

Г. М. Аветисян

О приближении аналитических функций целыми функциями

В работе М. В. Келдыша [1] доказано, что если функция аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$, то ее можно приблизить, равномерно целыми функциями в полосе $|\operatorname{Im} z| < a' < a$, причем рост приближающей целой функции ограничивается в зависимости от скорости возрастания аналитической функции, быстроты приближения и разности $\delta = a - a'$.

В настоящей заметке рассматривается аналитическая функция определенная в криволинейной неограниченной полосе. На основе метода М. В. Келдыша, доказывается возможность приближения этой функции целыми функциями на действительной оси и оценивается рост приближающей целой функции.

1. Пусть область D , содержащая действительную ось, ограничена кривыми $y = \pm \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ положительная, гладкая кривая и при $|x| \rightarrow \infty$, монотонно убывая, стремится к нулю. Через D_R обозначим множество точек области D , для которой $|z| \leq R$. В области D дана аналитическая функция $f(z)$, для которой

$$|f(z)| \leq M(R), \quad z \in D_R, \quad \text{где } M(R) = \max_{z \in D_R} |f(z)|.$$

Требуется приблизить функцию $f(z)$ целыми функциями $F(z)$ на действительной оси

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty$$

и в области D_R оценить рост приближающей целой функции в зависимости от роста аналитической функции $f(z)$, от функции $\varphi(x)$ и от ε .

Рассмотрим кривую H , определяемую уравнением $I = \lambda(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющую условиям:

1) $\lambda(x)$ представляет гладкую линию, имеющую монотонно возрастающий наклон касательной и проходит через точку $z = -i$.

2) $\lambda(x) \leq C|x|^{1-\varepsilon}$ при всех x .

Пусть H^* означает кривую, получаемую из H преобразованием $t = z - i$. Обозначим через D_λ область, которая содержит начало координат и ограничена кривой H снизу. Пусть функция $f_\lambda(z)$ осуществляет конформное отображение области расположенной над H , на

полуплоскость $\operatorname{Re} f_\lambda(z) > 0$ так, что бесконечность переходит в начало координат.

Лемма 1. Для любого положительного числа A существует целая функция $F_{\lambda A}^{(+)}(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|F_{\lambda A}^{(+)}(z)| \leq C e^{A \mu_\lambda(|z|+1)} \quad (1)$$

по всей плоскости, и неравенству

$$\left| \frac{1}{z} - F_{\lambda A}^{(+)}(z) \right| \leq C e^{-A f_\lambda(0)} \quad (2)$$

в точках, расположенных ниже кривой H^* , где $\mu_\lambda(R) = \max_{\substack{|z|=R \\ z \in D_\lambda}} |f_\lambda(z)|$,

а постоянная C не зависит от A .

Доказательство. Пусть при конформном отображении области D_λ кривая H переходит в мнимую ось, т. е. кривая $I = \lambda(x)$ переходит в $\operatorname{Re} f_\lambda(z) = 0$, тогда часть мнимой оси, находящейся в D_λ , переходит в часть действительной оси. Введем вспомогательную функцию

$\varphi_{\lambda A}(z) = e^{A f_\lambda(z)}$, где A — действительное число, отмеченное в лемме. На кривой H имеем: $|\varphi_{\lambda A}(z)| = 1$. Пусть z — произвольная точка плоскости, Γ_R — кривая, составленная из части H , расположенной вне круга $|\zeta| < R$, и части окружности $|\zeta| = R$, находящейся в области D_λ . Искомую функцию определим формулой

$$F_{\lambda A}^{(+)}(z) = \frac{e^{-A f_\lambda(0)}}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{A f_\lambda(\zeta)}}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta, \quad R > |z|, \quad (3)$$

в которой правая часть не зависит от R , если $R > |z|$.

Оценим $F_{\lambda A}^{(+)}(z)$. Принимая $|z| = |\zeta_1| - 1$, имеем:

$$\left| F_{\lambda A}^{(+)}(z) \right| = \frac{e^{-A f_\lambda(0)}}{2\pi} e^{A \max_{|\zeta_1| - |z| + 1} |f_\lambda(\zeta)|} \cdot C \leq C e^{A \mu_\lambda(R+1)}, \quad (4)$$

так как

$$\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = \int_{\Gamma_{R_2}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = C_1, \quad R < R_1 < R_2.$$

Таким образом, первая часть леммы доказана.

Оценим $\left| F_{\lambda A}^{(+)}(z) - \frac{1}{z} \right|$. Обозначим через γ_0 — замкнутый контур, составленный из дуги окружности $|\zeta| = R$, находящейся в области D_λ , и частью H , принадлежащей кругу $|\zeta| < R$. Область, ограниченную кривой γ_0 , обозначим через $D_\lambda^{(0)}$. Имея в виду, что обход по кри-

вой H равносильно обходу по кривым Γ_R и γ_0 вместе (обозначим $H = \Gamma_R + \gamma_0$), из уравнения (3) можем написать

$$F_{\lambda A}^{(+)}(z) = \frac{e^{-Af_{\lambda}(0)}}{2\pi i} \int_{\zeta \in H} \frac{e^{Af_{\lambda}(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)} d\zeta - \frac{e^{-Af_{\lambda}(0)}}{2\pi i} \int_{\zeta \in \gamma_0} \frac{e^{Af_{\lambda}(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)} d\zeta,$$

причем интегрирование в обоих интегралах производится в направлении, соответствующем положительному обходу D_{λ} , и области $D_{\lambda}^{(0)}$, ограниченных соответственно кривыми H и γ_0 . В точках, находящихся ниже H^* , имеем, очевидно

$$\frac{e^{-Af_{\lambda}(0)}}{e\pi i} \int_{\zeta \in H} \frac{e^{Af_{\lambda}(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)} d\zeta = \frac{e^{-Af_{\lambda}(0)}}{2\pi} \cdot C.$$

С другой стороны, имея в виду что ноль есть полюс, по известной теореме вычета имеем

$$\frac{e^{-Af_{\lambda}(0)}}{2\pi} \int_{\gamma_0} \frac{e^{Af_{\lambda}(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)} d\zeta = -\frac{1}{z}.$$

Таким образом

$$\left| F_{\lambda A}^{(+)}(z) - \frac{1}{z} \right| \leq e^{-Af_{\lambda}(0)} \cdot C, \quad (5)$$

где C не зависит от A и z .

Аналогично, через $F_{\lambda A}^{(-)}(z)$ обозначим целую функцию, удовлетворяющую неравенству

$$\left| F_{\lambda A}^{(-)}(z) \right| \leq C e^{A\mu_{\lambda}(R+1)}$$

всюду, и неравенству

$$\left| F_{\lambda A}^{(-)}(z) - \frac{1}{z} \right| < C e^{-Af_{\lambda}(0)}$$

над кривой $\tilde{H}^*$, расположенной симметрично с H^* , относительно оси Ox .

Лемма доказана.

2. Перейдем теперь к построению целой функции, приближающей аналитическую функцию $f(z)$, и оценим ее рост.

Введем некоторые обозначения.

1) Через H_0 (H_0^*) мы обозначим кривую, в которую переходит

$H(H^*)$ при преобразовании $z = \frac{t}{\delta}$, где $t = u + iv$.

Уравнения кривых H_0 и H_0^* , соответственно, будут:

$$v = \delta \lambda \left(\frac{u}{\delta} \right) \text{ и } v = \delta \lambda \left(\frac{u}{\delta} \right) - \delta.$$

2) В области D , ограниченной кривыми $y = \pm \varphi(x)$, построим область $D_{\varphi/2}$, ограниченную кривыми

$$y = \pm \frac{1}{2} \varphi(x) \equiv \pm \varphi_1(x).$$

3) На кривой $\Gamma_1: y = \pm \varphi_1(x)$ отметим точку $\zeta = \xi + i\varphi_1(\xi)$, принимая ее как начало новой системы декартовых координат. Обозначим через H_{ξ, φ_1} и H_{ξ, φ_1}^* те кривые, которые относительно точки ζ имеют такие расположения, какие имеют кривые H_λ и H_λ^* относительно начальной точки старой системы декартовых координат. Иначе говоря, кривые H_{ξ, φ_1} и H_{ξ, φ_1}^* получаются из кривых H_λ и H_λ^* при параллельном переносе, когда точка O совпадает с точкой ζ . Но величину δ мы заменяем функцией $\varphi_1(\xi)$.

Уравнения H_{ξ, φ_1} и H_{ξ, φ_1}^* относительно старой системы xOy имеют, соответственно, вид:

$$y = \varphi_1(\xi) \lambda \left(\frac{x - \xi}{\varphi_1(\xi)} \right) + \varphi_1(\xi);$$

$$y = \varphi_1(\xi) \lambda \left(\frac{x - \xi}{\varphi_1(\xi)} \right). \quad (6)$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Какова бы не была точка $\zeta \in \Gamma_1$, для любого числа A существует целая функция $F_{\lambda A \varphi_1}^{(+)}(z)$, удовлетворяющая неравенству*

$$\left| F_{\lambda A \varphi_1}^{(+)}(\zeta - z) \right| \leq \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{A \mu_\lambda \left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi_1(\xi)} \right)} \quad (7)$$

во всей плоскости, и неравенству

$$\left| F_{\lambda A \varphi_1}^{(+)}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{-A f_\lambda(0)} \quad (8)$$

в точках z , расположенных под кривой H_{ξ, φ_1}^* .

Доказательство. При помощи преобразования $z = \frac{t}{\delta}$ из неравенства (2) можем написать

$$\left| F_{\lambda A}^{(+)}\left(\frac{t}{\delta}\right) - \frac{\delta}{t} \right| < C e^{-A f_\lambda(0)},$$

или, что тоже самое,

$$\left| \frac{1}{\delta} F_{\lambda A}^{(+)}\left(\frac{t}{\delta}\right) - \frac{1}{t} \right| < \frac{C}{\delta} e^{-A f_\lambda(0)};$$

t находится под H_t^* . Обозначив через $F_{\lambda\lambda}^{(+)}(t) = \frac{1}{\delta} F_{\lambda\lambda}^{(+)}\left(\frac{t}{\delta}\right)$ и заменяя t на z , получим

$$\left| F_{\lambda\lambda}^{(+)}(z) - \frac{1}{z} \right| < \frac{C}{\delta} e^{-A f_{\lambda}(0)}, \quad (9)$$

в точках z , расположенных под кривой H_t . А во всей плоскости

$$\left| F_{\lambda\lambda}^{(+)}(z) \right| < \frac{1}{\delta} \frac{e^{A f_{\lambda}(0)}}{2\pi} C e^{A \frac{\max_{|\zeta| \leq |z|+1} |f_{\lambda}(\zeta)|}{\delta}} < \frac{C}{\delta} e^{A \mu_{\lambda} \left(\frac{R}{\delta} + \frac{1}{\delta} \right)},$$

где $R = |z|$. (10)

Рассмотрим теперь точку $\zeta \in \Gamma_1 (\zeta = \xi + i\varphi_1(\xi))$, а взамен приближаемой функции $\frac{1}{z}$ будем рассматривать ядро Коши $\frac{1}{\zeta - z}$. Учитывая неравенства (9) и (10), можем написать

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - F_{\lambda\lambda\varphi_1}^{(+)}(\zeta - z) \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{-A f_{\lambda}(0)}$$

в точках z , расположенных под кривой H_{ξ, φ_1} ;

$$\left| F_{\lambda\lambda\varphi_1}^{(+)}(\zeta - z) \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{A \mu_{\lambda} \left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi_1(\xi)} \right)}$$

во всей плоскости. Лемма доказана.

Аналогично можно доказать, что существует целая функция $F_{\lambda\lambda\varphi_1}^{(-)}(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left| F_{\lambda\lambda\varphi_1}^{(-)}(\zeta - z) \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{A \mu_{\lambda} \left(\frac{|\zeta - z| + 1}{\varphi_1(\xi)} \right)} \quad (7)$$

во всей плоскости и неравенству

$$\left| F_{\lambda\lambda\varphi_1}^{(-)}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{-A f_{\lambda}(0)} \quad (8)$$

в точках, расположенных над кривой $\tilde{H}_{\xi, \varphi_1}^*$, расположенной симметрично с H_{ξ, φ_1}^* относительно оси ox .

Теорема 1. Пусть $f(z)$ аналитична в нашей области D , $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Существует целая функция $F(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon \quad -\infty < x < \infty, \quad (11)$$

и такая, что

$$|F(z)| < \left[\frac{CRM(kR)}{\varphi(kR)} \right]^{1+C_{\varphi}(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{C_{\varphi}(0)}. \quad (12)$$

где $|z| < R, k \geq 2$.

Доказательство. Пусть N некоторое положительное число. Через $K_1(N)$ обозначим часть кривых $y = \pm \varphi_1(x)$, расположенных в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| < N$, через $K_2(N)$ — часть, прямых $\operatorname{Re} \zeta = \pm N$, расположенных в области $D_{\varphi/2}$. D'_N — область, ограниченная кривой $K(N) = K_1(N) + K_2(N)$. Очевидно, для аналитической функции $f(z)$ можем написать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < N, \quad z \in D_{\varphi/2}. \quad (13)$$

Через $F_{\lambda \varphi_1}(\zeta - z)$ обозначим $F_{\lambda \varphi_1}^{(+)}(\zeta - z)$ в случае $\operatorname{Im} \zeta > 0$ и $F_{\lambda \varphi_1}^{(-)}(\zeta - z)$ в случае $\operatorname{Im} \zeta < 0$.

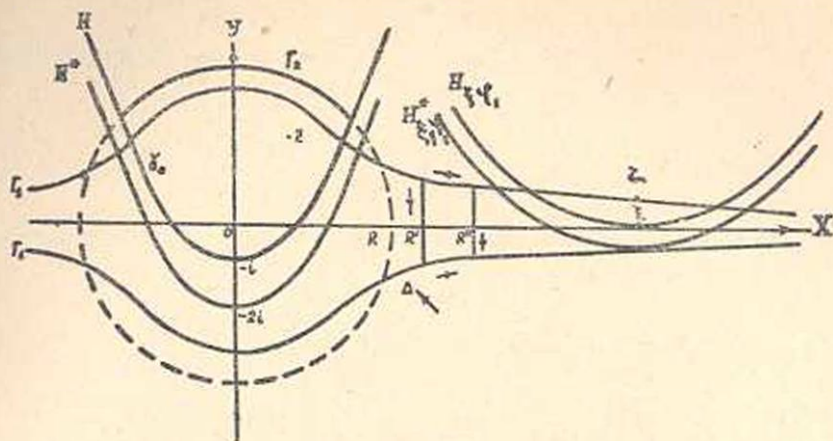
Искомую целую функцию $F(z)$ удовлетворяющую неравенствам (11) и (12), мы построим с помощью $F_N(z)$, определяемых равенством

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(N)} f(\zeta) F_{\lambda \varphi_1}(\zeta - z) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (14)$$

где интегрирование производится в направлении, соответствующем положительному обходу области $D_{\varphi/2}$, A_ξ зависит от ξ . Эта зависимость в явном виде будет написана далее. Докажем, что $F_N(z)$ в любой конечной части плоскости равномерно сходится к некоторой целой функции при $N \rightarrow \infty$. Для заданного наперед $R > 0$, число $R^* > R$ выберем так, чтобы при $\zeta = \xi + i\varphi_1(\xi)$, $|\xi| > R^*$, неравенство (8) (или 8') выполнялось в каждой точке круга $|z| < R$. Для этого поступим так. Пусть $|z| < R < R^* < R' < R'' < \xi$. В силу аналитичности функции $f(z)$ в области D имеем:

$$\begin{aligned} F_{R^*}(z) - F_{R'}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta) F_{\lambda \varphi_1}(\zeta - z) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2(R'')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2(R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta) \left[F(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta) \left[F_{\lambda \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta, \end{aligned}$$

где через Δ_k обозначена замкнутая кривая $K_1(R'') - K_1(R') + K_2(R'') - K_2(R')$.



Фиг. 1.

Из последнего равенства имеем

$$|F_{R'}(z) - F_{R''}(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(R'') - K_1(R')} f(\zeta) \left[F_{\lambda A_{\xi_1}}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \right|. \quad (15)$$

Возникает вопрос: каково должно быть ζ чтобы для модуля

$$\left| F_{\lambda A_{\xi_1}}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right|$$

можно было применить неравенство (8).

Для того, чтобы круг радиусом R находился ниже кривой*) $H_{\xi_1}^*$, переместим ζ по кривой $\varphi_1(x)$.

Рассмотрим значение z , принадлежащее кругу $|z| \leq R$ достаточно большого радиуса. Учитывая, что в уравнении кривой $H_{\xi_1}^*$ участвует монотонно убывающая функция $\varphi_1(\xi)$, возможно, что при увеличении ξ , кривая $H_{\xi_1}^*$ пересечет любой круг сколь угодно малого радиуса. (Примером таких кривых является, например, кривая $H_{\xi_1}^*$, если она строится по $\lambda(x) = |x|^\alpha - 1$, $0 < \alpha < 1$ вышеуказанным методом, а в качестве $\varphi(x)$ взято $\varphi(x) = e^{|x|^T}$. Предположим, что для любого наперед заданного круга сколь угодно большого радиуса $|z| = R$, кривые $\lambda(x)$ и $\varphi(x)$ такие, что для них существует такая точка ξ^* , чтобы для всех $\xi > \xi^*$ этот круг оказался ниже кривой $H_{\xi_1}^*$. Для этого достаточно требовать, чтобы при $\xi > \xi^*$ имело место неравенство

$$\varphi_1(\xi_*) \lambda \left(\frac{R - \xi_*}{\varphi_1(\xi_*)} \right) > R. \quad (16)$$

Решая это неравенство относительно, ξ_* найдем

$$\xi_* = \xi_{\lambda\varphi}(R). \quad (17)$$

) В дальнейшем аналогичная оговорка о $\bar{H}_{\xi_1}^$ подразумевается.

Обозначим абсолютную величину ζ_* через $\rho: \rho = |\zeta_*|$.

Итак, если $\zeta = \zeta_* + i\varphi(\zeta_*)$, то все точки круга радиусом R расположены под $H_{\zeta_*}^*$. Следовательно

$$\left| F_{\lambda A_{\zeta_*} \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{C}{\varphi_1(\xi)} e^{-A_{\zeta_*} f_{\lambda}(0)}. \quad (18'')$$

Тогда мы имеем право к правой части уравнения (15) применить неравенство (8). Получим:

$$|F_{R'}(z) - F_{R''}(z)| \leq C_3 \int_{R'}^{\infty} M(\xi) \frac{C}{\varphi(\xi)} e^{-A_{\zeta_*} f_{\lambda}(0)} d\xi,$$

$$|\xi| \geq |\zeta_*| = R^*, \quad R' > R^* = R^*(R).$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{F_N(z)\}$ в конечной плоскости требуем, чтобы

$$\int_0^{\infty} M(\xi) \frac{1}{\varphi(\xi)} e^{-A_{\zeta_*} f_{\lambda}(0)} d\xi < \infty. \quad (18)$$

Таким образом, последовательность $\{F_N(z)\}$ равномерно сходится в любом конечном круге при $N \rightarrow \infty$.

Предел последовательности $\{F_N(z)\}$, являющейся целой функцией, обозначим через $F(z)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(z) = F(z). \quad (19)$$

Теперь докажем, что на действительной оси

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \quad -\infty < x < \infty. \quad (20)$$

Для этой цели составим разность

$$\begin{aligned} F_N(z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(N)} f(\zeta) \left[F_{\lambda A_{\zeta_*} \varphi_1}(\zeta - z) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \quad |z| < N. \end{aligned} \quad (21)$$

В конечной части плоскости, ограниченной кривой

$$K(N) = K_1(N) + K_2(N), \quad \text{имеем:}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} |F_N(z) - f(z)| \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(N)} f(\zeta) \left[F_{\lambda A_{\zeta_*} \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \right| < \end{aligned}$$

$$\leq \frac{4}{2\pi} \int_0^{\infty} M(\xi) \frac{c}{\varphi(\xi)} e^{-A_{\xi} f_{\lambda}(0)} d\xi \leq \varepsilon_* \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \varepsilon. \quad (22)$$

Из последнего условия имеем

$$\frac{M(\xi)}{\varphi(\xi)} e^{-A_{\xi} f_{\lambda}(0)} = \frac{\varepsilon_*}{1+\xi^2}.$$

Отсюда найдем

$$A_{\xi} = \frac{1}{f_{\lambda}(0)} \left[\ln(1+\xi^2) + \ln M(\xi) + \ln \frac{1}{\varepsilon_*} - \ln \varphi(\xi) \right]. \quad (23)$$

Из (19) и (22) вытекает

$$|F(z) - f(z)| = \lim_{N \rightarrow \infty} |F_N(z) - f(z)|$$

и окончательно получим требуемое неравенство (20).

Докажем вторую часть теоремы. Оценим рост построенной целой функции $F(z)$. Искомая оценка будет получена из соответствующей оценки для $F_N(z)$, справедливой при любом N . Для получения этой оценки запишем (14) в виде:

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(N)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(N)} f(\zeta) F_{\lambda A_{\xi} \varphi_1}(\zeta - z) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(N)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

и рассмотрим значения $|z| \leq R$, принадлежащие кругу достаточно большого радиуса R . Обозначим через $c(z)$ совокупность частей кривых $y = \pm \varphi(x)$, принадлежащих полосе $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| < 1$, где z_0 — произвольная точка области D .

Имеем очевидно, при $N > \rho > R > 1$,

$$|F_N(z)| \leq M(R) + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{K_1(\rho) - C(z)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(\infty)} |f(\zeta)| \cdot |F_{\lambda A_{\xi} \varphi_1}(\zeta - z) - \frac{1}{\zeta - z}| |d\zeta| + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(\rho)} |f(\zeta)| |F_{\lambda A_{\xi} \varphi_1}(\zeta - z)| |d\zeta| = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5.$$

Оценим последние слагаемые.

1) $R_1 = M(R)$.

2) Для оценки R_2 оценим $f'(\xi)$ в точках $C(z)$.

Представляя $f(\xi)$ в виде интеграла Коши, по окружности радиуса $\varphi_1(\xi)$ с центром $\xi \in C(z)$, получим

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\varphi_1(\xi)}} \frac{f(t) dt}{(t-\xi)^2} \right| \leq \frac{M(R+1)}{\varphi_1(R+1)} \quad |z| < R.$$

Интегрируя R_2 по частям, с помощью этого неравенства получим:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(z)} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(z)} f(\xi) d \ln(\xi - z) \right| \leq \\ &\leq \frac{4}{2\pi} M(R+1) \ln(R+1) + \frac{1}{2\pi} \int_{C(z)} |f'(\xi) \ln(\xi - z)| |d\xi| \leq \\ &\leq C_4 \frac{M(R+1) \ln(R+1)}{\varphi(R+1)}. \end{aligned}$$

$$3) \quad R_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{K_1(p) - C(z)} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{4}{\pi} (p+R) M(p).$$

$$\begin{aligned} 4) \quad R_4 &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_1(p) - K_1(p)} |f(\xi)| \left| F_{\lambda A_{\xi} \varphi_1}(\xi - z) - \frac{1}{\xi - z} \right| |d\xi| \leq \\ &\leq \frac{2C}{\pi} \int_0^\infty \frac{M(\xi)}{\varphi(\xi)} e^{-A_{\xi} \varphi_1(0)} d\xi < \varepsilon. \end{aligned}$$

5) Для оценки R_5 воспользуемся оценкой (7), заменяя A через A_{ξ} .

$$\begin{aligned} R_5 &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_1(p)} |F(\xi)| \cdot |F_{\lambda A_{\xi} \varphi_1}(\xi - z)| \cdot |d\xi| \leq \\ &\leq CM(p) \int_0^p |F_{\lambda A_{\xi} \varphi_1}(\xi - z)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{CM(p)}{\varphi(p)} \int_0^p e^{A_p \varphi_1 \left(\frac{|\xi - z| + 1}{\varphi(\xi)} \right)} d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Оценим последний интеграл. Для этого отображим область D_1 в конечную область G при помощи преобразования $W_1 = (z + 2i)^{-1}$, тогда точки $z = \infty, 0, -i$ переходят, соответственно в $W_1 = 0, -\frac{i}{2}, -i$. Отобразим область G при помощи преобразования

$W_2 = \Psi(W_1)$ на круг $|W_2 + 1| < 1$ так, чтобы точки $W_1 = 0, -\frac{i}{2}, -i$ переходили, соответственно в $W_2 = 0, -1, -2$. Тогда, по известной теореме Варшавского, для модуля отображающей функции при $|W_1| < \alpha$ получим

$$|\Psi(W_1)| \leq C_6 \exp \left\{ -\pi \int_{|W_1|}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho^2 \delta(\rho)} \right\} < C_6 e^{-\int_{|W_1|}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho}} < C_6 |W_1|,$$

так как $\delta(\rho) < \pi$.

Круг $|W_2 + 1| < 1$ отобразим на полуплоскость $\operatorname{Re} W > 0$ так, чтобы точки $W_2 = 0, -1, -2$ переходили в $W = 0, 1, \infty$, пользуясь отображением

$$W = -\frac{W_2}{W_2 + 2}.$$

Отсюда для достаточно малых $|W_2|$ имеем:

$$\begin{aligned} |W| &\leq \frac{|W_2|}{|W_2 + 2|} < |W_2| = |\Psi(W_1)| = \\ &= \left| \Psi\left(\frac{1}{z + 2i}\right) \right| < C_6 \left| \frac{1}{z + 2i} \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции, отображающей область D_k на полуплоскость $\operatorname{Re} W > 0$, получим:

$$\mu_k(z) = \max_{|z| = R} |f_k(z)| < C_6 \left| \frac{1}{z} \right|, \quad \text{причем } f_k(0) = 1.$$

Поэтому из (24) получим:

$$R_k < \frac{CM(\rho)}{\varphi(\rho)} \int_0^{\rho} e^{C_6 A_{\rho} \left(\frac{\varphi(\xi)}{|\xi - x| + 1} \right)} d\xi < \left[\frac{C_{\rho} M(\rho)}{\varphi(\rho)} \right]^{1 + C_6 \varphi(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_*} \right)^{C_6 \varphi(0)}.$$

Учитывая полученные оценки R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , получим

$$|F(z)| < \left[\frac{C_{\rho} M(\rho)}{\varphi(\rho)} \right]^{1 + C_6 \varphi(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_*} \right)^{C_6 \varphi(0)}. \quad (25)$$

В полученную оценку входит вспомогательная функция $\lambda(x)$, так как $\rho = |\xi_*|$, $\xi_* = \xi_{\lambda \varphi}(R)$. Правая часть неравенства (25) для данного $\varphi(x)$ растет медленно, тогда как $\rho = kR$, $k \gg 2$.

А ρ принимает такое значение при $\lambda(x) = cx$, $c < 1$.

Таким образом, для модуля аппроксимирующей целой функции, окончательно получим

$$|F(z)| < \left[\frac{CRM(kR)}{\varphi(kR)} \right]^{1+C_{\varphi}(0)} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{C_{\varphi}(0)},$$

где $|z| \leq R$, или

$$|F(z)| < \frac{CRM(kR)}{\varphi(kR)} e^{C_{\varphi}(0) \ln \frac{M(kR)(1+kR^2)}{\varepsilon \varphi(kR)}}.$$

Ленинградский педагогический
институт им. М. Навбандяна

Поступило 10 XII 1967

Գ. Մ. Ավետիսյան

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՍՈՏԱՐԿԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է D տիրույթը՝ սահմանափակված $y = \mp \varphi(x)$ կորով, որտեղ $\varphi(x)$ դրական, ողորկ և $|x|$ -ը անվերջ աճելիս մոնոտոն նվազելով 0-ի ձգտող ֆունկցիա է։ Դիտարկվում է D կորագիծ անվերջ շերտում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիան, որի համար

$$|f(z)| \leq M(R) \quad z \in D, \quad |z| \leq R, \quad \text{որտեղ} \quad M(R) = \max_{\substack{z \in D \\ |z| \leq R}} |f(z)|,$$

Ապացուցված է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար գոյություն ունի ամբողջ ֆունկցիա, որը դիտարկվող տիրույթի ներսում գտնվող կորագիծ շերտում և, մասնավորապես, իրական առանցքի վրա, բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon$$

Միաժամանակ զնահատված է մոտարկող ամբողջ ֆունկցիայի աճը՝ կախված $f(z)$ ֆունկցիայի աճից, $\varphi(x)$ ֆունկցիայից և ε շեղումից։

$$|F(z)| < C \left[\frac{RM(kR)}{\varphi(kR)} \right]^{1+C_{\varphi}(0)} \quad \text{որտեղ, } |z| \leq R, \quad k \geq 2,$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. ДАН СССР, 47, № 4 (1945).
2. Мергелян С. Н. Успехи мат. наук, т. 7, вып. 2 (1951), 31—122.
3. Мергелян С. Н. Труды мат. института им. В. А. Стеклова АН СССР, 37 (1951).

