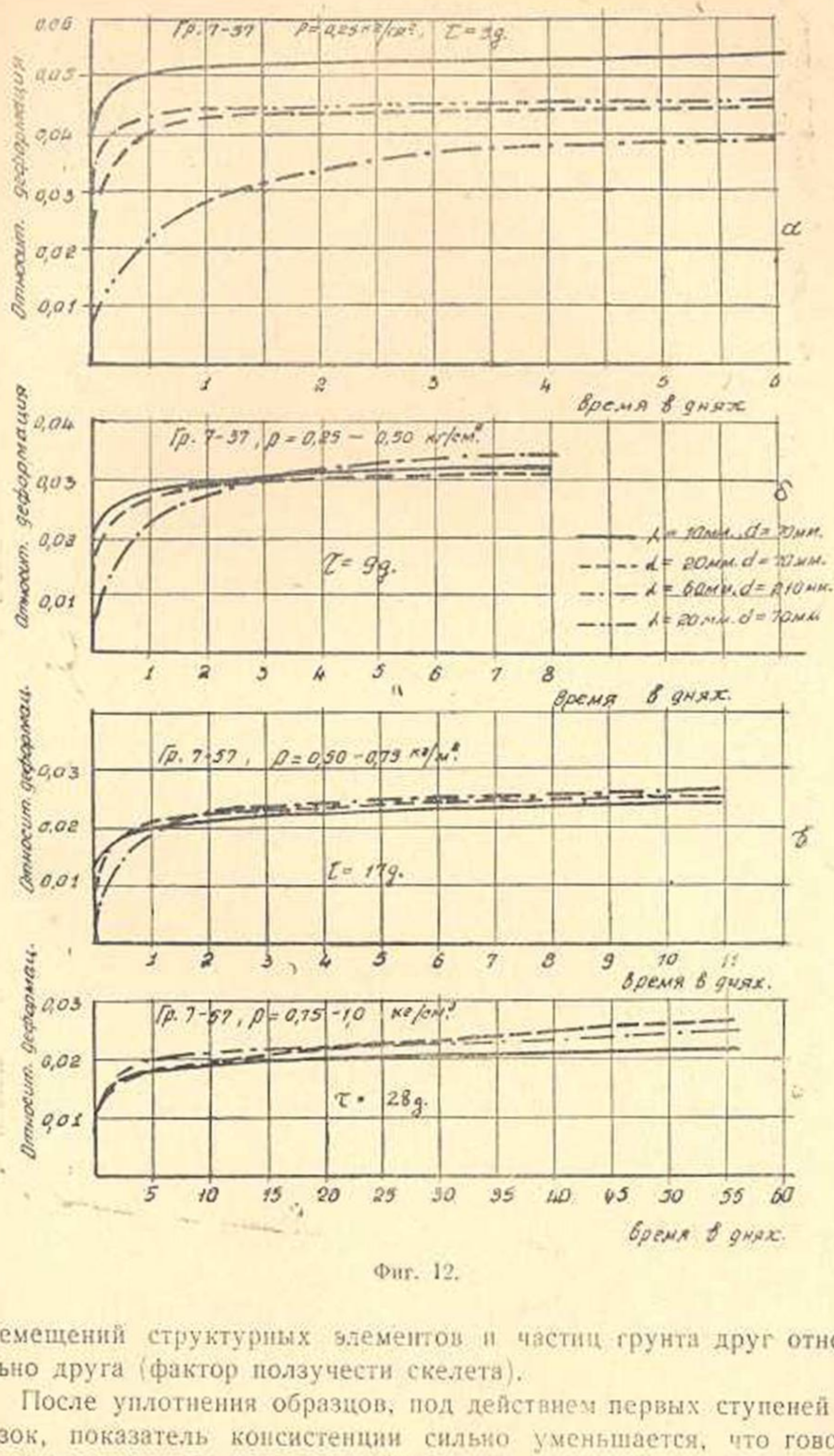
Фиг. 11.

