

А. А. Талалян

О представлении измеримых функций рядами

§ 1. Известно [1], что если последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на ограниченном измеримом множестве G положительной меры, образует нормированный базис в пространстве $L_p(G)$, то для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на G , существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на множестве G к $f(x)$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

В связи с этим естественно возникает вопрос:

Какие последовательности функций $\{f_n(x)\}$, кроме базисов пространства L_p , обладают тем свойством, что любая измеримая функция $f(x)$ представляется в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (a_n \text{ — действительные числа}),$$

который сходится к этой функции по мере.

Чтобы сформулировать теорему, доказанную в настоящей работе, введем следующие определения.

Определение 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, называется полной в смысле сходимости по мере, если для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, существует последовательность конечных линейных комбинаций функций системы $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ по мере на $[a, b]$.

Определение 2. Мы будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, асимптотически ортогональна, если для любого $\varepsilon > 0$ можно определить N такое, что для любых целых $n > N$, $m > N$, $n \neq m$, функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ ортогональны на некотором множестве $E_{m,n}$, мера которого больше, чем $b - a - \varepsilon$, т. е.

$$\int_{E_{m,\varepsilon}} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \text{mes } E_{m,\varepsilon} > b - a - \varepsilon.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, полна в смысле сходимости по мере и пусть функции этой последовательности линейно независимы на любом измеримом множестве E меры $\text{mes } E > a_0 > 0$, где $a_0 < b - a$ — некоторое фиксированное число. Тогда можно определить последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, обладающую следующими свойствами:

1. Каждая функция $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ является линейной комбинацией функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ и, наоборот, $f_n(x)$ $n = 1, 2, \dots$ является линейной комбинацией функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{n,k} f_k(x), \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \varphi_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

2) Система $\{\varphi_n(x)\}$ асимптотически ортогональна.

3) Для любой измеримой функции $f(x)^*$, определенной на $[a, b]$, существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится к $f(x)$ по мере на $[a, b]$.

Заметим, что в теореме 1 требование асимптотической ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ нельзя заменить более сильным требованием ортогональности этой системы на $[a, b]$ в обычном смысле даже тогда, когда функции последовательности $\{f_n(x)\}$ интегрируемы с квадратом.

В самом деле. В работе [2] была построена ортогональная и нормированная система $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$ и обладающих тем свойством, что

$$f_n(x) = b_{n-1} x^{n-1} \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1 \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где b_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ отличные от нуля действительные числа.

Так как система $x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+k}, \dots$ для любого фиксированного n полна в пространстве $L_2[0, 1]$, то система $\{f_n(x)\}$ будет полной в смысле сходимости в среднем второй степени на любом отрезке

$$\left[\frac{1}{n}, 1 \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует полнота системы $\{f_n(x)\}$ в смысле сходимости по мере на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, что $\{f_n(x)\}$ будет линейно независимой на любом множестве меры большей, чем $1/2$.

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

В силу того, что система $\{f_n(x)\}$ ортогональна и нормирована, легко видеть, что если $\{\varphi_n(x)\}$ произвольная система, удовлетворяющая условию 1) теоремы 1 и ортогональная на $[0,1]$, то каждая функция $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ получается из функции $f_k(x)$ умножением на постоянное число.

Теперь можно показать, что ни одна из систем $\{\varphi_n(x)\}$ указанного вида не будет удовлетворять условию 3) теоремы 1.

В самом деле, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (2)$$

сходится по мере на $[0,1]$ к $f(x)$, то в силу (1) на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ та же самая функция будет представляться степенным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (3)$$

сходящимся к ней по мере на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. В том случае, когда функция $f(x)$ почти везде конечна, из того, что ряд (3) сходится по мере на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ к $f(x)$, будет следовать стремление к нулю по мере на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ последовательности $\{c_n x^n\}$. Тогда для любого x_0 , $1/2 < x_0 < 1$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0, \quad (4)$$

ибо в обратном случае для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и некоторой последовательности $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ имели бы место неравенства

$$|c_{n_k} x^{n_k}| > \varepsilon_0, \quad x \in [x_0, 1], \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Но из (4) следует, что ряд (3) сходится при $|x| < 1$ к аналитической функции, и тогда $f(x)$ почти всюду на $[\frac{1}{2}, 1]$ будет совпадать с некоторой аналитической функцией. Отсюда следует, что для рассматриваемых систем $\{\varphi_n(x)\}$ условие 3) теоремы 1 не будет выполняться.

§ 2. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, сформулированной в § 1, приведем некоторые определения и теоремы работы [2].

Определение 1^о. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, называется полной в смысле сходимости почти всюду, если для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, существует последовательность конечных линейных комбинаций функций системы $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Очевидно, что это определение эквивалентно определению 1 параграфа 1, т. е. из полноты системы $\{f_n(x)\}$ в смысле сходимости почти всюду следует полнота этой системы в смысле сходимости по мере, и, наоборот.

Мы будем пользоваться также следующими теоремами, доказанными в работе [2].

Теорема 1°. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, полна в смысле сходимости почти всюду, то она остается полной в смысле сходимости почти всюду также после удаления из этой системы любого конечного числа функций.

Теорема 2°. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, была полной в смысле сходимости почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало множество E такое, что $\text{mes } E > b - a - \varepsilon$ и система $\{f_n(x)\}$ полна в пространстве $L_2(E)$.

В силу замечания, сделанного после определения 1°, ясно, что в теоремах 1° и 2° предположение полноты $\{f_n(x)\}$ в смысле сходимости почти всюду можно заменить предположением полноты в смысле сходимости по мере.

§ 3. В этом параграфе мы приведем доказательство теоремы 1 см. § 1).

При доказательстве мы будем пользоваться теоремами 1° и 2° и следующей леммой, являющейся частным случаем более общей леммы, доказанной в работе [1] (см. лемму 2, [1]).

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ О. Н.^{*} система функций, определенных на ограниченном множестве G положительной меры, полная в $L_2(G)$. Пусть $f(x) \in L_2(G)$ и $f(x) = 0$ при $x \in E_0 \subset G$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $F(x) \in L_2(G)$ и множество e_0 , такие, что выполняются следующие условия:

$$\alpha) F(x) = 0 \text{ при } x \in e_0, \text{ где } e_0 \subset E_0, \text{ mes } e_0 < \varepsilon,$$

$$\beta) \left| \int_G [f(x) - F(x)] \varphi_k(x) dx \right| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

$$\gamma) \left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_e = \left(\int_e \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon + 2 \|f\|_e, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для любого $e \subset G - e_0$, где

$$a_k = \int_G [f(x) - F(x)] \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что из этой леммы непосредственно следует

* Через О. Н. мы обозначаем ортогональные и нормированные системы.

** В частности множество E_0 может быть пустым или иметь меру нуль.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ О. Н. система функций, определенных на ограниченном множестве G положительной меры, полная в $L_2(G)$, и пусть $f(x) \in L_2(G)$.

Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n , можно определить множество $e_0 \subset G$ и действительные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m$, такие, что выполняются условия:

1. $\text{mes } e_0 < \varepsilon$,
2. $|a_k| < \varepsilon, \quad n+1 \leq k \leq m$,
3. $\left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{G-e_0} < \varepsilon$,
4. $\left\| \sum_{k=n+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2 \|f\|_e, \quad n+1 \leq s \leq m$,

где e произвольное измеримое подмножество множества $G - e_0$.

В самом деле. Пусть n фиксированное натуральное число. Возьмем в формулировке леммы 1 $\eta > 0$ вместо ε и определим функцию $F(x) \in L_2(G)$ и множество e_0 , для которых выполняются условия $\alpha)$, $\beta)$ и $\gamma)$, где вместо ε взято η . Так как n фиксированное число, то в силу $\beta)$ мы можем взять η настолько малым, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_G \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.1)$$

Одновременно мы можем предполагать, что

$$\eta < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2)$$

Так как в силу $\alpha)$

$$f(x) - F(x) = f(x), \quad x \in G - e_0, \quad (3.3)$$

то разложение функции $f(x) - F(x)$ в силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ будет сходиться в среднем на множестве $G - e_0$ к $f(x)$. Следовательно, существует натуральное число m настолько большое, что

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{G-e_0} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.4)$$

При этом мы можем предполагать, что

$$m > n. \quad (3.5)$$

Из (3.1) и (3.4) следует

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{G-e_0} < \varepsilon, \quad (5.5)$$

а в силу условия γ), где $\varepsilon = \eta$, и неравенств (3.1) и (3.2) будем иметь также

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2 \|f\|_e, \quad n+1 < s < m, \quad (3.6)$$

где e произвольное измеримое подмножество множества $G - e_0$.

Условия 3 и 4 леммы 2 совпадают соответственно с неравенствами (3.6) и (3.5).

Условия 1 и 2 вытекают из α) и β), где вместо ε взято η , и из неравенства (3.2). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Перенумеруем полиномы с рациональными коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (3.7)$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, таких, что

$$a_0 < b - a - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < +\infty, \quad (3.9)$$

где a_0 число, фигурирующее в формулировке теоремы 1.

Так как система $\{f_n(x)\}$ полна в смысле сходимости по мере, то в силу теоремы 2° (см. также замечание после теоремы 2°) существует множество $E_1 \subset [a, b]$, такое, что

$$\text{mes } E_1 > b - a - \frac{\varepsilon_1}{4} \quad (3.10)$$

и на E_1 система $\{f_n(x)\}$ полна в смысле L_2 .

По предположению, сделанному в формулировке теоремы 1, а также в силу первого неравенства (3.8) и неравенства (3.10), функции системы $\{f_n(x)\}$ линейно независимы на множестве E_1 . Поэтому, ортогонализируя и нормируя эту систему на множестве E_1 , мы получим систему $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$ и обладающих следующими свойствами:

а) каждая функция $\varphi_n^{(1)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ является линейной комбинацией функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ и, наоборот, $f_n(x)$ есть линейная комбинация функций $\varphi_1^{(1)}(x), \dots, \varphi_n^{(1)}(x)$

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^n c_{n,k}^{(1)} f_k(x); \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n d_{n,k}^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

в) функции $\varphi_n^{(1)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ на множестве E_1 образуют полную в смысле L_2 О. Н. систему:

$$\int_{E_i} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m, \end{cases} \quad (3.12)$$

Применяя лемму 2 к системе $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$, когда $f(x) = P_1(x)$, $n = 0$ и $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{4}$, мы можем определить числа $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}$ и множество $e_1 \subset E_1$, такие, что выполняются условия

$$1. \text{mes } e_1 < \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad (3.13)$$

$$2. \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x) - P_1(x) \right\|_{(E_1 - e_1)} < \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad (3.14)$$

$$3. \left\| \sum_{k=1}^s a_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x) \right\|_e \leq \frac{\varepsilon_1}{2} + 2 \|P_1(x)\|_e \quad (3.15)$$

для всех $1 \leq s \leq n$ и для любого множества e , $e \subset E_1 - e_1$.

Теперь рассмотрим последовательность

$$\varphi_{n_1+1}^{(1)}(x), \varphi_{n_1+2}^{(1)}(x), \dots, \varphi_{n_1+k}^{(1)}(x), \dots \quad (3.16)$$

которая остается из последовательности $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$ после исключения первых n_1 функций.

Для последовательности (3.16) выполняются предположения теоремы 1, т. е. она полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем a_0 .

В самом деле. Из условия а) непосредственно следует, что система $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(1)}(x), \dots, \varphi_n^{(1)}(x), \dots$ полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем a_0 , так как этими свойствами обладает система $\{f_n(x)\}$. Остается заметить, что в силу теоремы 1^о система (3.16) будет полной в смысле сходимости по мере (см. также замечание после теоремы 2^о).

Предположим, что мы уже определили действительные числа $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}, a_{n_1+1}^{(2)}, \dots, a_{n_1}^{(2)}, \dots, a_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \dots, a_{n_j}^{(j)}$, множества $E_1, E_2, \dots, E_j, e_1, e_2, \dots, e_j$ и последовательность функций

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}, \dots, \varphi_{n_{j-2}+1}^{(j-1)}, \dots, \varphi_{n_{j-1}}^{(j-1)}, \varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \dots, \\ \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}, \varphi_{n_j+1}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_{j+k}}^{(j)}, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

для которых выполняются следующие условия.

А) Для любого i , $1 \leq i \leq j$ имеют место соотношения

$$\text{mes } E_i > b - a - \frac{\varepsilon_i}{4} \quad (3.19)$$

$$e_i \subset E_i, \text{mes } e_i < \frac{\varepsilon_i}{4} \quad (3.20)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(x) - P_i(x) \right\|_{(E_i - e_i)} < \frac{\varepsilon_i}{2} \quad (3.21)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{i-1}+1}^s a_k^{(i)} \varphi_k^{(j)}(x) \right\|_e < \frac{\varepsilon_i}{2} + 2 \|P_i(x)\|_e \quad (3.22)$$

для всех $s, n_{i-1} + 1 < s \leq n_i$ и любого множества $e, e \subset E_i - e_i$.

В) Функции системы (3.18) с одинаковым верхним индексом i ортогональны и нормированы на множестве E_i и ортогональны всем следующим функциям на том же множестве:

$$\int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(i)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}; \quad \int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(j)} dx = 0 \quad \begin{matrix} 1 < i < j - 1 \\ i < s < j \end{matrix} \quad (3.23)$$

$$\int_{E_j} \varphi_n^{(j)} \varphi_m^{(j)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (3.24)$$

С) Последовательность

$$\varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \varphi_{n_{j-1}+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_{j-1}+k}^{(j)}, \dots \quad (3.25)$$

удовлетворяет предположениям теоремы 1, т. е. полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем $a_0 > 0$.

Д) Обозначая последовательность (3.18) через

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots \quad (3.26)$$

будем иметь

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} f_k(x); \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{nk} \psi_k(x). \quad (3.27)$$

Рассмотрим последовательность

$$\varphi_{n_j+1}^{(j)}, \varphi_{n_j+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j)}, \dots \quad (3.28)$$

которая получается из (3.25) после исключения из нее функций $\varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \varphi_{n_{j-1}+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}$, которые удовлетворяют соотношениям (3.19), ..., (3.22), где $i = j$.

* Мы полагаем $n_0 = 0$.

В силу свойств С) и теоремы 1^o последовательность (3.28) полна в смысле сходимости по мере и линейно независима на любом множестве меры большей, чем a_0 .

Применяя теорему 2^o, мы можем определить множество E_{j+1} такое, что

$$\text{mes } E_{j+1} > b - a - \frac{\varepsilon_{j+1}}{4} \quad (3.29)$$

и последовательность (3.28) полна на этом множестве в смысле L_2 .

В силу неравенства (3.8) последовательность (3.28) будет также линейно независимой на множестве E_{j+1} .

Ортогонализируя и нормируя эту последовательность на множестве E_{j+1} , мы получаем последовательность функций

$$\varphi_{n_j+1}^{(j+1)}, \varphi_{n_j+2}^{(j+1)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j+1)}, \dots \quad (3.30)$$

определенных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \varphi_n^{(j+1)} &= \sum_{k=n_j+1}^n c_{n,k}^{(j+1)} \varphi_k^{(j)}; \\ \varphi_n^{(j)} &= \sum_{k=n_j+1}^n d_{n,k}^{(j+1)} \varphi_k^{(j+1)}, \quad n > n_j + 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

в) функции (3.30) образуют полную на множестве E_{j+1} О. Н. систему:

$$\int_{E_{j+1}} \varphi_m^{(j+1)} \varphi_n^{(j+1)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (3.32)$$

Применяя лемму 2 к системе (3.30), когда $f(x) = P_{j+1}$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}$, мы можем определить числа $a_{n_j+1}^{(j+1)}, \dots, a_{n_j+1}^{(j+1)}$ и множество $e_{j+1} \subset E_{j+1}$ так, что будут выполняться соотношения (3.19), ..., (3.22), где $i = j + 1$.

Таким образом, последовательность функций

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}, \dots, \varphi_{n_{j-1}+1}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}, \varphi_{n_j+1}^{(j+1)}, \dots, \\ \dots, \varphi_{n_{j+1}}^{(j+1)}, \varphi_{n_{j+1}+1}^{(j+1)}, \dots, \varphi_{n_{j+1}+k}^{(j+1)}, \dots, \end{aligned} \quad (3.33)$$

удовлетворяет условиям (3.19), ..., (3.22), где $1 \leq i \leq j + 1$.

Легко видеть, что последовательность (3.33) удовлетворяет также условиям В), С) и Д).

В самом деле. Условие В) непосредственно следует из (3.23), (3.24) первого равенства (3.31) и из (3.32).

Условие С) для последовательности

$$\varphi_{n_j+1}^{(j+1)}, \varphi_{n_j+2}^{(j+1)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j+1)}, \dots \quad (3.34)$$

непосредственно следует из (3.31) и из свойства С) для последовательности (3.25), так как, в силу теоремы 1°, свойством С) будет обладать также последовательность

$$\varphi_{n_j+1}^{(j)}, \varphi_{n_j+2}^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j+k}^{(j)}, \dots \quad (3.35)$$

Выполнение свойства Д) для последовательности (3.33) следует из (3.27) и (3.31).

Так как свойства А), Б), С), Д) выполняются для $j=1$, то, продолжая вышеописанный процесс неограниченно, мы получаем последовательность

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(x), \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}(x), \varphi_{n_1+1}^{(2)}(x), \dots, \varphi_{n_2}^{(2)}(x), \dots \\ \dots, \varphi_{n_{i-1}+1}^{(i)}(x), \dots, \varphi_{n_i}^{(i)}(x), \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, действительных чисел

$$a_1^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)} a_{n_1+1}^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_{i-1}+1}^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}, \dots$$

и последовательность множеств $\{E_i\}$ и $\{e_i\}$, такие, что для любого $i=1, 2, \dots$ выполняются неравенства (3.19), ..., (3.22) и, кроме того, имеют место также условия

A₁) функции системы (3.36) с одинаковым верхним индексом i ортогональны и нормированы на множестве E_i и ортогональны всем следующим функциям на том же множестве:

$$\int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(i)} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}, \int_{E_i} \varphi_n^{(i)} \varphi_m^{(j)} dx = 0 \text{ для всех } i < j \text{ и } (3.37) \\ n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots;$$

B₁) Обозначая последовательность (3.36) через

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (3.38)$$

будем иметь

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{n,k} f_k(x), f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (3.39)$$

Из соотношений (3.37) и из неравенства (3.19) вытекает, что последовательность (3.38) асимптотически ортогональна.

Принимая во внимание также условие (3.39), мы видим, что последовательность (3.38) удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 нам надо доказать, что последователь-

ность (3.39) удовлетворяет также условию 3) этой теоремы, т. е., для любой измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на $[a, b]$ к $f(x)$.

Напишем последовательность чисел

$$a_1^{(1)} a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}, a_{n_1+1}^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_{i-1}}^{(i)}, a_{n_i}^{(i)}, \dots$$

в виде последовательности $\{a_n\}$, где числа a_n следуют по порядку их следования в первоначальной последовательности.

Условия (3.19), (3.22) системы (3.37), для системы (3.38), можно сформулировать следующим образом.

Существуют последовательности действительных чисел $\{a_k\}$, целых положительных чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < \dots$ и последовательности множеств $\{E_k\}$ и $\{e_k\}$ такие, что

$$\text{mes } E_k > b - a - \frac{\varepsilon_k}{4} \quad (3.40)$$

$$e_k \subset E_k, \text{mes } I_k < \frac{\varepsilon_k}{4} \quad (3.41)$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i \varphi_i(x) - P_k(x) \right\|_{(E_k - e_k)} < \frac{\varepsilon_k}{2} \quad (3.42)$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^s a_i \varphi_i(x) \right\|_e < \varepsilon_k + 2 \|P_k(x)\|_e \quad (3.43)$$

для всех s , где $n_{k-1} + 1 \leq s \leq n_k$, и для любого множества e , где $e \subset E_k - e_k$.

Пусть теперь $f(x)$ произвольная почти везде конечная измеримая функция, заданная на $[a, b]$.

Возьмем полином с рациональными коэффициентами $P_k(x)$ так, чтобы

$$\|P_k(x) - f(x)\|_{E_1} < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

где

$$\text{mes } E_1 > b - a - \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Так как $\varepsilon_k < \varepsilon_1$ [см. (3.8)], то, полагая $A_1 = E_1' (E_k - e_k)$ в силу (3.40), (3.41) (3.42), где $k = k_1$, будем иметь

$$\text{mes } A_1 > b - a - \varepsilon_1 \quad (3.44)$$

и

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{A_1} < \varepsilon_1. \quad (3.45)$$

Кроме того, в силу (3.43) имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_1} \leq \varepsilon_{k_1} + 2 \|P_{k_1}(x)\|_{A_1}, \quad n_{k_1-1} < n \leq n_{k_1}. \quad (3.46)$$

После этого возьмем полином $P_{k_2}(x)$, $k_2 > k_1$ и множество E'_2 , такие, что

$$\text{mes } E'_2 > b - a - \frac{\varepsilon_2}{2}$$

и

$$\left\| P_{k_2}(x) - \left[f(x) - \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) \right] \right\|_{E'_2} < \frac{\varepsilon_2}{3}. \quad (3.47)$$

Так как $\varepsilon_{k_1} < \varepsilon_2$, то, полагая $A_2 = E'_2(E_{k_1} - e_{k_1})$, в силу (3.40), (3.41), (3.42), где $k = k_2$, будем иметь

$$\text{mes } A_2 > b - a - \varepsilon_2, \quad (3.48)$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{A_2} \leq \varepsilon_2. \quad (3.49)$$

В силу (3.43), где $k = k_2$, и в силу того, что $A_2 \subset (E_{k_2} - e_{k_2})$, для любого измеримого множества $e \subset A_2$ будем иметь

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_e \leq \varepsilon_{k_2} + 2 \|P_{k_2}(x)\|_e, \quad n_{k_2-1} + 1 < n < n_{k_2}. \quad (3.50)$$

Из (3.45) и (3.47) следует

$$\|P_{k_2}(x)\|_{A_1 E'_2} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (3.51)$$

а из (3.51) и (3.50), когда $e = A_1 A_2$, учитывая, что $A_2 \subset E'_2$, получаем

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_1 A_2} < \varepsilon_{k_2} + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (3.52)$$

где

$$n_{k_2-1} + 1 \leq n < n_{k_2}. \quad (3.53)$$

Из (3.44) и (3.48) следует

$$\text{mes } A_1 A_2 > b - a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Далее, существуют полином $P_{k_3}(x)$, $k_3 > k_2$ и множество E'_3 такие, что

$$\text{mes } E'_3 > b - a - \frac{\varepsilon_3}{2},$$

$$\left\| P_{k_3}(x) - \left[f(x) - \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) - \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) \right] \right\|_{E'_3} < \varepsilon_3. \quad (3.54)$$

Положим

$$A_3 = E_3(E_{k_3} - e_{k_3}). \quad (3.55)$$

Так как $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$ [см. (3.8)], то в силу (3.40), (3.41), когда $k = k_3$, будем иметь

$$\text{mes } A_3 > b - a - \varepsilon_3. \quad (3.56)$$

Из (3.55), (3.54) и из (3.42), где $k = k_3$, следует

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_3}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{A_3} < \varepsilon_3 + \varepsilon_{k_3}.$$

В силу (3.43) для любого множества e , $e \subset E_{k_3} - e_{k_3}$, а следовательно и для любого множества $e \subset A_3$ будем иметь

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_e \leq \varepsilon_{k_3} + 2 \|P_{k_3}(x)\|_e; \quad n_{k_2-1} + 1 \leq n \leq n_{k_3}. \quad (3.57)$$

Из (3.49), (3.54) и (3.57) получаем

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_3 A_3} \leq \varepsilon_{k_3} + 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (3.58)$$

$$n_{k_2-1} < n < n_{k_3}.$$

При этом из (3.48) и (3.56) следует

$$\text{mes } A_2 A_3 > b - a - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (3.59)$$

Ясно, что, продолжая этот процесс, мы можем определить последовательность множеств $\{A_j\}$ и последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$ такие, что выполняются следующие условия

$$a_1) \quad \text{mes } A_j > b - a - \varepsilon_j,$$

$$b_1) \quad \left\| \sum_{i=n_{k_{j-1}}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_{j-1}}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \dots \right\|$$

$$\dots + \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) - f(x) \Big|_{A_j} < \varepsilon_j,$$

$$c_1) \quad \left\| \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\|_{A_j A_{j-1}} \leq \varepsilon_{k_j} + 2(\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j) \leq 5\varepsilon_{j-1},$$

для всех n , где

$$n_{k_j-1} + 1 < n \leq n_{k_j}.$$

Положим

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{при } n_{k_j-1} + 1 < n \leq n_{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{для остальных } n. \end{cases} \quad (3.60)$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n(x). \quad (3.61)$$

сходится по мере на $[a, b]$ к $f(x)$.

Пусть $\delta > 0$ произвольное число. Возьмем j_0 настолько большое, чтобы [см. (3.9)]

$$\sum_{k=j_0-1}^{\infty} \varepsilon_k < \delta. \quad (3.62)$$

Положим

$$A_0 = \prod_{k=j_0}^{\infty} A_k. \quad (3.63)$$

Тогда в силу a_1) и в силу (3.62) будем иметь

$$\text{mes } A_0 > b - a - \delta. \quad (3.64)$$

Покажем, что ряд (3.61) сходится в среднем на множестве A_0 к $f(x)$.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число. Возьмем $j'_0 > j_0$ такое, что

$$5\varepsilon_{j'_0-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.65)$$

Положим

$$N(\varepsilon) = n_{k_{j'_0}+1}. \quad (3.66)$$

Рассмотрим частные суммы ряда (3.61)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (3.67)$$

где

$$n > N(\varepsilon).$$

Возможны два случая

1. $n_{k_{j+1}-1} < n \leq n_{k_{j+1}}$ для некоторого $j > j_0$.
2. $n_{k_j} < n \leq n_{k_{j+1}-1}$ для некоторого $j > j_0$.

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что в этом случае в силу (3.60) можно написать

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) = \\ &= \sum_{i=n_{k_{j-1}}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_{j-1}}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \dots + \\ &+ \sum_{i=n_{k_{j+1}-1}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_{j+1}-1}+1}^n a_i \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (3.68)$$

В силу условий $b_1)$ и $c_1)$, где вместо j взято $j+1$, учитывая, что $j > j_0$, получаем

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_0} < \varepsilon_j + 5\varepsilon_j. \quad (3.69)$$

Из (3.65) и (3.69) и из того, что $j > j_0$, следует

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_0} < \varepsilon.$$

Рассмотрим второй случай. В силу (3.60) легко видеть, что в этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=n_{k_{j-1}}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_{k_{j-1}}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \\ &\dots + \sum_{i=n_{k_j-1}+1}^{n_{k_j}} a_i \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Следовательно в силу условия $b_1)$ имеет место неравенство

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_j} < \varepsilon_j.$$

и, так как $A_0 \subset A_j$, $j > j_0$, то

$$\|S_n(x) - f(x)\|_{A_0} < \varepsilon.$$

И так, для любого $\delta > 0$ существует множество A_0 мес $A_0 > b - a - \delta$ такое, что ряд (3.61) сходится в среднем на A_0 к $f(x)$.



Отсюда следует, что ряд (3.61) сходится по мере на $[a, b]$ к $f(x)$.

Тем самым теорема 1 доказана при том предположении, что $f(x)$ почти везде конечная измеримая функция.

Для самого общего случая, когда $f(x)$ произвольная измеримая функция, доказательство аналогично и здесь мы его не приводим.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 17 II 1958

Ս. Ս. Թադևոսյան

ԶԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մ ա հ մ ա ն ու մ 1. $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված, համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը կոչվում է լրիվ ըստ չափի զուգամիտության իմաստով, եթե $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\{f_n(x)\}$ սիստեմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաներից կազմված ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է $f(x)$ -ին ըստ չափի $[a, b]$ հատվածի վրա:

Նեշտ է տեսնել, որ եթե ֆունկցիաների սիստեմը լրիվ է $L_2[a, b]$ -ում, ապա նա լրիվ կլինի նաև ըստ չափի զուգամիտության իմաստով, բայց, ինչպես ցույց է տրված [2]-ում, հակառակը ճիշտ չէ:

Մ ա հ մ ա ն ու մ 2. Մենք կասենք, որ համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի ֆունկցիաների $\{\varphi_n(x)\}$ հաջորդականությունը ասիմպտոտորեն օրթոգոնալ է $[a, b]$ -ում, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$, դրական քվի համար կարելի է որոշել N բնական քիվ այնպես, որ ցանկացած ամբողջ ու դրական n և m քվերի համար, որտեղ $n > N$, $n > N$ և $n \neq m$, $\varphi_n(x)$ և $\varphi_m(x)$ ֆունկցիաները օրթոգոնալ են մի $E_{n,m}$ բազմության վրա, որի չափը ավելի մեծ է, քան $b - a - \varepsilon$ -ը, այսինքն՝

$$\int_{E_{n,m}} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \text{mes } E_{n,m} > b - a - \varepsilon:$$

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թ և ո թ ե մ. Դիցուք, $[a, b]$ հատվածում որոշված, համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը լրիվ է, ըստ չափի զուգամիտության իմաստով, և այդ հաջորդականության ֆունկցիաները գծորեն անկախ են ցանկացած E չափելի բազմությունների վրա, որոնց չափը մեծ է, քան $a_0 > 0$ ֆիքս քիվը: Այդ դեպքում կարելի է որոշել $\{\varphi_n(x)\}$ հաջորդականությունը, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. Յուրաքանչյուր $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ ֆունկցիա հանդիսանում է $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա և, հակառակը՝ յուրաքանչյուր $f_n(x)$ ֆունկցիա հանդիսանում է $\varphi_1(x), \varphi_2, \dots, \varphi_n(x)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} f_k(x); \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \varphi_k(x),$$

2. $\{\varphi_n(x)\}$ հաջորդականությունը ասիմպտոտիկ օրոգոնալ է:

3. Յունկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար, որը որոշված է $[a, b]$ -ում, գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

շարք, որը $[a, b]$ հատվածում ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$ -ին:

Ապացուցվում է նաև, որ նույնիսկ այն դեպքում, երբ ֆունկցիաները պատկանում են $L_2[a, b]$ դասին, թեև որևէ ընդհանրապես ճիշտ չէ, եթե 2) պարմանում ասիմպտոտիկ օրթոգոնալությունը փոխարինենք օրթոգոնալությամբ $[a, b]$ հատվածում սովորական խմաստով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Талалян А. А. О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p . Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. 10, № 1 (1957).
2. Талалян А. А. О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, том 10, № 3 (1957).

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем

Задача о кручении изотропного упругого стержня с поперечным сечением в виде узкой и длинной области была впервые поставлена Динкяном [1] и в дальнейшем математически обоснована Д. Ю. Пановым [2, 3].

В настоящей работе рассматривается задача кручения анизотропного стержня с узким и длинным сечением. Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра λ , введенного в уравнение контура области.

Обобщен метод, развитый в работе [3].

Исследован вопрос об асимптотической сходимости этого ряда. Для иллюстрации полученных результатов решены некоторые задачи.

1. Как известно [4], задача о кручении анизотропного стержня сводится к решению уравнения

$$a_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2v \quad (1.1)$$

с граничным условием $\Psi(x, y) = 0$ вдоль кривой

$$F(x, y) = 0,$$

ограничивающей поперечное сечение стержня.

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений, a_{ik} — упругие постоянные, v — относительный угол закручивания.

Рассмотрим область D , ограниченную двумя пересекающимися на оси x кривыми (фиг. 1).

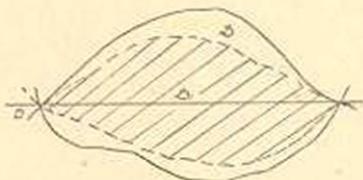
Область D_1 отличается от D только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении $1:\lambda$, где $0 < \lambda < 1$. Предполагается, что D и D_1 конечные односвязные области.

Пусть область, ограниченная двумя дугами кривых

$$\begin{aligned} y &= \lambda \varphi_1(x); \\ y &= \lambda \varphi_2(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

эквивалентна $F(x, y) = 0$.

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат к типу кривых, показанных на



Фиг. 1.

фиг. 1, и имеют необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений x .