И. С. Саргсян

Об асимптотических оценках производных спектральной функции оператора Шредингера на плоскости

Введение

Обозначим через D конечную односвязную область двумерного евклидова пространства E_2 и через Γ — границу D . Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta u + (\lambda - q(x, y))u = 0, \quad (0,1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (0,2)$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа), $q(x, y)$ — действительная непрерывная функция в $D + \Gamma$, а n — внешняя нормаль к D . Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ собственные значения задачи (0.1)–(0.2), а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$ соответствующие собственные функции задачи (0.1)–(0.2). Так как функция $q(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то значит она ограничена и поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что спектр задачи (0.1)–(0.2) неотрицателен. Пусть $\mu_n^2 = \lambda_n$, ($\lambda_n > 0$).

Положим

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v), \quad \mu > 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \quad \mu = 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; -\mu) = -\theta(x, y, u, v; \mu), \quad \mu < 0.$$

Функция $\theta(x, y, u, v; \mu)$ называется спектральной функцией задачи (0.1)–(0.2).

В настоящей работе дается асимптотическая оценка производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ при больших μ . Аналогичные вопросы в трехмерном евклидовом пространстве E_3 для уравнения

(0.1) и для оператора Лапласа в пространстве любого измерения изучены Б. М. Левитаном [1]—[2]. Одномерный случай задачи (0.1)—(0.2) исследован нами в работах [3]—[4]. Сформулируем основные результаты настоящей работы*.

Обозначим через $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию уравнения (0.1) во всем пространстве при $q(x, y) \equiv 0$ (оператора Лапласа) т. е. положим

$$\theta^*(x, y, u, v; \mu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{r} I_1(\mu r),$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p , а r — расстояние точек (x, y) и (u, v) .

Теорема 0.1. Обозначим через η произвольное положительное число и через D_η — множество точек области D , расстояние которых до границы Γ области D не меньше, чем η . Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченную частную производную первого порядка, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ существует константа $C = C_\eta$ такая, что справедлива асимптотическая формула ($a \rightarrow \infty$)

$$\sum_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial u} \theta(x, y, u, v; \mu) \right\} = \sum_{a < \mu_n < a+1} \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_n(u, v)}{\partial u} \right| < C_\eta a^2.$$

В работе исследован также случай бесконечных областей.

§ 1. Вывод одной вспомогательной формулы

Пусть $q(x, y)$ означает действительную непрерывную функцию, определенную в некоторой конечной односвязной области D двумерного евклидова пространства E_2 . Пусть Γ означает границу области D .

Рассмотрим задачу

$$\Delta u + (\lambda - q(x, y))u = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \quad (1.2)$$

где n — внешняя нормаль к области D . Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$ соответствующие собственные функции задачи (1.1)—(1.2).

При тех же предположениях относительно функции $q(x, y)$ рассмотрим следующую задачу Коши:

* Полученные асимптотические оценки для производных спектральной функции применены к изучению вопросов суммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям в другой работе, находящейся в печати.

$$\Delta u - q(x, y)u = u''_{tt}, \quad (1.3)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u'_t(x, y, 0) = f(x, y). \quad (1.4)$$

Если в уравнении (1.3) $q(x, y) = 0$, то решение задачи (1.3) — (1.4), как известно, дается формулой (см. [5], стр. 158):

$$u_0(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{r < t} \int \frac{f(x + \xi, y + \eta)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi d\eta, \quad (1.5)$$

где r — расстояние точки (ξ, η) от начала координат, т. е. $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Далее рассмотрим следующую неоднородную задачу:

$$u''_{tt} - \Delta u = g(x, y, t), \quad (1.6)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u'_t(x, y, 0) = 0. \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.6) — (1.7) дается формулой (см. [5], стр. 159):

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{r < t-\tau} \int \frac{g(x + \xi, y + \eta, t - \tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\xi d\eta, \quad (1.8)$$

где r имеет то же значение, что и в формуле (1.5).

Пусть $\mu_n^2 = \lambda_n$, ($\lambda_n > 0$). Для произвольного действительного t легко убедиться, что функция $\Phi_n(x, y, t) = \varphi_n(x, y) \cos \mu_n t$ ($\varphi_n(x, y)$ — собственная функция задачи (1.1) — (1.2)), является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} - \Delta \Phi_n = -q(x, y) \Phi_n, \quad (1.9)$$

$$\Phi_n(x, y, 0) = \varphi_n(x, y); \quad \left. \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (1.10)$$

Известно, что если функция $u(x, y, t)$ есть решение задачи (1.3) — (1.4), то функция $u'_t(x, y, t)$ является решением уравнения (1.3) с начальными данными

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u'_t(x, y, 0) = 0.$$

Поэтому, рассматривая в уравнении (1.9) правую часть, как известную функцию и применяя формулы (1.5) и (1.8), нетрудно составить следующее интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1.9) — (1.10).

$$\varphi_n(x, y) \cos \mu_n t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{r < t} \int \frac{\varphi_n(x + \xi, y + \eta)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi d\eta -$$



$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{r < \tau} q(x+\xi, y+\eta) \frac{\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \cos \mu_n(t-\tau) d\xi d\eta. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) в дальнейшем будет играть фундаментальную роль.

§ 2. Асимптотические оценки для производных спектральной функции

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1°. $g_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(-t)$, т. е. четна;
- 2°. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$;
- 3°. $g_\varepsilon(t)$ имеет ограниченную производную достаточно высокого порядка p (порядок производной p в дальнейшем будет уточнен).

Обозначим через $\psi_\varepsilon(\mu) \cos$ — преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е. положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \cos \mu t dt. \quad (2.2)$$

Интегрированием по частям p раз равенства (2.2) в силу условий 2° и 3°, которым удовлетворяет функция $g_\varepsilon(t)$, легко получить оценку

$$\psi_\varepsilon(\mu) = O\left(\frac{1}{\mu^p}\right). \quad (2.3)$$

Пусть a — произвольное действительное число. Положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t) \cos at. \quad (2.4)$$

Тогда в силу (2.2) получим

$$\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \cos \mu t dt = \frac{1}{2} \{\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\}. \quad (2.5)$$

Помножим обе части равенства (1.11) на $g_\varepsilon(t, a)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ε . Тогда в силу (2.5) получим

$$\begin{aligned} & \varphi_n(x, y) \{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{r < t} \frac{\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi d\eta \right\} dt - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \left\{ \int_0^t d\tau \int_{r < \tau} \frac{q(x+\xi, y+\eta) \varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \right. \end{aligned}$$

$$\cos \mu_n(t - \tau) d\tau d\eta \Big\} dt. \quad (2.6)$$

Интегрируя первый интеграл правой части тождества (2.6) по частям, потом меняя порядок интегрирования в обоих интегралах, получим

$$\begin{aligned} & \varphi_n(x, y) \{ \psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a) \} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{r < \varepsilon} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \left\{ \int_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)}{V t^2 - r^2} dt \right\} \partial \xi d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{r < \varepsilon} q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \left\{ \int_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) dt \cdot \right. \\ & \left. \cdot \int_r^\varepsilon \frac{\cos \mu_n(t - \tau)}{V \tau^2 - r^2} d\tau \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введем обозначения

$$h_\varepsilon(r, a) = \int_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)}{V t^2 - r^2} dt, \quad (2.8)$$

$$k_\varepsilon(r, a) = \int_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) dt \int_r^\varepsilon \frac{\cos \mu_n(t - \tau)}{V \tau^2 - r^2} d\tau. \quad (2.9)$$

Тогда тождество (2.7) примет вид:

$$\begin{aligned} & \varphi_n(x, y) \{ \psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a) \} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{r < \varepsilon} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_{r < \varepsilon} q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) k_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Дифференцируя тождество (2.10) по x , заменяя под интегралами $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial \xi}$ и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \{ \psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a) \} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{r < \varepsilon} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint_{r < \xi} q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta. \quad (2.10)$$

В силу элементарного неравенства

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad (2.11)$$

из тождества (2.10) следует неравенство:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \{ \psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a) \}^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{\pi^2} \left[\iint_{r < \xi} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta \right]^2 + \\ & + \frac{2}{\pi^2} \left[\iint_{r < \xi} q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta \right]^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Суммируя неравенства (2.12) по n в пределах $a < \mu_n \leq a + 1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \{ \psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a) \}^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{\pi^2} \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \left[\iint_{r < \xi} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta \right]^2 + \\ & + \frac{2}{\pi^2} \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \left[\iint_{r < \xi} q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta \right]^2 = i_1 + i_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу неравенства Бесселя и определения функции $h_\varepsilon(r, a)$, т. е. (2.8), получим

$$i_1 \leq \frac{2}{\pi^2} \iint_{r < \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \int_r^\xi \frac{g'_\varepsilon(t, a) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right]^2 d\xi d\eta. \quad (2.14)$$

Пологая в оценке (3.3) работы [2] $N = 2$ и $\alpha = 1$, получим оценку

$$\sum_{a < \mu_n \leq a+1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \int_r^\xi \frac{g'_\varepsilon(t, a) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right]^2 < Ca^3.$$

Поэтому из (2.14) для i_1 получим оценку ($a \rightarrow \infty$):

$$i_1 < Ca^3. \quad (2.15)$$

Оценим теперь i_2 . После несложных вычислений легко установить, что

$$\frac{\partial k_2}{\partial z} = \frac{z}{r^2} \int_r^z g'_\varepsilon(t, a) V \sqrt{t^2 - r^2} dt + \frac{z \mu_a}{r^2} \int_r^z g_\varepsilon(t, a) dt \int_r^t \frac{\tau \sin \mu_n(t - \tau)}{V \tau^2 - r^2} d\tau,$$

откуда, в силу определения функции $g_\varepsilon(t, a)$, т. е. (2.4), получим оценку при $a \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial}{\partial z} k_2(r, a) < Ca. \quad (2.16)$$

Из оценки (2.16) и определения i_2 (см. неравенство (2.13)) следует оценка при $a \rightarrow \infty$:

$$i_2 < Ca^2. \quad (2.17)$$

Из неравенства (2.13) и оценок (2.15), (2.17) следует оценка ($a \rightarrow \infty$)

$$\sum_{a < \mu_n < a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \{ \psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a) \}^2 < Ca^3. \quad (2.18)$$

Обозначим через $\theta(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию уравнения (1.1) (при граничном условии (1.2)), т. е. положим

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v), \quad \mu > 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \quad \mu = 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = -\theta(x, y, u, v; -\mu), \quad \mu < 0.$$

Теорема 2.1. Обозначим через η произвольное положительное число и через D_η — множество точек области D , расстояние которых до границы Γ области D не меньше, чем η . Если функция $q(x, y)$ в области $\bar{D}$ имеет ограниченную частную производную первого порядка, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ существует константа $C = C_\eta$ такая, что имеет место асимптотическая оценка ($a \rightarrow \infty$)

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x \partial u} \right\}_{y=v}^{x=u} = \sum_{a < \mu_n < a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 < C_\eta a^3. \quad (2.19)$$

Доказательство. В качестве функции $g_\varepsilon(t)$ возьмем функцию

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} (z - |t|), & |t| \leq \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\psi_1(\mu_n + a) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\mu_n + a}{2} \varepsilon}{\left[\frac{\mu_n + a}{2} \varepsilon \right]^2}; \quad \psi_1(\mu_n - a) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\mu_n - a}{2} \varepsilon}{\left[\frac{\mu_n - a}{2} \varepsilon \right]^2}. \quad (2.20)$$

Из (2.20) видно, что функции $\psi_1(\mu_n + a)$ и $\psi_1(\mu_n - a)$ положительны, поэтому из оценки (2.18) следует оценка

$$\sum_{a < \mu_n < a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \psi_1(\mu_n - a) < Ca^3. \quad (2.21)$$

Подставляя значение функции $\psi_1(\mu_n - a)$ из (2.20) в (2.21) и полагая $\varepsilon = 1$ и $\mu_n - a = \nu_n$, получим

$$\sum_{0 < \nu_n < 1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]_{\mu_n = a + \nu_n}^2 \cdot \left[\frac{\sin \frac{\nu_n}{2}}{\frac{\nu_n}{2}} \right]^4 < Ca^3. \quad (2.22)$$

Как известно, для $0 < \nu < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin \nu}{\nu} > \frac{2}{\pi}$. Поэтому из (2.22) и из определения спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ следует

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \nu_n < 1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]_{\mu_n = a + \nu_n}^2 \cdot \left[\frac{\sin \frac{\nu_n}{2}}{\frac{\nu_n}{2}} \right]^4 &> \frac{16}{\pi^4} \sum_{a < \mu_n < a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 = \\ &= \frac{16}{\pi^4} V_a \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x \partial u} \right\}_{\substack{x=a \\ y=v}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Теорема следует из неравенства (2.23) в силу оценки (2.22). Из теоремы 2.1 и неравенства Коши-Буняковского следует.

Теорема 2.2. Пусть η , D_η , C_η и $q(x, y)$ имеют то же значение, что и в теореме 2.1. При (x, y) , $(u, v) \in D_\eta$ и при $a \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая оценка

$$V_a \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x \partial u} \right\} = \sum_{a < \mu_n < a+1} \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right| \cdot \left| \frac{\partial \varphi_n(u, v)}{\partial u} \right| < C_\eta a^3. \quad (2.24)$$

Известна следующая

Теорема 2.3. (Б. М. Левитан, [6], лемма 2.5.1). Пусть η , D_η и C_η имеют то же значение, что и в теореме 2.1. Если $(x, y) \in D_\eta$, то имеет место асимптотическая оценка

$$\sum_{a < \mu_n < a+1} |\varphi_n(x, y)|^2 < C_7 a. \quad (2.25)$$

Из теорем 2.1, 2.3 и неравенства Коши-Буняковского следует.

Теорема 2.4. При тех же предположениях, что и в теореме 2.1 справедлива асимптотическая оценка ($a \rightarrow \infty$)

$$\sum_a^{a+1} \left| \frac{\partial^j}{\partial x} (x, y, u, v; \mu) \right| = \sum_{a < \mu_n < a+1} \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right| \cdot |\varphi_n(u, v)| < C_7 a^2. \quad (2.26)$$

Теперь оценим старшие производные спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$. Через D_{xy}^2 обозначим следующий оператор дифференцирования:

$$D_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^{a_1} \partial y^{a_2}}, \quad (a_1 + a_2 = a).$$

Применяя к тождеству (2.7) оператор D_{xy}^2 , затем заменяя под интегралами D_{xy}^2 на $D_{\xi\eta}^2$, получим

$$\begin{aligned} & D_{xy}^2 [\varphi_n(x, y)] \cdot [\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \int_{r < \varepsilon} D_{\xi\eta}^2 \{ \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \} \cdot h_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta - \\ &- \frac{1}{\pi} \int \int_{r < \varepsilon} D_{\xi\eta}^2 \{ q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \} k_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Предполагая, что функция $g_\varepsilon(t)$ дифференцируема a раз и интегрируя первый интеграл правой части (2.27) по частям a раз, а второй интеграл только один раз, получим

$$\begin{aligned} & D_{xy}^2 [\varphi_n(x, y)] \cdot [\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)] = \\ &= \frac{(-1)^{a-1}}{\pi} \int \int_{r < \varepsilon} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) D_{\xi\eta}^2 \{ h_\varepsilon(r, a) \} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int \int_{r < \varepsilon} D_{\xi\eta}^{2-a-1} \{ q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \} \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.27')$$

В силу неравенства (2.11) из (2.27') следует

$$\begin{aligned} & |D_{xy}^2 \varphi_n(x, y)|^2 [\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)]^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi^2} \left[\int \int_{r < \varepsilon} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) D_{\xi\eta}^2 \{ h_\varepsilon(r, a) \} d\xi d\eta \right]^2 + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \left[\int \int_{r < \varepsilon} D_{\xi\eta}^{2-a-1} \{ q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \eta) \} \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta \right]^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Суммируя неравенства (2.28) по n в пределах $a < \mu_n \leq a+1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \{D_{xy}^2 \varphi_n(x, y)\}^2 \cdot [\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)]^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{\pi^2} \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \left[\iint_{r < \varepsilon} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) D_{\xi\eta}^2 [h_\varepsilon(r, a)] d\xi d\eta \right]^2 + \\ & + \frac{2}{\pi^2} \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \left[\iint_{r < \varepsilon} D_{\xi\eta}^{2-\alpha} [q(x + \xi, y + \eta) \varphi_n(x + \xi, y + \right. \\ & \left. + \eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, a) d\xi d\eta \right]^2 = i_1 + i_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из леммы 1 работы [2] и неравенства Бесселя следует оценка ($a \rightarrow \infty$):

$$i_1 \leq \frac{2}{\pi^2} \iint_{r < \varepsilon} [D_{\xi\eta}^2 h_\varepsilon(r, a)]^2 d\xi d\eta < C a^{2\alpha+1}. \quad (2.30)$$

Для оценки i_2 поступим следующим образом. Предположим, что для $\nu = 1, 2, \dots, \alpha - 1$ и $a \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\sum_{a < \mu_n \leq a+1} |D_{xy}^2 \varphi_n(x, y)|^2 < C a^{2\nu+1}. \quad (2.31)$$

При $\nu = 1$ такая оценка имеет место (см. теорему 2.1). Тогда, предполагая, что функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha - 1$ включительно, в силу оценки (2.31) и неравенства Коши-Буняковского получим

$$\begin{aligned} & \sum_{a < \mu_n \leq a+1} |D_{\xi\eta}^{2-\alpha} \varphi_n(x + \xi, y + \eta) q(x + \xi, y + \eta)| \cdot \\ & \cdot |D_{\xi\eta}^2 \varphi_n(x + \xi, y + \eta) q(x + \xi, y + \eta)| < C a^{2\alpha-1}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Из оценок (2.16), (2.32) и неравенства Коши-Буняковского получим

$$\begin{aligned} i_2 & \leq C \sum_{a < \mu_n \leq a+1} \iint_{r < \varepsilon} d\xi d\eta \iint_{\rho < \varepsilon} d\delta d\sigma |D_{\xi\eta}^2 \varphi_n(x + \xi, y + \\ & + \eta) q(x + \xi, y + \eta)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, a) \right| \cdot \\ & \cdot |D_{\delta\sigma}^2 \varphi_n(x + \delta, y + \sigma) q(x + \delta, y + \sigma)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \delta} k_\varepsilon(\rho, a) \right| < C a^{2\alpha+1}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Комбинируя оценки (2.30) и (2.33), из неравенства (2.29) получим оценку при $a \rightarrow \infty$

$$\sum_{a < \mu_n < a+1} (D_{xy}^2 \varphi_n(x, y))^2 [\psi_a(\mu_n + a) + \psi_a(\mu_n - a)] < C a^{2\alpha+1} \quad (2.34)$$

Теорема 2.5. Пусть η , D_η и C_η имеют то же значение, что и в теореме 2.1. Если функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные порядка $\alpha + \beta - 1$ включительно, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ и $a \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} & \sum_a^{a+1} (D_{xy}^2 D_{uv}^2 \theta(x, y, u, v; \mu)) = \\ & = \sum_{a < \mu_n < a+1} |D_{xy}^2 \varphi_n(x, y)| \cdot |D_{uv}^2 \varphi_n(u, v)| < C_3 a^{\alpha+\beta+1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Доказательство теоремы получается из оценки (2.34) в точности так же, как теоремы 2.2 из оценки (2.18).

§ 3. Асимптотическая оценка для производных спектральной функции в случае бесконечной области

Предварительные оценки, полученные в предыдущем параграфе для производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$, показывают, что они от размеров области не зависят. Поэтому легко предвидеть, что они верны и для бесконечных областей. В настоящем параграфе мы покажем, что это предвидение верно. Для простоты изложения, мы будем предполагать, что область D совпадает со всем пространством E_2 .

Обозначим через D_N последовательность областей, расширяющихся до всего пространства E_2 , т. е. $D_N \rightarrow E_2$ при $N \rightarrow \infty$ и через Γ_N границы D_N .

Для каждой области D_N рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_N} = 0. \quad (3.2)$$

Предполагается, что функция $q(x, y)$ действительна и непрерывна в каждой конечной области $\bar{D}_N$.

1. Предположим вначале, что при любом $N = 1, 2, \dots$ спектр задачи (3.1)–(3.2) неотрицателен. Обозначим через $\mu_{N,1}^2, \mu_{N,2}^2, \dots, \mu_{N,n}^2, \dots$ собственные значения задачи (3.1)–(3.2), а через $\varphi_{N,1}(x, y), \varphi_{N,2}(x, y), \dots, \varphi_{N,n}(x, y), \dots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (3.1)–(3.2).

Положим

$$\theta_N(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_{N,n} < \mu} \varphi_{Nn}(x, y) \varphi_{Nn}(u, v). \quad (3.3)$$

Функция $\theta_N(x, y, u, v; \mu)$ называется спектральной функцией задачи (3.1)–(3.2). Как показано Б. М. Левитаном (см. [6], гл. III, леммы 3.1.3 и (3.1.4), в каждой конечной области пространства $E_2 \times E_2 \times E_1$ семейство функций $\{\theta_N(x, y, u, v; \mu)\}$ равномерно ограничено и по (x, y) и (u, v) равностепенно непрерывно. Рассмотрим семейство функций

$$\frac{\partial \theta_N(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} = \sum_{\mu_{N,n} < \mu} \frac{\partial \varphi_{Nn}(x, y)}{\partial x} \varphi_{Nn}(u, v), \quad (N=1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Так как в оценке (2.26) постоянная C_7 от размеров области не зависит, то семейство функций (3.4) имеет равномерно ограниченную вариацию в каждой конечной части пространства $E_2 \times E_2 \times E_1$. Поэтому, если мы покажем и равностепенную непрерывность этого семейства по (x, y) , то в оценке (2.26) можно будет перейти к пределу в силу теоремы Арцелля-Хелли. Тогда получим оценку

$$\bigvee_a^{a+1} \left| \frac{\partial \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right| < Ca^2, \quad (3.5)$$

где $\theta(x, y, u, v; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3.1) для всего пространства E_2 .

Для доказательства равностепенной непрерывности положим в тождестве (2.10) $a=0$, а x, y заменим соответственно на $x+u, y+v$. Тогда тождество (2.10) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_{N,n}(x+u, y+v)}{\partial x} \psi_\varepsilon(\mu_{N,n}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{r < \varepsilon} \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, 0) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_{r < \varepsilon} q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+ \\ &+ \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, 0) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вычитая из тождества (3.6) тождество (2.10) при $a=0$, находим

$$\left[\frac{\partial \varphi_{N,n}(x+u, y+v)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right] \psi_\varepsilon(\mu_{N,n}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{E_1} \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h_2(\rho, 0) - \frac{\partial}{\partial \xi} h_2(r, 0) \right] d\xi d\eta + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \iint_{E_2} [q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \\
&- q(x+\xi, y+\eta) \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} h_2(r, 0) d\xi d\eta, \quad (3.7)
\end{aligned}$$

где ρ — расстояние точки (ξ, η) до точки (u, v) .

Пусть $\mu_0 > 0$ произвольное конечное число. Применяя к равенству (3.7) неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, а затем суммируя по n в пределах $1 \leq n \leq \mu_0$, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left[\frac{\partial \varphi_{N,n}(x+u, y+v)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right]^2 \psi_{\varepsilon}^2(\mu_{N,n}) \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left\{ \iint_{E_1} \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h_2(\rho, 0) - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{\partial}{\partial \xi} h_2(r, 0) \right] d\xi d\eta \right\}^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left\{ \iint_{E_1 \cup E_2} [q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \right. \\
&- q(x+\xi, y+\eta) \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} h_2(r, 0) d\xi d\eta \right\}^2 = i_1 + i_2. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя

$$i_1 \leq \iint_{E_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h_2(\rho, 0) - \frac{\partial}{\partial \xi} h_2(r, 0) \right]^2 d\xi d\eta.$$

Очевидно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать столь малое $\delta_1 > 0$, что если $|(u, v)| = \sqrt{u^2 + v^2} < \delta_1$, то

$$i_1 < \frac{\varepsilon}{\eta}. \quad (3.9)$$

Теперь оценим i_2 . Заметим, что

$$\begin{aligned}
&q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \\
&- q(x+\xi, y+\eta) \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) = \\
&= q(x+u+\xi, y+v+\eta) [\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \\
&- \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] + \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \cdot \\
&\cdot [q(x+u+\xi, y+v+\eta) - q(x+\xi, y+\eta)]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Тогда в силу неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ и равенства (3.10)

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{r \leq \varepsilon} q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \right. \\ & \quad \left. - q(x+\xi, y+\eta) \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, 0) d\xi d\eta \Big\}^2 \leq \\ & \leq 2 \left\{ \int_{r \leq \varepsilon} q(x+u+\xi, y+v+\eta) [\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \right. \\ & \quad \left. - \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, 0) d\xi d\eta \right\}^2 + \\ & + 2 \left\{ \int_{r \leq \varepsilon} \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) [q(x+u+\xi, y+v+\eta) - \right. \\ & \quad \left. - q(x+\xi, y+\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, 0) d\xi d\eta \right\}^2 = i_2' + i_2''. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского и леммы 3.1.4 работы [6] для произвольного сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, не зависящее от N , что при $|(u, v)| < \delta_2$

$$i_2' < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.11)$$

Наконец, из равномерной непрерывности функции $q(x, y)$ легко следует, что при $|(u, v)| < \delta_3$ и δ_3 достаточно малом выполняется неравенство

$$i_2'' < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.12)$$

Обозначая через $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, из оценок (3.9), (3.11), (3.12) и неравенства (3.8) следует оценка

$$\sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left[\frac{\partial \varphi_{N,n}(x+u, y+v)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right]^2 \varphi_{N,n}^2(\mu_{N,n}) < \varepsilon.$$

Из этого неравенства так же, как в доказательстве леммы 3.1.4 работы [6], следует равностепенная непрерывность семейства (3.4).

Итак, нами доказано, что семейство функций

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right\} \quad (3.13)$$

равномерно сходится и тем самым доказано, что оценка (3.5) верна.

Итак, справедлива

Теорема 3.1. Если функция $q(x, y)$ непрерывна в каждой конечной области изменения (x, y) , то при $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка ($a \rightarrow \infty$)

$$V_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right\} = O(a^2). \quad (3.14)$$

Равенство (3.14) имеет место равномерно в каждой конечной области изменения (x, y) и (u, v) .

Аналогичные теоремы можно доказать и для старших производных спектральной функции.

2. Предположим теперь, что уравнение (3.1) во всем пространстве E_2 имеет неограниченный снизу отрицательный спектр.

Аналогично тому, как при доказательстве леммы 3.1 работы [1], можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. Если функция $q(x, y)$ непрерывна в каждой конечной области изменения (x, y) , то при каждом фиксированном (x, y) , существует константа $C = C(\varepsilon)$, зависящая от ε и не зависящая от N , такая что

$$\sum_{\lambda_{N,n} < 0} \left[\frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right]^2 e^{V|\lambda_{N,n}|^\varepsilon} < C, \quad (3.15)$$

где $\varphi_{N,n}(x, y)$ — собственная функция задачи (3.1)–(3.2).

