

А. Л. Шагинян

## Об одном основном неравенстве в теории функций и ее приложениях

§ 1. Пусть  $f(z)$  голоморфная в круге  $|z| < 1$  и удовлетворяет условию:

$$\int_0^{2\pi} |\lg |f(e^{i\varphi})|| d\varphi$$

равностепенно абсолютно непрерывна относительно  $\varphi$  при  $\rho \rightarrow 1$ . Класс таких функций обозначим через  $C$ . Как известно [1], функции  $f(z)$  этого класса имеют почти всюду на  $|z|=1$  предельные значения  $f(e^{i\varphi})$ , произведение Бляшке из нулей функции  $f(z)$ .

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - \alpha_k}{1 - z\bar{\alpha}_k}$$

сходится равномерно внутри  $|z| < 1$  и (ср. [1] стр. 74)

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lg |B(\rho e^{i\varphi})| d\varphi = 0. \quad (1)$$

Допустимы также предельные переходы

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi &= \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \\ \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi &= \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Класс таких функций имеет параметрическое представление

$$f(z) = e^{i\alpha} \cdot B(z) \cdot e^{\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \lg p(\theta) d\theta}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — вещественное постоянное,  $B(z)$  — произведение Бляшке и  $\lg p(\theta)$  суммируемая функция ([1], стр. 89—93).

Рассмотрим гармоническую в  $|z| < 1$  функцию

$$\lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right|$$

где  $\lambda$  — порядок нуля функции  $f(z)$  в  $z=0$ . Представим эту функцию в круге  $|z| < 1$  посредством интеграла Пуассона

$$\begin{aligned} \lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} d\varphi - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |B(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} d\varphi - \lambda \lg \rho. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\geq \lg |B(z)| + \frac{\rho - |z|}{\rho + |z|} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \frac{\rho - |z|}{\rho + |z|} \int_0^{2\pi} \lg |B(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \lambda \lg |z| - \lambda \lg \rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Совершив предельный переход согласно равенствам (1)–(3), получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\geq \frac{1 - |z|}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{\pi(1 - |z|)} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \lg |B(z)| + \lambda \lg |z|. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть теперь  $\omega(t)$  произвольная положительная непрерывная функция, не возрастающая в промежутке  $[0, 1]$ , удовлетворяющая дополнительному условию

$$\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} < \infty \quad (6)$$

где  $E$  — произвольная совокупность в промежутке  $[0, 1]$ .

Возьмем внутри круга непрерывную дугу  $L$ , соединяющую центр круга с окружностью. Для простоты будем считать пока, что окружности  $|z| = \text{const}$  пересекают  $L$  в одной точке.

Спроектируем круговыми дугами точки совокупности  $E$ , лежащей на радиусе  $0 \leq x < 1$ , на дугу  $L$ . Получаемую таким образом совокупность на  $L$  обозначим через  $E^*$ .

Интеграл

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z|$$

будет некоторый криволинейный интеграл, распространенный по совокупности  $E^*$ . Под знаком интеграла  $z$  текущая координата точек из совокупности  $E^*$  на дуге  $L$ .

Помножим теперь обе части неравенства (5) на  $\omega(|z|)$  и проинтегрируем по совокупности  $E^*$ .

Получим

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| \geq \frac{1}{4\pi} \int_E (1-t) \omega(t) dt \cdot \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} \cdot \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| + \\ + \lambda \int_E \omega(t) \lg t dt.$$

Будем считать  $\max \omega(t) = \omega(0) = 1$ . Тогда

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| \geq \frac{1}{4\pi} \int_E (1-t) \omega(t) dt \cdot \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} \cdot \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| - \lambda. \quad (7)$$

Оценим теперь снизу интеграл

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E \omega(|z|) \lg \left| \frac{z - a_k}{1 - \bar{z} a_k} \right| d|z|.$$

Из элементарных геометрических соображений следует, что

$$\left| \frac{z - a_k}{1 - \bar{z} a_k} \right| \geq \left| \frac{|z| - |a_k|}{1 - |z| |a_k|} \right|.$$

Поэтому

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t - |a_k|}{1 - t |a_k|} \right| dt, \quad (8)$$

где интегрирование производится по вещественному аргументу  $t$  на совокупности  $E \subset [0, 1)$ .

Приходим к оценке интеграла

$$\int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t - a}{1 - ta} \right| dt,$$

где  $0 < a < 1$ .

$$\int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t - a}{1 - ta} \right| dt = \int_{E(t < a)} \omega(t) \lg \frac{a - t}{1 - at} dt + \\ + \int_{E(t > a)} \omega(t) \lg \frac{t - a}{1 - ta} dt, \quad (9)$$

где первый интеграл распространен на порцию совокупности  $E$  в промежутка  $0 \leq t < a$ , а второй интеграл на дополнительную часть  $E$ . Ради кратности обозначим

$$\int_{E(t < a)} \omega(t) \lg \frac{a-t}{1-at} dt = I_1$$

$$\int_{E(t > a)} \omega(t) \lg \frac{t-a}{1-at} dt = I_2.$$

Оценка  $I_1$ .

Подставим

$$\frac{a-t}{1-at} = x, \quad (10)$$

следовательно

$$dt = -\frac{1-a^2}{(1-ax)^2} dx$$

$$I_1 = - \int_{E^*(x < a)} \omega \left( \frac{a-x}{1-ax} \right) \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} \lg x dx,$$

где совокупность  $E^*(x < a)$  получена из  $E(t < a)$  преобразованием (8); и так как при этом  $dx$  и  $dt$  имеют обратные знаки, то снизу указано стрелкой направление интегрирования справа налево.

$$I_1 = -(1-a^2) \int_{E^*(x < a)} \omega \left( \frac{a-x}{1-ax} \right) \frac{\lg \frac{1}{x}}{(1-ax)^2} dx.$$

Нам в дальнейшем достаточно будет пользоваться выводимыми оценками при

$$a > \frac{1}{2}.$$

Поэтому указанные интегралы будем оценивать при этом условии.

Разбиваем теперь  $I_1$  на два интеграла

$$I_1 = -(1-a^2) \int_{E^*(x < \frac{1}{2})} \omega \left( \frac{a-x}{1-ax} \right) \frac{\lg \frac{1}{x}}{(1-ax)^2} dx -$$

$$-(1-a^2) \int_{E^*(\frac{1}{2} < x < a)} \omega \left( \frac{a-x}{1-ax} \right) \frac{\lg \frac{1}{x}}{(1-ax)^2} dx < -$$

$$-(1-a^2) \frac{\omega(0)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \int_0^1 \lg \frac{1}{x} dx -$$

$$-(1-a^2) \int_{E^*\left(\frac{1}{2} < x < a\right)} \omega\left(\frac{a-x}{1-ax}\right) \frac{\lg 2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-ax)} dx.$$

Первый интеграл вычисляется, а в последнем перейдем опять к аргументу  $t$  посредством соотношения (8).

Получим

$$I_1 > -8(1-a) - 4 \lg 2 (1-a) \int_{E\left(\frac{a-1/2}{1-a/2} < t < a\right)} \omega(t) \frac{dt}{1-at}.$$

Окончательно

$$I_1 > -4(1-a) \left\{ 2 + \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (11)$$

Оценка  $I_2$ .

$$I_2 = \int_{E(t > a)} \omega(t) \lg \frac{t-a}{1-at} dt.$$

Подставляя

$$\frac{t-a}{1-at} = x, \quad dt = \frac{1-a^2}{(1+ax)^2} dx,$$

получим

$$I_2 = (1-a^2) \int_{E^*} \omega\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) \frac{\lg x}{(1+ax)^2} dx,$$

где  $E^*$  образ  $E(t > a)$ , при преобразовании  $\frac{t-a}{1-at} = x$ . Но здесь  $\frac{a+x}{1+ax}$  возрастающая функция, поэтому

$$I_2 > -2\omega(a)(1-a) > -2\omega(0)(1-a).$$

В силу оценок для  $I_1$  и  $I_2$ , получаем

$$\int_E \omega(t) \lg \left| \frac{t-a}{1-ta} \right| dt > -2(1-a) \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (12)$$

Представим теперь произведение Бляшке  $B(z)$  в виде

$$B(z) = \prod_{|a_k| < \frac{1}{2}} \frac{z - a_k}{1 - z a_k} \prod_{|a_k| > \frac{1}{2}} \frac{z - a_k}{1 - z a_k}.$$

Из (8) и (10) получим

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \int_E \omega(t) \lg \prod_{|a_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |a_k|}{1 - t|a_k|} \right| dt -$$

$$- 2 \sum_{|a_k| > \frac{1}{2}} (1 - |a_k|) \cdot \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}$$

или

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \int_E \omega(t) \lg \prod_{|a_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |a_k|}{1 - t|a_k|} \right| dt -$$

$$- 2 \sum_1^{\infty} (1 - |a_k|) \cdot \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (13)$$

Для оценки интеграла в правой части, воспользуемся известным неравенством Иенсена

$$\lg \prod_1^{\infty} |a_k| \geq \lg \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi.$$

Обозначив число нулей  $a_k$ , удовлетворяющих неравенству

$$|a_k| < \frac{1}{2},$$

через  $n\left(\frac{1}{2}\right)$ , получим из предыдущего неравенства

$$\lg \left(\frac{1}{2}\right)^{n\left(\frac{1}{2}\right)} \geq \lg \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi,$$

или

$$n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi \lg 2} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \quad (14)$$

Элементарно вычисляется интеграл

$$\int_0^1 \lg \left| \frac{x - \alpha}{1 - x\alpha} \right| dx = \alpha \lg \alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \lg(1 - \alpha)$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\left| \int_0^1 \lg \left| \frac{x-\alpha}{1-x\alpha} \right| dx - \alpha \lg \frac{1}{\alpha} + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \lg \frac{1}{1-\alpha} \right|$$

Первое слагаемое достигает наибольшего значения при  $\alpha = \frac{1}{e}$ , а второе достигает наибольшего значения при  $\alpha = 0$ . Поэтому

$$\left| \int_0^1 \lg \left| \frac{x-\alpha}{1-x\alpha} \right| dx \right| < \frac{1}{e} + 1 < 2.$$

В силу этих оценок

$$\int_E \omega(t) \lg \prod_{|\alpha_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |\alpha_k|}{1 - t|\alpha_k|} \right| dt > -\omega(0) n \left( \frac{1}{2} \right) \cdot 2 > -$$

$$-2 \left\{ \frac{1}{\lg 2} + \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi \lg 2} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}.$$

Из (13) получается

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq -$$

$$- \frac{2}{\lg 2} \left\{ 1 + \lg 2 \cdot \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \cdot \left\{ 5 + 2 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\} \right\}. \quad (15)$$

Из

$$\lg \left| \prod_1^{\infty} |\alpha_k| \right| \geq \lg \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi, \quad (16)$$

так как

$$1 - x \leq e^{-x} \quad \text{при } 0 < x < 1,$$

получаем

$$\prod_1^{\infty} |\alpha_k| \leq e^{-\sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|)},$$

а отсюда

$$\sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < -\lg \prod_1^{\infty} |\alpha_k|.$$

Тогда в силу неравенства (13) Иенсена

$$\sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi.$$

На основании этого неравенства перепишем (12) в виде

$$\int_E^{\omega} (|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq -3 \left\{ 1 + \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\} - \\ - 2 \left\{ \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\} \left\{ 5 + 2 \int_E^{\omega} \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\} \quad (17)$$

или

$$\int_E^{\omega} (|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq - \\ - \left( 13 + 4 \int_E^{\omega} \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C,$$

где постоянное

$$C = -3 - 13 \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} - 4 \int_E^{\omega} \frac{\omega(t)}{1-t} dt.$$

Сформулируем полученные оценки в виде следующей леммы.

**Основная лемма.** Если  $B(z)$ ,  $B(0) \neq 0$  есть произвольное сходящееся произведение Бляшке и  $\omega(t)$  непрерывная, невозрастающая функция в промежутке  $0 \leq t < 1$ , удовлетворяющая условию

$$\int_E^{\omega} \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \infty, \quad \omega(0) = 1, \quad (18)$$

то

$$\int_E^{\omega} (|z|) \lg |B(z)| d|z| \geq \int_E^{\omega} \omega(t) \lg \prod_{|\alpha_k| < \frac{1}{2}} \left| \frac{t - |\alpha_k|}{1 - t|\alpha_k|} \right| dt - \\ - 2 \sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \left\{ 5 + 2 \int_E^{\omega} \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\}. \quad (19)$$

Если же  $B$  есть произведение Бляшке некоторой функции  $f(z)$  из класса  $S$ , то

$$\int_E \omega(|z|) \lg B(z) |dz| > - \\ - \left( 13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi - C$$

где

$$C = 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt + 13 \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + 3. \quad (20)$$

Легко показать, что для произвольного произведения Бляшке, вообще говоря, возможны случаи, когда

$$\int_E \lg |B(z)| |dz| = -\infty.$$

В самом деле, из равенства

$$\int_E \lg \left| \frac{x-\alpha}{1-x\alpha} \right| dx = \alpha \lg \alpha + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \lg(1-\alpha),$$

следует, для произведения Бляшке с положительными нулями  $\alpha_k$ , для сходимости интеграла

$$\int_0^1 \lg |B(x)| dx$$

необходимо и достаточно

$$и \left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < \infty \\ \sum_1^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \lg \frac{1}{1 - |\alpha_k|} < \infty \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В частности, если  $\alpha_k > 0$

$$\sum_1^{\infty} (1 - \alpha_k) < \infty,$$

и однако

$$\sum_1^{\infty} (1 - \alpha_k) \lg \frac{1}{1 - \alpha_k} = \infty,$$

что имеет место, например, при

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{k (\lg k)^s},$$

где

$$1 < s < 2$$

получим

$$\int_0^1 \lg |B(x)| dx = -\infty,$$

однако  $B(z)$  сходится.

Таким образом для неравенства типа

$$\int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z| > -\infty$$

присутствие какого-то убывающего множителя типа  $\omega(t)$  необходимо.

Докажем, что и порядок убывания  $\omega(t)$ , характеризуемый условием

$$\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} < \infty,$$

также точный.

Для этого считая  $\omega(t)$  опять же монотонно убывающей, исходя из соотношения

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \infty$$

оценим

$$\int_0^1 \omega(|z|) \lg |B(z)| d|z|.$$

Предварительно оценим асимптотически интеграл

$$I = \int_0^1 \omega(t) \lg \left| \frac{t-a}{1-at} \right| dt$$

при  $a \rightarrow 1$ .

$$I < - \int_0^a \frac{\omega(t)}{1-t} dt \cdot (1-t) \lg \frac{1-at}{a-t} dt. \quad (22)$$

Функция  $y = (1-t) \frac{1-at}{a-t}$  положительная в промежутке  $0 < t < a$ , причем  $y(0) = \lg \frac{1}{a}$  и  $y(a) = \infty$ . Определим наименьшее значение функции  $y(t)$  в промежутке  $0 < t < a$ .

$$y'(t) = \lg \frac{a-t}{1-at} + \frac{(1-t)(1-a^2)}{(a-t)(1-at)}$$

Нетрудно видеть, что эта функция обращается в нуль в единственной точке  $t_0$ ,  $0 < t_0 < a$  и при  $a \rightarrow 1$  также  $t_0 \rightarrow 1$ .

Подставим в равенстве

$$\lg \frac{a-t_0}{1-at_0} + \frac{(1-t_0)(1-a^2)}{(a-t_0)(1-at_0)} = 0$$

$$1-a = \delta_1, \quad 1-t_0 = \delta_2, \quad \delta_2 > \delta_1$$

получим

$$\lg \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2 + \delta_1} + \frac{\delta_2 \cdot \delta_1 (1+a)}{(\delta_2 - \delta_1)(\delta_2 + \delta_1)} = 0.$$

Переходя к пределу, когда  $a \rightarrow 1$ , получим для предела отношения  $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ , т. е. для  $\Delta = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\delta_2}{\delta_1}$  равенство

$$\lg \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} + \frac{2\Delta}{\Delta^2 - 1} = 0, \quad (23)$$

которое имеет единственный корень в промежутке  $1 < \Delta < \infty$ .

И так, для точки минимума имеем асимптотическую оценку

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} \rightarrow \Delta > 1 \quad \text{т. е.} \quad 1-t_0 \sim \Delta(1-a).$$

Подставляя это значение в  $y(t)$ , получим оценку  $\min y(t)$  ( $0 < t < a$ ) при  $a \rightarrow 1$

$$I_{\min} \approx \Delta(1-a) \lg \frac{\Delta+1}{\Delta-1}, \quad (24)$$

где постоянное  $\Delta$  есть корень уравнения (23).

Тогда из (22) получим

$$I < -y(t_0) \int_0^{t_0} \frac{\omega(t)}{1-t} dt,$$

или асимптотически

$$I < -\Delta \lg \frac{\Delta+1}{\Delta-1} (1-a) \int_0^{1-\Delta(1-a)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt. \quad (25)$$

Ради строгости рассуждений, изменив немного постоянное число  $\Delta$ , можно считать

$$J^* < -\Delta \lg \frac{\Delta+1}{\Delta-1} \sum_{k=n_0}^{\infty} (1-a_k) \int_0^{1-\Delta(1-a_k)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt, \quad (26)$$

где  $a_k > 0$  нули исследуемого произведения Бляшке, а  $n_0$  достаточно большое число, для которого выполняются (25), с несколько измененным по сравнению с корнем уравнения (23) значением  $\Delta$  для всех  $a_k$  ( $k = n_0, n_0 + 1, \dots$ ).

Из условия

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \infty \quad (27)$$

следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1-\Delta(1-a_k)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \infty. \quad (28)$$

Покажем теперь, что сколь медленно при  $x \rightarrow 1$  не расходился интеграл

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{1-t} dt$$

к бесконечности, всегда можно указать такое сходящееся произведение Бляшке, для которого

$$\int_0^1 \omega(t) \lg |B(t)| dt = -\infty.$$

В самом деле, пусть  $\psi(x)$  монотонная, сколь угодно медленно возрастающая к бесконечности дифференцируемая функция в промежутке  $[0; 1]$ .

Выберем функцию  $\omega(t)$  из соотношения

$$\int_0^{1-\Delta(1-x)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \psi(x).$$

Получаем

$$\psi'(x) = \frac{\omega[1-\Delta(1-x)]}{1-x},$$

а отсюда

$$\omega(t) = \frac{1-t}{\Delta} \psi' \left( 1 - \frac{1-t}{\Delta} \right). \quad (29)$$

Тогда

$$\int_0^{1-\Delta(1-a_k)} \frac{\omega(t)}{1-t} dt = \psi(a_k), \quad (30)$$

где  $\psi(a_k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$  с заданной сколь угодно медленной скоростью.

Для доказательства нашего утверждения остается определить числа

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \rightarrow 1$$

такие, что

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) < \infty$$

а

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) \psi(a_n) = \infty.$$

Возьмем функцию  $\psi$  из логарифмической шкалы  $\psi(x) = \lg_p \frac{1}{1-x}$ , где  $\lg_p t$  есть  $p$ -кратный логарифм.

При больших значениях  $p$ ,  $\psi(x)$  будет сколь угодно медленно возрастающей в этой шкале. Возьмем тогда

$$1 - a_n = \frac{1}{n \lg n \dots (\lg_p n)^{1+p}}$$

тогда

$$\psi(a_n) = \lg_p \{n \lg n \dots \lg_p n^{1+p}\} > \lg_p n;$$

при  $n > e^{\frac{p}{e \dots e}}$  или  $1 - a_n < C$ ,

где  $C$  — некоторая постоянная, зависящая от  $p$ .

$$(1 - a_n) \psi(a_n) > \frac{1}{n \lg n \lg_2 n \dots (\lg_p n)^p}.$$

Поэтому

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) < \infty$$

и

$$\sum_1^{\infty} (1 - a_n) \psi(a_n) = \infty$$

тем самым наше утверждение доказано.

§ 2. Применим теперь доказанную лемму для вывода одного весьма полезного неравенства.

Пусть опять  $f(z)$  принадлежит классу  $C$  в круге  $|z| < 1$ .

Тогда из неравенства (5) при  $\omega(t)$ , удовлетворяющей условиям нашей леммы, получим

$$\begin{aligned} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| |dz| &\geq \int_E \omega(|z|) \lg |B(z)| |dz| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_E (1-t) \omega(t) dt \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \int_E \omega(t) \lg t dt > \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi - \\
 & - \left( 13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt - \frac{1}{2} \int_E (1-t) \omega(t) dt \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\
 & + \lambda \int_E \omega(t) \lg t dt - C
 \end{aligned}$$

а отсюда, учитывая неравенство

$$\lambda \int_E \omega(t) \lg t dt > \lambda \int_0^1 \lg t dt = \lambda,$$

получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi & < \frac{\pi}{\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| + \\
 & + \frac{13 + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\frac{1}{\pi} \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где

$$C = 3 + \lambda + 13 \lg \frac{\lambda!}{|f^{(\lambda)}(0)|} + 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt. \quad (32)$$

Применив теперь к  $\lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right|$  формулу Пуассона, получим

$$\begin{aligned}
 \lg \left| \frac{f(z)}{z^\lambda B(z)} \right| & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z| \cos(\theta - \varphi) + |z|^2} d\varphi + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - |z|^2}{\dots} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |\rho^\lambda B(\rho e^{i\varphi})| \dots d\varphi, \quad (33)
 \end{aligned}$$

так как  $f(z)$  принадлежит классу  $C$ , то в неравенстве

$$\lg |f(z)| \leq \frac{\rho}{\rho - |z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{\rho - |z|}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi +$$

$$+ \frac{\rho - |z|}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg |\rho^{\lambda} B(\rho e^{i\varphi})| d\varphi,$$

вытекающем из (32), перейдя к пределу, когда  $\rho \rightarrow 1$ ; согласно (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ (1-|z|) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg^- |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

В силу неравенства (31) отсюда получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ (1-|z|) \cdot \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\pi}{\int_E \frac{\omega(t)}{1-t}} \int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| + \right. \\ &\left. + \frac{13+4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\pi \int_E \frac{\omega(t)}{1-t}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.** Если  $f(z)$  принадлежит к классу  $S$  функций, представимых в виде (3), и  $\omega(t)$  непрерывная, невозрастающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t} < \infty, \quad \omega(0) = 1$$

на произвольной совокупности  $E$  на отрезке  $0 \leq t < 1$ , то в любой точке круга  $|z| < 1$  имеет место оценка

$$|f(z)| \leq A \exp \left\{ \frac{1-|z|}{4} \frac{\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z|}{\int_E \frac{\omega(t) dt}{1-t}} + \right.$$



$$\left. + \frac{1}{\pi(1-|z|)} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}$$

где

$$A = \exp \left\{ \frac{13 + 4 \int_E^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\frac{1}{\pi} \int_E^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + C \right\} \quad (36)$$

а  $C$  определяется соотношением (32).

В частном случае, когда  $f(z)$  ограничена

$$|f(z)| < 1;$$

$E$  — есть отрезок  $0 \leq t < 1$  и равномерно на некоторой дуге, соединяющей начало координат с окружностью

$$|f(z)| < \varepsilon,$$

тогда будет

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi = 0$$

и

$$\int_E \omega(|z|) \lg |f(z)| d|z| < C \lg \varepsilon.$$

Поэтому в этом частном случае получим

$$|f(z)| < \varepsilon^{c(1-|z|)}$$

т. е. неравенство Миллу ([2] либо [3]).

Так как в правой части неравенства (35) фигурирует значение  $\lg |f(z)|$  по внутренней к кругу совокупности, то это неравенство имеет применения в такого же рода вопросах, что и неравенство Миллу, а также в вопросах более тонких, связанных с поведением аналитических функций у границы области их существования.

§ 3. Пусть  $f(z)$  голоморфна в  $|z| < 1$  и

$$|f(z)| < 1.$$

Относительно таких функций известно, что если

$$f(z) \neq 0$$

то существующие почти всюду, согласно Фату, граничные значения  $f(e^{i\varphi})$  удовлетворяют неравенству

$$\int_0^{2\pi} \lg |f(e^{i\varphi})| d\varphi > -\infty$$

(Карлеман [4]).