Для выяснения вопроса о факторах, действующих в процессе деформирования грунтов в период влияния выжимания воды из пор, в табл. 5 приведены приблизительные значения показателя консистенции n (1), определенные на основании кривых деформации во времени образцов толщиною 20 и 60 *мм* (фиг. 3, 4, 11 и 12).

Таблица 5

Ступени нагрузок	Показатель консистенции n			
	Лабораторные №№ грунтов			
	2—57	4—57	6—57	7—57
I	1,4	1,6	2,0	1,6
II	0,4	0,4	2,0	0,6

Анализируя данные, полученные в табл. 5, замечаем, что показатель консистенции, в зависимости от свойств грунтов, для первых двух ступеней нагрузок колеблется от 0,4 до 2 (6—57). Причем только Часов-ярская глина деформируется в соответствии с теорией фильтрационного уплотнения ($n = 2$), а остальные грунты с самого начала процесса уплотнения испытывают влияние как явления фильтрации, так и сопротивления от



Фиг. 12.

перемещений структурных элементов и частиц грунта друг относительно друга (фактор ползучести скелета).

После уплотнения образцов, под действием первых ступеней нагрузок, показатель консистенции сильно уменьшается, что говорит об уменьшении доли влияния фактора фильтрации и увеличении доли влияния фактора ползучести скелета.

Из приведенных в работе [9] опытов, ни в одном случае продолжительность деформирования образцов различной толщины не зависела от квадрата их высоты, т. е. показатель консистенции всегда был меньше двух.

Автор статьи [9] отмечает, что мы при рассмотрении деформативных свойств грунта исходим из различных физических представлений. По-видимому, автор статьи [9] не был знаком с нашими работами [6, 8], поэтому о принятой нами модели глинистого водонасыщенного грунта имеет другое представление.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 XII 1958

Ս. Ռ. Մեսչյան

ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ՋՐԱՀԱԳԵՑՎԱԾ ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՏԻՎ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՆՄՈՒՇԻ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Համաձայն ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի տեսության, տարբեր բարձրություններ ունեցող կապակցված գրունտի շերտերի դեֆորմացիաների տևողությունները սեղմելու ժամանակ ուղիղ համեմատական են այդ շերտերի բարձրությունների քառակուսուն: Սակայն, ինչպես ցույց են տալիս փորձերը, տարբեր բարձրություն ունեցող կապակցված գրունտների շերտերի դեֆորմացիաների տևողությունները որոշ դեպքերում չեն համապատասխանում ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի տեսության վերոհիշյալ եզրակացությանը: Հայտնի է, որ վերևում նշվածի պատճառը՝ կմախքի սողքը հաշվի չառնելն է:

Կապակցված գրունտների կմախքի սողքը հաշվի առնելու համար անհրաժեշտ է էքսպերիմենտների միջոցով որոշել կմախքի սողքի հիմնական բնութագրերը: Հաշվի առնելով վերոհիշյալի կարևորությունը գրունտների խտացման տեսության խնդիրները լուծելու համար, հոդվածում բերված է սողքի դեֆորմացիաների վրա նմուշների բարձրության ազդեցության ուսումնասիրությունը, որն իր հերթին անմիջականորեն կապված է կապակցված գրունտների կմախքի սողքի որոշման հետ:

Կապակցված գրունտների կմախքի սողքի որոշման մեթոդիկան մշակելու համար օգտագործված է այն փաստը, որ, երբ տարբեր բարձրություններ ունեցող նմուշների դեֆորմացիաների տևողությունները հավասար են իրար, նմուշների դեֆորմացիաները հիմնականում ընթանում են ի հաշիվ կմախքի սողքի, և ծակոտկենային ջրի հեռացումը, կամ բոլորովին ազդեցություն չունի դեֆորմացիայի տևողության վրա, կամ էլ այդ ազդեցությունը շատ փոքր է:

Նախքան տարբեր բարձրություններ ունեցող նմուշների փորձարկման անցնելը, մշակված է տարբեր բարձրություններ ունեցող նմուշների փորձարկման մեթոդիկան և ցույց է տրված, որ կողային շփման ազդեցությունը վերացնելու համար անհրաժեշտ է փորձարկել նման նմուշներ, որոնց բարձրության հարաբերությունը տրամագծին՝ միևնույնն է։