При помощи (1.2) граничное условие примет вид

$$\Psi [x, \lambda \varphi_1(x)] = 0, \quad (1.3)$$

$$\Psi [x, \lambda \varphi_2(x)] = 0.$$

Положим

$$y = \lambda \eta; \quad \Psi(x, y) = \Phi(x, \eta; \lambda). \quad (1.4)$$

Имея в виду (1.4), преобразуя уравнение (1.1), находим

$$\lambda^2 \cdot a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\lambda a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = -2v\lambda^2. \quad (1.5)$$

Не трудно видеть, что граничные условия (1.3) можно представить так

$$\Phi [x, \varphi_1(x); \lambda] = 0, \quad (1.6)$$

$$\Phi [x, \varphi_2(x); \lambda] = 0.$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными (1.5) в виде ряда по степеням λ :

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, \eta) \cdot \lambda^k. \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.6) при помощи (1.7) легко получаются

$$P_k [x, \varphi_1(x)] = 0; \quad (1.8)$$

$$P_k [x, \varphi_2(x)] = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Подставляя значения $\Phi(x, \eta; \lambda)$ из выражения (1.7) в дифференциальное уравнение (1.5), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} &= 0, \\ -2a_{12} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \eta^2} &= 0, \\ a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2} &= -2v, \quad (1.9) \\ a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 P_{k+1}}{\partial x \partial \eta} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 P_{k+2}}{\partial \eta^2} &= 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Из рекуррентных уравнений (1.9), при помощи (1.8), последовательно определяются функции $P_k(x, \eta)$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

$$P_0(x, \eta) \equiv 0,$$

$$P_1(x, \eta) \equiv 0,$$

$$P_2(x, \eta) = -\frac{\nu}{a_{22}} \{ \eta^2 - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \cdot \eta + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \}, \quad (1.10)$$

$$P_3(x, \eta) = \frac{\nu a_{12}}{a_{22}^2} \cdot D_x(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \{ \eta^2 - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \cdot \eta + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \},$$

.....

где под символом D_x понимается частная производная по x . Последовательно определяя функции $P_k(x, \eta)$, можно записать выражение для $\Phi(x, \eta; \lambda)$, а следовательно и для функции $\Psi(x, y)$:

$$\Psi(x, y) = -\frac{\nu}{a_{22}} \cdot \left\{ \frac{y^2}{\lambda^2} - (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{y}{\lambda} + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right\} \cdot \lambda^2 +$$

$$+ \frac{\nu \cdot a_{12}}{a_{22}^2} \cdot D_x(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left\{ \frac{y^2}{\lambda^2} - (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{y}{\lambda} + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right\} \cdot \lambda^2 + \dots$$

или

$$\Psi(x, y) = -\frac{\nu}{a_{22}} \cdot y^2 + \lambda \cdot \left\{ \frac{\nu}{a_{22}} \cdot y \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{a_{12} \cdot \nu \cdot y^2}{a_{22}^2} \times \right.$$

$$\times D_x(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots \left. \right\} + \lambda^2 \cdot \left\{ -\frac{\nu}{a_{22}} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \frac{\nu a_{12}}{a_{22}^2} \cdot y \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) \times \right.$$

$$\times D_x(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots \left. \right\} + \dots \quad (1.11)$$

Имея функцию напряжения $\Psi(x, y)$, можно определить касательные напряжения и жесткость стержня.

Полученные результаты значительно упрощаются, когда имеем симметричную область.

II. Случай симметричной области

Если область D_1 симметрична относительно оси x , то

$$\varphi_1(x) = -\varphi_2(x) = f(x).$$

Тогда

$$F(x, y) = y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0,$$

или

$$\eta = \pm f(x). \quad (2.1)$$

При таких условиях системы рекуррентных уравнений (1.10) упрощаются и примут вид:

$$P_0(x, \eta) = 0,$$

$$P_1 = 0,$$

$$P_2 = \frac{f^2 - \eta^2}{a_{22}},$$

$$P_3 = 0,$$

$$P_4 = (f^2 - \eta^2) \cdot \frac{a_{11}}{2a_{22}^2} \cdot D^2 f^2,$$

(2.2)

$$P_5 = \frac{\eta(f^2 - \eta^2)}{3a_{22}^3} \cdot a_{11}a_{22} \cdot D^2 f^2,$$

$$P_6 = (f^2 - \eta^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^3} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^4} D (f^2 D^3 f^2) \right] +$$

$$+ (f^4 - \eta^4) \cdot \left[D^4 f^2 \cdot \frac{4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2 a_{22}}{24a_{22}^4} \right],$$

где

$$D^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Имея значение $P_k(x, \eta)$, можем для симметричной области записать выражение функции напряжений

$$\Psi(x, y) = \frac{v(\lambda^2 f^2 - y^2)}{a_{22}} + \lambda^2 v \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}}{2a_{22}^2} D^2 f^2 + y \cdot \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^3} \times \right. \right.$$

$$\times D^3 f^2 \left. \right] + (\lambda^4 f^4 - y^4) \cdot \left[\frac{4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2 a_{22}}{4!a_{22}^4} \cdot D^4 f^2 + y \times \right.$$

$$\times \frac{2a_{11}a_{12}^3 - a_{11}^2 a_{12} a_{22}}{5 \cdot 3!a_{22}^5} \cdot D^5 f^2 \left. \right] + (\lambda^6 f^6 - y^6) \cdot \frac{a_{11}^3 a_{22}^2 + 16a_{11}a_{12}^4 - 12a_{11}^2 a_{12}^2 a_{22}}{6!a_{22}^6} \cdot$$

$$\cdot D^6 f^2 + \dots \left. \right\} + \lambda^4 \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^3} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^4} \cdot D (f^2 D^3 f^2) \right] + \dots \right\} + \dots \quad (2.3)$$

Определим жесткость анизотропного упругого стержня при кручении

$$T = 2 \int_a^b \int_{-y}^{+y} \Psi(x, y) dx dy = \lambda^3 \cdot \frac{8v}{3a_{22}} \cdot \int_a^b f^3 dx + \lambda^6 \cdot \frac{4a_{11}v}{3a_{22}^3} \cdot \int_a^b f^3 D^3 f^2 dx +$$

$$+ \lambda^7 \cdot v \cdot \left\{ \frac{8}{3} \cdot \int_a^b f^3 \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^3} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^4} \cdot D (f^2 D^3 f^2) \right] dx + \right.$$

$$+ \frac{2}{15} \cdot \frac{4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2a_{22}}{a_{22}^3} \cdot \int_a^b f^2 D^4 f^2 dx \} + O(\lambda^9),$$

или

$$T = \frac{v}{3a_{22}} \cdot \int_a^b t^3 dx + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}v}{6a_{22}^2} \cdot \int_a^b t^3 D^2 f^2 dx + \frac{\lambda^4 v}{3} \times \\ \times \int_a^b t^3 \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{4a_{22}^2} \cdot D^2 (f^2 D^2 f^2) - \frac{a_{11}a_{12}^2}{3a_{22}^3} \cdot D (f^2 D^2 f^2) \right] dx + \\ + \lambda^2 \cdot \frac{(4a_{11}a_{12}^2 - a_{11}^2a_{22}) \cdot v}{240 \cdot a_{22}^3} \cdot \int_a^b t^3 D^4 f^2 dx + O(\lambda^9), \quad (2.4)$$

где

$$t = 2\lambda f(x).$$

Рассмотрим некоторые конкретные случаи.

1. *Стержень эллиптического сечения.* Пусть контур поперечного сечения (фиг. 2) задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (2.5)$$

Так как поперечное сечение представляет собой узкую, длинную область, то, естественно, как малый параметр взять отношение полуосей эллипса

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Тогда уравнение эллипса (2.5) можно записать так

$$y = \pm \lambda \cdot f(x), \quad (2.6)$$

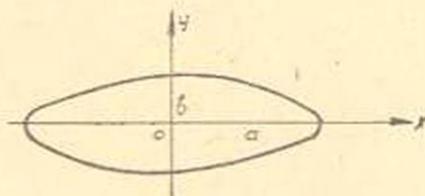
где $f^2(x) = a^2 - x^2$.

Из соотношений (2.6) и (2.3) легко получается выражение функции напряжений для анизотропного упругого стержня с эллиптическим поперечным сечением

$$\Psi(x, y) = \frac{v}{a_{22}} \cdot [\lambda^2 f^2(x) - y^2] \cdot \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} + \lambda^4 \frac{a_{11}^2}{a_{22}^2} - \lambda^6 \frac{a_{11}^3}{a_{22}^3} + \dots \right) \quad (2.7)$$

Так как малый параметр λ всегда удовлетворяет неравенству

$$\lambda^2 > -\frac{a_{22}}{a_{11}},$$



фиг. 2

то ряд (2.7) суммируется

$$\Psi(x, y) = \frac{\lambda^2 (a^2 - x^2) - y^2}{a_{22}} \cdot \frac{\nu}{1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}} \quad (2.8)$$

Жесткость эллиптического стержня определяется из (2.4) так

$$T = \int_{-a}^{+a} \int_{-y}^{+y} \Psi(x, y) dx dy = \frac{\lambda^2 \pi a^4 \nu}{a_{22} \left(1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)} \quad (2.9)$$

При помощи (2.8) для компонент напряжений получаются следующие выражения

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = - \frac{2\nu y}{a_{22} \left(1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)}, \quad (2.10)$$

$$\tau_{yz} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{2\nu \lambda^2 x}{a_{22} \left(1 + \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \right)}$$

2. Кручение анизотропного стержня (фиг. 3) трапециoidalного поперечного сечения.

Уравнения линий AB и CD можно записать так

$$y = \pm \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2 - d_1}{2b} \cdot x \right)$$

или

$$y = \pm \frac{d_2}{b} \left(\frac{d_1 b}{2d_2} + \frac{d_2 - d_1}{2d_2} \cdot x \right). \quad (2.11)$$

Так как исследуются удлиненные профили, то отношение $\frac{d_2}{b}$ является

малой величиной $\left(0 < \frac{d_2}{b} < 1 \right)$.

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{d_2}{b}, \quad a = \frac{d_2 - d_1}{2d_2}, \quad c = \frac{bd_1}{2d_2}.$$

Имея ввиду эти обозначения, уравнения (2.11) можно представить так

$$y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0, \quad (2.12)$$

где

$$f^2(x) = (ax + c)^2.$$

Из выражения (2.3), при помощи уравнения (2.12), получим выражение функции напряжения при кручении для анизотропного стержня трапециoidalного поперечного сечения:

$$\Psi(x, y) = \frac{v [\lambda^2 (ax + c)^2 - y^2]}{a_{22}} \cdot \left(1 + \lambda^2 \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot a^2 + \lambda^4 \cdot \frac{a_{11}^2}{a_{22}^2} \cdot a^4 + \lambda^6 \cdot \frac{a_{11}^3}{a_{22}^3} \cdot a^6 + \dots \right). \quad (2.13)$$

Из выражения (2.13) видно, что

$$\Psi(x, y) = \frac{\lambda^2 (ax + c)^2 - y^2}{a_{22}} \cdot \frac{v}{1 - \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot a^2}, \quad (2.14)$$

если малый параметр λ удовлетворяет следующему неравенству

$$\lambda^2 < \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Имея функцию напряжения, определим жесткость рассматриваемого стержня

$$T = 2 \int_{a - \lambda(ax+c)}^{b + \lambda(ax+c)} \int \Psi(x, y) dx dy = \frac{2\lambda^2 [(ab+c)^4 - c^4] \cdot v}{3a_{22} \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot a^2 \right)}$$

или

$$T = \frac{b}{12} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2 - d_1} \cdot \frac{v}{a_{22} a \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot k^2 \right)}, \quad (2.15)$$

где

$$a\lambda = \frac{d_2 - d_1}{2b} = k = \operatorname{tg} \beta.$$

Для компонент напряжений получаются следующие компактные выражения

$$\tau_{xz} = \frac{2vy}{a_{22} \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot k^2 \right)}, \quad (2.16)$$

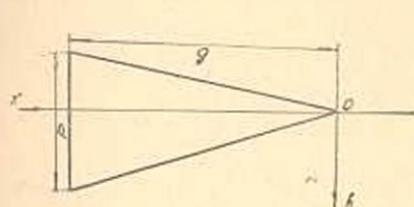
$$\tau_{yz} = \frac{2k^2 v \cdot (ax + c)}{a a_{22} \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot k^2 \right)}.$$

3. Кручение стержня треугольного сечения (фиг. 4). Настоящая задача является частным случаем предыдущей, т. е. $d_1 = 0$, $d_2 = d$,

будем иметь

$$\lambda = \frac{d}{b}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad c = 0. \quad (2.17)$$

Учитывая (2.17), из (2.14)–(2.16) находим



Фиг. 4.

$$\Psi(x, y) = \frac{\left(\lambda^2 \cdot \frac{x^2}{4} - y^2\right) \cdot v}{a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]},$$

$$\tau_{xz} = - \frac{2vy}{a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]},$$

$$\tau_{yz} = \frac{\lambda^2 vx}{2a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]},$$

$$T = \frac{bd^3}{12} \cdot \frac{v}{a_{22} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}}\right]}.$$

4. *Авиационный профиль (фиг. 5).* Пусть сечение авиационного профиля ограничено дугами полукубических парабол

$$y = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{x}{b}} \cdot (b-x), \quad (2.18)$$

где

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot h.$$

Пусть $\lambda = \frac{h}{b}$ является малой величиной.

Тогда уравнение (2.18) можно написать в более удобном виде

$$y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0, \quad (2.19)$$

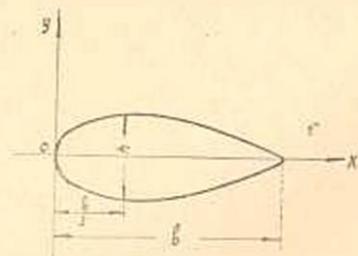
где

$$f^2(x) = cx(b-x)^2, \quad c = \frac{27}{16b}.$$

Имея в виду (2.19) можно выражение (2.3), после некоторых элементарных действий, представить так

$$\Psi(x, y) = \frac{v(\lambda^2 f^2 - y^2)}{a_{22}} + \lambda^2 v \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \frac{a_{11}}{a_{22}^2} \cdot c(3x-2b) + \right.$$

$$\left. + y(\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \frac{2ca_{11}a_{12}}{a_{22}^3} + \dots \right\} + \lambda^4 v \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^2}{a_{22}^3} \cdot c^2 \times \right. \right.$$



Фиг. 5.

$$\begin{aligned}
& \times (18x^2 - 24bx + 7b^2) - \frac{2a_{11}a_{12}^2 \cdot c^2}{a_{22}^4} \cdot (3x^2 - 4bx + b^2) \Big] + y(\lambda^2 f^2 - y^2) \times \\
& \times \left[\frac{4c^2(a_{11}^2 a_{12} a_{22} - 4a_{11} a_{12}^3)}{3! a_{22}^5} + \frac{8c^2 a_{11}^2 a_{12}}{a_{22}^4} \cdot (3x - 2b) \right] + \\
& + (\lambda^4 f^4 - y^4) \cdot \left[\frac{3c^2(4a_{11}^2 a_{12}^2 - a_{11}^3 a_{22})}{a_{22}^5} + \frac{2c^2(a_{22} a_{11}^2 a_{12}^2 - 2a_{11} a_{12}^4)}{a_{22}^6} \right] + \dots \\
& \dots \Big\} + \lambda^6 \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{11}^3 c^3}{a_{22}^4} \cdot (180x^3 - 360bx^2 + 219b^2x - 38b^3) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{12c^3 a_{11}^2 a_{12}^2}{a_{22}^5} \cdot (5x^3 - 10bx^2 + 6b^2x - b^3) - 24c^3 \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left(\frac{a_{11}^2 a_{12}^2 a_{22} - 4a_{11} a_{12}^4}{3 \cdot 3! a_{22}^6} + \frac{4a_{11}^2 a_{12}^2}{3! a_{22}^5} \right) (6x^3 - 12bx^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 7b^2x - b^3) \right] + \dots \right\} + \dots \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Для жесткости рассматриваемого стержня получаем выражение:

$$T = 0,162 \cdot \frac{bh^3}{a_{22}} \cdot \left(1 - 1,428 \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot \lambda^2 + 0,565 \frac{a_{11} a_{12}}{a_{22}^2} \cdot \lambda^3 - \dots \right). \quad (2.21)$$

Если принять, $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, т. е. рассматривать изотропный стержень, то для жесткости из (2.21) получается хорошо известное выражение

$$T = 0,162bh^3 \left(1 - 1,428 \cdot \frac{h^2}{b^2} - 6,352 \cdot \frac{h^4}{b^4} - \dots \right).$$

Здесь существенен вопрос сходимости ряда (2.21).

Исследуем асимптотическую сходимость ряда (1.11), который является более общим. С этой целью обобщим результаты Д. Ю. Панова [2] для нашего случая.

III. Доказательство сходимости ряда (1.11)

Распространим основную теорему о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина на уравнение (1.1).

Теорема. Дано уравнение (1.1) в области

$$L(\Psi) + 2v = 0, \quad (3.1)$$

где

$$L(\Psi) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$a_{12} = a_{21}, \quad x_1 = x_2, \quad x_2 = y.$$

Дана некоторая функция $V(x, y)$, которая внутри области D имеет конечные, непрерывные частные производные и конечные вторые производные, а на границах области, всюду равняется искомому интегралу $\Psi(x, y)$ уравнения (3.1), который должен обладать, в той же степени, свойствами непрерывности.

Функция $V(x, y)$ будет нижней границей интеграла для внутренних точек области, если результат ее подстановки в уравнение (3.1) всюду положителен, т. е.

$$L(V) + 2v > 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Из (3.1) и (3.2) получается неравенство

$$L(V - \Psi) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial^2 (V - \Psi)}{\partial x_i \partial x_k} > 0. \quad (3.3)$$

Составим скалярное произведение

$$((V - \Psi), -L(V - \Psi)) = - \iint_{\Omega} (V - \Psi) \cdot L(V - \Psi) d\Omega. \quad (3.4)$$

Для выражения (3.4) применим вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} ((V - \Psi), -L(V - \Psi)) &= \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x_i} \times \\ &\times \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x_k} d\Omega - \int_s (V - \Psi) \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x_k} \times \\ &\times \cos(\nu, \hat{x}_i) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь (ν, \hat{x}_i) — угол между осью ox_i и внешней нормалью данного замкнутого контура.

Контурный интеграл, стоящий в выражении (3.5), есть нуль по условию $V - \Psi = 0$ на границах. Следовательно, выражение (3.5) примет следующий вид

$$\begin{aligned} ((V - \Psi), -L(V - \Psi)) &= \iint_{\Omega} \left\{ a_{11} \cdot \left[\frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x} \right]^2 - 2a_{12} \cdot \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial x} \times \right. \\ &\times \frac{\partial (V - \Psi)}{\partial y} + a_{22} \cdot \left[\frac{\partial (V - \Psi)}{\partial y} \right]^2 \left. \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Известно [4], что для упругих постоянных материала стержня имеются такие условия

$$a_{11} > 0 \quad (3.7)$$

$$a_{22} > 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (3.8)$$

Обозначим через \bar{g} следующую квадратичную форму от двух неизвестных $\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial x}$, $\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \bar{g} = a_{11} \left[\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial x} \right]^2 - 2a_{12} \cdot \frac{\partial(V-\Psi)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(V-\Psi)}{\partial y} + \\ + a_{22} \cdot \left[\frac{\partial(V-\Psi)}{\partial y} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При помощи (3.9) выражение (3.6) можно записать так

$$((V-\Psi), -L(V-\Psi)) = \int_{\Omega} \int \bar{g} d\Omega. \quad (3.10)$$

Если иметь в виду условия (3.7) и (3.8), то очевидно, что квадратичная форма будет положительно определенной, т. е. $\bar{g} > 0$. Тогда, правая часть выражения (3.10) будет существенно положительна. Следовательно

$$((V-\Psi), -L(V-\Psi)) > 0.$$

Учитывая (3.3) находим, что $V-\Psi$ не может быть всюду положительно. Итак, относительно функции $V-\Psi$ можем делать два предположения: или 1) $V-\Psi < 0$ внутри области, или 2) поперечное сечение разбивается на части, из которых в некоторых частях имеет место $V-\Psi < 0$, а в других частях имеет место $V-\Psi > 0$.

Не трудно видеть, что второе предположение приводит к противоречию. Таким образом находим

$$V-\Psi < 0,$$

или

$$V < \Psi.$$

Аналогично доказывается, что для U —верхней границы интеграла, имеет место следующее неравенство для внутренних точек области D

$$\Psi < U.$$

Итак, получается

$$V < \Psi < U.$$

Теорема доказана.

В частном случае, если положить, что $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ получается теорема, доказанная иным методом академиком С. А. Чаплыгиным [5].

Лемма. Если $\Psi(x, y)$ обращается в нуль на границе области D и удовлетворяет внутри нее уравнению

$$L(\Psi) = -2\nu,$$

то для любой функции $F(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$L(F) = f(x, y)$$

в области $D_1 \in D$ и обращающейся в нуль на границе области D , имеем

$$|F(x, y)| < |\Psi(x, y)|$$

внутри и на границе D_1 , если только $|f(x, y)| < 2v$ в этой области и на ее границе.

Доказательство. На основании доказанной выше теоремы имеем $\Psi(x, y) > 0$ внутри D , а значит и на границе D_1 .

Построим вспомогательную функцию $\Phi(x, y)$ следующим образом

- 1) $L(\Phi) + 2v = 0$;
- 2) $\Phi(x, y) = 0$ на границе D_1 .

Легко заметить, что

$$\Phi(x, y) < \Psi(x, y) \text{ внутри и на границе } D_1.$$

Обозначим через $\Phi_1(x, y)$ следующее выражение

$$\Phi_1(x, y) = F(x, y) - \Phi(x, y).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= 0 \text{ на границе } D_1 \text{ и} \\ L(\Phi_1) &= f(x, y) + 2v > 0. \end{aligned}$$

Еще раз применяя теорему, находим

$$\Phi_1(x, y) < 0 \text{ внутри } D_1.$$

А это значит

$$F(x, y) < \Phi(x, y) < \Psi(x, y),$$

или

$$F(x, y) < \Psi(x, y).$$

Аналогично получается

$$F(x, y) > -\Psi(x, y).$$

Следовательно

$$|F(x, y)| < |\Psi(x, y)| \text{ внутри и на границе } D_1.$$

Теперь докажем сходимость ряда (1.11). Изучаем решение нашей задачи как функции λ .

Образуем разность

$$\begin{aligned} \rho_n(x, y; \lambda) &= \Psi(x, y) - \rho_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda \rho_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda^2 \rho_2\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \dots - \\ &\quad - \lambda^n \rho_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Составим выражения

$$R_n(x, y; \lambda) = a_{11} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2}. \quad (3.12)$$

Подставляя значения p_n из (3.11) в (3.12), имея в виду уравнения (1.9), после некоторых элементарных действий, получим

$$R_n(x, y; \lambda) = -\lambda^{-1} \cdot \left\{ a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_{n-1} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x \partial \eta} \right\} - \lambda^n \cdot a_{11} \cdot \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

Оценим выражения (3.13)

$$|R_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{-1} \cdot \left| D_{xx}^2 P_{n-1} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| \cdot a_{11} + 2\lambda^{n-1} \cdot a_{12} \times \\ \times \left| D_{xy}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| + \lambda^n \cdot a_{11} \cdot \left| D_{xx}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right|. \quad (3.14)$$

Эти множители, рассматриваемые как функции x , суть функции регулярные внутри и на границе D_1 , а как функции η — просто, многочлены. Во всяком случае, мы будем иметь в области D_1

$$\left| D_{xx}^2 P_{n-1} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| = |D_{xx}^2 P_{n-1}(x, \eta)| < p_{n-1},$$

$$\left| D_{xy}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| = \lambda \cdot |D_{xy}^2 P_n(x, \eta)|,$$

$$|D_{xy}^2 P_n(x, \eta)| < q_n,$$

$$\left| D_{xx}^2 P_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| = |D_{xx}^2 P_n(x, \eta)| < p_n.$$

Тогда неравенство (3.14) примет вид

$$|R_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{-1} \cdot [(p_{n-1} + \lambda p_n) \cdot a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]. \quad (3.15)$$

Теперь применим доказанную выше лемму. Пусть эллипс с полуосями a и b содержит внутри себя область D . Функция напряжения для этой области согласно (2.8) будет удовлетворять неравенству

$$\Psi(x, y) = \frac{a^2 b^2 v}{a^2 a_{22} + b^2 a_{11}} \cdot \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} < \frac{a^2 b^2 v}{a^2 a_{22} + b^2 a_{11}}.$$

Очевидно, что можно подобрать эллипс с полуосями a и λb , который будет содержать область D_1 (фиг. 6). Тогда функция напряжения для D_1 будет удовлетворять неравенству

$$\Psi(x, y) < \frac{a^2 b^2 \lambda^2 v}{a^2 a_{22} + \lambda^2 b^2 a_{11}}. \quad (3.16)$$

Применяя лемму, из неравенства (3.15), при помощи (3.16), будем иметь

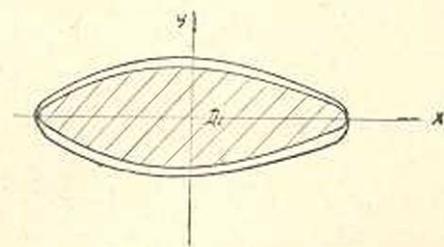
$$| \rho_n(x, y; \lambda) | < \lambda^{n+1} \cdot \frac{a^2 b^2 \cdot v \cdot [(p_{n-1} + \lambda p_n) \cdot a_{11} + 2\lambda \cdot a_{12} q_n]}{a^2 a_{22} + \lambda^2 b^2 a_{11}} \quad (3.17)$$

$$(n \geq 2)$$

Для $n = 0$ оценка из (3.17) не получается, но ее легко можно получить следующим образом.

$$\text{Имеем} \quad \rho_0(x, y; \lambda) = \Psi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) = \Psi(x, y),$$

откуда



Фиг. 6.

$$R_0(x, y; \lambda) = a_{11} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} - 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial y^2} = -2v.$$

Применяя лемму, находим

$$| \rho_0(x, y; \lambda) | < \frac{2a^2 b^2 \lambda^2 v^2}{a^2 a_{22} + \lambda^2 b^2 a_{11}} \quad (3.18)$$

Аналогично и для случая $n = 1$.

Таким образом полученные оценки (3.17) и (3.18) решают вопрос об асимптотической сходимости ряда (1.11), так как из них следует: при $\lambda \rightarrow 0$ для любого n $\rho_n(x, y; \lambda) \rightarrow 0$.

Ереванский государственный
университет

Поступило 2 XII 1958

Վ. Ս. Սարգսյան

ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ՊՐՈՖԻԼՆԵՐՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՊՐԻՉՄԱՅԱՋԵՎ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է երկարացված պրոֆիլներով անկողարոպ պրիզմայաձև ձողերի ոլորման խնդիրը:

Լուծումը ներկայացված է շարքով ըստ փոքր λ պարամետրի: Հետազոտված է լուծման ասիմպտոտիկ զուգամիասնությունը: Ընդհանրացված է Գ. Յու. Պանոֆի [2, 3] մեթոդը: Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Duncan W. I. Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes, R. & M. № 1414 (1932).
2. Панов Д. Ю. Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей. Изв. АН СССР, серия математическая, М., 1937.

3. *Панов Д. Ю.* Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН, Новая серия, т. III (VIII), № 12 (62), 1935, стр. 63—66.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.
5. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.

Н. О. Гулкаян

О центре изгиба призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом

Задача поперечного изгиба призматического стержня прямоугольного сечения с симметрично расположенным прямоугольным вырезом была решена Б. Л. Абрамяном [1].

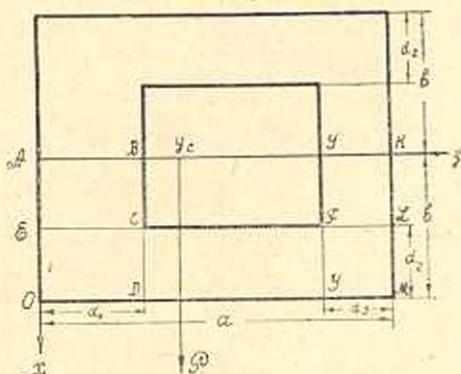
В данной работе рассматривается задача об изгибе призматического стержня прямоугольного поперечного сечения с прямоугольным эксцентрично расположенным отверстием. Задача решается введением вспомогательных функций [2], сводящих задачу к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается вполне регулярность этих систем. Даются формулы для определения напряжений и координаты центра изгиба. Приведен числовой пример определения координаты центра изгиба и напряжений для призматических стержней квадратного поперечного сечения с несимметричным квадратным вырезом.

§ 1. Постановка задачи

Пусть внешняя изгибающая сила P приложена на свободном конце стержня параллельно оси x (фиг. 1) и проходит через центр изгиба, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [3]:

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{P y (y - y_0)}{I(1 + \nu)} - \frac{P}{2I} f'(y), \quad (1)$$

где y_0 — координата центра тяжести сечения, I — осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси y^* , $f(y)$ — произвольная функция, ν — коэффициент Пуассона.



Фиг. 1.

Для двухсвязных областей на внешнем и внутреннем контурах должно выполняться условие:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)] \frac{dy}{ds}. \quad (2)$$

Положим

$$f(y) = b^2. \quad (3)$$

Тогда уравнения (1) и (2) примут вид:

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{P\nu(y - y_0)}{I(1 + \nu)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} (x^2 - b^2) \frac{dy}{ds}. \quad (5)$$

В силу симметричности области поперечного сечения относительно оси y решение ищем только в области АКМОА. Чтобы распространить решение на всю область сечения, требуем, чтобы на оси симметрии $x = 0$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Из граничного условия (5) следует

$$\left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=a} = 0,$$

т. е. на внешнем контуре $F(x, y) = C$. Эту постоянную C примем равной нулю. Тогда будем иметь

$$F(b, y) = F(x, 0) = F(x, a) = 0. \quad (7)$$

На внутреннем контуре:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=d_1} &= 0, & \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{y=a-d_1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=b-d_1} &= \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b). \end{aligned} \quad (8)$$

Для непрерывности значения функции $F(x, y)$ на внутреннем контуре положим

$$F(x, d_1) = C_0, \quad F(b - d_2, y) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b) (y - d_1)$$

и

$$F(x, a - d_3) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1). \quad (9)$$

Значение постоянной C_0 определяется из теоремы Лейбница о циркуляции касательного напряжения [3].

Пусть

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) & \text{внутри области } OABDO; \\ F_2(x, y) & \text{„ „ } OELMO; \\ F_3(x, y) & \text{„ „ } IKMGI. \end{cases} \quad (10)$$

При решении задачи введем вспомогательные функции (2), т. е. решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \Psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } AECBA; \\ \Phi_1(x, y) & \text{„ } OECD O; \end{cases} \\ F_2(x, y) &= \Psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{„ } CDGFC; \\ \Phi_2(x, y) & \text{„ } OECD O; \\ \Phi_4(x, y) & \text{„ } GFLMG; \end{cases} \\ F_3(x, y) &= \Psi_3(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{„ } FIKLF; \\ \Phi_3(x, y) & \text{„ } GFLMG. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) выбираем так, чтобы внутри областей, где они существуют, удовлетворяли уравнению Лапласа, т. е.

$$\nabla^2 \Phi_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (12)$$

Тогда функции $\Psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) согласно (4) будут удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Psi_i(x, y) = \frac{Pv(y - y_0)}{I(1 + \nu)}. \quad (13)$$

Из условий (6)–(9) на основании (10) и (11) получим следующие граничные условия для функций $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Psi_1(b, y) + \Phi_1(b, y) = \Phi_1(x, 0) = \Psi_2(b, y) = \\ &= \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = \Psi_2(x, a) + \Phi_4(x, a) = \Phi_2(b, y) = \\ &= \Phi_4(b, y) = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Psi_3(x, a) = \Psi_3(b, y) + \Phi_3(b, y) = \\ &= \Phi_3(x, a) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Psi_1(x, d_1) = C_0, \quad \Psi_2(b - d_2, y) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(y - d_1)$$

$$\Psi_3(x, a - d_3) = C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1).$$

Для непрерывности решения надо потребовать, чтобы

$$\Phi_1(b - d_2, y) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=b-d_2} = 0; \quad \Phi_1(x, d_1) = \Psi_2(x, d_1) - C_0;$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0,$$

$$\Phi_2(b - d_2, y) = \Psi_1(b - d_2, y) - C_0 - \frac{Pd_2}{2I} (d_2^2 - 2b)(y - d_1);$$

$$\Phi_4(x, a - d_3) = \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \Big|_{y=a-d_3} = 0;$$

$$\Phi_4(b - d_2, y) = \Psi_3(b - d_2, y) - C_0 - \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(y - d_1),$$

$$\Phi_3(b - d_2, y) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \Big|_{x=b-d_2} = 0; \quad (15)$$

$$\Phi_3(x, a - d_3) = \Psi_2(x, a - d_3) - C_0 - \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1).$$

Граничные условия для определения функций $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ неоднородны, но, следуя Гринбергу [4], решение ищем в таком же виде, как и при однородных граничных условиях, т. е.