Отсюда следует, что для тождественного обращения в нуль ограниченной в круге функции  $f(z)$  необходимо и достаточно условие

$$\int_0^{2\pi} \lg |f(e^{i\varphi})| d\varphi = -\infty. \quad (37)$$

В частности, если  $f(z)$  ограничена в  $|z| < 1$  и удовлетворяет на границе  $|z|=1$  неравенству

$$|f(z)| < e^{-\frac{1}{(1-|z|)}}, \quad (38)$$

то, как легко проверить, выполняется условие (37) и, следовательно,

$$f(z) \equiv 0.$$

Однако пример функции

$$f_0(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{1-z} \right\}$$

показывает, что существует ограниченная в  $|z| < 1$  функция, которая при приближении к границе по внутренней кривой, например по положительной оси, стремится к нулю с такой же скоростью (38), однако  $f_0(z) \not\equiv 0$ . Это показывает, что для тождественного обращения  $f(z)$  в нуль нужно будет потребовать, чтобы  $f(z)$  на внутренней дуге убывал быстрее, чем это дается неравенством (38). Для определения этой предельной скорости применим неравенство (36), которое в нашем случае примет вид

$$|f(z)| < A \exp \left\{ \frac{1-|z|}{4} \cdot \frac{\int_0^1 \omega(x) \lg |f(x)| dx}{\int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x} dx} \right\}.$$

Отсюда видно, что при

$$\int_0^1 \omega(x) \lg |f(x)| dx = -\infty \quad (39)$$

$$f(z) \equiv 0.$$

Если охарактеризовать скорость убывания  $f(z)$  на оси  $OX$  неравенством типа

$$|f(x)| < e^{-\frac{p(x)}{1-x}} \quad (40)$$

где  $p(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 1-0$ , то (39) будет выполнено при

$$\int_0^1 \frac{\omega(x) dx}{1-x} < \infty \quad (41)$$

и

$$\int_0^1 \frac{\omega(x) p(x)}{1-x} dx = \infty. \quad (42)$$

Условием (42) определяется рост  $p(x)$ , гарантирующий согласно неравенству (40) тождественное обращение  $f(z)$  в нуль.

Например, если брать

$$\omega(x) = \frac{1}{\lg \frac{1}{1-x} \lg_2 \frac{1}{1-x} \cdots \lg_p^{1+\varepsilon} \frac{1}{1-x}}$$

$\varepsilon > 0$ , где  $\lg_p t$  есть  $p$ -кратный логарифм, то условие (41) будет выполнено. Тогда неравенство (39) примет вид

$$\int_0^1 \frac{p(x) dx}{(1-x) \lg \frac{1}{1-x} \cdots \lg_p^{1+\varepsilon} \frac{1}{1-x}} = \infty$$

что будет иметь место, например, при

$$p(x) = \left( \lg_p \frac{1}{1-x} \right)^\varepsilon.$$

Таким образом для ограниченной в круге  $|z| < 1$  функции неравенство

$$|f(z)| < e^{-\frac{\left( \lg_p \frac{1}{1-|z|} \right)^\varepsilon}{1-|z|}}$$

при сколь угодно малом  $\varepsilon$  и любом  $p$  гарантирует равенство

$$f(z) \equiv 0.$$

Пусть теперь  $p(x)$  дифференцируема и, сколь угодно медленно возрастая, стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow 1-0$ .

Возьмем за  $\omega(x)$  функцию

$$\omega(x) = \frac{(1-x)p'(x)}{[p(x)]^{1+\varepsilon}}$$

где  $\varepsilon > 0$  сколь угодно малое фиксированное число. Легко проверить, что для этой функции  $\omega(x)$  выполняется условие (41) и одновременно (42). Отсюда следует:

Теорема 2. Если  $f(z)$  голоморфна в  $|z| < 1$  и  $f(z) \in C$ , то из

$$|f(z)| < e^{-\frac{p(|z|)}{1-|z|}}$$

следует  $f(z) \equiv 0$ , если только  $p(|z|)$  при  $|z| \rightarrow 1$  стремится к  $+\infty$ , хотя бы сколь угодно медленно. Что условие (41) относительно  $\omega(x)$ , следовательно и относительно  $p(x)$ , ослабить нельзя, следует из того, что при  $\omega(x)$ , удовлетворяющем условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x} dx = \infty, \quad (43)$$

теорема 2, вообще говоря, не верна.

Это следует из следующего примера.

Пусть

$$f_0(z) = e^{-\frac{1}{1-z}}.$$

Эта функция ограничена в  $|z| < 1$  и при  $\omega(x)$ , удовлетворяющем условию (43).

$$\int_0^1 \omega(|z|) |g|f(z)|d|z| = -\infty,$$

где интеграл берется по любой внутренней дуге, исходящей из точки  $z=1$  внутри угла  $|\arg(1-z)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Однако  $f_0(z) \neq 0$ .

Если применить все предыдущее к функции

$$\varphi(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

то получим условие

$$\int_E \omega(|z|) |g|f_1(z) - f_2(z)|d|z| = -\infty$$

из которого следует  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ .

Замечание. Изложенное в § 2 мы сформулировали для ограниченной функции, но все это верно и для функций из класса  $C$ .

В частности для двух таких функций условие единственности (или их совпадения) будет то же самое, что и предыдущее, причем совокупность  $E$  и кривая по которой берется интеграл, достаточно произвольны.

При частных предположениях относительно функции  $f(z)$ , конечно, можно будет получить изложенное в параграфе 2 и без помощи неравенства (35).

Наконец заметим, по поводу неравенства (35) и известного неравенства Миллу, что вначале Миллу вывел свое неравенство, имея

оценку функции во всей области и вторую оценку на внутренней дуге. В дальнейшем начали рассматривать совсем другую задачу. Брали некоторую область  $\Omega$  внутри круга и функцию  $f(z)$ , голоморфную внутри  $\Omega$ , причем в области  $\Omega$

$$|f(z)| < M,$$

а в граничных точках  $\Omega$ , лежащих внутри  $|z| < 1$ , считали

$$|f(z)| < \varepsilon \quad (44)$$

и давали оценку для  $|f(z)|$  во внутренних точках  $\Omega$  на окружности  $|z| = \text{const} < 1$ . Из оценки  $|f(z)|$  в этой постановке следует результат в первоначальной постановке и конечно это является, более общей задачей, чем то, что имеется в первой работе Миллу. Но когда от равномерно заданных оценок переходим к интегральным данным, то эти две постановки становятся совершенно различными задачами. Это видно хотя бы из того, что в случае первой задачи существует функция, например,  $f_0(z) = e^{-\frac{1}{1-z}}$ , для которой интеграл распространенный по радиусу

$$\int_0^1 \lg |f_0(x)| dx = -\infty$$

в то время как такое же условие по контуру приведет к тождественному нулю.

В настоящей заметке мы занимались задачей в духе первоначальной постановки Миллу.

§ 4. Из (36) можно извлечь одно интересное следствие, полезное для приложений.

Пусть  $E$  некоторая измеримая совокупность внутри круга  $|z| < 1$ . Обозначим через  $E_x$  совокупность точек из  $E$ , лежащих на радиусе  $\arg z = \alpha$ .

Применим к  $E_x$  неравенство (35) и проинтегрируем в пределах  $(0, 2\pi)$ , получим

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| \leq & \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \\ & + \frac{(1-|z|)}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\int_{E_x} \omega(\rho) \lg |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi}{\int_{E_x} \frac{\omega(t)}{1-t} dt} d\alpha + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{13 + 4 \int_{E_x} \frac{\omega(t)}{1-t} dt}{\int_{E_x} \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + \text{const}, \quad (45)$$

где const определяется равенством (32).

И в частности, когда  $|f(z)| < 1$  и

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \text{const}$$

получим простое неравенство

$$|f(z)| < \exp \left\{ \frac{1-|z|}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \iint \frac{\omega(\rho)}{\rho} \lg |f(\rho e^{i\varphi})| \rho d\rho d\varphi + C \right\}, \quad (46)$$

где в показателе фигурирует двойной интеграл по совокупности.

Если

$$\iint_E \frac{\omega(\rho)}{\rho} \lg |f(\rho e^{i\varphi})| \rho d\rho d\varphi = -\infty,$$

то  $f(z) \equiv 0$ , это будет условие единственности, выраженное посредством среднего значения функции  $\lg |f(z)|$  по двумерной совокупности  $E$ .

**Теорема 2.** Если в  $|z| < 1$  задано счетное множество областей  $\{\sigma_k\}$ , причем, в  $\sigma_k$ ,  $|f(z)| < m_k$ , то в любой точке круга получим оценку (при  $|f(z)| < 1$ )

$$|f(z)| < A \cdot \exp \left\{ \frac{1-|z|}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \sum_1^\infty \lg m_k \int_{\sigma_k} \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\sigma \right\}. \quad (47)$$

И это вытекает из (46).

Существование неравенства типа (47) в случае, когда из внутренних областей  $\sigma_k$  имеется одна, можно получить, пользуясь неравенством Надамард'а о трех кругах. Случай счетного числа таких областей с оценкой коэффициентов при  $\lg m_k$  дается неравенством (47).

В частности, если применить (47) в точке  $z_0$  одной из областей  $\sigma_k$ , где  $|f(z)|$  достигает максимума в этой части, то получим

$$\lg m_k < \text{const} + \sum_{p+k} \frac{\int_{\sigma_p} \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\sigma}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \lg m_p, \quad (48)$$

где суммирование распространено по всем значениям индекса  $p$  кроме значения  $p = k$ .

Случай, когда сравниваются максимумы  $|f'(z)|$  лишь в двух подобластях, был указан А. Островским [5]. Неравенство (48) дает такую оценку в случае счетного числа подобластей. Этот случай интересен тем, что дает асимптотическую оценку, связанную с поведением функции у границы и, кроме того, указаны значения коэффициентов.

Отметим одно интересное следствие неравенства (47) либо (48). Если

$$\sum_1^{\infty} \frac{\int_{\sigma_p} \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\sigma}{\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t} dt} \lg m_p = -\infty$$

то  $f(z) \equiv 0$ . Применение (48) к функции  $f(z) = \varphi_{n+m}(z) - \varphi_n(z)$  дает связь между скоростями сходимости в подобластях внутри круга для сходящейся последовательности аналитических функций.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступило 25 XII 1959

### Յ. Լ. Շահինյան

## ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՄԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հ. Միլու-ն ( $z$ ) իր աշխատանքում ավել է հոլոմորֆ ֆունկցիայի մոդուլի գնահատականը, երբ ավրալ շրջանի մեջ արված է նրա մոդուլի մաքսիմումը և մի ներքին աղեղի վրա նրա մոդուլի համար մի այլ գնահատական: Այսպես, եթե  $|z| > 1$  շրջանում

$$\sup |f(z)| = M,$$

և կենտրոնը  $|z| = 1$  եզրի հեռ միացնող  $L$  կորի վրա

$$|f(z)| < \varepsilon \quad (1)$$

այգա, որիէ ներքին կետում

$$|f(z)| < M \cdot \varepsilon^{c(1-|z|)} \quad (2)$$

որ  $c$ -ն բացարձակ հաստատուն է:

Միլու-ի այս անհավասարութեան մեջ ենթադրվում է  $|f(z)|$ -ի հավասարաչափ կերպով վերջը լինելը  $L$  աղեղի վրա, համաձայն (1) անհավասարութեան:

Ներկա հոդվածում մենք հրատարվում ենք այդ խիստ սահմանափակումից և ստանում ենք հետևյալ գնահատականը:

Պարզութեան համար ենթադրենք, որ  $L$  ղիծը լուրաքանչյուր  $|z| = \text{const}$  շրջանագծի հետ հասվում է մեկ կետում: Նշանակենք  $\omega(t)$ -ով մի գրական ֆունկցիա, որը նվազում է  $0 \leq t < 1$  միջակայքում և

$$\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \infty,$$

որ  $E$ -ն որիէ չափելի բազմություն է այդ միջակայքում:

Դիցուք  $|z| < 1$  շրջանում

$$|f(z)| < 1$$

այդ դեպքում՝

$$|f(z)| < \frac{1-|z|}{4} \cdot \frac{\int_E \omega(|z|) \lg|f(z)| d|z|}{\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt}, \quad (3)$$

որ համարիչում գրված է  $L$  զծով տարածված մի կորագիծ ինտեգրալ,  $E$ -ին կոնցենտրիկ շրջանագծերով համապատասխանեցրած բազմություն վրա:

Հոդվածում բերված են ավելի ընդհանուր արդյունքներ ևս: Մասնավորաբար (3)-ը անհավասարությունը կիրառված է ախրուլթի եզրում հոլոմորֆ ֆունկցիայի վարքը ուսումնասիրելու համար:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций. (Изд. МГУ, 1941).
2. Milloux H., Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières. (J. Math. pures et appl. IX S. 3 (1924).
3. Nevanlinna R., Eindeutige Analytische Funktionen. (Berlin, Verlag, Julius Springer, 1936).
4. Carleman T., Les fonctions quasi-analytiques. (Paris, Gauthier-Villars), 1926.
5. Ostrowski A., Über vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen (Abhandl. aus dem Math. Seminar der Hamburg. Univ., T. I. S. 329, 1922).

А. А. Талалаян

## Об универсальных ортогональных рядах

Пусть  $\{\varphi_n(x)\}$  есть полная ортонормированная система функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ .

Ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

называется универсальным, если всякой измеримой функции, определенной почти всюду на  $[a, b]$ , соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел  $n_i, i = 1, 2, \dots$ , что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = f(x) \quad (2)$$

почти всюду на  $[a, b]$ , где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (3)$$

В работе [5] было доказано, что для любой полной ортонормированной системы существует универсальный ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю.

Пусть даны две измеримые функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , определенные почти всюду на  $[a, b]$  и удовлетворяющие неравенству

$$F_1(x) \leq F_2(x) \quad (6)$$

почти всюду на  $[a, b]$ .

Определение А. Ортогональный ряд (1) называется универсальным относительно функций  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , если всякой измеримой функции  $f(x)$ , определенной почти всюду на  $[a, b]$  и удовлетворяющей неравенству

$$F_1(x) \leq f(x) \leq F_2(x) \quad (5)$$

почти всюду на этом сегменте, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел  $n_i, i = 1, 2, \dots$ , что равенство (2) выполняется почти всюду на  $[a, b]$ .

Ортогональный ряд, универсальный относительно функций  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , следуя Д. Е. Меньшову, будем называть рядом типа А  $(F_1, F_2)$ .

Если  $F_1(x) = -\infty$  и  $F_2(x) = +\infty$  для всех  $x$  на  $[a, b]$ , то ясно, что ряд типа  $A(F_1, F_2)$  будет универсальным ортогональным рядом. В настоящей работе мы будем доказывать существование ряда типа  $A(F_1, F_2)$  с пределами неопределенности по мере  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  для любой полной ортонормированной системы.

Как известно, верхний и нижний пределы по мере определяются следующим образом (см. [1], стр. 4).

Пусть

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots \quad (6)$$

есть последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на  $[a, b]$ .

Говорят, что функция  $F(x)$ , определенная почти всюду на  $[a, b]$ , есть верхний предел по мере на  $[a, b]$  последовательности (6), если  $F(x)$  измерима и удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha^\circ. \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0, \quad (7)$$

для любой измеримой функции  $\varphi(x)$ , определенной почти всюду на  $[a, b]$ .

$$\beta^\circ. \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) > \chi(x)] \cdot E[F(x) > \chi(x)]\} > 0, \quad (8)$$

для любой измеримой функции  $\chi(x)$ , определенной почти всюду на  $[a, b]$  и такой, что  $\text{mes} E[F(x) > \chi(x)] > 0$ .

Функцию  $G(x)$ , определенную почти всюду на  $[a, b]$ , называют верхним пределом по мере на  $[a, b]$  последовательности (6), если  $G(x)$  измерима и удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha^\circ. \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) < \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) < G(x)]\} = 0, \quad (9)$$

для любой измеримой функции  $\varphi(x)$ , определенной почти всюду на  $[a, b]$ .

$$\beta^\circ. \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[f_k(x) < \chi(x)] \cdot E[G(x) < \chi(x)]\} > 0, \quad (10)$$

для любой измеримой функции  $\chi(x)$ , определенной почти всюду на  $[a, b]$  и такой, что  $\text{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$ .

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\{\varphi_n(x)\}$  есть полная ортонормированная система функций определенных на  $[a, b]$ . Для любых двух измеримых функций  $F(x)$  и  $G(x)$ , определенных почти всюду на сегменте  $[a, b]$ , и таких, что  $G(x) \leq F(x)$  почти всюду на этом сегменте, существует ортогональный ряд (1), обладающий следующими свойствами:

1°.  $F(x)$  и  $G(x)$  являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на  $[a, b]$  ряда (1).

2°. Какова бы ни была измеримая функция  $\psi(x)$ , определенная почти всюду на  $[a, b]$  и удовлетворяющая условию  $G(x) \leq \psi(x) \leq$

$\ll F(x)$  всюду на этом сегменте, можно определить последовательность частных сумм ряда (1) сходящуюся к  $\psi(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

$$3^\circ. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Теорема 1 была доказана Д. Е. Меньшовым в том частном случае, когда  $\{\varphi_n(x)\}$  совпадает с тригонометрической системой (см. [1]).

Следуя Д. Е. Меньшову (см. [2], стр. 4), введем следующее определение.

Определение В. Пусть даны две измеримые функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , определенные почти всюду на  $[a, b]$  и удовлетворяющие неравенству

$$F_1(x) < F_2(x).$$

Ортогональный ряд (1) будем называть рядом типа В ( $F_1, F_2$ ), если любым четырем измеримым функциям  $\Phi_1(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ , определенным почти всюду на сегменте  $[a, b]$  и удовлетворяющим неравенствам

$$F_1(x) \leq \Phi_1(x) \leq \psi_1(x) < \psi_2(x) < \Phi_2(x) < F_2(x)$$

почти всюду на этом сегменте, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , что  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на  $[a, b]$  последовательности функций  $S_{n_i}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и, кроме того, выполняются равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = \Phi_1(x), \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = \Phi_2(x)$$

почти всюду на том же сегменте.

В работе [2] Д. Е. Меньшовым доказано, что классы тригонометрических рядов типа А ( $F_1, F_2$ ) и типа В ( $F_1, F_2$ ) совпадают, при этом в доказательстве нигде не использовано, что эти ряды являются тригонометрическими.

Таким образом имеет место следующая

Теорема 2. Каковы бы ни были измеримые функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , определенные почти всюду на  $[a, b]$  и удовлетворяющие неравенству (4) почти всюду на этом сегменте, классы ортогональных рядов типа А ( $F_1, F_2$ ) и типа В ( $F_1, F_2$ ) совпадают.

Приступим к доказательству теоремы 1. Мы будем пользоваться следующими леммами:

Лемма 1. Пусть  $\{\varphi_n(x)\}$  — полная ортонормированная система функций, определенных на  $[a, b]$  и  $f(x)$  — произвольная почти везде конечная измеримая функция, определенная на том же отрезке.

Для любого  $\varepsilon > 0$  и целого положительного  $n$  можно определить множество  $e_\varepsilon \subset [a, b]$  и действительные числа  $a_{n+1}$ ,  $a_{n+2}$ ,  $\dots$ ,  $a_m$  такие, что выполняются следующие условия

$$1) \operatorname{mes} e_0 < \varepsilon;$$

$$2) |a_k| < \varepsilon \quad n+1 \leq k \leq m;$$

$$3) \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{e_0} < \varepsilon;$$

$$4) \left\| \sum_{k=n+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2\|f\|_e, \quad n+1 \leq s \leq m,$$

где  $e$  — произвольное измеримое подмножество множества  $e_0 = [a, b] - e_0^*$ .

Лемма 2. Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  — две измеримые функции, определенные на некотором множестве  $E_0$  положительной меры и удовлетворяющие неравенству

$$G(x) < F(x) \quad (11)$$

почти всюду на  $E_0$ .

Тогда существует последовательность  $\{f_n(x)\}$  почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на множестве  $E_0$  и обладающих следующими свойствами.

$$1^\circ. G(x) < f_n(x) < F(x)$$

почти всюду на множестве  $E_0$ .

2°. Для любой измеримой функции  $f(x)$ , удовлетворяющей неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x)$$

почти всюду на  $E_0$ , существует последовательность  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ ; такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$$

почти всюду на множестве  $E_0$ .

3°. Для любого  $\sigma > 0$  имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{mes} E \{ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \geq \sigma \} = 0.$$

Лемма 1 непосредственно следует из леммы 2 работы [4].

Докажем лемму 2. Рассмотрим множество  $M = \{f(x)\}$  всех почти везде конечных измеримых функций  $f(x)$ , определенных почти всюду на  $E_0$  и удовлетворяющих неравенству

$$G(x) < f(x) < F(x)$$

почти всюду на  $E_0$ .

\* Мы обозначаем  $\left( \int_e f^2(x) dx \right)^{1/2} = \|f\|_e$ .

В множестве всех почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на  $E_0$  обычным образом, введем метрику, а именно, если  $f(x)$  и  $g(x)$  — почти везде конечные измеримые функции, определенные почти всюду на  $E_0$ , то полагаем

$$\rho(f, g) = \int_{E_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx. \quad (12)$$

Как известно, сходимость некоторой последовательности  $\{f_n(x)\}$  к  $f(x)$  в этом метрическом пространстве эквивалентна сходимости этой последовательности к  $f(x)$  по мере на множестве  $E_0$ .

Пусть теперь последовательность  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$  всюду плотна в этом метрическом пространстве.

Обозначим через  $\delta_i$  расстояние функции  $g_i(x)$  от множества  $M = \{f(x)\}$ :

$$\delta_i = \inf_{f \in M} \rho(g_i, f)$$

и выберем для каждого  $i$  функцию  $\varphi_i(x)$  из  $M = \{f(x)\}$  такую, что

$$\rho(\varphi_i, g_i) \leq \delta_i + \frac{1}{i}. \quad (14)$$

Выделенная таким образом система  $\varphi_i$  будет обладать следующим свойством:

для любой функции  $f(x) \in M$  существует последовательность  $i_1 < i_2 < \dots < i_k < \dots$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{i_k}(x) = f(x) \quad (15)$$

почти всюду на множестве  $E$ .

В самом деле, пусть  $f(x) \in M$  и  $\varepsilon > 0$  — произвольное положительное число. Возьмем  $g_i(x)$  такую, чтобы

$$\rho(g_i, f) < \frac{\delta}{3} \quad \text{и} \quad i > \frac{3}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Ясно, что  $\delta_i < \frac{\varepsilon}{3}$  и мы получаем

$$\rho(\varphi_i, f) \leq \rho(\varphi_i, g_i) + \rho(g_i, f) < \delta_i + \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \quad (17)$$

Заметим, что функцию  $\varphi_i(x)$ , удовлетворяющую неравенству (17), можно выбрать со сколько угодно большим номером  $i$ . Таким образом для любой функции  $f(x) \in M$  существует последовательность функций из системы  $\{\varphi_i(x)\}$ , сходящаяся к  $f(x)$  по мере на множестве  $E$ . Отсюда следует существование последовательности  $\{\varphi_{i_k}(x)\}$ , удовлетворяющей условию (15).

Пусть  $\varphi(x)$  и  $g(x)$ —две любые функции из множества  $M$ , т. е.

$$G(x) < \varphi(x) < F(x); \quad G(x) < g(x) < F(x) \quad (18)$$

почти всюду на множестве  $E_0$  и пусть  $\sigma > 0$  и  $\varepsilon > 0$ —произвольные положительные числа.