Переходя к пределу ($N \rightarrow \infty$) в неравенстве (3.15), получим

$$\int_{-\infty}^0 e^{V|\lambda|^\varepsilon} d_\lambda \frac{\partial \theta(x, y, \xi, \eta; \lambda)}{\partial x} < +\infty,$$

где $\theta(x, y, \xi, \eta; \lambda)$ — любая спектральная функция уравнения (3.1).

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 4 XII 1955

Ի. Ս. Սարգսյան

ՇՐԵԴԻՆԳԵՐԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ
ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ
ՀԱՐՑՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Դիցուք D -ն էվկլիդեսյան երկչափ տարածության վերջավոր միակապ տիրույթ է, իսկ Γ -ն նրա եզրագիծն է:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\Delta u + (\lambda - q(x, y))u = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

որտեղ $q(x, y)$ -ն իրական անընդհատ ֆունկցիա է $D + \Gamma$ -ում, իսկ n -ը՝ D տիրույթի արտաքին նորմալն է: Նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ -ով (1) (2) խնդրի սեփական արժեքները, իսկ $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$ -ով՝ համապատասխան սեփական ֆունկցիաները: Քանի որ $q(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $D + \Gamma$ -ում, հետևապես նա սահմանափակ է ամենուր, և այդ պատճառով առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ (1)–(2) խնդրի սպեկտրը ոչ բացասական է: Դիցուք $\mu_n^2 = \lambda_n$ ($\lambda_n > 0$): Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n = \mu} \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v); \quad \mu > 0.$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \quad \mu = 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; -\mu) = -\theta(x, y, u, v; \mu); \quad \mu < 0.$$

$\theta(x, y, u, v; \mu)$ ֆունկցիան կոչվում է (1)–(2) խնդրի սպեկտրալ ֆունկցիա: Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $\theta(x, y, u, v; \mu)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի սծանցյալների ասիմպտոտիկ վարքը μ -ի մեծ արժեքների համար: Նույն հարցը էվկլիդեսյան եռաչափ տարածության մեջ (1) համապատասխան համար, ինչպես նաև Լապլասի համապատասխան համար ցանկացած չափի տարածության մեջ ուսումնասիրվել է Բ. Մ. Լևիտանի կողմից [1], [2], իսկ միաչափ տարածության մեջ ուսումնասիրվել է մեր կողմից [3], [4]:

Հոդվածում ուսումնասիրվում է նաև անվերջ տիրույթների դեպքը: Շաբաղման պարզության համար երթադրված է, որ D տիրույթը համընկնում է ամբողջ հարթության հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. О дифференцировании разложений по собственным функциям уравнения Шредингера. Труды Московского математического общества, том 7 (1958).
2. Левитан Б. М. О дифференцировании спектральной функции оператора Лапласа. Мат. сборник, т. 39 (81):1 (1955).
3. Саргсян Н. С. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля. Известия АН СССР, сер. мат., том 21 (1957).
4. Саргсян Н. С. Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля. Известия АН АрмССР, т. X, № 3 (197).
5. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, том II, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
6. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + (\lambda - q(x_1, x_2, x_3))u = 0$. Труды Московского математического общества, т. 4 (195).

С. Х. Туманян

О мощности критерия χ^2 , прилагаемого к проблеме двух выборок, относительно „близких“ альтернатив

1. Пусть производится n независимых наблюдений случайной величины ξ и проверяется гипотеза H_0 , согласно которой результаты этих наблюдений образуют случайную выборку из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$. Одним из наиболее распространенных методов проверки гипотезы H_0 является критерий χ^2 . В этом случае совокупность всех возможных значений случайной величины разбивается на $s+1$ непересекающихся интервалов Δ_i ($i = \overline{0, s}$) и составляется статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^s \frac{n}{p_i} \left(\frac{p_i}{n} - p_i \right)^2, \quad (1.1)$$

где $p_i = \int_{\Delta_i} dF(x)$, а $\frac{p_i}{n}$ — относительные частоты наблюдений, принадлежащих интервалам Δ_i ($i = \overline{0, s}$).

Известно, что если гипотеза H_0 справедлива, то при $n \rightarrow \infty$ статистика (1.1) имеет распределение χ^2 с s степенями свободы, т. е.

$$P\{\chi^2 < x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_s(x),$$

где

$$K_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^x t^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Предположим теперь, что гипотеза H_0 неверна, а верна альтернативная гипотеза, согласно которой вероятности p_i принадлежности наблюдения интервалам Δ_i равны p_i' ($i = \overline{0, s}$), причем

$$p_i' - p_i = \frac{z_i}{n},$$

где z_i — постоянные числа.

Тогда известно, что предельное распределение статистики (1.1) при $n \rightarrow \infty$ сводится к нецентральному распределению χ^2 [1]

Критерий χ^2 приложим также к исследованию проблемы двух выборок, состоящей, как известно, в следующем.

Пусть производится m независимых наблюдений случайной величины ξ и n независимых наблюдений случайной величины η . Проверяется гипотеза, состоящая в том, что результаты этих наблюдений образуют две случайные выборки из генеральных совокупностей с одной и той же функцией распределения.

Для проверки этой гипотезы можно использовать статистику

$$\chi^2 = mn \sum_{i=0}^s \frac{1}{p_i + v_i} \left(\frac{p_i}{m} - \frac{v_i}{n} \right)^2, \quad (1.3)$$

где p_i и v_i — числа наблюдений соответственно из первой и второй выборок, принадлежащих интервалам Δ_i ($i = 0, s$).

При этом известно, что в случае если гипотеза верна, то при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ предельное распределение статистики (1.3) также определяется соотношением (1.2). ([2], стр. 485).

Предположим теперь, что гипотеза относительно тождественности двух распределений неверна. Обозначим в этом случае вероятности, что наблюдение случайной величины ξ , соответственно η , будет принадлежать интервалу Δ_i ($i = 0, s$) через p_i и p_i^* и предположим, что

$$p_i^* - p_i = \frac{z_i \sqrt{(m+n)p_i}}{\sqrt{mn}}, \quad (1.4)$$

где z_i — постоянные числа.

Таким образом, мы предполагаем, что альтернативная гипотеза тем ближе к проверяемой, чем более объемы первой и второй выборок.

Целью настоящей работы является установление предельного распределения статистики (1.3) при условии (1.4) и при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$.

Пусть проверяется вышеупомянутая гипотеза о тождественности двух распределений. В случае, если эта гипотеза верна, то, пользуясь распределением (1.2), при заданном уровне значимости α , мы можем определить такое значение χ_{α}^2 , что $P\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2\} = \alpha$. Если же проверяемая гипотеза неверна, а верна альтернативная гипотеза, согласно которой выполняется соотношение (1.4), то знание распределения статистики (1.3) при условии (1.4) даст возможность определить в этом случае вероятность того, что $\chi^2 > \chi_{\alpha}^2$, т. е. вероятность отвергнуть гипотезу в случае, если она неверна при альтернативной гипотезе (1.4).

Таким образом, знание указанного распределения решает вопрос о предельной мощности критерия χ^2 относительно рассматриваемых альтернатив. Для решения задачи мы составим статистику

$$X^2 = mn \sum_{i=0}^s \frac{1}{mp_i + np_i^*} \left(\frac{p_i}{m} - \frac{v_i}{n} \right)^2 \quad (1.5)$$

и установим предельное распределение X^2 при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, после чего покажем, что предельное распределение статистики (1.3) при условии (1.4) и при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ совпадает с предельным распределением X^2 .

2. Математическое ожидание и дисперсия X^2

Вычислим предельные значения математического ожидания и дисперсии X^2 .

Имеем

$$\begin{aligned} MX^2 &= mn \sum_{i=0}^s \frac{1}{mp_i + np'_i} M \left(\frac{p_i}{m} - \frac{p'_i}{n} \right)^2 = \\ &= mn \sum_{i=0}^s \frac{1}{mp_i + np'_i} \left[\frac{Mp_i^2}{m^2} - \frac{2Mp_i Mp'_i}{mn} + \frac{Mp_i'^2}{n^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Как хорошо известно

$$\begin{aligned} Mp_i &= mp_i \\ Mp_i^2 &= m(m-1)p_i^2 + mp_i \\ Mp'_i &= np'_i \\ Mp_i'^2 &= n(n-1)p_i'^2 + np'_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{i=0}^s \frac{np_i q_i + mp'_i q'_i}{mp_i + np'_i} + mn \sum_{i=0}^s \frac{(p'_i - p_i)^2}{mp_i + np'_i}, \\ (q_i &= 1 - p_i, \quad q'_i = 1 - p'_i). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим каждую из этих сумм в отдельности.

Первая сумма вследствие условия (1.4) преобразовывается следующим образом

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^s \frac{np_i q_i + mp'_i q'_i}{mp_i + np'_i} = \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{np_i q_i + m \left(p_i + \frac{z_i \sqrt{(m+n)p_i}}{\sqrt{mn}} \right) \left(q_i - \frac{z_i \sqrt{(m+n)p_i}}{\sqrt{mn}} \right)}{mp_i + n \left(p_i + \frac{z_i \sqrt{(m+n)p_i}}{\sqrt{mn}} \right)} = \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{(m+n)p_i q_i}{(m+n)p_i + \frac{z_i \sqrt{n(m+n)p_i}}{\sqrt{m}}} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^s \frac{q_i z_i \sqrt{m(m+n)p_i}}{\sqrt{n}} - \frac{p_i z_i \sqrt{m(m+n)p_i}}{\sqrt{n}} - \frac{z_i^2 (m+n)p_i}{n} \quad (2.4)$$

$$(m+n)p_i + \frac{z_i \sqrt{n(m+n)p_i}}{\sqrt{m}}$$

Нетрудно видеть, что в соотношении (2.4) при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ первая сумма стремится к $\sum_{i=0}^s q_i = s$, а вторая сумма стремится к нулю,

так что

$$\sum_{i=0}^s \frac{np_i q_i + mp_i' q_i'}{mp_i + np_i'} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} s. \quad (2.5)$$

Что касается второй суммы в соотношении (2.3), то, как нетрудно видеть, вследствие (1.4) имеем

$$mn \sum_{i=0}^s \frac{(p_i' - p_i)^2}{mp_i + np_i'} = \sum_{i=0}^s \frac{(m+n)p_i z_i^2}{(m+n)p_i + \frac{z_i \sqrt{n(m+n)p_i}}{\sqrt{m}}} =$$

$$= \sum_{i=0}^s \frac{z_i^2}{1 + \frac{z_i \sqrt{n}}{\sqrt{m(m+n)p_i}}} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^s z_i^2. \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.3), (2.5) и (2.6) получаем, что

$$MX^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} s + \sum_{i=0}^s z_i^2. \quad (2.7)$$

Перейдем теперь к вычислению предельного значения дисперсии X^2 .

Как известно,

$$DX^2 = M(X^2) - (MX^2)^2. \quad (2.8)$$

Вследствие (2.7) для нахождения предельного значения DX^2 достаточно найти предельное значение $M(X^2)^2$. Имеем

$$M(X^2)^2 = m^2 n^2 \left[\sum_{i=0}^s \frac{1}{mp_i + np_i'} M \left(\frac{p_i}{m} - \frac{q_i}{n} \right)^2 \right]^2 =$$

$$= m^2 n^2 \sum_{i=0}^s \frac{1}{(mp_i + np_i')^2} M \left(\frac{p_i}{m} - \frac{q_i}{n} \right)^4 +$$

$$+ m^2 n^2 \sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i \neq j)}}^s \frac{1}{(mp_i + np_i')(mp_j + np_j')} M \left(\frac{p_i}{m} - \frac{q_i}{n} \right)^2 \left(\frac{p_j}{m} - \frac{q_j}{n} \right)^2. \quad (2.9)$$

Так как величины μ_i и ν_j ($i = \overline{0, s}, j = \overline{0, s}$) независимы

$$M \left(\frac{\mu_i}{m} - \frac{\nu_i}{n} \right)^4 = \frac{M\mu_i^4}{m^4} - \frac{4M\mu_i^3 M\nu_i}{m^3 n} + \\ + \frac{6M\mu_i^2 M\nu_i^2}{m^2 n^2} - \frac{4M\mu_i M\nu_i^3}{mn^3} + \frac{M\nu_i^4}{n^4}, \quad (2.10)$$

$$M \left(\frac{\mu_i}{m} - \frac{\nu_i}{n} \right)^2 \left(\frac{\mu_j}{m} - \frac{\nu_j}{n} \right)^2 = \frac{M\mu_i^2 \mu_j^2}{m^4} - \frac{2M\mu_i^2 \mu_j M\nu_j}{m^3 n} + \frac{M\mu_i^2 M\nu_j^2}{m^2 n^2} - \\ - \frac{2M\mu_i \mu_j^2 M\nu_i}{m^2 n} + \frac{4M\mu_i \mu_j M\nu_i \nu_j}{m^2 n^2} - \frac{2M\mu_i M\nu_i \nu_j^2}{mn^3} + \frac{M\nu_i^2 M\mu_j^2}{m^2 n^2} - \\ - \frac{2M\mu_j M\nu_i^2 \nu_j}{mn^3} + \frac{M\nu_i^2 \nu_j^2}{n^4}. \quad (2.11)$$

Как известно, совместной характеристической функцией величин $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s$ является ([2], стр. 455)

$$\psi(t_0, t_1, \dots, t_s) = \left(\sum_{k=0}^s p_k e^{it_k} \right)^m. \quad (2.12)$$

Используя известное соотношение

$$M\mu_i^k \mu_j^l = \frac{1}{i^k l^l} \left. \frac{\partial^{k+l} \psi(t_0, t_1, \dots, t_s)}{\partial t_i^k \partial t_j^l} \right|_{t_0=0, t_1=0, \dots, t_s=0} \quad \left(\begin{matrix} i, j = \overline{0, s} \\ k, l = \overline{0, s} \end{matrix} \right),$$

получим

$$M\mu_i^3 = m(m-1)(m-2)p_i^3 + 3m(m-1)p_i^2 + mp_i \\ M\mu_i^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)p_i^4 + 6m(m-1)(m-2)p_i^3 + \\ + 7m(m-1)p_i^2 + mp_i \\ M\mu_i \mu_j = m(m-1)p_i p_j \\ M\mu_i^2 \mu_j = m(m-1)(m-2)p_i^2 p_j + m(m-1)p_i p_j \\ M\mu_i^2 \mu_j^2 = m(m-1)(m-2)(m-3)p_i^2 p_j^2 + m(m-1)(m-2)p_i^2 p_j + \\ + m(m-1)(m-2)p_i p_j^2 + m(m-1)p_i p_j. \quad (2.13)$$

Аналогично

$$M\nu_i^3 = n(n-1)(n-2)p_i'^3 + 3n(n-1)p_i'^2 + np_i' \\ M\nu_i^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p_i'^4 + 6n(n-1)(n-2)p_i'^3 + \\ + 7n(n-1)p_i'^2 + np_i'$$

$$Mv_i v_j = n(n-1)p_i' p_j' \quad (2.14)$$

$$Mv_i^2 v_j = n(n-1)(n-2)p_i'^2 p_j' + n(n-1)p_i' p_j'$$

$$Mv_i^2 v_j^2 = n(n-1)(n-2)(n-3)p_i'^2 p_j'^2 + n(n-1)(n-2)p_i'^2 p_j' + \\ + n(n-1)(n-2)p_i' p_j'^2 + n(n-1)p_i' p_j'$$

Подставляя (2.2), (2.13) и (2.14) в (2.10) и (2.11), а затем (2.10) и (2.11) в (2.9), принимая во внимание (1.4) и переходя в (2.9) к пределу при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, после некоторых преобразований получим:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} M(X^2)^2 = \sum_{i=0}^s (3q_i^2 + 6z_i^2 q_i + z_i^4) + \sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i+j)}}^s (3p_i p_j - p_i - p_j + 1) + \\ + (q_i z_j^2 + q_j z_i^2 + z_i^2 z_j^2 - 4z_i z_j \sqrt{p_i p_j}). \quad (2.15)$$

Учитывая соотношение $\sum_{i=0}^s p_i = 1$, нетрудно показать, что

$$\sum_{i=0}^s 3q_i^2 + \sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i+j)}}^s (3p_i p_j - p_i - p_j + 1) = s^2 + 2s. \quad (2.16)$$

Остается подсчитать выражение

$$A_s = \sum_{i=0}^s (6z_i^2 q_i + z_i^4) + \sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i+j)}}^s (q_i z_j^2 + q_j z_i^2 + z_i^2 z_j^2 - 4z_i z_j \sqrt{p_i p_j}) = \\ = \left(\sum_{i=0}^s z_i^2 \right)^2 + 6 \sum_{i=0}^s z_i^2 - 6 \sum_{i=0}^s z_i^2 p_i + \\ + \sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i+j)}}^s (q_i z_j^2 + q_j z_i^2 - 4z_i z_j \sqrt{p_i p_j}). \quad (2.17)$$

Так как

$$\sum_{i=0}^s p_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^s p_i' = 1,$$

то из (1.4) следует, что

$$\sum_{i=0}^s z_i \sqrt{p_i} = 0. \quad (2.18)$$

Далее,

$$\sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i \neq j)}}^s q_i z_j^2 = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s q_i z_j^2 - \sum_{i=0}^s q_i z_i^2 = s \sum_{j=0}^s z_j^2 - \sum_{i=0}^s z_i^2 + \sum_{i=0}^s z_i^2 p_i. \quad (2.19)$$

Аналогично

$$\sum_{i=0}^s \sum_{\substack{j=0 \\ (i \neq j)}}^s q_i z_i^2 = s \sum_{i=0}^s z_i^2 - \sum_{j=0}^s z_j^2 + \sum_{j=0}^s z_j^2 p_j. \quad (2.20)$$

Учитывая (2.18) и подставляя (2.19) и (2.20) в (2.17), получим

$$A_s = \left(\sum_{i=0}^s z_i^2 \right)^2 + 2s \sum_{i=0}^s z_i^2 + 4 \sum_{i=0}^s z_i^2. \quad (2.21)$$

Из (2.15), (2.16), (2.17) и (2.21) получаем, что

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} M(X^2)^2 = s^2 + 2s + \left(\sum_{i=0}^s z_i \right)^2 + 2s \sum_{i=0}^s z_i^2 + 4 \sum_{i=0}^s z_i^2. \quad (2.22)$$

Из соотношений (2.8), (2.7) и (2.22) окончательно получаем

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} DX^2 = 2s + 4 \sum_{i=0}^s z_i^2. \quad (2.23)$$

3. Совместная характеристическая функция

величин $x_k = \sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right), \quad (k = \overline{0, s}).$

Найдем предельное значение совместной характеристической функции величин

$$x_k = \sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right), \quad (k = \overline{0, s}). \quad (3.1)$$

Обозначим характеристическую функцию величин x_k ($k = \overline{0, s}$) через $\varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s)$.

Полагая

$$y_k = \sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} \frac{\mu_k}{m},$$

$$u_k = -\sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} \frac{\nu_k}{n}, \quad (3.2)$$

так что $x_k = y_k + u_k$,

будем иметь:

$$\varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s) = M e^{it_0(y_0 + u_0) + it_1(y_1 + u_1) + \dots + it_s(y_s + u_s)} =$$

$$= Me^{i(t_0 y_0 + t_1 y_1 + \dots + t_s y_s)} + i(t_0 u_0 + t_1 u_1 + \dots + t_s u_s). \quad (3.3)$$

Так как величины p_k и y_j ($k = \overline{0, s}, j = \overline{0, s}$) независимы, то величины y_k и u_j также будут независимыми, а потому из (3.3) следует

$$\varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s) = Me^{i(t_0 y_0 + t_1 y_1 + \dots + t_s y_s)} \cdot Me^{i(t_0 u_0 + t_1 u_1 + \dots + t_s u_s)}. \quad (3.4)$$

Таким образом, совместная характеристическая функция величин x_k ($k = \overline{0, s}$) равна произведению совместных характеристических функций величин y_k и u_k ($k = \overline{0, s}$).

Так как совместной характеристической функцией величин p_k ($k = \overline{0, s}$) является функция (2.12), то совместной характеристической функцией величин y_k ($k = \overline{0, s}$), определяемых соотношением (3.2), будет

$$Me^{i(t_0 y_0 + t_1 y_1 + \dots + t_s y_s)} = \left(\sum_{k=0}^s p_k e^{it_k \sqrt{\frac{n}{m(mp_k + np'_k)}}} \right)^m. \quad (3.5)$$

Аналогично

$$Me^{i(t_0 u_0 + t_1 u_1 + \dots + t_s u_s)} = \left(\sum_{k=0}^s p'_k e^{-it_k \sqrt{\frac{m}{n(mp_k + np'_k)}}} \right)^n. \quad (3.6)$$

Из (3.4), (3.5) и (3.6) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s) &= \left(\sum_{k=0}^s p_k e^{it_k \sqrt{\frac{n}{m(mp_k + np'_k)}}} \right)^m \times \\ &\times \left(\sum_{k=0}^s p'_k e^{-it_k \sqrt{\frac{m}{n(mp_k + np'_k)}}} \right)^n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Логарифмируя соотношение (3.7), получим

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s) &= m \ln \left(\sum_{k=0}^s p_k e^{it_k \sqrt{\frac{n}{m(mp_k + np'_k)}}} \right) + \\ &+ n \ln \left(\sum_{k=0}^s p'_k e^{-it_k \sqrt{\frac{m}{n(mp_k + np'_k)}}} \right) = \\ &= m \ln \left(1 + i \sum_{k=0}^s t_k p_k \sqrt{\frac{n}{m(mp_k + np'_k)}} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} \cdot \frac{np_k}{m(mp_k + np'_k)} + o(m^{-\frac{3}{2}}) + \\
& + n \ln \left(1 - i \sum_{k=0}^s t_k p'_k \sqrt{\frac{m}{n(mp_k + np'_k)}} - \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} \cdot \frac{mp'_k}{n(mp_k + np'_k)} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \right). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Применяя к правой части (3.8) формулу Маклорена, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\ln \varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s) &= i \sum_{k=0}^s t_k p_k \sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} - \\
& - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} \cdot \frac{np_k}{mp_k + np'_k} + \frac{m}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k p_k \sqrt{\frac{n}{m(mp_k + np'_k)}} \right)^2 - \\
& - i \sum_{k=0}^s t_k p'_k \sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} \cdot \frac{np_k}{mp_k + np'_k} + \\
& + \frac{n}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k p'_k \sqrt{\frac{m}{n(mp_k + np'_k)}} \right)^2 + o\left(m^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}\right) = \\
& = i \sum_{k=0}^s t_k (p_k - p'_k) \sqrt{\frac{mn}{mp_k + np'_k}} - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} \cdot \frac{np_k + mp'_k}{mp_k + np'_k} + \\
& + \frac{m}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k p_k \sqrt{\frac{n}{m(mp_k + np'_k)}} \right)^2 + \\
& + \frac{n}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k p'_k \sqrt{\frac{m}{n(mp_k + np'_k)}} \right)^2 + o\left(m^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Учитывая (1.4) и переходя в соотношении (3.9) к пределу при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned}
\lim_{m, n \rightarrow \infty} \ln \varphi_{m,n}(t_0, t_1, \dots, t_s) &= -i \sum_{k=0}^s t_k z_k - \\
& - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k \sqrt{p_k} \right)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда находим предельную характеристическую функцию величин $x_k (k = \overline{0, s})$.

$$\varphi(t_0, t_1, \dots, t_s) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \varphi_{m, n}(t_0, t_1, \dots, t_s) =$$

$$= e^{-i \sum_{k=0}^s t_k z_k - \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k \sqrt{p_k} \right)^2}.$$

4. Предельное распределение X^2 .

Из соотношений (1.5) и (3.1) следует, что

$$X^2 = \sum_{k=0}^s x_k^2. \quad (4.1)$$

В случае, когда $p_k - \bar{p}_k = 0$ ($k = \overline{0, s}$), совместной характеристической функцией величин

$$x_k = \sqrt{\frac{mn}{(m+n)p_k}} \left(\frac{t_k}{m} - \frac{v_k}{n} \right)$$

является функция

$$\varphi(t_0, t_1, \dots, t_s) = e^{-i \sum_{k=0}^s \frac{t_k^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^s t_k \sqrt{p_k} \right)^2},$$

а тогда, как известно, совместной функцией распределения величин x_k ($k = \overline{0, s}$) в пределе является многомерная нормальная функция распределения с математическими ожиданиями $Mx_k = 0$ ($k = \overline{0, s}$) и с матрицей вторых моментов $\Lambda = J - \bar{p}\bar{p}'$, ранга s , где J — единичная матрица, $\bar{p}' = (\sqrt{p_0}, \dots, \sqrt{p_s})$ — вектор-строка, а $\bar{p}$ — соответствующий вектор-столбец.

Следовательно, распределением статистики X^2 в этом случае будет обычное распределение χ^2 с s степенями свободы, определяемое соотношением (1.2).

Если же существуют такие значения k , для которых $p_k - \bar{p}_k \neq 0$, то предельной характеристической функцией величин x_k , определяемых соотношением (3.1), является функция (3.4), а совместным распределением этих величин в пределе является многомерное нормальное распределение ранга s с математическими ожиданиями $Mx_k = -z_k$ и с той же матрицей вторых моментов $\Lambda = J - \bar{p}\bar{p}'$.

При этом предельным распределением статистики X^2 будет нецентральное распределение χ^2 с параметром, равным $\sum_{k=0}^s z_k^2$.

Таким образом,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} P(X^2 < x) = \frac{e}{2 \left(\sum_{k=0}^s z_k^2 \right)^{\frac{s-1}{4}}} \int_0^x t^{\frac{s-1}{4}} I_{\frac{s-1}{2}} \left(t \sqrt{\sum_{k=0}^s z_k^2} \right) dt, \quad (4.2)$$

где $I_s(t)$ — видоизмененная функция Бесселя первого рода. ($I_s(t) = t^{-s} J_s(it)$, где $J_s(t)$ — функция Бесселя первого рода).

5. Сходимость $\chi^2 - X^2$ по вероятности к нулю
при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$

В этом пункте будет показано, что величина $\chi^2 - X^2$ сходится по вероятности к нулю, если $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$.

Согласно (1.3) и (1.5) имеем

$$\chi^2 - X^2 = mn \sum_{k=0}^s \left(\frac{1}{\mu_k + \nu_k} - \frac{1}{m\mu_k + n\nu_k} \right) \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2. \quad (5.1)$$

Если к функции $\frac{1}{x}$ применить теорему о среднем, то можно написать

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{x-c}{[c + \theta(x-c)]^2}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Полагая $x = \mu_k + \nu_k$, а $c = m\mu_k + n\nu_k$, будем иметь

$$\frac{1}{\mu_k + \nu_k} = \frac{1}{m\mu_k + n\nu_k} - \frac{[\mu_k + \nu_k - (m\mu_k + n\nu_k)]}{[m\mu_k + n\nu_k + \theta_k(\mu_k + \nu_k - m\mu_k - n\nu_k)]^2}, \quad (5.2)$$

$$0 < \theta_k < 1, \quad k = 0, s.$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем

$$\chi^2 - X^2 = -mn \sum_{k=0}^s \frac{(\mu_k + \nu_k - m\mu_k - n\nu_k) \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2}{[m\mu_k + n\nu_k + \theta_k(\mu_k + \nu_k - m\mu_k - n\nu_k)]^2},$$

откуда

$$|\chi^2 - X^2| = mn \sum_{k=0}^s \frac{|\mu_k + \nu_k - m\mu_k - n\nu_k| \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2}{[m\mu_k + n\nu_k + \theta_k(\mu_k + \nu_k - m\mu_k - n\nu_k)]^2}. \quad (5.3)$$

Оценим математическое ожидание $|\chi^2 - X^2|$.