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \text{где } H_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy;$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2},$$

где
$$U_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_2}^b \Psi_2(x, y) \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} dx;$$

$$\Psi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y),$$

где
$$V_k(x) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_3}^a \Psi_3(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y) dy;$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1},$$

где
$$W_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy;$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2},$$

где
$$G_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_1}^b \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2} dx;$$

$$\Phi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(x) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y),$$

где
$$L_k(x) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_1}^b \Phi_3(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y) dy;$$

$$\Phi_4(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2},$$

где
$$K_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_1}^b \Phi_4(x, y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2} dx. \quad (16)$$

§ 2. Решение уравнений задачи

Для определения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ... и $K_k(y)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} H_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 H_k(x) &= (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} C_0 + \\ &+ \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2}{k\pi} \cdot [d_1(-1)^{k+1} + y_0[(-1)^k - 1]]; \\ U_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 U_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} C_0 + \\ &+ \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \cdot (y_0 - y) + (-1)^k \frac{k\pi}{d_2} \cdot \frac{P}{I} (d_2 - 2b)(y - d_1); \quad (17) \\ V_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 V_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_3^2} \left[C_0 + \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1) \right] - \\ &- \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} (a - y_0) [(-1)^k - 1] + \frac{2d_3}{k\pi} (-1)^k \frac{P_\nu}{I(1+\nu)}; \\ W_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 W_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^{k+1}}{d_1^2} C_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2k\pi(-1)^k}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p(d_1) \sin \frac{p\pi(b-x)}{d_2}; \\
& G_k^*(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 G_k(y) = \frac{2k\pi}{d_2^2} (-1)^{k+1} C_0 + \\
& + \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} H_p(b-d_2) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_1} - \frac{Pd_2}{2l} (d_2-2b)(y-d_1) \right]; \\
& K_k^*(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 K_k(y) = \frac{2k\pi(-1)^{k+1}}{d_2^2} C_0 + \\
& + \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} V_p(b-d_2) \cdot \sin \frac{p\pi}{d_3} (a-y) - \frac{Pd_2}{2l} (d_2-2b)(y-d_1) \right].
\end{aligned}$$

Из условий (14) и (15) на основании (16) получим следующие граничные условия для этих функций:

$$\begin{aligned}
H_k^*(x)|_{x=0} = V_k^*(x)|_{x=0} = W_k^*(b-d_2) = W_k^*(x)|_{x=b-d_2} = G_k(d_1) = \\
= G_k(y)|_{y=d_1} = K_k(a-d_3) = K_k^*(y)|_{y=a-d_3} = L_k(b-d_2) = \\
= L_k^*(x)|_{x=b-d_2} = 0; \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_k(b) + W_k(b) = 0, \quad U_k(0) + G_k(0) = 0; \\
U_k(a) + K_k(a) = 0, \quad V_k(b) + L_k(b) = 0. \tag{19}
\end{aligned}$$

Решая уравнение (17) и используя условия (18), получим следующие выражения для искомых функций:

$$\begin{aligned}
H_k(x) = A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \frac{2d_1^2}{(k\pi)^2} \cdot \frac{P_\nu}{l(1+\nu)} [d_1((-1)^{k+1} + \\
+ y_0[(-1)^k - 1]) - \frac{2(-1)^k C_0}{k\pi}; \\
U_k(y) = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} - \\
- \frac{2d_2^2}{(k\pi)^2} \cdot \frac{P_\nu}{l(1+\nu)} [(-1)^k - 1](y_0 - y) - \\
- \frac{(-1)^k}{k\pi} \cdot \frac{Pd_2}{l} (d_2 - 2b)(y - d_1) - \frac{2(-1)^k}{k\pi} C_0; \\
V(x) = E \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_3} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} \left[C_0 + \frac{Pd_2}{2l} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1) \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2d_3^2}{(k\pi)^2} \cdot \frac{P_3}{l(1+\nu)} (a - y_0) [(-1)^k - 1] - 2(-1)^k \frac{P_3}{l(1+\nu)} \left(\frac{d_3}{k\pi}\right)^3; \quad (20)$$

$$W_k(x) = \frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi} C_0 \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_1} (x - b + d_2) +$$

$$+ \frac{2(-1)^{k+1} d_2}{\pi d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b + d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p U_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2(-1)^{k+1} kd_2^2}{\pi d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{U_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2} \sin \frac{p\pi(b-x)}{d_2};$$

$$G_k(y) = \frac{4(-1)^{k+1} C_0}{k\pi} \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_2} (d_1 - y) +$$

$$+ \frac{d_2(-1)^k}{(k\pi)^2} \frac{Pd_2}{l} (d_2 - 2b) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (d_1 - y) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \cdot \frac{Pd_2}{l} (d_2 - 2b) (d_1 - y) +$$

$$+ \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (d_1 - y) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2} \cdot H_p(b - d_2) +$$

$$+ \frac{2k(-1)^{k+1} d_1^2}{\pi d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{H_p(b - d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2} \sin \frac{p\pi y}{d_1};$$

$$L_k(x) = \frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi} \left[C_0 + \frac{Pd_2}{2l} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \right] \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_3} (x - b +$$

$$+ d_2) + \frac{2(-1)^{k+1} d_2}{\pi d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p U_p(a - d_3)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2kd_2^2}{\pi d_3^2} (-1)^{k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{U_p(a - d_3)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2} \sin \frac{p\pi(b-x)}{d_2};$$

$$K_k(y) = \frac{4C_0(-1)^{k+1}}{k\pi} \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_2} (y - a + d_3) +$$

$$+ \frac{d_2}{k\pi} (-1)^{k+1} \frac{P}{l} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y - a + d_3) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^2 \cdot \frac{P}{l} (-1)^{k+1} (d_2 - 2b) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - a + d_2) + \\
& + \frac{2(-1)^{k+1} d_3}{\pi d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - a + d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p V_p (b - d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2}\right)^2} + \\
& + \frac{(-1)^k}{k\pi} \cdot \frac{P d_2}{l} \cdot (d_2 - 2b) (y - d_1) + \dots \\
& + \frac{2k(-1)^{k+1} d_3^2}{\pi d_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_p (b - d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2}\right)^2} \cdot \sin \frac{p\pi}{d_3} (a - y).
\end{aligned}$$

Подставляя в (19) соответствующие значения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ... и $K_k(y)$ из (20), получим совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений, из которой должны быть определены постоянные интегрирования A_k , C_k , D_k и E_k , что возможно сделать, если эта совокупность систем вполне регулярна.

Покажем, что полученная совокупность систем вполне регулярна. Делая подстановки

$$\begin{aligned}
D_k &= -C_k \operatorname{cth} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot F_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2}; \\
C_p &= \frac{abd_2}{\alpha p (-1)^p} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} C_p^*; \\
F_p &= \frac{abd_2}{\alpha p (-1)^p} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} F_p^*; \\
A_p &= \frac{abd_2}{p (-1)^p} \operatorname{sch} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2) A_p^*; \\
E_p &= \frac{abd_2}{p (-1)^p} \operatorname{sch} \frac{p\pi}{d_3} (b - d_2) E_p^*;
\end{aligned} \tag{21}$$

приведем эту совокупность бесконечных систем уравнений к виду:

$$\begin{aligned}
A_k^* &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{11} C_p^* + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{12} F_p^* + \gamma_k^I; \\
C_k^* &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{13} A_p^* + \gamma_k^{II}; \\
F_k^* &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{31} E_p^* + \gamma_k^{III};
\end{aligned} \tag{22}$$

$$E_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} C_p^* + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{42} F_p^* + \gamma_{1k}^{IV},$$

где

$$a_{kp}^{11} = \frac{2d_2k}{\pi d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1) \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{12} = \frac{2d_2k}{\pi d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{21} = \frac{2d_1k}{\pi d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{31} = \frac{2kd_3}{\pi d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{41} = \frac{2d_2}{\pi d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2};$$

$$a_{kp}^{42} = \frac{2d_2k}{\pi d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_3) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2};$$

$$\gamma_{1k}^{IV} = \frac{d_1}{abd_2^2} \frac{2}{k\pi^2} C_0 \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \\ - \frac{d_1^2}{abd_2} (d_1 - y_0) \cdot \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2}{k^2\pi^3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} - \\ - \frac{d_1^2 y_0}{abd_3} (-1)^k \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2}{k^2\pi^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d_1}{ab} \cdot \frac{1}{k\pi^2} \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} (d_1 - y_0) \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2); \\
\gamma_k^{II} &= \frac{P}{I} \cdot \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2d_2 z}{k^2 \pi^2} \frac{(y_0 - d_1)}{ab} \operatorname{cth} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \\
& + \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} (-1)^{k+1} \frac{2d_2 y_0 z}{ab} \cdot \frac{1}{k^2 \pi^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{P}{I} \frac{z d_2}{ab} (d_2 - 2b) \frac{1}{k\pi^2} + \\
& + \frac{1}{abd_1} \cdot \frac{2z}{k\pi^2} C_0 + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{3} \frac{d_1}{ab} \frac{z}{k\pi^2} (2d_1 - 3y_0) + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{2d_2^2}{ab} \frac{z}{k^2 \pi^4}; \\
\gamma_k^{III} &= \frac{z}{ab} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_2}{k^2 \pi^3} (y_0 - a + d_2) \operatorname{cth} \frac{k\pi d_2}{d_2} + \\
& + \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{z d_2}{ab} \frac{(-1)^k}{k^2 \pi^3} (a - y_0) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_2} + \frac{2z}{abd_3} \frac{1}{k\pi^2} C_0 + \\
& + \frac{z}{ab} \frac{P}{I} \frac{d_2}{d_3} \frac{1}{k\pi^2} (d_2 - 2b) (a - d_1) + \frac{z d_2}{ab} \frac{P}{3I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1}{k\pi^2} (3a - 3y_0 - 2d_2) - \\
& - \frac{z d_2^2}{ab} \frac{1}{k^2 \pi^4} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu}; \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_k^{IV} &= - \frac{d_3^2}{abd_2} \frac{2}{k^2 \pi^3} \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_3} (a - y_0 - d_3) + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{2d_3^2}{k^2 \pi^3} (a - y_0) \frac{(-1)^k}{abd_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{d_3}{k\pi^2} (a - d_3 - y_0) \frac{1}{ab} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) + \\
& + \frac{2C_2 d_3}{k\pi^2 d_2^2} \frac{1}{abd_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) + \\
& + \frac{P}{I} \frac{d_3}{k\pi^2} \frac{1}{abd_2} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3}.
\end{aligned}$$

Совокупность четырех бесконечных систем уравнений можно свести к одной бесконечной системе

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + b_\nu, \tag{24}$$

если положить

$$\begin{aligned}
A_k^* &= Z_{4k-3}, \quad C_k^* = Z_{4k-2}, \quad F_k^* = Z_{4k-1}, \quad E_k^* = Z_{4k}; \\
C_{4k-3, 4p-2} &= a_{kp}^{11}; \quad C_{4k-3, 4p-1} = a_{kp}^{12}; \quad C_{4k-3, 4p} = C_{4k-3, 4p-3} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{4k-2, 4p-3} &= a_{kp}^{21}, & C_{4k-2, 4p} &= C_{4k-2, 4p-1} = C_{4k-2, 4p-2} = 0; \\
 C_{4k-1, 4p} &= a_{kp}^{31}, & C_{4k-1, 4p-1} &= C_{4k-1, 4p-2} = C_{4k-1, 4p-3} = 0; \\
 C_{4k, 4p-2} &= a_{kp}^{41}, & C_{4k, 4p-1} &= a_{kp}^{42}, & C_{4k, 4p} &= C_{4k, 4p-3} = 0; \\
 b_{4k-3} &= \gamma_{1k}^I, & b_{4k-2} &= \gamma_{1k}^{II}, & b_{4k-1} &= \gamma_{1k}^{III}, & b_{4k} &= \gamma_{1k}^{IV}.
 \end{aligned} \quad (25)$$

Легко показать, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-3, p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{11} + a_{kp}^{12}| < \frac{1}{4\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_1)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right];$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-2, p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{21}| \leq \alpha;$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1, p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{31}| \leq \alpha;$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k, p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{41} + a_{kp}^{42}| < \frac{1}{4\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_1)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right].$$

Здесь были использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} < \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_1)} \right];$$

$$\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (a-d_1) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \leq e^{-\frac{k-d_1}{d_1}};$$

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Выбирая при $d_1 > d_3$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_1)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right]},$$

для всех ν получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu, p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_1)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)} \right]}.$$

Если же $d_3 > d_1$, то α придаем значение

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)}\right]}$$

и для всех ν имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu, p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(a-d_1-d_2)}\right]},$$

т. е.

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu, p}| < 1 - \theta$$

для любого ν и $\theta > 0$. Следовательно, система (24) вполне регулярна [5]. Свободные члены системы (24) ограничены $|\gamma_k| < M$. Как известно [5], в этом случае система имеет ограниченные решения, удовлетворяющие неравенству

$$|Z_\nu| < K = \frac{M}{\theta}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. $d_1 = a - d_2$, т. е. случай прямоугольного сечения с внутренней внецентрично расположенной трещиной, система (24) остается вполне регулярной;

2. $b = d_2$, т. е. случай прямоугольного сечения с горизонтально расположенной трещиной вдоль оси. Система (24) также вполне регулярна;

3. $d_1 = d_2$, т. е. случай сечения с центрально расположенным прямоугольным вырезом. Как это видно из (23).

$$a_{kp}^{21} = a_{kp}^{31}, \quad a_{kp}^{11} = a_{kp}^{42}, \quad a_{kp}^{42} = a_{kp}^{41}.$$

Совокупность четырех бесконечных систем (22) вырождается в совокупность двух бесконечных систем:

$$M_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{21} L_p^* + b_k^1,$$

$$L_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} M_p^* + b_k^{II},$$

где

$$c_{kp} = a_{kp}^{11} + a_{kp}^{12}, \quad b_k^1 = \gamma_k^{II} + \gamma_k^{III}, \quad b_k^{II} = \gamma_k^I + \gamma_k^{IV}.$$

§ 3. Определение постоянного C_0

Постоянная C_0 определяется из теоремы Л. С. Лейбензона [3] о циркуляции касательного напряжения при изгибе:

$$\int_{L_i} \frac{\partial F}{\partial n} ds + \frac{P}{2I} \iint f_1(y) dx dy + \left[2\mu\tau - \frac{P\nu(y'_0 - y_0)}{(1+\nu)I} \right] \Omega = 0,$$

где Ω — площадь, ограниченная внутренним контуром L_i ;

y'_0 — координата центра тяжести замкнутой области Ω .

Поскольку было принято $f(y) = b^2$ и $\tau = 0$, то это соотношение упрощается

$$\int_{L_i} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (y'_0 - y_0) \Omega. \quad (26)$$

Учитывая (10) и (11), формуле (26) можно придать вид:

$$\int_{a_1}^{a-d_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \Big|_{x=b-d_2} dy - \int_0^{b-d_2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} dx + \int_0^{b-d_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \Big|_{y=a-d_1} dx = \\ = \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (y'_0 - y_0) (a - d_2 - d_1) (b - d_2). \quad (27)$$

Решая бесконечную систему (24), получим значения постоянных интегрирования, выраженные через C_0 . Затем находим функции $H_k(x)$, $U_k(y)$, ..., $K_k(y)$, через которые определяются функции напряжений $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$.

Подставляя в (27) соответствующие значения функций $\Psi_i(x, y)$, после некоторых преобразований получим следующую формулу для определения C_0 :

$$C_0 \left[\frac{b-d_2}{d_1} + \frac{b-d_2}{d_2} + \frac{a-d_1-d_2}{d_2} \right] = \\ = \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (y'_0 - y_0) (a - d_2 - d_1) (b - d_2) - \\ - \frac{1}{3} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (b - d_2) (d_1^2 - d_2^2) + \frac{1}{2} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (b - d_2) [y_0(d_1 + d_2) - \\ - ad_2] - \frac{Pd_2}{2I} (d_2 - 2b) (a - d_2 - d_1) (b - d_2) + \\ + \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \frac{d_2}{4} (a - d_2 - d_1) (2y_0 - a + d_2 - d_1) - \\ - \frac{P}{4I} (d_2 - 2b) (a - d_2 - d_1)^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -abd_2 \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{II}}{k} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{III}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^I}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{IV}}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) - \frac{d_1}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^2} - \\
& - \frac{d_3}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} - \frac{d_2}{\alpha \pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) - \\
& - \frac{d_2}{\alpha \pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} - \\
& - \frac{d_3}{\alpha \pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} - \\
& \left. - \frac{d_2}{\alpha \pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_3) \right\},
\end{aligned}$$

§ 4. Определение центра изгиба

Координата центра изгиба определяется по формуле

$$y = \frac{1}{P} \iint_{\Omega} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy - \frac{1}{2I} \iint_{\Omega} (x^2 - b^2) y dx dy, \quad (28)$$

Подставляя в (28) полученные значения функций напряжений и произведя интегрирование, окончательно получим

$$\begin{aligned}
y_c = & \frac{1}{6I} \{ 2b^3 [d_1^2 + d_3(2a-d_3)] + d_2^2 (3b-d_2) [(a-d_3)^2 - d_1^2] \} + \\
& + \frac{2}{P} \left\{ 4abd_2 \frac{d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} \left(b - \frac{d_2}{2} \right) + \right. \\
& + 4 \frac{abd_2^3}{\alpha \pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{a-2d_1}{2d_2} k\pi \right] + \\
& \left. + 4 \frac{abd_2^3}{\alpha \pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \operatorname{ch} k\pi \frac{a-2d_3}{2d_2} \right] + \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \frac{abd_2d_3^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{2d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} \left(b - \frac{d_2}{2}\right) + \\
& + C_0 [-2ab + bd_3 + bd_1 - ad_2] - \frac{8C_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_1^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \\
& \quad \left. + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} + d_3^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] + \\
& + \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{1}{12} \cdot [d_1^2(bd_1^2 - d_2^2) + d_3^2b(2a - d_2) + d_2^2(a - d_3)^2] + \\
& \quad + \frac{P\nu}{I(1+\nu)} y_0 \frac{1}{6} [-bd_1^3 - ad_2^3 + d_2d_3^2 + d_1d_2^2 - bd_3^3] + \\
& + \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{8}{\pi^6} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^6} \cdot [2d_1d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_1^5 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} - 2ad_3^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + \\
& \quad + d_3^5 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + 2d_2^4(a - d_3) \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2}] + \\
& + \frac{16}{\pi^5} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} y_0 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[-d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} + d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \\
& \left. + d_3^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} \right] + \frac{Pd_2}{4I} (d_2 - 2b) \cdot (a - d_3 - d_1) [bd_1 - 3ab + bd_3 + 2ad_2] - \\
& - \frac{4}{\pi^3} \frac{Pd_2}{I} (d_2 - 2b) \cdot (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_3^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right].
\end{aligned}$$

Если вырез расположен симметрично, т. е. $d_1 = d_3$, то из формулы (29) следует, что, как и следовало ожидать, $y_c = \frac{a}{2}$.

§ 5. Определение напряжений

Напряжения определяются через функцию напряжений следующим образом [3]:

$$\begin{aligned}
X_z &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2); \\
Y_z &= -\frac{\partial F}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя в (30) соответствующие значения $F(x, y)$, получим:

$$X_z = \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \cos \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-2} + \\ + \frac{C_0}{d_1} + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{6} (3y^2 - d_1^2) + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{y_0}{2} (d_1 - 2y) - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2);$$

$$Y_z = \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_1} (b-d_2) \sin \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-3}$$

$$0 < x < b - d_2, \quad 0 < y < d_1.$$

$$X_z = \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} \cdot Z_{4k-2} + \\ + \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} \cdot Z_{4k-1} - \\ - \frac{P}{2I} [x^2 + x(d_2 - 2b) + b(b - d_2)] - \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{2} (b-x)(d_2 - b + x);$$

$$Y_z = \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \cos \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-2} +$$

$$+ \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \cos \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-1} +$$

$$+ \frac{C_0}{d_2} + \frac{P}{2I} (d_2 - 2b)(y - d_1) + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{2} (y_0 - y) [d_2 - 2(b-x)]$$

$$b - d_2 < x < b, \quad d_1 < y < a - d_3.$$

$$X_z = \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) Z_{4k-}$$

$$- \frac{C_0}{d_3} - \frac{Pd_2}{2Id_3} (d_2 - 2b)(a - d_3 - d_1) + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{2} (a - y_0) [d_3 -$$

$$- 2(a-y)] + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \frac{1}{6} [3(a-y)^2 - d_3^2] - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2);$$

$$Y_z = \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y) \cdot Z_{4k};$$

$$0 < x < b - d_2; \quad a - d_3 < y < a.$$

$$\begin{aligned}
 X_z = & \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-2} + \\
 & + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \\
 & + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} Z_{4k-2} + \\
 & + \frac{2C_0}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} + \\
 & + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} + \\
 & + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \frac{1}{6} (3y^2 - d_1^2) + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \frac{y_0}{2} (d_1 - 2y) - \\
 & - \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4d_2}{\pi^2} (d_1 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) - \\
 & - \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} - \\
 & - \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4y_0 d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} - \\
 & - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y = & \frac{abd_2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} Z_{4k-3} + \\
 & + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) \cdot Z_{4k-1} + \\
 & + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_1) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2C_0}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) - \\
& - \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4d_2}{\pi^2} (d_1 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{2d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \\
& + \frac{P_\nu}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4y_0 d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \\
& \qquad \qquad \qquad b-d_2 < x \leq b; \quad 0 \leq y < d_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2 = & \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) Z_{4k} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-2} + \\
& + \frac{ab\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_3) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) + \\
& + \frac{Pd_2}{Id_3} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \times \\
& \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_3} (a-y) + \frac{P}{I} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{1}{2} (a-y_0) [d_3 - 2(a-y)] + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{1}{6} [3(a-y)^2 - \\
& - d_3^2] - \frac{4d_3}{\pi^2} \cdot \frac{P_y}{I(1+\nu)} (a-y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (x-b+d_2) \times \\
& \quad \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_2} (a-y) - \\
& - \frac{2d_3^2}{\pi^2} \frac{P_y}{I(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (x-b+d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cos \frac{k\pi}{d_2} (a-y) + \\
& + \frac{P_y}{I(1+\nu)} \cdot \frac{4d_2}{\pi^2} (a-d_3-y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \times \\
& \quad \times \sin \frac{k\pi (b-x)}{d_2} - \frac{P}{2I} (x^2 - b^2); \\
Y_2 = & \frac{abd_2\pi}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y) Z_{4k} + \\
& + \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) \cdot Z_{4k-2} + \\
& + \frac{ab\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) Z_{4k-1} + \\
& + \frac{2C_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi (a-y)}{d_2} + \\
& + \frac{2C_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b-x) + \\
& + \frac{Pd_2}{Id_3} (d_2 - 2b) (a-d_3-d_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-x) \times \\
& \quad \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P}{I} (d_2 - 2b) (a - d_3 - d_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \times \\
& \quad \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x) - \\
& - \frac{4d_3}{\pi^2} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} (a - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \times \\
& \quad \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a - y) - \\
& - \frac{2d_3^2}{\pi^2} \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (x - b + d_2) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a - y) - \\
& - \frac{P\nu}{I(1+\nu)} \frac{4d_2}{\pi^2} (a - d_3 - y_0) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - y) \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \times \\
& \quad \times \cos \frac{k\pi}{d_2} (b - x).
\end{aligned}$$

$$b - d_2 < x \leq b, \quad a - d_3 < y \leq a.$$

§ 6. Числовой пример

В качестве примера решена задача изгиба стержня квадратного поперечного сечения с несимметричной квадратной полостью, т. е. для $a = 2b$, $2(b - d_2) = a - d_1 - d_3$ при следующих относительных размерах и толщине стенок $d_2 = d$, $d_1 = 2d_3 = \frac{4}{3}d$, $a = 2b = 3d$. В расчетах принято $\nu = 0,3$.

Из решения бесконечной системы после применения лимитант [5] получены следующие оценки сверху и снизу для неизвестных Z_k :

$$0,27813 \frac{C_0}{ab^2} - 0,00111 \frac{P}{ab^3} < Z_1 < 0,27604 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00826 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,20908 \frac{C_0}{ab^2} + 0,02433 \frac{P}{ab^3} < Z_2 < 0,20606 \frac{C_0}{ab^2} + 0,03785 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,29464 \frac{C_0}{ab^2} - 0,10763 \frac{P}{ab^3} < Z_3 < 0,29268 \frac{C_0}{ab^2} - 0,09885 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,18512 \frac{C_0}{ab^2} - 0,05037 \frac{P}{ab^3} < Z_4 < 0,18223 \frac{C_0}{ab^2} - 0,03744 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,17171 \frac{C_0}{ab^2} - 0,00684 \frac{P}{ab^3} < Z_5 < 0,16858 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00718 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,15360 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00006 \frac{P}{ab^3} < Z_6 < 0,14904 \frac{C_0}{ab^2} + 0,02052 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,19102 \frac{C_0}{ab^2} - 0,06576 \frac{P}{ab^3} < Z_7 < 0,18778 \frac{C_0}{ab^2} - 0,05127 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,13519 \frac{C_0}{ab^2} - 0,03953 \frac{P}{ab^3} < Z_8 < 0,13096 \frac{C_0}{ab^2} - 0,02057 \frac{P}{ab^3};$$

$$0,17166 \frac{C_0}{ab^2} - 0,05816 \frac{P}{ab^3} < Z_{7,8,9} < 0,15696 \frac{C_0}{ab^2} + 0,00774 \frac{P}{ab^3};$$

где

$$0,11247 \frac{P}{b} < C_0 < 0,12319 \frac{P}{b}.$$

Для координаты центра изгиба y_c получены следующие оценки снизу \bar{y}_c и сверху \bar{y}_c :

$$0,44331 a < y_c < 0,47721 a.$$

За расчетное значение координаты центра изгиба y_c^0 принято среднее арифметическое между нижней границей \bar{y}_c и верхней границей \bar{y}_c

$$y_c^0 = 0,4602 a,$$

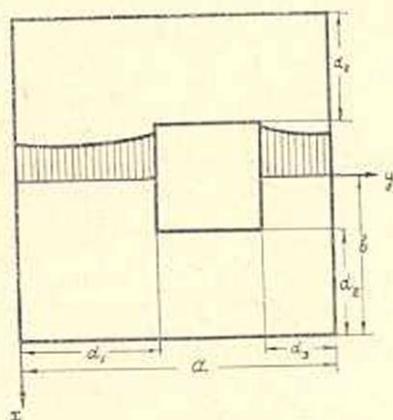
что дает ошибку расчета менее 3,6%.

По приближенной теории тонкостенных стержней замкнутого профиля (6) для этого случая находим

$$y_c^* = 0,3961 a.$$

Погрешность приближенного значения y_c^* по сравнению с точным y_c^0 составляет 14%.

В таблице 1 приведены значения касательных напряжений на нейтральной оси oy при $v = 0$, эпюра которых построена на фиг. 2.



Фиг. 2.

Таблица 1

| y | $\tilde{X}_z / \frac{P}{a^2}$ | $\bar{X}_z / \frac{P}{a^2}$ | $X_z^0 / \frac{P}{a^2}$ |
|--------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| 0 | 1,8215 | 2,0193 | 1,9206 |
| $\frac{d_1}{4}$ | 1,8671 | 2,0045 | 1,9358 |
| $\frac{d_1}{2}$ | 1,9912 | 2,0817 | 2,0364 |
| $\frac{3}{4}d_1$ | 2,1486 | 2,2859 | 2,2172 |
| $\frac{7}{8}d_1$ | 2,2089 | 2,3564 | 2,2826 |
| d_1 | 2,2064 | 2,4048 | 2,3056 |
| $a-d_3$ | 2,4332 | 2,5955 | 2,5143 |
| $a-\frac{7}{8}d_3$ | 2,4298 | 2,5842 | 2,5070 |
| $a-\frac{3}{4}d_3$ | 2,4165 | 2,5555 | 2,4860 |
| $a-\frac{d_3}{2}$ | 2,3717 | 2,4782 | 2,4250 |
| $a-\frac{d_3}{4}$ | 2,3043 | 2,4432 | 2,3738 |
| a | 2,2737 | 2,4360 | 2,3549 |

Здесь \tilde{X}_z — нижняя граница касательного напряжения; \bar{X}_z — верхняя граница, а $X_z^0 = \frac{\tilde{X}_z + \bar{X}_z}{2}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 27 V 1958

Ն. Օ. Գուլայան

ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԱՆՑՔՈՎ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է արտակենտրոն ուղղանկյուն անցքով ուղղանկյուն հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ծաման խնդիրը:

Ներմուծելով օժանդակ ֆունկցիաներ, խնդիրը բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սխեմների լուծմանը: Ապացուցվում է այդ սխեմների լրիվ ձևաբանությունը: Լարումների և ծաման կենտրոնի կոորդինատների համար ստացված են բանաձևեր: Թվային հաշվումները կատարված են արտակենտրոն քառակուսի անցքով քառակուսի հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ծաման խնդրի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* ПММ, т. XIV, в. 3, 1950.
2. *Арутюнян Н. Х.* ДАН АрмССР, т. IX, № 2, 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. *Гринберг Г. А.* Изв. АН СССР, серия физическая, 1946, т. X, вып. 2.
5. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. ОТНИ, М., 1949.
6. *Уманский А. А.* Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. Оборонгиз, 1939.

А. П. Мелконян

Об изгибе двухслойной толстой плиты

Рассматривается задача об изгибе толстой свободно опертой двух-слойной плиты прямоугольного очертания. Материалы слоев обладают различными модулями упругости. В пределах каждого слоя модуль упругости считается постоянным. Предполагается, что различные материалы, составляющие слой, имеют один и тот же коэффициент Пуассона. В частности решена задача изгиба квадратной плиты для различных относительных размеров и отношений модулей упругости слоев. Результаты точного решения сопоставляются с результатами, получаемыми в теории изгиба тонких плит.

1. *Общее решение толстой двухслойной свободно опертой плиты прямоугольного очертания под нормальной нагрузкой.* Пусть толстая прямоугольная плита, со сторонами a и b , и с толщинами слоев δ_1 и δ_2 , нагружена поперечной нагрузкой интенсивности $p(x, y)$, приложенной к верхней плоскости плиты. Каждый слой в отдельности также является толстым. Пусть верхний слой имеет модуль упругости E_1 , нижний слой — E_2 . Коэффициенты Пуассона для обоих слоев примем равными ν . Все величины, относящиеся к верхнему слою будем обозначать индексом 1, к нижнему слою — индексом 2. Координатную плоскость xoy расположим на границе контакта слоев с началом в одной из вершин плиты. Ось oz направим вертикально вниз. Обозначим через u, v, w перемещения частицы упругого тела, а через $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, X_z$ компоненты тензора напряжений.

Под свободным опиранием подразумеваем следующие условия в любой точке боковой поверхности плиты [1]:

1. Нормальная компонента напряжений равна нулю.
2. Касательные компоненты смещения равны нулю.