Легко видеть, что из множества  $M$  можно выбрать конечное число функций  $\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_n(x)$ , удовлетворяющих условиям

$$\text{mes } E[|\varphi(x) - \tau_1(x)| \geq \sigma] < \varepsilon, \quad \text{mes } E[|\tau_n(x) - g(x)| \geq \sigma] < \delta \quad (19)$$

и

$$\text{mes } E[|\tau_i(x) - \tau_{i+1}(x)| \geq \sigma] < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, (n-1)).$$

Возьмем две последовательности положительных чисел

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_i > \dots, \quad \sigma_i \rightarrow 0, \quad (20)$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i > \dots, \quad \varepsilon_i \rightarrow 0. \quad (21)$$

Для каждого  $i = 1, 2, \dots$  рассмотрим функции  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_{i+1}(x)$  и положительные числа  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ . Существуют функции  $f_{m_i}(x), f_{m_i+1}(x), \dots, f_{m_{i+1}-1}(x)$  из множества  $M$  такие, что

$$\begin{aligned} \text{mes } [|\varphi_i(x) - f_{m_i}(x)| \geq \sigma_i] &< \varepsilon_i, \\ \text{mes } E[|f_{m_{i+1}-1}(x) - \varphi_{i+1}(x)| \geq \sigma_i] &< \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{mes } E[|f_m(x) - f_{m+1}(x)| \geq \sigma_i] &< \varepsilon_i, \\ (m = m_i, m_i + 1, \dots, m_{i+1} - 2). \end{aligned}$$

К последовательности  $\{\varphi_i(x)\}$  добавим новые функции следующим образом: для каждого  $i = 1, 2, \dots$  между функциями  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_{i+1}(x)$  поместим функции  $f_{m_i}(x), f_{m_i+1}(x), \dots, f_{m_{i+1}-1}(x)$  в возрастающем порядке индекса  $m$ ,  $m_i < m < m_{i+1} - 1$ .

Полученную систему обозначим через  $\{f_n(x)\}$ . Система  $\{f_n(x)\}$  будет удовлетворять условиям леммы 2.

Условие 1° выполнено в силу того, что каждая из функций  $f_n(x)$  принадлежит множеству  $M$ , т. е. удовлетворяет неравенству

$$G(x) < f_n(x) < F(x)$$

почти всюду на  $E_0$ .

Условие 2° выполнено в силу того, что система  $\{f_n(x)\}$  содержит систему  $\{\varphi_i(x)\}$ , которая в силу (15) удовлетворяет условию 2° в том случае, когда  $f(x)$ —любая функция такая, что

$$G(x) < f(x) < F(x) \quad (23)$$

почти всюду на  $E_0$ , а любую функцию, удовлетворяющую неравенству

$$G(x) < f(x) < F(x)$$

можно приблизить в смысле сходимости почти всюду функциями, удовлетворяющими неравенству (23).

Выполнение условия 3° непосредственно следует из определения системы  $\{f_n(x)\}$  и из условия (22).

Доказательство теоремы 1. Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  — измеримые функции, определенные на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющие неравенству

$$G(x) \leq F(x) \quad (24)$$

почти всюду на  $[a, b]$ .

Обозначим через  $E_0$  множество тех точек, где имеет место неравенство

$$G(x) < F(x). \quad (25)$$

В том случае, когда  $\text{mes } E_0 = 0$ , теорема справедлива в силу теоремы 3 работы [3], так как по этой теореме существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на  $[a, b]$  к функции  $f(x) = G(x) = F(x)$  причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ясно, что этот ряд будет удовлетворять условиям теоремы 1 в том частном случае, когда  $F(x) = G(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

Предположим, что  $\text{mes } E_0 > 0$ . Возьмем последовательность  $\{f_n(x)\}$  почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на  $E_0$  и удовлетворяющих условиям леммы 2. Каждую из функций  $f_n(x)$  продолжим в отрезке  $[a, b]$ , полагая

$$f_n(x) = 0 \text{ при } x \in [a, b] - E_0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Возьмем последовательность положительных чисел  $\{\varepsilon_n\}$ , удовлетворяющих условию (21).

Применяя лемму 2, где положено  $f(x) = f_1(x)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1$  и  $n = 1$ , мы можем определить множество  $e_1$  и действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , такие, что выполняются условия:

$$1) \text{mes } e_1 < \varepsilon_1;$$

$$2) |a_k| < \varepsilon_1 \quad 1 \leq k \leq n_1;$$

$$3) \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k \varphi_k(x) - f_1(x) \right\|_{e_1} < \varepsilon_1;$$

$$4) \left\| \sum_{k=1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_2 + 2 \|f_1(x)\|_e, \quad 1 \leq s \leq n_1,$$

где  $e$  — произвольное измеримое подмножество множества

$$ce_1 = [a, b] - e_1.$$

Предположим, что числа  $a_1, a_2, \dots, a_{n_i}, \dots, a_{n_i}$  определены.

В формулировке леммы 2 положим

$$n = n_i + 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_{i+1}, \quad f(x) = f_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x)$$

и определим числа  $a_{n_{i+1}}, a_{n_{i+1}+1}, \dots, a_{n_{i+1}}$  и множество  $e_{i+1}$  так, чтобы выполнялись условия

$$1) \quad \text{mes } e_{i+1} < \varepsilon_{i+1};$$

$$2) \quad |a_k| < \varepsilon_{i+1}, \quad n_i + 1 \leq k \leq n_{i+1};$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^{n_{i+1}} a_k \varphi_k(x) - f_{i+1}(x) \Big|_{ce_{i+1}} < \varepsilon_{i+1};$$

$$4) \quad \left\| \sum_{k=n_i+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_{i+1} + 2 \left\| f_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_e.$$

$n_i + 1 \leq s \leq n_{i+1}$  и  $e$  — произвольное измеримое подмножество множества  $ce_{i+1} = [a, b] - e_{i+1}$ .

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (27)$$

где коэффициенты  $a_k$  определены вышеуказанным процессом. Этот ряд будет обладать тем свойством, что для любого  $i = 0, 1, 2, \dots$  выполняются условия 1), 2), 3), 4)\*.

Функции  $F_1(x)$  и  $G_1(x)$  определим следующим образом:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{при } x \in E_0, \\ 0 & \text{при } x \in CE_0, \end{cases} \quad (28)$$

$$G_1(x) = \begin{cases} G(x) & \text{при } x \in E_0, \\ 0 & \text{при } x \in CE_0. \end{cases} \quad (29)$$

Покажем, что  $F_1(x)$  и  $G_1(x)$  являются соответственно верхним и нижним пределами по мере, ряда (27).

Покажем, что  $F_1(x)$  есть верхний предел по мере ряда (27).

Пусть  $\varphi(x)$  — измеримая функция, определенная на  $[a, b]$ .

\* При  $i = 0$  полагаем  $n_i = 0$ .

Если  $\text{mes } E[\varphi(x) > F_1(x)] = 0$ , то выполнение равенства а° очевидно (см. (7)).

Предположим, что множество  $E[\varphi(x) > F_1(x)]$  имеет положительную меру. Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольное положительное число. Выберем  $\sigma > 0$  такое, чтобы для множества  $E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma]$  выполнялось неравенство

$$\text{mes } E[\varphi(x) > F_1(x)] \leq \text{mes } E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (30)$$

Так как  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  (см. (21)), то из условий 1) и 3) непосредственно следует, что последовательность

$$\sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) - f_i(x) \quad (i=1, 2, \dots)$$

сходится по мере на  $[a, b]$  к нулю, при  $i \rightarrow \infty$ .

С другой стороны, в силу определения функций  $f_i(x)$ , последовательность

$$f_{i+1}(x) - f_i(x) \quad (i=1, 2, \dots)$$

сходится по мере на  $[a, b]$  к нулю при  $i \rightarrow \infty$  (см. (26) и условие 3° леммы 2).

Таким образом будем иметь также, что последовательность

$$f_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x)$$

сходится по мере на  $[a, b]$  к нулю при  $i \rightarrow \infty$ .

В силу вышесказанного и в силу условия 4), так как  $\text{mes } e_i < \varepsilon_i$  и  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , легко видеть, что можно взять  $i_0$  настолько большое, чтобы при  $i \geq i_0$  выполнялись неравенства

$$\text{mes } E \left[ \left| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) - f_i(x) \right| \geq \frac{\sigma}{2} \right] < \frac{\varepsilon}{4}; \quad (31)$$

$$\text{mes } E \left[ \left| \sum_{k=n_{i+1}}^s a_k \varphi_k(x) \right| \geq \frac{\sigma}{2} \right] < \frac{\varepsilon}{4} \quad (32)$$

для всех  $s$ , удовлетворяющих неравенству  $n_i + 1 \leq s \leq n_{i+1}$ .

Возьмем  $n \geq n_{i_0}$ . Предположим, что

$$n_i < n \leq n_{i+1}, \quad i \geq i_0. \quad (33)$$

Рассмотрим множество

$$E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)],$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (34)$$

В силу (30) очевидно имеем

$$\begin{aligned} \text{mes } E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)] &\leq \text{mes } E[S_n(x) > \\ &> \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Так как

$$E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] \subset E[S_n(x) > F_1(x) + \sigma] \quad (36)$$

и так как

$$G_i(x) < f_i(x) < F_i(x) \quad (i=1, 2, \dots) \quad (37)$$

то

$$\begin{aligned} E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x) + \sigma] &\subset \\ &\subset E[|S_n(x) - f_1(x)| > \sigma]. \end{aligned} \quad (38)$$

Из (35) и (38) следует

$$\begin{aligned} \text{mes } [E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)]] &\leq \\ &\leq \text{mes } E[|S_n(x) - f_1(x)| > \sigma] + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что в силу (33) и (34) можно написать

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_i+1}^n a_k \varphi_k(x); \quad i \geq i_0. \quad (40)^*$$

Принимая во внимание (40), очевидно имеем

$$\begin{aligned} E[|S_n(x) - f_i(x)| > \sigma] &\subset E\left[\left|\sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) - f_i(x)\right| > \frac{\sigma}{2}\right] + \\ &+ E\left[\left|\sum_{k=n_i+1}^n a_k \varphi_k(x)\right| > \frac{\sigma}{2}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (31) и (32) получаем

$$\text{mes } E[|S_n(x) - f_i(x)| > \sigma] < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (41)$$

Сравнивая (39) и (41), мы заключаем;

\* при  $n = n_i$  второе слагаемое равенства (40) исчезает.

$$\text{mes} \{ E[S_n(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F_1(x)] \} < \varepsilon. \quad (42)$$

при  $n \geq n_{\varepsilon}$ , где  $n_{\varepsilon}$ , зависит только от  $\varepsilon$ .

Таким образом мы доказали, что для последовательности частных сумм ряда (27) и функции  $F_1(x)$  имеет место первое условие определения верхнего предела (см. условие а° или (7)).

Докажем, что выполняется также условие в° (см. 8).

Пусть  $\chi(x)$  произвольная измеримая функция, определенная почти всюду на  $[a, b]$  и такая, что

$$\text{mes} E[F_1(x) > \chi(x)] > 0. \quad (43)$$

В силу определения функций  $f_i(x)$  и  $F_1(x)$  (см. (28)) (26) и условие 2° леммы 2) мы можем выбрать последовательность  $i_1 < i_2 < \dots$  такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}(x) = F_1(x) \quad (44)$$

почти всюду на  $[a, b]$ .

С другой стороны, как мы уже знаем, последовательность функций

$$S_{n_{i_k}}(x) - f_{i_k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

будет сходиться по мере на  $[a, b]$  к нулю, при  $k \rightarrow \infty$ .

Отсюда и из (44) вытекает, что существует некоторая последовательность  $\{S_{m_k}(x)\}$  частных сумм ряда (27), которая сходится к  $F_1(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

Тогда в силу теоремы Егорова\* легко видеть, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes} \{ E[S_{m_k}(x) > \chi(x)] \cdot E[F_1(x) > \chi(x)] \} = \text{mes} E[F_1(x) > \chi(x)] > 0$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \text{mes} \{ E[S_n(x) > \chi(x)] \cdot E[F_1(x) > \chi(x)] \} > 0.$$

Итак, мы доказали, что  $F_1(x)$  является верхним пределом по мере на  $[a, b]$  последовательности частных сумм ряда (27).

Точно так же можно доказать, что  $G_1(x)$  есть нижний предел по мере на  $[a, b]$  ряда (27).

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (45)$$

обладает тем свойством, что он сходится по мере на  $[a, b]$  к функции

\* Здесь употребляется теорема Егорова в обобщенном виде, когда предельная функция может обращаться в  $+\infty$  или  $-\infty$  на множестве положительной меры.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in E_0 \\ F(x) - G(x) & \text{при } x \in CE_0^*, \end{cases} \quad (46)$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (47)$$

Такой ряд существует согласно теореме 3 работы [3].

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (48)$$

полученный сложением рядов (27) и (45), т. е. имеем

$$c_n = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (49)$$

Покажем, что ряд (48) удовлетворяет условиям теоремы 2.

В силу соотношений (28), (29), (46) и из определения рядов (27) и (45) легко видеть, что функции  $F(x)$  и  $G(x)$  будут соответственно верхним и нижним пределами по мере на  $[a, b]$  ряда (48).

Далее, из условия 2) (см. стр. 10) и из (21) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (50)$$

Отсюда, принимая во внимание (47) и (4), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \quad (51)$$

Проверим выполнение остальных условий теоремы 1. Пусть  $f(x)$  произвольная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x) \quad (52)$$

почти всюду на  $[a, b]$ .

В силу определения множества  $E_0$  будем иметь

$$f(x) = G(x) = F(x) \quad (53)$$

почти всюду на  $CE_0 = [a, b] - E_0$ .

В силу условия 2<sup>o</sup> леммы 2 существует последовательность  $i_1 < i_2 < \dots < i_n < \dots$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}(x) = f(x) \quad (54)$$

почти всюду на  $E_0$ .

Так как последовательность функций

$$\sum_{s=1}^{n_{i_k}} a_s \varphi_s(x) - f_{i_k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

\* Напомним, что множество  $E_0$  есть множество тех точек из  $[a, b]$ , для которых  $G(x) < F(x)$ .

сходится по мере на  $[a, b]$  к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ , то в силу (54) и в силу того, что по определению  $f_i(x) = 0$  при  $x \in CE_0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) последовательность частных сумм

$$\sum_{s=1}^{n_{i_k}} a_s \varphi_s(x)$$

будет сходиться по мере на  $[a, b]$  при  $k \rightarrow \infty$  к функции  $\psi(x)$  определяемой равенством

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E_0, \\ 0 & \text{при } x \in CE_0. \end{cases}$$

Тогда в силу определения ряда (45) и в силу равенства (53) последовательность частных сумм

$$\sum_{s=1}^{n_{i_k}} c_s \varphi_s(x)$$

ряда (48) будет сходиться по мере на  $[a, b]$  при  $k \rightarrow \infty$  к  $f(x)$ .

Отсюда вытекает, что существует последовательность  $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} c_i \varphi_i(x) = f(x)$$

почти всюду на  $[a, b]$ .

Постъ теперь для некоторой последовательности  $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$  последовательность

$$\sum_{i=1}^{m_k} c_i \varphi_i(x)$$

частных сумм ряда (44) сходится на некотором множестве  $E$  положительной меры к некоторой функции  $f(x)$ . Покажем, что

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x) \quad (55)$$

почти всюду на  $E$ .

Выполнение неравенства (55) почти всюду на множестве  $E \cdot CE_0$  вытекает из того, что ряд (48) сходится по мере на  $CE_0$  к функции  $F(x) = G(x)$ .

Проверим выполнение неравенства (55) для множества  $E \cdot E_0$ . Так как ряд (45) сходится по мере на  $E_0$  к нулю, то мы можем предполагать, что последовательность  $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$  обладает тем свойством, что последовательность

$$\sum_{i=1}^{m_k} a_i \varphi_i(x)$$

частных сумм ряда (27) сходится почти всюду на  $E \cdot E_0$  к  $f(x)$ .

Далее мы можем предполагать, что числа  $m_k$  удовлетворяют неравенствам

$$n_{m_k} < m_k \leq n_{m_k+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (56)$$

где  $\{n_{m_k}\}$  некоторая подпоследовательность последовательности чисел  $n_i$ , фигурирующих в условиях 1), 2), 3), 4) (см. стр. 10).

Из неравенства (32), так как в этом неравенстве  $\sigma$  и  $\varepsilon$  произвольные положительные числа, видно, что последовательность

$$\sum_{i=n_{m_k}+1}^{m_k} a_i \varphi_i(x)$$

сходится по мере на  $[a, b]$  к нулю.

Отсюда вытекает, что последовательность

$$\sum_{i=1}^{n_{m_k}} a_i \varphi_i(x)$$

частных сумм ряда (27) сходится по мере на множестве  $E \cdot E_0$  к  $f(x)$ .

Но, как мы видели раньше, в силу условий 1) и 3) (стр. 10), а также в силу (21) последовательность функций

$$\sum_{i=1}^{n_{m_k}} a_i \varphi_i(x) - f_{m_k}(x)$$

сходится по мере на  $[a, b]$  к нулю.

Таким образом последовательность  $\{f_{m_k}(x)\}$  будет сходиться по мере на множестве  $E \cdot E_0$  к  $f(x)$ .

Отсюда в силу того, что

$$G(x) \leq f_{m_k}(x) \leq F(x)$$

почти всюду на  $[a, b]$  получаем

$$G(x) < f(x) < F(x)$$

почти всюду на множестве  $E \cdot E_0$ .

Доказательство теоремы 1 закончено.

Ա. Ա. Թափալյան

ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Ենթադրենք  $\{\varphi_n(x)\}$ -ը  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

շարքը կոչվում է ունիվերսալ, եթե  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված ցանկացած չափելի ֆունկցիային համապատասխանում է  $\{n_i\}$  բնական թվերի այնպիսի անոդ հաջորդականություն, որ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i}(x) = f(x) \tag{2}$$

համարյա ամենուրեք  $[a, b]$ -ի վրա, որտեղ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \tag{3}$$

[5] աշխատության մեջ ցույց է արված, որ ցանկացած լրիվ օրթոնորմալ սիստեմի համար զրույթյուն ունի ունիվերսալ շարք՝ զրոյի ձգտող զրոծափյցներով:

Ենթադրենք տված են  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված  $F_1(x)$  և  $F_2(x)$  չափելի ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են՝

$$F_1(x) \leq F_2(x) \tag{4}$$

անհավասարությանը համարյա ամենուրեք  $[a, b]$ -ի վրա:

Սահմանում (1) շարքը կոչվում է ունիվերսալ  $F_1(x)$  և  $F_2(x)$  ֆունկցիաների նկատմամբ, եթե  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված ցանկացած  $f(x)$  չափելի ֆունկցիայի համար, որը բավարարում է

$$F_1(x) < f(x) \leq F_2(x) \tag{5}$$

անհավասարությանը համարյա ամենուրեք, կարելի է բնորոշել բնական թվերի անոդ  $\{n_i\}$  հաջորդականություն, որի համար (2) հավասարությունը տեղի ունի համարյա ամենուրեք  $[a, b]$ -ի վրա:

Հետևելով Մենշովին,  $F_1(x)$  և  $F_2(x)$  ֆունկցիաների նկատմամբ ունիվերսալ շարքը մենք կանվանենք  $A(F_1, F_2)$  տիպի շարք:

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցված է  $A(F_1, F_2)$  տիպի շարքի զրույթյունը, որի անորոշության սահմանները ըստ չափի հանդիսանում են  $F_1(x)$  և  $F_2(x)$  ֆունկցիաները:

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Меньшов Д. Е.* О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды математического института имени В. А. Стеклова, вып. XXXII, 1950.
2. *Меньшов Д. Е.* О пределах неопределенности частных сумм универсальных тригонометрических рядов. Ученые записки МГУ, вып. 165, математика, том VII 1954.
3. *Талалян А. А.* О сходимости ортогональных рядов. ДАН СССР, том 110, № 4 (1956).
4. *Талалян А. А.* О сходимости по мере рядов по базисам пространства  $L_p$ . Известия АН АрмССР (серия физико-математических наук), том X, 1 (1957).
5. *Талалян А. А.* О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Известия АН АрмССР (серия физико-математических наук), том X, 3, 1957.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, Д. В. Пештмалджян

К теории ортотропных оболочек и пластинок

В работе [1] рассматривалась тонкая анизотропная оболочка в предположении, что касательные напряжения  $\tau_{\alpha\gamma}$  и  $\tau_{\beta\gamma}$  по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы. В настоящей статье рассматриваются тонкие ортотропные оболочки, для которых справедливы уравнения теории оболочек с большим показателем изменямости [2], при произвольном законе изменения напряжений  $\tau_{\alpha\gamma}$  и  $\tau_{\beta\gamma}$  по толщине оболочки [3].

1. Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку, для которой справедливы уравнения теории оболочки с большим показателем изменямости. За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки, отнесенную к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha, \beta$ , совпадающим с линиями главной кривизны; ось  $\sigma\gamma$  направим по нормали к поверхности. Через  $A, B$  и  $k_1, k_2$  обозначим соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны координатной поверхности.

Считаем, что плоскости упругой симметрии материала оболочки в каждой точке параллельны координатным поверхностям.

Предположим, что

а. нормальный к срединной поверхности элемент после деформации не меняет своей длины (т. е., как и во всех существующих теориях, перемещение по нормали  $w$  не зависит от координаты  $\gamma$ );

б. нормальное напряжение  $\sigma_{\gamma\gamma}$  не оказывает существенного влияния на величины деформаций  $e_{\alpha\alpha}, e_{\beta\beta}$  и  $e_{\alpha\beta}$ ;

в. касательные напряжения  $\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\alpha}$  по толщине оболочки изменяются по некоторому закону  $f(\gamma)$  [3].

2. В силу принятых предположений для деформаций  $e_{\alpha\gamma}$  и  $e_{\beta\gamma}$  имеем:

$$e_{\alpha\gamma} = a_{55} f(\gamma) \varphi_1(\alpha, \beta), \quad e_{\beta\gamma} = a_{44} f(\gamma) \varphi_2(\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

где  $a_{55}, a_{44}$  — упругие постоянные,  $f(\gamma)$  — некоторая известная функция [3],  $\varphi_i(\alpha, \beta)$  — произвольные искомые функции.

Подставляя выражение (2.1) в соответствующие уравнения трехмерной теории упругости [4], для перемещений точек оболочки будем иметь:

$$u_x(\alpha, \beta, \gamma) = u(\alpha, \beta) - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + a_{55} \varphi_1 I_0(\gamma), \quad (2.2)$$

$$u_\beta(\alpha, \beta, \gamma) = v(\alpha, \beta) - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + a_{44} \varphi_2 I_0(\gamma),$$

где  $u(\alpha, \beta)$  и  $v(\alpha, \beta)$  — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности.

В силу (2.2), для деформаций  $e_{\alpha\alpha}$ ,  $e_{\beta\beta}$  и  $e_{\alpha\beta}$  имеем:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{\gamma}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \\ &+ \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 \bar{w} + \left( a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + a_{44} \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 \right) \frac{1}{A} I_0(\gamma), \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{\gamma}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \\ &+ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 \bar{w} + \left( a_{55} \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_1 + a_{44} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \right) \frac{1}{B} I_0(\gamma), \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) - \frac{A}{B} \frac{\gamma}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \\ &- \frac{B}{A} \frac{\gamma}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \left[ \frac{a_{55}}{B} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_1 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{a_{44}}{A} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_2 \right) \right] I_0(\gamma), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$I_0(\gamma) = \int_0^\gamma f(\gamma) d\gamma. \quad (2.4)$$

Далее из обобщенного закона Гука получим следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= B_{11} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{\gamma}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 \bar{w} \right] + B_{12} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \right. \\ &- \left. \frac{\gamma}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 \bar{w} \right] + \left[ B_{11} \frac{1}{A} \left( a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ &\left. \left. + a_{44} \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 \right) + B_{12} \frac{1}{B} \left( a_{55} \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_1 + a_{44} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \right) \right] I_0(\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & B_{23} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{\gamma}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + k_2 w \right] + B_{12} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\gamma}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w \right] + \left[ B_{22} \frac{1}{B} \left( a_{44} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + a_{55} \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} \varphi_1 \right) + B_{12} \frac{1}{A} \left( a_{44} \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 + a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] I_0(\gamma), \\
\sigma_{33} = & B_{66} \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{B} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{A}{B} \frac{\gamma}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{B}{A} \frac{\gamma}{\partial x} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] + \\
& + B_{66} \left[ a_{44} \frac{1}{A} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \varphi_2 \right) + \right. \\
& \left. + a_{55} \frac{1}{B} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_1 \right) \right] I_0(\gamma).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь  $B_{ik}$  — известные комбинации упругих постоянных [3].