Հոդվածում ցույց է տրված, որ, երբ փորձարկվող շերտերի բարձրությունները փոքր են (10—20 մմ), ապա այդ դեպքում ծակոտկենային ջրի հեռացման ազդեցությունը նմուշի դեֆորմացիայի տևողության վրա՝ շատ փոքր է։ Իսկ այդ նշանակում է, որ կապակցված գրունտների կմախքի սողքի բնութագիրը որոշելու համար անհրաժեշտ է օգտվել 10—20 մմ բարձրություն ունեցող նմուշների փորձարկումից։

Հոդվածում բերված էքսպերիմենտների հիման վրա պարզված է, որ փորձարկված հինգ տարբեր գրունտներից միայն մեկն է (Զառով-Յարի կավ), որ խառնում է համաձայն ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի տեսության։ Մնացած բոլոր դեպքերում էքսպերիմենտների արդյունքները բավականին տարբերվում են վերոհիշյալ տեսության տվյալներից։

Էքսպերիմենտների և ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի տեսության արդյունքները իրար հետ համեմատելու համար օգտագործված է գրունտի կոնսիստենցիայի ցուցանիշի (n) մեծությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов Н. Я.* — О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота М., 1951.
2. *Флорин В. А.* — Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей земляной среды. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
3. *Флорин В. А.* — Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Изв. АН СССР, ОТН № 9, 1953.
4. *Месчян С. Р.* — К вопросу о ползучести связных грунтов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, том VII, № 6, 1954.
5. *Месчян С. Р.* — К вопросу об описании ползучести связных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР, том XXI, № 2, 1955.
6. *Месчян С. Р.* — О ползучести связного грунта при сжатии в условиях невозможности бокового расширения. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XI, № 4, 1958.
7. *Роза С. А.* — О явлениях ползучести скелета в процессе консолидации. Гид. стр-во, № 5, 1956.
8. *Месчян С. Р.* — О методике экспериментального исследования ползучести скелета связных грунтов. ДАН АрмССР, том XXVI, № 4, 1958.
9. *Соколов А. Г.* — Вопросы ползучести глинистых водонасыщенных грунтов. Научно-техн. информ. бюлл. Ленингр. политехн. ин-та, № 1—2, 1958.
10. *Маслов Н. Н.* — Условия устойчивости склонов в гидро-энергетическом строительстве, Госэнергоиздат, М.-Л., 1955.
11. *Цытович Н. А.* — Механика грунтов. Гос. изд-во литературы по стр-ву и архитектуре, М.-Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

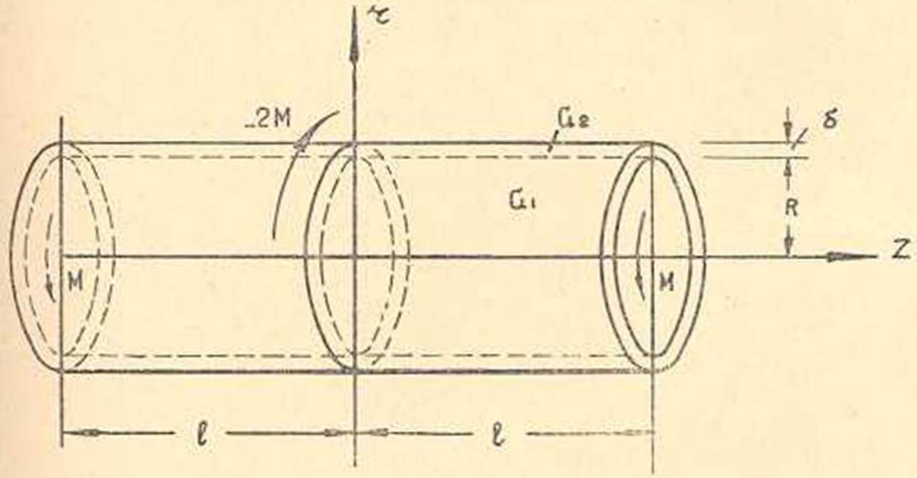
НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

А. А. Баблоян

Кручение вала с тонким усиливающим слоем, сосредоточенными моментами

Для задачи о кручении вала переменного сечения с тонким усиливающим покрытием приближенный метод решения был предложен К. С. Чобаняном [1].