Имеем

$$M|\chi^2 - X^2| = mn \sum_{k=0}^s M \frac{|\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k| \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2}{[m p_k + n p'_k + \theta_k (\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k)]^2}. \quad (5.4)$$

Так как $\mu_k \geq 0$ и $\nu_k \geq 0$, получаем

$$m p_k + n p'_k + \theta_k (\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k) \geq (1 - \theta_k) (m p_k + n p'_k). \quad (5.5)$$

Принимая во внимание, что в (5.4) под знаком математического ожидания находится положительная величина, а также учитывая неравенство (5.5), будем иметь

$$\begin{aligned} M \frac{|\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k| \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2}{[m p_k + n p'_k + \theta_k (\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k)]^2} &\leq \\ &\leq \frac{M |\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k| \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2}{(1 - \theta_k)^2 (m p_k + n p'_k)^2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$M|\chi^2 - X^2| \leq mn \sum_{k=0}^s \frac{M |\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k| \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2}{(1 - \theta_k)^2 (m p_k + n p'_k)^2}. \quad (5.6)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского имеем:

$$\begin{aligned} M |\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k| \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^2 &\leq \\ &\leq \sqrt{M (\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k)^2} \sqrt{M \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^4}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} M (\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k)^2 &= M (\mu_k - m p_k)^2 + M (\nu_k - n p'_k)^2 = \\ &= m p_k q_k + n p'_k q'_k. \end{aligned}$$

Подставляя в полученное выражение вместо p'_k его значение по формуле (1.4), а также вместо q'_k его значение

$$q'_k = q_k - \frac{z_k \sqrt{(m+n) p_k}}{\sqrt{mn}},$$

получим

$$M (\mu_k + \nu_k - m p_k - n p'_k)^2 = (m+n) p_k q_k + O(\sqrt{m} + \sqrt{n}). \quad (5.8)$$

Остается подсчитать $M \left(\frac{\mu_k}{m} - \frac{\nu_k}{n} \right)^4$.

Подставляя (2.2), (2.13) и (2.14) в (2.10) после некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{p_k}{m} - \frac{q_k}{n}\right)^4 &= \frac{3(np_k q_k + mp'_k q'_k)^2}{m^2 n^2} + \\
&+ \frac{6z_k^2(m+n)}{m^2 n^2} (np_k q_k + mp'_k q'_k) + \frac{z_k^2(m+n)^3}{m^2 n^2} - \\
&- \frac{4p_k q_k (q_k - p_k)}{m^2} \cdot \frac{z_k \sqrt{m+n}}{\sqrt{mn}} - \frac{4p'_k q'_k (q'_k - p'_k)}{n^2} \cdot \frac{z_k \sqrt{m+n}}{\sqrt{mn}} + \\
&+ \frac{p_k q_k (1 - 6p_k q_k)}{m^3} + \frac{p'_k q'_k (1 - 6p'_k q'_k)}{n^3}.
\end{aligned} \quad (5.9)$$

Формула (5.9) показывает, что

$$M\left(\frac{p_k}{m} - \frac{q_k}{n}\right)^4 = O\left[\frac{(m+n)^2}{m^2 n^2}\right]. \quad (5.10)$$

Согласно (5.8) и (5.10) из (5.7) следует, что

$$M|p_k + q_k - mp_k - np'_k| \left(\frac{p_k}{m} - \frac{q_k}{n}\right)^2 = O\left[\frac{(m+n)^{\frac{3}{2}}}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

так что согласно (5.6)

$$M|\chi^2 - X^2| = O\left(\frac{1}{\sqrt{m+n}}\right)$$

и поэтому

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} M|\chi^2 - X^2| = 0. \quad (5.11)$$

Применим к случайной величине $|\chi^2 - X^2|$ неравенство Чебышева. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, будем иметь

$$P(|\chi^2 - X^2| > \varepsilon) < \frac{M|\chi^2 - X^2|}{\varepsilon}.$$

Исходя из (5.11) заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\chi^2 - X^2| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ и } n \rightarrow \infty,$$

а это и означает, что статистика $\chi^2 - X^2$ сходится по вероятности к нулю при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$.

6. Предельное распределение χ^2 .

В этом пункте будет показано, что предельное распределение статистики χ^2 , определяемой соотношением (1.3), при условии (1.4) совпадает с предельным распределением X^2 при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$.

Напишем тождество

$$\chi^2 = X^2 + (\chi^2 - X^2). \quad (6.1)$$

Как было показано, предельное распределение статистики X^2 есть нецентральное распределение χ^2 , определяемое формулой (4.2).

Что касается величины $\chi^2 - X^2$, то, как было показано в предыдущем пункте, при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ она сходится по вероятности к нулю.

На основании известной теоремы ([2], стр. 281) в этом случае статистика χ^2 будет иметь предельное распределение, совпадающее с предельным распределением статистики X^2 .

Итак,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} P\{\chi^2 < x\} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^s z_k^2}}{2 \left(\sum_{k=0}^s z_k^2 \right)^{\frac{s-1}{4}}} \int_0^x t^{\frac{s-1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} I_{\frac{s-1}{2}} \left(\sqrt{t \sum_{k=0}^s z_k^2} \right) dt.$$

Таким образом, предельным распределением статистики (1.3) при условии (1.4) и при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ является нецентральное распределение χ^2 , являющееся бесселевым распределением.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 10 III 1958

Պ. Խ. ՏՈՒՄԱՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԸՆՏՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊՐՈՖԼԵՄԻՆ ԿԻՐԱՌՎՈՂ «ՄՈՏ» ԱՆՏԵՐՆԱՏԻՎՆԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ χ^2 ՀԱՅՏԱՆԻՇԻ ՀՁՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք կատարվում են ξ պատահական մեծություն m անկախ դիտումներ և η պատահական մեծություն n անկախ դիտումներ: Արվում է հիպոթեզ, որի համաձայն այս դիտումների արդյունքները կազմում են միևնույն բաշխման ֆունկցիա ունեցող հիմնական համախմբություններից երկու պատահական ընտրությունների: ξ և η պատահական մեծությունների բոլոր հնարավոր արժեքների բաղադրությունը արժեքում է $s+1$ չհատվող $\Delta_k (k=0, s)$

ինտերվալների և կազմվում է $\chi^2 = mn \sum_{k=0}^s \frac{1}{p_k + v_k} \left(\frac{p_k}{m} - \frac{v_k}{n} \right)^2$ մեծություն:

Նր, որտեղ p_k և v_k $\Delta_k (k=0, s)$ ինտերվալներին պատկանող դիտումների թվերն են՝ համապատասխանաբար առաջին և երրորդ ընտրություններից:

Դիտարկվում է χ^2 մեծության սահմանային բաշխումը գտնելու խնդիրը երբ $m \rightarrow \infty$ և $n \rightarrow \infty$, այն ենթադրությամբ, որ ընտրված հիպոթեզը ճիշտ է, այլ ճիշտ է ընդունվածին «մոտ» պատերազմիվ հիպոթեզը, որի համաձայն

$$p'_k - p_k = \frac{z_k \sqrt{(m+n)p_k}}{\sqrt{mn}},$$

որտեղ p'_k և $p_k - \Delta_k$ ինտերվալին պատկանող դիտման համապատասխանաբար իսկական և հիպոթետիկ հավանականություններն են, իսկ $z_k (k = \overline{0, s})$ համապատուն թվեր են:

Յուլյց է արված, որ

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} P(\chi^2 < x) = \frac{e}{2 \left(\sum_{k=0}^s z_k^2 \right)^{\frac{s-1}{4}}} \int_0^x t^{\frac{s-1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} I_{\frac{s-1}{4}} \left(\sqrt{t \sum_{k=0}^s z_k^2} \right) dt$$

որտեղ $I_s(t)$ — առաջին կարգի ձևափոխված Բեսսելի ֆունկցիան է ($I_s(t) = t^{-s} J_s(it)$ ուր $J_s(it)$ առաջին կարգի Բեսսելի ֆունկցիա է):

Այս բաշխման որոշումը χ^2 մեծություն համար լուծում է երկու ընտրությունների պրոբլեմին կիրառվող «մոտ» ալտերնատիվների նկատմամբ χ^2 հայտանիշի հզորության հարցը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Cochran. W. G. The χ^2 Test of Goodness of Fit, Annals of Math. Stat., Vol. 23, № 3, 1952.
2. Крамер. Г. Математические методы статистики. Гос. издат. иностран. литературы, Москва, 1948.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. Еганян

К плоской задаче теории упругости для полукруга

Статья посвящена исследованию плоского напряженного состояния в полукруговой области, нагруженной распределенными по произвольному закону нагрузками по прямолинейному и дуговому краям. Задача рассмотрена в криволинейных биполярных координатах. Решение представлено через интеграл Фурье.

§ 1. Общее решение задачи

Рассмотрим задачу в криволинейных биполярных координатах, которые связаны с прямоугольными координатами следующим образом [1]:

$$z = \ln \frac{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}}, \quad \beta = \arctg \frac{y}{x+a} - \arctg \frac{y}{x-a} + \pi, \quad (1.1)$$

где $2a$ — расстояние между полюсами.

Решая (1.1) относительно x и y , находим:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} z + \cos \beta}. \quad (1.2)$$

Рассматриваемая нами область, ограниченная линиями $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$, есть полукруг с радиусом a , к которому вдоль прямолинейного и дугового краев приложены нормальные и касательные напряжения (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \sigma_\beta \Big|_{\beta=0} &= \sigma_1(\alpha), & \tau_{\alpha\beta} \Big|_{\beta=0} &= \tau_1(\alpha), \\ \sigma_\beta \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \sigma_2(\alpha), & \tau_{\alpha\beta} \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \tau_2(\alpha). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предполагаем, что функции $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и производные $\sigma_1(\alpha)$ и $\sigma_2(\alpha)$ интегрируемы в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

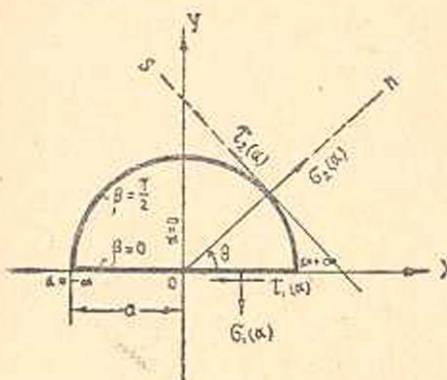
Общие формулы напряжений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [2]:

$$\sigma_\alpha = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\text{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\text{ch} \alpha}{a} \right] (g\Phi),$$

$$\sigma_\beta = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\text{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right] (g\Phi),$$

$$\tau_{\alpha\beta} = g \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi), \quad (1.4)$$

$$\text{где } g = \frac{\text{ch} \alpha + \cos \beta}{a}. \quad (1.5)$$



Фиг. 1.

Нормальные напряжения σ_α и σ_β соответственно направлены по нормальным к линиям $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

Функция $\Phi(\alpha, \beta)$ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению $\Delta^2 \Phi = 0$, которое в биполярных координатах записывается так:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\Phi) = 0. \quad (1.6)$$

Формулы упругих смещений имеют следующий вид [1]:

$$u = \frac{g}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right],$$

$$v = \frac{g}{2\mu} \left[-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right], \quad (1.7)$$

где

$$g\Psi = -\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi) d\alpha d\beta. \quad (1.8)$$

Функция $\Psi(\alpha, \beta)$ также является бигармонической.

Решение уравнения (1.6), т. е. $g\Phi$, разыскиваем в таком виде:

$$g\Phi = g\Phi_0 - aC_0 \cdot \cos \beta, \quad (1.9)$$

где

$$g\Phi_0 = \int_0^\infty [f_1(m, \beta) \cos m\alpha + f_2(m, \beta) \sin m\alpha] dm. \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.4), получим:

$$\sigma_\alpha = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\text{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\text{ch} \alpha}{a} \right] (g\Phi_0) + C_0,$$

$$\sigma_{\beta} = \left[g \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\operatorname{sh} x}{a} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right] (g\Phi_0) + C_0,$$

$$\tau_{x\beta} = g \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} (g\Phi_0). \quad (1.11)$$

Граничные условия (1.3) с учетом (1.5) и (1.11) запишутся следующим образом:

$$\left[(\operatorname{ch} x + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \operatorname{sh} x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right] (g\Phi_0) \Big|_{\beta=0} + aC_0 = a\tau_1(x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} (g\Phi_0) \Big|_{\beta=0} = \frac{a\tau_1(x)}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\left[\operatorname{ch} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \operatorname{sh} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right] (g\Phi_0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} + aC_0 = a\tau_2(x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} (g\Phi_0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a\tau_2(x)}{\operatorname{ch} x}. \quad (1.12)$$

Так как $g\Phi_0$ представлено в виде интеграла Фурье, то левые части второго и четвертого условий (1.12) будут представлять собой некоторые интегралы Фурье. Однако первое и третье условия (1.12) непосредственно не дают интеграла Фурье, так как в них перед знаками интегралов имеются функции от переменной x . С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянд [1], дифференцируем первое и третье условия (1.12) по x . С учетом четвертого условия (1.12) получим:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (g\Phi_0) \Big|_{\beta=0} = \frac{a\tau_1'(x)}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (g\Phi_0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a \operatorname{ch} x \tau_2'(x) - a\tau_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x}. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.10) в (1.6), находим для $f_1(m, \beta)$ и $f_2(m, \beta)$ следующее выражение:

$$f_i(m, \beta) = A_i(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B_i(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta +$$

$$+ C_i(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D_i(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta, \quad (i = 1, 2) \quad (1.14)$$

Из второго и четвертого условий (1.12) и из (1.13) с учетом (1.10) и (1.14) находим:

$$A_i(m) K_{1,i}(m),$$

$$B_i(m) = L \left\{ m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \left[K_{1,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - m K_{2,i}(m) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \left[K_{3,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m K_{4,i}(m) \right] \Bigg\}, \\
G_i(m) = & -L \left\{ \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \left[K_{1,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - m K_{2,i}(m) \right] + \right. \\
& \left. + m K_{3,i}(m) + K_{4,i}(m) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \right\}, \quad (1.15) \\
D_i(m) = & -L \left\{ \left[m K_{1,i} \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2} - (m^2 + 1) K_{2,i} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \right] + \right. \\
& \left. + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \left[K_{3,i} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m K_{4,i} \right] \right\}. \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}$$

Где обозначены:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}, \\
K_{1,1}(m) = & \frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma'_1(x) \sin mx \, dx}{\operatorname{ch} x + 1} = f_1(m, 0), \\
K_{1,2}(m) = & -\frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma'_1(x) \cos mx}{\operatorname{ch} x + 1} \, dx = f_2(m, 0), \\
K_{2,1}(m) = & \frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sigma'_2(x) \operatorname{ch} x - \tau_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} \right] \sin mx \, dx = f_1\left(m, \frac{\pi}{2}\right), \\
K_{2,2}(m) = & -\frac{a}{\pi m (m^2 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sigma'_2(x) \operatorname{ch} x - \tau_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} \right] \cos mx \, dx = f_2\left(m, \frac{\pi}{2}\right), \\
K_{3,1}(m) = & -\frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(x) \sin mx}{\operatorname{ch} x + 1} \, dx = f'_1(m, 0), \\
K_{3,2}(m) = & \frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(x) \cos mx}{\operatorname{ch} x + 1} \, dx = f'_2(m, 0), \\
K_{4,1}(m) = & -\frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(x) \sin mx}{\operatorname{ch} x} \, dx = f_1\left(m, \frac{\pi}{2}\right), \\
K_{4,2}(m) = & \frac{a}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(x) \cos mx}{\operatorname{ch} x} \, dx = f_2\left(m, \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Подставляя (1.15) в (1.14), находим выражение для $f_1(m, \beta)$, после чего из (1.10) находим $g\Phi_0$.

Найденное таким путем $g\Phi_0$ будет решением задачи, удовлетворяющим второму и четвертому условиям (1.12) и условию (1.13). Для того, чтобы полученное выше $g\Phi_0$ было бы решением задачи, удовлетворяющим всем условиям (1.12), подставим $g\Phi_0$ из (1.10) в (1.12) и определим постоянное C_0 так, чтобы первое и третье условия (1.12) также удовлетворялись.

Первое и третье условия (1.12) с учетом (1.10) и (1.16) можно переписать так:

$$\begin{aligned} & -(\operatorname{ch} x + 1) \int_0^{\infty} m^2 [K_{1,1} \cos mx + K_{1,2} \sin mx] dm + \\ & + \operatorname{sh} x \int_0^{\infty} m [K_{1,2} \cos mx - K_{1,1} \sin mx] dm - \\ & - \int_0^{\beta} [K_{1,1} \cos mx + K_{1,2} \sin mx] dm + a \cdot C_0 = a \cdot \sigma_1(x), \\ & - \operatorname{ch} x \int_0^{\infty} m^2 [K_{2,1} \cos mx + K_{2,2} \sin mx] dm + \\ & + \int_0^{\beta} [K_{2,1} \cos mx + K_{2,2} \sin mx] dm + a C_0 = a \sigma_2(x). \end{aligned} \quad (1.17)$$

С целью нахождения простого выражения для C_0 , первое уравнение умножим на $\frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}$, а второе на $\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$ и, проинтегрировав в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая следующую известную теорему [4], по которой

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi(m) \sin mx dm = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi(m) \cos mx dm = 0,$$

когда функция $\varphi(m)$ абсолютно интегрируема в пределах от 0 до ∞ , получаем следующие уравнения:

$$2a \cdot C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \tau_1(x)}{\operatorname{ch} x + 1} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx \int_0^{\infty} m [K_{1,1} \sin mx - K_{1,2} \cos mx] dm + 2a C_0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha. \quad (1.18)$$

Из (1.10), (1.12) и (1.16) находим:

$$\frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} = - \int_0^{\infty} m [K_{4,1} \sin m\alpha - K_{4,2} \cos m\alpha] dm.$$

Следовательно (1.18) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} 2C_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha, \\ 2C_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (1.19)$$

С помощью условий равновесия можно показать, что правые части (1.19) равны между собой.

Для этого, проектируя все силы на ось OX , OY и составляя моменты всех сил относительно начала координат, получим следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2} d\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из второго уравнения (1.20) видно, что правые части (1.19) действительно равны между собой.

С помощью (1.8), (1.9), (1.10), (1.14), (1.15), (1.16) и (1.19) из (1.11) и (1.7) можно определить соответствующие напряжения и перемещения в любой точке полукруга. С помощью граничных условий (1.3) легко вычисляются напряжения σ_z на линиях $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Для их вычисления предварительно определим разность $(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$. Из (1.11) имеем:

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = g \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1 \right] (g\Phi_0). \quad (1.21)$$

С помощью (1.3), (1.10), (1.14) и (1.16) из (1.21) находим:

$$\begin{aligned}\sigma_0 \Big|_{\beta=0} &= \sigma_1(x) + \frac{2}{a} (\operatorname{ch} x + 1) \int_0^{\infty} m [(mK_{1,1} + D_1) \cos mx + \\ &\quad + (mK_{1,2} + D_2) \sin mx] dm, \\ \sigma_2 \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \sigma_2(x) + \frac{2}{a} \operatorname{ch} x \int_0^{\infty} m \left[\left(mK_{2,1} - A_1 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - C_1 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \right) \cos mx + \right. \\ &\quad \left. + \left(mK_{2,2} - A_2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} - C_2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \right) \sin mx \right] dm. \quad (1.22)\end{aligned}$$

§ 2. Частные случаи

а) Случай, когда на дуговом крае действует постоянное давление, а на прямолинейной кромке приложены усилия, изменяющиеся по экспоненциальному закону, т. е.:

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4} e^{nx} (\operatorname{ch} x + 1)^2 & -\infty \leq x \leq 0 \\ \frac{Q_1}{4} e^{-nx} (\operatorname{ch} x + 1)^2 & 0 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

$$\sigma_2(x) = q = \text{const}, \quad \tau_1(x) = \tau_2(x) = 0, \quad (2.1)$$

где n — постоянный параметр, а $Q_1 = \sigma_1(0)$. Такой выбор $\sigma_1(x)$ облегчает вычисление первого интеграла (1.16) и переход к сосредоточенной силе (когда $n \rightarrow \infty$).

Подставляя (2.1) в (1.16) находим:

$$\begin{aligned}K_{1,1}(m) &= -\frac{aQ_1}{4\pi(m^2+1)} \left[\frac{n-2}{m^2+(n-1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+2}{m^2+(n+1)^2} + \frac{2n}{m^2+n^2} \right], \\ K_{1,2} &= 0, \quad K_{2,1} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0, \quad (i=1,2). \quad (2.2)\end{aligned}$$

Первое и третье условия равновесия (1.20) с помощью (2.1) удовлетворяются тождественно, а из второго условия получим:

$$Q_1 = \frac{4n(n^2-1)}{2n^2-1} q. \quad (2.3)$$

Для больших n (2.2) и (2.3) можно переписать так:

$$K_{1,1} = -\frac{anQ_1}{\pi(m^2+1)(m^2+n^2)}, \quad K_{1,2} = K_{2,1} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0, \quad (i=1,2), \quad (2.4)$$

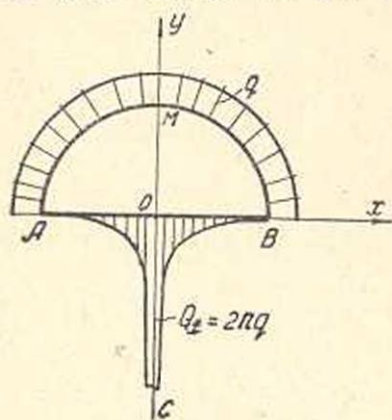
$$Q_1 = 2nq. \quad (2.5)$$

Из (2.1) видно, что для больших n распределение $\sigma_1(\alpha)$ на линии $\beta=0$ приближается к сосредоточенной силе (фиг. 2).

Из (1.19) с учетом (2.1) получим:

$$C_0 = q. \quad (2.6)$$

Из (1.22) с помощью (1.15), (2.4) и (2.5) имеем:



Фиг. 2.

$$\sigma_2 \Big|_{\beta=0} = \sigma_1(\alpha) + \frac{4qn^2}{\pi} (\text{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m^2 \cos m \alpha dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)},$$

$$\sigma_2 \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_2(\alpha) - \frac{4qn^2}{\pi} \text{ch} \alpha \int_0^{\infty} \frac{m \text{sh} \frac{m\pi}{2} \cos m \alpha dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)}. \quad (2.7)$$

По методу трапеции вычисляем интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)} = \frac{1}{n^2} \cdot 0,60291;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{m \text{sh} \frac{m\pi}{2} dm}{(m^2 + n^2) \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right)} = \frac{1}{n^2} \cdot 1,33476. \quad (2.8)$$

Из (2.7) с помощью (2.1), (2.5) и (2.8) для точек О и М находим:

$$\sigma_2 \Big|_{\substack{\beta=0 \\ \alpha=0}} = 2nq + 1,5360 \cdot q, \quad (2.9)$$

$$\sigma_2 \Big|_{\substack{\beta=\frac{\pi}{2} \\ \alpha=0}} = -0,7003 \cdot q.$$

Теперь, если на фиг. 2 подсчитать суммарную нагрузку, которая приложена на линии $\beta=0$ и приравнять ее при $n \rightarrow \infty$ заданной величине P , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + 1} = P, \quad (2.10)$$

получим случай действия сосредоточенной силы (фиг. 3).

Из (2.1) и (2.10) получим.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_1}{n} = \frac{P}{a}. \quad (2.11)$$

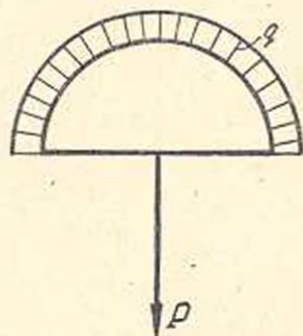
Из (1.19) с учетом (2.10) находим:

$$C_0 = \frac{P}{2a}. \quad (2.12)$$

Из (2.2) с учетом (2.11) при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$K_{1,1} = -\frac{P}{\pi(m^2 + 1)}, \quad K_{1,2} =$$

$$K_{2,1} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.13)$$



Фиг. 3.

6) Когда

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha) &= q = \text{const}, \\ \sigma_2(\alpha) &= \begin{cases} Q_2 e^{n\alpha} \operatorname{ch} \alpha & -\infty \leq \alpha \leq 0 \\ & (n \geq 2) \\ Q_2 e^{-n\alpha} \operatorname{ch} \alpha & 0 \leq \alpha \leq \infty \end{cases} \\ \tau_1(\alpha) &= \tau_2(\alpha) = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$Q_2 = \sigma_2(0).$$

Такой выбор $\sigma_2(\alpha)$ имеет те же преимущества, что и выбор $\sigma_1(\alpha)$ в случае (а).

Подставляя (2.14) в (1.16) находим:

$$K_{2,1} = -\frac{aQ_2}{\pi(m^2 + 1)} \left[\frac{n-2}{m^2 + (n-1)^2} + \frac{n+2}{m^2 + (n+1)^2} \right], \quad (2.15)$$

$$K_{1,1} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Из второго условия равновесия (1.20) и (2.14) получим:

$$Q_2 = nq. \quad (2.16)$$

Для больших n можно (2.15) переписать так:

$$K_{2,1} = -\frac{2anQ_2}{\pi(m^2 + 1)(m^2 + n^2)}, \quad K_{1,1} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{4,1} = 0. \quad (2.17)$$

($i = 1, 2$)

Из (2.14) видно, что для больших n распределение $\sigma_2(\alpha)$ на линии $\beta = \frac{\pi}{2}$ приближается к сосредоточенной силе (фиг. 4).

в) Случай, когда на линии $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ приложены экспоненциально изменяющиеся нагрузки, т. е.

$$\sigma_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4} e^{\alpha x} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^2 & -\infty \leq \alpha \leq 0 \\ \frac{Q_1}{4} e^{-\alpha x} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^2 & 0 \leq \alpha \leq \infty \end{cases} \quad (n > 2)$$

$$\sigma_2(\alpha) = \begin{cases} Q_2 e^{\alpha x} \operatorname{ch}^2 \alpha & -\infty \leq \alpha \leq 0 \\ Q_2 e^{-\alpha x} \operatorname{ch}^2 \alpha & 0 \leq \alpha \leq \infty \end{cases}$$

$$\tau_1(\alpha) = \tau_2(\alpha) = 0. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.25) в (1.16), находим:

$$K_{1,1} = -\frac{aQ_1}{4\pi(m^2+1)} \left[\frac{n-2}{m^2+(n-1)^2} + \frac{n+2}{m^2+(n+1)^2} + \frac{2n}{m^2+n^2} \right],$$

$$K_{2,1} = -\frac{aQ_2}{4\pi(m^2+1)} \left[\frac{n-2}{m^2+(n-1)^2} + \frac{n+2}{m^2+(n+1)^2} \right], \quad (2.26)$$

$$K_{1,2} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{3,2} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0.$$

Из второго условия равновесия (1.20) и (2.25) получаем:

$$Q_1 = \frac{4(n^2-1)}{2n^2-1} Q_2. \quad (2.27)$$

Для больших n можно (2.26) и (2.27) переписать так (фиг. 6):

$$K_{1,1} = -\frac{aQ_1 n}{\pi(m^2+1)(m^2+n^2)},$$

$$K_{2,1} = -\frac{2aQ_2 n}{\pi(m^2+1)(m^2+n^2)},$$

$$K_{1,2} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{3,2} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0. \quad (2.28)$$

$$Q_1 = 2Q_2 \quad (2.29)$$

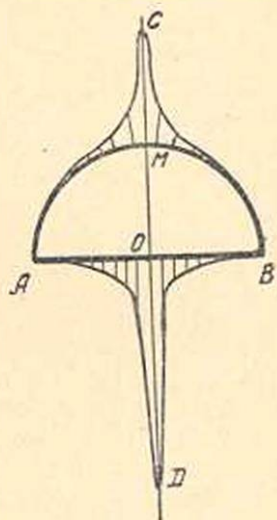
С помощью (2.29) из (2.28) получим:

$$K_{1,1} = K_{2,1}. \quad (2.30)$$

Из (1.19) с учетом (2.25) получим:

$$C_0 = \frac{Q_2}{n} = \frac{Q_1}{2n}. \quad (2.31)$$

Из (1.22) с помощью (1.15), (2.28) и (2.30) будем иметь:



Фиг. 6.

$$\sigma_x \Big|_{\beta=0} = \sigma_1(x) - \frac{2nQ_1}{\pi} (\operatorname{ch} x + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \cos mx \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m \right)},$$

$$\sigma_x \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_2(x) - \frac{4nQ_2}{\pi} \operatorname{ch} x \int_0^{\infty} \frac{m \cos mx \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m \right)}. \quad (2.32)$$

По методу трапеции вычисляем

$$\int_0^{\infty} \frac{m \, dm}{(m^2 + n^2) \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + m \right)} = \frac{1}{n^2} \cdot 0,73185. \quad (2.33)$$

С помощью (2.25) и (2.33) из (2.32) для точек О и М (фиг. 6) находим:

$$\sigma_x \Big|_{\substack{\beta=0 \\ x=0}} = Q_1 \left[1 - \frac{1}{n} \cdot 0,964 \right],$$

$$\sigma_x \Big|_{\substack{\beta=\frac{\pi}{2} \\ x=0}} = Q_2 \left[1 - \frac{1}{n} \cdot 0,964 \right] \quad (2.34)$$

Теперь, если на фиг. 6 подсчитать суммарные нагрузки, которые приложены на линиях $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$, и каждую из них приравнять

при $n \rightarrow \infty$ к заданной величине P , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{a \sigma_1(x)}{\operatorname{ch} x + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{a \sigma_2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} dx = P, \quad (2.35)$$

то получим случай двух осевых, сосредоточенных сил (фиг. 7).