С помощью формул (2.5) обычным путем [4] определяются усилия и моменты.

$$\begin{aligned}
T_{11} = & C_{11} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w \right) + C_{12} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} u + k_2 w \right) + \left[ a_{44} \frac{1}{B} \left( C_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 + C_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \right) + \right. \\
& \left. + a_{55} \frac{1}{A} \left( C_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \varphi_1 + C_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \frac{I_1(h)}{h}, \\
T_{22} = & C_{22} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} u + k_2 w \right) + C_{12} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w \right) + \left[ a_{55} \frac{1}{A} \left( C_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \varphi_1 + C_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + a_{44} \frac{1}{B} \left( C_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 + C_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \right) \right] \frac{I_1(h)}{h}, \\
T_{12} = & C_{66} \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{B} \right) \right] +
\end{aligned} \tag{2.6a}$$

$$+ C_{66} \left[ a_{44} \frac{1}{A} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \varphi_2 \right) + a_{55} \frac{1}{B} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_1 \right) \right] \frac{I_I(h)}{h}.$$

$$N_{11} = I_{III}(h) \varphi_1; \quad N_{22} = I_{III}(h) \varphi_2. \quad (2.6b)$$

$$M_{11} = D_{11} \left[ -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] +$$

$$+ D_{12} \left[ -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \left[ a_{44} \frac{1}{B} \left( D_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + \right. \right.$$

$$\left. + D_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 \right) + a_{55} \frac{1}{A} \left( D_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + D_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \varphi_1 \right) \left] \frac{12 I_{II}(h)}{h^3}, \quad (2.7a)$$

$$M_{22} = D_{22} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] +$$

$$+ D_{12} \left[ -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] + \left[ a_{55} \frac{1}{A} \left( D_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \right. \right.$$

$$\left. + D_{11} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \varphi_1 \right) + a_{44} \frac{1}{B} \left( D_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + D_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_2 \right) \left] \frac{12 I_{II}(h)}{h^3},$$

$$M_{12} = D_{66} \left[ -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] +$$

$$+ D_{66} \left[ a_{55} \frac{1}{B} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_1 \right) + a_{44} \frac{1}{A} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \varphi_2 \right) \left] \frac{12 I_{II}(h)}{h^3} \quad (2.7b)$$

В этих формулах введены следующие обозначения

$$I_I(h) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} I_0(\gamma) d\gamma; \quad I_{II}(h) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} I_0(\gamma) \gamma d\gamma; \quad (2.8)$$

$$I_{III}(h) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f(\gamma) d\gamma,$$

а для жесткостей растяжения-сжатия ( $C_{ik}$ ) и изгиба ( $D_{ik}$ ) имеем:

$$C_{ik} = hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik}. \quad (2.9)$$

Усилия и моменты должны удовлетворять уравнениям равновесия [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (BT_{11}) - T_{22} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_{12}) + T_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABX &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_{22}) - T_{11} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial x} (BT_{12}) + T_{12} \frac{\partial B}{\partial x} + ABY &= 0, \\ -(k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (BN_{11}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{22}) \right] + Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$ABN_{22} = \frac{\partial}{\partial x} (BM_{12}) + M_{12} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{22}) + M_{11} \frac{\partial A}{\partial \beta},$$

$$ABN_{11} = \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{12}) + M_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial x} (BM_{11}) + M_{22} \frac{\partial B}{\partial x},$$

где  $X, Y, Z$  — компоненты внешней нагрузки по направлениям осей координат.

Подставляя выражения моментов и усилий в уравнения равновесия (2.10), получим систему из пяти дифференциальных уравнений относительно пяти неизвестных  $u, v, w, \varphi_1, \varphi_2$ . Ввиду громоздкости ее не приводим.

Перейдем к частным случаям.

3. Прямоугольные в плане оболочки положительной гауссовой кривизны. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  представляют длины дуг координатных линий; тогда коэффициенты первой квадратичной формы приближенно могут быть приняты равными единице [9, 10, 11] и исходные соотношения (2.5) — (2.8) значительно упрощаются.

Уравнения равновесия (2.10) в этом случае при  $X = Y = 0$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta} &= 0, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial \beta} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x} = 0, \\ -(k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial \beta} &= -Z, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$N_{22} = \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial \beta}, \quad N_{11} = \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x}.$$

Здесь задачу удобнее решать смешанным методом [4]. Введя некоторую функцию  $F(x, \beta)$ , через которую внутренние усилия  $T_{11}, T_{22}, T_{12}$  представляются соотношениями

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \beta}, \quad (3.2)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (3.1). Из третьего уравнения, учитывая значения  $N_{11}$  и  $N_{22}$  из (2.6в), получим первое уравнение разрешающей системы:

$$\Delta_r F - I_{III}(h) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z^2} \right) = Z, \quad (3.3)$$

где 
$$\Delta_r = k_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Второе уравнение строим на базе уравнения неразрывности. Последнее, в усилиях, имеет вид [1]:

$$\frac{C_{22}}{\Omega} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2} - \frac{C_{12}}{\Omega} \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2} + \frac{C_{11}}{\Omega} \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x^2} - \frac{C_{12}}{\Omega} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x^2} - \frac{1}{C_{66}} \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x \partial z^2} - k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

где  $\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$ .

Подставляя сюда значения усилий (3.2), получаем второе уравнение разрешающей системы в виде:

$$\frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) F - \Delta_r w = 0. \quad (3.4)$$

Третье и четвертое уравнения системы получаем непосредственной подстановкой значений моментов (2.7) и перерезывающих сил (2.6в) в два последние уравнения равновесия (3.1).

$$E_2(D_{ik})w - \left[ a_{41} \left( D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) + a_{43} \left( D_{66} + D_{12} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z^2} \right] \frac{12 I_{II}(h)}{h^3} + I_{III}(h) \varphi_2 = 0, \quad (3.5)$$

$$E_1(D_{ik})w - \left[ a_{55} \left( D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) + a_{41} \left( D_{66} + D_{12} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z^2} \right] \frac{12 I_{II}(h)}{h^3} + I_{III}(h) \varphi_1 = 0, \quad (3.6)$$

где для операторов  $L_1$  и  $E_i$  имеем:

$$L_1(C_{ik}) = C_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left( \frac{\Omega}{C_{66}} - 2C_{12} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + C_{22} \frac{\partial^4}{\partial z^4},$$

$$E_1(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}, \quad (3.7)$$

$$E_2(D_{ik}) = D_{22} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы четырех дифференциальных уравнений (3.3)–(3.6) относительно четырех неизвестных функций  $w(x, \beta)$ ,  $\varphi_1(x, \beta)$ ,  $\varphi_2(x, \beta)$ ,  $F(x, \beta)$ .

Эта система может быть приведена к одному уравнению относительно неизвестной функции  $\Phi(x, \beta)$ .

Полагая

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left[ \frac{12 I_{II}}{h^3} a_{44} D_{66} \frac{\partial}{\partial x} L_1(D_{ik}) - I_{III} E_1(D_{ik}) \right] \frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) \Phi, \\ \varphi_2 &= \left[ \frac{12 I_{II}}{h^3} a_{55} D_{66} \frac{\partial}{\partial \beta} L_1(D_{ik}) - I_{III} E_2(D_{ik}) \right] \frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) \Phi, \\ w &= \left\{ a_{55} a_{44} D_{66} L_1(D_{ik}) - \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} \left[ (a_{44} D_{22} + a_{55} D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (a_{44} D_{66} + a_{55} D_{11}) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] + I_{III}^2 \right\} \frac{1}{\Omega} L(C_{ik}) \Phi, \\ F &= \left[ \frac{144 I_{II}^2}{h^6} a_{55} a_{44} D_{66} L_1(D_{ik}) - \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} L_2(a_{ik} D_{ik}) + I_{III}^2 \right] \Delta_r \Phi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

тождественно удовлетворим трем уравнениям разрешающей системы (3.4)–(3.6), а из четвертого уравнения (3.3), для определения функции  $\Phi(x, \beta)$ , получим уравнение десятого порядка:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} D_{66} \Delta_a L_1(D_{ik}) - I_{III}^2 L_3(D_{ik}) \right] \frac{1}{\Omega} L_1(C_{ik}) \Phi - \\ &- \left[ I_{III}^2 + \frac{144 I_{II}^2}{h^6} a_{55} a_{44} D_{66} L_1(D_{ik}) - \right. \\ &\left. - \frac{12 I_{II} I_{III}}{h^3} L_2(a_{ik} D_{ik}) \right] \Delta_r^2 \Phi = -Z, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_2(a_{ik} D_{ik}) &= (a_{55} D_{11} + a_{44} D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a_{44} D_{22} + a_{55} D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ L_3(D_{ik}) &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \\ \Delta_a &= a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + a_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В качестве примера рассмотрим свободно опертую прямоугольную в плане transversально изотропную оболочку под синусоидальной нагрузкой

$$Z = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}. \quad (3.11)$$

Как известно, для трансверсально изотропного тела имеем:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad B_{12} = \mu B_{11}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'}$$

где  $E$  — модуль упругости в плоскости изотропии,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $G'$  — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Считаем, что касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yz}$  по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы [1,3], т. е.

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} \left( \gamma^2 - \frac{h^2}{4} \right).$$

Тогда по (2.4) и (2.8) для интегралов получим:

$$I_0(\gamma) = \frac{\gamma^3}{6} - \gamma \frac{h^2}{8}; \quad I_{II} = -\frac{h^5}{120}; \quad I_{III} = -\frac{h^3}{12}. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.9) ищем в форме:

$$\Phi = \Phi_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}. \quad (3.13)$$

Выбранная функция удовлетворяет условиям свободного опирания [1] по торцам  $x=0, a$  и  $\beta=0, b$ . Подставляя ее в разрешающее уравнение (3.9), определяем  $\Phi_0$ , а затем по (3.8) для прогибов получим следующие величины (для простоты записи оболочку в плане считаем квадратной  $a=b$ ):

а) в случае сферической оболочки ( $k_1 = k_2 = k = \text{const}$ )

$$w_{сф} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \left\{ 1 + 2,4 \frac{D}{hG'} \frac{\pi^2}{a^2} - \right. \\ \left. - k^2 \frac{4A}{1 + 1,2(1-\mu) \frac{D}{hG'} \frac{\pi^2}{a^2} + 4B} \right\}. \quad (3.14)$$

б) в случае цилиндрической оболочки ( $k_1 = 0, k_2 = k = \text{const}$ )

$$w_{ц} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \left\{ 1 + 2,4 \frac{D}{hG'} \frac{\pi^2}{a^2} - \right. \\ \left. - k^2 \frac{A}{1 + 1,2(1-\mu) \frac{D}{hG'} \frac{\pi^2}{a^2} + B} \right\}; \quad (3.15)$$

в) в случае пластинки ( $k_1 = k_2 = 0$ )

$$w_{na} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \left\{ 1 + 2,4 \frac{D}{hG} \frac{\pi^2}{a^2} \right\}. \quad (3.16)$$

где

$$A = \frac{h}{16} \frac{E}{D} \frac{a^4}{\pi^4} + \frac{9(2-\mu)}{25h} \frac{DE}{G^2} + \frac{3(5-\mu)}{40} \frac{E}{G} \frac{a^2}{\pi^2} + \\ + \frac{54(1-\mu)}{125h^2} \frac{D^2 E}{G^2} \frac{\pi^2}{a^2}, \\ B = k^2 \left( \frac{h}{16} \frac{E}{D} \frac{a^4}{\pi^4} + \frac{9(1-\mu)}{50h} \frac{DE}{G^2} + \frac{3(3-\mu)}{40} \frac{E}{G} \frac{a^2}{\pi^2} \right).$$

Принимая модуль сдвига  $G$  бесконечным, получим решение соответствующих задач при гипотезе недеформируемых нормалей. Как нетрудно заметить, полученные результаты при больших значениях  $\frac{E}{G}$  существенно отличаются от величин, полученных при наличии гипотезы Кирхгофа.

Исследуем влияние подъемности оболочки на точность гипотезы Кирхгофа. Значения прогибов (3.13) — (3.15) при различных отношениях  $\frac{h}{a}$ ,  $\frac{E}{G}$  и  $\frac{a}{R}$  помещены в таблицах I—III, первые строки которых представляют решение соответствующей задачи при гипотезе Кирхгофа ( $\frac{E}{G} = 0$ ). В следующих таблицах I'—III' приводятся значения величин

$$\frac{w\left(\frac{E}{G} > 2\right) - w\left(\frac{E}{G} = 0\right)}{w\left(\frac{E}{G} > 2\right)} 100\%, \quad (3.17)$$

представляющих расхождение в процентах результатов классической теории от результатов предлагаемой теории.

Для простоты в расчетах коэффициент Пуассона принимаем равным нулю.

Значения  $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} w_{na}$

Таблица I

$h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,4386	1,1579	1,0395
5	2,0965	1,3948	1,0988
10	3,1930	1,7895	1,1975

Таблица I'

$h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	30,4%	13,6%	3,7%
5	52,3%	28,3%	8,9%
10	68,6%	44,1%	16,4%

Значения  $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} \omega_a$

Таблица II

$\frac{a}{R} = 0,5$				$\frac{a}{R} = 0,8$		
$E/G'$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	0,9830	0,9541	0,8396	0,9575	0,8903	0,6699
2	1,4035	1,0968	0,8662	1,3522	1,0134	0,6874
5	2,0226	1,3071	0,9070	1,9187	1,1911	0,7141
10	3,0247	1,6477	0,9732	2,7979	1,4662	0,7533

Таблица II'

$\frac{a}{R} = 0,5$				$\frac{a}{R} = 0,8$		
$E/G'$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	29,9% <sub>0</sub>	13% <sub>0</sub>	3,1% <sub>0</sub>	29,1% <sub>0</sub>	12,1% <sub>0</sub>	2,5% <sub>0</sub>
5	51,3% <sub>0</sub>	27% <sub>0</sub>	7,5% <sub>0</sub>	50% <sub>0</sub>	25,2% <sub>0</sub>	6,1% <sub>0</sub>
10	67,5% <sub>0</sub>	42% <sub>0</sub>	13,8% <sub>0</sub>	65,7% <sub>0</sub>	39,2% <sub>0</sub>	11% <sub>0</sub>

Значения  $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} \omega_{сф}$

Таблица III

$\frac{a}{R} = 0,5$				$\frac{a}{R} = 0,8$		
$E/G'$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	0,9352	0,8332	0,5648	0,8500	0,6700	0,3368
2	1,3078	0,9467	0,5772	1,1458	0,7375	0,3411
5	1,8129	1,0996	0,5952	1,5341	0,8268	0,3520
10	2,6114	1,3311	0,6491	2,0390	0,9509	0,3587

Таблица III'

$\frac{a}{R} = 0,5$				$\frac{a}{R} = 0,8$		
$E/G'$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2	28,4% <sub>0</sub>	11,9% <sub>0</sub>	2,1% <sub>0</sub>	25,8% <sub>0</sub>	9,1% <sub>0</sub>	1,2% <sub>0</sub>
5	48,4% <sub>0</sub>	24,2% <sub>0</sub>	5,1% <sub>0</sub>	44,5% <sub>0</sub>	18,2% <sub>0</sub>	4,3% <sub>0</sub>
20	64,1% <sub>0</sub>	37,4% <sub>0</sub>	12,9% <sub>0</sub>	58,3% <sub>0</sub>	29,5% <sub>0</sub>	5,5% <sub>0</sub>

Как и следовало ожидать, с увеличением подъемности  $\left(\frac{a}{R}\right)$  оболочки, ошибка, допускаемая при принятии гипотезы Кирхгофа, уменьшается. В случае пластины  $\left(\frac{a}{R} = 0\right)$  расхождения прогибов (таблица I) максимальные.

Дело в том, что при увеличении подъемности значение изгибных параметров на напряженное состояние оболочки уменьшается, в связи с чем уменьшается и влияние перерезывающих сил, т. е. напряжений  $\tau_{\alpha\gamma}$  и  $\tau_{\beta\gamma}$ .

4. Сферическая оболочка и круглая пластинка. Будем считать внутреннюю геометрию срединной поверхности сферической оболочки совпадающей с геометрией круглой пластинки. Тогда полярные координаты  $r$  и  $\beta$  на плоскости будут координатами точки на срединной поверхности сферы [4]. При этом  $A = 1$ ,  $B = r$ ,  $k_1 = k_2 = k = \text{const}$  и из (2.2) — (2.10) могут быть получены все нужные соотношения. Приведем лишь систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ; подставляя значения условий и моментов из (2.7), (2.8) в уравнения равновесия (2.10), получим:

$$\begin{aligned}
 & rC_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + C_{11} \frac{\partial u}{\partial r} - C_{22} \frac{u}{r} + C_{66} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \\
 & + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \beta} - (C_{35} + C_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \beta} + rk(C_{11} + C_{12}) \frac{\partial w}{\partial r} + \\
 & + (C_{11} - C_{22}) kw + \frac{I_1}{h} \left[ C_{11} a_{55} r \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + C_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \right. \\
 & - C_{22} a_{55} \frac{\varphi_1}{r} + C_{66} a_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{66}) a_{41} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \beta} - \\
 & \left. - (C_{12} + C_{66}) a_{41} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} \right] = -rX, \\
 & (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \beta} + (C_{22} + C_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \beta} + C_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{\partial v}{\partial r} - \\
 & - C_{66} \frac{v}{r} + rC_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (C_{12} + C_{22}) k \frac{\partial w}{\partial \beta} + \\
 & + \frac{I_1}{h} \left[ (C_{12} + C_{66}) a_{55} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \beta} + (C_{22} + C_{66}) a_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} + C_{22} a_{41} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \beta^2} + \right. \\
 & \left. + C_{66} a_{41} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - C_{66} a_{41} \frac{\varphi_2}{r} + C_{66} a_{41} r \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} \right] = -rY, \\
 & k(C_{11} + C_{12}) \frac{\partial u}{\partial r} + k(C_{12} + C_{22}) \frac{u}{r} + (C_{12} + C_{22}) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \beta} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k^2 (C_{11} + 2C_{13} + C_{22}) w + \left[ (C_{11} + C_{12}) a_{55} \frac{I_1 k}{h} + I_{III} \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \\
& + \left[ (C_{12} + C_{22}) a_{55} \frac{I_1 k}{h} + I_{III} \right] \frac{\varphi_1}{r} + \left[ (C_{12} + C_{22}) a_{44} \frac{I_1 k}{h} + \right. \\
& \left. + I_{III} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r^2} + Z = 0, \tag{4.1} \\
& - (2D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - D_{22} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{12 I_{II}}{h^3} \left[ (D_{66} + \right. \\
& + D_{12}) a_{55} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \varphi^2} + a_{55} (D_{66} + D_{22}) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi^2} + a_{44} D_{66} \left( r \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) - \\
& \left. - D_{66} a_{44} \frac{\varphi_2}{r} + D_{22} a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi^2} \right] - r I_{III} \varphi_2 = 0 \\
& - (2D_{66} + D_{12}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi^2} + (2D_{66} + D_{12} + D_{22}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \\
& - D_{11} r \frac{\partial^2 w}{\partial r^3} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{12 I_{II}}{h^3} \left[ D_{66} a_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi^2} + \right. \\
& \left. + (D_{12} + D_{66}) a_{44} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \varphi^2} - (D_{66} + D_{22}) a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi^2} + \right. \\
& \left. + D_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + D_{11} a_{55} r \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - D_{22} a_{55} \frac{\varphi_1}{r} \right] - r I_{III} \varphi_1 = 0.
\end{aligned}$$

Остановимся подробнее на случае изгиба круглой трансверсально изотропной пластинки ( $k=0$ ) равномерно распределенной нагрузкой  $Z = q_0$ .

В этом случае система (4.1) сводится к одному уравнению:

$$r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{q_0 r^2}{2D}, \tag{4.2}$$

которое ничем не отличается от обычного уравнения осесимметричного изгиба круглой пластинки. Принятие в п<sup>о</sup> 1 исходного допущения „в“ отражается в граничных условиях.

Приведем значения прогиба в центре пластинки при различных условиях. [ $f(r)$  — квадратная парабола].

а) Свободно опертый край:

граничные условия [3, 5, 12]

$$\text{при } r = a \quad w = 0 \quad \text{и}$$

$$M_r = -D \frac{d^2 w}{dr^2} - D_{II} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + a_{55} D \left( \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{\varphi_1}{r} \right) \frac{12 I_{II}}{h^3} = 0.$$

Из уравнения (4.2) при данных граничных условиях получим следующие значения прогиба:

для трансверсально изотропной пластинки

$$w_{\tau, n} = \frac{q_0 a^4}{64D} \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \left[ 1 + \frac{1,6}{(1 - \mu)(5 + \mu)} \frac{E h^2}{G' a^2} \right]; \quad (4.3)$$

для изотропной пластинки

$$w_n = \frac{q_0 a^4}{64D} \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \left[ 1 + \frac{3,2(1 + \mu)}{(1 - \mu)(5 + \mu)} \frac{h^2}{a^2} \right]. \quad (4.4)$$

Для сравнения приводим значения прогибов  $w_\tau$ , полученные в теории толстых изотропных плит [5].

$$w_\tau = \frac{q_0 a^4}{64D} \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \left[ 1 + 0,4 \frac{8 + \mu + \mu^2}{(5 + \mu)(1 - \mu)} \frac{h^2}{a^2} \right] \quad (4.5)$$

б) Закрепленный край.

1. Закрепляется горизонтальный элемент срединной плоскости края пластинки [5]

$$\text{при } r = a, \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dr} = 0,$$

в этом случае все три решения совпадают, и прогиб центра пластинки равен

$$w_{\tau, n} = w_n = w_\tau = \frac{q_0 a^4}{64D}. \quad (4.6)$$

2. Закрепляется вертикальный элемент краевой цилиндрической поверхности [5]

$$\text{при } r = a, \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 0,$$

для трансверсально изотропной пластинки

$$w_{\tau, n} = \frac{q_0 a^4}{64D} \left[ 1 + \frac{2}{1 - \mu^2} \frac{E h^2}{G' a^2} \right]. \quad (4.7)$$

Для изотропной пластинки по предлагаемой теории и теории толстых плит [5] получаем одно и то же выражение для прогиба в центре пластинки:

$$w_n = w_\tau = \frac{q_0 a^4}{64} \left( 1 + \frac{4}{1 - \mu} \frac{h^2}{a^2} \right). \quad (4.8)$$

Второй член в квадратных скобках выражений (4.3) и (4.6) представляет поправку к гипотезе Кирхгофа, вносимую допущениями, принятыми в п<sup>о</sup> 1. Посчитаем величину прогиба при различных относительных размерах  $\frac{h}{a}$  и отношениях  $\frac{E}{G'}$  ( $\mu = 0,3$ ) (таблицы IV и V).

В таблице IV' приводится погрешность гипотезы Кирхгофа по (3.17).

а) Свободный край

$$\text{Значения } \frac{64D}{q_0 a^4} \frac{1+\mu}{5+\mu} \omega$$

Таблица IV

$E/G'$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	1,12145	1,0450	1,0112
5	1,295	1,0865	1,0215
10	1,4790	1,1730	1,0430

Таблица IV'

$E/G$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2,6	11%	4,3%	1,1%
5	19,3%	7,9%	2,1%
10	32,3%	14,7%	4,1%

Для изотропной пластинки  $\frac{E}{G'} = 2,6$  значения прогиба могут быть получены по теории толстых плит [5] из (4.5)

$$\text{при } \frac{h}{a} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \\ 1,1005 \quad 1,0362 \quad 1,0090 \quad (14.9)$$

Сравнивая значения, полученные по предлагаемой теории и теории Кирхгофа со значениями (4.9), замечаем, что даже в случае изотропной пластинки средней толщины погрешность гипотезы недеформируемых нормалей по сравнению с решением (4.9) достигает 10%, в то время как значения прогиба по предлагаемой теории отличаются от (4.9) на 2%. В случае же анизотропных пластинок ( $\frac{E}{G'} > 2,6$ ) эта погрешность может быть значительно существенней.

Аналогичные расчеты, проведенные для второго способа закрепления пластинки (таблица V), показывают, что в этом случае закрепления гипотеза Кирхгофа неприменима.

$$\text{Значения } \frac{64D}{q_0 a^4} \omega$$

Таблица V

$E/G'$ \ $h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	1,6349	1,2285	1,0572
5	2,2210	1,4395	1,1100
10	3,4420	1,8790	1,2200

Таким образом, граничные условия существенным образом влияют на погрешность гипотезы Кирхгофа.