В настоящей заметке рассматривается кручение вала, имеющего тонкое усиливающее покрытие на боковой поверхности, когда скручивающая нагрузка приложена на его торцах и в средней части боковой поверхности сосредоточенными моментами (фиг. 1).



Фиг. 1.

Такая задача для изотропного бесконечно длинного вала была рассмотрена А. Тимпе [2].

Решение задачи о кручении вала переменного сечения, имеющего тонкий усиливающий слой на боковой поверхности, сводится к определению функции напряжения $\Phi(r, z)$, удовлетворяющей в области осевого сечения вала уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

и граничному условию

$$G_1\Phi + G_2\delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -\int_0^s r^2(s)\,P(s)\,ds, \tag{2}$$

где

$$P(s) = \tau_{r\varphi}\frac{dz}{ds} - \tau_{z\varphi}\frac{dr}{ds}, \tag{3}$$

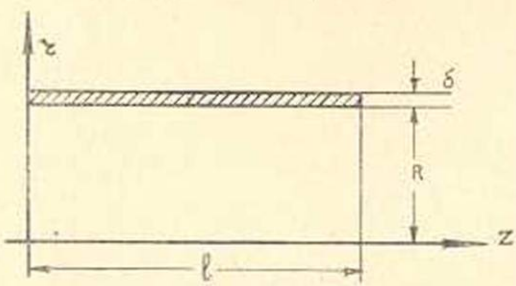
$r(s)$ — радиус вала в данном месте.

Величины напряжений $\tau'_{r\varphi}$ и $\tau'_{z\varphi}$ в усиливающем слое и $\tau'_{r\varphi}$, $\tau'_{z\varphi}$ в основном материале определяются через функцию $\Phi(r, z)$ формулами

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{r\varphi} &= -\frac{G_1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \tau'_{z\varphi} &= \frac{G_1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{r\varphi} &= -\frac{G_2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \tau'_{z\varphi} &= \frac{G_1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Для определения фуакции $\Phi(r, z)$, в силу симметрии, достаточно рассмотреть половину осевого сечения стержня (фиг. 2). На контуре этой части функция $\Phi(r, z)$ удовлетворяет условиям



Фиг. 2.

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(r, 0) = 0 \\ &\Phi(0, z) = 0 \\ &G_1\Phi(R, z) + \delta G_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{M}{2\pi} \\ &\iint_F r\tau_{\varphi z}\,|_{z=l}\,dF = M \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решение ищем в виде

$$\Phi(r, z) = Cr^4 z + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^2 I_2(\lambda_k r)\sin\lambda_k z, \tag{7}$$

где

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$$

$I_i(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента [3].
Удовлетворив граничным условиям (6) получим

$$C = -\frac{M}{2\pi R^3 l\,(G_1 R + 4\delta G_2)}$$
$$A_k = -\frac{M}{\pi R^2 l\lambda_k [G_1 I_2(\lambda_k R) + \delta\lambda_k G_2 I_1(\lambda_k R)]} \tag{8}$$

Подставляя эти значения в (7) будем иметь

$$\Phi(r, z) = -\frac{Mr^2}{\pi R^2 l}\left\{\frac{r^2 z}{2R(G_1 R + 4\delta G_2)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_2(\lambda_k r)\cdot \sin\lambda_k z}{\lambda_k [G_1 I_2(\lambda_k R) + \delta\lambda_k G_2 I_1(\lambda_k R)]}\right\}.$$

Подставляя сюда $\delta = 0$ для однородного вала получим функцию напряжения в виде

$$\Phi(r, z) = -\frac{Mr^4 z}{2\pi R^4 lG_1} - \frac{Mr^2}{\pi R^2 lG_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k I_2(\lambda_k R)}\sin\lambda_k z. \tag{10}$$

Для бесконечно длинного вала положив $\lambda_k = \frac{k\pi}{l} = \lambda,\ \frac{\pi}{l} = d\lambda$

переходя к переделу при $l \to \infty$ получим решение

$$\Phi(r, z) = -\frac{Mr^2}{\pi^2 R^2 G_1}\int_0^{\infty}\frac{I_2(\lambda r)}{\lambda I_2(\lambda R)}\sin(\lambda z)\, d\lambda, \tag{11}$$

которое совпадает с известным решением А. Тимпе.