Предположим, что на верхней и нижней граничных плоскостях плиты отсутствуют касательные напряжения. Граничные условия на этих плоскостях будут иметь вид:

$$\text{при } z = -\delta_1 \quad Z_2^{(1)} = -p(x, y), \quad X_2^{(1)} = 0, \quad Y_2^{(1)} = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{при } z = \delta_2 \quad Z_2^{(2)} = 0, \quad X_2^{(2)} = 0, \quad Y_2^{(2)} = 0.$$

Необходимо также выполнение следующих условий на контакте:

$$\text{при } z = 0 \quad Z_2^{(1)} = Z_2^{(2)}, \quad X_2^{(1)} = X_2^{(2)}, \quad Y_2^{(1)} = Y_2^{(2)}, \quad (1.2)$$

$$v^{(1)} = v^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}.$$

На внешнюю поперечную нагрузку $p(x, y)$ накладываем ограничения, позволяющие представить ее в виде двойного ряда Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.3)$$

$$\text{где } \beta_{kn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (1.4)$$

Используем для каждого слоя решение Б. Г. Галеркина [1], где все компоненты напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию:

$$\varphi_j(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{kn}^{(j)} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + C_{kn}^{(j)} z \operatorname{ch} \alpha_{kn} + D_{kn}^{(j)} z \operatorname{sh} \alpha_{kn} \right] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} \quad (1.5)$$

и имеют следующие выражения:

$$X_x^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{kn}^{(j)} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \lambda_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \lambda_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + C_{kn}^{(j)} \left[\frac{k^2 \pi^2}{a^2} (\alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \operatorname{ch} \alpha_{kn}) + 2\sigma \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{ch} \alpha_{kn} \right] + D_{kn}^{(j)} \left[\frac{k^2 \pi^2}{a^2} (\alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + 2\sigma \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{sh} \alpha_{kn} \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (1.6)$$

$$Y_y^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{kn}^{(j)} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \lambda_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \lambda_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + C_{kn}^{(j)} \left[\frac{n^2 \pi^2}{b^2} (\alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \operatorname{ch} \alpha_{kn}) + 2\sigma \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{ch} \alpha_{kn} \right] + D_{kn}^{(j)} \left[\frac{n^2 \pi^2}{b^2} (\alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + 2\sigma \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{sh} \alpha_{kn} \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (1.7)$$

$$Z_z^{(j)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{kn}^{(j)} \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{ch} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(j)} \pi^2 \lambda_{kn}^2 [\alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \alpha_{kn}] + D_{kn}^{(j)} \pi^2 \lambda_{kn}^2 [\alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} - \right. \\ \left. - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \alpha_{kn}] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.8)$$

$$Z_y^{(j)} = - \frac{\pi^2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ A_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn}^2 \operatorname{sh} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn}^2 \operatorname{ch} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(j)} \lambda_{kn} (\alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + 2\sigma \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)} \lambda_{kn} (\alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + 2\sigma \operatorname{ch} \alpha_{kn}) \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.9)$$

$$X_z^{(j)} = - \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k \left\{ A_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn}^2 \operatorname{sh} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn}^2 \operatorname{ch} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(j)} \lambda_{kn} (\alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + 2\sigma \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)} \lambda_{kn} (\alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + 2\sigma \operatorname{ch} \alpha_{kn}) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.10)$$

$$Y_x^{(j)} = - \frac{\pi^2}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} kn \left\{ A_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(j)} (\operatorname{ch} \alpha_{kn} + \alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)} (\operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + \alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn}) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \quad (1.11)$$

$$u^{(j)} = - \frac{1 + \sigma}{E_j} \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k \left\{ A_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(j)} (\operatorname{ch} \alpha_{kn} + \alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)} (\operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + \alpha_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn}) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.12)$$

$$v^{(j)} = - \frac{1 + \sigma}{E_j} \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ A_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} \operatorname{ch} \alpha_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(j)} (\operatorname{ch} \alpha_{kn} + \alpha_{kn} \operatorname{sh} \alpha_{kn}) + D_{kn}^{(j)} (\operatorname{sh} \alpha_{kn} + \right.$$

$$+ \alpha_{kn} \operatorname{ch} z_{kn}] \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} w^{(j)} = & -\frac{1+\sigma}{E_j} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{kn}^{(j)} \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{sh} z_{kn} + B_{kn}^{(j)} \pi^2 \lambda_{kn}^2 \operatorname{ch} z_{kn} + \\ & + C_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} (\alpha_{kn} \operatorname{ch} z_{kn} - 2(1-2\sigma) \operatorname{sh} z_{kn}) + D_{kn}^{(j)} \pi \lambda_{kn} (\alpha_{kn} \operatorname{sh} z_{kn} - \\ & - 2(1-2\sigma) \operatorname{ch} z_{kn})] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где
$$\lambda_{kn} = \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}; \quad z_{kn} = \pi \lambda_{kn} z.$$

($j = 1, 2$ — соответственно для верхнего и нижнего слоев).

Входящие в эти уравнения восемь коэффициентов $A_{kn}^{(j)}$, $B_{kn}^{(j)}$, $C_{kn}^{(j)}$, $D_{kn}^{(j)}$ определяются из условий на поверхности (1.1) и условий сопряжения на контактной плоскости (1.2).

Из условий сопряжения (1.2) получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \pi \lambda A^{(1)} + (2\sigma - 1) C^{(1)} &= \pi \lambda_{kn} A^{(2)} + (2\sigma - 1) C^{(2)}; \\ E_2 \pi \lambda A^{(1)} + E_2 C^{(1)} &= E_1 \pi \lambda A^{(2)} + E_1 C^{(2)}; \\ \pi \lambda B^{(1)} + 2\sigma D^{(1)} &= \pi \lambda B^{(2)} + 2\sigma D^{(2)}; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$E_2 \pi \lambda B^{(1)} + 2E_2 (2\sigma - 1) D^{(1)} = E_1 \pi \lambda B^{(2)} + 2E_1 (2\sigma - 1) D^{(2)}.$$

Шесть условий (1.2) привелись к четырем уравнениям (1.15) в силу того, что условия $v^{(1)} = v^{(2)}$ и $u^{(1)} = u^{(2)}$ приводят к одинаковым уравнениям. То же имеет место для условий $X_2^{(1)} = X_2^{(2)}$, $Y_2^{(1)} = Y_2^{(2)}$.

Решая эту систему относительно коэффициентов с индексом 1 получим:

$$A^{(1)} = A^{(2)} + \frac{1-2\sigma}{\pi \lambda} R (\pi \lambda A^{(2)} + C^{(2)}); \quad (1.16)$$

$$B^{(1)} = B^{(2)} + \frac{2\sigma}{\pi \lambda} R [\pi \lambda B^{(2)} - (2-4\sigma) D^{(2)}]; \quad (1.17)$$

$$C^{(1)} = C^{(2)} + R (\pi \lambda A^{(2)} + C^{(2)}); \quad (1.18)$$

$$D^{(1)} = D^{(2)} - R [\pi \lambda B^{(2)} - (2-4\sigma) D^{(2)}]. \quad (1.19)$$

где
$$R = \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right).$$

Таким образом, на основе использования условия на контакте, первоначальные восемь неизвестных постоянных привелись к четырем $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$. Последние определяются из условий на поверхности (1.1).

* Для простоты записи индексы kn в дальнейшем изложении опускаем.

Подставляя значения напряжений в (1.1) и используя (1.16) — (1.19), для определения $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \pi^2 \lambda^3 \{ \text{ch} \psi + R \psi \text{sh} \psi \} A^{(2)} - \pi^2 \lambda^3 \{ \text{sh} \psi - R (\psi \text{ch} \psi - \\ & \quad - \text{sh} \psi) \} B^{(2)} + \pi^2 \lambda^2 \{ |\psi \text{sh} \psi - (1 - 2\sigma) \text{ch} \psi | + \\ & \quad + R \psi \text{sh} \psi \} C^{(2)} - \pi^2 \lambda^2 \{ |\psi \text{ch} \psi - (1 - 2\sigma) \text{sh} \psi | - \\ & \quad - 2(2\sigma - 1) R (\psi \text{ch} \psi - \text{sh} \psi) \} D^{(2)} = \beta; \\ & - \pi \lambda^2 \{ \text{sh} \psi + R (\text{sh} \psi + \psi \text{ch} \psi) \} A^{(2)} + \pi \lambda^2 \{ \text{ch} \psi + \\ & \quad + R \psi \text{sh} \psi \} B^{(2)} - \lambda \{ (\psi \text{ch} \psi + 2\sigma \text{sh} \psi) + \\ & \quad + R (\text{sh} \psi + \psi \text{ch} \psi) \} C^{(2)} + \lambda \{ (\psi \text{sh} \psi + \\ & \quad + 2\sigma \text{ch} \psi - 2(2\sigma - 1) R \psi \text{sh} \psi \} D^{(2)} = 0; \\ & \pi^2 \lambda^3 \text{ch} \xi A^{(2)} + \pi^2 \lambda^3 \text{sh} \xi B^{(2)} + \pi^2 \lambda^2 \{ \xi \text{sh} \xi - \\ & \quad - (1 - 2\sigma) \text{ch} \xi \} C^{(2)} + \pi^2 \lambda^2 \{ \xi \text{ch} \xi - (1 - 2\sigma) \text{sh} \xi \} D^{(2)} = 0, \\ & \pi \lambda^2 \text{sh} \xi A^{(2)} + \pi \lambda^2 \text{ch} \xi B^{(2)} + \lambda \{ \xi \text{ch} \xi + \\ & \quad + 2\sigma \text{sh} \xi \} C^{(2)} + \lambda \{ \xi \text{sh} \xi + 2\sigma \text{ch} \xi \} D^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\psi = \pi \lambda \delta_1; \quad \xi = \pi \lambda \delta_2.$$

Шесть условий (1.1) привелись к четырем уравнениям (1.20) т. к. $X_2^{(1)} = Y_2^{(1)} = 0$ при $z = -\delta_1$, приводят к одинаковым уравнениям. То же имеет место для $X_2^{(2)} = Y_2^{(2)} = 0$ при $z = \delta_2$.

Решая систему (1.20) находим:

$$A^{(2)} = \frac{\Delta A^{(2)}}{\Delta}; \quad B^{(2)} = \frac{\Delta B^{(2)}}{\Delta}; \quad C^{(2)} = \frac{\Delta C^{(2)}}{\Delta}; \quad D^{(2)} = \frac{\Delta D^{(2)}}{\Delta} \quad (1.21)$$

где:

$$\begin{aligned} \Delta = & \pi^6 \lambda^6 \{ [\text{sh}^2 (\psi + \xi) - (\psi + \xi)^2] + \\ & + 4(1 - \sigma) R [\text{sh} \psi \text{ch} \xi \text{sh} (\psi + \xi) - (\psi + \xi) \psi + \\ & + \frac{1}{2(1 - \sigma)} (\xi^2 \text{sh}^2 \psi - \psi^2 \text{sh}^2 \xi)] + R^2 [(1 - 2\sigma)^2 + \xi^2 + \\ & + (3 - 4\sigma) \text{ch}^2 \xi] (\text{sh}^2 \psi - \psi^2) \}; \\ \Delta A^{(2)} = & \pi^3 \lambda^5 \beta \{ [(\psi \text{ch} \xi + 2\sigma \text{sh} \xi) \text{sh} (\psi + \xi) - \\ & - (\xi \text{ch} \psi + 2\sigma \text{sh} \psi) (\psi + \xi)] + \\ & + R \left[\frac{1}{2} (\text{sh} 2\xi - 2\xi) (\text{sh} \psi + \psi \text{ch} \psi) + \right. \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$+ [(4\sigma^2 - 2\sigma) + \xi^2 + (2 - 4\sigma) \operatorname{ch}^2 \xi] \psi \operatorname{sh} \psi \Bigg\}; \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_B^{(2)} = & -\pi^2 \lambda^2 \beta \{ [(2\sigma \operatorname{ch} \xi + \psi \operatorname{sh} \xi) \operatorname{sh}(\psi + \xi) + \\ & + (2\sigma \operatorname{ch} \psi + \xi \operatorname{sh} \psi) (\psi + \xi)] + \\ & + R [|-(1 - 2\sigma)^2 + \xi^2 + \operatorname{ch}^2 \xi| (\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) + \\ & + (1 - 2\sigma) (\operatorname{sh} 2\xi + 2\xi) \psi \operatorname{sh} \psi] \}; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta_C^{(2)} = & -\pi^2 \lambda^2 \beta \{ |\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(\psi + \xi) - (\psi + \xi) \operatorname{sh} \psi| + \\ & + R \left[\frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\xi - 2\xi) (\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) - \right. \\ & \left. - (1 - 2\sigma + \operatorname{ch}^2 \xi) \psi \operatorname{sh} \psi \right] \}; \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_D^{(2)} = & \pi^2 \lambda^2 \beta \left\{ \left[\operatorname{ch} \xi \operatorname{sh}(\psi + \xi) + (\psi + \xi) \operatorname{ch} \psi \right] + \right. \\ & + R [(1 - 2\sigma + \operatorname{ch}^2 \xi) (\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) - \\ & \left. - \frac{1}{2} \psi \operatorname{sh} \psi (2\xi + \operatorname{sh} 2\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Определив таким образом, коэффициенты $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$ из (1.16) — (1.19) находим $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, $D^{(1)}$. Далее могут быть найдены компоненты тензора напряжений и перемещения в любой точке плиты. В частном случае при $E_1 = E_2$, $\delta_1 = \delta_2$ получается решение Б. Г. Галеркина для изотропной толстой плиты.

2. *Свободно опертая двухслойная квадратная плита под нагрузкой, распределенной по закону синуса.* Рассмотрим квадратную двухслойную плиту с равными толщинами слоев. Положим, что нагрузка распределена по поверхности плиты согласно закону: $P(x, y) = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$, где P_0 — интенсивность нагрузки в центре плиты.

Для данной задачи в полученных выше результатах надо положить:

$$n = k = 1, \quad a = b, \quad \delta_1 = \delta_2 = \frac{h}{2}, \quad \sigma = 0,25.$$

Выражения напряжений X_x , Z_z , X_z и перемещений u , w примут вид:

$$\begin{aligned} X_x^{(j)} = & \left\{ A^{(j)} \frac{\pi^2}{a^2} \lambda \operatorname{ch} \alpha + B^{(j)} \frac{\pi^2}{a^2} \lambda \operatorname{sh} \alpha + C^{(j)} \left[\frac{\pi^2}{a^2} (\alpha \operatorname{sh} \alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{ch} \alpha) + 2\sigma \pi^2 \lambda^2 \operatorname{ch} \alpha \right] + D^{(j)} \left[\frac{\pi^2}{a^2} (\alpha \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ 2\sigma\pi^2\lambda^2 \operatorname{sh} z \left. \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (2.1)$$

$$Z_z^{(j)} = - \{ A^{(j)} \pi^3 \lambda^3 \operatorname{ch} z + B^{(j)} \pi^3 \lambda^3 \operatorname{sh} z + C^{(j)} \pi^2 \lambda^2 [\alpha \operatorname{sh} z - \\ - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} z] + D^{(j)} \pi^2 \lambda^2 [\alpha \operatorname{ch} z - \\ - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} z] \} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (2.2)$$

$$X_z^{(j)} = - \frac{\pi^2}{a^2} \{ A^{(j)} \pi \lambda^2 \operatorname{sh} z + B^{(j)} \pi \lambda^2 \operatorname{ch} z + C^{(j)} \lambda (\alpha \operatorname{ch} z + 2\sigma \operatorname{sh} z) + \\ + D^{(j)} \lambda (\alpha \operatorname{sh} z + 2\sigma \operatorname{ch} z) \} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (2.3)$$

$$u^{(j)} = - \frac{1 + \sigma}{E_j} \cdot \frac{\pi}{a} \{ A^{(j)} \pi \lambda \operatorname{ch} z + B^{(j)} \pi \lambda \operatorname{sh} z + C^{(j)} (\operatorname{ch} z + \\ + \alpha \operatorname{sh} z) + D^{(j)} (\operatorname{sh} z + \alpha \operatorname{ch} z) \} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (2.4)$$

$$w^{(j)} = - \frac{1 + \sigma}{E_j} \{ A^{(j)} \pi^2 \lambda^2 \operatorname{ch} z + B^{(j)} \pi^2 \lambda^2 \operatorname{sh} z + C^{(j)} \pi \lambda [\alpha \operatorname{ch} z - \\ - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{sh} z] + D^{(j)} \pi \lambda [\alpha \operatorname{sh} z - \\ - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{ch} z] \} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (2.5)$$

Коэффициенты определяем из (1.21) где:

$$\Delta = \pi^6 \lambda^8 \{ [\operatorname{sh}^2 2\psi - (2\psi)^2] + 2(1 - \sigma) R [\operatorname{sh}^2 2\psi - (2\psi)^2] + \\ + R^2 [(1 - 2\sigma)^2 + \psi^2 + (3 - 4\sigma) \operatorname{ch}^2 \psi] (\operatorname{sh}^2 \psi - \psi^2) \}, \quad (2.6)$$

$$\Delta_{A^{(2)}} = P_0 \pi^3 \lambda^6 \left\{ (\psi \operatorname{ch} \psi + 2\sigma \operatorname{sh} \psi) (\operatorname{sh} 2\psi - 2\psi) + \right. \\ \left. + R \left[\frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\psi - 2\psi) (\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) + ((4\sigma^2 - 2\sigma) + \right. \right. \\ \left. \left. + \psi^2 + (2 - 4\sigma) \operatorname{ch}^2 \psi) \psi \operatorname{sh} \psi \right] \right\}, \quad (2.7)$$

$$\Delta_{B^{(2)}} = - P_0 \pi^3 \lambda^6 \{ (\psi \operatorname{sh} \psi + 2\sigma \operatorname{ch} \psi) (\operatorname{sh} 2\psi + 2\psi) + \\ + R [(- (1 - 2\sigma)^2 + \psi^2 + \operatorname{ch}^2 \psi) (\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) + \\ + (1 - 2\sigma) (\operatorname{sh} 2\psi + 2\psi) \psi \operatorname{sh} \psi] \}, \quad (2.8)$$

$$\Delta_{C^{(2)}} = - P_0 \pi^4 \lambda^6 \left\{ (\operatorname{sh} 2\psi - 2\psi) \operatorname{sh} \psi + R \left[(\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) (\operatorname{sh} 2\psi - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\psi) \frac{1}{2} - (1 - 2\sigma + \operatorname{ch}^2 \psi) \psi \operatorname{sh} \psi \right] \right\}, \quad (2.9)$$

$$\Delta_D^{(2)} = P_0 \pi^4 \lambda^0 \left\{ (\operatorname{sh} 2\psi + 2\psi) \operatorname{ch} \psi + R \left[(1 - 2\tau + \operatorname{ch}^2 \psi) (\operatorname{sh} \psi + \psi \operatorname{ch} \psi) - \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\psi + 2\psi) \psi \operatorname{sh} \psi \right] \right\}. \quad (2.10)$$

Результаты произведенных расчетов приведены в таблицах. В

таблицах помещены значения величин $\frac{X_x \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right)}{P_0}$, $\frac{Z_z \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right)}{P_0}$, $\frac{X_z \left(0, \frac{a}{2}, z \right)}{P_0}$, вычисленных по формулам (2.1)–(2.3) и $\frac{E_1 \omega \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right)}{P_0 h}$ по формуле (2.5), при различных относительных размерах $\frac{h}{a}$ и отно-

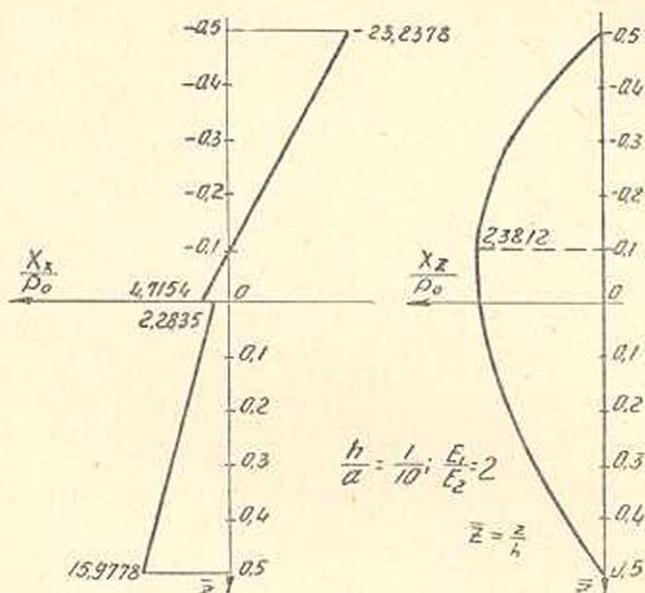
шениях модулей упругости слоев $\frac{E_1}{E_2}$. Для сравнения напряжений X_x и прогиба ω , в таблицах помещены значения соответствующих величин, полученных при наличии гипотезы Кирхгофа по формулам [2]:

$$\frac{X_x^{(0)}}{P_0} = \frac{E_1}{E_1} \cdot \frac{24(1+\sigma) \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right)}{\pi^4 \left[\left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2 + 14 \frac{E_2}{E_1} + 1 \right]} \times \\ \times \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{z}{h} - 0,5 + \frac{\frac{E_2}{E_1} + 3}{4 \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right)} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (2.11)$$

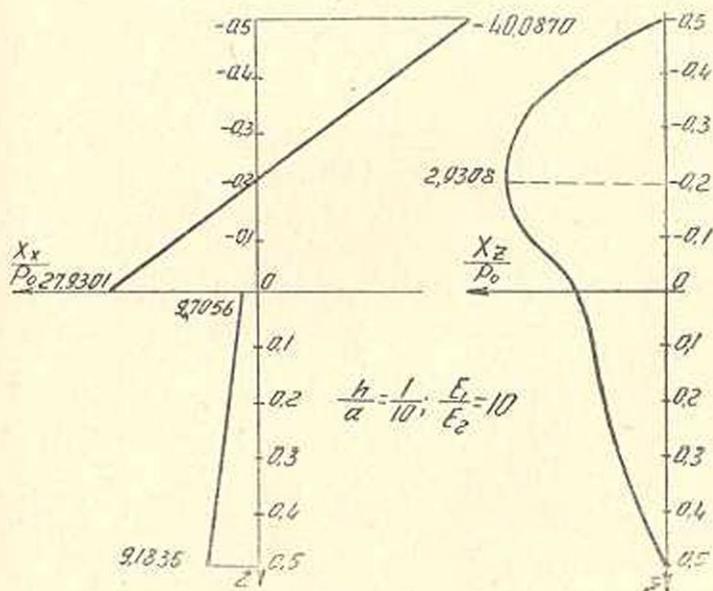
$$\frac{\omega^{(0)} E_1}{P_0 h} = \frac{24(1-\sigma^2)}{\pi^4} \cdot \frac{a^4}{h^4} \times \\ \times \frac{\frac{E_2}{E_1} + 1}{\left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2 + 14 \frac{E_2}{E_1} + 1} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (2.12)$$

Те же величины представлены графически на фиг. 1–6, где пунктирными линиями показаны решения при наличии гипотезы Кирхгофа (2.11), (2.12).

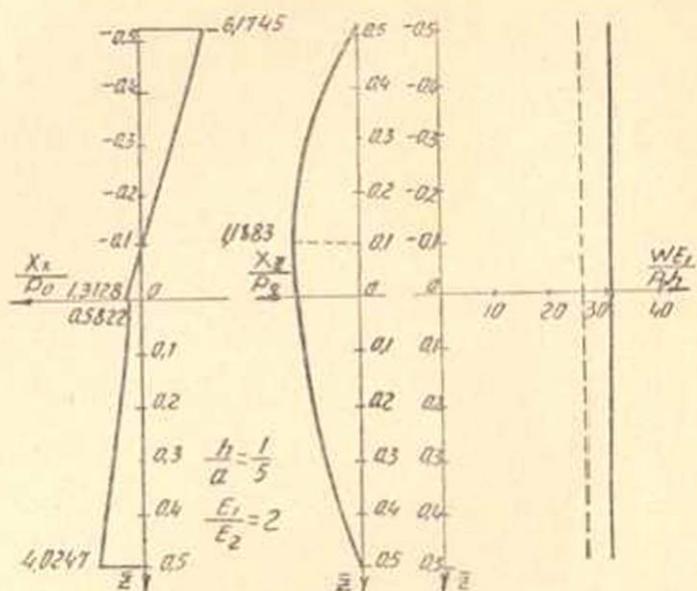
В таблице 4 приводятся значения $\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(0, \frac{a}{2}, z \right)$ и $\frac{\partial u}{\partial z} \left(0, \frac{a}{2}, z \right)$, позволяющие установить ошибку допущения $e_{xz} = e_{yz} = 0$, принимаемого в теории тонких плит.



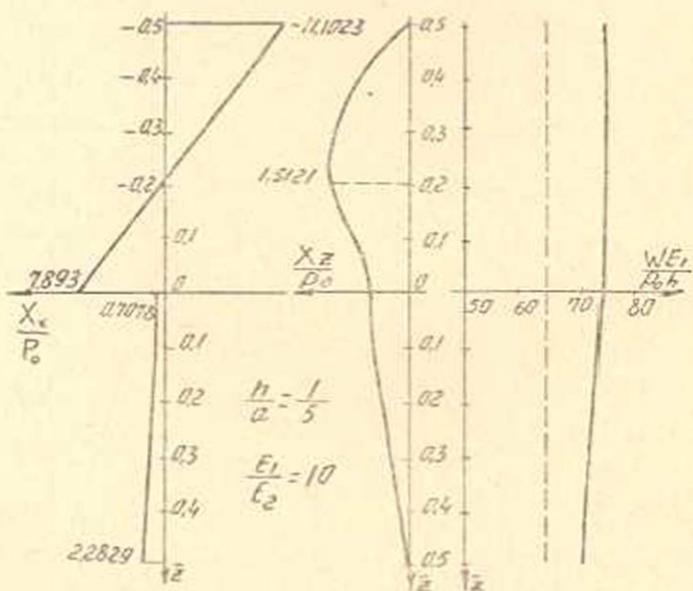
Фиг. 1.



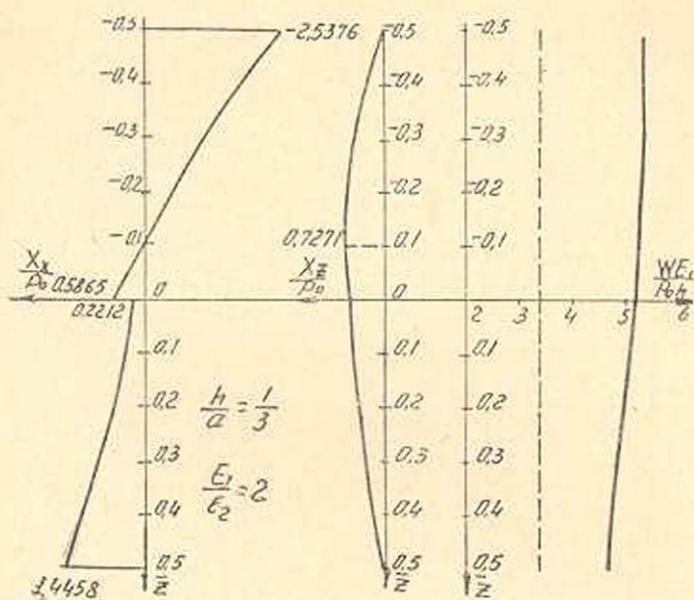
Фиг. 2.



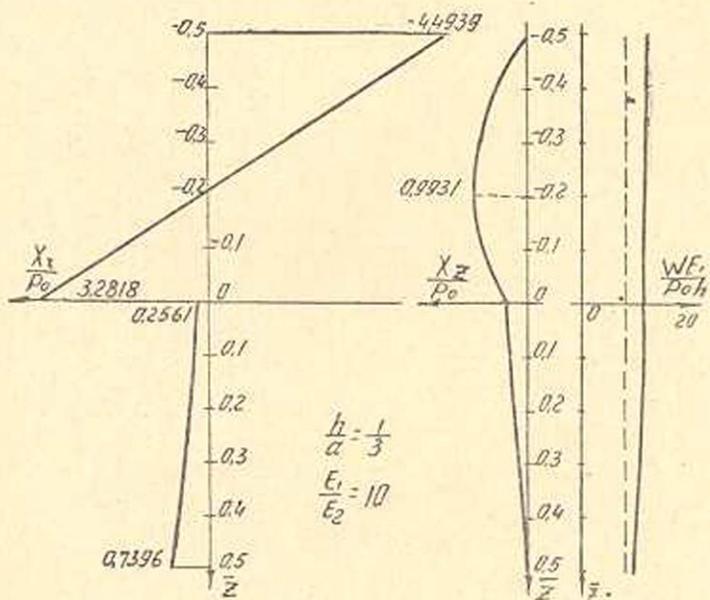
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Значения напряжений

Таблица 1

| z/h | $E_1 = 2$ | | | | | | $E_1 = 1$ | | | | | |
|-------|------------------------------|----------|-----------------------------|--------|-----------------------------|---------|------------------------------|--------|-----------------------------|---------|-----------------------------|--------|
| | $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$ | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$ | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ | |
| 0 | 4,4236 | 4,7154 | -0,4454 | 2,2803 | 1,1478 | 1,3128 | -0,4452 | 1,1349 | 0,3083 | 0,5965 | -0,4324 | 0,6659 |
| 0,1 | 4,9788 | 4,9665 | -0,3083 | 2,0959 | 1,2654 | 1,2184 | -0,3075 | 1,0402 | 0,4481 | 0,4187 | -0,2958 | 0,6047 |
| 0,2 | 7,7448 | 7,6736 | -0,1860 | 1,7764 | 1,9569 | 1,8706 | -0,1865 | 0,8821 | 0,6970 | 0,6301 | -0,1813 | 0,5122 |
| 0,3 | 10,5108 | 10,4023 | -0,0887 | 1,3217 | 2,6484 | 2,5493 | -0,0887 | 0,6584 | 0,9459 | 0,8648 | -0,0867 | 0,3846 |
| 0,4 | 13,2768 | 13,1655 | -0,0234 | 0,7727 | 3,3309 | 3,2634 | -0,0241 | 0,3660 | 1,1949 | 1,1330 | -0,0229 | 0,2107 |
| 0,5 | 16,0428 | 15,9778 | 0 | 0 | 4,0314 | 4,0247 | 0 | 0 | 1,4438 | 1,4438 | 0 | 0 |
| -0,1 | -23,2344 | -23,2378 | -1 | 0 | -5,7671 | -6,1749 | -1 | 0 | -2,0911 | -2,5376 | -1 | 0 |
| -0,4 | -17,7624 | -17,5621 | -0,9493 | 1,0148 | -4,3841 | -4,5837 | -0,9602 | 0,5273 | -1,5932 | -1,8051 | -0,9626 | 0,3440 |
| -0,3 | -12,1704 | -11,9535 | -0,8650 | 1,7485 | -3,0011 | -3,0620 | -0,8699 | 0,8905 | -1,6053 | -1,1520 | -0,8650 | 0,5709 |
| -0,2 | -6,6384 | -6,5812 | -0,7368 | 2,2041 | -1,6181 | -1,5855 | -0,7407 | 1,1227 | -0,5975 | -0,5522 | -0,7306 | 0,6965 |
| -0,1 | -1,1064 | -0,8255 | -0,5916 | 2,3812 | -0,2951 | -0,1350 | -0,5941 | 1,1883 | -0,0996 | 0,0193 | -0,5799 | 0,7271 |

Таблица 2

Значения напряжений

$$\frac{E_1}{E_2} = 10$$

| z/h | $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$ | | | | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ | | | | | $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ | | |
|-------|------------------------------|-------------------|-----------|-----------|------------------|-----------------------------|-----------|-----------|------------------|------------------|-----------------------------|-----------|--|
| | X'_x/P_0 | X_x/P_0 | Z_z/P_0 | X_z/P_0 | X''_x/P_0 | X_x/P_0 | Z_z/P_0 | X_z/P_0 | X'_x/P_0 | X_x/P_0 | Z_z/P_0 | X_z/P_0 | |
| -0,5 | -41,1038 | -40,0870 | -1 | 0 | -10,2766 | -11,1023 | -1 | 0 | -3,6996 | -4,4939 | -1 | 0 | |
| -0,4 | -27,2174 | -26,3949 | -0,8891 | 1,6533 | -6,8047 | -7,1999 | -0,9355 | 0,9063 | -2,4497 | -2,8229 | -0,9344 | 0,5957 | |
| -0,3 | -13,3309 | -12,870 | -0,7601 | 2,6320 | -3,3329 | -3,4054 | -0,7870 | 1,4277 | -1,1908 | -1,2720 | -0,7712 | 0,9195 | |
| -0,2 | 0,5555 | 0,7483 | -0,5755 | 2,9308 | 0,1389 | 0,3405 | -0,5932 | 1,5121 | 0,0499 | 0,2218 | -0,5667 | 0,9931 | |
| -0,1 | 14,4419 | 14,3306 | -0,4016 | 2,5482 | 3,6107 | 4,0870 | -0,4682 | 0,9215 | 1,2998 | 1,7193 | -0,3724 | 0,8211 | |
| 0 | 28,3283 2,8328 | 27,9301 2,7056 | -0,2746 | 1,4852 | 7,0825 0,7082 | 7,8930 0,7078 | -0,2717 | 0,7386 | 2,5497 0,2549 | 3,2818 0,2561 | -0,2403 | 0,3973 | |
| 0,1 | 4,2215 | 3,9634 | -0,1867 | 1,3161 | 1,0554 | 0,9869 | -0,1839 | 0,6506 | 0,3799 | 0,3223 | -0,1625 | 0,3447 | |
| 0,2 | 5,6101 | 5,2383 | -0,1110 | 1,0834 | 1,4026 | 1,2793 | -0,1094 | 0,5351 | 0,5049 | 0,3999 | -0,0967 | 0,2816 | |
| 0,3 | 6,9987 | 6,5289 | -0,0513 | 0,7869 | 1,7498 | 1,5898 | -0,0508 | 0,3899 | 0,6299 | 0,4925 | -0,0454 | 0,2057 | |
| 0,4 | 8,3874 | 7,8417 | -0,0143 | 0,4259 | 2,0969 | 1,9225 | -0,0128 | 0,2133 | 0,7549 | 0,6041 | -0,0117 | 0,1135 | |
| 0,5 | 9,7760 | 9,1835 | 0 | 0 | 2,4441 | 2,2829 | 0 | 0 | 0,8798 | 0,7396 | 0 | 0 | |

Примечание к таблицам 1 и 2.