5. В настоящем  $n^{\circ}$  рассмотрим случай, когда  $f(\gamma)$ ,  $\varphi_1(\alpha, \beta)$  в (2.1) заведомо известны [8]. Они представляют значения касательных напряжений  $\tau_{\alpha\gamma}^0$  и  $\tau_{\beta\gamma}^0$ , полученных при наличии гипотезы Кирхгофа.

Ввиду того, что этот вариант подробно рассмотрен в [6, 7, 8], приведем лишь окончательные результаты.

Для прямоугольных в плане оболочек положительной гауссовой кривизны разрешающая система представляется в виде (из [7] без учета нелинейных членов):

$$L_4(a_{ik})F - \Delta_r \bar{w} = 0, \quad (5.1)$$

$$L_2(D_{ik})\bar{w} + \Delta_r F = q - \frac{h^2}{10}[E_1(D_{ik})\varphi_0 + E_2(D_{ik})\psi_0],$$

где

$$L_4(a_{ik}) = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (a_{00} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (5.2)$$

$$\varphi_0 = a_{35} E_1(B_{ik}) w_0, \quad \psi_0 = a_{44} E_2(B_{ik}) w_0;$$

$w_0$  — значение прогиба при гипотезе недеформируемых нормалей.

Введением функции  $\Phi(x, \beta)$  по формулам

$$w = L_4(a_{ik})\Phi \text{ и } F = \Delta_r \Phi \quad (5.3)$$

сводим систему (5.1) к одному уравнению восьмого порядка:

$$L_2(D_{ik})L_4(a_{ik})\Phi + \Delta_r^2 \Phi = q - \frac{h^2}{10}[E_1(D_{ik})\varphi_0 + E_2(D_{ik})\psi_0]. \quad (5.4)$$

Рассмотрим, как и в п° 3, задачу изгиба свободно опертой прямоугольной в плане трансверсально изотропной оболочки под действием синусоидальной нагрузки (3.11). Представляя функцию  $\Phi(x, \beta)$  в виде (3.13), с помощью (5.4) и (5.3) определяем значения прогиба в центре:

а) для сферической оболочки с прямоугольным контуром

$$w_{сф} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \left[ 1 + 2,4 \frac{D}{hG} \frac{\pi^2}{a^2} - k^2 \frac{A' + B'}{(C' + D')^2} \right]; \quad (5.5)$$

б) для цилиндрической оболочки с прямоугольным контуром

$$w_{ц} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \left[ 1 + 2,4 \frac{D}{hG} \frac{\pi^2}{a^2} - k^2 \frac{A' + 4B'}{(4C' + D')^2} \right]; \quad (5.6)$$

где

$$A' = E^2 h^2 k^2 a^8 \left( 1 + 2,4 \frac{D}{hG} \frac{\pi^2}{a^2} \right),$$

$$B' = 4a^4 h \pi^4 E D \left( 1 + 4,8 \frac{D}{hG} \frac{\pi^2}{a^2} \right),$$

$$C' = 4\pi^4 D, \quad D' = E h k^2 a^4;$$

в) для прямоугольной в плане пластинки, как нетрудно заметить, значение прогиба совпадает с ранее полученным (3.16).

В случае изгиба круглой пластинки равномерной нагрузкой ( $n^2 4$ ) для прогиба получаем те же значения (4.3), (4.6) и (4.7).

Посчитаем значение прогиба по формулам (5.6) и (5.5) (таблицы VI и VII) и сравним с ранее полученными (таблицы II и III).

Значения  $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} \omega_{II}$

Таблица VI

		$\frac{a}{R} = 0,5$			$\frac{a}{R} = 0,8$		
$E/G'$	$h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0		0,9830	0,9541	0,8386	0,9575	0,8903	0,6699
2		1,4068	1,0978	0,8664	1,3584	1,0153	0,6873
5		2,0424	1,3055	0,9081	1,9627	1,2030	0,7138
10		3,1019	1,6612	0,9774	2,9680	1,5158	0,7631

Значения  $\frac{4\pi^4 D}{q_0 a^4} \omega_{\text{с.ф}}$

Таблица VII

		$\frac{a}{R} = 0,5$			$\frac{a}{R} = 0,8$		
$E/G'$	$h/a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0		0,9352	0,8332	0,5648	0,8500	0,6700	0,3368
2		1,3188	0,9496	0,5776	1,1655	0,7407	0,3409
5		1,8942	1,1162	0,5965	1,6339	0,8467	0,3474
10		2,8532	1,3932	0,6280	2,4306	1,0236	0,3597

Сравнения показывают, что при расчете свободно опертых прямоугольных в плане сферической и цилиндрической оболочек под синусоидальной нагрузкой (п<sup>о</sup>3) с успехом может быть использован вариант теории, изложенной в п<sup>о</sup>5. В случае же свободно опертой прямоугольной пластинки (п<sup>о</sup>3) и круглой пластинки при рассмотренных в п<sup>о</sup>4 граничных условиях, по предлагаемой теории и по варианту п<sup>о</sup>5 получаем одни и те же результаты.

Вариант п<sup>о</sup>5 не вводит математических осложнений, и задача может быть с легкостью решена, если имеется решение соответствующей задачи при гипотезе недеформируемых нормалей.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР.

Поступило 15 X 1958

**Ս. Ա. Ամբարձումյան, Ջ. Վ. Փեշտմալջյան**

## ՕՐԹՈՐՈՂ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հորիզոնական դիտարկվում են բարակ օրթոտրոպ թաղանթներ, որոնց համար կիրառելի են սխեմատիկական մեծ զործակից» առնչող թաղանթների տեսության հայտնաբերումները [2]:

Ընդունվում են հետևյալ ենթադրությունները.

1. Միջին մակերևույթին նորմալ, թաղանթի գծային էլիմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց կրկարությունները:

2.  $\sigma_1$  նորմալ լարումները էական աղղկցություն չեն ունենում  $e_{22}$ ,  $e_{33}$  և  $e_{23}$  դեֆորմացիաների վրա:

3.  $\tau_{21}$  և  $\tau_{31}$  շոշափող լարումները ըստ թաղանթի բարձրության փոփոխվում են արված  $f(\gamma)$  օրենքով:

Ընդունված ենթադրությունների հիման վրա շարադրված է «փոփոխության մեծ գործակից» ունեցող անիզոտրոպ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը: Լուծված են մի շարք խնդիրներ՝ գլանային ու սֆերիկ թաղանթների և ուղղանկյուն շրջանային սալերի դեպքում: Ցույց է արված, որ Կիրիսոֆի հիպոթեզի սխալը թաղանթի կրկարության մեծացման հետ միասին նվազում է: Նրջանային սալի ծածան խնդիրն ուսումնասիրելիս դիտարկվում է նաև կղրային պայմանների աղղկցությունը Կիրիսոֆի հիպոթեզի սխալի վրա:

Աշխատության վերջին պարագրաֆում բերվում է նաև տեսության մի ուրիշ աղիլի մոտավոր օրինակ [6, 7, 8], որը հիմնվելով վերը բերված առաջին երկու ենթադրությունների վրա, կրթող ենթադրության փոխարեն ընդունում է հեռակայլ՝ « $\tau_{21}$  և  $\tau_{31}$  շոշափող լարումները ոչնչով չեն սարքելվում Կիրիսոֆի հիպոթեզի ընդունման ժամանակ ստացված համապատասխան շոշափող լարումներից»:

Վերջին պարագրաֆում առաջարկված տեսության հիման վրա լուծվում են բոլոր այն խնդիրները, որոնք լուծվել էին հիմնական տեսությունը քննարկելու ժամանակ:

Ցույց է արված, որ վերջին պարագրաֆում առաջարկված մոտավոր տեսությունը մեծ ճշտությամբ կիրառելի է անիզոտրոպ թաղանթների ու սալերի բազմազան խնդիրներ լուծելու համար:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, № 2, 1958.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1958.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
5. Дзя А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, 1935.
6. Амбарцумян С. А. К вопросу нелинейной теории анизотропных пластинок. ДАН АрмССР, 4, 1957.
7. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. О нелинейной теории пологих ортотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. наук, т. XI, 1, 1958.
8. Амбарцумян С. А. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, X, 2, 1957.
9. Работнов Ю. И. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН СССР, т. XVII, 5, 1945.
10. Гольденвейзер А. Л. Некоторые приемы интегрирования уравнений теории тонких оболочек. ПММ, т. X, 3, 1946.
11. Амбарцумян С. А. К расчету пологих оболочек, ПММ, т. XI, в. 5, 1947.
12. Reissner, E. On bending of elastic plates. Quart. of Applied Mathematics, Vol. 5, 1947.

Գ. Ա. Բաբաձյան, Ա. Գ. Նազարյան

## Об одном решении задачи плоского ламинарного движения жидкости в открытом канале

### § 1. Введение

В гидромеханике и, в особенности, в гидравлической практике, вопрос исследования движения реальной жидкости при наличии твердых стенок и свободной поверхности, помимо своей практической важности, представляет большой теоретический интерес.

Смешанные граничные условия (наличие свободной поверхности и твердых стенок) затрудняют, как постановку задачи, так и ее решение, тем более когда сама свободная поверхность является неизвестной искомой функцией.

Упомянутым вопросом занимались и занимаются много исследователей, однако нужно отметить следующее важное обстоятельство: во всех работах относящихся к данному вопросу, решение задачи сопровождается рядом ограничений и допущений, относящихся либо к дифференциальным уравнениям движения, либо к граничным условиям.

В литературе известны случаи, когда рассматриваются движения реальной, несжимаемой жидкости по прямолинейному каналу, прямое дно которого с горизонтом составляет некоторый угол. В таких работах вопрос сводится к исследованию равномерного движения и при этом становится возможным ввести в задачу определенные ограничения: гидростатическое распределение давления, отсутствие поперечных составляющих скоростей и др. Эти ограничения и допущения несомненно влияют на полученный результат не только количественно но и, в некоторых случаях, качественно.

В настоящей работе делается попытка решить задачу неравномерного движения реальной жидкости не ограничивая ее указанными допущениями.

### § 2. Постановка задачи и граничные условия

Рассматривается установившееся движение реальной, несжимаемой жидкости по открытому, весьма широкому каналу, очертание дна которого может быть любая, заранее заданная, кривая. Рассматриваемое неравномерное движение не ограничивается, так называемой, моделью медленно изменяющегося движения. В основу исследования

принимается дифференциальное уравнение движения Навье-Стокса. Так как рассматривается плоская задача, то изменением величин по ширине потока, (по оси  $oy$ ) можно пренебречь.

При этом уравнения движения вместе с условиями неразрывности будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $u$ ,  $w$  — составляющие скорости по осям  $ox$  и  $oz$  (фиг. 1).

Из условия прилипания имеем:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ при } z = \delta; \\ w &= 0 \text{ при } z = \delta. \end{aligned}$$

Установим граничные условия на свободной поверхности.

Допустим, уравнение свободной поверхности выражается функцией

$$z = \eta(x).$$

Полная производная этой функции будет

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\eta}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Замечая, что  $\frac{dz}{dt}$  и  $\frac{dx}{dt}$  являются компонентами скорости, получим:

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \text{ при } z = \eta. \quad (2.3)$$

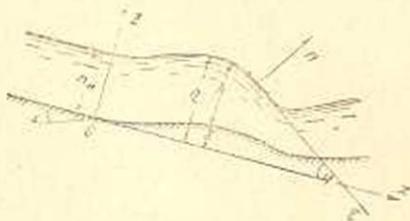
Граничные условия для вектора напряжения  $p_n$  могут быть получены исходя из следующих соображений.

Вектор напряжения  $p_n$  для площадок касательных к свободной поверхности (фиг. 1) должен быть направлен по нормали внутрь к этим площадкам и численно равен внешнему давлению, т. е.

$$\begin{aligned} p_{nn} &= -p_{at}, \\ p_{nt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выражая  $p_{nn}$  и  $p_{nt}$  через составляющие тензора напряжений получим:

$$p_{nn} = p_{xx} \cos^2(nx) + 2p_{xz} \cos(nx) \cos(nz) + p_{zz} \cos^2(nz);$$



Фиг. 1.

$$p_{xz} = p_{xx} \cos(nx) \cos(\tau x) + p_{xz} [\cos(nz) \cos(\tau x) + \cos(nx) \cos(\tau z)] + p_{zz} \cos(nz) \cos(\tau z), \quad (2.5)$$

где

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$p_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Значения косинусов определяются из фиг. 1.

$$\cos(nx) = -\sin\varphi,$$

$$\cos(nz) = \cos\varphi,$$

$$\cos(\tau x) = \cos\varphi,$$

$$\cos(\tau z) = \sin\varphi.$$

(2.6)

Имея в виду, что  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\eta}{dx}$  и подставляя соотношения (2.5) и (2.6) в (2.4) можно граничные условия на свободной поверхности представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] &= 0 \quad \text{при } z = \eta, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[ 1 - \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] &= 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $p$  — избыточное давление.

При решении задачи учитывается, что в определенном (начальном) сечении канала, глубина является известной величиной. Это условие пишется в виде:

$$h = h_n \quad \text{при } x = x_n. \quad (2.8)$$

Величины с индексом „ $n$ “ относятся к начальному сечению.

Таким образом задача сводится к решению уравнения (2.1) со следующими граничными условиями:

$$u = 0 \quad \text{при } z = \delta,$$

$$w = 0 \quad \text{при } z = \delta,$$

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta, \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[ 1 - \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\frac{p}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2v \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{при } z = \eta,$$

$$h = h_n \quad \text{при } x = x_n.$$

### § 3. Метод решения задачи

В данной задаче важно то обстоятельство, что подлежащая определению неизвестная функция  $\eta$  не входит в систему дифференциальных уравнений (2.1), она входит лишь в граничные условия. Для решения задачи необходимо интегрировать нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных. Задача решается методом малого параметра\*.

Чтобы ввести малый параметр в систему уравнений (2.1) и в граничные условия (2.9) приведем их к безразмерному виду.

Будем пользоваться при этом следующими переходными уравнениями:

$$u = C\bar{u} \quad p = \rho C^2 \bar{p} \quad h = H\bar{h},$$

$$\omega = C \frac{H}{L} \bar{\omega} \quad v = CH\bar{v} \quad C = \sqrt{gH},$$

$$x = L\bar{x} \quad \eta = H\bar{\eta} \quad \frac{H}{L} = \sigma \ll 1,$$

$$z = H\bar{z} \quad \delta = H\bar{\delta}. \quad (3.1)$$

Здесь  $C$  — характерная скорость;

$H$  — характерная глубина;

$L$  — характерная длина;

$\sigma$  — малый параметр, достаточно малое число.

Величины с черточками сверху — безразмерные.

Подставляя (3.1) в систему уравнения (2.1) и граничные условия (2.9) получим\*\*:

$$1) \quad \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \sin z + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma^2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$2) \quad \sigma^2 \left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = -\cos z - \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma^2 v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma v \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2},$$

$$3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

$$4) \quad \omega = 0 \quad \text{при } z = \delta,$$

$$5) \quad u = 0 \quad \text{при } z = \delta,$$

\* Этот метод был применен Н. А. Слезкиным [3].

\*\* Для удобства письма черточки сверху опущены.

$$6) \quad w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta, \quad (3.2)$$

$$7) \quad p \left[ 1 - \sigma^2 \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] - \sigma 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \sigma^2 \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{при } z = \eta,$$

$$8) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[ 1 + \sigma^2 \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = \sigma^2 4 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$9) \quad h = h_n \quad \text{при } x = x_n.$$

Далее предположим, что неизвестные функции могут быть выражены степенными рядами по степеням малого параметра  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \dots \\ w &= w_0 + \sigma w_1 + \sigma^2 w_2 + \dots \\ p &= p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \sigma \eta_1 + \sigma^2 \eta_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя выражения (3.3) в систему уравнений (3.2) и приравнявая коэффициенты с одинаковыми степенями  $\sigma$  получим систему уравнений, решение которых не представляет особой трудности.

#### § 4. Решение задачи

Приравнявая в уравнениях и граничных условиях (3.2) коэффициенты при нулевой степени  $\sigma$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sin z + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0, \\ 2) \quad & -\cos z - \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \\ 3) \quad & \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ 4) \quad & w_0 = 0 \quad \text{при } z = \delta, \\ 5) \quad & u_0 = 0 \quad \text{при } z = \delta, \\ 6) \quad & w_0 = u_0 \frac{d\eta_0}{dx} \quad \text{при } z = \eta_0, \\ 7) \quad & p_0 = 0 \quad \text{при } z = \eta_0, \\ 8) \quad & \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \eta_0, \\ 9) \quad & h_0 = \eta_0 - \delta = h_n \quad \text{при } x = x_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Путем двукратного интегрирования уравнения (1) системы (4.1) для продольной скорости получим:

$$u_0 = -\frac{\sin \alpha}{\nu} \frac{z^2}{2} + f_1(x)z + f_2(x).$$

Определяя произвольные функции интегрирования  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  из граничных условий (5) и (8) системы (4.1) получим следующее выражение для распределения продольных скоростей:

$$u_0 = \frac{\sin \alpha}{2\nu} [(\eta_0 - \delta)^2 - (\eta_0 - z)^2]. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в уравнения неразрывности (3) системы (4.1) и учитывая граничные условия (4) той же системы, получим значение поперечной составляющей скорости  $w_0$  в виде:

$$w_0 = \frac{\sin \alpha}{2\nu} [(\eta_0 - \delta)^2 - (\eta_0 - z)^2] \frac{d\eta_0}{dx} - \frac{\sin \alpha}{\nu} (\eta_0 - \delta)(\eta_0 - z) \times \\ \times \left( \frac{d\eta_0}{dx} - \frac{d\delta}{dx} \right). \quad (4.3)$$

Давление определяется из уравнения (2) с учетом граничного условия (8)

$$p_0 = \cos \alpha (\eta_0 - z). \quad (4.4)$$

Из граничного условия (6) получаем дифференциальное уравнение для определения глубины

$$\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{d\delta}{dx} = 0. \quad (4.5)$$

Интегрируя это выражение по  $x$  и учитывая граничное условие (9) системы (4.1) получим:

$$\eta_0 = \delta + h_k. \quad (4.6)$$

С учетом (4.5) выражение для  $w_0$  можно представить в виде:

$$w_0 = \frac{\sin \alpha}{2\nu} [(\eta_0 - \delta)^2 - (\eta_0 - z)^2] \frac{d\eta_0}{dx}. \quad (4.7)$$

Как было упомянуто выше, условия (6), (7) и (8) системы (3.2) должны удовлетворяться на свободной поверхности, которая так же является переменной. Это обстоятельство приводит к усложнению решения задачи.

Чтобы избежать усложнения решения задачи, видоизменим граничные условия (6), (7) и (8) так, чтобы они удовлетворялись на одной и той же свободной поверхности  $z = \eta_0(x)$  для всех последующих приближений.

Указанное видоизменение производится по методу предложенному Ж. Келлером [1].

Все те величины в граничных условиях (6), (7) и (8), которые зависят от ординаты  $z$ , представляются в виде рядов по степеням  $z - \eta_0$ , где

$$z - \eta_0 = \sigma \eta_{11} + \sigma^2 \eta_{12} + \dots$$

Тогда, одно из этих условий (например (6)) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_0 + \sigma \omega_1 + \sigma^2 \omega_2 + \dots + \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \sigma^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial z} + \dots \right) (\sigma \eta_{11} + \\ + \sigma^2 \eta_{12} + \dots) = \left[ u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \dots + \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} + \sigma \frac{\partial u_1}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \dots \right) (\sigma \eta_{11} + \sigma^2 \eta_{12} + \dots) \right] \left( \frac{d\tau_{10}}{dx} + \sigma \frac{d\tau_{11}}{dx} + \dots \right). \quad (4.8) \end{aligned}$$

Аналогичным путем можно видоизменить и остальные два условия (7) и (8) системы (3.2).

Приравнявая в уравнениях (3.2), коэффициенты при первой степени  $\sigma$ , учитывая при этом вышеизложенное, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \omega_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} &= - \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \\ - \frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z} &= 0, \\ \omega_1 &= 0 \quad \text{при } z = \delta, \\ u_1 &= 0 \quad \text{при } z = \delta, \\ \omega_1 + \eta_{11} \frac{\partial \omega_0}{\partial z} &= \left( u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \eta_{11} \right) \frac{d\tau_{10}}{dx} + u_0 \frac{d\tau_{11}}{dx} \quad \text{при } z = \eta_0, \\ p_1 + \eta_{11} \frac{\partial p_0}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } z = \eta_0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \eta_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{при } z = \eta_0, \\ h_1 = \eta_{11} &= 0 \quad \text{при } x = x_n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Решая эту систему с соответствующими граничными условиями, для искомых величин получим:

$$u_1 = \frac{\cos \alpha}{2\nu} [(\eta_0 - z)^2 - (\eta_0 - \delta)^2] \frac{d\eta_0}{dx} + \frac{\sin \alpha}{\nu} \eta_1 (z - \delta), \quad (4.10)$$

$$w_1 = \frac{\cos \alpha}{2\nu} \left\{ [(\eta_0 - z)^2 - (\eta_0 - \delta)^2] \left( \frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 + (\eta_0 - \delta)^2 (z - \delta) \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} [(\eta_0 - z)^3 - (\eta_0 - \delta)^3] \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \right\} + \frac{\sin \alpha}{2\nu} (z - \delta) \left[ 2\eta_1 \frac{d\eta_0}{dx} - \right. \\ \left. - (z - \delta) \frac{d\eta_1}{dx} \right], \quad (4.11)$$

$$p_1 = \eta_1 \cos \alpha + (\eta_0 - z) \frac{d\eta_0}{dx} \sin \alpha, \quad (4.12)$$

$$\eta_1 = \frac{h_n}{3 \operatorname{tg} \alpha} \left[ \frac{d\eta_0}{dx} - \left( \frac{d\eta_0}{dx} \right)_n \right]. \quad (4.13)$$

С учетом (4.5) (4.13), выражения (4.10), (4.11) и (4.12) примут более простой вид:

$$u_1 = \frac{\cos \alpha}{2\nu} \left[ (\eta_0 - z)^2 - h_n^2 + \frac{2}{3} h_n (z - \delta) \right] \frac{d\delta}{dx} - \\ - \frac{\cos \alpha}{3\nu} h_n (z - \delta) \left( \frac{d\delta}{dx} \right)_n, \quad (4.14)$$

$$w_1 = \frac{\cos \alpha}{6\nu} \left\{ [3(\eta_0 - z)^2 - 3h_n^2 + 2h_n (z - \delta)] \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^2 + [3h_n^2 (z - \delta) + \right. \\ \left. + (\eta_0 - z)^3 - h_n^3 - h_n (z - \delta)^2] \frac{d^2 \delta}{dx^2} - 2h_n (z - \delta) \frac{d\delta}{dx} \left( \frac{d\delta}{dx} \right)_n \right\}, \quad (4.15)$$

$$p_1 = \frac{h_n}{3 \operatorname{tg} \alpha} \left[ \frac{d\delta}{dx} - \left( \frac{d\delta}{dx} \right)_n \right] \cos \alpha + (\eta_0 - z) \frac{d\delta}{dx} \sin \alpha. \quad (4.16)$$

Уравнения для следующих приближений (второе, третье и т. д.) решаются аналогичным образом.

Переходя к размерным величинам и пропуская промежуточные выкладки, для искомых величин получим:

$$u = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \left\{ h_n^2 - (\eta_0 - z)^2 + \frac{d\eta_0}{dx} \operatorname{ctg} \alpha [(\eta_0 - z)^2 - h_n^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} h_n (z - \delta)] - \frac{2}{3} \left( \frac{d\eta_0}{dx} \right)_n \operatorname{ctg} \alpha h_n (z - \delta) \right\}, \quad (4.17)$$

$$w = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \left\{ [h_n^2 - (\eta_0 - z)^2] \frac{d\eta_0}{dx} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{3} [3(\eta_0 - z)^2 - \right. \\ \left. - 3h_n^2 + 2h_n (z - \delta)] \left( \frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{3} [3h_n^2 (z - \delta) + (\eta_0 - z)^3 - \right.$$

$$-h_n^3 - h_n(z - \delta)^2 \left\{ \frac{d^2 \tau_{10}}{dx^2} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \alpha h_n (z - \delta) \frac{d\tau_{10}}{dx} \left( \frac{d\tau_{10}}{dx} \right)_n \right\}, \quad (4.18)$$

$$p = \gamma \cos \alpha \left\{ (\tau_{10} - z) + \operatorname{tg} \alpha (\tau_{10} - z) \frac{d\tau_{10}}{dx} + \frac{h_n}{3 \operatorname{tg} \alpha} \left[ \frac{d\tau_{10}}{dx} - \left( \frac{d\tau_{10}}{dx} \right)_n \right] \right\}, \quad (4.19)$$

$$\eta = \delta + h_n + \frac{h_n}{3 \operatorname{tg} \alpha} \left[ \frac{d\tau_{10}}{dx} - \left( \frac{d\tau_{10}}{dx} \right)_n \right]. \quad (4.20)$$

### § 5. Пример расчета

Допустим, что дно канала выражается следующей зависимостью:

$$\delta = 4(A - B)\xi^2 + 4(2B - A)\xi^3 + (A - 5B)\xi^4 + B\xi^6.$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные и в данном случае имеют значения

$$A = 0,8il; \quad B = 0,9il;$$

$\xi = \frac{x}{l}$  относительная длина.