Пользуясь выражением (9), для напряжений получим следующие формулы

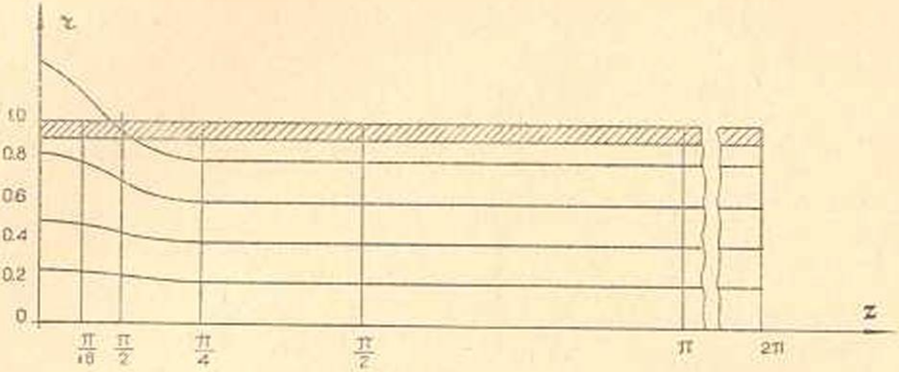
$$\tau'_{r\varphi}(r, z) = \frac{M}{\pi R^2 l}\left\{\frac{r^2}{2R(R + 4\delta m_0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_2(\lambda_k r)\cos\lambda_k z}{I_2(\lambda_k R) + \delta m_0 \lambda_k I_1(\lambda_k R)}\right\},$$
$$\tau'_{z\varphi}(r, z) = -\frac{M}{\pi R^2 l}\left\{\frac{2rz}{R(R + 4\delta m_0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_1(\lambda_k r)\sin\lambda_k z}{I_2(\lambda_k R) + \delta m_0 \lambda_k I_1(\lambda_k R)}\right\}, \tag{12}$$

$$\tau''_{r\varphi}(R, z) = \tau'_{r\varphi}(R, z),$$
$$\tau''_{z\varphi}(R, z) = m_0 \tau'_{z\varphi}(R, z), \tag{13}$$

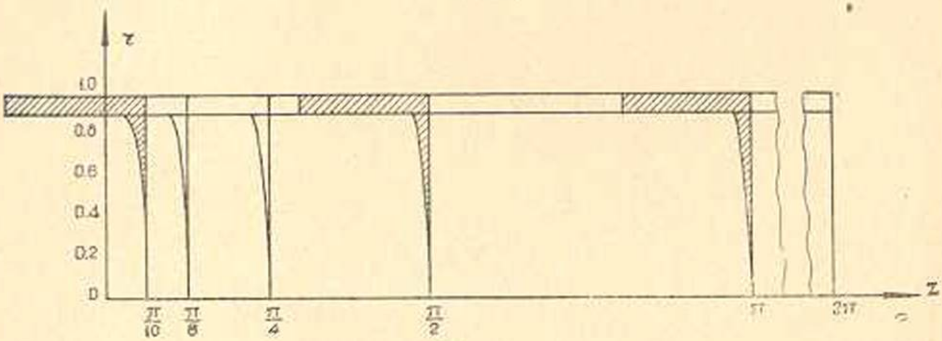
где
$$m_0 = \frac{G_2}{G_1}.$$

Численные значения напряжений полученные при $m_0 = 10$, $l = 2\pi$, $R = 1$, и $\delta = 0{,}1$ приведены в таблицах 1 и 2.

Для наглядного представления закона распределения напряжений, на фигурах 3 и 4 приводятся эпюры распределения напряжений $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Из этих таблиц и эпюр видно, что, при наличии усиливающего слоя, напряжения в основном материале вала оказываются небольшими.