В плоскости контакта $z = 0$ приведем значения $\frac{X_x}{P_0}$ для верхнего и нижнего слоев.

Значения $\frac{\omega E_1}{\rho_0 h}$

Таблица 3

| $\frac{E_1}{E_2} = 2$ | | | $\frac{E_1}{E_2} = 10$ | | |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--|
| $\frac{z}{h}$ | $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ | $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ | $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ | $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ | |
| -0,5 | 31,0086 | 5,3503 | 75,4721 | 11,9965 | |
| -0,4 | 31,1753 | 5,3636 | 75,8227 | 12,0809 | |
| -0,3 | 31,2746 | 5,3454 | 76,0013 | 12,0963 | |
| -0,2 | 31,3097 | 5,3079 | 76,0160 | 12,0563 | |
| -0,1 | 31,2859 | 5,2555 | 75,8478 | 11,9612 | |
| 0 | 31,2047 | 5,1899 | 75,5157 | 11,8067 | |
| 0,1 | 31,0396 | 5,0851 | 74,8651 | 11,4617 | |
| 0,2 | 30,8363 | 4,9852 | 74,1539 | 11,1534 | |
| 0,3 | 30,6851 | 4,8843 | 73,3594 | 10,8612 | |
| 0,4 | 30,2874 | 4,7744 | 72,4515 | 10,5610 | |
| 0,5 | 29,9253 | 4,6443 | 71,4061 | 10,2226 | |

по Кирхгофу 26,2472 по Кирхгофу 3,4016 по Кирхгофу 65,8897 по Кирхгофу 8,5393

При $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$ расхождения ω и ω_0 не превышают 4%

Таблица 4

| $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$ | | | | | | |
|------------------------------|---|--|---|---|--|---|
| $\frac{E_1}{E_2} = 2$ | | | $\frac{E_1}{E_2} = 10$ | | | |
| $\frac{z}{h}$ | $\frac{E_1 a}{\rho_0 h} \frac{\partial \omega}{\partial x}$ | $\frac{E_1 a}{\rho_0 h} \frac{\partial u}{\partial z}$ | $\frac{e_{xz}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}}$ | $\frac{E_1 a}{\rho_0 h} \frac{\partial \omega}{\partial x}$ | $\frac{E_1 a}{\rho_0 h} \frac{\partial u}{\partial z}$ | $\frac{e_{xz}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}}$ |
| -0,5 | 1364,6951 | -1364,6853 | 0 | 3285,4616 | -3285,7876 | 0 |
| 0 | 1370,6424 | -1313,6672 | 4,16% | 3289,0443 | -3251,9882 | 1,13% |
| 0 | 1370,6424 | -1256,6935 | 8,31% | 3289,0443 | -2917,8305 | 11,28% |
| 0,5 | 1355,9837 | -1356,1202 | 0 | 3240,9261 | -3241,7786 | 0 |

| $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ | | | | | | |
|-----------------------------|---------|----------|--------|----------|-----------|--------|
| -0,5 | 97,4164 | -97,4233 | 0 | 237,1024 | -237,1096 | 0 |
| 0 | 98,0323 | -83,8473 | 14,46% | 237,2395 | -228,0123 | 3,89% |
| 0 | 98,0323 | -69,6502 | 28,95% | 237,2395 | -144,9193 | 38,91% |
| 0,5 | 94,0127 | -94,0137 | 0 | 224,3287 | -224,0623 | 0 |

| $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ | | | | | | |
|-----------------------------|---------|----------|--------|---------|----------|--------|
| -0,5 | 16,8083 | -16,8093 | 0 | 37,6880 | -37,6705 | 0 |
| 0 | 16,3047 | -11,3110 | 30,62% | 37,0919 | -34,1145 | 8,03% |
| 0 | 16,3047 | -6,3170 | 61,25% | 37,0919 | -7,3039 | 80,30% |
| 0,5 | 14,5906 | -14,5834 | 0 | 32,1152 | -32,0235 | 0 |

Приведенные в таблицах результаты вычислений показывают следующее:

1. Нормальное напряжение X_x , претерпевая разрыв на контакте, по высоте плиты меняется линейно для отношений $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ и по кривой для случая $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$, причем как показывают фиг. 1—6 при $\frac{E_1}{E_2} = 2$ закон изменения напряжения X_x более отличен от линейного, чем при $\frac{E_1}{E_2} = 10$.

В таблице 5 приведены расхождения максимальных значений X_x и X_x^* .

2. Максимальное значение нормального напряжения Z_z составляет от максимального значения X_x следующие величины (таблица 6). Как показывают фигуры 1—6 и таблица 6 предел отношения $\frac{h}{a}$, до которого можно пренебрегать Z_z по отношению к X_x , для случая $\frac{E_1}{E_2} = 10$ выше, чем при $\frac{E_1}{E_2} = 2$.

Таблица 5

| $\frac{h/a}{E_1/E_2}$ | 1/10 | 1/5 | 1/3 |
|-----------------------|--------|-------|--------|
| 2 | 0,014% | 6,6% | 17,59% |
| 10 | 2,53% | 7,44% | 17,67% |

Таблица 6

| $\frac{h/a}{E_1/E_2}$ | 1/10 | 1/5 | 1/3 |
|-----------------------|-------|-------|-------|
| 2 | 4,3% | 16,2% | 39,3% |
| 10 | 2,49% | 9% | 22,3% |

3. Напряжение X_z принимает максимальное значение в слое с большим модулем упругости; с увеличением отношения модулей упругости слоев этот максимум перемещается к плоскости $z = \frac{h}{4}$ этого слоя.

4. Сравнение значений ω с ω_0 показывает, что теория изгиба тонких плит при отношениях $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$ дает для прогиба существенно заниженные значения.

В таблице 7 приводятся результаты сравнения расхождений наименьшего и наибольшего значений прогиба ω с прогибом ω_0 .

5. Как показывает таблица 4 для отношений $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$ допущение $e_{xz} = e_{yz} = 0$ может привести к значительным погрешностям, в то время как предположение $e_{zz} = 0$ (табл. 3) допустимо для отношений

$\frac{h}{a} < \frac{1}{3}$. Это подтверждается также значениями прогибов (таблица 8), вычисленными для рассматриваемого случая по гипотезе [3], где принимается $e_{xz} \neq 0$, $e_{yz} \neq 0$, $e_{zz} = 0$.

Таблица 7

| $\frac{h/a}{E_1/E_2}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ |
|-----------------------|---------------|---------------|
| 2 | 12,3—16,3%/о | 26,7—36,3%/о |
| 10 | 7—13,15%/о | 16,6—29,4%/о |

Таблица 8

| $\frac{h/a}{E_1/E_2}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ |
|-----------------------|---------------|---------------|
| 2 | 31,649 | 5,345 |
| 10 | 76,270 | 12,275 |

В заключение отметим, что если для однослойной плиты критерием применимости теории изгиба тонких плит является некоторое предельное отношение $\frac{h}{a}$, то для двухслойной плиты этого отношения недостаточно. На напряженное состояние оказывает влияние отношение модулей упругости слоев.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 26 VIII 1958

Ա. Պ. ՄԵԼԿՈՅԱՆԻ

ԵՐԿՇԵՐՏ ՀԱՍՏ ՍԱԼԻ ԾՈՒՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկված է ազատ հենված ուղղանկյուն կտրվածքով երկ-
շերտ հաստ սալի ծաման խնդիրը: Ծիրտերի նյութերի առաձգականության մո-
դուլները տարբեր են, բայց հաստատուն են լուրջ քանակությամբ շերտի համար:
Ենթադրվում է նաև, որ Պուասսոնի գործակիցը երկու շերտի համար էլ միև-
նույնն է: Մասնավոր դեպքում լուծված է քառակուսի սալի ծաման խնդիրը
տարբեր հարաբերական չափերի և շերտերի առաձգականության մոդուլների
տարբեր հարաբերությունների համար: ԸՇղրիտ լուծման արդյունքները համե-
մատվում են բարակ սալերի ծաման տեսությունից ստացված արդյունքների
հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, том 1, 1952.
2. Амбарцумян С. А. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ), VI, 5, 1953.
3. Амбарцумян С. А. Известия АН СССР ОТН, 7, 1957.

Н. Х. Арутюнян

Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала.

Согласно упругой аналогии решение этой задачи тождественно решению плоской контактной задачи нелинейной теории упругости, при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, когда последние развиваются в определенном направлении.

Предварительно, в § 1, решается непосредственно в перемещениях, задача о пластическом равновесии полуплоскости со степенным упрочнением материала, находящейся под действием сосредоточенной силы, приложенной нормально к ее свободной поверхности.

Далее, пользуясь этим решением, в § 2 доказываем, что, решение плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала сводится к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2.17) с ядром $K(t, x) = |t - x|^{\mu-1}$ ($0 < \mu < 1$).

Пользуясь методом, предложенным М. Г. Крейнсом [1] для решения интегральных уравнений первого и второго рода с ядром вида $K(t, x) = H(|t - x|)$, решение основного интегрального уравнения контактной задачи (2.17) для пластичности со степенным упрочнением можно представить в замкнутой форме как для случая симметричного, так и кососимметричного нагружения сжимаемых тел.

В качестве приложения рассматривается контактная задача о давлении жесткого штампа с плоским основанием на нелинейно-упругую полуплоскость под действием сосредоточенной силы P или момента M_0 , приложенных к середине штампа.

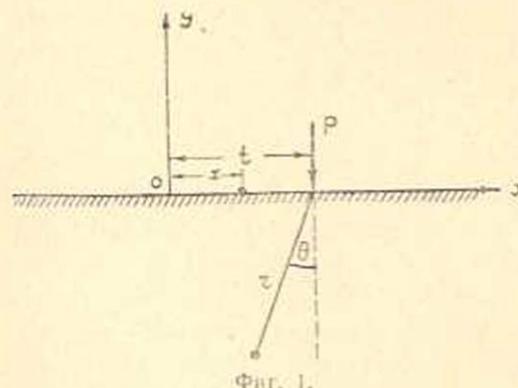
Отметим, что предложенный здесь метод решения контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением нетрудно распространить на весьма важную для практики задачу о контакте двух сжимаемых тел в условиях установившейся ползучести; при степенном законе связи между скоростями деформаций и напряжений ползучести.

§ 1. Равновесие полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной к ее свободной поверхности

Рассмотрим задачу о пластическом равновесии полуплоскости, нагруженной вертикальной сосредоточенной силой, приложенной к ее свободной поверхности, при наличии степенного упрочнения материала (фиг. 1). Эта задача в условиях плоской деформации, в напряжениях, была решена В. В. Соколовским [2], который нашел распределение напряжений, и деформаций в полуплоскости при одновременном действии вертикальной и горизонтальной сил, приложенных к ее поверхности.

Однако задача определения перемещений в рассматриваемой полуплоскости по заданным компонентам деформаций, приведенная в работе [2], сводится к решению дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, которое в замкнутой форме не интегрируется. Поэтому в этом параграфе дается решение этой же задачи непосредственно в перемещениях, так как именно в такой форме оно нам понадобится в дальнейшем при исследовании плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала.

Воспользуемся уравнениями теории упруго-пластических деформаций при плоском деформированном состоянии тела в форме



Фиг. 1.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_r - \sigma), \quad \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_\theta - \sigma), \quad (1.1)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{r\theta}, \quad \varepsilon_z = 0,$$

где

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (1.2)$$

написанной в предположении о несжимаемости материала

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0. \quad (1.3)$$

В зависимости (1.1) через ε_i обозначена интенсивность касательных напряжений

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{r\theta}^2}, \quad (1.4)$$

а через ε_i — интенсивность деформаций сдвига

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + 6\gamma_{r\theta}^2}. \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах (r, θ, z) применительно к этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [r\sigma_r] + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Зависимости между компонентами деформаций и компонентами смещений

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где u , v и w — компоненты перемещений вдоль направлений координат r , θ и z , дают дифференциальное уравнение совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r} - r \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} - 2r \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad (1.8)$$

Граничными условиями задачи являются

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (1.9)$$

т. е. на свободной поверхности полуплоскости отсутствуют внешние условия.

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде степенной зависимости между σ_i и ϵ_i :

$$\sigma_i = K \epsilon_i^\mu, \quad (1.10)$$

где K и μ — физические константы, причем $0 < \mu < 1$, так как кривая деформаций (1.10) для реальных материалов в состоянии упрочнения обращена всегда вогнутостью вниз. При $K = \frac{2}{3} E$ и $\mu = 1$ имеем обычный закон Гука для идеально-упругого тела.

Будем искать точное решение поставленной задачи в перемещениях в следующей форме:

$$\begin{aligned} u &= x [f_1(r) \mathcal{Z}'(\theta) + f_1(\theta)], \\ v &= x [f_2(r) \mathcal{Z}(\theta) - f_0(\theta)], \\ \omega_z &= 0, \quad x = \pm 1, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\mathcal{Z}(\theta)$ и $f_0(\theta)$ — некоторые однозначные и непрерывные функции, подлежащие определению во всей полуплоскости $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $r > 0$.

Из первых двух соотношений (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= x f_1'(r) \mathcal{Z}'(\theta), \\ \epsilon_\theta &= x \frac{1}{r} [f_2(r) + f_1(r)] \mathcal{Z}'(\theta). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Пользуясь соотношениями (1.12) и условием несжимаемости материала (1.3), находим

$$f_2(r) = -[f_1'(r) \cdot r + f_1(r)]. \quad (1.13)$$

Положим, что касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ во всей полуплоскости равно нулю. Тогда, в силу (1.1) и (1.7), будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \quad (1.14)$$

Подставляя в (1.14) выражения для компонентов перемещений и их производных из (1.11) и пользуясь равенством (1.13), для определения функций $f_0(\theta)$, $Z(\theta)$ и $f_1(r)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$f_0''(\theta) + f_0(\theta) = 0, \quad (1.15)$$

$$Z''(\theta) + \lambda^2 Z(\theta) = 0,$$

и

$$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) - f_1(r) [1 - \lambda^2] = 0, \quad (1.16)$$

где λ — параметр, подлежащий определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (1.16) есть

$$f_1(r) = C_1 r^{1-\lambda^2} + C_2 r^{-1-\lambda^2} \quad (1.17)$$

при $-\infty < \lambda^2 < 1$,

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Принимая очевидное условие, что при $r \rightarrow \infty$ перемещения u и v должны быть конечными, в силу соотношений (1.11), (1.13) и (1.17) получим, что $C_1 = 0$. Тогда выражение (1.17) для $f_1(r)$ примет вид

$$f_1(r) = r^{-1-\lambda^2} \quad (-\infty < \lambda^2 < 1), \quad (1.18)$$

где для простоты дальнейших выкладок принято $C_2 = 1$.

Пользуясь выражениями (1.7), (1.12), (1.13), (1.14) и (1.18) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\lambda \sqrt{1-\lambda^2} r^{-(1+\lambda^2)} Z'(\theta), \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

при этом функция $Z(\theta)$ является решением уравнения (1.15).

Интенсивность деформаций сдвига ε_s в силу соотношений (1.5) и (1.19) будет

$$\varepsilon_s = |\varepsilon_r| = \lambda \sqrt{1-\lambda^2} r^{-(1+\lambda^2)} Z'(\theta), \quad (1.20)$$

а интенсивность касательных напряжений σ_s , равная согласно (1.4), (1.2) и (1.14) $\sigma_s = \frac{1}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta|$, вследствие степенного условия пластичности с упрочнением (1.10) определится формулой

$$\sigma_z = \frac{1}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta| = K \left\{ \sqrt{1 - \lambda^2} r^{-(1+\nu\sqrt{1-\lambda^2})} \chi'(\theta) \right\}^\mu, \quad (1.21)$$

откуда

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \alpha 2K \left\{ \sqrt{1 - \lambda^2} r^{-(1+\nu\sqrt{1-\lambda^2})} \chi'(\theta) \right\}^\mu. \quad (1.22)$$

Полученные выражения (1.19), (1.20), (1.21) и (1.22) для компонентов деформаций и напряжений, в силу равенств (1.10), (1.19) и (1.15), тождественно удовлетворят как уравнению пластичности (1.1), так и уравнению совместности деформаций (1.8).

Подставляя выражения для компонентов напряжения из (1.22) в уравнения равновесия (1.6) и учитывая, что $\tau_{r\theta} = 0$, находим, что эти уравнения будут удовлетворяться, если положить

$$\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{1}{\mu} - 1, \quad (1.23)$$

$$\sigma_\theta = \text{const.}$$

Но на свободной поверхности полуплоскости напряжения отсутствуют, т. е.

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Это условие будет совместимо с (1.23) только в том случае, если принять $\sigma_\theta = 0$ повсюду. Тогда (1.23) примет вид

$$\lambda^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \quad (1.24)$$

$$\sigma_\theta = 0.$$

Приравняв компонент главного вектора усилия, действующего в любом сечении полуплоскости, ограниченной цилиндрической поверхностью $r = \text{const}$, заданной вертикальной силой P , получим равенство, которому должно удовлетворить напряжение σ_r ,

$$P = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cdot \cos \theta \cdot r d\theta. \quad (1.25)$$

Из соотношений (1.24) следует, что, при $0 < \mu < 1$, параметр λ^2 изменяется в пределах $-\infty < \lambda^2 \leq 1$, причем знак равенства $\mu = \lambda^2 = 1$ соответствует, согласно (1.10), случаю равновесия упругой полуплоскости.

Перейдем к определению смещений u и v в полуплоскости.

Решение первого дифференциального уравнения (1.15) есть

$$f_0(\theta) = C_5 \cos \theta + C_6 \sin \theta. \quad (1.26)$$

Решение второго дифференциального уравнения (1.15) будет иметь

различный вид в зависимости от значения μ . Для $\mu = \frac{1}{2}$, $\chi(\theta)$ есть линейная функция

$$\chi(\theta) = C_3 + C_4\theta, \quad (1.27)$$

а при $\mu \neq \frac{1}{2}$, $\chi(\theta)$ выражается, через тригонометрические или гиперболические функции, следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(\theta) &= C_3 \cos \lambda\theta + C_4 \sin \lambda\theta & \mu > \frac{1}{2}, \\ \chi(\theta) &= C_3 \operatorname{ch} \lambda\theta + C_4 \operatorname{sh} \lambda\theta & \mu < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где $\lambda^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}$, а C_3 , C_4 , C_5 и C_6 — постоянные интегрирования.

Положим, что рассматриваемая полуплоскость не смещается в горизонтальном направлении и не поворачивается, так что, при

$$\theta = 0, \quad v = 0. \quad (1.29)$$

Тогда согласно (1.11), (1.26), (1.27) и (1.28) будем иметь

$$C_3 = C_5 = 0, \quad (1.30)$$

и выражения (1.26), (1.27), (1.28) для функций $f_0(\theta)$ и $\chi(\theta)$ примут вид:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= C_6 \sin \theta, \\ \chi(\theta) &= C_4 \theta & \mu = \frac{1}{2}, \\ \chi(\theta) &= C_4 \sin l\theta & \mu > \frac{1}{2}, \\ \chi(\theta) &= C_4 \operatorname{sh} \beta\theta & \mu < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где l и β связаны с μ так:

$$l^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \quad \beta^2 = \frac{1 - 2\mu}{\mu^2}.$$

Теперь, пользуясь равенствами (1.22), (1.25) и (1.31), определим значения постоянной C_4 . Будем иметь

$$C_4 = \frac{\rho^m}{K^m (m-1) J^m(\mu)}, \quad (1.32)$$

где положено

$$m = \frac{1}{\mu}, \quad z = -1$$

$$J(\mu) = 4 \quad \mu = \frac{1}{2}$$

$$J(\mu) = 4l^{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos l\theta)^{\mu} \cos \theta d\theta \quad \mu > \frac{1}{2}, \quad (1.33)$$

$$J(\mu) = 4\beta^{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ch} \beta\theta)^{\mu} \cos \theta d\theta \quad \mu < \frac{1}{2}.$$

K и μ — физические константы, которыми характеризуется, согласно (1.10), модуль пластичности материала.

Подставляя в соотношения (1.11) выражения функций $\chi(\theta)$, $f_0(\theta)$, $f_1(r)$ и $f_2(r)$ и их производных из (1.31), (1.18) и (1.13), после некоторых преобразований, получим, для определения перемещений, следующие формулы:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\rho^m}{K^m(m-1)J^m(\mu)} r^{1-m} \eta'(\theta, \mu) - C_6 \cos \theta, \\ v &= \frac{(2-m)\rho^m}{K^m(m-1)J^m(\mu)} r^{1-m} \eta(\theta, \mu) + C_6 \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \mu) &= \theta & \mu &= \frac{1}{2}, \\ \eta(\theta, \mu) &= \sin l\theta & \mu &> \frac{1}{2}, \\ \eta(\theta, \mu) &= \operatorname{sh} \beta\theta & \mu &< \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.35)$$

и использовано значение C_4 согласно формуле (1.32).

Перемещения точек границы полуплоскости, т. е. при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$,

будут

$$\begin{aligned} [u]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= [u]_{\theta=+\frac{\pi}{2}} = B \cdot \rho^m r^{1-m}, \\ [v]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= -[v]_{\theta=+\frac{\pi}{2}} = A \rho^m r^{1-m} + C, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где положено

$$\begin{aligned} A &= 0; & B &= -\frac{1}{16K^2} & \mu &= \frac{1}{2}, \\ A &= \frac{(m-2) \sin \frac{l\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)}; & B &= -\frac{l \cos \frac{l\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)} & \mu &> \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$A = \frac{(m-2) \operatorname{sh} \beta \frac{\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)}; \quad B = -\frac{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{\pi}{2}}{K^m(m-1)J^m(\mu)} \quad \mu < \frac{1}{2}.$$

Полученные выше формулы справедливы, когда материал находится в состоянии упрочнения, т. е. при $0 < \mu < 1$.

Отметим, что, как следует из формул (1.36) и (1.37), при квадратичном законе нелинейности, т. е. когда $\varepsilon_i = \left(\frac{\sigma_i}{K}\right)^2$ ($\mu = \frac{1}{2}$, $m = 2$), все точки границы полуплоскости в вертикальном направлении имеют только жесткие смещения, равные $v|_{\frac{\pi}{2}} = -v|_{-\frac{\pi}{2}} = C$.

Пользуясь соотношениями (1.22), (1.24), (1.31) и (1.32), для напряжения σ_r получим следующую формулу

$$\sigma_r = -\frac{2P [\gamma'(\theta, \mu)]^{\mu}}{rJ(\mu)}, \quad (1.38)$$

которая совпадает с формулой, полученной В. В. Соколовским [2] другим путем.

В заключение рассмотрим случай, когда $K = \frac{2}{3}E$ (E — модуль упругости материала полуплоскости) и $\lambda^2 = \mu = 1$, что соответствует задаче и равновесию несжимаемой упругой полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой.

В этом случае общий интеграл уравнений (1.16) и (1.15) при выполнении условий (1.29) будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_1(r) &= C_1 + C_2 \ln r, \\ \chi(\theta) &= C_4 \sin \theta, \\ f_0(\theta) &= C_6 \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Подставляя эти значения $f_1(r)$, $\chi(\theta)$ и $f_0(\theta)$ в выражения (1.11) и (1.22) и пользуясь условием (1.25), получим известные [3] из теории упругости формулы для компонентов перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{3P}{2\pi E} \ln r \cdot \cos \theta + C \cos \theta, \\ v &= \frac{3P}{2\pi E} \ln r \cdot \sin \theta + \frac{3P}{2\pi E} \sin \theta - C \sin \theta, \\ \sigma_r &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где C — некоторая новая постоянная, равная $C = -(C_1 C_4 + C_6)$.

§ 2. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала

1°. *Постановка задачи и вывод основного уравнения.* При решении задачи о пластическом равновесии полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой P , мы исходили из уравнения теории упруго-пластических деформаций, которое, как известно [4], с достаточной полнотой описывает пластические деформации при простом нагружении, что, в данном случае, имеет и место.

Термодинамический анализ показывает [5], что уравнения теории упруго-пластических деформаций с условиями текучести Мизеса, или условиями упрочнения материала, по своей структуре, являются уравнениями состояния нелинейно-упругого тела.

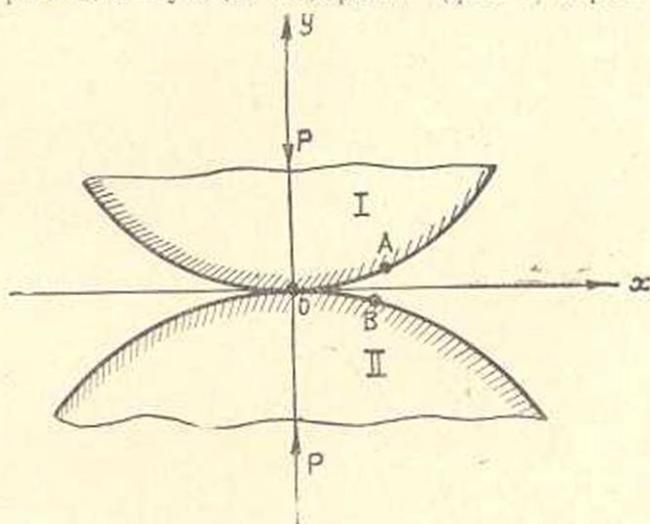
Поэтому решение нелинейно-упругой задачи для тела, подчиняющегося закону напряжений-деформаций, выраженному уравнением (1.10), тождественно решению задачи пластичности для этого же тела со степенным упрочнением материала, если деформации в нем развиваются в определенном направлении.

Принимая за основу нелинейно-упругую аналогию, ниже дается, в общем виде, решение задачи о контакте двух тел, ограниченных плавными поверхностями и подчиняющихся нелинейно упругому закону (1.10).

Пусть два соприкасающихся между собой в точке, или по линии, нелинейно-упругих тела прижимаются затем одно к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых P (фиг. 2) перпендикулярна к оси ox и проходит через начало координат O .

Установим соотношения, которым должны удовлетворять перемещения точек области контакта сжимаемых тел.

Положим, что уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела до деформаций, таковы



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} y &= f_1^0(x), \\ y &= -f_2^0(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поместим начало координат в точке первоначального касания тел, а оси ox и oy направим, как показано на фиг. 2. Под действием внеш-

них сил первое тело получит перемещение δ_1 , а второе тело — перемещение δ_2 . Кроме того, точка A , расположенная на поверхности первого тела, и вступающая с ней в контакт точка B второго тела, в результате происшедшей деформации, получают, соответственно, перемещения v_1 и v_2 в направлении оси ou .

Но координаты точек A и B после вступления их в контакт становятся одинаковыми, что позволяет установить следующие соотношения, связывающие перемещения точек обоих тел

$$v_1 - \delta_1 + f_1^*(x - u_1) = -v_2 + \delta_2 - f_2^*(x + u_2). \quad (2.2)$$

Рассматривая лишь малые перемещения, можно в (2.2) положить

$$f_1^*(x - u_1) \approx f_1^*(x) \quad \text{и} \quad f_2^*(x + u_2) \approx f_2^*(x).$$

Тогда, для перемещений точек контакта этих тел, получим следующие условия

$$v_1 + v_2 = \delta - f_1^*(x) - f_2^*(x), \quad (2.3)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ — сближение этих тел в направлении оси ou .

Будем полагать, далее, что трение между сжимаемыми телами отсутствует. Тогда на участке контакта каждое из этих тел будет испытывать лишь только нормальное давление, которое обозначим через $p(x)$. Но обычно область контакта бывает мала по сравнению с размерами сжимаемых тел, поэтому можно считать, что перемещения на участке контакта этих тел будут такими же, как у граничных точек двух полуплоскостей (верхней и нижней), находящихся под действием того же нормального давления $p(x)$, что и рассматриваемые сжимаемые тела [6, 7].

Разобьем эпюру давления $p(x)$, действующего на участке контакта S ($a < x < b$), на элементарные полоски шириной Δt_i и высотой $p(t_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) и рассмотрим действие одной из этих полосок (например i -ой) на нижнюю полуплоскость.

Если в точке $x = t_i$ к границе полуплоскости приложена нормальная к ней сосредоточенная сила $P_i = p(t_i) \Delta t_i$, то граничная точка этой полуплоскости с координатой x получит перемещение в направлении оси ou v , определяемое согласно (1.36) формулой

$$v = A |t_i - x|^{1-m} P_i^m + C, \quad (2.4)$$

или, в другой форме,

$$v^* = h_i p(t_i) \Delta t_i, \quad (2.5)$$

где положено

$$\begin{aligned} h_i &= A^m |t_i - x|^{m-1}, \\ v^* &= (v - C)^m, \\ m &= \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В дальнейшем $v^*(x)$ будем называть обобщенным перемещением точек границы полуплоскости.

При одновременном действии системы сил $P_i = p(t_i) \Delta t_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) обобщенное перемещение $v^*(x)$ произвольной точки границы полуплоскости с абсциссой x ($a < x < b$) будет в общем случае некоторой функцией от этих сил $v^* = v^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$, которую можно представить в виде ряда

$$v^* = \sum_{j=1}^{j=n} C_j p(t_j) \Delta t_j + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=n} C_{jk} p(t_k) p(t_j) \Delta t_k \Delta t_j + \\ + \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=n} C_{sjk} p(t_j) p(t_k) p(t_s) \Delta t_j \Delta t_k \Delta t_s + \dots \quad (2.7)$$

где C_j , C_{jk} и C_{sjk} — некоторые коэффициенты, зависящие от x и t_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а также физических констант K и μ .

Но с другой стороны, при действии только одной силы, т. е. когда $P_j = 0$ при $j \neq i$ и $P_j = P_i$, при $j = i$ выражения (2.7) для v^* должны тождественно совпадать с точным решением этой задачи, определяемой формулой (2.5). В силу этого будем иметь

$$C_i = h_i, \quad C_{ii} = 0, \quad C_{iii} = 0 \quad (2.8)$$

и выражение (2.7) для обобщенного перемещения v^* примет вид

$$v^* = \sum_{j=1}^{j=n} h_j p(t_j) \Delta t_j + \sum_{j+k}^n C_{jk} p(t_j) p(t_k) \Delta t_j \Delta t_k + \dots \\ (j, k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.9)$$

Вследствие малости участка контакта S ($a < x < b$), с той степенью точности, которая принята здесь при решении данной задачи, можно в выражении (2.9) для обобщенного перемещения v^* ограничиться главным членом разложения. Тогда из выражения (2.9), после перехода к пределу ($\Delta t_i \rightarrow 0$), получим

$$v^* = A^\mu \int_S \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}}, \quad (2.10)$$

где интегрирование производится по всему участку контакта S .

Пользуясь соотношениями (2.6) и (2.10), для определения перемещений v точек контакта, получим следующую формулу

$$v = A \left[\int_S \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} \right]^m + C, \quad (2.11)$$

где $m = \frac{1}{\mu}$, а постоянная A определяется согласно (1.37).