Вид этой функции выбран так, чтобы в некотором сечении принимаемом за начальное ( $x = x_n = 0$ ), и в сечении  $x = 2l$ ,  $\delta$  и  $\delta'$  были бы равны нулю, а при  $x = l$

$$\delta = A; \quad \delta' = B.$$

При указанных значениях  $A$  и  $B$  уравнение (5.1) примет следующий вид:

$$\delta = (-0,4\xi^2 + 4\xi^3 - 3,7\xi^4 + 0,9\xi^6) il. \quad (5.2)$$

Предположим, что глубина канала в начальном сечении ( $x = 0$ ) равна 1 метру, тогда, учитывая равенство (4.5) и (4.20), получим закон изменения глубины по длине канала в виде:

$$h = 1 + \frac{1}{3 \operatorname{tg} \alpha} \frac{d\delta}{dx}. \quad (5.3)$$

Выберем значения  $i$  и  $l$  таким образом, чтобы удовлетворилось равенство:

$$il = 1, \quad (5.4)$$

кроме того, из-за малости угла  $\alpha$  примем

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = i \text{ и } \cos \alpha \approx 1. \quad (5.5)$$

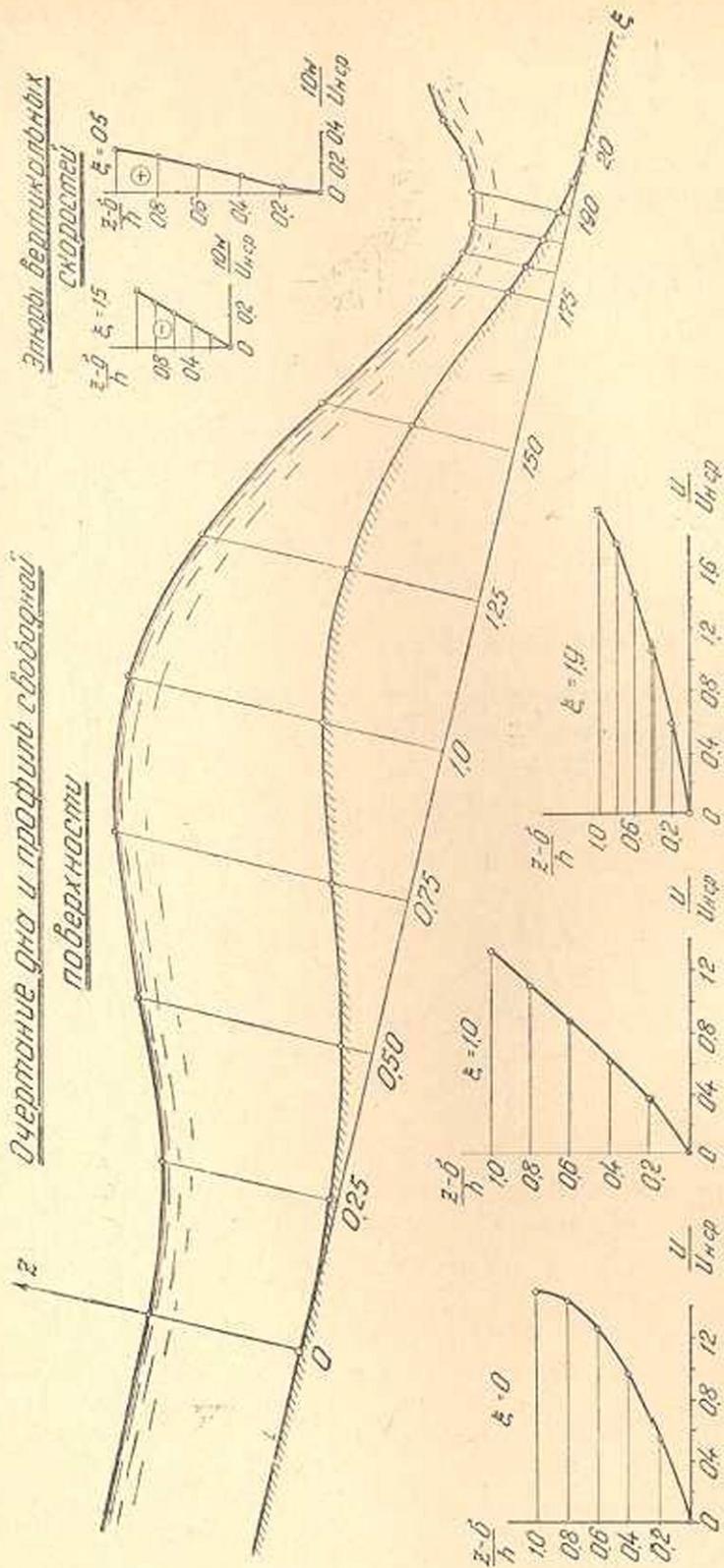
Тогда для закона изменения глубины получим:

$$h = 1 - 0,26\xi + 4\xi^2 - 4,94\xi^3 + 1,5\xi^4. \quad (5.6)$$

По уравнениям (5.2) и (5.6) не трудно подсчитать и построить очертания дна и свободной поверхности в интервале

$$0 \leq \xi \leq 2l.$$

Очертание дна и профиль свободной поверхности



Эпюры вертикальных скоростей

Эпюры горизонтальных скоростей

Фиг. 2.

Эти подсчеты здесь не приведены, а результаты их даны в виде чертежа на фиг. 2.

Из уравнения (4.17) можно определить среднюю скорость в начальном сечении:

$$U_n = \frac{1}{\eta - \delta} \int_{\delta}^{\eta} u dz = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} h_n^2. \quad (5.7)$$

Учитывая выражения (5.4), (5.5) и (5.7), можно (4.17) представить в виде:

$$\frac{u}{U_n} = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right)^2 + \frac{1}{i} \frac{d\delta}{dx} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{z - \delta}{h_n} \right) - \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{U_n} = & \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right)^2 \right] \frac{d\delta}{dx} - \frac{3}{2i} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{z - \delta}{h_n} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right)^2 \right] \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^2 - \frac{h_n}{2} \left[ 1 - 3 \frac{z - \delta}{h_n} + \left( \frac{z - \delta}{h_n} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right)^2 \right] \frac{d^2 \delta}{dx^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Согласно выражениям (5.8) и (5.9) подсчитаны значения скоростей в трех сечениях. Эпюры скоростей приведены на фиг. 2.

Давления подсчитываются по формуле,

$$\frac{p}{\gamma h_n} = \left( 1 - i \frac{d\delta}{dx} \right) \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right) + \frac{1}{3i} \frac{d\delta}{dx}. \quad (5.10)$$

Если в частном случае дно канала представить в виде прямой линии, т. е. если

$$\delta = 0,$$

то уравнения (5.3), (5.8), (5.9) и (5.10) могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{h}{h_n} = 1,$$

$$\frac{u}{U_n} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_0 - z}{h_n} \right)^2 \right],$$

$$\frac{w}{U_n} = 0,$$

$$\frac{p}{\gamma h_n} = 1.$$

Как видно эти уравнения являются уравнениями равномерного движения, которые в литературе (например [2]) нашли свое полное освещение.

Водно-энергетический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 24 III 1953

Գ. Լ. Յարաջանյան, Ս. Գ. Կազարյան

## ԲԱՑ ՋՐԱՆՑՔՈՒՄ ՇԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐՔ ԼԱՍԻՆԱՐ ՇԱՐՔՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկված է հորիզոնի նկատմամբ  $\varphi$  անկյան տակ թևքված, բավականին լայն, բաց ջրանցքով, իր ծանրությունը մի ազդեցության տակ հոսող մածուցիկ հեղուկի հաստատված անհավասարաչափ շարժումը, որը բնորոշվում է նախն-Ստոքսի համասարումներով: Տրված է այդ հավասարումների լուծման մի դեպք, փոքր պարամետրի մեթոդով տրված հատակի տեսքի և եզրալին պայմանների համար որոնվում են այդ հավասարումների լուծումները, այսինքն արագությունների և ճնշման դաշտը, ինչպես նաև ազատ մակերևույթի տեսքը:

Նման խնդիրների ուսումնասիրության ժամանակ մեծ մասամբ ընդունվում է, ալյակս կոչված, դանդաղ փոփոխվող շարժման մոդելը, որը լուրահատուկ սահմանափակում է դնում շարժման ինչպես կինեմատիկական, այնպես էլ դինամիկական մեծությունների վրա:

Ներկայացված լուծումը դերձ է նմանորինակ սահմանափակումից և, որպես հետևանք այդ հանդամանքի, ստացված է ոչ միայն քանակապես, այլև որակապես տարբեր արդյունք:

Ընտրված փոքր պարամետրի մեթոդը, ինչպես պարզվում է խնդրի լուծման ընթացքից, բավականին արդյունավետ է և հնարավորություն է տալիս խնդրի լուծումն ստանալ ցանկացած մոտավորությամբ: Որպես փոքր պարամետր բնորոշված է հունի բնորոշ խորություն և բնորոշ երկարության հարաբերությունը, որը բավականին փոքր թիվ է:

Նկատի ունենալով խնդրի լուրահատուկ դրվածքը (ազատ մակերևույթի առկայությունը, մածուցիկ հեղուկ, անհավասարաչափ շարժում և այլն), հավասարումներից ստացված լուծումների ինտեգրալ հաստատունները որոշվել են սովյալ խնդրի համար լուրահատուկ եզրալին պայմաններից (2.9):

Նկատի ունենալով հաջորդ մոտավորությունների ոչ էական ազդեցությունը լուծման վերջնական արդյունքի վրա, ինչպես նաև նրանց բարդ տեսքը, խնդրի լուծումը տրված է՝ բավարարվելով միայն երկրորդ մոտավորությամբ:

Արագությունների, ճնշման և ազատ մակերևույթի հաշվման համար ստացված են (4.17), (4.18), (4.19) և (4.20) բանաձևերը:

Խնդրում ստացված արդյունքների կիրառության սիրույթը սահմանափակ է այն պատճառով, որ հեղուկի շարժման վրա տուրբուլենտականության գործունը բացակայում է, որի ներմուծումը, սակայն, ոչ միայն կզմարացնի

շարժման ուսումնասիրությունը բնականաբանապես, այլև որոշ դեպքերում այն կդասնա անհնարին:

Հոգվածում բերված է մի թվային օրինակ, որի համար կառուցված են հոսանքի պարամետրների էպլուրաները, ինչպես ըստ խորություն, այնպես էլ ըստ երկարություն:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Keller J. The solitary wave and Periodic waves in shallow water. Comm. Appl. Math. vol 1, № 4, 1948.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая Гидромеханика, ч. II. Гидротехиздат, 1948, М.—Л.
3. Слезкин Н. А. К вопросу об уточнении решения уравнения Рейнольдса. ДАН СССР, т. 51, № 2, 1946.

М. И. Розовский

Об одном способе решения нелинейных уравнений теории ползучести

§ 1. Интегрально-операторная форма уравнений ползучести и их решение

Согласно Н. Х. Арутюняну [1] система уравнений нелинейной теории ползучести, связывающая напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  и деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  для несжимаемого тела состоит из уравнений теории малых упруго-пластических деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy} \\ \sigma_y - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xz} \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ , и интегральной зависимости

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\sigma_i(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \quad (1.2)$$

связывающей интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{V\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

с интенсивностью деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{V\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

В соотношении (1.2) модуль упругости  $E(t)$ , согласно Н. Х. Арутюняну, изменяется во времени по закону

$$E(t) = E_0 (1 - e^{-\alpha t}).$$

Нелинейная функция имеет вид

$$f(\sigma_i) = \sigma_i + \beta \sigma_i^2, \quad (1.3)$$

где, следуя Н. Х. Арутюняну, параметр нелинейности  $\beta$  предполагаем малым.

Мера ползучести  $C(t, \tau)$  имеет вид

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (1.4)$$

где  $\varphi(\tau) = \frac{A}{\tau} + C_0$ .

Физические параметры  $A$ ,  $C_0$  и  $\gamma$  определяются из экспериментов на простую ползучесть.

Н. Х. Арутюнян определил  $\sigma_i$  из интегрального уравнения (1.2) путем предварительного приведения его к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

В результате, полагая  $E(t) = E_0 = \text{const}$ , упомянутый автор нашел выражение  $\sigma_i$  в виде разложения по малому параметру  $\beta$ .

В настоящей статье предлагается другой способ решения интегрального уравнения (1.2), который иллюстрируется далее применительно к двум задачам.

2. Введем два интегральных оператора с ядрами

$$P(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right],$$

$$Q(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau),$$

воздействующих на некоторую функцию точки  $M(x, y, z)$  и времени  $t$ :

$$\dot{P}f = \int_{\tau_1}^t P(t, \tau) f(M, \tau) d\tau, \quad \dot{Q}f = \int_{\tau_1}^t Q(t, \tau) f(M, \tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Тогда уравнение Н. Х. Арутюняна (1.2), с учетом (1.3), будет представлено в интегрально-операторной форме

$$E \varepsilon_i = (1 + \dot{P}) \sigma_i + \beta \dot{Q} \sigma_i^2. \quad (1.6)$$

Решая уравнение (1.6) относительно  $\sigma_i$ , получим

$$\sigma_i = \frac{-(1 + \dot{P}) + (1 + \dot{P}) \sqrt{1 + \frac{4\beta E \varepsilon_i \dot{Q}}{(1 + \dot{P})^2}}}{2\beta \dot{Q}}. \quad (1.7)$$

В выражении (1.7) знак перед радикалом взят плюс потому, что из физических соображений  $\sigma_i > 0$ .

Всегда можно подобрать такое значение параметра малости  $\beta$ , при котором

$$\frac{4\beta E\varepsilon_1 \bar{Q}}{(1 + \bar{P})^2} < 1.$$

Поэтому справедливо разложение

$$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_1}{1 + \bar{P}} + \frac{1 + \bar{P}}{2\beta \bar{Q}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left[ \frac{4\beta E\varepsilon_1 \bar{Q}}{(1 + \bar{P})^2} \right]^n. \quad (1.8)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{1 + \bar{P}} = 1 - \bar{R},$$

где ядро  $R(t, \tau)$  оператора  $\bar{R}$  представляет собою резольвенту ядра  $P(t, \tau)$ , а также, выполняя разложение в ряд функции оператора  $\bar{P}$

$$\frac{1}{(1 + \bar{P})^{2n-1}},$$

фигурирующей в (1.8), получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 = E\varepsilon_1 (1 - \bar{R}) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (E\varepsilon_1)^n (4\beta)^{n-1} \left[ \bar{Q}^{n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2n-1)2n \dots (2n+\nu-2)}{\nu!} \bar{Q}^{n-1} \bar{P}^{\nu} \right]. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Выражая степенные функции  $\bar{Q}^{n-1}$  и  $\bar{Q}^{n-1} \bar{P}^{\nu}$  операторов  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$ , фигурирующие в (1.9), через повторные ядра исходных ядер  $P(t, \tau)$  и  $Q(t, \tau)$ , получим

$$\bar{Q}^{n-1} f = \int_{\tau_1}^t Q_{n-1}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

где

$$Q_{n-1}(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t Q(t, s) Q_{n-2}(s, \tau) ds; \quad (1.11)$$

$$\bar{Q}^{n-1} \bar{P}^{\nu} f = \int_{\tau_1}^t \Pi_{n+\nu-1}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.12)$$

где

$$\Pi_{n+\nu-1}(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t Q_{n-1}(t, u) P_{\nu}(u, \tau) du;$$

в последнем  $Q_{n-1}(t, u)$  выражается согласно (1.11), а

$$P_n(u, \tau) = \int_u^\tau P(\tau, v) P_{n-1}(v, u) dv,$$

$$(n = 2, 3, \dots; \quad \nu = 1, 2, \dots),$$

причем

$$P_0(t, \tau) = P(t, \tau), \quad Q_0(t, \tau) = Q(t, \tau).$$

Наконец, принимая во внимание (1.10) и (1.12), из (1.9) получим

$$\begin{aligned} \sigma_i = & E(t) \varepsilon_i(t) - \int_{\tau_i}^t R(t, \tau) E(\tau) \varepsilon_i(\tau) d\tau + \\ & + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4\beta)^{n-1} \int_{\tau_i}^t [Q_{n-1}(t, \tau) + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2n-1) 2n \dots (2n+\nu+2)}{\nu!} \Pi_{n+\nu-1}(t, \tau)] [E(\tau) \varepsilon_i(\tau)]^n d\tau. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, задача определения  $\sigma_i$  решена и сведена к квадратурам.

В частности, например, для старого бетона, т. е. в случае  $E(t) = E_0$  и  $A = 0$ , при этом

$$P(t, \tau) = Q(t, \tau) = \gamma C_0 E_0 e^{-\gamma(t-\tau)},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_i = & E_0 \varepsilon_i - E_0 C_0 \gamma \int_{\tau_i}^t e^{-\gamma(1+C_0 E_0)(t-\tau)} \varepsilon_i(\tau) d\tau + \\ & + 2 E_0 C_0 \gamma \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4\beta E_0 C_0 \gamma)^{n-1} \int_{\tau_i}^t \left[ \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ & \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2n-1) 2n \dots (2n+\nu-2)}{\nu! (n+\nu)!} (\gamma C_0)^{\nu+1} (t-\tau)^{n+\nu} \right] e^{-\gamma(t-\tau)} \varepsilon_i^n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В случае, когда  $\varepsilon_i$  является только функцией координат  $x, y, z$  получим

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i - \frac{E_0 C_0 \varepsilon_i}{1 + C_0 E_0} [1 - e^{-\gamma(1+C_0 E_0)(t-\tau)}] +$$

$$\begin{aligned}
& + 2E_0 C_0 \gamma^{\varepsilon_i} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4\beta^2 E_0 C_0 \gamma^{\varepsilon_i})^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)!}{\gamma^n} - \right. \\
& - e^{-\gamma(t-\tau_1)} \left[ \frac{(t-\tau_1)^{n-1}}{\gamma} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{\gamma^{k+1}} (t-\tau_1)^{n-k-1} \right] + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2n-1)2n\dots(2n+\nu-2)}{\nu!(n+\nu)!} (\gamma C_0)^{\nu+1} \left[ \frac{(n+\nu)!}{\gamma^{n+\nu+1}} - \right. \\
& \quad \left. - e^{-\gamma(t-\tau_1)} \left( \frac{(t-\tau_1)^{n+\nu}}{\gamma^{n+\nu+1}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{n+\nu} \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)\dots(n+\nu-k+1)}{\gamma^{k+1}} (t-\tau_1)^{n+\nu-k} \right) \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

3. В общем случае меры ползучести (1.4), т. е. для молодого бетона, нахождение указанных выше квадратур связано с кропотливыми вычислениями. Поэтому, принимая во внимание, что параметр нелинейности  $\beta$  мал, можно получить приближенное выражение для  $\sigma_i$  с точностью до  $\beta^2$ .

Тогда из (1.9) следует

$$\sigma_i = E\varepsilon_i(1 - \hat{R}) - \frac{2E^2\varepsilon_i^2\beta\hat{Q}}{(1 + \hat{P})^3}. \quad (1.14)$$

Чтобы получить выражение  $\sigma_i$  в замкнутом виде, учтем приближенное равенство

$$(1 + \hat{P})^3 \approx 1 + 3\hat{P}.$$

Тогда (1.14) преобразуется к следующему виду

$$\sigma_i = E\varepsilon_i(1 - \hat{R}) - 2E^2\varepsilon_i^2\beta\hat{Q}(1 - \hat{R}_2), \quad (1.15)$$

где  $\hat{R}$  оператор, ядро которого  $R_2(t, \tau)$  представляет собою резольвенту ядра  $3P(t, \tau)$ .

Расшифровывая смысл операторов, фигурирующих в (1.15), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_i = E(t)\varepsilon_i(t) - \int_{\tau_1}^t \{ R(t, \tau) E(\tau)\varepsilon_i(\tau) - 2\beta [ Q(t, \tau) + \\
+ \Pi(t, \tau) ] E^2(\tau)\varepsilon_i^2(\tau) \} d\tau,
\end{aligned}$$

где 
$$\Pi(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t Q(t, s) R_2(s, \tau) ds.$$

Так как при  $E(t) = E_0$ ,  $\hat{P} = \hat{Q}$ , то из (1.14) следует

$$\sigma_i = E_0\varepsilon_i - E_0 [ \hat{R}\varepsilon_i - 2\beta E_0 (\hat{R}_2 - \hat{R}_2^2) \varepsilon_i^2 ]. \quad (1.16)$$

Откуда

$$\sigma_t = E_0 \varepsilon_t(t) - E_0 \int_{\tau_1}^t \{ R(t, \tau) \varepsilon_t(\tau) - 2\beta E_0 [R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)] \varepsilon_t^2(\tau) \} d\tau, \quad (1.17)$$

где  $R_2(t, \tau)$  — резольвента ядра  $2P(t, \tau)$ .

Если при  $E(t) = E_0$  исходить из меры ползучести (1.4), то из всех найденных выше выражений  $\sigma_t$  наиболее удобным для практического применения является выражение (1.17).

Полученные результаты, а также примеры, которые будут рассмотрены ниже, относятся к общему случаю неустановившейся ползучести.

## 2. Некоторые приложения

### 1. Чистый сдвиг плоскопараллельного слоя

Рассмотрим бесконечный плоскопараллельный слой толщиной  $h$  и любой ширины, находящийся при  $t < \tau_1$  в покое. Нижняя граница слоя ( $z = 0$ ) неподвижна, а верхняя ( $z = h$ ), начиная с некоторого момента  $\tau_1$ , смещается в направлении оси  $ox$ .

Так как теория ползучести Н. Х. Арутюняна применима не только к бетону, но и к другим стареющим материалам, то формула, которая будет получена ниже, непосредственно применима к исследованию процесса деформации ползучего слоя почвы, заключенного между твердыми пластинами, или к изучению поведения слоя смазки между трущимися поверхностями и т. п.

В рассматриваемом чисто сдвиговом случае перемещения имеют вид  $u(z, t)$ ,  $v(z, t) = 0$ ,  $w(z, t) = 0$ .

Инерцией тела пренебрегаем.

Пусть задано смещение границы  $z = h$ :  $u(h, \tau) = u_1 = \text{const}$ .

Тогда

$$u(z, t) = \frac{zu_1}{h},$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_t = \frac{u_1 \sqrt{3}}{3h}.$$

Пользуясь (1.16) и (1.4) получим выражение касательного напряжения

$$\tau_{xz} = \frac{E_0 u_1}{3h} \left[ 1 - \gamma_1 \left( \frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \tau_1^q e^{r_1 \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_1 \tau}}{\tau^q} d\tau - \right. \\ \left. - \frac{2\beta E_0 u_1}{3h} \left( \frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \sum_{k=2}^3 (-1)^k \gamma_1^k \tau_1^{qk} e^{r_k \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_k \tau}}{\tau^{qk}} d\tau \right].$$

где

$$r_k = \gamma_k (1 + E_0 C_0), \quad q_k = \gamma_k A E_0, \quad \gamma_k = k\gamma, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Здесь имеет место процесс релаксации. При  $\beta < 0$  эффект нелинейности активизирует процесс релаксации, при  $\beta > 0$ , наоборот тормозит.

## 2. Деформация трубы

Рассмотрим деформацию трубы, находящейся под действием внутреннего давления при заданном перемещении внешней поверхности.