Таблица 1

$\tau_{r\varphi}/M$

r \ z	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,0024	0,0021	0,0015	0,0015	0	0	0
0,4	0,0102	0,0087	0,0058	0,0016	0,0001	0	0
0,6	0,0263	0,0210	0,0122	0,0028	0,0001	0	0
0,8	0,0628	0,0401	0,0181	0,0035	0,0001	0	0
1,0	∞	0	0	0	0	0	0

Таблица 2

$\tau_{z\varphi}/M$

$r \diagdown z$	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0	0,00903	0,01609	0,02307	0,02485	0,02547	0,02547
0,4	0	0,01985	0,03432	0,04705	0,05076	0,05093	0,05093
0,6	0	0,03587	0,05765	0,07267	0,07624	0,07640	0,07640
0,8	0	0,06720	0,09001	0,09997	0,10176	0,10186	0,10186
1−0	—	0,1347	0,1306	0,1279	0,1273	0,1273	0,1273
1	∞	1,3468	1,3056	1,2788	1,2733	1,2733	1,2733

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1959

Ա. Հ. Բաբլոյան

ԲԱՐԱԿ ԱՄՐԱՑՆՈՂ ՇԵՐՏՈՎ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑԱԾ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փոփոխական կտրվածքով բարակ ամրացնող շերտով լիսեռի ոլորման խնդրի մոտավոր լուծման մեթոդը առաջարկվել է Կ. Ս. Չոբանյանի [1] կողմից։

Այս աշխատության մեջ դիտարկվում է ամրացնող շերտով լիսեռի ոլորման խնդիրը, երբ ոլորող ուժը, կենտրոնացած մոմենտների ձևով, կիրառված է լիսեռի հիմքերի ու կողմնային մակերևույթի միջին մասի վրա։

Այսպիսի խնդիր իզոտրոպ անվերջ երկար լիսեռի համար դիտարկվել է Ա. Տիմպեի [2] կողմից։

Խնդրի լուծումը որոնվում է շարքերի տեսքով ըստ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Կոնկրետ դեպքի համար բերված են լարումների թվային արժեքներ և էպյուրաներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чобанян К. С.* Кручение составного вала переменного диаметра. ДАН АрмССР, том XXVII, № 3, 1958, стр. 139—144.
2. *Тимпе А.* (A. Timpe) Die Torsion von Umdrehungskörpern Mathematische Annalen, Leipzig, Bd. 71, 1911, S. 480—509.
3. *Грей Э., Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиниздат, М., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 3, 1959 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

М. Л. Тер-Микаелян

Излучение релятивистского электрона, движущегося по окружности в плазме

Рассмотрим излучение релятивистского электрона, движущегося в магнитном поле при наличии плазмы*. Компонента Фурье с индексом n векторного потенциала дается выражением:

$$A_n = \frac{e e^{ikR_0}}{CR_0 T} \oint e^{i(n\omega_0 t - kr(t))} dr \tag{1}$$

Выражение (1) является обобщением аналогичного выражения для случая вакуума [1]. Нужно учесть, что связь между $\boldsymbol{k}$ и $\omega = n\omega_0$ в присутствии среды имеет вид:

$$\boldsymbol{k} = n\omega_0 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} q \tag{2}$$

Здесь q единичный вектор в направлении распространения, а $\omega_0 = \frac{ceH}{E}$ (3) частота обращения в магнитном поле. Учитывая дальнейшее применение формулы к астрофизическим проблемам, примем, что $\varepsilon < 1$ и имеет вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}. \tag{4}$$

Здесь N число свободных электронов в 1 $см^3$, m — масса и e — заряд электрона. Влиянием магнитного поля на вид диэлектрической постоянной можно пренебречь, если рассматривается излучение частот, превышающих ларморовскую чистоту прецессии электронов.