Из (2.25) и (2.35) получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2Q_2}{n} = \frac{P}{a}. \quad (2.36)$$

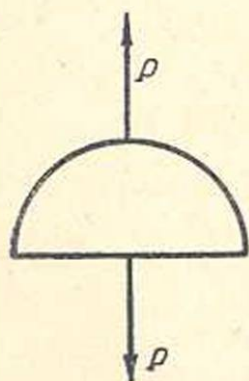
Из (1.19) с учетом (2.35) находим:

$$C_0 = \frac{P}{2a}. \quad (2.37)$$

Из (2.26) с учетом (2.36) при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$K_{1,1} = K_{2,1} = -\frac{P}{\pi(m^2 + 1)},$$

$$K_{1,2} = K_{2,2} = K_{3,1} = K_{3,2} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0. \quad (2.38)$$



Фиг. 7.

Для соответствующих случаев $g\Phi_0$ можно найти с помощью (1.10), (1.14) и (1.15). После этого с помощью (1.4), (1.5), (1.8) (1.9) и (1.19) из (1.4) и (1.7) можно определить соответствующие напряжения и перемещения в любой точке полукруга.

г) Пусть
$$\sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha) = q = \text{const},$$
$$\tau_1(\alpha) = \tau_2(\alpha) = 0. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в (1.16) находим: $K_{1,i} = K_{2,i} = K_{3,i} = K_{4,i} = 0$
($i = 1, 2$).

И получаем: $g\Phi_0 = 0$.

Из (1.19) находим: $C_0 = q$.

Тогда из (1.11) получается, что во всех точках полукруга

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = q, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0$$

Как и следовало ожидать.

Ереванский политехнический институт
им. Карла Маркса

Поступило 20 III 58 г.

Վ. Վ. Եզանյան

ԱՌԱՋԳԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԿՍԱՆՇՐՋԱՆԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուժ տրվում է կիսաշրջանի հարթ խնդրի լուծումը, երբ հզորւմ կիրառված է կամայականորեն բաշխված բեռ:

Խնդիրը դիտարկվում է երկրենու կորագիծ կոորդինատներով: Խնդրի լուծումը՝ լարումների ֆունկցիան, պատկերված է Ֆուրիեի ինտեգրալի տեսքով:

$\sigma_1(\alpha)$ և $\sigma_2(\alpha)$ ֆունկցիաների (2.1), (2.14) և (2.25) տեսքով ընտրությունը հնարավորություն է ապրիս՝ 1) հեշտաթվամբ դանել Ֆուրիեի ինտեգրալի գործակիցները և 2) անցնել կենտրոնացված ուժին:

Դիտարկված բոլոր դեպքերի համար մեծ n -ի դեպքում հաշվված է σ_α լարման թվալին արժեքը $\alpha = 0$ դիր ծալրակետերում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950.
2. Кокер Э. и Файлон Л. Оптический метод исследования напряжений. ОНТИ, Л.—М., 1937.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1949.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. Джеффери (Phil Trans. of the Roy. Soc of London, ser. A, vol. 221, 1921).

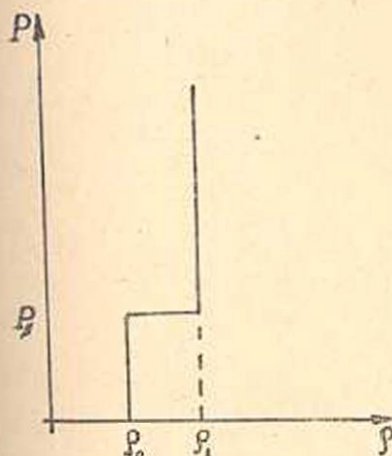
ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. Н. Кукуджанов

Ударные волны в уплотняющейся вязко-пластической среде

§ 1. В настоящей работе рассматривается распространение ударных волн вязко-пластической деформации в среде уплотняющейся следующим образом. В начальном недеформированном состоянии среда обладает плотностью ρ_0 и при этой плотности остается несжимаемой до некоторого значения давления P_s . При давлении равном P_s плотность среды скачком изменяется до плотности ρ_1 и в дальнейшем при увеличении давления остается постоянной.

Доведенная до плотности ρ_1 среда несжимаема и подчиняется законам вязко-пластического течения. Объемная деформация считается обратимой лишь в пределах изменения давления $P_s > P > 0$. При $P > P_s$ после разгрузки появляется остаточная объемная деформация. На фиг. 1 показана кривая изменения $P(p)$ при нагружении (сплошная линия) и при разгрузке (пунктир).



Фиг. 1. Ударные волны в уплотняющейся вязко-пластической среде.

Рассмотрим в бесконечной среде распространение ударной волны, возникающей под действием взрыва в некотором сферическом или цилиндрическом объеме радиуса a_0 . Будем считать, что начальное давление взрыва P_0 значительно превосходит величину давления P_s . При таких условиях перемещения нельзя считать малыми и необходимо рассматривать конечную деформацию среды. Примем полярную систему координат, центр которой совместим с центром взрыва. Возникающее движение среды будем рассматривать в переменных Эйлера. Для случая сферического взрыва главными напряжениями будут σ_r , σ_θ и σ_φ , причем $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$. Для случая цилиндрической симметрии главными будут напряжения σ_r , σ_θ и σ_z .

Уравнения движения и неразрывности уплотненной среды в переменных Эйлера записываются так

$$\rho_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{k(\tau_r - \tau_\theta)}{r}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^k v) = 0; \quad (2)$$

$k=1$ для цилиндрического, $k=2$ для сферического случаев. В качестве уравнений, связывающих между собой напряжения и деформации за пределом текучести, возьмем дифференциальные зависимости для вязко-пластической среды, предложенные А. А. Ильюшиным.

$$D_s \frac{S - \tau_s}{S} = 2\mu D_\epsilon; \quad (3)$$

D_s и D_ϵ — девиаторы напряжения и скорости деформации.

$$S = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\tau_r - \tau_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2] + \tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2} -$$

— интенсивность касательных напряжений.

τ_s — предел текучести на сдвиг, μ — коэффициент вязкости материала.

В случае сферической симметрии выражение для интенсивности касательных напряжений примет вид

$$S = \frac{|\sigma_r - \sigma_\theta|}{\sqrt{3}}.$$

При цилиндрической симметрии деформация будет плоской $\epsilon_z = 0$ и, используя условие несжимаемости, получим

$$S = \frac{|\sigma_r - \sigma_\theta|}{2}.$$

Тогда уравнения (3) совместно с уравнением (2) дадут, в рассматриваемом нами случае сжатия

$$|\tau_r - \sigma_\theta| - m\tau_s = 2\mu(k+1) \frac{v}{r}, \quad (4)$$

$m=1$ для сферического и $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ для цилиндрического случаев.

На фронте ударной волны радиуса R должны выполняться уравнение сохранения массы вещества и теорема количества движения, которые дадут следующие соотношения:

$$\rho_0 \frac{dR}{dt} = \rho_1 \left[\frac{dR}{dt} - v(R) \right]; \quad (5)$$

$$\rho_0 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \sigma_r(R+0) = \rho_1 \left[\frac{dR}{dt} - v(R) \right]^2 - \tau_r(R-0).$$

Поскольку при давлениях меньших P_s среда несжимаема, то волны давления, не превышающие величины P_s , распространяются в ней с бесконечно большой скоростью, поэтому перед фронтом ударной волны, которая движется с конечной скоростью $\sigma_r(R+0) = P_s$ всегда, когда давление в по. ости больше величины P_s . К такой же величине давления перед фронтом ударной волны приводит рассмотрение уравнения энергии [3].

Введем новые безразмерные переменные

$$\bar{v} = \frac{v}{c}; \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{P_s}; \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{P_s}; \quad \bar{r} = \beta \frac{r}{c}; \quad \bar{t} = \beta t, \quad (6)$$

где

$$c^2 = \frac{P_s}{\rho_1}; \quad \beta = \gamma \frac{P_s}{2\mu(k+1)}$$

γ — некоторое произвольное неравное нулю число, введенное для удобства.

Полная система уравнений (1), (2), (4) в безразмерных величинах примет следующий вид

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}} + k \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_0}{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + k \frac{\bar{v}}{\bar{r}} = 0; \quad (8)$$

$$|\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_0| - m = \gamma \frac{\bar{v}}{\bar{r}}. \quad (9)$$

Условия на фронте ударной волны запишутся так

$$\frac{d\bar{R}}{d\bar{t}} = \bar{v}(\bar{R}) \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}; \quad (10)$$

$$\bar{P}(\bar{R}-0) = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} v^2(R+1). \quad (11)$$

Так как в дальнейшем у нас будут встречаться лишь безразмерные величины, то, для удобства записи, знак черты над ними мы будем опускать и сохраним за ними названия соответствующих размерных величин.

Из уравнения (8) следует

$$v = \left(\frac{a}{r} \right)^k \frac{da}{dt}. \quad (12)$$

Здесь a — радиус полости.

Интегрируя уравнение (12) получаем

$$r^3 = a^3 + (r_0^3 - a_0^3) \quad (13)$$

где r_0 — начальная координата точки, а r — текущая координата.

На основании (10) и (12) легко определить радиус фронта ударной волны

$$R^3 = \frac{\rho_1 a^3 - \rho_0 a_0^3}{\rho_1 - \rho_0}. \quad (14)$$

Подставляя (12) в уравнение (7) и исключая $\sigma_r - \sigma_z$ при помощи (9), получаем после интегрирования

$$\begin{aligned} P(a) - P(R) = & -\frac{k}{k-1} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \left[\left(\frac{a}{R} \right)^{k-1} - 1 \right] - \\ & - \frac{a}{(k-1)} \frac{d^2 a}{dt^2} \left[\left(\frac{a}{R} \right)^{k-1} - 1 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \left[\left(\frac{a}{R} \right)^{2k} - 1 \right] + \\ & + km \ln \frac{R}{a} - \frac{\gamma k}{k+1} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \left[\left(\frac{a}{R} \right)^{k+1} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Будем считать, что давление в полости возникает мгновенно, а затем изменяется по закону политропы степени γ

$$P(a) = P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{(\gamma+1)\gamma}. \quad (16)$$

Подставляя в (15) из (11) и (16) величины $P(R=0)$ и $P(a)$ получаем окончательное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2(k-1)} \frac{dx}{da} = & \left[\frac{1}{2} (x^{2k} - 1) - 2(x^{k-1} - 1) + \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x^{2k} \right] x - \\ & - \frac{\gamma k}{k+1} \frac{1}{a} (x^{k+1} - 1) \sqrt{x} - km \ln x - P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\gamma(k+1)} + 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $x = \left(\frac{da}{dt} \right)^2$, $a = \frac{a}{R}$, $k \neq 1$.

В случае цилиндрической симметрии, когда $k=1$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \ln x \frac{dx}{da} = & \left[\frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x^2 + \frac{1}{2} (x^2 - 1) - \ln x \right] x - \\ & - P(a) + 1 - m \ln x - \frac{\gamma}{2a} (x^2 - 1) \sqrt{x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если пренебречь касательными напряжениями, то два последних члена в уравнении (18) пропадут и оно перейдет в аналогичное уравнение полученное в работе [1].

Начальное значение x_0 определяется на основании (11) при $t=0$.

$$P(a_0) = 1 + \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x_0. \quad (19)$$

Для численного интегрирования полученных дифференциальных уравнений необходимо знать значение производной $\frac{dx}{da}$ в начальный момент

времени $t = 0$. Значение этой производной может быть определено, если раскрыть неопределенность в уравнении (17) для сферического и в уравнении (18) для цилиндрического случаев. В случае сферической симметрии имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{2} \frac{dx}{da} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[x \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha - 1} - 2 \right) - \frac{2\nu}{3a} \frac{(\alpha^3 - 1)}{(\alpha - 1)} \sqrt{x} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \alpha^4 x - P_0 \left(\frac{\alpha_0}{a} \right)^{3\gamma} + 1}{\alpha - 1} - 2 \right].$$

В пределе

$$\left(\frac{dx}{da} \right)_{t=0} = \frac{2}{3a_0} \left[\frac{4\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x_0 - 3\gamma \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} P_0 - 2 - \frac{2\nu}{a_0} \sqrt{x_0} \right]. \quad (20)$$

В случае цилиндрической симметрии на основании (18) находим

$$\left(\frac{dx}{da} \right)_{t=0} = \frac{2}{3a_0} \left[\frac{2\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} x_0 - 2\gamma P_0 \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} - \left(m + \frac{\nu \sqrt{x_0}}{a_0} \right) \right]. \quad (21)$$

На фиг. 2 приведены результаты численного интегрирования дифференциального уравнения (17) методом Адамса для следующего примера:

$$P_0 = 100 P_s; \quad \gamma = 1; \quad \rho_0 = 2 \text{ г/см}^3; \quad \rho_1 = 2,5 \text{ г/см}^3; \quad a_0 = 0,04,$$

ν выбрано равным $\frac{k+1}{k}$.

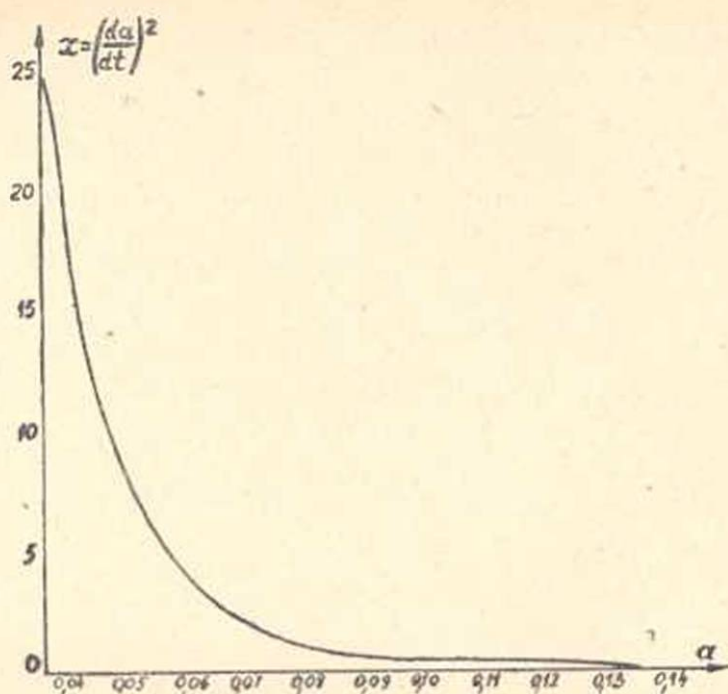
Качественное исследование интегральных кривых уравнения (17), в зависимости от величины коэффициента вязкости, показывает, что они меняются так, как это изображено на фиг. 3. При больших величинах коэффициента вязкости μ кривые не имеют участка, где скорость движения границы полости возрастала бы с увеличением радиуса полости a , затухание движения идет быстрее при больших значениях μ , и следовательно, конечный радиус полости уменьшается с возрастанием μ .

Движение среды полностью останавливается, когда $x = \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 0$.

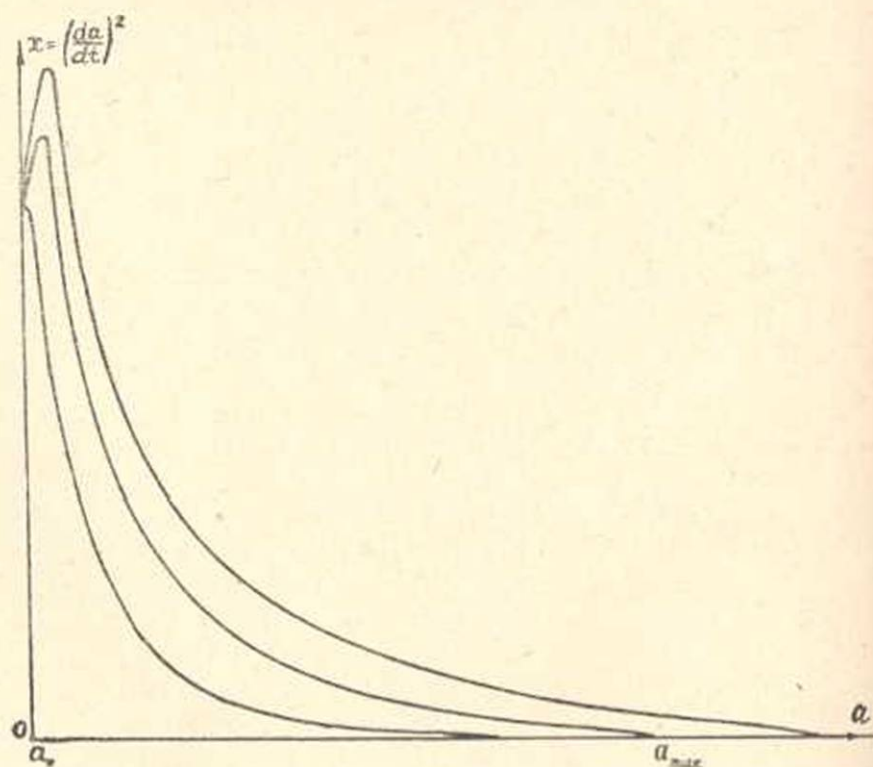
Полное время расширения отверстия может быть определено из следующего выражения

$$T = \int_{a_0}^{a_{\max}} \frac{da}{\sqrt{x}}. \quad (22)$$

Все величины, характеризующие движение и напряженное состояние среды, легко могут быть вычислены с помощью ранее полученных формул.



Фиг. 2. Кривая зависимости квадрата скорости границы сферической полости от величины радиуса a .



Фиг. 3. Интегральные кривые уравнения (23) при различных значениях коэффициента вязкости среды.

§ 2. В предыдущем параграфе мы численно интегрировали полученные уравнения. В этом параграфе рассмотрим способ приближенного аналитического решения уравнений (17) и (18). В выражении (14) величиной a_0^3 можно пренебречь по сравнению с a^3 , даже если $1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$ порядка нескольких процентов.

Тогда величина α будет постоянной

$$\alpha = \frac{a}{R} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}.$$

Уравнение (17) можно при этом записать так

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) \frac{a}{2} \frac{dx}{da} - \left[(2 - \alpha) - \frac{1}{2} (\alpha^4 + 1) \right] x + \\ + \frac{2\nu}{3a} (\alpha^3 - 1) \sqrt{x} + P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma} + 2 \ln \alpha - 1 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

В уравнении (18) α следует считать постоянной, само же уравнение останется без изменений.

Оба эти уравнения отличаются друг от друга лишь коэффициентами, поэтому в дальнейшем мы ограничимся сферическим случаем, а все проводимые рассуждения будут полностью применимы и к уравнению (18) с некоторыми несущественными изменениями в обозначениях.

Уравнение (23) относится к уравнениям Абеля не интегрируемым в квадратурах. При нелинейном члене, обусловленном наличием вязких сил трения, оно содержит некоторый параметр ν . Если $\nu = 0$, то нелинейный член в уравнении пропадает и оно легко интегрируется, при этом уравнение (23) совпадает с уравнением (12), полученным в работе [2], если там m положить равным нулю. Поэтому все оценки и рассуждения, подтверждающие законность пренебрежения a_0^3 по сравнению с a^3 приведенные в работе [2], имеют место и для уравнения (23) при $\nu = 0$.

Для решения уравнения (23) применим метод малого параметра. Малость параметра ν следует рассматривать, как малость сил вязкости по сравнению с силами инерции. При этом ν уже не может быть выбрано произвольно. Так как ν должно содержаться только при нелинейном члене, то β следует выбрать независимо от ν , иначе ν войдет и в другие члены уравнения через β .

Из соображений размерности, β можно определить, как $\frac{c}{a_0} = \beta$,

тогда на основании (6) $\nu = \frac{2(k+1)\mu c}{P_s a_0}$.

Будем искать решение уравнения (23) в виде ряда по степеням ν

$$x = x_0 + \nu x_1 + \nu^2 x_2 + \dots \quad (24)$$

Подставляя это выражение в уравнение (23) и приравнявая члены, содержащие одинаковые степени χ , получим следующие уравнения для определения функций x_0 , x_1 и x_2 .

$$(\alpha - 1) \frac{a}{2} \frac{dx_0}{da} - \left[(2 - \alpha) - \frac{1}{2} (\alpha^4 + 1) \right] x_0 + 2 \ln \alpha + \\ + P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\tau} - 1 = 0 \quad (25)$$

$$(\alpha - 1) \frac{a}{2} \frac{dx_1}{da} - \left[(2 - \alpha) - \frac{1}{2} (\alpha^4 + 1) \right] x_1 = - \\ - \frac{2}{3a} (\alpha^3 - 1) x_0^{1/3} \quad (26)$$

$$(\alpha - 1) \frac{a}{2} \frac{dx_2}{da} - \left[(2 - \alpha) - \frac{1}{2} (\alpha^4 + 1) \right] x_2 = - \frac{(\alpha^3 - 1)}{3a} \frac{x_1}{x_0^{1/3}}. \quad (27)$$

Аналогичным образом могут быть выписаны и все остальные уравнения для определения функций x_n , все они, как и уравнения (25)–(27), могут быть проинтегрированы в квадратурах. Сходимость ряда (24) вытекает из теоремы Пуанкаре, (смотри, например, [5]), условия которой в рассматриваемом нами случае выполняются.

Считая параметр χ малым, ограничимся членами порядка χ^3 пренебрегая более высокими степенями χ .

Начальные условия для определения функций x_n следует брать на основании (19) такими

$$a = a_0 \quad x_0 = (P_0 - 1) \frac{a^3}{1 - \alpha^3} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0. \quad (28)$$

Введем новую независимую переменную $\zeta = \frac{a}{a_0}$ и запишем уравнение (25) в более удобном виде

$$\frac{dx_0}{d\zeta} - \frac{n}{\zeta} x_0 = A \left(\frac{1}{\zeta} - B \zeta^{-3\tau-1} \right). \quad (29)$$

Решение его, удовлетворяющее начальному условию (28), записывается так:

$$x_0 = \left[\frac{\alpha^3 (P_0 - 1)}{1 - \alpha^3} + \frac{A}{n} - \frac{AB}{3\tau + n} \right] \zeta^n + \frac{AB}{3\tau + n} \zeta^{-3\tau} - \frac{A}{n} = \\ = M \zeta^n + N \zeta^{-3\tau} - L. \quad (30)$$

Здесь

$$A = \frac{2(1 - 2 \ln \alpha)}{\alpha - 1}; \quad B = \frac{P_0}{1 - 2 \ln \alpha}; \quad n = -(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1).$$

Заметим, что $A < 0$, $B > 0$, $-6 \leq n \leq -3$.

Решения уравнений (26) и (27), удовлетворяющие условиям (28), будут иметь вид:

$$x_1 = -\frac{4}{3a_0} (\alpha^2 + \alpha + 1) \zeta^n \int_1^\zeta \sqrt{M\zeta^\alpha + N\zeta^{-3\alpha} - L} \zeta^{-(\alpha+2)} d\zeta; \quad (31)$$

$$x_2 = \frac{8(\alpha^2 + \alpha + 1)^2}{9a_0^2} \zeta^n \int_1^\zeta \frac{\int_1^s s^{-(\alpha+2)} \sqrt{Ms^\alpha + Ns^{-3\alpha} - L} ds}{\zeta^2 \sqrt{M\zeta^\alpha + N\zeta^{-3\alpha} - L}} d\zeta. \quad (32)$$

Интеграл в выражении (31) может быть сведен к эллиптическим интегралам, когда числитель выражения (30) представляет собой полином третьей или четвертой степени.

Рассмотрим случай, когда на границе полости в начальный момент времени мгновенно приложено давление $P_0 > P_*$, которое остается постоянным до некоторого момента времени t_1 , при котором оно скачком падает до величины P_* . Отношение плотностей возьмем

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = 0,83, \text{ тогда } n = -4.$$

Подставляя эти значения в выражение (30) получим

$$\frac{0,905 P_0 - 2,237}{\zeta^4} \left[\frac{1,11 (P_0 - 2,2)}{0,905 P_0 - 2,237} \zeta^4 - 1 \right] = \frac{\gamma^2}{\zeta^4} (k^2 \zeta^4 - 1), \quad (33)$$

причем важно, чтобы $0,905 P_0 - 2,237 > 0$, тогда $k > 1$.
Выражение (31) будет записываться так:

$$x_1 = -\frac{4\gamma}{3a_0} (\alpha^2 + \alpha + 1) \zeta^{-4} \int_1^\zeta \sqrt{k^2 \zeta^4 - 1} d\zeta. \quad (34)$$

После некоторых преобразований интеграл в выражении (34) может быть приведен к эллиптическому интегралу:

$$\int_1^\zeta \sqrt{k^2 \zeta^4 - 1} d\zeta = \frac{\zeta}{3} \sqrt{k^2 \zeta^4 - 1} - \frac{1}{3} \sqrt{k^2 - 1} - \frac{2}{3} \int_1^\zeta \frac{ds}{\sqrt{k^2 s^4 - 1}}.$$

Сделаем замену в подинтегральном выражении $s\sqrt{k} = \xi$. Тогда окончательно получим следующее выражение для x_1

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{4\gamma}{9a_0^2} (\alpha^2 + \alpha + 1) \zeta^{-4} \left[\zeta \sqrt{k^2 \zeta^4 - 1} - \sqrt{k^2 - 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{k}} \left(\int_1^{\zeta \sqrt{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} - \int_1^{\sqrt{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} \right) \right] = \\ &= -\frac{4\gamma}{9a_0^2} (\alpha^2 + \alpha + 1) \zeta^{-4} \left[\zeta \sqrt{k^2 \zeta^4 - 1} - \sqrt{k^2 - 1} - \right. \end{aligned}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{k}} \left[F\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right], \quad (35)$$

где $F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода в нормальной тригонометрической форме.

Выражение для x_2 может быть приведено к следующему виду

$$x_2 = \frac{8(z^2 + z + 1)^2}{9a_0^2 z^4} \int_1^z \frac{\sqrt{k^2 s^4 - 1} ds}{\sqrt{k^2 z^4 - 1}} dz. \quad (36)$$

Подставляя полученные выражения x_0 , x_1 , x_2 в (24), найдем решение уравнения (23), в котором сохранены члены, содержащие γ в степени не выше второй. Это решение будет справедливо лишь до момента времени t_1 , когда давление в полости резко уменьшается до значения P_s . Начиная с этого момента времени в уравнении (23) следует положить $\gamma = 0$, $P_0 = 1$.