Если это же нормальное давление $p(x)$ будет действовать на границе верхней полуплоскости, то граничная точка с абсциссой x получит в направлении оси ou перемещение v , равное

$$v = -A \left[\int_S \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} \right]^m + C. \quad (2.12)$$

Таким образом, выражения для перемещений v_1 и v_2 согласно (2.11) и (2.12) будут *

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \left[\int_S \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} \right]^m + C_1, \\ -v_2 &= -A_2 \left[\int_S \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} \right]^m + C_2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(m-2) \sin \frac{l\pi}{2}}{K_1^m (m-1) J^m(\mu)} \\ A_2 &= \frac{(m-2) \sin \frac{l\pi}{2}}{K_2^m (m-1) J^m(\mu)} \end{aligned} \quad \mu > \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(m-2) \operatorname{sh} \beta \frac{\pi}{2}}{K_1^m (m-1) J^m(\mu)} \\ A_2 &= \frac{(m-2) \operatorname{sh} \beta \frac{\pi}{2}}{K_2^m (m-1) J^m(\mu)} \end{aligned} \quad \mu < \frac{1}{2},$$

$$A_1 = A_2 = 0 \quad \mu = \frac{1}{2},$$

а K_1 и K_2 — физические постоянные, которыми определяется модуль пластичности материалов первого и второго тела при одинаковом показателе μ .

Подставляя выражения для v_1 и v_2 из (2.13) в условия (2.3), для определения давления $p(x)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_S \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} = F(x, \tau), \quad (2.15)$$

где

$$F(x, \gamma) = [\gamma - f_0(x)]^2, \quad (2.16)$$

$$f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2},$$

а γ — некоторая произвольная постоянная, подлежащая определению в дальнейшем.

Таким образом, сингулярное интегральное уравнение (2.15) является основным уравнением плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала или нелинейной теории упругости при степенном законе связи между деформациями и напряжениями (1.10).

2°. *Решение основного интегрального уравнения плоской контактной задачи для пластичности со степенным упрочнением.* Пусть первоначальное касание сжимаемых тел в плоскости xoy происходит в одной точке, которую примем за начало координат (фиг. 2). Положим, далее, что областью контакта S между этими телами после их сжатия является отрезок оси ox , $-a \leq x \leq a$.

Тогда основное интегральное уравнение (2.15) плоской контактной задачи примет вид

$$\int_{-a}^{+a} \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} = F(x, \gamma) \quad (0 < \mu < 1), \quad (2.17)$$

где

$$F(x, \gamma) = [\gamma - f_0(x)]^2, \quad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}. \quad (2.18)$$

В интегральном уравнении (2.17) $-a \leq x, t \leq a$ и $0 < \mu < 1$, а $F(x, \gamma)$ — непрерывная функция; ограничения, налагаемые на нее, будут уточнены в дальнейшем.

Уравнение (2.17) впервые было изучено Карлеманом [8]. В недавно опубликованной работе Н. И. Ахизера и В. А. Шербиной [9] дан другой способ решения этого уравнения с помощью формул обращения сингулярных интегралов.

В настоящей работе, для решения сингулярного интегрального уравнения (2.17), воспользуемся методом, предложенным М. Г. Крейнсом [1] для решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода с ядром вида

$$K(t, x) = H(|t-x|). \quad (2.19)$$

Этот метод позволяет получить решение таких уравнений в замкнутой форме в целом ряде новых случаев конкретных ядер вида (2.19). Более того, для известных случаев, применение этого метода дает решения, по своей аналитической форме отличающиеся тем, что в них отсутствуют сингулярные интегралы, берущиеся в смысле Коши.

Следует указать, что свободное от сингулярных интегралов решение уравнения контактной задачи линейной теории упругости впервые было получено Н. А. Ростовцевым [10].

Обозначим через $g(t, a)$ решение уравнения (2.17) при $F(x, \gamma) = 1$. Тогда общее решение уравнение (2.17) согласно [1] выразится формулой

$$\begin{aligned}
 p(x) = & \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^{+a} g(t, a) F(t, \gamma) dt \right] \cdot g(x, a) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_x^a g(x, u) \cdot \frac{d}{du} \left[\frac{1}{M'(u)} \cdot \frac{d}{du} \int_{-u}^{+u} g(t, u) F(t, \gamma) dt \right] du - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{g(x, u)}{M'(u)} \left[\int_{-u}^{+u} g(t, u) \cdot F(t, \gamma) dt \right] du. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$M(u) = \int_0^a g(t, u) dt \quad (0 < u < a), \quad (2.21)$$

$2a$ — ширина контакта, а γ — некоторая постоянная, которая при заданной ширине контакта $2a$ определяется из уравнения равновесия

$$P = \int_{-a}^{+a} p(x) dx, \quad (2.22)$$

где P — равнодействующая внешних сил, действующих на сжимаемое тело, причем при выводе уравнения (2.15) предполагалось, что направление P перпендикулярно к оси ox и проходит через начало координат O .

Допустим теперь, что связи, препятствующие поворотам сжимаемых тел отсутствуют. Составим основное уравнение контактной задачи при этих условиях.

Соотношение (2.3), связывающее перемещения граничных точек сжимаемых тел v_1 и v_2 , было нами получено в предположении, что, при сжатии, эти тела совершают лишь только поступательные перемещения δ_1 и δ_2 в направлении оси ou и что между ними происходит при этом сближение равное $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Пусть теперь при сжатии эти тела, кроме поступательных перемещений δ_1 и δ_2 вдоль оси ou , совершат еще поворот относительно начала координат O соответственно на углы α_1 и α_2 (положительными направлениями будем считать повороты против часовой стрелки).

Тогда между граничными точками сжимаемых тел, имеющими абсциссу x , произойдет дополнительное сближение, равное $\alpha_0 x$, где $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$. Чтобы получить для этого случая условия, которым дол-

жны удовлетворять перемещения точек контакта сжимаемых тел v_1 и v_2 , надо в соотношении (2.3) постоянное сближение δ заменить переменным сближением $\delta + \alpha_0 x$. Поэтому будем иметь

$$v_1 + v_2 = \delta + \alpha_0 x - f_1^*(x) - f_2^*(x). \quad (2.23)$$

Подставляя в (2.23) выражения для v_1 и v_2 из (2.13), приходим к такому же интегральному уравнению (2.17) лишь с той разницей, что в правой части его вместо функции $F(x, \gamma)$, определяемой соотношениями (2.18), будет

$$F(x, \gamma, \alpha) = [\gamma + \alpha x - f_0(x)]^n, \quad (2.24)$$

где

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{A_1 + A_2}, \quad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}. \quad (2.25)$$

При этом значения постоянных γ и α определяются при заданной ширине контакта $2a$ из уравнений равновесия

$$P = \int_{-a}^{+a} p(x) dx, \quad (2.26)$$

$$M_0 = \int_{-a}^{+a} p(x) x dx,$$

где P — сумма проекций на ось ou всех внешних сил, действующих на сжимаемое тело, а M_0 — момент этих же сил относительно начала координат O .

Таким образом, и в этом случае общее решение уравнения (2.17) может быть получено по формуле (2.20), если только в ней $F(x, \gamma)$ заменить функцией $F(x, \gamma, \alpha)$, определяемой соотношениями (2.24).

Отметим, что, как следует из работы [1], формула (2.20) доставляет единственное интегрируемое решение уравнения (2.17), если $M'(a) \neq 0$ ($0 < a < b$), где b — некоторая конечная постоянная, а функция $F(x, \gamma, \alpha)$ дифференцируема и такая, что, после подстановки ее в формулу (2.20), интегралы, содержащие эту функцию, имели бы смысл.

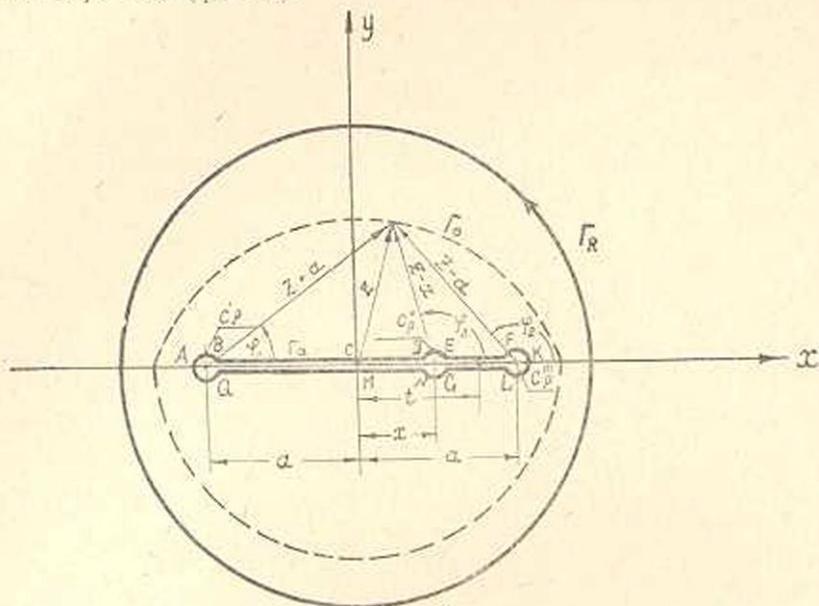
Перейдем к определению функции $g(t, a)$, т. е. к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{+a} \frac{g(t, a) dt}{|t-x|^{1-\mu}} = 1 \quad (0 < \mu < 1). \quad (2.27)$$

Для этого, следуя идее М. Г. Крейна [11], рассмотрим интеграл

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^{\frac{\mu}{2}} (z-x)^{1-\mu}}, \quad (2.28)$$

взятый по контуру, составленному из наружной окружности Γ_R радиуса R и внутреннего контура $ABCDEFKLG MNQA$, который обозначим через Γ_0 (фиг. 3).



Фиг. 3.

Прежде всего нетрудно убедиться, что подынтегральная функция

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{f(z)} = (z^2 - a^2)^{\frac{\mu}{2}} (z - x)^{1-\mu} \quad (0 < \mu < 1),$$

во внешнем отрезке $[-a, a]$, распадается на три одинаковые ветви. В самом деле, положим $\varphi_1 = \arg(z + a)$, $\varphi_2 = \arg(z - a)$ и $\varphi_3 = \arg(z - x)$. При обходе против часовой стрелки произвольного замкнутого контура Γ_n , изображенного пунктиром на фиг. 3, φ_1 , φ_2 и

φ_3 получают приращения 2π , следовательно $\arg f(z) = \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \mu + \varphi_3(1 - \mu)$ получает приращение 2π , и $f(z)$ возвращается к исходному значению. Будем рассматривать ту ветвь функции $f(z)$, которая на верхнем берегу отрезка $(-a, a)$ принимает положительное значение, т. е. $(z - x)^{1-\mu} > 0$ $(z^2 - a^2)^{\frac{\mu}{2}} > 0$ при $z > 0$.

Тогда, согласно теореме Коши для многосвязных областей, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(z) dz = 0, \quad (2.29)$$

где

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^{\frac{\mu}{2}} (z + a)^{\frac{\mu}{2}} (z - x)^{1-\mu}}. \quad (2.30)$$

Но интегралы по малым окружностям C_ρ , C_ρ^* и C_ρ^{**} стремятся, очевидно, к нулю при $\rho \rightarrow 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-a}^{-a} f(t+i0) dt + \int_{-a}^{+a} f(t-i0) dt \right]. \quad (2.31)$$

Здесь $f(t+i0)$ и $f(t-i0)$ значения функций $f(z)$ на верхнем и нижнем берегу отрезка $(-a, a)$.

Но замечая, что $f(t-i0) = \overline{f(t+i0)}$ (где черточкой обозначается сопряженная функция) и меняя во втором интеграле соотношения (2.31) направление интегрирования, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \operatorname{Im} f(t+i0) dt. \quad (2.32)$$

Вычислим контурный интеграл

$$I_1 = \int_{\Gamma_R} f(z) dz, \quad (2.33)$$

где $f(z)$ выражается формулой (2.30). Для этого воспользуемся разложением нашей ветви $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Согласно (2.30) имеем

$$f(z) = \frac{1}{ze^{i\pi}} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\mu-1}, \quad (2.34)$$

где $\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}$ и $\left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\mu-1}$ означают те ветви этих функций, которые положительны на отрезке (a, ∞) оси ox . Разлагая последние по формуле бинома, найдем вычет выбранной ветви $f(z)$ в бесконечно удаленной точке. Он будет равен $-e^{-\pi i}$ (коэффициенту при $\frac{1}{z}$ с обратным знаком). Тогда, на основании теоремы о вычетах, получим

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = -2\pi i e^{-i\pi} = 2\pi i. \quad (2.35)$$

Подставляя значения этого интеграла в соотношения (2.32), находим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \operatorname{Im} f(t+i0) dt = -1. \quad (2.36)$$

Далее, согласно (2.30) и (фиг. 3), имеем

$$f(t+i0) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} (a^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{(t-x)^{1-\mu}} & \text{при } x < t+i0 < a, \\ \frac{e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} (a^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{e^{i\pi(1-\mu)} (x-t)^{1-\mu}} & \text{при } -a < t+i0 < x. \end{cases} \quad (2.37)$$

Подставляя выражения для $f(t+i0)$ из (2.37) в (2.36), после преобразований, окончательно, получим

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2} (a^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}}}{\pi |t-x|^{1-\mu}} dt = 1, \quad (2.38)$$

откуда непосредственно следует, что

$$g(t, a) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi\mu}{2} \cdot (a^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{\pi \sqrt{(a^2 - t^2)^\mu}} \quad (2.39)$$

и является решением интегрального уравнения (2.27).

Пользуясь формулами (2.39) и (2.21), для $M(t)$ получим

$$M(t) = \frac{2\sqrt{\pi} t^{1-\mu}}{(1-\mu) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}, \quad (2.40)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Ниже, при исследовании напряженного состояния в сжимаемых нелинейно-упругих телах, будем отдельно рассматривать случаи симметричного и кососимметричного нагружения этих тел. Это, во-первых, сделает более обозримым полученные формулы и, во-вторых, каждое из этих нагружений представляет самостоятельное значение, так как соответствует определенной характерной деформации этих тел. Следует отметить, что случай произвольного нагружения сжимаемых тел не может быть получен, как это следует из (2.20) и (2.24), путем наложения вышеуказанных двух случаев, и должен быть решен отдельно как задача самостоятельная, при помощи общих формул (2.20), (2.24) и (2.26).

3°. *Симметричная задача о контакте двух нелинейно-упругих тел.*

Пусть как поверхности, ограничивающие сжимаемые тела, так и внешние силы, действующие на них, симметричны относительно оси ou . Тогда уравнения этих поверхностей $y = f_1^*(x)$ и $y = -f_2^*(x)$ будут четными функциями x , в силу чего правая часть основного

интегрального уравнения (2.17) будет также четной функцией. Тогда в силу очевидной четности функции $g(t, a)$, последний член в правой части формулы (2.20) пропадает и она принимает вид

$$p(x) = \frac{1}{M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_0^a g(s, a) F(s, \gamma) ds \right] g(x, a) - \int_x^a g(x, u) \frac{d}{du} \left[\frac{1}{M'(u)} \cdot \frac{d}{du} \int_0^u g(s, u) F(s, \gamma) ds \right] du, \quad (2.41)$$

где

$$M(a) = \int_0^a g(s, a) ds.$$

Заметим, что при вычислениях второй интеграл в (2.41) удобно иногда представить в преобразованном виде на основании формулы [1]

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{M'(s)} \cdot \frac{dI}{ds} \right] = \frac{1}{M(s)} \cdot \frac{d}{ds} \left[\frac{M^2(s)}{M'(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{I}{M(s)} \right) \right]. \quad (2.42)$$

Подставляя выражения для $g(t, a)$ и $M(t)$ из (2.39) и (2.40) в (2.41) и, пользуясь равенством (2.42), после некоторых преобразований, получим

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^\mu}{V(a^2 - x^2)^\mu} \frac{d}{da} \int_0^a \frac{F(s, \gamma) ds}{V(a^2 - s^2)^\mu} - \int_x^a \frac{du}{V(u^2 - x^2)^\mu} \frac{d}{du} \left[u^\mu \frac{d}{du} \int_0^u \frac{F(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu} \right] \right\} \quad (2.43)$$

($-a \leq x \leq a$),

где

$$K(\mu) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin^2 \frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu) \pi^2 V \pi} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin^2 \frac{\pi\mu}{2}}{2 V \pi \pi^2}. \quad (2.43')$$

Введем обозначения

$$\Phi_1(u, \gamma) = \int_0^u \frac{F(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu},$$

$$\Phi_2(u, \gamma) = \frac{d}{du} \int_0^u \frac{F(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu}. \quad (2.44)$$

Тогда формулу (2.43) можно записать в форме

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^\mu \Phi_1'(a, \gamma)}{V(a^2 - x^2)^\mu} - \int_x^a \frac{du}{V(u^2 - x^2)^\mu} \cdot \frac{d}{du} [u^\mu \Phi_1'(u, \gamma)] \right\} \quad (2.45)$$

($-a \leq x \leq a$).

Путем замены переменной интегрирования $s = u \sin \varphi$ выражение для $\Phi_1'(u, \gamma)$ из (2.44) можно представить в виде следующего интеграла с постоянными пределами:

$$\Phi_1'(u, \gamma) = u^{1-\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(u \sin \varphi, \gamma) \cos^{1-\mu} \varphi d\varphi. \quad (2.46)$$

Предполагая существование непрерывной и ограниченной производной $F(s, \gamma)$ при $s > 0$, после дифференцирования под знаком интеграла (2.46), получим следующее соотношение, связывающее $\Phi_1'(u, \gamma)$ с $\Phi_1(u, \gamma)$:

$$u \Phi_1'(u, \gamma) = (1 - \mu) \Phi_1(u, \gamma) + \int_0^u \frac{F'(s, \gamma) s ds}{V(u^2 - s^2)^\mu}. \quad (2.47)$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и замечая, что $F'(0, \gamma) = 0$, соотношение (2.47) представим в виде

$$u \Phi_1'(u, \gamma) = (1 - \mu) \Phi_1(u, \gamma) + \frac{1}{2 - \mu} \int_0^u (u^2 - s^2)^{\frac{1-\mu}{2}} F''(s, \gamma) ds. \quad (2.48)$$

Далее, пользуясь (2.47), нетрудно непосредственным дифференцированием убедиться, что

$$\frac{d}{du} \left[u^\mu \Phi_1'(u, \gamma) \right] = u^{\mu-1} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{F'(s, \gamma) s ds}{V(u^2 - s^2)^\mu}. \quad (2.49)$$

Произведя интегрирование по частям в правой части равенства (2.49) и дифференцируя затем полученное выражение по u , в силу четности функции $F(x, \gamma)$, находим

$$\frac{d}{du} \left[u^\mu \Phi_1'(u, \gamma) \right] = u^\mu \int_0^u \frac{F''(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu}. \quad (2.50)$$

Подставляя это выражение в (2.45), для $p(x)$ получим окончательно следующую формулу

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^\mu \Phi_1'(a, \gamma)}{V(a^2 - x^2)^\mu} - \int_x^a \frac{u^\mu du}{V(u^2 - x^2)^\mu} \int_0^u \frac{F''(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu} \right\}. \quad (2.51)$$

В формуле (2.51) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a$; при этом постоянная γ определяется из уравнения равновесия

$$P = 2 \int_0^a p(x) dx. \quad (2.52)$$

Второй же член этой формулы представляет непрерывную часть этого решения.

Подставляя выражение для $p(x)$ из (2.51) в уравнение равновесия (2.52), получим

$$P = 2K(\mu) \left\{ a\Phi_1'(a, \gamma) \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} - \int_0^a dx \int_x^a \frac{u^{\mu} du}{V(u^2 - x^2)^{\mu}} \int_0^u \frac{F''(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^{\mu}} \right\}. \quad (2.53)$$

Здесь использовано значение интеграла:

$$I_2(u) = \int_0^u \frac{ds}{V(u^2 - s^2)^{\mu}} = \frac{M(u)\pi}{2 \sin \frac{\pi\mu}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2} u^{1-\mu}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}. \quad (2.54)$$

Меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом выражения (2.53) и пользуясь равенствами (2.54) и (2.43), имеем

$$P = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi} \left\{ a\Phi_1'(a, \gamma) - \int_0^a u du \int_0^u \frac{F''(s, \gamma) ds}{V(u^2 - s^2)^{\mu}} \right\}. \quad (2.55)$$

или, еще раз меняя порядок интегрирования и замечая, что

$$\int_s^a \frac{u du}{V(u^2 - s^2)^{\mu}} = \frac{(a^2 - s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{(2-\mu)}, \quad (2.56)$$

получим

$$P = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi} \left\{ a\Phi_1'(a, \gamma) - \frac{1}{2-\mu} \int_0^a (a^2 - s^2)^{1-\frac{\mu}{2}} F''(s, \gamma) ds \right\}. \quad (2.57)$$

Пользуясь, далее, соотношением (2.48), уравнению (2.57) можно окончательно придать следующий вид:

$$\Phi_1(a, \gamma) = \frac{P\pi}{\sin \frac{\pi\mu}{2}}, \quad (2.58)$$

где

$$\Phi_1(a, \gamma) = \int_0^a \frac{F(s, \gamma) ds}{V(a^2 - s^2)^\mu},$$

$$F(s, \gamma) = [\gamma - f_0(x)]^\mu, \quad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}, \quad (2.59)$$

а A_1 и A_2 определяются по формулам (2.14).

Таким образом, когда ширина контакта $2a$ задана, то постоянная γ , входящая в формулу (2.51), определяется из уравнения (2.58). Когда же ширина контакта $2a$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, тогда значение постоянной γ определяется из требования, чтобы в формуле (2.51) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_1'(a, \gamma) = \frac{d}{da} \int_0^a \frac{F(s, \gamma) ds}{V(a^2 - s^2)^\mu} = 0, \quad (2.60)$$

где $F(s, \gamma)$ определяется формулой (2.59).

Таким образом, когда ширина контакта $2a$ не задана, то значение постоянной γ определяется из уравнения (2.60).

После того, как из уравнения (2.60) определим значение γ , ширину контакта $2a$ находим при помощи уравнения равновесия (2.52). Подставляя выражение для $p(x)$ из (2.51) в (2.52) и учитывая равенство (2.60), после применения формулы Дирихле, получим:

$$\Phi_1(a, \gamma) = \frac{P\pi}{\sin \frac{\pi\mu}{2}}. \quad (2.61)$$

Следовательно, уравнение (2.61) для определения ширины контакта, тождественно совпадает с уравнением (2.58) для определения постоянной γ , когда ширина контакта $2a$ задана.

В качестве приложения, рассмотрим контактную задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием шириной $2a$ на нелинейно-упругую полуплоскость. В этом случае имеем:

$$f_0(x) = 0, \quad F(x, \gamma) = \gamma^\mu, \\ F'(x, \gamma) = F''(x, \gamma) = 0. \quad (2.62)$$

Тогда, пользуясь уравнением (2.58) и равенством (2.54), для γ получим следующее выражение:

$$\gamma^{\mu} = \frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}} \quad (2.63)$$

Подставляя это значение γ^{μ} в формулу (2.51) и замечая, что, согласно (2.44), (2.54), (2.62) и (2.43'),

$$\Phi_1'(a, \gamma) = \frac{\gamma^{\mu} \sin \frac{\pi\mu}{2} a^{-\mu}}{2K(\mu)\pi} \quad (2.64)$$

для определения давления $p(x)$ на площадку контакта под штампом получим, окончательно, следующую формулу:

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin \frac{\pi\mu}{2}}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} \quad (2.65)$$

При $\mu = 1$, т. е. когда имеет место закон Гука, формула (2.65) принимает вид:

$$p(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)}} \quad (2.66)$$

что совпадает с известным решением [6] контактной задачи линейной теории упругости для плоского штампа. Этот результат можно было получить и раньше, так как при $\mu \rightarrow 1$ основное интегральное уравнение (2.17) переходит в известное интегральное уравнение контактной задачи линейной теории упругости, решением которой и является (2.66). Заметим, что при $\mu \rightarrow 0$ уравнение (2.17) теряет смысл.

4°. *Кососимметричная задача о сжатии двух нелинейно-упругих тел.* При кососимметричной нагрузке функция $F(x, a)$ будет нечетной в области контакта сжимаемых тел $-a \leq x \leq a$ (в этом случае постоянная γ равна нулю) и тогда в правой части формулы (2.20) первые два члена пропадут и она примет вид:

$$p(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{g(x, u) du}{M'(u)} \int_0^u g(s, u) F'(s, a) ds \quad (2.67)$$

Подставляя выражение для $g(t, a)$ и $M(t)$ из (2.39) и (2.40) в (2.67), получим:

$$p(x) = -K(\mu) \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u^{\mu} du}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} \int_0^u \frac{F'(s, \gamma) ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \quad (2.68)$$

где $K(\mu)$ определяется равенством (2.43'), а

$$F(x, a) = [ax - f_0(x)]^{\mu} \quad (2.69)$$

При этом полагаем, что $\mu = \frac{1_n}{2k+1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) и $f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}$ есть нечетная функция.

Из соотношений (2.68) и (2.69) следует, что $p(x)$ является нечетной функцией, поэтому достаточно ее определить в интервале $0 < x < a$, так как $p(-x) = -p(x)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_2(u, \alpha) &= \int_0^u \frac{F'(s, \alpha) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu}, \\ \Phi_2'(u, \alpha) &= \frac{d}{du} \int_0^u \frac{F'(s, \alpha) ds}{V(u^2 - s^2)^\mu}.\end{aligned}\quad (2.70)$$

Тогда соотношение (2.68) можно представить в форме

$$p(x) = -\frac{K(\mu)}{2-\mu} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{d}{du} \left[(u^2 - x^2)^{1-\frac{\mu}{2}} \right] u^{\mu-1} \Phi_2(u, \alpha) du. \quad (2.71)$$

Интегрируя правую часть равенства (2.71) по частям и дифференцируя полученное выражение по x , получим

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^{\mu-1} x \Phi_2(a, \alpha)}{V(a^2 - x^2)^\mu} + x \int_x^a \frac{u^{\mu-2} [(1-\mu) \Phi_2(u, \alpha) - u \Phi_2'(u, \alpha)]}{V(u^2 - x^2)^\mu} \right\}. \quad (2.72)$$

Но, аналогично (2.47), в этом случае имеем:

$$u \Phi_2'(u, \alpha) = (1-\mu) \Phi_2(u, \alpha) + \int_0^u \frac{F''(s, \alpha) s ds}{V_1(u^2 - s^2)^\mu}. \quad (2.73)$$

Подставив это выражение в (2.72), для $p(x)$ окончательно получим следующую формулу:

$$p(x) = K(\mu) \left\{ \frac{a^{\mu-1} x \Phi_2(a, \alpha)}{V(a^2 - x^2)^\mu} - x \int_x^a \frac{u^{\mu-2} du}{V(u^2 - x^2)^\mu} \int_0^u \frac{F''(s, \alpha) s ds}{V(u^2 - s^2)^\mu} \right\}. \quad (2.74)$$

В формуле (2.74) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта, при этом значение постоянной α определяется из уравнения равновесия:

$$M_0 = 2 \int_0^a p(x) x dx. \quad (2.75)$$

Второй же член этой формулы является непрерывной частью этого решения.

Подставляя выражение (2.72) для $p(x)$ в уравнение равновесия (2.75), получим:

$$M_0 = 2K(\mu) \left\{ \frac{a^2 \Phi_2(a, \alpha) B\left(1 - \frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right)}{2} + \int_0^a x^2 dx \int_x^a \frac{u^{\mu-2} [(1-\mu)\Phi_2(u, \alpha) - u\Phi_2'(u, \alpha)] du}{V(u^2 - x^2)^\mu} \right\}. \quad (2.76)$$

Здесь использовано значение интеграла

$$I_3(u) = \int_0^u \frac{s^2 ds}{V(u^2 - s^2)^\mu} = \frac{1}{2} B\left(1 - \frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right) u^{3-\mu}, \quad (2.77)$$

где $B(p, q)$ — бета-функция, равная $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом соотношения (2.76) и пользуясь равенством (2.77), находим:

$$M_0 = K(\mu) B\left(1 - \frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right) \left\{ a^2 \Phi_2(a, \alpha) + (1-\mu) \int_0^a u \Phi_2(u, \alpha) du - \int_0^a u^2 \Phi_2'(u, \alpha) du \right\}. \quad (2.78)$$

Интегрируя последнее слагаемое в правой части (2.78) по частям, затем меняя порядок интегрирования и пользуясь равенствами (2.56) и (2.43'), окончательно получим следующее уравнение, связывающее величину постоянной α с моментом внешних сил M_0

$$M_0 = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{\pi(1-\mu)(2-\mu)} \int_0^a (a^2 - s^2)^{1-\frac{\mu}{2}} F'(s, \alpha) ds. \quad (2.79)$$

Таким образом, когда ширина контакта $2a$ задана, то значение постоянной α , входящей в формулу (2.74), определяется из уравнения (2.79).

Если ширина контакта $2a$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, то значение постоянной α определяется из требования, чтобы в формуле (2.74) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_2(a, \alpha) = \int_0^a \frac{F'(s, \alpha) ds}{V(a^2 - s^2)^\mu} = 0, \quad (2.80)$$

где $F(s, \alpha)$ определяется формулой (2.69).

Следовательно, когда ширина контакта $2a$ не задана, то значение постоянной α определяется из уравнения (2.80), а ширина контакта $2a$ при помощи уравнения (2.79).

В качестве приложения рассмотрим контактную задачу о давлении жесткого штампа с плоским основанием шириной $2a$ на нелинейно-упругую полуплоскость, когда к середине штампа приложен момент, равный M_0 .

В этом случае, согласно (2.69), будем иметь:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0, & F(x, \alpha) &= \alpha^\mu x^\mu, \\ F'(x, \alpha) &= \mu \alpha^\mu x^{\mu-1}, & F''(x, \alpha) &= \mu(\mu-1)\alpha^\mu x^{\mu-2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Подставляя значения $F'(s, \alpha)$ и $F''(s, \alpha)$ из (2.81) в (2.74) и замечая, что

$$\int_0^a \frac{s^{\mu-1} ds}{V(a^2 - s^2)^\mu} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi \mu}{2}}, \quad (2.82)$$

приведем формулу (2.74) для $p(x)$ к виду

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\mu \alpha^\mu \pi K(\mu)}{2 \sin \frac{\pi \mu}{2}} \left\{ \frac{a^{\mu-1} x}{V(a^2 - x^2)^\mu} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu) x \int_x^a \frac{u^{\mu-2} du}{V(u^2 - x^2)^\mu} \right\}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

где $K(\mu)$ определяется соотношением (2.43'), а α^μ — из уравнения (2.79).

Обозначим второй член в формуле (2.83) через $(1 - \mu) I_4(x)$. Заметим, что $I_4(x)$, будучи нечетной функцией, непрерывна во всем интервале $-a \leq x \leq a$, за исключением $x = 0$, где $I_4(x)$ терпит разрыв, при этом имеем:

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^a \frac{u^{\mu-2} du}{V(u^2 - x^2)^\mu}, \quad (2.84)$$

и

$$I_4(\pm a) = 0.$$

Интеграл $I_4(x)$ равномерно сходится относительно x в промежутке $0 < x \leq a$. В самом деле, интегрируя $I_4(x)$ по частям, получим

$$I_4(x) = \frac{a^{\mu-3} x (a^2 - x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu} + \frac{3-\mu}{2-\mu} x \int_0^a \frac{(u^2 - x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{u^{1-\mu}} du, \quad (2.85)$$

откуда сходимость интеграла $I_4(x)$ очевидна для всех значений $0 < x \leq a$. При $x \rightarrow +0$ из соотношения (2.85), после замены переменной интегрирования $u = \frac{x}{t}$, и условия что $\mu \leq 1$ непосредственно следует

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \int_0^1 (1-t^2)^{1-\frac{\mu}{2}} dt = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{(1-\mu) \sin \frac{\pi\mu}{2} \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}. \quad (2.86)$$

В дальнейшем условимся считать в точке $x=0$

$$I_4(0) = \frac{I_4(+0) + I_4(-0)}{2} = 0. \quad (2.87)$$

Тогда формула (2.83) для $p(x)$ примет вид

$$p(x) = \frac{\mu \cdot a^{\mu-2} K(\mu)}{2 \cdot \sin \frac{\pi\mu}{2}} \left\{ \frac{a^{\mu-1} x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^\mu}} + (1-\mu) I_4(x) \right\} \quad (2.88)$$

($0 < |x| \leq a$)

при этом $p(0) = 0$.