---

* Как мне указал Гинзбург, в работе Гинзбурга В. Л. ДАН, 1952 г., том LXXXVII стр. 187 имеется условие (20) и указание на то, что спектр излучения в магнитном поле будет зависеть от диэлектрической постоянной. Этому же вопросу посвящена подробная статья Цытовича, опубликованная в „Вестнике" МГУ, № 11, 1951 г. Однако интересующий нас случай автором не анализируется. Настоящая работа была доложена на теоретическом семинаре в ФИАН-е им. П. Н. Лебедева в 1953 г. в связи с аналогичной работой автора по тормозному излучению (ДАН XCIV, стр. 1033). Работа восстановлена по просьбе Гурзадяна Г.

Мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда $\varepsilon > 0$ ибо излучение частот, при которых $\varepsilon < 0$ не происходит. Естественно, что плазма предполагается прозрачной. Вектор Пойтинга, как известно, при наличии среды своего вида не меняет

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH]. \tag{5}$$

Нужно учесть, что в плоской волне

$$\sqrt{\varepsilon}\, |E| = |H|. \tag{6}$$

Тогда для излученной интенсивности n-ой гармоники в единицу телесного угла мы получим:

$$I_n = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} |H_n|^2 R_0^2 dO = \frac{c}{2\pi} |[kA_n]|^2 \frac{R_0^2}{\sqrt{\varepsilon}} dO. \tag{7}$$

Дальнейший расчет полностью повторяет аналогичные вычисления для случая вакуума. Если траектория частицы задается $y = r \sin \omega_0 t$ и $x = r \cos \omega_0 t$, то вводя $\varphi = \omega_0 t$, имеем

$$dx = -r \sin \varphi d\varphi \quad \text{и} \quad kr = kr \sin \theta \sin \varphi = \frac{nv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \sin \varphi,$$

где θ угол между направлением излучения и нормалью к плоскости движения.

Подставим полученные выражения в (1) и, используя известные свойства функций Бесселя, получим:

$$A_{nx} = i \frac{ev}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} I_n'\left(\frac{nv}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \theta\right)$$

$$A_{ny} = \frac{ev}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\frac{v}{c} \sin \theta} I_n\left(\frac{nv}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \theta\right) \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) получим полную интенсивность излучения:

$$dI_n = \frac{e^2}{2\pi} \frac{n^2\omega_0^2}{c\sqrt{\varepsilon}} \left[\varepsilon \frac{v^2}{c^2} I_n'^2\left(n \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \theta\right) + \operatorname{ctg}^2 \theta I_n^2\left(n \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \theta\right)\right]. \tag{9}$$

Интегрирование по углам проводится способом, аналогичным случаю для вакуума и мы получаем окончательно:

$$I = \frac{2e^4 n H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2 \sqrt{\varepsilon}\, m^2 v} \left\{ \frac{v^2}{c^2} \sqrt{\varepsilon}\, I_{2n}'\left(2n \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon}\right) - n\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right) \int_0^{\frac{v}{c}} I_{2n}(2n\sqrt{\varepsilon}\, \xi)\, d\xi \right\}$$

Как будет видно из дальнейшего, основную роль в излучении релятивистской частицы $\frac{E}{mc^2} \gg 1$ играют частоты с большими n.

Используя для этого случая асимптотическое представление функций Бесселя, имеем для случая

$$n\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon} \gg 1 \tag{11}$$

$$I_n = -\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3}}{\sqrt{\pi}\, m^2c^2}\left\{\Phi'(u) + \frac{1}{2\varepsilon}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right)n^{2/3}\int\limits_u^\infty \Phi(u)\,du\right\} \tag{12}$$

где

$$u = 2n^{2/3}\left(1-\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon}\right) \tag{13}$$

Рассмотрим предельные случаи формулы (12).

Нас будет интересовать случай плазмы, для которой ε мало отличается от единицы т. е.

$$\sqrt{\varepsilon} \approx 1 - \frac{2\pi Ne^2}{mn^2\omega_0^2}.$$

Пусть

$$u = n^{2/3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{4\pi Ne^2}{mn^2\omega_0^2}\right) \ll 1. \tag{14}$$

В этом случае $\Phi'(0) = -0{,}4587$ и интенсивность дается выражением, полностью совпадающим со случаем вакуума:

$$I_n = 0{,}52\cdot\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3} \tag{15}$$

При этом условие (14) налагает ограничения на излученные частоты

$$1 \ll n \ll \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{14'}$$

а также

$$n \gg \left(\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2}\right)^{3/4}$$

Другой предельный случай соответствует: $u \gg 1$, т. е.