Пусть  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  — радиальное и окружное напряжения  $\varepsilon_r = du_r/dr$ ,  $\varepsilon_\theta = u_r/r$  — соответствующие деформации,  $a$  и  $b$  — внутренний и внешний радиус трубы,  $q$  — приложенное изнутри давление,  $u_b$  — перемещение внешней поверхности трубы.

Предположим, что осевая деформация отсутствует, т. е.  $\varepsilon_z = 0$ .

Если считать материал несжимаемым, то

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание граничное условие  $u_r(b) = u_b$ , получим

$$u_r = \frac{bu_b}{r}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{bu_b}{r^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{bu_b\sqrt{12}}{3r^2}. \quad (2.1)$$

Из уравнения (1.1) следует

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta). \quad (2.2)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

с учетом граничного условия  $\sigma_r(a) = q$  и соотношения (2.2), получим

$$\sigma_r = \frac{2}{3} \int_a^r \frac{\sigma_i (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)}{\rho \varepsilon_i} d\rho + q. \quad (2.3)$$

Если теперь поставить в (2.3) вместо  $\sigma_i$  одно из найденных в § 1 для нее выражений, а вместо  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_i$  их выражения из (2.1) и выполнить квадратуру по  $\rho$ , то задачу определения напряжений можно считать решенной.

Так, например, в случае (1.17) будем иметь

$$\sigma_{gk} = -\frac{2bu_b E_0}{9} \left\{ 3(a^{-2} - kr^{-2}) \left[ 1 - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right.$$

$$+ 2\beta u_0 E_0 \sqrt{3} [a^{-4} - (2k-1)r^{-4}] \int_{\tau_1}^t [R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)] d\tau, \quad (2.4)$$

где  $k=1, 2, 3$ , причем индексы  $g_1=r$ ,  $g_2=z$ ,  $g_3=b$ .

Для молодого бетона из (2.4) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{g_k} = & -\frac{2\beta u_0 E_0}{9} \left\{ 3(a^{-2} - kr^{-2}) \left[ 1 - \gamma_{11} \left( \frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \tau_1^q e^{\gamma_{11} \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^q} d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\beta b u_0 E_0 \sqrt{3} [a^{-4} - (2k-1)r^{-4}] \left( \frac{A}{\tau_1} + C_0 \right) \sum_{k=2}^3 (-1)^k \gamma_k \tau_1^{r_k \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_k \tau}}{\tau^{q_k}} d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если старение бетона практически завершилось, то можно принять  $A=0$  и  $q_k=0$ .

Тогда из (2.5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{g_k} = & -\frac{2\beta u_0 E_0}{9} \left\{ 3(a^{-2} - kr^{-2}) \left[ 1 - \frac{C_0}{1 + C_0 E_0} \left( 1 - e^{-\gamma_{11}(1+C_0 E_0)(t-\tau_1)} \right) \right] + \right. \\ & \left. + 2\beta b u_0 C_0 E_0 \sqrt{3} [a^{-4} - (2k-1)r^{-4}] \sum_{k=2}^3 (-1)^k \times \right. \\ & \left. \times \frac{k}{1 + k C_0 E_0} \left( 1 - e^{-k\gamma_{11}(1+C_0 E_0)(t-\tau_1)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь также, как и в первой задаче, происходит процесс релаксации. Однако, влияние эффекта нелинейности противоположно тому, которое имеет место в предыдущей задаче.

В заключение заметим, что для практического определения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  и  $\sigma_b$  достаточно в (2.5) подставить числовые значения геометрических и физических характеристик бетонной трубы и воспользоваться известным [1] выражением интегралов, входящих в (2.5), через неполную гамма-функцию, согласно формуле

$$\int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r_k \tau}}{\tau^{q_k}} d\tau = r_k^{-(1-q_k)} [\phi(r_k t, q_k) - \phi(r_k \tau_1, q_k)],$$

где  $\phi(\xi, q_k) = \int_0^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{q_k}} d\tau$ , которая протабулирована [1].

Так, например, если время  $t$  измерять в днях, то согласно Н. Х. Арутюняну [1], для бетона, изготовленного на нормальном поргланцементе,  $A = 4,82 \cdot 10^{-5}$ ,  $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}$ ,  $\gamma = 0,026$ ,  $E_0 = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Тогда  $r_1 = 0,073$ ,  $r_2 = 0,146$ ,  $r_3 = 0,219$ ,  $q_1 = 0,25$ ,  $q_2 = 0,50$ ,  $q_3 = 0,75$ .

Обработка кривых ползучести бетона показывает, что порядок величины параметра нелинейности  $\beta$  примерно  $M \cdot 10^{-6} - N \cdot 10^{-5}$ , где  $1 < (M, N) < 10$ .

Днепропетровский горный институт им. Артема

Поступило 29 IV 1958

### Մ. Ի. Ռոզովսկի

## ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒՅՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՍԱՍԻՆ

### Ո Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մուծելով (1.5) ինտեգրալ օպերատորները, ն. խ. Հարուխիլունի (1.2) հավասարումը բերվում է (1.6) ինտեգրալ-օպերատորային ձևին: (1.6) հավասարումը  $\sigma_i$  լարումների ինտենսիվության նկատմամբ լուծելու, օպերատորների ֆունկցիաները երկանդամ ինտեգրալ-օպերատորային աստիճանական շարքի վերածելու և հետագայում այդ շարքի անդամները (1.5) հավասարման մեջ կերպակալող  $P(t, \tau)$  ու  $Q(t, \tau)$  ելակետային միջուկների կրկնական միջուկներով արտահայտելու միջոցով, ստացվում է  $\sigma_i$  բացահայտ արտահայտությունը:

Առաջարկված են  $\sigma_i$ -ի մի քանի մոտավոր արտահայտություններ, որոնք թույլ են տալիս  $\sigma_i$ -ն անմիջականորեն արտահայտել  $P(t, \tau)$ -ին համեմատական միջուկների սեղուկվածների միջոցով:

Բերված են ընդհանուր բնույթի օբինակներ, ինչպես նաև գիտարկված է երկու կոնկրետ խնդիր հարթ-դուրանեղանակի շերտի սահմանի դեֆորմացիայի և խողովակի դեֆորմացիայի վերաբերյալ, սողքի (1.4) չափի հաշվառումով:

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Х. Арутюни. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.

Г. С. Акопян, Г. А. Марикян, В. М. Харитонов

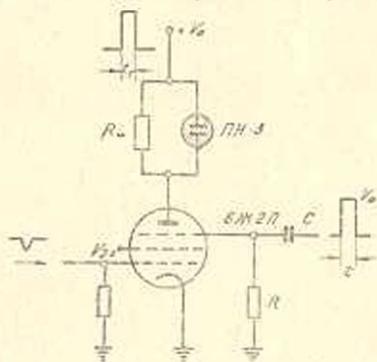
## Некоторые новые схемы для годоскопа

### 1. Неоновая ячейка для годоскопов с самогасящими счетчиками

В высотной экспедиции ФИАН Армянской ССР в течение ряда лет в годоскопических схемах использовалась предложенная одним из нас в 1949—1950 гг. неоновая ячейка на лампе 6Ж8 с импульсным питанием пентодной сетки и анодной цепи. В качестве индикатора использовалась неоновая лампочка МН-7. Затягивание, необходимое для фотографирования неоновых лампочек, осуществлялось в цепи пентодной сетки подключением емкости 3—5 *т. пф.* и утечки 10—15 *мегаом.* Основным недостатком такой ячейки является сравнительно малая разрешающая способность — порядка 150 *мксек.* Чувствительность ячейки к импульсам от счетчика — порядка 4—5 *вольт.*

Появление пальчиковой лампы 6Ж2П с двумя управляющими сетками, с короткой характеристикой по обеим сеткам и с сравнительно большим током второй управляющей сетки при положительных потенциалах, позволило разработать на том же принципе ячейку с улучшенными параметрами. Для индикации вместо неоновой лампочки МН-7, с током горения 5—7 *мА,* применена пятячковая неоновая лампочка ПН-3, которая горит достаточно ярко для фотографирования при токе  $\approx 0,5$  *мА.*

Схема неоновой ячейки показана на фиг. 1. Схема должна работать таким образом, чтобы при отсутствии импульса от счетчика на первой сетке заряд  $Q$ , втекающий на емкость  $C$  за время импульса  $v_0$ , обеспечивал запуск лампы на время горения неоновых лампочек, определяемое длительностью импульса  $v_1$ . Если  $v_{пор}$  — пороговое напряжение — сетки  $g_1$ , при котором анодный ток становится достаточным для зажигания неоновой лампочки, то



фиг. 1

$$\tau \approx \frac{C v_{пор}}{i} e^{t_{гор}/RC} \quad (1)$$

где  $i$  — средний ток — в цепи сетки  $g_2$  при подаче импульса  $v_0$ ;  $v_{пор}$  зависит от типа неоновой лампочки, от  $R_m$  и от напряжения на экранной сетке  $v_{g2}$ ;  $i$  — зависит от  $v_0$  и от  $v_{g2}$ .  $t_{гор}$  — время горения неоновых лампочек.

$$\text{Из (1):} \quad \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial C} = \frac{1}{C} \left( 1 - \frac{t_{гор}}{RC} \right). \quad (2)$$

Следовательно, при малых  $RC$  увеличение  $C$  уменьшает  $\tau$ , а при больших  $RC$  увеличение  $C$  увеличивает  $\tau$ .

Оптимальное значение  $C$ , соответствующее минимуму  $\tau$ , определяется соотношением

$$RC_{opt} = t_{гор} \approx 0,1 \div 0,2 \text{ сек} \quad (3)$$

и не зависит от параметров лампы.

С другой стороны,

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial R} = - \frac{1}{R} \frac{t_{гор}}{RC} \quad (4)$$

и увеличение  $R$  всегда уменьшает  $\tau$ ; при увеличении  $R$  уменьшается  $C_{opt}$ . При  $R = 10^7 \text{ ом}$ ,  $C_{opt} = 10-20 \text{ м. нф}$ . Таким образом, в старой схеме  $C$  было меньше  $C_{opt}$ . При  $R = 50 \times 10^6 \text{ ом}$ ,  $C_{opt} = 2-4 \text{ м. нф}$ . Полученное на опыте значение  $C_{opt}$  при  $R = 50 \cdot 10^6 \text{ ом}$  равно  $\approx 2,2 \text{ м. нф}$ , при очень пологом минимуме.

Чувствительность схемы сильно зависит от напряжения на экранной сетке. При испытании схемы прямоугольными импульсами длительностью  $\approx 100 \text{ мксек}$  получены следующие данные:

$v_{g2}$	80	50	40	30	20	вольт
чувствительность	2	1	0,7	0,5	$\ll 0,1$	вольт.

При напряжении на экранной сетке 20 вольт неоновая лампочка горела очень слабо. Чувствительность схемы несколько зависит от емкости  $C$  и минимальна при  $C = C_{opt}$ .

Если в (1) положить  $RC = t_{гор}$ ;  $i = v_0/R_i$ ,

$$\text{то} \quad \tau \approx e \cdot R_i \cdot C \cdot v_{пор}/v_0 = e \cdot t_{гор} \cdot \frac{R_i}{R} \cdot \frac{v_{пор}}{v_0} \quad (5)$$

$$(e = 2,72...).$$

При  $R_i = 10^5 \text{ ом}$ ,  $R = 10^7 \text{ ом}$  и  $5 \cdot 10^7 \text{ ом}$ .  $v_{пор} \approx 3 \text{ вольта}$ .  $v_0 \approx 100 \text{ вольт}$  и  $t_{гор} = 0,3 \text{ сек}$ ,  $\tau \approx 250 \text{ мксек}$  и  $50 \text{ мксек}$ .

Фактически на опыте при  $R = 10^7 \text{ ом}$ ;  $C = 3,3 \text{ м. нф}$ .  $\tau \approx 150 \text{ мксек}$ .

Повидимому, числовой коэффициент в (5) следует положить равным единице, и тогда получим следующее эмпирическое соотношение:

$$\tau \approx t_{гор} \frac{R_i}{R} \cdot \frac{v_{пор}}{v_0}. \quad (6)$$

Дальнейшее уменьшение  $\tau$  можно получить, увеличивая  $R$  и  $v_0$  и, соответственно, уменьшая  $C$ , а также уменьшая  $v_{\text{пор}}$  путем увеличения  $R_{\text{ш}}$ . Увеличение  $v_{g2}$  уменьшает  $R_1$  и увеличивает  $v_{\text{пор}}$ .

Описанная схема испытана в годоскопе с 100 ÷ 200 ячейками, при разрешающей способности  $\tau = 15$  мк сек. При этом чувствительность для импульсов от счетчиков, при  $v_{g2} = 50$  вольт, составляет  $\approx 2$  вольт.

Мы считаем, что разрешающая способность и чувствительность могут быть существенно улучшены.

## II. Схема питания самогасящих счетчиков Гейгера-Мюллера

В исследовательских работах по изучению заряженных частиц космического излучения широко применяются самогасящие счетчики Гейгера-Мюллера. Количество их доходит—на одной установке, до нескольких сотен, а иногда до тысячи штук. Вопрос питания этих счетчиков с увеличением их количества усложняется, так как рабочее напряжение  $v_p$  у них разное и приходится питать их индивидуально.

На наших установках до сих пор применяли схему питания показанную на фиг. 2 [1], где отрицательный потенциал  $v_0$ , общий для всех счетчиков ( $v_0$  самый высокий потенциал при котором ни один счетчик данной группы не работает), а добавочный потенциал  $v_n$  подбирается при помощи потенциометров, смонтированных на общем щите, для каждого счетчика отдельно. Таким образом, на корпус каждого счетчика подается отрицательный потенциал

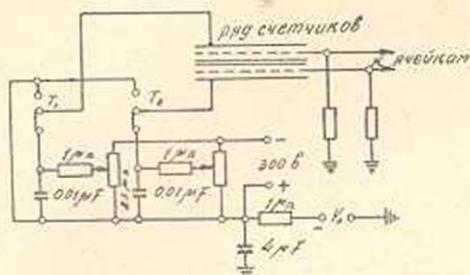
$$v_p = v_0 + v_n \quad (n = 1, 2, 3... n).$$

При таком способе питания необходимо счетчики изолировать друг от друга, что увеличивает шельность рядов телескопа. Проводка питания получается громоздкой и необходимая систематическая проверка работы счетчиков требует не менее двух сотрудников.

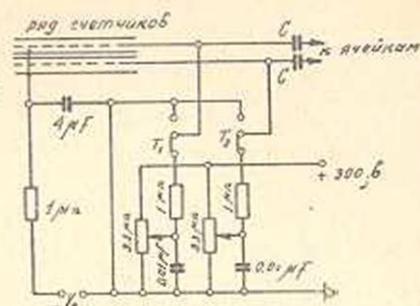
Самогасящие счетчики можно питать обратным способом, т. е. на нить подать положительный потенциал, а корпус заземлять. Тогда вопрос изоляции между счетчиками отпадает, но нити находятся под высокими потенциалами и импульсы приходится брать от них через высоковольтную емкость. Щит питания, как и в первом варианте, необходимо монтировать отдельно. Проверка счетчиков в этом случае так же неудобна.

На последней установке мы применяли полуобращенную схему питания счетчиков, которая показана на фиг 3.

Такая схема питания позволяет в рядах телескопа счетчики разместить вплотную и подать на корпуса общий отрицательный потенциал  $v_0$  ( $v_0$  такой же, как и в первом варианте). Добавочный потенциал, необходимый для работы счетчика, подается с положительным



фиг. 2.

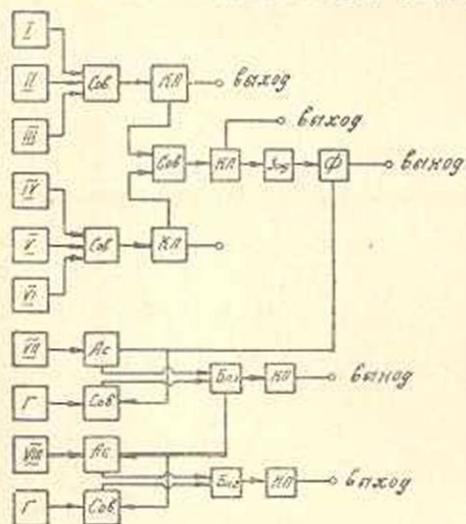


фиг. 3.

знаком на нить при помощи индивидуальных потенциометров смонтированных вместе с неоновыми ячейками на одном щите. Добавочный потенциал не превышает 250–300 вольт, поэтому емкость  $C$  может быть обычно типа, например КТК-1. Если схема питания монтируется вместе с неоновыми ячейками, то установка получается более компактная, занимает меньше места и позволяет производить систематическую проверку работы счетчиков одним сотрудником.

### III. Схема совпадения и антисовпадения

В схеме предусмотрены две группы тройного совпадения, два канала антисовпадения и два канала гашения. Блок-схема приведена на фиг. 4.



фиг. 4

а) Каналы усиления и формирования импульсов совпадений

Каналы усиления и формирования импульсов, собранные на двух лампах, показаны на фиг. 5. Первая лампа 6ЖЗП стоит в обычном усилительном режиме на сопротивлениях, с примерно десятикратным усилением. На второй лампе (одна половина 6Н8С) собран закрытый блокинг-генератор с сеточным пуском. Импульсы, приходящие от анода первой лампы через емкость  $C_2$ , запускают блокинг-генератор. На аноде лампы 6Н8С получаются стандартные отрицательные импульсы с большим положительным заходом. Форма импульсов примерно столбикообразна, с передним фронтом нарастания 0,3–0,4 мксек. Амплитуда импульсов зависит от анодного напряжения и составляет  $\approx 80\%$  его величины, в допустимых пределах для данного типа

аноде лампы 6Н8С получаются стандартные отрицательные импульсы с большим положительным заходом. Форма импульсов примерно столбикообразна, с передним фронтом нарастания 0,3–0,4 мксек. Амплитуда импульсов зависит от анодного напряжения и составляет  $\approx 80\%$  его величины, в допустимых пределах для данного типа

ламп, при нагрузке на выходной обмотке не менее 120 *ком*. Ширина получаемых импульсов регулируется при помощи переменного сопротивления и емкости, включенных параллельно между собой и последовательно в цепи сетки блокинг-генератора. Все каналы усиления и формирования импульсов идентичны.

В зависимости от того, какого знака импульс необходим для последующих радио схем, заземляется тот или иной конец III обмотки импульсного трансформатора, стоящего в аноде блокинг-генератора. Для того, чтобы убрать заход импульса, между концами третьей обмотки параллельно  $R_{10}$  включен диод ДГЦ-26; его также можно включить параллельно с анодной обмоткой трансформатора. В нашей схеме третья обмотка заземлена так, что через диод ДГЦ-23 на совпадения подается положительный импульс. Каналы надежно работают, когда от сборки счетчиков на вход поступают импульсы не менее 1,5 *вольт*. В этом случае на аноде первой лампы получаются импульсы более 15 *вольт*, что достаточно для открытия блокинг-генератора, запертого смещением  $\sim 10$  *вольт*, без существенной задержки во времени. При 250 *вольт* на аноде стандартные импульсы на выходе имеют амплитуду около 200 *вольт*. При включении его в цепь совпадения из-за малого сопротивления цепи величина импульсов падает. При 430-ом в цепи совпадения величина импульсов на выходе составляет около 70 *вольт*.

#### б) Схема совпадений

Совпадения осуществляются на германиевых плоскостных диодах [2, 3] типа ДГЦ-26 на одном общем сопротивлении (фиг. 5). Через сопротивление  $R_c$  течет постоянный ток, который разветвляется на три параллельных идентичных канала, состоящих из последовательно соединенных диодов ДГЦ-26 и сопротивлений  $R_k$ . Когда импульсы поступают от трех каналов одновременно в точке А появляется совпадательный импульс прямоугольной формы, примерно такой же величины и ширины, что и выходной импульс одиночного канала.  $R_c$  и  $R_k$  подобраны так, что импульсы тройного совпадения отличаются от импульсов двойного совпадения  $\sim 8$  раз, что дает возможность четко их разделить.

На нашей схеме имеется две группы тройного совпадения. Каждая из них имеет отдельный выход через катодный повторитель. Импульсы от двух групп совпадения через катодные повторители передаются на двойное совпадение (фиг. 6). Через катодный повторитель импульсами вторичного совпадения запускается блокинг-генератор задержки ( $L_6$ ). Блокинг-генератор формирования ( $L_7$ ) запускается положительным заходом отрицательного импульса блокинг-генератора задержки. Следовательно, запуск формирующего блокинг-генератора задерживается на ширину импульса блокинг-генератора задержки.

Меняя ширину импульса можно получить задержки от 1,5—14 мк сек. Таким образом можно на выходе схемы получить импульсы шестикратного совпадения с разными задержками.

#### в) Каналы усиления и формирования импульсов антисовпадения

На схеме (фиг. 6) имеется два канала усиления и формирования импульсов антисовпадений. Они тождественны каналам совпадений с той разницей, что импульсный трансформатор в блокинг-генераторе дает более широкие импульсы и выходной импульс берется отрицательный. Антисовпадения осуществляются на лампе 6Ж2П ( $L_3$  и  $L_6$ ). Первая сетка лампы соединена с выходом канала антисовпадения, а третья сетка — совпадений. Когда импульсы приходят только от каналов совпадения, на аноде лампы 6Ж2П получаются отрицательные импульсы, которые запускают выходной блокинг-генератор. А когда одновременно приходят и импульсы антисовпадения, то импульсы совпадения не проходят, и выходной блокинг-генератор не запускается.

#### г) Каналы гашения

В схеме предусмотрено два канала гашения ( $L_5$ ). Канал гашения представляет один закрытый блокинг-генератор, подобный блокинг-генератору канала совпадения, но с более широкими импульсами. Положительный импульс гашения после совпадения с импульсом совпадения передается на сетку выходного блокинг-генератора ( $L_4$ ).

Когда импульсы приходят только от совпадений, выходной блокинг-генератор запускается от анода, а если импульсы приходят одновременно от совпадения и антисовпадения на выходной блокинг-генератор импульсы не поступают. Когда импульсы приходят одновременно от совпадения, антисовпадения и гашения, то выходной блокинг-генератор запускается через сетку от импульсов совпадения гашения и совпадения. Вторые каналы антисовпадения и гашения являются повторениями первых.

Авторы выражают благодарность Агасяну Э. смонтировавшему и проведшему предварительную наладку схемы совпадений, и Григорян Л. за участие в испытании.

Авторы благодарны также Т. Л. Асатриани за постоянный интерес к описанным работам и участие в обсуждении.

Физический институт АН Армянской ССР

Поступило 20 VIII 1958

Գ. Ս. Հակոբյան, Գ. Լ. Մարիկյան, Վ. Մ. Խարիտոնով

ՄԻ ՔԱՆԻ ՆՈՐ ՍԻԵՄԱՆԵՐ ԳՈԳՈՍԱԿՈՊԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում նկարագրված է նեոնային սաղխատեխնիկայան բջջի բարելավված սինեման 6Ж2П լամպերով, որը հնարավորություն է ապահովում բարձրացնել բջջի զգալնությունը և որոշող ընդունակությունը:

Տրված է ինքնամարդող հաշվիչների սնման մի նոր եղանակ:

Մշակված և փորձարկված է համընկնման ու հակահամընկնման օժեղացնող կանաչների սխեման 6ՊՅՊ և 6ՄՑ օադիտվածուերով: Հաշվիչների առանձին շարքերից համապատասխան կանաչները եկող իմպուլսները ալտակոտժեղացվում, ձևավորվում են: Այդ ձևավորված իմպուլսների համընկնումը իրականացվում է կիսահաղորդիչ երկէլեկտրոնների վրա: Այնուհետև 6ՊՅՊ լամպի վրա կատարվում է իմպուլսների հակահամընկնում:

Մշակված է իմպուլսների յուրահատուկ մարման սխեմա, որը հնարավորություն է տալիս, որոշ ստուժով, չեղոքացնել հակահամընկնման կանաչի ազդեցութունը համընկնման իմպուլսի վրա:

### ЛИТЕРАТУРА

1. Харитонов. В. М. Диссертация. Институт Физических Проблем, Москва, 1948.
2. Саини А. А. Радиотехнические методы исследования излучений. 1951. ст. 273.
3. Collinge, B., Merrison A. W., and Eccleshall D. J. Sci. Instr. 33, 72, 1956.