Подставляя выражение для $I_4(x)$ из (2.85) в (2.88) и разлагая числитель подынтегральной функции $(u^2 - x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}$ по формуле бинома, после интегрирования получим

$$p(x) = \frac{\mu a^{\mu-2} K(\mu)}{2 \sin \frac{\pi\mu}{2}} \left\{ \frac{a^{\mu-1} x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^\mu}} + \frac{(1-\mu) a^{\mu-3} x (a^2 - x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu} + \frac{(3-\mu)(1-\mu)}{2-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1) \Gamma(k) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} \right] \right\}. \quad (2.89)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Пользуясь уравнениями (2.79) и (2.81), для a^{μ} получим следующее выражение

$$a^{\mu} = \frac{4M_0(1-\mu)}{\pi a^2} \quad (2.90)$$

Подставляя это значение a^{μ} в (2.89) и учитывая (2.43'), для определения давления $p(x)$ на площадку контакта под штампом, получим окончательно следующую формулу

$$p(x) = \frac{2M_0 \Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \frac{\pi\mu}{2}}{a^2 \pi \sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \frac{a^{\mu-1} x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + \frac{(1-\mu)a^{\mu-3} x (a^2-x^2)^{1-\frac{\mu}{2}}}{2-\mu} + \frac{(3-\mu)(1-\mu)}{2-\mu} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1)\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} \right] \right\} \quad (2.91) \\ (0 < x \leq a).$$

При этом $p(0) = 0$ и $p(-x) = -p(x)$.

При $\mu = 1$, т. е. когда имеет место закон Гука, формула (2.91) переходит в

$$p(x) = \frac{2M_0}{\pi a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

что совпадает с известным решением [7] контактной задачи линейной теории упругости для плоского штампа шириной $2a$, когда к середине его приложен момент M_0 .

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 3 IV 1959

Ն. Խ. ԱՐՄԵՅԱՆԻԱՆԻ

ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՆՅՈՒԹԻ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԱՄՐԱՊՆԴՄԱՄԲ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ բերվում է սլափափուկության տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը նյութի աստիճանային ամրապնդմամբ:

Առաձգական անալոգիայի համաձայն այս խնդրի լուծումը համընկնում է առաձգականության ոչ-դժային տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծման հետ, երբ զեֆիրմացիայի և լարվածության միջև զդյուխյուն ունեցող կապն արտահայտվում է աստիճանային օրենքով:

Նախապես, առաջին պարադոքսում, տեղափոխումների լուծվում է կիսահարթության պլաստիկության խնդիրը նյութի աստիճանային ամրապնդմամբ, ընդանկույ, որ կիսահարթության վրա ազդում է կենտրոնացած ուժ, ուղղված նրա ազատ մակերևույթի նորմալով:

Ապա, երկրորդ պարադոքսում, օգտվելով այս խնդրի լուծումից, ապացուցվում է որ, եթե ընդհանրացած տեղափոխման վեկտորի վերլուծության արտահայտության մեջ բավարարվել միայն գլխավոր անդամով, երբ կիսահարթության մակերևույթին կիրառված է բախշված բևռ, ապա պլաստիկության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, նյութի աստիճանային ամրապնդմամբ, բերվում է $K(t, x) = |t - x|^{p-1}$ ($0 < p < 1$). Կորիզով ֆրեյդհոլի առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման (Չ. 17) լուծմանը:

Օգտվելով $K(t, x) = H(|t - x|)$ տեսքի կորիզ ունեցող առաջին և երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծման Մ. Գ. Կրեյնի $|t|$ առաջադրած մեթոդից, աստիճանային ամրապնդմամբ պլաստիկության կոնտակտային խնդրի հիմնական ինտեգրալ հավասարման (Չ. 17) լուծումը կարելի է ներկայացնել փակ ձևով, սեղմվող մարմինների ինչպես սիմետրիկ, նույնպես և ոչ սիմետրիկ բևռնավորման դեպքում:

Որպես կիրառություն քննարկվում է հարթ հիմք ունեցող կարծր շտամպի ճնշումը ոչ-զծային առաձգական կիսահարթության վրա, կենտրոնացած P ուժի կամ M_0 մոմենտի ազդեցության տակ, որը կիրառված է շտամպի մեջտեղում:

Նշենք, որ այստեղ առաջադրվող աստիճանային ամրապնդումով պլաստիկության տեսության կոնտակտային խնդրի լուծման մեթոդը դժվար չէ տարածել պրակտիկայի համար շատ կարևոր երկու սեղմվող մարմինների կոնտակտի խնդրի վրա հաստատված սողքի պայմաններում, երբ սողքի զեֆորմացիայի արագությունների և լարվածությունների միջև կապն արտահայտվում է աստիճանային օրենքով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, т. 100, № 3, 1955.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
3. Кац А. М. Теория упругости. Гостехиздат, 1956.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
8. Carleman T. Über die Abelsche Integralgleichung mit Konstanten Integrationsgrenzen. Math. Zeitschrift, 15 (1922).
9. Ахмезер Н. И. и Шербина В. А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки математического отделения физико-математического факультета и Харьковского математического общества, том XXV, серия 4.
10. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
11. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. ДАН СССР, т. 94, № 6, 1954.

Э. В. Чубарян

Запрещенные β -переходы первого порядка

§ 1. Матричный элемент β -перехода

В последнее время Фейманом и Гелл-Манном [1] была высказана гипотеза, что в β -взаимодействии имеют место V и A варианты. Эта гипотеза экспериментально подтверждается.

В настоящей статье для V и A вариантов рассчитаны такие эффекты, как угловая корреляция электрон-нейтрино, продольная поляризация электронов в случае $0 \rightarrow 0$ переходов, а также продольная поляризация электронов для перехода с изменением спина ядра (лёгкие ядра).

Пусть нейтрон движется в поле, которое вызывает переход

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}.$$

Уравнение Дирака в этом поле представится в виде:

$$\varepsilon \Phi = (H_0 + V) \Phi \quad (1)$$

Φ — здесь, волновая функция нуклона $\Phi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$.

V — оператор возмущения, пропорциональный интенсивности поля

$$\bar{\Psi}_e(r) \Psi_\nu(r).$$

Оператор возмущения должен быть скаляром. В силу свойств коммутации γ матриц возможны следующие пять типов операторов возмущения:

$$V_s = g_s (\bar{\psi}_e \psi_\nu);$$

$$V_v = g_v (\bar{\psi}_e \gamma_4 \psi_\nu) \gamma_4;$$

$$V_p = g_p (\bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu) \gamma_5;$$

$$V_A = g_A (\bar{\psi}_e i \gamma_5 \gamma_4 \psi_\nu) i \gamma_5 \gamma_4;$$

$$V_T = g_T (\bar{\psi}_e \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu) \sigma_{\mu\nu},$$

где

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu).$$

Известно [2], что волновую функцию электрона внутри ядра, т. е. для $pr \ll 1$, можно представить в виде:

$$\Psi_{p\zeta} = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} v_{\zeta} =$$

$$= N \begin{pmatrix} \alpha_0 + ipr\alpha_1 + i \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \left(\beta_0 + \frac{pr}{3} \alpha'_0 \right) \\ \left[\beta_0 + ipr\beta_1 + i \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \left(\alpha_0 + \frac{pr}{3} \beta'_0 \right) \right] (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \end{pmatrix} v_{\zeta}, \quad (3)$$

где p — импульс электрона, $n = \frac{p}{p}$ — единичный вектор в направлении вылета электрона; v_{ζ} — единичный спинор. Постоянные α_i, β_i имеют следующую форму:

$$\alpha_0 = \frac{(\gamma_1 + 1) \sqrt{\varepsilon + 1} + iaz \sqrt{\varepsilon - 1}}{2i \sqrt{2\varepsilon}}; \quad \beta_0 = \frac{(\gamma_1 + 1) \sqrt{\varepsilon - 1} + iaz \sqrt{\varepsilon + 1}}{2i \sqrt{2\varepsilon}}$$

$$\alpha_2 = \frac{(\gamma_1 - 1) \sqrt{\varepsilon - 1} + iaz \sqrt{\varepsilon + 1}}{2i \sqrt{2\varepsilon}}; \quad \beta_2 = \frac{(\gamma_1 - 1) \sqrt{\varepsilon + 1} + iaz \sqrt{\varepsilon - 1}}{2i \sqrt{2\varepsilon}};$$

$$\alpha'_0 = \alpha'_0 - \alpha_1; \quad \beta'_0 = \beta'_0 - \beta_1;$$

$$\alpha'_2 = \frac{3 \sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{2\varepsilon} (2\gamma_1 + 1)} \left[\frac{\gamma_1 + 1}{2} - \frac{a^2 z^2 \varepsilon}{\varepsilon + 1} + iaz \left(\frac{\gamma_1 \varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}} \right) \right];$$

$$\beta'_2 = \frac{3 \sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{2\varepsilon} (2\gamma_1 + 1)} \left[\frac{\gamma_1 + 1}{2} - \frac{a^2 z^2 \varepsilon}{\varepsilon - 1} + iaz \left(\frac{\gamma_1 \varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} \right) \right];$$

$$\alpha_1 = \xi \frac{(\gamma_2 + 2) \sqrt{\varepsilon + 1} + iaz \sqrt{\varepsilon - 1}}{4 \sqrt{2\varepsilon}};$$

$$\beta_1 = \xi \frac{(\gamma_2 + 2) \sqrt{\varepsilon - 1} + iaz \sqrt{\varepsilon + 1}}{4 \sqrt{2\varepsilon}};$$

$$\xi = \frac{12 \Gamma(2\gamma_1 + 1)}{\Gamma(2\gamma_2 + 1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\gamma_2 + i \frac{az\varepsilon}{p}\right)}{\Gamma\left(\gamma_1 + i \frac{az\varepsilon}{p}\right)} (2ipr)^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1};$$

$$N = \frac{2 \Gamma\left(\gamma_1 + i \frac{az\varepsilon}{p}\right)}{\Gamma(2\gamma_1 + 1)} e^{-\frac{\pi az\varepsilon}{2p}} (2pr)^{\gamma_1 - 1};$$

$$\alpha = \frac{1}{137}; \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - \alpha^2 z^2}; \quad \gamma_2 = \sqrt{4 - \alpha^2 z^2}.$$

Матричный элемент перехода, соответствующий испусканию электрона и антинейтрино имеет вид

$$M_{\xi s_e} = \left(U_{p\xi} H \frac{1 - \gamma_3}{\sqrt{2}} U_{-q-s_e} \right) \quad (4)$$

так как волновыми функциями электрона и нейтрино являются [3]

$$\Psi_{p\xi} = U_{p\xi} e^{i p r}, \quad \Psi_{-q-s_e} = U_{-q-s_e} e^{-i q r},$$

где

$$U_{p\xi} = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_e}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sigma p} \\ \varepsilon + m_e \end{pmatrix} u^\xi, \quad U_{-q-s_e} = \sqrt{\frac{\varepsilon + m_\nu}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sigma q} \\ \varepsilon + m_\nu \end{pmatrix} u^{-s_e}.$$

В случае двухкомпонентного нейтрино $m_\nu = 0$, тогда $\varepsilon = |q|$ и

$$U_{-q-s_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sigma \vec{v}} \end{pmatrix} = \omega \cdot u^{-s_e}, \quad \text{где } \vec{v} = \frac{\vec{q}}{q}.$$

Если представить H в виде

$$H = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} M_{\xi, -s_e} &= \int \bar{v}_\xi (\varphi_p^* - \chi_p^*) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i q r} \omega d\tau = \\ &= \int \bar{v}_\xi (\varphi_p^* - \chi_p^*) \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} e^{-i q r} \omega d\tau = v_\xi V \omega, \end{aligned}$$

где

$$V = \int (\varphi_p^* - \chi_p^*) (V_1 + V_2) e^{-i q r} d\tau.$$

Тогда вероятность β -перехода будет пропорциональна величин.

$$S_{\xi\xi} = \sum_{s_e = \pm 1/2} M_{\xi s_e} M_{\xi s_e}^* = V \frac{11^2}{2} (1 + \vec{\sigma} \vec{v})_{\xi\xi} V^+, \quad (5)$$

Здесь мы учли, что $\omega(\alpha) \omega^*(\beta) = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma} \vec{v})_{\alpha\beta}$,

\vec{v} — единичный вектор в направлении испускания нейтрино.

При рассмотрении запрещенных переходов первого порядка в разложении волновых функций электрона и нейтрино надо учитывать члены, включающие r . В этом приближении следует также учесть движение нуклонов в ядре, так как они дают вклад такого же по-

рядка (в случае легких ядер) в вероятность перехода, как и учет размеров ядра, кроме того в гамильтониане для тяжелых частиц должны сохраняться члены пропорциональные γ_5 и α .

Рассмотрим V и A варианты. В этом случае гамильтониан взаимодействия с учетом несохранения четности будет иметь вид: (принимаем, что нейтрино двухкомпонентное).

$$H' = \bar{\Psi}_e [g_v (\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1) \gamma_5 + g_A (\bar{\Psi}_2 i \gamma_5 \gamma_5 \Psi_1) i \gamma_5 \gamma_5] \frac{1 - \gamma_5}{\sqrt{2}} \Psi_\nu. \quad (6)$$

Подставляя значение волновой функции электрона и нейтрино, для оператора V с учетом членов порядка r получим:

$$\begin{aligned} V = & \int (x_0^* - i p r \alpha_1^* - i \left(\vec{\sigma} \frac{\vec{r}}{r} \right) (\vec{\sigma} n) \beta_c^* - \\ & - \beta_0^* \vec{\sigma} n + i p r \beta_3 (\vec{\sigma} n) + i \left(\vec{\sigma} \frac{\vec{r}}{r} \right) x_c^* \times \\ & \times [g_v (\bar{\Psi}_2 \beta \Psi_1) \beta + g_v (\bar{\Psi}_2 \vec{\gamma} \Psi_1) \vec{\gamma} + g_A (\bar{\Psi}_2 \beta \vec{\sigma} \Psi_1) \beta \vec{\sigma} + \\ & + g_A (\bar{\Psi}_2 i \gamma_5 \Psi_1) i \gamma_5 \beta] \times \left(\frac{1}{1} \right) \omega (1 - i q r) d\tau. \end{aligned}$$

Произведя умножение матриц и введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_0 &= g_A \int \bar{\Psi}_2 i \gamma_5 \Psi_1 d\tau; \quad \vec{R}_0 = g_v \int \bar{\Psi}_2 \beta \vec{r} \Psi_1 d\tau; \quad m_0 = g_v \int \bar{\Psi}_2 \beta \frac{\vec{r}}{r} \Psi_1 d\tau; \\ \vec{\tau}_0 &= g_v \int \bar{\Psi}_2 \vec{\gamma} \Psi_1 d\tau; \quad T_{0ik} = g_A \int \bar{\Psi}_2 \beta \sigma_i x_k \Psi_1 d\tau; \quad t_{0ik} = g_A \int \bar{\Psi}_2 \beta \frac{\sigma_i x_k}{r} \Psi_1 d\tau; \end{aligned}$$

для оператора V получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} V = & -iN \{ (x_0^* + \beta_0^* \vec{\sigma} n) (-P_0 + \vec{\tau} \vec{\tau}_0 + qR_0 + \sigma_i q_k T_{0ik}) + \\ & + (x_1^* + \beta_1^* \vec{\sigma} n) (pR_0 + \sigma_i p_k T_{0ik}) + (x_c^* + \beta_c^* \vec{\sigma} m_0 + \sigma_i \tau_k t_{0ik}) \}. \quad (8) \end{aligned}$$

При этом матрица S примет вид:

$$S = \frac{1}{2} |N|^2 \sum_{ik} S_{ik}, \quad (9)$$

где

$$S_{ik} = (x_i^* + \beta_i^* \vec{\sigma} n) (A_{ik} + \vec{\sigma} B_{ik}) (x_k + \beta_k \vec{\sigma} n) i, k = 0, 1, c. \quad (10)$$

В последнее равенство введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{00} + \vec{\sigma} B_{00} &= (-P_0 + \vec{\tau} \vec{\tau}_0 + qR_0 + \sigma_i q_k T_{0ik}) (1 + \vec{\sigma} \vec{v}) (-P_0^* + \vec{\sigma} \vec{\tau}_0^* + \\ & + qR_0^* + \sigma_i q_k T_{0ik}^*); \\ A_{01} + \vec{\sigma} B_{01} &= (-P_0 + \vec{\tau} \vec{\tau}_0 + qR_0 + \sigma_i q_k T_{0ik}) (1 + \vec{\sigma} \vec{v}) (pR_0^* + \sigma_i p_k T_{0ik}^*); \\ A_{0c} + \vec{\sigma} B_{0c} &= (-P_0 + \vec{\tau} \vec{\tau}_0 + qR_0 + \sigma_i q_k T_{0ik}) (1 + \vec{\sigma} \vec{v}) (\vec{\sigma} m_0^* + \sigma_i \tau_k t_{0ik}^*); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} + \vec{\sigma} B_{11} &= (\rho R_0 + \sigma_i p_\kappa T_{0ik}) (1 + \vec{\sigma} \vec{\nu}) (\rho R_0^* + \sigma_i p_\kappa T_{0ik}^*); \\
 A_{1c} + \vec{\sigma} B_{1c} &= (\rho R_0 + \sigma_i p_\kappa T_{0ik}) (1 + \vec{\sigma} \vec{\nu}) (\vec{\sigma} m_0^* + \sigma_i \sigma_\kappa t_{0ik}^*); \\
 A_{cc} + \vec{\sigma} B_{cc} &= (\vec{\sigma} m_0 + \sigma_i \sigma_\kappa t_{0ik}) (1 + \vec{\sigma} \vec{\nu}) (\vec{\sigma} m_0^* + \sigma_i \sigma_\kappa t_{0ik}^*).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Кроме того

$$A_{ci} = A_{ik}^*; \quad B_{ci} = B_{ik}^*.$$

Разложим тензоры t_{0ik} и T_{0ik} на неприводимые части:

$$t_{0ik} = \bar{t}_{0ik} + 1/2 \varepsilon_{ikl} t_{0l} + 1/3 \delta_{ik} t_0,$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_{0ik} = \bar{t}_{0ki} &= g_A \int \bar{\Psi}_2 \bar{\beta} \left(\frac{\sigma_i x_\kappa + \sigma_\kappa x_i}{2r} - 1/3 \frac{\vec{\sigma} r}{r} \delta_{ik} \right) \Psi_1 d\tau; \\
 t_{0l} &= g_A \int \bar{\Psi}_2 \bar{\beta} \frac{|\vec{\sigma} r|_l}{r} \Psi_1 d\tau; \quad t_0 = t_{0ii} = g_A \int \bar{\Psi}_2 \bar{\beta} \frac{\vec{\sigma} r}{r} \Psi_1 d\tau,
 \end{aligned}$$

и

$$\sigma_i \sigma_\kappa t_{0ik} = t_0 + \vec{\sigma} a_0, \quad \text{где } a_0 = m_0 + it_0.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие комбинации коэффициентов α_i и β_i .

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^* \alpha_k + \beta_i^* \beta_k &= \lambda_{ik}, \quad \alpha_i^* \beta_k + \beta_i^* \alpha_k = \chi_{ik}, \quad \alpha_i^* \alpha_k - \beta_i^* \beta_k = \mu_{ik}, \\
 -i(\alpha_i^* \beta_k - \beta_i^* \alpha_k) &= \eta_{ik}.
 \end{aligned}$$

Используя значения коэффициентов α_i и β_i ($i = 0, 1, c$), мы для коэффициентов λ_{ik} , χ_{ik} , μ_{ik} и η_{ik} получим значения приведенные в табл. 1.

§ 2. Переходы без изменения спина ядра

Рассмотрим $0-0$ переходы первого запрещения. В этом случае вклад дадут скалярные части тензоров t_{0ik} и T_{0ik} , так что мы будем иметь дело с матричными элементами C_p^0 , C_T^0 и C_l^0 . Для коэффициентов A_{ik} и B_{ik} получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= | -C_p^0 + 1/3 q C_T^0 |^2; \quad B_{00} = \vec{\nu} | -C_p^0 + 1/3 q C_T^0 |^2; \\
 A_{11} &= \frac{1}{9} p^2 | C_T^0 |^2; \quad B_{11} = \frac{1}{9} p^2 | C_T^0 |^2 [2n(n\vec{\nu}) - \vec{\nu}]; \\
 A_{01} &= \frac{p}{3} n \vec{\nu} (-C_T^0 C_p^0 + 1/3 q | C_T^0 |^2); \\
 B_{01} &= \frac{p}{3} (n + i[\vec{\nu} n]) (-C_T^0 C_p^0 + 1/3 q | C_T^0 |^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0c} &= |C_T^0|^2; & B_{cc} &= \vec{v} |C_T^0|^2; \\
 A_{0c} &= (-C_p^0 + \frac{1}{3}qC_T^0) C_T^{0*}; & B_{0c} &= \vec{v} (-C_p^0 + \frac{1}{3}qC_T^0) C_T^{0*}; \\
 A_{1c} &= \frac{1}{3}p(\vec{n} \cdot \vec{v}) C_T^0 C_T^{0*}; & B_{1c} &= \frac{1}{3}p(\vec{n} + i[\vec{n} \cdot \vec{v}]) C_T^0 C_T^{0*}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10) следует

$$\begin{aligned}
 S_{ik} &= \lambda_{ik} A_{ik} + \chi_{ik} (A_{ik} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} + B_{ik} \vec{n}) + \tau_{ik} [n B_{ik}] + \\
 &+ \mu_{ik} (\vec{\sigma} B_{ik}) + (\lambda_{ik} - \mu_{ik}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) (B_{ik} \vec{n}).
 \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая малость αz , разложим λ_{ik} , χ_{ik} , μ_{ik} и τ_{ik} , приведенные в таблице 1 в ряд, причем оставим нулевые степени αz для членов 0,0; 0,1; 1,1; первые степени αz для членов 0, c и 1, c и вторые степени αz для членов c, c . Получаем значения, приведенные в таблице 2.

Таблица 2

| | λ_{ik} | μ_{ik} | χ_{ik} | τ_{ik} |
|--------|--------------------------|--|--|-------------|
| 0,0 | 1 | $\frac{1}{\varepsilon}$ | $\frac{p}{\varepsilon}$ | 0 |
| 0,1 | 1 | $\frac{1}{\varepsilon}$ | $\frac{p}{\varepsilon}$ | 0 |
| 1,1 | 1 | $\frac{1}{\varepsilon}$ | $\frac{p}{\varepsilon}$ | 0 |
| c, c | $\frac{(\alpha z)^2}{4}$ | $\frac{1}{\varepsilon} \frac{(\alpha z)^2}{4}$ | $\frac{p}{\varepsilon} \frac{(\alpha z)^2}{4}$ | 0 |
| 0, c | $\frac{\alpha z}{2}$ | $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha z}{2}$ | $\frac{p}{\varepsilon} \frac{\alpha z}{2}$ | 0 |
| 1, c | $\frac{\alpha z}{2}$ | $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha z}{2}$ | $\frac{p}{\varepsilon} \frac{\alpha z}{2}$ | 0 |

Подставляя (12) в (9) и учитывая внесенные обозначения, мы для угловой корреляции электрон-нейтрино после суммирования по спинам электронов получаем

$$\frac{W(\hat{\theta})}{W_{\text{полн}}} = 1 + v n \vec{v} \cdot \left(1 + \frac{A}{\varepsilon} \right), \quad (14)$$

и для поляризации электрона после усреднения по направлениям испускания нейтрино

$$\frac{2S}{W_{\text{полн}}} = 1 + v n \vec{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{A}{\varepsilon} \right), \quad (15)$$

т. е. продольная поляризация электронов будет

$$\langle \vec{\sigma}_p \rangle = v \left(1 + \frac{A}{\varepsilon} \right), \quad (16)$$

где

$$W_{\text{полн}} = |N|^2 |C_i^0|^2 \left\{ \frac{|\lambda_T^0|^2}{9} (p^2 + q^2 - 2pqv) + |\lambda_p^0|^2 + \frac{(az)^2}{4} - \frac{2}{3}(q + vp) \operatorname{Re} \lambda_p^0 \lambda_T^0 + az \operatorname{Re} \lambda_p^0 + \frac{1}{3} az (q + vp) \operatorname{Re} \lambda_T^0 \right\};$$

$$A = \frac{|N|^2}{3W_{\text{полн}}} |C_i^0|^2 \{ az \operatorname{Re} \lambda_T^0 + \frac{2}{3} q |\lambda_T^0|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_p^0 \lambda_T^0 \}, \quad (17)$$

где

$$\lambda_p^0 = \frac{C_p^0}{C_i^0}, \quad \lambda_T^0 = \frac{C_T^0}{C_i^0}.$$

§ 3. Переходы с изменением спина ядра (легкие ядра)

Рассмотрим теперь случай легких ядер. Мы будем учитывать члены порядка $(az)^2$, т. е. оставим члены $(az)^2$, $(az)(pR_0)$, $(az)v_{\text{ядра}}$, а остальными членами пренебрежем. Тогда согласно (9) и (10) и табл. 2 в случае вариантов V и A получим:

$$\frac{2S}{|N|^2} = \frac{(az)^2}{4} \left\{ A_{cc} \left(1 + \frac{p}{\varepsilon} \vec{\sigma} n \right) + B_{cc} n \left[\frac{p}{\varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \vec{\sigma} n \right] + \frac{1}{\varepsilon} \vec{\sigma} B_{cc} \right\} +$$

$$+ az \left\{ \operatorname{Re} (A_{cc} + A_{1c}) \left(1 + \frac{p}{\varepsilon} \vec{\sigma} n \right) + \operatorname{Re} (B_{0c} + B_{1c}) n \left[\frac{p}{\varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \vec{\sigma} n \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} \vec{\sigma} \operatorname{Re} (B_{1c} + B_{0c}) \right\}, \quad (18)$$

где A_{ik} и B_{ik} определяются согласно (11).

Рассмотрим распад неориентированных ядер. Усредним матричные элементы по начальным проекциям спинов и просуммируем по конечным проекциям, в результате получим:

$$A_{0c} = \left(-C_p^0 + \frac{1}{3} q C_T^0 \right) C_i^{0*} \delta_{ii'} + \left(C_T^0 + \frac{1}{3} q C_R^0 + \frac{i}{3} q C_T^0 \right) C_a^{0*};$$

$$B_{0c} = \vec{\nu} \left\{ \left(-C_p^0 + \frac{1}{3} q C_T^0 \right) C_i^{0*} \delta_{ii'} + \frac{2}{3} \left[-C_T^0 + q C_R^0 - i q C_T^0 \right] C_a^{0*} \right\};$$

$$A_{1c} = \frac{1}{3} p n \vec{\nu} \left\{ C_T^0 C_i^{0*} \delta_{ii'} + (C_R^0 + i C_T^0) C_a^{0*} \right\};$$

$$B_{1c} = \frac{1}{3} p \{ n [C_T^0 C_i^{0*} \delta_{ii'} + (C_R^0 - i C_T^0) C_a^{0*}] \};$$

$$A_{cc} = |C_a^0|^2 + |C_i^0|^2 \delta_{ii'}; \quad B_{cc} = \nu \left(-\frac{1}{2} |C_a^0|^2 + |C_i^0|^2 \delta_{ii'} \right). \quad (19)$$

Определим среднюю продольную поляризацию электронов. Для этого достаточно выражение (19) усреднить по направлениям испускания нейтрино и подставить в (18). Совершая эти действия, получаем:

| | λ_{ih}/K | μ_{ih}/K |
|-----|---|--|
| 0.0 | 1 | $\frac{\gamma_1}{\epsilon}$ |
| 0.1 | $1 - \frac{iaz}{\gamma_1+1} \frac{\gamma_2-\gamma_1+1}{\gamma_2-\gamma_1+3} \frac{p}{\epsilon}$ | $\frac{1}{\epsilon} \frac{\gamma_2+\gamma_1+1}{\gamma_2-\gamma_1+3}$ |
| 1.1 | 1 | $\frac{\gamma_2}{2\epsilon}$ |
| c.c | 1 | $\frac{\gamma_1}{\epsilon}$ |
| 0.c | 1 | $\frac{\gamma_1}{\epsilon}$ |
| 1.c | $1+i \frac{1-\gamma_1}{az} \frac{\gamma_2-\gamma_1+1}{\gamma_2-\gamma_1+3} \frac{p}{\epsilon}$ | $\frac{1}{\epsilon} \frac{\gamma_2+\gamma_1+1}{\gamma_2-\gamma_1+3}$ |

Таблица 1

| γ_{jk}/K | τ_{jk}/K | K |
|--|---|--|
| $\frac{\rho}{\varepsilon}$ | $\frac{az}{\varepsilon}$ | $\frac{1+\gamma_1}{2}$ |
| $\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{iaz}{\gamma_1+1} \frac{\gamma_2-\gamma_1+1}{\gamma_2-\gamma_1+3}$ | $\frac{1}{\varepsilon} \frac{az}{1+\gamma_1} \frac{\gamma_2+\gamma_1+3}{\gamma_2-\gamma_1+3}$ | $\xi(1+\gamma_1) \frac{\gamma_2-\gamma_1+3}{8}$ |
| $\frac{\rho}{\varepsilon}$ | $\frac{az}{2\varepsilon}$ | $\frac{\gamma_2+2}{4} \xi ^2$ |
| $\frac{\rho}{\varepsilon}$ | $\frac{az}{\varepsilon}$ | $\frac{1-\gamma_1}{2} \approx \frac{(az)^2}{4}$ |
| $\frac{\rho}{\varepsilon}$ | $\frac{az}{\varepsilon}$ | $\frac{az}{2}$ |
| $\frac{\rho}{\varepsilon} + l \frac{1-\gamma_1}{az} \frac{\gamma_2-\gamma_1+1}{\gamma_2-\gamma_1+3}$ | $\frac{1-\gamma_1}{az\varepsilon} \frac{\gamma_2+\gamma_1+3}{\gamma_2-\gamma_1+3}$ | $\frac{az}{2} \xi \frac{\gamma_2-\gamma_1+3}{4}$ |

$$\frac{2S}{W_{\text{полн}}} = 1 + \vec{v} \sigma \mathbf{n} \left(1 + \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (20)$$

где

$$W_{\text{полн}} = \frac{(az)^2}{4} \left[|C_a^0|^2 + |C_i^0|^2 \delta_{ii'} \right] + az \operatorname{Re} \left\{ \left[-C_p^0 + \frac{1}{3}(q + vp) C_T^0 \right] C_i^{0*} \delta_{ii'} + \left[C_{\tau}^0 + \frac{1}{3}(q + vp) C_R^0 + \frac{i}{3}(q - vp) C_T^0 \right] C_a^{0*} \right\};$$

$$x = \frac{az}{3W_{\text{полн}}} \operatorname{Re} \left[C_T^0 C_i^{0*} \delta_{ii'} + (C_R^0 - iC_T^0) C_a^{0*} \right]. \quad (21)$$

Итак для поляризации электронов получается следующее выражение:

$$\langle \vec{\sigma}_p \rangle = v \left(1 + \frac{x}{\varepsilon} \right). \quad (22)$$

Во всех приведенных формулах постоянные P_0 , R_0 , m_0 , τ_0 , a_0 , T_0 , t_0 , T_0 и t_0 заменены на C_p^0 , C_R^0 , C_m^0 , C_{τ}^0 , C_a^0 , C_T^0 , C_i^0 , C_T^0 и C_i^0 , соответственно.

В заключение приношу благодарность доценту Саакяну Г. С. за помощь, оказанную при выполнении данной работы.

Ереванский государственный
университет

Поступило 1 VII 1958

Է. Վ. Չուբարյան

ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԱՐԳԵԼՎԱԾ β -ՏՐՈՂՈՒՄՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Հարվածում հաշվված են առաջին կարգի արգելված β -տրոհումների համակարգում թյունների վեկտորական և պոլարիզացիոնական վարիանտների դեպքում, որոնք, ըստ վերջին ժամանակների տեսական պատկերացումների, գերազանցի են մյուս վարիանտների համեմատությամբ:

Վերջնական արդյունքներն ստացված են կամավոր միջուկների դեպքում, երբ անցումների ժամանակ նրանց սպինը մեծ է անփոփոխ: Դուրս են բերված լրիվ համակարգի տեսական [տե՛ս բանաձև (17)] էլեկտրոն-նեյտրոն-անկլոնային կոռելյացիայի [տե՛ս բանաձև (19)] և էլեկտրոնի երկայնական բևեռացման [տե՛ս բանաձև (10)] բանաձևերը:

Թևեթի միջուկների համար հաշվված են պրոցեսի լրիվ համակարգի տեսական [տե՛ս բանաձև (21)] և էլեկտրոնի երկայնական միջին բևեռացումը [բանաձև (22)] նաև այն դեպքում, երբ միջուկի սպինը փոփոխվում է մեկով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynmann R. P. and Gell-Mann M., Phys. Rev. 109, 193 (1958).
2. Berezitskiy V. B., Ioffe B. L., Rudik A. P. and Ter-Martirosyan K. A., Nuclear Physics 5 (1958), 464.
3. Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика, М., Госиздат, тех.-теор. лит., 1953.