Радиус полости a_1 в момент времени t_1 определяется из следующего уравнения

$$t_1 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{da}{\sqrt{x}}.$$

Уравнение (23) перепишем в следующем виде, введя новую независимую переменную $\eta = \frac{a}{a_1}$,

$$\frac{dz}{a\eta} - \frac{n}{\eta} z + \gamma \frac{4}{3} \frac{z^2 + z + 1}{\eta^2 a_1} \sqrt{z} = \frac{4 \ln z}{1 - z} \frac{1}{\eta}. \quad (37)$$

Решение, как и раньше, ищем в виде ряда по степеням γ

$$z = z_0 + \gamma z_1 + \gamma^2 z_2 + \dots \quad (38)$$

Уравнение для определения z_0 будет следующим

$$\frac{dz_0}{d\eta} - \frac{n}{\eta} z_0 = \frac{4 \ln z}{1 - z} \frac{1}{\eta}. \quad (39)$$

Уравнения (26) и (27) останутся без изменений, только в них x_0 надо заменить на z_0 , x_1 на z_1 и x_2 на z_2 .

Начальные условия для уравнения (37) следует взять следующими

$$\text{при } a = a_1 \quad z = x_0(a_1) + \gamma x_1(a_1) + \gamma^2 x_2(a_1). \quad (40)$$

Тогда начальные условия для определения z_0 , z_1 и z_2 будут такими

$$\text{при } \eta = 1 \quad z_0 = x_0(a_1) + vx_1(a_1) + v^2x_2(a_1); \quad z_1 = z_2 = 0. \quad (41)$$

Решение уравнения (39), удовлетворяющее условию (41), будет иметь следующий вид

$$z_0 = \left[x(a_1) - \frac{\ln \alpha}{(1-\alpha)} \right] \eta^{-1} + \frac{\ln \alpha}{(1-\alpha)}. \quad (42)$$

Учитывая величины и знаки коэффициентов в этом выражении, перепишем его так

$$z_0 = (1 - k_1^2 \eta^4) \frac{\gamma_1^2}{\eta^4},$$

$$\gamma_1^2 = x(a_1) - \frac{\ln \alpha}{1-\alpha}; \quad 0 < k_1^2 = \frac{\ln \alpha}{(1-\alpha) \gamma_1^2} < 1.$$

Выражение для z , будет таким

$$z_1 = -\frac{4\gamma_1}{3a_1} (x^2 + x + 1) \frac{1}{\eta^4} \int_1^\eta \sqrt{1 - k_1^2 \eta^4} d\eta. \quad (43)$$

Интеграл в выражении (43) преобразуется к эллиптическим, и тогда получаем

$$z_1 = -\frac{4\gamma_1}{9a_1} (x^2 + x + 1) \frac{1}{\eta^4} \left\{ \sqrt{1 - k_1^2} - \eta \sqrt{1 - k_1^2 \eta^4} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{k_1}} \left[F\left(\arccos \sqrt{k_1}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\arccos \eta \sqrt{k_1}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \right\}. \quad (44)$$

Выражение для z_2 будет иметь следующий вид:

$$z_2 = \frac{8}{9a_1^2} (x^2 + x + 1)^2 \frac{1}{\eta^4} \int_1^\eta \frac{\int_1^s \sqrt{1 - k_1^2 s^4} ds}{\sqrt{1 - k_1^2 \eta^4}} d\eta. \quad (45)$$

Полученное решение будет справедливо до некоторого момента t_* , когда за фронтом волны радиальное напряжение станет равным P_* —величине напряжения перед фронтом. В этот момент ударная волна уплотнения перестанет существовать и движение среды остановится.

Չ. Ե. Կուկուջանով

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԽՏԱՑՎՈՂ ՄԱԾՈՒՑԻԿԱ-ՊԼԱՍՏԻԿ
ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգվածում լուծվում է հարվածային ալիքների տարածման խնդիրը ալյալիսի միջավայրում, որի խտությունը որոշակի ճնշման դեպքում փոխվում է թուխքով: Ենթադրվում է, որ միջավայրը խտացումից հետո դառնում է անսեղմելի և ենթարկվում է մածուցիկա-սլաքային հոսքի օրենքներին:]]

Արտածված են դիտարկվող միջավայրի շարժման հավասարումները ֆնդալին և գլանալին սիմետրիայի դեպքում: Այդ հավասարումներն ինտեգրվում են թվային եղանակով: Ստացված արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների ձևով:

Ուսումնասիրված է մածուցիկության գործակցի ազդեցությունը միջավայրի շարժման բնույթի վրա:

Արտածված հավասարումները լուծված են, ենթադրելով, որ մածուցիկության ուժերը, իններցիոն ուժերի հետ համեմատած, փոքր են: Լուծումը որոնված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի աստիճանների: Ցույց է տրված, որ այդ շարքի բոլոր գործակիցները կարող են հաշվվել կվադրատորաններով: Բերված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Зволлинский Н. В. и Степаненко И. З. К динамике грунтовых масс, ДАН СССР т. ХСV, № 4, 1954 г.
2. Компанеев А. С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде, ДАН СССР т. 109, № 1, 1956 г.
3. Григорян С. С. О постановке динамических задач для идеальных пластических сред, ПММ т. XIX, в. 6, 1955 г.
4. Кукуджанов В. Н. Распространение сферических волн в упруго-вязко-пластической среде, Изв. Высшей школы 1958 г., № 2. Машиностроение.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Госиздат. Тех.-теор. лит. 1950 г.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян

Напряженное состояние в сжатых железобетонных
элементах в условиях неустановившейся ползучести
и усадки бетона

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния в сжатых железобетонных элементах в условиях неустановившейся ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации.

На основе нелинейных уравнений теории ползучести, развитой в работе [1], рассматриваемая задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. При решении последнего пользуемся методом, данным в работе [2].

Особенность этого метода решения заключается в том, что в качестве первого приближения берется не упругое решение задачи, [3, 4], а решение соответствующей задачи линейной ползучести. Именно благодаря этой особенности значительно усиливается быстрота сходимости последовательных приближений.

В качестве приложения этого метода здесь приводится решение следующих двух задач: 1) определение напряженного состояния в сжатых железобетонных элементах и 2) определение усадочных напряжений в симметрично армированных железобетонных элементах.

Решение этих задач в линейной постановке было дано в работе [1].

§ 1. Напряженное состояние в сжатых
железобетонных элементах

Рассмотрим железобетонный элемент, находящийся под действием постоянной центральной сжимающей силы N , приложенной в возрасте бетона $t = \tau_1$. Допустим, что рассматриваемый элемент армирован продольными стержнями и поперечными хомутами. Влияние усадки пока не будем учитывать.

Напряжение в бетоне, с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации, обозначим через $\sigma_b(t)$, а напряжение в арматуре — через $\sigma_a(t)$.

Эти напряжения в любой момент времени t должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\sigma_a(t) F_a + \sigma_b(t) F_b = N, \quad (1.1)$$

где F_a и F_b — соответственно площади поперечного сечения арматуры и бетона.

Как известно [1], между полной продольной деформацией $\epsilon_b(t)$ и напряжением $\sigma_b(t)$, с учетом нелинейной ползучести материала, существует следующая зависимость:

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.2)$$

где τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки,
 t — время,

$E(t)$ — модуль мгновенной деформации бетона, изменяющейся во времени,

$C(t, \tau)$ — мера ползучести бетона при одноосном напряженном состоянии,

$F[\sigma_b(t)]$ — некоторая функция от $\sigma_b(t)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести бетона, определяемая из опыта в результате испытания на простую ползучесть, нормированная условием $F(1) = 1$.

Из условия совместной работы арматуры и бетона имеет место равенство их относительных продольных деформаций:

$$\epsilon_b(t) = \epsilon_a(t). \quad (1.3)$$

С другой стороны, имеем:

$$\epsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}, \quad (1.4)$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Из соотношения (1.2), пользуясь равенствами (1.3), (1.4) и (1.1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_b(t) = & \frac{N}{F_b[1 + \mu m(t)]} + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ & - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t F[\sigma_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\mu = \frac{F_a}{F_b}$ — процент армирования,

$m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени.

Таким образом, задача определения напряжений в центрально-сжатых железобетонных элементах в условиях нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации сводится к решению

нелинейного интегрального уравнения (1.5). Напряжения в арматуре определяются из уравнения равновесия (1.1).

Пусть $F[\sigma_s(t)]$ является степенной функцией вида

$$F[\sigma_s(t)] = \alpha \sigma_s(t) + \beta [\sigma_s(t)]^n, \quad (n > 0), \quad (1.6)$$

где α, β, n — постоянные параметры, определяемые из опыта и удовлетворяющие условиям

$$F(1) = \alpha + \beta = 1.$$

Как показывают экспериментальные исследования [5], степенным законом (1.6) достаточно хорошо описываются опытные кривые ползучести в широком диапазоне изменения напряжений для бетона.

Очевидно, что если в зависимости (1.6) параметр β является малым, то функция $F[\sigma_s(t)]$ будет описывать кривые ползучести бетона со слабой нелинейностью.

Подставляя (1.6) в (1.5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) = & \frac{N}{F_s[1 + \mu m(t)]} + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \right. \\ & \left. + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_s(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если модуль мгновенной деформации бетона постоянен и равен E_0 , то соотношение (1.7) примет следующий вид

$$\sigma_s(t) = \frac{N}{F_s(1 + \mu m_0)} + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \int_{\tau_1}^t (\alpha \sigma_s(\tau) + \beta [\sigma_s(\tau)]^n) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.8)$$

где $m_0 = \frac{E_a}{E_0}$.

Пользуясь методом, развитым в работе [2], будем искать решение уравнения (1.7) в следующей форме:

$$\sigma_s(t) = \sigma_s^{(0)}(t) + \beta \sigma_s^{(1)}(t) + \beta^2 \sigma_s^{(2)}(t) + \dots \quad (1.9)$$

Подставляя это выражение в (1.7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\begin{aligned} \sigma_s^{(0)}(t) = & \frac{N}{F_s[1 + \mu m(t)]} + \\ & + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(0)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\sigma_b^{(1)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b^{(1)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_b^{(0)}(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.11)$$

$$\sigma_b^{(2)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b^{(2)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{n \cdot \mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_b^{(0)}(\tau)]^{n-1} \sigma_b^{(1)}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.12)$$

Таким образом, решение нелинейного интегрального уравнения (1.7) сводится к решению некоторой совокупности рекуррентных линейных интегральных уравнений (1.10), (1.11), (1.12)...

Займемся решением этих уравнений. Предварительно запишем уравнения (1.10) в форме

$$\sigma_b^{(0)}(t) = \psi_0(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_b^{(0)}(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (1.13)$$

где положено

$$K(t, \tau) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right], \quad (1.14)$$

$$\psi_0(t) = \frac{N}{F_b [1 + \mu m(t)]}. \quad (1.15)$$

Если принять, что мера ползучести бетона определяется зависимостью

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\eta(t-\tau)}], \quad (1.16)$$

то решение интегрального уравнения (1.13) можно представить в следующем виде

$$\sigma_b^{(0)}(t) = \sigma_b(\tau_1) \left[1 - \alpha \frac{\mu E_a \gamma}{1 + \mu m(\tau_1)} \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \right]. \quad (1.17)$$

Здесь:

$$\eta(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau} \left[\gamma \left[1 + \alpha \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(x)} \varphi(x) \right] + \frac{\mu m'(x)}{1 + \mu m(x)} \right] dx, \quad (1.18)$$

$\sigma_b(\tau_1) = \frac{N}{F_b [1 + \mu m(\tau_1)]}$ — напряжения в бетоне в начальный момент приложения нагрузки $t = \tau_1$,

$\varphi(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция, характеризующая степень изменения меры ползучести $C(t, \tau)$ в зависимости от возраста материала τ ;

γ — постоянный параметр, определяемый из опыта.

Положим, что модуль мгновенной деформации бетона постоянен, т. е. $E(t) = E_0$, а $\varphi(\tau)$ выражается зависимостью [1]

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0, \quad (1.19)$$

где A_1, C_0 — некоторые постоянные параметры, характеризующие интенсивность меры ползучести бетона соответственно в его молодом и старом возрасте.

Тогда решение уравнения (1.13) можно представить в форме

$$\sigma_k^{(0)}(t) = \sigma_k(\tau_1) H_0(t, \tau_1), \quad (1.20)$$

где положено

$$H_0(t, \tau_1) = 1 - \alpha \frac{\mu E_a \gamma}{1 + \mu m_0} \varphi(\tau_1) \frac{e^{\gamma \tau_1 p}}{r^{1-p}} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)], \quad (1.21)$$

причем

$$p = \alpha \frac{\mu E_a \gamma A_1}{1 + \mu m_0}, \quad r = \gamma \left(1 + \alpha \frac{\mu E_a C_0}{1 + \mu m_0} \right), \quad (1.22)$$

а

$$\Phi(\zeta, p) = \int_0^{\zeta} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau \quad (1.23)$$

представляет собой неполную гамма-функцию, которая табулирована.

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Только для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что $E(t) = E_0 = \text{const}$. Тогда интегральное уравнение (1.11) можно переписать в следующем виде

$$\sigma_k^{(1)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_k^{(1)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_k(\tau_1)]^n H_1(t, \tau_1), \quad (1.24)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau},$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.25)$$

Решение уравнения (1.24) будет

$$\sigma_0^{(1)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_0(\tau_1)]^n \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right]. \quad (1.26)$$

Здесь $R(t, \tau, \alpha)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t, \tau)$, которая при (1.16), как известно, определяется формулой

$$R(t, \tau, \alpha) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta'^2(\tau) + \eta''(\tau) - \gamma\eta'(\tau)] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\eta(x)} dx, \quad (1.27)$$

где

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \alpha \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \left(\frac{A_1}{x} + C_0 \right) \right] dx. \quad (1.28)$$

Если удовлетвориться только вторым приближением, то из (1.9) следует, что решение основного нелинейного интегрального уравнения (1.7), при постоянном модуле мгновенной деформации, можно представить в следующем виде

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(\tau_1) \left\{ H_0(t, \tau_1) + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_1(\tau_1)]^{n-1} \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] \right\}. \quad (1.29)$$

Аналогичным образом можно получить остальные приближения. Например, если модуль мгновенной деформации постоянен, то третье приближение будет иметь вид

$$\sigma_0^{(2)}(t) = n \left[\frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \right]^2 [\sigma_0(\tau_1)]^{2n-1} \left[H_2(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right], \quad (1.30)$$

где

$$H_2(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^{n-1} \left[H_1(\tau, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x, \alpha) H_1(x, \tau_1) dx \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.31)$$

Таким образом, если удовлетвориться третьим приближением, то решение уравнения (1.9) будет иметь вид

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(\tau_1) \left\{ H_0(t, \tau_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\sigma_b(\tau_1)]^{n-1} \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \\
& + \beta^2 n \left[\frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \right]^2 [\sigma_b(\tau_1)]^{2(n-1)} \left[H_2(t, \tau_1) + \right. \\
& \left. + \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] \Big\} + O(\beta^3). \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Если известно напряжение в бетоне в сжатых железобетонных элементах, то напряжение в арматуре определяется из уравнения равновесия

$$F_b \sigma_b(t) + F_a \sigma_a(t) = N. \quad (1.33)$$

В качестве приложения вышеизложенного метода рассмотрим численный пример.

Как будут изменяться во времени напряжения $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ в сжатом железобетонном элементе с учетом нелинейной ползучести бетона, если за меру ползучести бетона принято следующее выражение:

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) [1 - e^{-0,026(t-\tau)}] 10^{-5} \text{ кг/см}^2,$$

причем $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E = E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 1\%$, $\tau_1 = 28 \text{ дням}$, $\sigma_b(\tau_1) = 40 \text{ кг/см}^2$, $F[\sigma_b(t)] = \sigma_b(t) + \beta [\sigma_b(t)]^2$.

Ниже приводятся две таблицы. В этих таблицах даются численные значения коэффициента затухания бетона и арматуры

$$H_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}, \quad H_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$$

в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях.

Очевидно, что значению $\beta = 0$ соответствует задача определения напряжений в центрально-сжатых железобетонных элементах в условиях линейной ползучести, рассмотренная в работе [1], а остальным значениям β соответствует задача определения напряжений в условиях нелинейной ползучести квадратичным законом нелинейности.

Из данных, приведенных в табл. 1 и 2, следует, что 1) начальные напряжения в бетоне $\sigma_b(\tau_1)$ с течением времени быстро затухают, а в арматуре $\sigma_a(\tau_1)$ быстро возрастают, причем эти изменения существенно зависят от меры нелинейности β : чем больше β , тем быстрее происходит затухание напряжения в бетоне и возрастание напряжения в арматуре и тем значительнее разница между решением

Таблица 1

Численные значения коэффициента $H_b(t)$ в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях

t	Первое приближение	Второе приближение				Третье приближение		
	$\beta=0,00$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	
45	0,93	0,9275	0,905	0,681	0,9275	0,9052	0,697	
90	0,86	0,8554	0,814	0,398	0,8554	0,8142	0,443	
180	0,84	0,835	0,792	0,365	0,835	0,793	0,418	
360	0,83	0,825	0,783	0,355	0,825	0,784	0,408	
1080	0,83	0,825	0,783	0,355	0,825	0,784	0,408	

Таблица 2

Численные значения коэффициента $H_a(t)$ в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях

t	Первое приближение	Второе приближение				Третье приближение		
	$\beta=0,00$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	$\beta=0,001$	$\beta=0,01$	$\beta=0,1$	
45	1,65	1,652	1,672	2,07	1,652	1,672	2,112	
90	2,40	2,402	2,431	3,102	2,402	2,431	3,172	
180	2,63	2,633	2,659	3,38	2,633	2,659	3,455	
360	2,66	2,663	2,690	3,41	2,663	2,690	3,485	
1080	2,66	2,663	2,690	3,41	2,663	2,690	3,485	

нелинейной и линейной задачи теории ползучести для сжатого железобетонного элемента. При $\beta = 0,1$ численное значение $\varepsilon_s(t)$ получается почти в 2 раза меньше, а $\sigma_a(t)$ в 1,5 раза больше чем соответствующие значения $\varepsilon_s(t)$ и $\sigma_a(t)$ при линейной ползучести; 2) при малых β , то-есть: $\beta \leq 0,01$, можно ограничиваться только вторым приближением, так как оно дает достаточно хорошие результаты.

§ 2. Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах

Рассмотрим симметрично армированный железобетонный элемент. Обозначим усадочные напряжения в бетоне $\varepsilon_b(t)$, а в арматуре $\sigma_a(t)$. Эти напряжения при любом t , в силу отсутствия внешних сил, должны удовлетворять следующему уравнению равновесия

$$F_a \sigma_a(t) + F_b \varepsilon_b(t) = 0, \quad (2.1)$$

где F_a и F_b — соответственно площади поперечного сечения арматуры и бетона.

Функцию $S_a(t)$, характеризующую закон изменения процесса усадки, примем в следующей форме [1]:

$$S_a(t) = S_0 \cdot (e^{-\alpha_0 t_1} - e^{-\alpha_0 t}), \quad (2.2)$$

где S_0 — наибольшее значение усадки, величина которой устанавливается для данного бетона на основании опытных данных;

α_0 — показатель, характеризующий скорость нарастания усадки данного бетона во времени;

t_1 — возраст бетона, рассчитываемый от момента его усадки.

Полная продольная деформация бетона $\varepsilon_b(t)$ с учетом его ползучести согласно [1] будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(t) = S_a(t) + \frac{\sigma_b(t)}{E(t)} - \int_{t_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ - \int_{t_1}^t F[\varepsilon_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней бетона следует

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_a(t). \quad (2.4)$$

Пользуясь этим соотношением и замечая, что

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a} \quad (2.5)$$

приведем выражение (2.3) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_b(t) = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{t_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \\ + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{t_1}^t F[\varepsilon_b(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где E_a — модуль деформации арматуры;

μ — процент армирования;

$m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени.

Таким образом, задача определения усадочных напряжений бетона в симметрично армированных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона и изменяемости его модуля мгновенной деформации сводится к решению интегрального уравнения (2.6). Напряжения в арматуре определяются условием равновесия (2.1).

Примем, что $F[z_0(t)]$ является степенной функцией вида (1.6). Тогда, подставив (1.6) в (2.6), получим

$$\sigma_2(t) = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t z_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + \beta \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [z_0(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.7)$$

Если модуль мгновенной деформации постоянен и равен E_0 , то соотношение (2.7) примет следующий вид

$$\sigma_2(t) = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \int_{\tau_1}^t [\alpha z_0(\tau) + \beta [z_0(\tau)]^n] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.8)$$

Для решения уравнения (2.7) положим, как и в § 1,

$$\sigma_2(t) = \sigma_2^{(0)}(t) + \beta \sigma_2^{(1)}(t) + \beta^2 \sigma_2^{(2)}(t) + \dots \quad (2.9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\sigma_2^{(0)}(t) = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_a(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_2^{(0)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau, \quad (2.10)$$

$$\sigma_2^{(1)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_2^{(1)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_2^{(0)}(\tau)]^n \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.11)$$

$$\sigma_2^{(2)}(t) = \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_2^{(2)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau) \right] d\tau + n \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t [\sigma_2^{(0)}(\tau)]^{n-1} \sigma_2^{(1)}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.12)$$

Применяя вышеизложенный метод, аналогичным образом получим решения интегральных уравнений (2.10), (2.11), (2.12). Так, например, решение уравнения (2.10) будет

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(0)}(t) = & - \frac{\mu E_a \alpha_0}{1 + \mu m(\tau_1)} S_0 e^{-\tau_1 t} \int_{\tau_1}^t e^{-\tau_1 \tau} d\tau - \\ & - \int_{\tau_1}^t e^{-\tau_1 \tau} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} [S_n(z) + \gamma S_n'(z)] \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(z)} e^{\tau_1(z)} dz, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\tau_1(\tau)$ и $S_n(t)$ заданные функции, определяемые соответственно формулами (1.18) и (2.2).

Если модуль мгновенной деформации постоянен, то, пользуясь функцией влияния $\Phi(\xi, \rho)$, можно решению уравнения (2.10) придать следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(0)}(t) = & - \frac{\mu E_a \alpha_0 S_0}{1 + \mu m_0} \frac{e^{(\tau_1 - \alpha_0)t}}{r^{1-\rho}} \left[\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho) \right] - \\ & - \frac{\mu E_a \alpha_0 (\gamma - \alpha_0)}{1 + \mu m_0} S_0 \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\tau_1 \tau} d\tau}{\tau^\rho} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(\tau_1 - \alpha_0)x} x^\rho dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тогда решение уравнения (2.11) будет

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(1)}(t) = & \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} [\psi_1(t)] + \int_{\tau_1}^t \psi_1(\tau) \left[\gamma - \tau_1'(\tau) + \right. \\ & \left. + [\tau_1''(\tau) + \tau_1'''(\tau) - \gamma \tau_1'(\tau)] e^{\tau_1(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\tau_1 x} dx \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\tau_1(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \alpha \tau(\tau) \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} \right] d\tau, \quad (2.16)$$

$$\psi_1(t) = \int_{\tau_1}^t [\sigma_a^{(0)}(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.17)$$

Если ограничиваться только вторым приближением, то решение основного нелинейного интегрального уравнения (2.7) можно представить в следующем виде

$$\sigma_a(t) = \sigma_a^{(0)}(t) + \beta \sigma_a^{(1)}(t) + O(\beta^2), \quad (2.18)$$

где $\sigma_a^{(0)}(t)$ и $\sigma_a^{(1)}(t)$ при постоянном модуле мгновенной деформации определяются формулами (2.14) и (2.15).

Аналогичным образом можно получить и остальные приближения.

В качестве приложения рассмотрим численный пример.

Определить значения усадочных напряжений бетона и арматуры, если функции $C(t, \tau)$ и $S_a(t)$ даны в следующем виде

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) [1 - e^{0,023(t-\tau)}] 10^{-5} \text{ кг/см}^2,$$

$$S_a(t) = S_0 (e^{-0,011t_1} - e^{-0,011t}),$$

$$S_0 = 2 \cdot 10^{-4}$$

причем $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E = E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$, $\tau_1 = 1$ дню,

$$F[z_b(t)] = \alpha z_b(t) + \beta [z_b(t)]^2.$$

Предварительно запишем выражения для усадочных напряжений без учета ползучести бетона. Согласно (2.8) и (2.1) они будут иметь следующий вид

$$\sigma_{bs}(t) = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m_0} S_a(t)$$

$$\sigma_{as}(t) = - \frac{E_a}{1 + \mu m_0} S_a(t).$$

Вычислим сначала численные значения усадочных напряжений в бетоне $\sigma_{bs}(t)$ и арматуре $\sigma_{as}(t)$ без учета ползучести бетона, а затем соответствующие значения этих напряжений с учетом ползучести. На основании этих значений вычислим коэффициенты затухания усадочных напряжений в бетоне и арматуре для различных моментов времени, пользуясь формулами

$$H_b(t) = \frac{\sigma_b^*(t)}{\sigma_b(t)}, \quad H_a(t) = \frac{\sigma_a^*(t)}{\sigma_a(t)},$$

где $\sigma_b^*(t)$ и $\sigma_a^*(t)$ — представляют собой усадочные напряжения бетона и арматуры с учетом линейной ползучести, а $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ — соответственно усадочные напряжения при нелинейной ползучести бетона.

В табл. 3 и 4 приводятся численные значения усадочных напряжений в бетоне и арматуре без учета ползучести бетона и с учетом ползучести бетона в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом, втором и третьем приближениях.

Таблица 3

Численные значения усадочных напряжений в бетоне и коэффициента затухания при $\beta = 0,1$

t	$\sigma_{sh}(t)$	$\gamma_b(t)$			$H_b(t)$		
		первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.	первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.
7	-0,58311	-0,54350	-0,54552	-0,54554	1	1,00372	1,00375
14	-1,21652	-1,08130	-1,09182	-1,09197	1	1,00972	1,00986
28	-2,34590	-1,94675	-1,99108	-1,99279	1	1,02277	1,02365
90	-5,69981	-4,16999	-4,59374	-4,66864	1	1,10162	1,11958
360	-8,95383	-6,13370	-7,33110	-7,78243	1	1,19522	1,26879

Таблица 4

Численные значения усадочных напряжений в арматуре и коэффициента затухания при $\beta = 0,1$

t	$\sigma_{as}(t)$	$\sigma_a(t)$			$H_a(t)$		
		первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.	первое приближ.	второе приближ.	третье приближ.
7	19,437	18,1167	18,184	18,1845	1	1,00372	1,00375
14	40,5507	36,0435	36,394	36,39903	1	1,00972	1,00986
28	78,1967	64,8917	66,3693	66,4364	1	1,02277	1,02365
90	189,9937	138,999	153,125	155,6215	1	1,10162	1,11958
360	298,461	204,457	244,37	259,4145	1	1,19522	1,26879

Из данных, приведенных в табл. 3 и 4, следует, что при $\beta = 0,1$ можно ограничиваться только первым приближением, так как оно дает достаточно хорошие результаты. Исследование показывает, что при $\beta < 0,01$ численные значения первых и вторых приближений почти совпадают.