либо
$$n \gg \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

либо
$$n \gg \left(\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2}\right)^{3/4} \tag{16}$$

Формулу (12) для интенсивности излучения можно в этом случае переписать в виде (17), воспользовавшись асимптотическим свойством функций Эйри

$$I_n = \frac{e^4 H^2}{2\sqrt{\pi}\, m^2 c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right)^{1/4} e^{-\frac{2}{3} n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon\right)^{3/2}} \tag{17}$$

Суммируем результаты. Для излучения волн с частотой $n\omega_0$, которые удовлетворяют неравенству (14′)

$$\omega_0 \ll \left(\frac{4\pi N e^2}{m\omega_0^2}\right)^{3/4}\omega_0 \ll n\omega_0 \ll \frac{\omega_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{14″}$$

интенсивность излучения дается выражением (15), независящим от диэлектрической постоянной. Для частот, находящихся как справа, так и слева этого интервала $u > 1$ и, следовательно, нужно пользоваться формулой (17), в которую существенным образом входит диэлектрическая постоянная.

Для существования интервала (14″) необходимо выполнение неравенства: $u \ll 1$ или

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \gg \frac{4\pi N m c^2}{H^2} \gg 1. \tag{18}$$

Проведем упрощение формулы (17) при выполнении условия (18).

Множители $1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon$, входящие в форму (17), можно заменить на $1-\frac{v^2}{c^2}$ при условии $1-\frac{v^2}{c^2} \gg \frac{4\pi N e^2}{m n^2 \omega_0^2}$, которое перепишем в виде

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \ll \frac{n^2 H^2}{4\pi m c^2 N}. \tag{19}$$

В районе максимума, где $n \sim \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$, неравенство (19) совпадает с условием (18).

Таким образом, около максимума и справа от него формула (15) должна переходить в формулу (17), в которой можно положить $\varepsilon = 1$. В другом крайнем случае, на левой стороне спектра $n \simeq \left(\frac{4\pi N e^2}{m\omega_0^2}\right)^{3/4}$ (см. условие 14″). Подставляя это значение в формулу

$$1-\frac{v^2}{c^2} \ll \frac{4\pi N e^2}{m n^2 \omega_0^2}, \tag{20}$$

противоположную формуле (19), придем вновь к условию (18). Таким образом, около левой части спектра излучения, формула (15) переходит в формулу (17), в которой можно пренебречь $1-\frac{v^2}{c^2}$ по сравнению с $\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2 n^2}$, т. е. интенсивность излучения будет даваться формулой:

$$I_n = \frac{e^4 H^2}{2\sqrt{\pi}\, m^2 c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) n^{1/2}\left(\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2 n^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{2}{3} n\left(\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2 n^2}\right)^{3/2}} \tag{21}$$

Рассмотрим теперь случай, когда неравенство (18) не выполняется, т. е.

$$1 \ll \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \ll \frac{4\pi Nmc^2}{H^2}. \tag{22}$$

Это означает, что для всего интервала излученных частот, интенсивность излучения дается формулой (17) (поскольку $u \gg 1$) и экспоненциально мала. Формулу (17) опять таки можно упростить в двух случаях, исходя из условий (19) и (20).

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 7 III 1959

Մ. Լ. Տեր-Միքայելյան

ՊԼԱԶՄԱՅԻ ՄԵՋ ՇՐՋԱՆԱԳԾՈՎ ՇԱՐԺՎՈՂ ՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐՈՆԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է էլեկտրոնի ճառագայթումը մագնիսական դաշտում, պլազմայի առկայությամբ։ Հետաքրքրական է նշել, որ (22) անհավասարության դեպքում ճառագայթումը էքսպոնենցիալ փոքր է։ Ի տարբերություն այն ճառագայթման, որն տեղի ունի վակուումում, (18) պայմանի դեպքում փափուկ քվանտները խիստ պակասում են։

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, 1948, стр. 225.