А. А. Аковян

О втором начале термодинамики

§ 1. Цель исследования

Второе начало феноменологической термодинамики может быть разбито на два положения.

Первое из них состоит в утверждении [1, А] Существуют функции состояния: термодинамическая* температура (θ) и энтропия (S).

Приращение энтропии в элементарном обратимом процессе

$$dS = \frac{DQ}{\theta},$$

где DQ — количество теплоты, подведенной системе в этом процессе. [1, А] часто называют принципом существования энтропии.

Второе положение устанавливает особенности изменения энтропии в необратимых процессах и может быть выражено неравенством, которое мы назовем неравенством (α).

Давно уже отмечено существование в микромире фактов, противоречащих этому неравенству.

Как известно [2, 4], количество теплоты элементарного обратимого процесса

$$DQ = Cdt + \sum_1^k z_i dx_i^2, \quad (1.1)$$

поэтому [1, А] эквивалентно следующему утверждению:

[1, Б] DQ не является полным дифференциалом какой-нибудь функции состояния, но существуют интегрирующие множители выражения (1.1), превращающие DQ в полный дифференциал.

* Температура t , определяемая посредством произвольного, например, ртутного, термометра, называется эмпирической.

Эмпирическая температура T , определяемая на основании уравнения состояния идеальных газов

$$pv = nRT$$

называется абсолютной температурой.

Температура θ , о которой говорится в [1, А], называется термодинамической.
 θ — одинаковая для всех систем функция эмпирической температуры.

Один из этих множителей

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\theta} \\ \frac{DQ}{\theta} &= dS \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

и тогда

После исследования Каратеодори [1] об основах термодинамики, иногда (и все чаще) рассматривают обе части второго начала как вполне самостоятельные [2].

Тем не менее содержание второго начала обычно выводится из какого-нибудь *одного* постулата: Клаузиуса, Томсона, Каратеодори [3, 4, 5, 6, 1].

Хотя точный смысл неравенства (α) зависит от исходного постулата, однако оно при всех случаях приводит к заключению, что в необратимых адиабатных процессах энтропия увеличивается,

$$d_a S > 0$$

(индекс a означает „в необратимом адиабатном процессе“).

Между тем давно отмечены в микромире такие необратимые адиабатные процессы, при которых энтропия уменьшается [7].

Известны и другие случаи, когда из неравенства (α) выведены неправильные заключения.

Поэтому, при желании изменить содержание второго начала, сделав его применимым ко всем необратимым процессам, не следует исходить из указанных постулатов или из равноценных им — по широте содержания — негативных (т. е. запрещающих некоторые классы процессов) положений.

В настоящем исследовании показано, что принцип существования энтропии

1) может быть выведен без пользования каким бы то ни было негативным положением: достаточно только принять, что в каждой системе — как и в идеальном газе — выражению DQ присущ интегрирующий множитель, зависящий от эмпирической температуры;

2) приводит к таким заключениям о некоторых необратимых процессах, которые не противоречат известным в настоящее время фактам.

§ 2. Первое начало, его некоторые следствия

В настоящем исследовании роль первого начала очень существенна. Поэтому мы несколько остановимся на нем и рассмотрим некоторые из зависимостей, к которым оно приводит.

Заметим, что в §§ 2—6 все процессы предполагаются обратимыми, так что под словом процесс нужно подразумевать „обратимый процесс“.

Пусть U и dU — внутренняя энергия и ее приращение в элементарном изменении состояния системы, а DQ и DW_e — теплота и внешняя работа в процессе, которым осуществляется изменение состояния.

Согласно первому началу

$$dU = DQ + DW_e \quad (e - \text{exterior}). \quad (2.1)$$

Предположим x_1, x_2, \dots, x_k — величины, при изменении которых на dx_1, dx_2, \dots, dx_k совершается внешняя работа

$$DW_e = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_k dx_k = \sum_1^k X_v dx_v, \quad (2.2)$$

X_v — обобщенная сила, сопряженная с обобщенной координатой x_v .

Изотермическому изменению x_v на dx_v соответствует скрытая теплота

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_v dx_v \\ v = 1, 2, \dots, k \end{array} \right\}. \quad (2.3)$$

Кроме того, при постоянных x_1, x_2, \dots, x_k , для изменения температуры на dt необходимо количество теплоты Cdt , где $C \equiv C_x$ — теплоемкость системы при постоянных x_1, x_2, \dots, x_k .

Таким образом, теплота элементарного процесса, в течение которого температура и обобщенные координаты изменяются на $dt, dx_1, dx_2, \dots, dx_k$

$$DQ = Cdt + \sum_1^k \sigma_v dx_v. \quad (2.4)$$

Из (2.1), (2.2) и (2.4) имеем

$$dU = Cdt + \sum_1^k (X_v + \sigma_v) dx_v. \quad (2.5)$$

Отсюда вытекает, что

$$\left. \begin{array}{l} U = U(t, x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \text{и в общем случае} \\ C = C(t, x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \sigma_v = \sigma_v(t, x_1, x_2, \dots, x_k) \\ X_v = X_v(t, x_1, x_2, \dots, x_k) \end{array} \right\}. \quad (2.6)$$

Из (2.5) получаются важные зависимости двух типов.

В самом деле, U — функция состояния и в (2.5) dU — полный дифференциал. По свойству последнего имеем*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial (X_\nu + \sigma_\nu)}{\partial t} \\ \nu &= 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (X_\nu + \sigma_\nu)}{\partial x_\lambda} &= \frac{\partial (X_\lambda + \sigma_\lambda)}{\partial x_\nu} \\ \nu, \lambda &= 1, 2, \dots, k; \quad \nu \neq \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

(2.8) можно записать несколько иначе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\lambda} \\ \nu, \lambda &= 1, 2, \dots, k; \quad \nu \neq \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

§ 3 Примеры

Простыми называют однородные системы постоянного состава, подверженные только внешнему давлению p .

Здесь число обобщенных сил $k=1$; обобщенной координатой и сопряженной с ней силой являются

$$x_1 = v, \quad X_1 = -p \quad (v \text{ — объем системы}) \quad (3.1)$$

и внешняя работа

$$\left. \begin{aligned} DW_e &= -pdv \\ DQ &= Cdt + \sigma_1 dv \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где $C = C_v$ — теплоемкость системы при постоянном объеме, а

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{DQ}{\partial v} \right)_t \\ dU &= C_v dt + (\sigma_1 - p) dv \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Так как $k=1$, то зависимости (2.8) и (2.9) теряют смысл, а (2.7) принимает вид

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_t = \left(\frac{\partial (\sigma_1 - p)}{\partial t} \right)_v \quad (3.4)$$

Частным видом такой системы служит идеальный газ.

* Во всех общих зависимостях индексы при частных производных, указывающие на постоянство величин, опущены. Такими индексами снабжены частные производные при переходе к частным случаям.

Пусть n , T , p , v и c_v — число молей, абсолютная температура, давление, объем и молярная теплоемкость при $v = \text{const}$.

Тогда — по определению идеального газа —

$$pv = nRT, \quad (3.5)$$

$$c_p = c_v(t), \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_1 = +p, \quad (3.7)$$

$$C = nc_v \quad (3.8)$$

причем

$$n = \text{const}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)_t = n \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t = 0.$$

По (3.1) и (3.7) $X_1 + \varepsilon_1 = -p + p = 0$ и, следовательно, (3.4) принимает вид

$$0 = 0.$$

Нужно также иметь в виду, что в случае идеального газа по (3.4) и (3.6)

$$\varepsilon_1 dv = pdv = nRT d \ln v$$

и

$$DQ = n(c_v dt + RT d \ln v). \quad (3.9)$$

Рассмотрим системы, в которых $k = 2$.

Пусть верхнее основание однородного металлического цилиндра закреплено, а к нижнему основанию приложены: растягивающая сила P , линия действия которой совпадает с геометрической осью цилиндра и пара сил, момент M которой параллелен оси цилиндра.

Теперь

$$X_1 = P, \quad X_2 = M,$$

$$x_1 = l, \quad x_2 = \varphi,$$

где l — длина цилиндра, а φ — угол поворота нижнего основания относительно верхнего.

Положив

$$\sigma_1 = \left(\frac{DQ}{dt}\right)_{t, \varphi}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{DQ}{d\varphi}\right)_{t, l},$$

имеем

$$DW_e = Pdl + Md\varphi,$$

$$DQ = Cdt + \sigma_1 dl + \sigma_2 d\varphi,$$

$$dU = Cdt + (P + \sigma_1) dl + (M + \sigma_2) d\varphi,$$

и по (2.7)

$$\left(\frac{\partial C}{\partial l}\right)_{l, v} = \left(\frac{\partial (P + \sigma_1)}{\partial t}\right)_{v, l}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right)_{l, l} = \left(\frac{\partial (M + \sigma_2)}{\partial t}\right)_{l, \varphi}.$$

Согласно (2.9)

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial l} = \frac{\partial M}{\partial l} - \frac{\partial P}{\partial \varphi}.$$

Для нас представляет интерес другая система, в которой $k = 2$. Пусть A' и A'' — простые системы, объем, давление и температура которых соответственно равны

$$v', p', t'; \quad v'', p'', t''.$$

Назовем системой A совокупность систем A' и A'' , приведенных в термическое соприкосновение.

Вследствие термического соприкосновения, температуры t' и t'' становятся одинаковыми

$$t' = t'' = t, \quad (3.11)$$

так что система A — термически однородна.

Во всех других отношениях системы A' и A'' сохраняют полную независимость. В частности изменения dv' и dv'' их объемов независимы одно от другого и теплоемкости C' и C'' являются соответственно функциями состояния систем A' и A'' :

$$\left. \begin{aligned} C' = C'(t, v'), \quad C'' = C''(t, v'') \\ \text{т. е.} \quad \frac{\partial C'}{\partial v''} = 0, \quad \frac{\partial C''}{\partial v'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Таким образом, в системе A

$$\left. \begin{aligned} DW_s = -p'dv' - p''dv'' \\ DQ = Cdt + \sigma'dv' + \sigma''dv'' \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

где

$$C = C' + C'', \quad \sigma' = \frac{DQ}{dv'}, \quad \sigma'' = \frac{DQ}{dv''}$$

и согласно (3.12)

$$\frac{\partial C}{\partial v'} = \frac{\partial C'}{\partial v'}, \quad \frac{\partial C}{\partial v''} = \frac{\partial C''}{\partial v''}. \quad (3.14)$$

На основании (2.7), (3.12) и (3.14) можем написать

$$\frac{\partial C}{\partial v'} = \frac{\partial C'}{\partial v'} = \frac{\partial (\sigma' - p')}{\partial t}, \quad \frac{\partial C}{\partial v''} = \frac{\partial C''}{\partial v''} = \frac{\partial (\sigma'' - p'')}{\partial t},$$

а (2.9) примет вид

$$\frac{d\sigma'}{dv''} - \frac{\partial \sigma''}{\partial v'} = - \left(\frac{\partial p''}{\partial v'} - \frac{\partial p'}{\partial v''} \right), \quad (3.15)$$

причем вследствие независимости состояний систем A' и A'' каждая из частных производных в (3.15) равна 0.

В частном случае, когда A' и A'' — идеальные газы

$$\begin{aligned} C' &= n'c'_v, \quad C'' = n''c''_v, \quad c'_v = c'_v(t), \quad c''_v = c''_v(t), \\ \sigma' &= +p', \quad \sigma'' = +p'' \end{aligned} \quad (3.16)$$

и выражению DQ в (3.13) может быть придан вид

$$DQ = n'(c'_v dt + RTd \ln v') + n''(c''_v dt + RTd \ln v'') \quad (3.17)$$

аналогичный (3.9).

§ 4. Примеры систем, в которых DQ имеет интегрирующий множитель

Согласно (3.6) в (3.9) c_v — функция температуры. Пользуясь этим, можно ввести функцию $\psi = \psi(t)$, удовлетворяющую условию

$$d\psi = \frac{c_v}{T} dt. \quad (4.1)$$

Тогда, разделив обе части (3.9) на T и имея в виду, что

$$n = \text{const},$$

получим

$$\frac{DQ}{T} = dn [\psi(t) + R \ln v]. \quad (4.2)$$

Правая часть (4.2) представляет дифференциал функции

$$n [\psi(t) + R \ln v]$$

и, следовательно, $\frac{DQ}{T}$ — полный дифференциал, а интегрирующим множителем ρ служит $\frac{1}{T}$.

К аналогичному результату приводит и (3.17):

$$\frac{DQ}{T} = dn' [\psi'(t) + R \ln v'] + dn'' [\psi''(t) + R \ln v''], \quad (4.3)$$

где

$$d\psi' = \frac{c'_v}{T} dt, \quad d\psi'' = \frac{c''_v}{T} dt.$$

Сравнивая (4.2) и (4.3) с (1.2), мы заключаем, что

а) в случаях идеального газа и термически однородной системы отделенных друг от друга идеальных газов выражению DQ присущ интегрирующий множитель $\rho = \frac{1}{T}$, а роль термодинамической температуры θ играет абсолютная газовая температура T .

б) энтропия S n молей идеального газа

$$S = n [\psi(t) + R \ln v].$$

В термически однородной системе отделенных друг от друга идеальных газов

$$dS = dS' + dS'',$$

где S , S' и S'' — энтропии систем A , A' , A'' .

Следует иметь в виду, что, если $\rho = \frac{1}{T}$ является интегрирующим множителем, то и $\rho = \frac{a}{T}$, где a — произвольная постоянная, также будет интегрирующим множителем.

Если бы газы A' и A'' не были приведены в термическое соприкосновение, то их температуры t' и t'' были бы различными и вместо (3.16) мы бы имели

$$DQ = n' (c'_v dt' + RT' d \ln v') + n'' (c''_v dt'' + RT'' d \ln v'')$$

или, введя функции $\psi'(t')$, $\psi''(t'')$,

$$DQ = T' dn' [\psi'(t') + R d \ln v'] + T'' dn'' [\psi''(t'') + R d \ln v''];$$

из этой зависимости нельзя получить (4.3), так как $T' \neq T''$.

Это пример, подтверждающий общее положение, что в термически неоднородных системах DQ не имеет интегрирующего множителя.

§ 5. Вывод положения [1, Б]

1°. Естественно допустить, что кроме рассмотренных только что систем могут существовать и другие системы, в которых выражению (1.1) для DQ присущ интегрирующий множитель $\rho = \rho(t)$, оказывающийся функцией только температуры.

Определим те дополнительные зависимости между c , τ , X , при которых это имеет место, и функцию $\rho = \rho(t)$.

Предположим, что выражению (1.1) в некоторой системе присущ интегрирующий множитель $\rho = \rho(t)$, тогда

$$\rho DQ = \rho C dt + \sum_1^k (\rho z_i) dx_i, \quad (5.1)$$

будет полным дифференциалом.

Вследствие этого коэффициенты ρc , ρz_i должны удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho C)}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial(\rho z_\nu)}{\partial t} \\ \nu &= 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho z_\nu)}{\partial x_\lambda} &= \frac{\partial(\rho z_\lambda)}{\partial x_\nu} \\ \nu, \lambda &= 1, 2, \dots, k; \quad \nu \neq \lambda \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Так как $\rho = \rho(t)$, то, воспользовавшись (2.7), можно (5.2) записать так

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = \frac{1}{\sigma_\nu} \frac{\partial X_\nu}{\partial t} \quad (5.4)$$

или, придав индексу ν все значения от 1 до k ,

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial X_2}{\partial t} = \dots = \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial X_k}{\partial t} \quad (5.5)$$

Таким же образом, вследствие того, что ρ не зависит от X_1, X_2, \dots, X_k ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial x_\nu} = 0$$

и (5.3) вместе с (2.9) приводят к зависимостям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\lambda} &= \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Основными для нашей цели являются соотношения (5.5); (5.6) будут использованы позже, хотя (5.6) тоже легко приводят к выражению интегрирующего множителя.

2°. (5.5) означает, что во всякой системе, в которой выражению DQ присущ интегрирующий множитель $\rho = \rho(t)$, произведение

$$\frac{1}{\sigma_\nu} \frac{\partial X_\nu}{\partial t}$$

должно быть одинаковой для всех значений индекса ν , функцией температуры.

Назвав эту функцию $\omega(t)$, имеем из (5.4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \ln \rho}{dt} &= \frac{1}{\sigma_\nu} \frac{\partial X_\nu}{\partial t} = \omega(t) \\ \nu &= 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Так, в случае цилиндра, к нижнему основанию которого приложены растягивающая сила P и пара с моментом, равным M (§ 3), произведения

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial M}{\partial t}$$

должны быть одинаковы и равны функции $\omega(t)$.

В термически однородной системе A , образованной отделенными друг от друга идеальными газами A' и A'' , согласно (3.13) и (3.16)

$$\begin{aligned} X' &= -p', & X'' &= -p'', \\ \varepsilon' &= +p', & \varepsilon'' &= +p'', \end{aligned}$$

и поэтому (5.7) имеет вид

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = -\frac{1}{p'} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)_{v'} = -\frac{1}{p''} \left(\frac{\partial p''}{\partial t} \right)_{v''}.$$

Но в идеальных газах A' и A''

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)_{v'} = \frac{p'}{T}, \quad \left(\frac{\partial p''}{\partial t} \right)_{v''} = \frac{p''}{T}$$

и таким образом

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = -\frac{1}{T}. \quad (5.8)$$

Мы пришли бы к (5.8), рассмотрев систему, состоящую из одного идеального газа.

Интегрируя (5.8), получаем

$$\rho = \frac{a}{T}, \quad (5.9)$$

где a — произвольная постоянная.

В § 4, на основании (4.2), мы установили, что, в случае идеального газа и термически однородной системы отделенных друг от друга газов интегрирующий множитель

$$\rho = \frac{1}{T}. \quad (5.10)$$

Там же было отмечено, что, если (5.10) является интегрирующим множителем, то при любом значении постоянной a (5.9) также будет интегрирующим множителем.

3°. Можно сделать еще один существенный шаг, основываясь на том, что две произвольные системы A' и A'' , приведенные в термическое соприкосновение, можно рассматривать как одну термически однородную систему A .

Вследствие этого внешняя работа и количество теплоты в этих системах выразятся так

$$\left. \begin{aligned} DW'_e &= \sum_1^{k'} X'_v dx'_v, & DW'_i &= \sum_1^{k''} X''_v dx''_v, \\ DW_e &= \sum_1^{k'} X'_v dx'_v + \sum_1^{k''} X''_v dx''_v, \end{aligned} \right\} (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} DQ' &= c' dt + \sum_1^{k'} \sigma'_v dx'_v, \\ DQ'' &= C'' dt + \sum_1^{k''} \sigma''_v dx''_v, \end{aligned} \right\} (5.12)$$

$$DQ = DQ' + DQ'' = C dt + \sum_1^{k'} \sigma'_v dx'_v + \sum_1^{k''} \sigma''_v dx''_v.$$

Здесь

$$C = C' + C''$$

и так как

$$\left. \begin{aligned} C' &= C'(t, x'_1, x'_2, \dots, x'_{k'}), & C'' &= C''(t, x''_1, x''_2, \dots, x''_{k''}), \\ \frac{\partial C'}{\partial x'_v} &= \frac{\partial C'}{\partial x'_v}, & \frac{\partial C''}{\partial x''_v} &= \frac{\partial C''}{\partial x''_v}, \end{aligned} \right\} (5.13)$$

Предполагая, что каждому из выражений (5.12) присущ интегрирующий множитель (ρ' , ρ'' , ρ), можем согласно (5.4) и (5.5) написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \ln \rho'}{dt} &= \frac{1}{\sigma'_v} \frac{\partial X'_v}{\partial t}, & v' &= 1, 2, \dots, k' \\ \frac{d \ln \rho''}{dt} &= \frac{1}{\sigma''_v} \frac{\partial X''_v}{\partial t}, & v'' &= 1, 2, \dots, k'' \\ \frac{d \ln \rho}{dt} &= \frac{1}{\sigma'_v} \frac{\partial X'_v}{\partial t} = \frac{1}{\sigma''_v} \frac{\partial X''_v}{\partial t} \end{aligned} \right\} (5.14)$$

Ввиду произвольности систем A' и A'' , заключение, к которому приводит последняя строка (5.14), таково:

[5. A] Если в любой системе элементарному количеству тепла присущ интегрирующий множитель, зависящий от температуры, то произведение $\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial X_v}{\partial t}$ и равная ему производная $\frac{d \ln \rho}{dt}$ должны быть одной и той же функцией температуры для всех систем.

Следует заметить, что в той мере, в какой осуществляемые процессы можно считать обратимыми, зависимость (5.5) и заключение

[5, А] допускают экспериментальную проверку и были бы подтверждены экспериментом.

4°. Выше, (5.9), мы видели, что и случае идеального газа

$$\rho = \frac{a}{T},$$

где a — произвольная постоянная, а T — абсолютная газовая температура.

Поэтому, основываясь на (5.9) и [5, А], можем утверждать:

[5, А] а) зависящий от температуры интегрирующий множитель элементарного количества теплоты для всех систем один и тот же и равен

$$\rho = \frac{a}{T},$$

[5, Б] б) термодинамическая температура $\theta = \frac{T}{a}$ и таким образом

$$\rho = \frac{1}{\theta}.$$

Термодинамическая температура пропорциональна абсолютной газовой температуре, нуль обеих шкал совпадает.

Обычно принимают $a = 1$, и тогда $\theta = T$.

в) в термически однородной системе

$$dS = \frac{DQ}{\theta},$$

т. е.

$$\theta dS = T dS_{\text{энт}},$$

где

$$dS_{\text{энт}} = \frac{DQ}{T}.$$

Совокупность пунктов а, б, в [5, Б] эквивалентна [1, А] или [1, Б].

5°. В этой статье мысль о возможности существования интегрирующего множителя DQ , зависящего от температуры, связана с идеальными газами.

Тем не менее, при нежелании обращаться к свойствам идеальных газов, можно функцию $\rho = \rho(t)$ определить следующим образом.

Из (5.7) получаем

$$\ln \rho = \int \omega(t) dt + \ln a$$

и

$$\rho = a e^{\int \omega(t) dt},$$

где a — произвольная постоянная, а функция $\omega(t)$ считается установленной по данным эксперимента.

§ 6. Несколько полезных соотношений

Некоторые из зависимостей, полученных в предыдущих параграфах, представляют самостоятельный интерес и широко используются.

1. Так, выписав выражение для элементарной внешней работы

$$DW_e = \sum_1^k X_i dx_i,$$

и сопоставив с зависимостью (5.6)

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i},$$

приходим к заключению, что при $t = \text{const}$ DW_e — полный дифференциал и поэтому в изотермическом цикле

$$\int DW_e = 0. \quad (6.1)$$

Этот очень важный результат называется теоремой Мутье и находит широкое применение в физической химии.

(6.1) можно рассматривать как постулат Томсона в применении к обратимым циклам.

2. Приняв $p = \frac{1}{T}$, из (5.7) получаем

$$\sigma_i = -T \frac{\partial X_i}{\partial t}, \quad (6.2)$$

а (6.2) и (2.7) дают

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -T \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2}. \quad (6.3)$$

В частном случае, когда $DW_e = -pdv$,

$$X_1 = -p, \quad x_1 = v, \quad C = C_v, \quad \tau_1 = \left(\frac{DQ}{\partial v} \right)_t;$$

поэтому (6.2) и (6.3) принимают вид

$$\sigma_1 = T \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_t = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)_v.$$

§ 7. Об изменении энтропии в некоторых необратимых процессах

Хотя принцип существования энтропии относится только к обратимым процессам, но с его помощью можно установить знак изменения энтропии в некоторых необратимых процессах.

Ниже рассмотрено несколько таких процессов.

1. Пусть равновесные состояния 1 и 2 бесконечно близки, а пе-

реход из состояния 1 в состояние 2 может быть осуществлен и необратимым и обратимым способами.

Теплоту и внешнюю работу необратимого процесса обозначим через $D\bar{Q}$ и DW_e ; те же величины в обратимом процессе будут DQ и DW_e .

Известны случаи, когда

$$D\bar{W}_e = DW_e = 0 \quad (7.1)$$

(например, сообщение системе теплоты при постоянстве всех обобщенных координат x_1, x_2, \dots, x_k ; этот процесс необратим, если температуры источника и системы отличаются на конечную величину; при бесконечно малой разности температур процесс обратим).

Обыкновенно же

$$D\bar{W}_e > DW_e \quad (7.2)$$

(например, если система деформируется при наличии трения или вязкости; если смешение газов осуществляется удалением непроницаемой диафрагмы, отделяющей газы, то $D\bar{W}_e = 0$, тогда как в обратимом смешении газов $DW_e < 0$ всегда).

Случаи

$$D\bar{W}_e < DW_e$$

неизвестны.

Согласно первому началу

$$DQ + DW_e = D\bar{Q} + D\bar{W}_e.$$

Поэтому при (7.1)

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} D\bar{Q} &= DQ = TdS \\ dS &= \frac{D\bar{Q}}{T} \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

а при (7.2)

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} D\bar{Q} &< DQ = TdS \\ dS &> \frac{D\bar{Q}}{T} \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

2. Пусть 1 и 2 бесконечно близкие состояния произвольной адиабатной системы.

В состоянии 1 равновесие поддерживается внешними силами X_1, X_2, \dots, X_k ; состояние же 2 получается из 1, если необратимый адиабатно-изодинамический процесс, вызванный одновременным удалением всех внешних сил, прекратить наложением соответствующих связей.

Отнеся индексы 1 и 2 к состояниям 1 и 2, имеем

$$U_2 = U_1 \quad (7.5)$$

и можно легко показать, что

$$S_2 > S_1 \quad (7.6)$$

В самом деле, можно вернуть систему обратимым способом из состояния 2 в состояние 1, удалив адиабатную оболочку и восстановив силы X_1, X_2, \dots, X_k . При этом работа сил X_i будет безусловно положительной и вследствие (7.5) теплота DQ процесса окажется отрицательной, ввиду чего приращение энтропии

$$S_1 - S_2 = \frac{DQ}{T} < 0,$$

т. е.

$$S_2 - S_1 > 0. \quad (7.7)$$

Таким образом

[7, A] во всяком необратимом адиабатно-изодинамическом процессе энтропия системы увеличивается.

Следует отметить еще один хорошо известный адиабатно-изодинамический необратимый процесс: выравнивание температур в системе, части которой имеют различные температуры, когда обобщенные координаты x_1, x_2, \dots, x_k постоянны (и внешняя работа равна 0).

В этом случае вместе с выравниванием температур увеличивается энтропия системы.

3. У нас нет средств, опираясь на [1, A], показать, что энтропия увеличивается в *любом* необратимом адиабатном процессе.

Вместе с тем, хотя обычно в таких процессах энтропия возрастает, но в адиабатных явлениях микромира (броуновское движение, флуктуации) энтропия может и увеличиваться и *уменьшаться*.

Выше мы видели, что в необратимых процессах при (7.3)

$$dS = \frac{D\bar{Q}}{T},$$

а при (7.1)

$$dS = \frac{DQ}{T}.$$

Следовательно, часто употребляемое неравенство (7.4) неправильно при условии (7.1).

§ 8. Заключение

В § 7 было указано, что второе начало, основанное на одном из постулатов Клаузиуса, Томсона, Каратеодори, приводит к заключению

$$d_w S > 0,$$

не всегда согласному с фактами.

Это обстоятельство редко упоминается в литературе.

Обычно отмечают другие дефекты. Так, указывают, что, как постулат Клаузиуса, так и постулат Томсона относятся к циклам [8]. Между тем в применении удобны только положения, относящиеся к элементарным процессам.

В качестве дефекта обычно отмечают и то, что в этих постулатах и (или) выводах из них положения [1, А] и неравенства (α) содержатся понятия и представления, заимствованные из техники (термические двигатели, их коэффициенты полезного действия), и все рассуждения чужды физикам [8], [9].

Метод Каратеодори имеет очевидные преимущества: его постулат относится к элементарным процессам (а не циклам); содержание этого постулата уже содержания постулатов Клаузиуса и Томсона. Выводы из постулата получаются — как обычно в физике — с помощью математического аппарата [8], [9].

Однако по общему мнению метод Каратеодори значительно труднее, так как он опирается на математическую теорему, неизвестную рядовому физику и не имеющую применений в других областях физики [10], [11].

Мне представляется, что прием, которым доказывается в настоящей статье существование энтропии и термодинамической температуры, свободен от недостатков постулатов Клаузиуса и Томсона и математически совершенно прост, так как основан на свойствах полного дифференциала и на общеупотребительном критерии существования полного дифференциала.

К этому следует еще прибавить, что принцип существования энтропии позволяет установить знак изменения S в некоторых необратимых процессах.

Поступило 19 XI 1958

Ս. Ս. Հակոբյան

ԹԵՐՄՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԿԶԲՈՒՆՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թերմոդինամիկայի երկրորդ սկզբունքը կարելի է արձեղ երկու մասի, որոնք այժմ սովորաբար դիտարկվում են որպես ինքնուրույն դրույթներ:

Դրանցից առաջինն այն սնդուսն է, թե զրույթյուն ունեն վիճակի ֆունկցիաներ՝ (b) թերմոդինամիկական ջերմաստիճան և (S) էնտրոպիա, ընդ որում հակադարձելի պրոցեսներում

$$DQ = b dS$$

որակը DQ — պրոցեսի ջերմաթյունն է:

Երկրորդ դրույթը սրոշում է էնտրոպիայի փոփոխությունների սահմանահատվածները անհակադարձելի պրոցեսներում:

Այդ երկու դրույթների արտածման հիմքում դնում են մի որևէ պրոստուլատ:

Ընդունված պրոստուլատները բերում են այն արդյունքին, որ բոլոր անհակադարձելի պրոցեսներում էնտրոպիան աճում է, մինչդեռ հակառակն են դեպքեր, որոնք հակասում են այդ դրույթին:

Այդ պատճառով նպատակահարմար է միշտ ճիշտ (1) դրույթի արտածումը անջատել երկրորդ սկզբունքի երկրորդ մասի արտածումից:

Այստեղ (1)-ը արտածված է այն ենթադրություներից, որ, իդեալական դազերին համանման, ամեն մի այլ սխեմանում նույնպես DQ -ի համար արտահայտությունը հակադարձելի պրոցեսում ունի ջերմաստիճանից կախված ինտեգրող բազմապատկիչ:

Ընդամին՝ 1) (1)-ի հետ միասին ստացվում են մի խումբ աննշտություններ, 2) ստացվում է էնտրոպիայի փոփոխության նշանը մի քանի անհակադարձելի պրոցեսներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Carathéodory, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik, Math. Ann 67, 355 (1909).
2. T. Ehrenfest-Afanassjewa, Die Grundlagen der Thermodynamik, Leiden, Brill, 1956, стр. 67.
3. А. А. Аконин, Общая термодинамика, Москва, Энергониздат, 1955, стр. 370 и 391
4. A. B. Pippard, The elements of classical thermodynamics, Cambridge University Press, 1957, стр. 29—30.
5. A. H. Wilson, Thermodynamics and statistical mechanics, Cambridge University Press, 1957, стр. 18.
6. М. А. Леонтович, Введение в термодинамику ГТТИ, М.-Л., 1950, стр. 46.
7. У меня под рукой нет работ А. Эйнштейна и М. Смолуховского по молекулярной физике, где это впервые установлено. Высказывание Эйнштейна приводится в сборнике: Эйнштейн и современная физика, Москва, ГТТИ 1956, стр. 9.
8. R. Etsenschitz, The Principle of Carathéodory, Science Progress № 170 (1955), стр. 246.
9. Max Born, Natural Philosophy of Cause and Chance Oxford University Press, 1958, стр. 38.
10. A. B. Pippard, l.c. стр. 31.
11. A. H. Wilson l.c. стр. 64.