Ереванский государственный
университет

Поступило 15 VI 1953

Ն. Խ. Հարությունյան, Մ. Մ. Մանուկյան

ՍԵՂՄՎԱԾ ԵՐԿԱՅԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ
ԲԵՏՈՆԻ ՈՉ ՀԱՍՏԱՏՎԼԾ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԿԾԿՍԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը նվիրված է սեղմված երկաթբետոն էլեմենտների լարվածային վիճակի հետազոտությանը, երբ բետոնը զանրված է ոչ հաստատված սողքի պայմաններում և բետոնի ակնթարթային զեֆորմացիայի մոդուլը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է:

Սողքի ոչ զծալին տեսության հիման վրա, որը զարգացված է [1] աշխատության մեջ, քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է վերաբերյալ ոչ-զծալին ինտեգրալ համաարմանը, որի լուծման համար օգտագործվում է [2] աշխատության մեջ շարադրված մեթոդը:

Այս մեթոդի առանձնահատկությունն այն է, որ որպես առաջին մոտավորության վերցվում է ոչ ին խնդրի առաջական լուծումը, ինչպես աղբյուրներում է կատարել, սողքի ոչ-զծալին տեսության խնդրի Պիկարի հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով լուծելիս, այլ որպես առաջին մոտավորություն վերցվում է զծալին սողքի համապատասխան խնդրի լուծումը: Այս առանձնահատկության շնորհիվ զգալիորեն ուժեղանում է հաջորդական մոտավորությունների դոգամիտության արագացումը:

Որպես այս մեթոդի կիրառություն այստեղ բերվում է հետևյալ երկու խնդիրների լուծումը՝

1, Սկզբված երկաթբետոն էլեմենտների լարվածալին փրճակը, 2. Համաչափ երկաթապատված երկաթբետոն էլեմենտի կծկման լարումները՝ քիտոնի ոչ-զծալին սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխման հաշվառումով:

Այս խնդրի լուծումը քիտոնի զծալին սողքի հաշվառումով արված է [1] աշխատության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1957.
2. Александриян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ том XXII, вып. 5, 1958.
3. Розовский М. И. Полуаналитический способ решения некоторых задач теории ползучести. Известия АН Армянской ССР*, серия физ.-мат. наук, № 5, 1956.
4. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Ползучесть составных цилиндрических труб. Известия АН Армянской ССР*, серия физ.-мат. наук, том X, № 6, 1957.
5. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия ВНИИГ*, том 49, 1933.

Н. А. Корхмазян

Переходное излучение при наклонном падении заряда

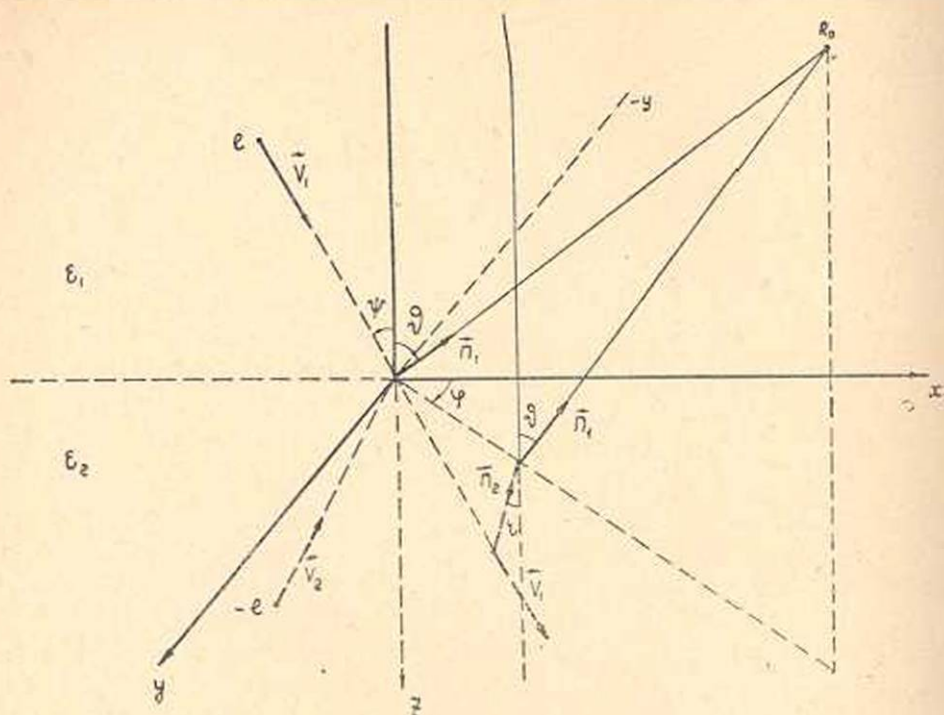
Как известно [1], при прохождении заряженной частицы через границу раздела двух сред возникает излучение, спектр которого простирается от самых длинных волн до ультрафиолетовых включительно. Подсчет интенсивности излучения в единичном телесном угле в единичном интервале частот в данном направлении был сделан впервые В. Гинзбургом и И. Франком [1], а в дальнейшем — рядом других авторов [2], [3]. В настоящей работе приводится решение той же задачи в более общем случае, а именно, когда частица переходит плоскую границу раздела двух произвольных сред при произвольном угле падения*. Задача решена методом изображения заряда [3], дающим возможность более наглядного и быстрого достижения цели.

Итак, пусть заряженная частица с зарядом e и со скоростью V падает под углом Ψ к перпендикуляру, восстановленному к плоской границе раздела двух произвольных сред, характеризующихся комплексными диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 . Плоскость, определяемая скоростью падающей частицы и перпендикуляром восстановленным к плоской границе раздела двух сред в точке перехода частицы, примем за плоскость XZ , а оси координат выберем, как указано на фиг. 1. Начало координат помещено в точке столкновения частицы и ее изображения.

Нашей задачей будет определение интенсивности переходного излучения в единичном телесном угле, в единичном интервале частот в точке (R_0, φ, θ) первой среды (фиг. 1) при больших R_0 (волновая зона) и при условии $(\Psi < \frac{\pi}{2})$. Сохраняя ход решения таким же, что и в [3], мы должны написать потенциалы Льенара-Вихерта, созданные движущимися заряженной частицей и ее изображением.

Обозначая скорость заряженной частицы и ее изображения соответственно через $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ ($|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$) для вектор-потенциала не-

* В существующих работах рассматривается перпендикулярное падение заряженной частицы на плоскую границу раздела двух произвольных сред.



Фиг. 1.

посредственно до столкновения в точке (R_0, φ, θ) первой среды, можем написать:

$$\vec{A}_1 = \frac{e\vec{V}_1}{cR_0[1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1)]} + \frac{(-ef) \cdot \vec{V}_2}{cR_0[1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2)]}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (1)$$

Потенциал же непосредственно после столкновения в той же точке будет (отраженные волны в этом случае в первую среду не попадут):

$$\vec{A}_2 = \frac{e\vec{V}_1}{cR_0[1 - \sqrt{\varepsilon_2} \beta \cdot \cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1)]} \cdot \frac{V\sqrt{\varepsilon_1}}{V\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot (1 + f). \quad (2)$$

Здесь f , как и в [3], — коэффициент отражения для волн, отраженных в первой среде, фактор $\frac{V\sqrt{\varepsilon_1}}{V\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot (1 + f)$ есть коэффициент преломления Френеля для амплитуды волн, попадающих из второй среды в первую, $\vec{n}_1 = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$, а $\vec{n}_2$ — единичный вектор, имеющий направление луча, исходящего из заряда (после проникновения его во вторую среду), который, преломляясь на границе раздела двух сред, попадет в точку $\vec{R}_0$. Из приведенной фигуры видно, что:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{V}_1, X) &= \sin \Psi & \cos(\vec{V}_2, X) &= \sin \Psi \\ \cos(\vec{V}_1, Y) &= 0 & \cos(\vec{V}_2, Y) &= 0 \\ \cos(\vec{V}_1, Z) &= \cos \Psi & \cos(\vec{V}_2, Z) &= -\cos \Psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая это, потенциалы (1) и (2) [можно написать в компонентах:

$$\begin{aligned} A_{1,x} &= \frac{eV \cdot \sin \Psi}{cR_0} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1)} - \frac{f}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2)} \right], \\ A_{1,z} &= \frac{eV \cdot \cos \Psi}{cR_0} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1)} + \frac{f}{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2)} \right], \\ A_{2,x} &= \frac{eV \cdot \sin \Psi}{cR_0} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_2} \beta \cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1)} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot (1+f), \\ A_{2,z} &= \frac{eV \cdot \cos \Psi}{cR_0} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon_2} \beta \cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1)} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot (1+f), \\ A_{1,y} &= A_{2,y} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользовавшись выражением для фурье-компоненты магнитного поля

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{2\pi c} \{ [\vec{A}_2 \vec{n}_2] - [\vec{A}_1 \vec{n}_1] \}, \quad (5)$$

формулой для излучения при столкновении быстрых заряженных частиц

$$W_\omega(\theta, \varphi) = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot c \cdot |\vec{H}_\omega|^2 \cdot R_0^2 \quad (6)$$

(см. работу [3]) и выражениями для направляющих косинусов единичных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, можно подсчитать интересующее нас излучение*. Направляющие косинусы для $\vec{n}_1$ будут:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}_1, X) &= \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ \cos(\vec{n}_1, Y) &= \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ \cos(\vec{n}_1, Z) &= -\cos \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

а для компонентов $\vec{n}_2$, учитывая закон преломления $\frac{\sin r}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, получим:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}_2, X) &= \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \\ \cos(\vec{n}_2, Y) &= \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \\ \cos(\vec{n}_2, Z) &= -\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Знак перед корнем в $\cos(\vec{n}_2, Z)$ выбран в соответствии с тем, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ вектор $\vec{n}_2$ должен совпасть с вектором $\vec{n}_1$.

* Несомненно учитывать, что точки преломления лучей находятся в окрестности начала координат.

Подставляя далее (4), (7) и (8) в (5), а потом (5) в (6), получим решение поставленной задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W_{\omega}(\vartheta, \varphi) = & \frac{e^2 \sqrt{\varepsilon_1} V^2}{4 \pi^2 c^3} \left| \sin \vartheta \left[\frac{1+f}{1-\sqrt{\varepsilon_2} \beta \cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \right. \right. \\
 & - \frac{f}{1-\sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2)} - \frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1)} \left. \right] (\vec{i} \sin \varphi \cos \Psi - \\
 & - \vec{j} \cos \varphi \cos \Psi - \vec{k} \sin \varphi \sin \Psi) - \\
 & - \vec{j} \sin \Psi \left[\frac{1+f}{1-\sqrt{\varepsilon_2} \beta \cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1)} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \vartheta} + \right. \\
 & + \frac{f \cos \vartheta}{1-\sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2)} - \frac{\cos \vartheta}{1-\sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1)} \left. \right] - \\
 & \left. - \vec{k} \frac{2 \cdot f \sin \vartheta \sin \varphi \sin \Psi^2}{1-\sqrt{\varepsilon_1} \beta \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2)} \right| \quad (9)
 \end{aligned}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы соответственно по осям X, Y, Z , а вместо косинусов в знаменателях следует брать:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1) = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Psi - \cos \vartheta \cdot \cos \Psi,$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{V}_2) = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Psi + \cos \vartheta \cdot \cos \Psi,$$

$$\cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1) = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Psi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \vartheta} \cdot \cos \Psi. \quad (10)$$

Помня, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $f = 0$ и $\cos(\vec{n}_2, \vec{V}_1) = \cos(\vec{n}_1, \vec{V}_1)$, из (9) можно убедиться, что переходное излучение в этом случае исчезает. Из той же формулы (9) не трудно также видеть, что при $\Psi = 0$ (перпендикулярное падение) получается формула (7) работы [3] или соответствующая формула из [1].

Заметим, что полученная нами формула (9) верна в том приближении, в каком направления лучей в первой среде, е. посланные к точке $(R_0, \varphi, \vartheta)$, непосредственно до и после столкновения, можно считать совпадающими с направлением радиуса-вектора, проведенного из начала координат к той же точке (фиг. 1). Учитывая, что столкновение в основном происходит при расстояниях между зарядом и ее изображением порядка атомных размеров a , оценим это приближение. Координаты заряда в момент столкновения будут $(-x, 0, a)$, а координаты наблюдаемой точки обозначим через (R_{0x}, R_{0y}, R_{0z}) .

Расстояние между этими точками будет:

$$R = \sqrt{(R_{0x} + x)^2 + R_{0y}^2 + (R_{0z} - a)^2}$$

и вышеуказанное приближение гласит: $R \simeq R_0$. При $a \ll |R_0|$, т. е. $a \ll R_0 \cos \vartheta$ или $\cos \vartheta \simeq 10^2 \cdot \frac{a}{R_0} \simeq 10^{-4}$ (для $a \simeq 10^{-8} \text{ см}$ и $R_0 \simeq 10^{-1} \text{ см}$), получим: $\vartheta \lesssim 90^\circ - 0,006^\circ$ причем R принимает следующий вид:

$$R \simeq \sqrt{x^2 + 2R_0 \cdot x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + R_0^2},$$

где $x \simeq a \cdot \operatorname{tg} \Psi$. Для выполнения условий $R \simeq R_0$ необходимо, чтобы $a \operatorname{tg} \Psi \ll R_0$, откуда для Ψ получаем такой же предел, что и для ϑ : $\Psi \lesssim 90^\circ - 0,006^\circ$. Таковы границы применимости формулы (9).

Не трудно заметить, что при переходе к пределу $\Psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, с од-

ной стороны $n_{1,y} \rightarrow 0$, $n_{1,z} \rightarrow 0$, и с другой, или $\vec{A}_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ (полное внутреннее отражение), или же $n_{2,y} \rightarrow 0$, $n_{2,z} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1^*$. Учитывая эти обстоятельства и принимая во внимание формулы (4), (5) и (6), можно заключить, что при таком предельном случае излучение исчезает.

Заметим еще, что формула (9) справедлива вдали от нулей в знаменателях. Условия равенства нулю знаменателей совпадают с условиями черенковского излучения в первой и во второй средах.

Рассмотрим подробнее частный случай двух сред: вакуум-идеальный проводник. Если падение заряженной частицы происходит из вакуума в идеальный проводник под углом Ψ , то интенсивность переходного излучения будет (подставим в (9) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \infty$ и $f = 1$):

$$W_\omega(\vartheta, \varphi) = \frac{e^2 V^2}{4\pi^2 c^3} \cdot \frac{4 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \Psi +}{[1 - \beta(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Psi + \cos \vartheta \cdot \cos \Psi)]^2} \times \\ \times \frac{\beta \cdot \sin 2\Psi [\beta \cdot \sin 2\Psi (1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi) - 4 \cdot \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \cos \Psi]}{[1 - \beta(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Psi - \cos \vartheta \cdot \cos \Psi)]^2}. \quad (11)$$

Эта функция для произвольных допустимых Ψ и ϑ , в зависимости от φ , получает экстремальные значения в плоскости падения частицы, т. е. при условии $\sin \varphi = 0$. В этом случае выражение (11) принимает следующий вид:

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{e^2 V^2}{\pi^2 c^3} \cdot \cos^2 \Psi \left\{ \frac{\sin \vartheta - \beta \sin \Psi}{[1 + \beta \cos(\vartheta + \Psi)] \cdot [1 - \beta \cos(\vartheta - \Psi)]} \right\}^2, \quad \varphi = 0; \\ W_\omega(\vartheta) = \frac{e^2 V^2}{\pi^2 c^3} \cdot \cos^2 \Psi \left\{ \frac{\sin \vartheta + \beta \sin \Psi}{[1 - \beta \cos(\vartheta + \Psi)] \cdot [1 + \beta \cos(\vartheta - \Psi)]} \right\}^2, \quad \varphi = \pi. \quad (12)$$

* Здесь начала векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ уже не находятся в окрестности начала координат, а удаляются от него до бесконечности совместно с $\Psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Так как $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, то максимальные значения излучения в плоскости падения (XZ) определяются из следующих условий

$$\begin{aligned}\sin \vartheta &= \beta \sin \Psi \pm \frac{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta^2 \sin^2 \Psi)}}{\beta}, & \varphi = 0; \\ \sin \vartheta &= -\beta \sin \Psi + \frac{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta^2 \sin^2 \Psi)}}{\beta}, & \varphi = \pi,\end{aligned}\quad (13)$$

а в направлении $\sin \vartheta = \beta \sin \Psi$, $\varphi = 0$, излучение отсутствует. Когда вторые слагаемые в выражениях (13) больше первых, т. е. при $\beta \sin \Psi < \sqrt{1-\beta^2}$, получается по одному максимуму по обе стороны оси Z . В этом случае, конечно, максимум может быть один, или вообще отсутствовать (для малых β правые части (13) становятся больше единицы). Если же первый член больше второго, $\beta \sin \Psi > \sqrt{1-\beta^2}$, то правее оси Z получается либо два максимума, либо один, в согласии с тем: меньше или больше единицы правая часть первой из формул (13), взятая со знаком плюс (фиг. 2).

На этих графиках (построенных при помощи формул (12)) даны угловые распределения в произвольных масштабах (одинаковых для всех кривых) для интенсивности переходных излучений, в зависимости от угла падения Ψ и от β . Ветви (a, a_1), (b, b_1) и (c, c_1) соответствуют значениям $\beta = 0,9$ и $\Psi = 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$, а ветви (d, d_1) — значениям $\beta = 0,5$ и $\Psi = 15^\circ$. (Радиальные размеры ветвей b_1 и c_1 уменьшены в 2 раза).

На фиг. 3, для примера, приведены еще три графика распределения интенсивности по углам (для этих кривых масштабы те же, что и на фиг. 2), в плоскости YZ . Кривые m, n, l соответствуют значениям $\beta = 0,9$, $\Psi = 15^\circ$, $\beta = 0,95$, $\Psi = 45^\circ$; $\beta = 0,5$, $\Psi = 45^\circ$ (радиальные размеры кривой l увеличены в 3 раза).

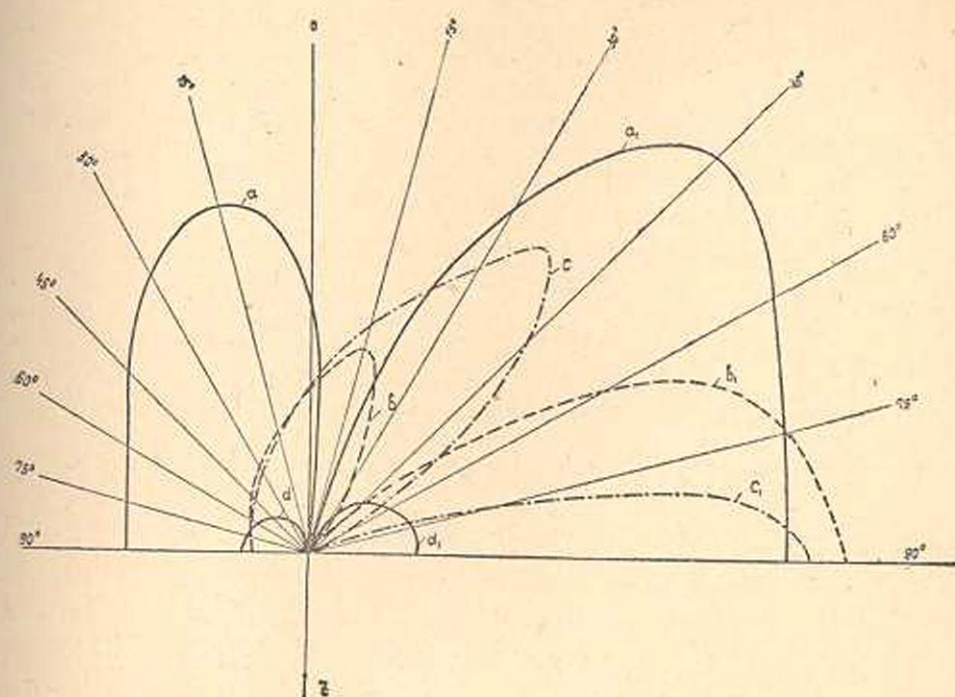
Формула (11) симметрична по отношению к плоскости падения $[W_\omega(\vartheta, \varphi) = W_\omega(\vartheta, -\varphi)]$ и при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ переходит в

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{e^2 V^2}{\pi^2 c^3} \cdot \cos^2 \Psi \frac{\sin^2 \vartheta + \beta^2 \sin^2 \Psi \cdot \cos^2 \vartheta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \Psi \cdot \cos^2 \vartheta)^2}. \quad (14)$$

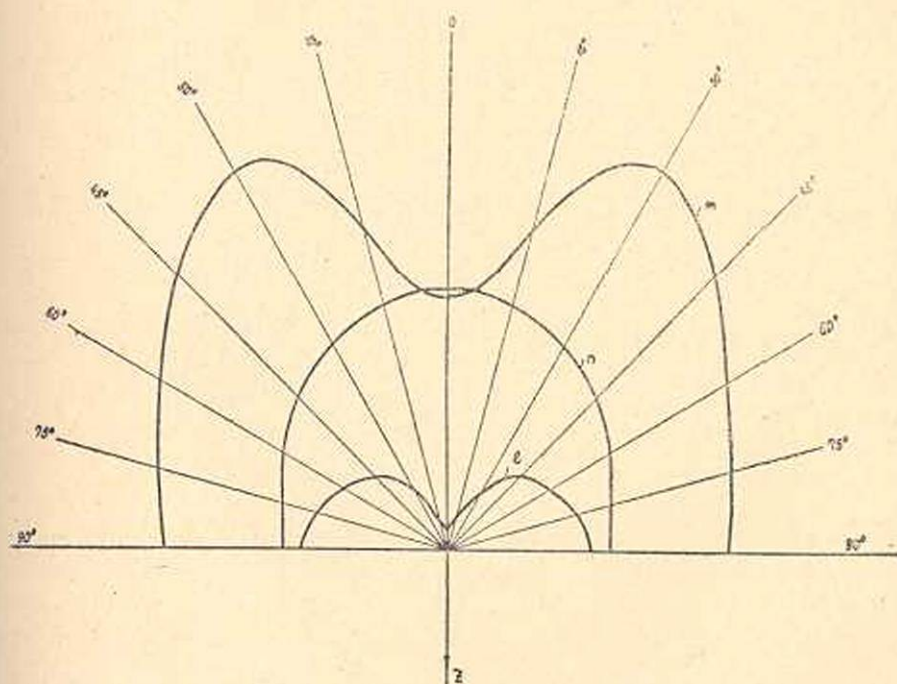
Направления экстремальных значений этой функции в зависимости от угла ϑ получаются из условий

$$\begin{aligned}\sin \vartheta &= 0, \\ \sin \vartheta &= \frac{1}{\beta \cos \Psi} \cdot \sqrt{\frac{1 - \beta^2 - \beta^4 \sin^2 \Psi \cdot \cos^2 \Psi}{1 - \beta^2 \sin^2 \Psi}}, & \varphi = \pm \frac{\pi}{2},\end{aligned}\quad (15)$$

причем, если $1 - \beta^2 - \beta^4 \sin^2 \Psi \cdot \cos^2 \Psi > 0$; $\left(\sin 2\Psi < \frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} \right)$; то



Фиг. 2.



Фиг. 3.

направление $\vartheta = 0$ соответствует минимуму. В этом случае существуют еще два (симметричные по отношению оси Z) максимума, направление которых определяется из второго уравнения (15). При $\sin 2\varPsi \geq \frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}$ имеется единственный максимум по направлению

$\vartheta = 0$. Если же β настолько мало, что правая часть (15) становится больше единицы вместе с условием $\beta^2 \cdot \sin 2\varPsi < 2\sqrt{1-\beta^2}$, то существует единственный минимум по направлению $\vartheta = 0$. При $\varPsi = 0$ условия (15) совпадают с (13) и излучение в направлении $\vartheta = 0$ — ноль (14). Из формулы (13) можно сделать еще следующие заключения: а) при $\beta \rightarrow 1$, имеем $\vartheta \rightarrow \varPsi$; в) т. к. с одной стороны при $\varPsi = 0$ направление максимального излучения определяется из условия $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$, а с другой, — при угле падения заряженной частицы, определяемом условием $\sin \varPsi = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$; левый максимум излучения идет по направлению $\vartheta = 0^*$, то эти два направления можно переставить. Заметим еще, что при помощи формулы (5) можно судить также о поляризации переходного излучения для рассмотренного здесь более общего случая.

В заключение приношу благодарность Г. М. Гарибяну, за обсуждение настоящей работы в ходе ее выполнения.

Ереванский государственный
университет

Поступило 31 III 1958

Н. А. Корхмазян

ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅՅՈՒՄԸ ԼԻՑԻԻ ԹԵՔ ԱՆԿՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Երբ լիցքավորված մասնիկը երկու համասեռ միջավայրերի հարթ սահմանն անցնում է որոշ V հաստատուն արագությամբ, ապա առաջանում է, այսպես կոչված, անցումային ճառագայթում: Արդ ճառագայթման ինտենսիվության բաշխումն, ըստ ապկունների և ըստ հաճախության, մի շարք հնդիշակների կողմից հաշված է տարբեր մեթոդներով: Սակայն այս հարցին վերաբերող գոյություն ունեցող մեթոդները քննարկում են այն մասնավոր դեպքը, երբ լիցքավորված մասնիկը երկու միջավայրերի սահմանն անցնում է նրանց բաժանման հարթությանն ուղղահայաց ուղղությամբ: Ներկա աշխատության մեջ՝ նշված ինդիքը բաժանված է ավելի ընդհանուր դեպքի համար՝ երբ լիցքավորված մասնիկը երկու միջավայրերի սահմանն անցնում է ցանկացած $\psi < \frac{\pi}{2}$ անկյան տակ (երբ $\varPsi = 0$ ստացվում են վերը նշված մաս-

* При этом условии слагаемые (13) становятся равными по величине.

նախորդ արդյունքները)։ Մանրամասն դիտարկվում է վախճանում — իդեալական հաղորդիչ մասնավոր դեպքը։ Բերված են գրաֆիկներ, որոնք նկարագրում են ճառագայթման ինտենսիվության անկյունային բաշխումը անկման հարթության և նրան ուղղահայաց հարթության մեջ, կախված Ψ -ից և β -ից։ Ստացված են աննշտվուշներ, որոնք որոշում են զրո և մաքսիմալ ճառագայթման ուղղությունները ջանկացած Ψ -ի և β -ի դեպքում։ Պարզված է նաև ճառագայթման բևեռացման հարցը։

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. и Франк И. ЖЭТФ. 16, 15 (1946).
2. Гарибян Г. М. ЖЭТФ. 33, 1403 (1957).
3. Корхмязян Н. А. Известия АН Армянской ССР, X, № 4, 29 (1957).
4. Ландау Л. и Лифшиц Е. Теория поля, изд. 2 (1958).

Г. В. Бадалян

Генерация быстрых дейтронов в свинце и меди нуклонной компонентой космического излучения

В нашей предыдущей работе [1] подробно был рассмотрен вопрос о возможностях магнитного спектрометра—сочлененного с двумя камерами Вильсона для регистрации быстрых дейтронов, при этом указывалось, что наличие верхней камеры дает возможность с большой вероятностью отделить воздушные дейтроны от генерированных.

Наряду с воздушными дейтронами, рассмотренными в [1], нашей установкой зарегистрировано много дейтронов, локально генерированных в верхней камере ядерно-активной компонентой космического излучения. Кинетическая энергия генерированных дейтронов при этом равнялась 160—460 Мэв.

Всего зарегистрировано 104 таких дейтронов I сорта, (см. [1]) причем 68 из них образованы в свинце (всего 5 см), а 36 шт. — в меди (крышка + дно камеры = всего 2,4 см).

Как видно, число генерированных дейтронов даже превышает число воздушных (81) дейтронов.

Одновременно зафиксировано ~800 генерированных протонов, остановившихся в том же интервале пробегов. Таким образом, наблюдаемое число генерированных дейтронов составляет около 13% от наблюдаемого числа генерированных протонов.

Ради большей достоверности мы будем рассматривать дейтроны I сорта с массой в интервале 3000—5100 m_e . Таких генерированных дейтронов 96 шт. На фотографиях В. К. (фиг. 1) можно ясно видеть интересующую нас частицу, выходящую из ядерного расщепления „звезды“, вызванной нейтральной или заряженной ядерноактивной компонентой космического излучения. По тому, сколько видимых вторичных частиц выходит из пластины мы имеем 1-лучевые, 2-лучевые и т. д. „звезды“.

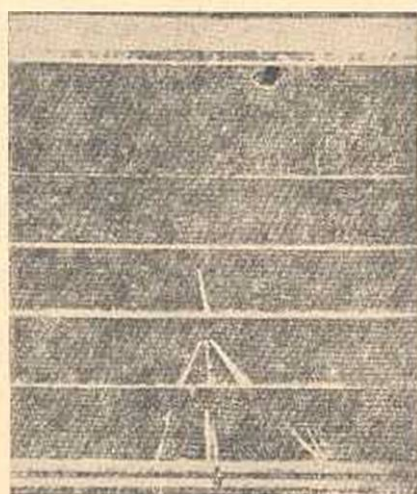
1. Эффективность образования дейтронов нейтральной и заряженной компонентами космического излучения.