Р. А. Саакян

## Функция распределения тесных двойных по разностям звездных величин компонент

Знание функции распределения двойных звезд по разностям звездных величин компонент может объяснить некоторые вопросы космогонии двойных систем.

Ряд авторов рассматривал вопросы космогонии двойных звезд, пользуясь данными относительно функции распределения визуально двойных по  $\Delta m$ .

Мы думаем, что не меньшую роль может играть знание функции распределения тесных двойных по разностям звездных величин компонент. Поэтому мы попытаемся получить эту функцию. Но надо отметить, что данные наблюдений тесных двойных сильно искажены избирательностью наблюдений. Следовательно при выводе функции распределения этих звезд надо учесть избирательность наблюдений.

Как известно тесные двойные, главным образом, наблюдаются в качестве затменных переменных и спектроскопических двойных. В данной статье мы используем данные касающиеся затменных переменных, учитывая, что для этих звезд имеются формулы, с помощью которых можно учитывать избирательность наблюдений.

По Грамацкому [1] вероятность, что данная тесная двойная звезда может оказаться затменной, выражается формулой:

$$p = \frac{r_1 + r_2}{a}, \quad (1)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы компонент,  $a$  — расстояние между компонентами.

Вероятность открытия затменной переменной при сравнении одной пары пластинок выражается приблизительно формулой [2]:

$$W = 2D(1-2D) \frac{(0,73A)^2}{1+(0,73A)^2} f(m), \quad (2)$$

где  $D$  — отношение продолжительности общего затмения к периоду,  $A$  — амплитуда,  $f(m) = 1 - 0,062m$ .

Как увидим ниже, если нам известно наблюденное распределение затменных переменных по значениям амплитуды изменения звезд-

ных величин, или по разностям звездных величин компонент, то пользуясь формулами (1) и (2), мы можем получить функцию распределения тесных двойных по разностям звездных величин компонент.

§ 1. Функции распределения тесных двойных по  $\Delta m$  компонент, полученная с помощью функции распределения затменных переменных по амплитуде звездных величин

По каталогу Казанской Обсерватории [7] обнаруженные затменные переменные дают следующее наблюдаемое распределение по амплитудам звездных величин (таблица 1).

Таблица 1

A	2 <sup>m</sup> .1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	
N	16	73	142	148	153	133	88	63	51	48	
A	0 <sup>m</sup> .1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9	4.1
N	41	18	25	23	20	10	6	6	4	3	1

Согласно [2] число тесных двойных определяется из соотношения

$$n(A) = \frac{N}{Wp} \quad (3)$$

Показано [3], что нет корреляции между  $A$  и  $D$  и между  $A$  и  $p$ . Следовательно из [3] имеем:

$$n(A) = CN \frac{1 + (0,73A)^2}{(0,73A)^2} \quad (3')$$

По таблице 1 и формуле (3') получим таблицу 2.

Таблица 2

A	0 <sup>m</sup> .1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	2.1	3.1	3.9	4.1
Cn	20	8	6	3.6	2.5	1.7	0.9	0.6	0.3	0.06	0.015	0.005

Функцию распределения тесных двойных по разностям звездных величин компонент обозначим через  $F(\Delta m)$ , тогда легко видеть, что она определяется из интегрального уравнения:

$$n(A)dA = C \int_{\Delta m(i=90^\circ)}^{\infty} F(\Delta m) \sin i \, di \, d\Delta m \quad (4)$$

В самом деле, число тесных двойных, имеющих  $i$  (угол между лучем зрения и плоскостью орбиты) в интервале  $(i, i+di)$ , будет пропорционально  $\sin i \, di$ , а из них число тесных двойных, имеющих  $\Delta m$  в интервале  $(\Delta m, \Delta m+d\Delta m)$  будет с  $F(\Delta m) \sin i \, di \, d\Delta m$ . В уравнении (4) амплитуда  $A$  зависит от  $\Delta m$  и  $i$  и каждому значению  $dA$  при данном  $\Delta m$  соответствует свое значение  $di$ , которое определяется из приведенной ниже формулы (10).

Нижний предел интеграла определяется из формулы (6) при фотометрической фазе  $\alpha=1$ , что дает

$$\Delta M = 2,5 \lg (10^{0,4A} - 1).$$

Величина  $\sin i \, di$  определяется из следующих двух формул [4], [5].

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{r_1 \Delta}{r_2^2} \sin \varphi_1 \right), \quad (5)$$

$$A = 2,5 \lg \frac{1 + 10^{0,4\Delta M}}{1 + 10^{0,4\Delta M} (1 - \alpha)}, \quad (6)$$

где

$$r_1^2 = r_1^2 + \Delta^2 - 2r_1 \Delta \cos \varphi_1, \quad r_2^2 = r_2^2 + \Delta^2 - 2r_2 \Delta \cos \varphi_2,$$

$\Delta$  — проекция расстояния между компонентами на небесной сфере. При  $r_1=r_2$  и при соединении компонент, из формулы (5), получим:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left[ \arccos \frac{\cos i}{p} - \frac{\cos i}{p} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{p^2}} \right]. \quad (7)$$

Здесь учтено, что, при соединении компонент,  $\Delta = a \cos i$ .

По формуле (7) составлена таблица 3.

Таблица 3

$\frac{\cos i}{p}$	1	0,87	0,7	0,5	0,35	0,1	0,05	0,02	0,009	0,0
$\frac{\pi}{2} \alpha$	0,00	0,076	0,29	0,61	0,91	1,37	1,45	1,52	1,56	1,57

Из этой таблицы нетрудно заключить, что приблизительно

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left( 1,57 - 1,6 \frac{\cos i}{p} \right). \quad (8)$$

Пользуясь этим приближенным выражением для  $\alpha$  и (6), получим

$$\frac{2}{\pi} \left[ 1,57 - 1,6 \frac{\cos i}{p} \right] = [1 + 10^{-0,4\Delta M}] [1 - 10^{-0,4A}], \quad (9)$$

откуда:

$$\sin i \, di = C_1 [1 + 10^{-0,4\Delta M}] 10^{-0,4A} dA, \quad (10)$$

где  $C_1$  — постоянная.

Из (4) и (10) находим:

$$n(A) 10^{0,4A} = C \int_{\Delta M(1-0,97)}^{\infty} (1 + 10^{-0,4\Delta M}) F(\Delta M) d\Delta M, \quad (11)$$

откуда:

$$F(\Delta M) = \frac{C}{1 + 10^{-0,4\Delta M}} \frac{\partial}{\partial \Delta M} [n(A) 10^{0,4A}]. \quad (12)$$

Функцию  $n(A)$ , заданную в виде таблицы 2, можно представить одной из следующих двух интерполяционных формул.

$$n(A) = K_1 \cdot 25 \cdot 10^{-A}, \quad (13)$$

$$n(A) = K_2 \cdot 26 \cdot 10^{-1,2A}. \quad (14)$$

В таблице 4 даются значения  $n(A)$ , вычисленные по этим формулам. Эти значения можно сравнить с таблицей 2.

Таблица 4

A	$0^m.1$	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	2,1
$25 \cdot 10^{-A}$	20	12,5	7,5	5	3	2	1,25	0,75	0,2
$26 \cdot 10^{-1,2A}$	20	11,4	6,5	3,8	2,2	1,3	—	0,42	—

Из (12) пользуясь (13) или (14) получим два варианта решения:

$$F_1(\Delta m) = C_2 \frac{10^{0,8\Delta m}}{(1 + 10^{0,4\Delta m})^{3,5}}; \quad (15)$$

или

$$F_2(\Delta m) = C_2^1 \frac{10^{0,8\Delta m}}{(1 + 10^{0,4\Delta m})^4}. \quad (16)$$

Относительные значения  $F$ , вычисленные по формулам (15) и (16), приведены в таблице 5.

Таблица 5.

$\Delta m$	$0^m.0$	0,2	0,3	1	2	5	10
c $F_1(\Delta m)$	0,09	0,12	0,09	0,08	0,04	0,001	0,0001
c $F_2(\Delta m)$	0,06	—	—	0,04	0,014	0,0001	$10^{-8}$

Конечно значениям функции  $F$ , полученным для  $\Delta m > 5^m$ , не нужно придавать большого значения, но ясно, что в действительности число таких пар в Галактике относительно мало. В самом деле число пар, у которых  $\Delta m$  велико и спутники являются гигантами, мало, а те пары, у которых обе компоненты карлики, обычно не имеют больших значений  $\Delta m$ .

## § 2. Функция распределения тесных двойных по разностям звездных величин компонент, полученная непосредственно из наблюдений $\Delta m$

На основании значений светимостей главных компонент  $L_1$ , приведенных в каталоге Казанской обсерватории [7] для части, затменных переменных по формуле

$$\Delta m = 2,5 \lg \frac{L_1}{1 - L_1} \quad (17)$$

были вычислены значения  $\Delta m$ .

Полученное „наблюденное“ распределение звезд по  $\Delta m$  дается в таблице 6.

Таблица 6

$\Delta_m$	0 <sup>m</sup> ,0-1,0	1,01-2,00	2,01-3,00	3,01-4,00	4,01-5,00	>5
$N(\Delta_m)$	133	80	65	25	7	1

Пользуясь этими данными и правилами теории вероятностей можно определить искомую функцию из уравнения:

$$N(\Delta_m) d\Delta_m = CF(\Delta_m) \int_0^{90^\circ} \sin i p w di d\Delta_m, \quad (18)$$

где  $CF(\Delta_m) \sin i di w p d\Delta_m$  — число обнаруженных затменных переменных, имеющих  $i$  и  $\Delta_m$  в интервалах  $(i, i+di)$ ,  $(\Delta_m, d\Delta_m+\Delta_m)$  соответственно.

Из (9) получим:

$$\sin i di = C(1+10^{0,4\Delta_m}) 10^{-0,4A} dA. \quad (19)$$

Подставив значение  $\sin i di$  из (19) в (18) находим:

$$N(\Delta_m) = CF(\Delta_m) (1+10^{-0,4\Delta_m}) \int_0^{A_{\max}} p w 10^{-0,4A} dA, \quad (20)$$

где верхний предел интеграла определяется из уравнения

$$A_{\max} = 2,5 \lg(1+10^{0,4\Delta_m}). \quad (21)$$

Учитывая, что нет корреляции между  $A$  и  $D$  и между  $A$  и  $p$  из (20), имеем:

$$N(\Delta_m) = C_3 F(\Delta_m) (1+10^{-0,4\Delta_m}) \int_0^{A_{\max}} 10^{-0,4A} \frac{(0,73A)^2 dA}{1+(0,73A)^2} \quad (22)$$

В формуле (22) выражение  $\frac{(0,73A)^2}{1+(0,73A)^2}$  можно заменить выражением  $2(1-10^{-0,68A})$ , тогда из (22) находим:

$$F(\Delta_m) = \frac{C_3^2 N(\Delta_m)}{(1+10^{-0,4\Delta_m}) [2(1+10^{0,4\Delta_m})^{-1,2} - 2,5(1+10^{0,4\Delta_m})^{-1} + 0,5]} \quad (23)$$

По формуле (23) и по таблице 6 для функции распределения тесных двойных по разностям звездных величин компонент составлена таблица 7.

Таблица 7

$\Delta_m$	0 <sup>m</sup> ,0	1	2	3	4
$c F(\Delta_m)$	555	230	153	60	15

По [6] визуально-двойные звезды спектральных типов  $B$ ,  $A$  и  $F$  дают следующую функцию распределения по  $\Delta_m$ .

Таблица 8

$\Delta m$	0 <sup>m</sup> .0—1.00	1.01—2.00	2.01—3.00	3.01—4.00	4.01—5.00	5.01—6.00	6.01—7.00
$n(\Delta m)$	2272	877	581	480	341	203	94

Таблицы 5 и 7 показывают, что функция распределения тесных двойных звезд по разностям звездных величин компонент — убывающая.

Как видно из таблиц 5 и 8 затменные переменные и вообще тесные двойные, при  $\Delta m \leq 5^m$  дают почти такую же функцию распределения по  $\Delta m$ , что и визуально-двойные, но при  $\Delta m > 5^m$  эти функции резко отличаются. Из этих данных видно, что вообще компоненты тесных двойных отличаются друг от друга по яркости меньше, чем визуально-двойные. Это явление можно, по-видимому, объяснить тем, что у тесных двойных из массивной компоненты в менее массивную непрерывно перетекает материя, вследствие чего разница между массами, а следовательно и светимостями компонент, постоянно уменьшается.

Бюраканская астрофизическая обсерватория  
АН Армянской ССР

Поступило 15 XII 1958

### Ռ. Ա. Սահակյան

## ՆԵՂ ԿՐԿՆԱԿԻ ԱՍՏՂԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԸՍՏ ՆՐԱՆՑ ԿՈՍՄՈՆԵՆՏՆԵՐԻ ԱՍՏՂԱՅԻՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կրկնակի աստղերի բաշխման ֆունկցիան, ըստ նրանց կոմպոնենտների աստղաչին մեծությունների աստղերաբաշխումների, կարող է բացատրել կրկնակի աստղերի կոմպոնենտի սրբոշ հարցեր: Մի շարք հեղինակների կողմից այդ ֆունկցիան ստացված է վիզուալ կրկնակի աստղերի համար: Այս աստղին փորձն է, որ մենք կատարում ենք այն ստանալու սեղմ կրկնակի աստղերի համար:

Սեղմ կրկնակի աստղերի վերոհիշյալ ֆունկցիան, հավանականությունների տեսության հիման վրա, հաշվի առնելով դիտողական ընտրողականությունը, ստացված է Կազանի աստղագիտության կատարողի տվյալներից:

Ստացված ֆունկցիան ընդհանուր տեսքով նման է վիզուալ կրկնակի աստղերի նախ ֆունկցիային, միայն այն տարբերությամբ, որ արգումենտի մեծ արժեքների համար ֆունկցիան ավելի արագ է նվազում, քան այդ տեղի ունի վիզուալ կրկնակի աստղերի մոտ:

Այդ ֆունկցիան նվազող է:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Gramatzki H. I. A. N. 233, 105, 1928.
2. Саакян Р. А. Сообщения Бюраканской Обсерватории, вып. X, 1952.
3. Саакян Р. А. Сообщения Бюраканской Обсерватории, вып. XXIV, 1958.
4. Мартынов Д. Я. Переменные звезды. Т. II. М.—Л., 1939.
5. Цесевич В. П. и другие. Переменные звезды. Т. III, М.—Л., 1947.
6. Саакян Р. А. ДАН АрмССР, т. XIX, 5, 1954.
7. Бюллетень Ас. Обс. имени В. Н. Энгельгарда, 28, 1952.

Г. С. Акопян

## Десятичный счетчик на германиевых триодах с регистрацией отсчета на неоновых лампах

В работе приводится схема десятичного счетчика на германиевых плоскостных триодах типа П6Д. Регистрация на неоновых лампах осуществляется с помощью триодов типа П2А.

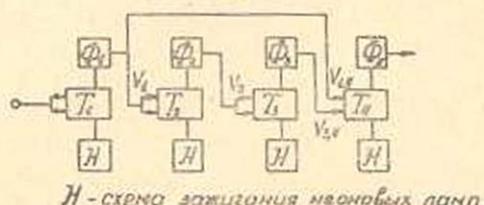
В схемах десятичного счетчика на электронных лампах [1] регистрация отсчета осуществляется неоновыми лампами, которые обычно включают параллельно анодным нагрузкам одного из триодов триггерной ячейки. В аналогичных схемах на германиевых триодах [2] такой способ применить невозможно из-за небольшого рабочего напряжения этих триодов. Поэтому, для поджига неоновых ламп приходится вводить в схему добавочные цепи. Десятичный счетчик собран нами на германиевых триодах типа П6Д, а для поджига неоновых ламп применены триоды типа П2А.

Блок-схема десятичного счетчика на германиевых плоскостных триодах и эпюры напряжений, поясняющие ее работу приведены на фиг. 2.

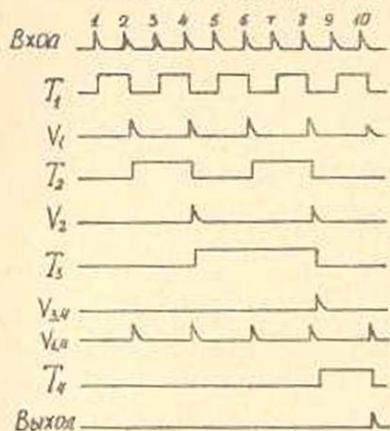
Принципиальная схема десятичного счетчика с регистрацией отсчета на неоновых лампах приведена на фиг. 2.

Прежде, чем разбирать работу десятичного счетчика, рассмотрим двоичный счетчик с регистрацией положений неоновыми лампами, например первый триггер с каскадом формирования импульсов и со схемой зажигания неоновой лампы на фиг. 2. Назовем состоянием 1 то, при котором левая часть триггера открыта, а правая закрыта, и состоянием 2-обратное положение. Когда триггер находится в состоянии 1, коллектор правого триода, а также база триода П2 (в схеме зажигания неоновых ламп Н-1) находятся под большим минусовым потенциалом, следовательно П2 открыт и потенциал на его коллекторе недостаточен для зажигания неоновой лампы Н-1. Первый входящий импульс переводит триггер в состояние 2, на базе триода П2 отрицательный потенциал падает, триод закрывается потенциал на коллекторе поднимается и зажигается неоновая лампа, что соответствует счету один. Второй импульс переводит триггер в состояние 1, неоновая лампа тухнет, а на выходе схемы формирования  $\Phi$ , появляется положительный импульс, соответствующий счету два, что и передается на следующий триггер.

В десятичном счетчике первые восемь импульсов схема считает как двоичный счетчик. В последний триггер  $T_4$  импульсы поступают по двум каналам. Второй, четвертый, шестой и восьмой импульсы, приходящие от  $\Phi_3$ , не меняют состояния триггера  $T_4$ , находящегося в



*Н-схема зажигания неоновых ламп.*



Фиг. 1. Блок-схема десятичного счетчика и эпюры напряжений.

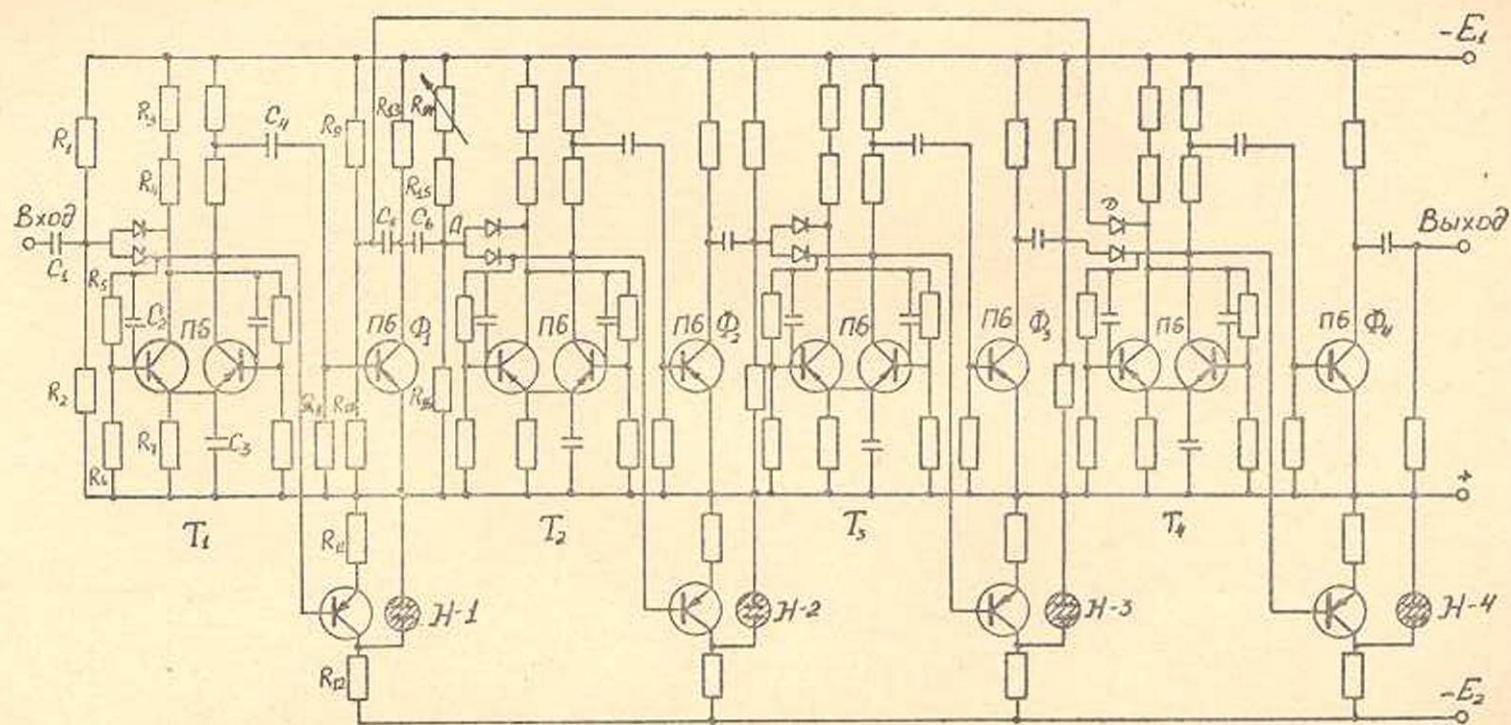
$T$ —триггер,  $\Phi$ —схема формирования импульсов. Импульс, соответствующий счету 10, и вся схема приходит в начальное состояние.

Схема испытана на частоте повторения импульсов в 200 кГц. Предельная частота 400 кГц.

Схема, собранная на германиевых триодах типа П6Д и П2А, устойчиво работает при  $E_1$  от  $-5$  до  $-8$  вольт и  $E_2$  от  $-100$  до  $-125$  вольт. Средний расход энергии 60–100 милливатт (10–12 ма) по схеме пересчета и 1,2–1,6 ватт (10–12 ма) четыре интерполирующие неоновые лампы.

#### Электрические данные

$C_1=3300$ пф	$R_1=4,7$ кл	$R_9=4,7$ кл
$C_2=2000$ пф	$R_2=10$ кл	$R_{10}=10$ кл
$C_3=0,03$ мф	$R_3=1,3$ кл	$R_{11}=1,3$ кл
$C_4=3300$ пф	$R_4=2,0$ кл	$R_{12}=30$ кл
	$R_5=6,8$ кл	$R_{13}=10$ кл
	$R_6=3,6$ кл	$R_{14}=10$ кл (перемен.)
	$R_7=750$ ом	$R_{15}=4,7$ кл
	$R_8=10$ ком	$R_{16}=10$ кл



Фиг. 2. Принципиальная схема десятичного счетчика с регистрацией отчета на неоновых лампах.

Приняшу благодарность доктору физ. мат. наук Харитонову В. М. за постоянный интерес и оказанную помощь во время исполнения настоящей работы.

Փիզիկական ինստիտուտ ԱՊ Բարձրագույն ՀՀՄ

Ստացավ 14 VI 1958

### Գ. Ս. Առօյան

## ՀԱՄԱՐԱՔԸ ՆԵՌՆԱՅԻՆ ԼԱՄՊԵՐՈՎ ՆՇՈՂ, ԳԵՐՄԱՆԻՈՒՄԻ ԵՌԷԼԵԿՏՐՈՂՆԵՐՈՎ, ՏԱՍՆՅԱԿԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻԶ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղածում նկարագրվում է տանդակային հաշվիչի սխեման՝ հավաքված գերմանիումի մակերևաային ՍԵՄ ախյի հաշվարկներով: Համարանքի նշանը ներհային լամպերով կատարվում է ՍԶԱ ախյի հաշվարկների միջոցով: Նշված սխեման ստացված է իմպուլսների կրկնման միջև 200 հազար հերց հաճախակրանովյան սահմաններում:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Эдмор и М. Сенде. Электроника в ядерной физике 1956.
2. Матюхин Н. Я., Залкин А. В., Иванов, А. В. „Десятичные счетчики на кристаллических триодах“. Полупроводниковые приборы и их применение. Сборник статей, 1956.