В табл. 1 приведены сводные данные всех генерированных дейтронов (фиг. 1), за исключением ~5 дейтронов, рожденных в крышке и, следовательно, с неизвестными первичными частицами.

Таблица 1

Тип первичной частицы	Где наблюдается «звезда»	Тип «звезды»						
		1-луч.	2-луч.	3-луч.	4-луч.	5-луч.	6-луч.	>7-луч.
Заряженная	Pb	7	2	3	1	—	2	2
	Cu	3	4	1	—	—	—	—
	Pb+Cu	10	6	4	1	—	2	2
Нейтральная	Pb	20	5	7	4	1	1	5
	Cu	10	5	3	2	3	—	—
	Pb+Cu	30	10	10	6	4	1	5

В первый столбец включены дейтроны, генерированные в однолучевых «звездах», при этом, если первичная частица нейтральная, на фотографии ясно виден одинокий дейтрон, выходящий из пластины (фиг. 1а); если же первичная частица заряженная, не всегда возможна однозначная интерпретация этого случая. Действительно, само название «звезда» уже говорит, что мы имеем дело с неупругим взаимодействием, а признаками неупругости в нашем случае должны служить: а) сравнительно малая плотность ионизации первичной частицы относительно вторичной и б) достаточно большой угол выхода вторичной частицы относительно первичной. Пользуясь этими крите-



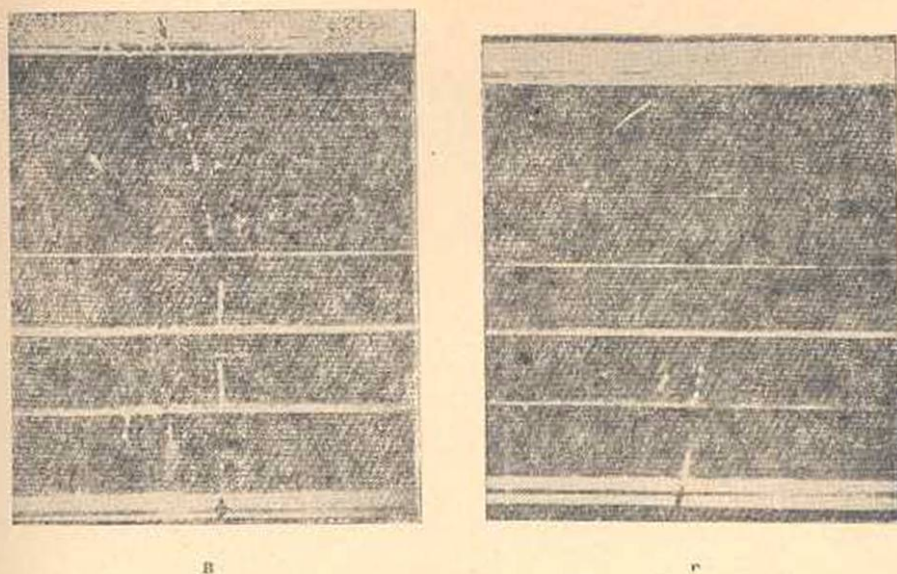
а



б

Фиг. 1. Рождение дейтронов в веществе верхней камеры
 а) дейтрон выходит из звезды от нейтрона
 б) дейтрон выходит из звезды от протона

риями, можно в большинстве случаев отделить случаи неупругого взаимодействия с рождением дейтрона от случаев упругого рассеяния проходящих дейтронов кулоновским или ядерным полем, причем, если 1 критерий хорошо выполнялся, такие случаи сразу бра-

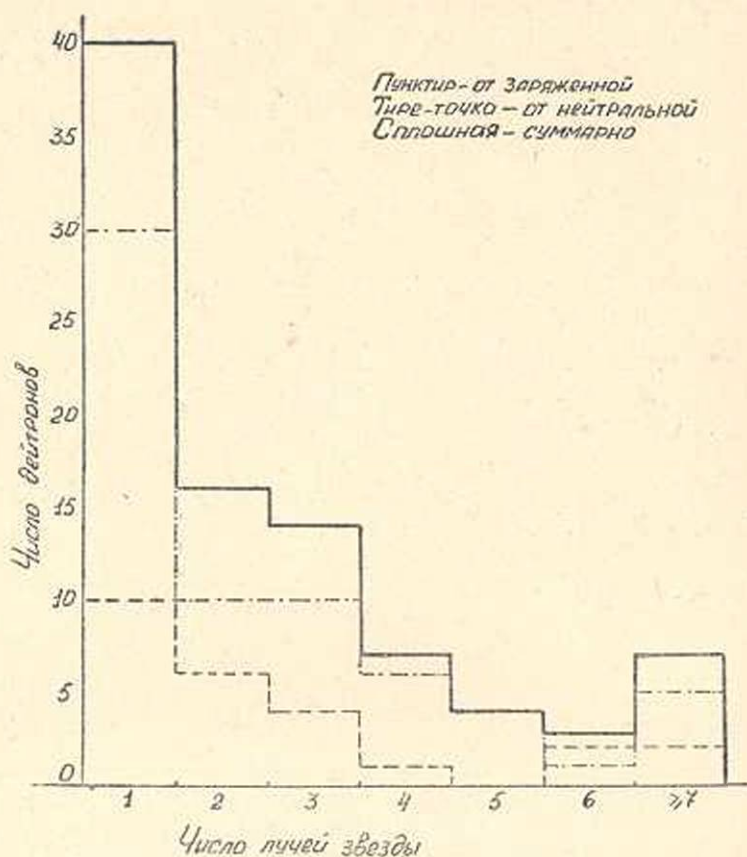


Фиг. 1. в) образование дейтрона в одиночку от нейтрона
г) образование дейтрона в одиночку от протона

лись (фиг. 1 г). Однако, иногда, по ряду причин, связанных с режимом камеры, бывали сомнения в изменении ионизации, поэтому приходилось обращаться и к помощи II критерия.

Здесь возникает вопрос о выборе оптимальной нижней границы углов. При тех импульсах, которые имеют дейтроны в В. К. (в среднем $\sim 11 \times 10^8 \text{ эв/с}$), среднеквадратичный угол многократного кулоновского рассеяния в пластинках В. К. $\sim 3^\circ$, а характеристический угол ядерного дифракционного рассеяния $\frac{\lambda}{R} \sim 1,35^\circ$. Согласно угловому

распределению дифракционного рассеяния, углы за несколько $\frac{\lambda}{R}$ (т. е. $> \sim 5^\circ$) фактически отсутствуют. Далее, при совместном рассмотрении упругого дифракционного рассеяния и кулоновского рассеяния на конечном ядре оказывается [2], что общая интерференционная кривая углового распределения примерно сводится к распределению Мольера для кулоновского рассеяния на точечном ядре. Согласно этому распределению вероятность рассеяния на угол $\geq 10^\circ$ $w = 0,002$ и, при 5-кратном прохождении всех воздушных дейтронов через пластинки, ожидаемое число таких рассеяний получается меньше единицы. Таким образом, все случаи рассеяния $\geq 10^\circ$, даже если нет явного выполнения критерия а), нужно считать как случаи одноручевых звезд. Имеется еще одно важное обстоятельство—дейтрон является очень слабосвязанной ядерной системой, следовательно, даже небольшие внешние импульсы, получаемые дейтроном при рассеянии, могут привести к развалу дейтрона, поэтому вероятность рассеяния на большие углы очень мала.



Фиг. 2. Распределение генерированных дейтронов по числу лучей материнской звезды.

Обратимся теперь к результатам, приведенным в табл. 1, а также на фиг. 2. Видно, что:

а) число дейтронов, образованных в звездах от нейтральных первичных, преобладает над числом дейтронов, образованных от заряженных первичных.

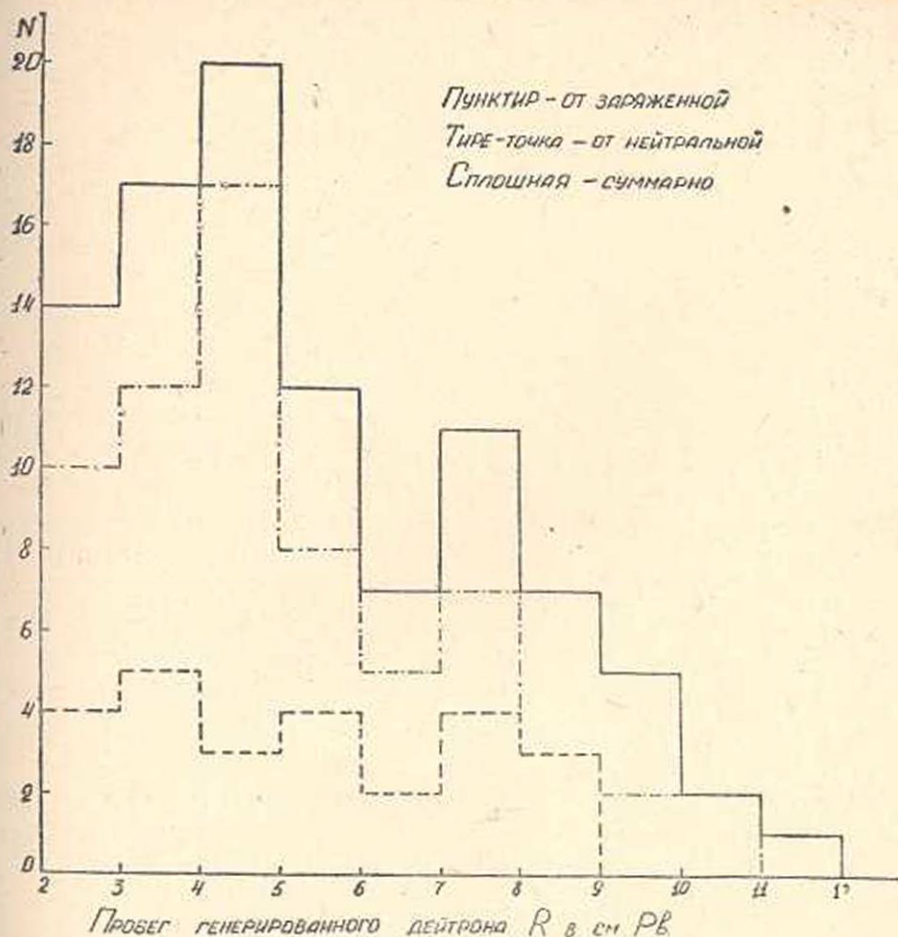
Согласно таблице 1, в среднем отношение

$$\frac{N_{\text{нейтр.}}}{N_{\text{заряж.}}} = \frac{66}{25} = 2,64 \pm 0,20;$$

б) частота образования дейтронов падает с увеличением числа лучей "звезды";

в) отношение $\frac{N_{\text{нейтр.}}}{N_{\text{заряж.}}}$ неодинаково в различных частях распределения, оно велико при малых числах лучей и, по-видимому, медленно уменьшается с увеличением числа лучей в "звезде".

На фиг. 3 изображена зависимость отношения $\frac{N_{\text{нейтр.}}}{N_{\text{заряж.}}}$ от пробега образованных дейтронов. Как видно, это отношение велико при



Фиг. 3. Распределение генерированных дейтронов по пробегу.

малых энергиях и, повидимому, уменьшается при переходе к большим энергиям (пробегам).

2. Импульсный спектр рождения дейтронов

Представляло большой интерес построить, на основании наших данных, импульсный спектр рождения дейтронов. Как уже отмечалось выше, в нашей установке можем идентифицировать только ионизационным образом остановившиеся дейтроны, а так как суммарного вещества в обеих камерах Вильсона не много, интервал импульсов построенного спектра рождения, вообще говоря, будет небольшим. Для определения полного импульса генерированного дейтрона можно было измеренному в телескопе остаточному импульсу прибавить потерю импульса на пути в верхней камере. Однако, исходя из того, что импульсы, такие как дейтроновые, фиксируются в нашей системе с большим разбросом, чем пробеги (так как имеем тонкие фильтры в камерах), предпочтительнее энергичность дейтрона оценить по полному пробегу от места зарождения до остановки, рассчитать пробежный спектр, а потом только перейти к импульсному спектру.

На фиг. 3 сплошной линией представлен пробежный спектр наблюдения дейтронов генерированных в веществе (полное) верхней камеры.

Для получения истинного спектра необходимо учитывать следующие факторы:

а) поглощение потока первичных ядерно-активных частиц в В. К., вследствие чего вероятность образования дейтронов в разных пластинках будет неодинаковой;

б) неодинаковая эффективность регистрации дейтронов разных пробегов. Так например, в малоэнергичной области спектра будут регистрироваться только дейтроны, зарожденные в нижних пластинках В. К. Наоборот, в области больших энергий будут регистрироваться только дейтроны, образованные в верхних пластинках. В самом деле, пробег длиннопробежных дейтронов, образованных в нижних пластинках В. К., не будет укладываться в интервале r_2-r_7 Н. К. Остановившиеся на дне дейтроны не рассматриваются, а прошедшие через ряд антисовпадений, просто, не регистрируются.

С наибольшей эффективностью будут регистрироваться дейтроны, приходящие на промежуточную область спектра;

в) ядерное ослабление потока образованных дейтронов, которое различно для дейтронов разных пробегов.

Для учета фактора а) примем пробег поглощения $L \approx 250 \text{ г/см}^2$. [3]. Тогда совместное рассмотрение 2 факторов а) и в) (см. приложение) приводит к изображенной на фиг. 4 кривой „эффективных толщин“, показывающей, какая эффективная толщина вещества в В. К. ответственна за образование и регистрацию дейтронов с данным пробегом. Для получения спектра рождения в единичной толщине вещества нужно будет в каждом пробежном интервале наблюдаемое число частиц делить на соответствующую „эффективную толщину“. Фактор в) аналогичен рассуждениям в [1] (§ 1). Принятый пробег взаимодействия дейтронов $\lambda \approx 12 \text{ см Pb}$ (137 г/см^2). Все данные, относящиеся к спектру, приведены в табл. 2 (также фиг. 3). Полный пробежный интервал 2—12 см Pb, соответствующий импульсный интервал 0,785—1,38 Бэв/с. В конечном итоге все частицы сгруппированы в четырех импульсных интервалах. Чтобы получить абсолютный дифференциальный спектр рождения в 1 г/см^2 вещества, число дейтронов в каждом интервале разделено на величину

$$A = \omega S x t W' \Delta p e^{-\bar{R}x} f,$$

где ω — средний телесный угол установки: $\omega = 0,0284 \text{ стер}$.

S — площадь нижнего координатного ряда счетчиков: $S = 300 \text{ см}^2$.

x — средняя поверхностная плотность 1 см вещества В. К. $x \approx 11,8 \text{ г/см}^2 \text{ Pb}$.

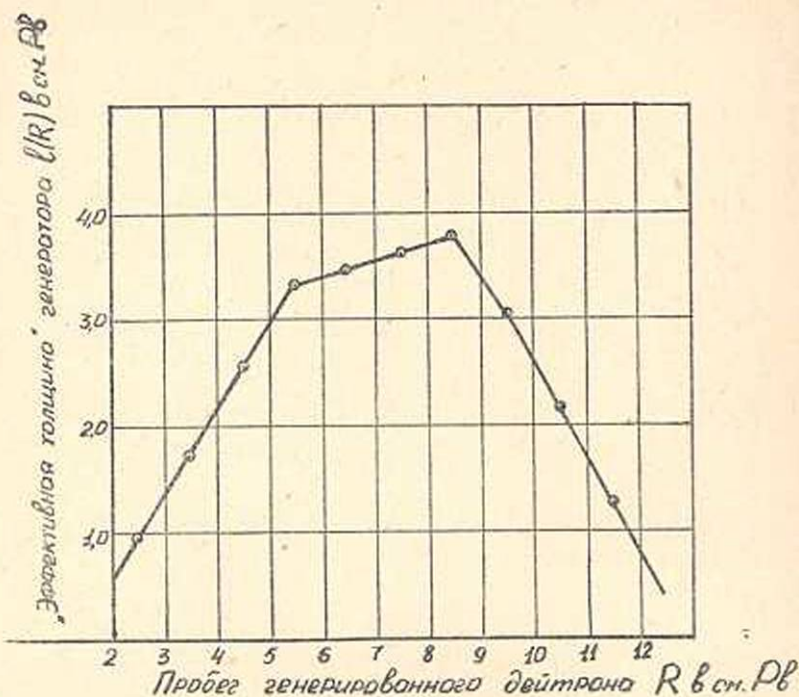
t — время измерений: $t = 3,53 \times 10^7 \text{ сек}$.

W — абсолютная вероятность регистрации (светосила), вклю-

Таблица 2

К вычислению дифференциального импульсного спектра рождения дейтронов. В спектре 96 частиц

№ точки	Интервал пробегов ΔR	Наблюденное число дейтронов	Эффективная толщина $l(R)$ в см	Эффективное число дейтронов рожденных в 1 см вещества	Объемные интервалы	Интервал импульсов Δp Бэв/с	Средний пробег $\bar{R}$ см P_b	Средний импульс Бэв/с	Величина $A \cdot 10^7$	Ордината дифферен. импульс. спектра $10^{-7} \text{сек}^{-1} \text{стер}^{-1} \Gamma^{-1} (\text{Бэв/с})^{-1}$	Статистическая средне-квадратичная ошибка, вычисленная по закону распространения случ. ошибок $10^{-7} \text{сек}^{-1} \Gamma^{-1} \text{стер}^{-1} (\text{Бэв/с})^{-1}$
1	2—3	14	0,957	14,6	24,5	0,785—0,965	3	0,875	3,58	6,88	1,31
	3—4	17	1,72	9,9							
2	4—5	20	2,56	7,8	11,4	0,965—1,10	5	1,032	2,27	5,05	0,91
	5—6	12	3,32	3,6							
3	6—7	7	3,48	2,0	6,84	1,10—1,25	7,5	1,17	2,04	3,36	0,675
	7—8	11	3,64	3,0							
4	8—9	7	3,80	1,84	3,3	1,25—1,38	10,5	1,315	1,30	2,40	0,903
	9—10	5	3,14	1,6							
	10—11	2	2,18	0,92							
	11—12	1	1,26	0,8							



Фиг. 4. Зависимость эффективных толщин от пробега дейтрона.

чающая щельность координатных рядов счетчиков и эффективность последних [17]. В рассматриваемом случае она в среднем постоянна для всех дейтронов и равна $W' = 0,50$;

Δp — интервал импульсов в Бэ/с.

$\exp(-\bar{R}/\lambda)$ — ослабление потока дейтронов со средним пробегом $\bar{R}$ из-за ядерных столкновений.

f — фактор эффективности, определяемый спецификой работы установки и критериями отбора: $f = B(t) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$; где

$B(t)$ — фактор времени блокировки; $B(t) = 0,78$.

f_1 — фактор, учитывающий, что в ряде случаев из-за недоброкачества кадра верхней камеры (туман, пустой кадр, наложение и т. п.) нельзя делать вывод о поведении частицы в верхней камере; $f_1 = 0,885$; f_2 — фактор, учитывающий, что в ряде случаев генерированный дейтрон, останавливающийся в нижней камере, сопровождается в телескопе другими быстрыми частицами, рожденными в том же ядерном расщеплении, что и дейтрон. Такие случаи установкой не регистрируются, если одна из сопровождающих частиц попадет в ряд счетчиков антисовпадений, регистрируемые же случаи отбрасываются при первом же отборе как не поддающиеся обработке по импульсу. Вычисленное значение $f_2 = 0,94$.

f_3 — фактор, характеризующий то, что из-за неудовлетворения критериям отбора по телескопу и нижней камере много генерирован-

ных дейтронов выпали из рассмотрения и не включены в спектр. Вычисленное значение $f_3 = 0,22$.

Подставляя все вычисленные коэффициенты в A , получим $A = 2,56 \cdot 10^8 \Delta p \exp(-\bar{R}/\lambda)$.

Дифференциальный импульсный спектр рождения дейтронов приведен на фиг. 5. Спектр при $p \gtrsim 1 \text{ Бэв/с}$ аппроксимируется степенной функцией вида

$$n(p) dp = ap^{-\gamma} dp. \quad (1)$$

Расчет, проведенный методом наименьших квадратов, дает

$$a = (5,7 \pm 1,08) \cdot 10^{-7} \text{ Г}^{-1} \text{ сек}^{-1} \text{ стер}^{-1} \left(\frac{\text{Бэв}}{c} \right)^{\gamma-1}; \quad \gamma = 3,14 \pm 0,44.$$

3. Оценка поперечного сечения рождения дейтронов в веществе верхней камеры

Попробуем оценить дифференциальное (при $\theta = 0^\circ$) поперечное сечение рождения дейтронов в рассматриваемом импульсном интервале $0,785-1,38 \text{ Бэв/с}$ (энергетический интервал $160-460 \text{ Мэв}$). Формулу для сечения рождения можно представить в таком виде

$$\sigma(\theta) = \frac{\Delta n_d}{N_0} \frac{A}{N}, \quad (2)$$

где n_d — число дейтронов, рожденных в 1 г вещества в 1 сек в пределах 1 стерад, N_0 — вертикальный поток первичных генерирующих частиц (практически, протонов и нейтронов) с энергией $E \geq E_0$ и A, N — соответственно массовое и Авогадрово числа: $A = 208$; $N = 6,03 \cdot 10^{23}$.

n_d получается из данных импульсного спектра рождения дейтронов (см. выше). Необходимо отметить, что среди зарегистрированных нами дейтронов присутствуют дейтроны, образованные первичными нуклонами, падающими на нашу установку под большими углами; однако, в силу резких угловых распределений первичных нуклонов и рожденных дейтронов вклад вышеупомянутых дейтронов незначителен.

Пороговая энергия E_0 первичного нуклона для прямого образования „pick-up“ дейтрона с энергией E_d определяется на основании формулы, приведенной в работе [8]

$$E_d = \frac{8}{9} E_0 \cos^2 \psi - 13 \text{ Мэв}. \quad (3)$$

где ψ — угол между направлениями падающего нуклона и образованного дейтрона.

Принимаем $\psi = 0$. Тогда, например для $E_d = 160 \text{ Мэв}$, получим $E_0 = 195 \text{ Мэв}$.

Поток первичных протонов с $E \geq E_0$ находим из воздушного спектра протонов, приведенном в [4].

Для определения потока нейтронов воспользуемся данными, полученными в работе [21]. В указанной работе, на основании воздушного спектра протонов [4] и энергетической зависимости отношения интенсивностей нейтронов и протонов в воздухе, воспроизведен нейтронный спектр. При $E \geq 0,2$ Бэв спектр имеет вид

$$N(E)dE = 6,4 \cdot 10^{-4} E^{-2,1} dE. \quad (4)$$

Так как мы имеем дело с дейтронами разных энергий (160—460 Мэв), то, соответственно, различными будут и пороговые значения энергий первичных генерирующих нуклонов. Поэтому для более точного вычисления искомого сечения рождения дейтронов вышеуказанного интервала энергий, мы разделили этот интервал спектра на отдельные части с соответствующими порогами E_0 , вычислили парциальные сечения и далее, сложив все, получили суммарное искомое сечение.

$$\sigma(0^\circ) = \sum_i \frac{\Delta n_{di} A}{N_{0i} \cdot N} = (2,45 \pm 0,28) 10^{-26} \frac{\text{см}^2}{\text{стер}} = 24,5 \pm 2,8 \frac{\text{мб}}{\text{стер}}$$

Дифференциальное сечение при среднем импульсе $p \sim 1$ Бэв/с будет

$$\frac{d\sigma(0^\circ)}{dp} = (4,1 \pm 0,47) 10^{-26} \frac{\text{см}^2}{\text{Бэв/с.стер}}$$

Представляет интерес сравнить сечения рождения дейтронов и протонов в том же энергетическом интервале 160—460 Мэв, тем более, что условия рождения и регистрации у тех и других почти одинаковы на нашей установке.

Согласно формуле (1) имеем

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_p} \approx \frac{n_d}{n_p}. \quad (5)$$

Из импульсного спектра рождения дейтронов $n_d = (2,73 \pm 0,31) 10^{-7}$.

Для определения n_p воспользуемся данными работы [21], согласно которой $n_p = 2,19 \cdot 10^{-6}$. Тогда

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_p} = 0,124 \pm 0,016.$$

Обсуждение результатов

Можно попытаться понять полученные выше результаты, если обратиться к специфике механизмов образования дейтронов. Согласно существующим представлениям, при ядерных взаимодействиях первичных энергичных нуклонов с атомными ядрами, быстрые дейтроны могут образовываться благодаря прямому или не прямому „захватному“

процессу („pick-up“) [6—9]. Образование быстрых дейтронов при испарении возбужденных ядер, при выбывании квазидейтронных групп или при ядерной реакции с вылетом π -мезона малосущественно [10—14].

Феноменологически, при реакции захвата, налетающий нуклон (при прямом „захвате“) или рассеянный в ядре нуклон (при не прямом „захвате“-е) выбывают с поверхностного слоя ядра протон или нейтрон и, если импульсы первичной и вторичной частиц близки, они коррелируют друг с другом, образуя связанную систему-дейтрон. Если ядро симметрично (число протонов и нейтронов равны), то при одинаковом распределении нейтронов и протонов по объему ядра (на это указывают последние эксперименты по рассеянию электронов и нейтронов на тяжелых ядрах), вероятности захвата ядерного нуклона с образованием дейтрона налетающими протонами и нейтронами при больших энергиях, будут одинаковы. Только в случае тяжелых ядер, где число нейтронов заметно преобладает над числом протонов, повидимому, будет некоторое преимущественное образование дейтронов налетающими протонами. В частности, в нашем случае для вещества В. К. упрощенное рассмотрение дает: $\frac{w_p}{w_n} = 1,23 \div 1,39$ [21].

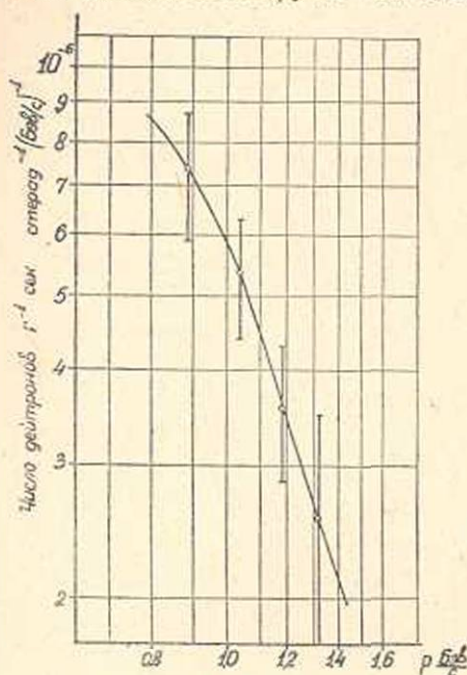
В свете этих рассуждений ясно, что полученный нами выше (§ 1) результат о преобладании числа дейтронов, генерированных от нейтральных, над числом дейтронов, генерированных от заряженных первичных, единственным образом можно объяснить неодинаковой интенсивностью первичных протонов и нейтронов. Среди генерирующих частиц, ответственных за образование дейтронов, число нейтронов в среднем $2,64 \cdot (1,23 \div 1,39) = 3,22 \div 3,64$ раза превышало число протонов.

Однако, если бы наши дейтроны образовались на протяжении всего спектра (от $E \geq 200$ Мэв) первичных нуклонов одинаково, то величина $(1,23 \div 1,39) \frac{N_{\text{нейтр.}}}{N_{\text{зар.}}}$ равнялась бы просто отношению интегральных ($E > E_0$) интенсивностей нейтронов и протонов на данной высоте. Последнее отношение, выведенное на основании спектров первичных протонов и нейтронов (§ 3), равно 2,2, т. е. около полутора раза меньше, чем полученное нами выше значение $3,22 \div 3,64$.

Этот факт повидимому говорит о том, что дейтроны преимущественно рождаются в „звездах“ от нуклонов небольших энергий, среди которых, как известно, поток первичных нейтронов больше чем поток протонов.

Приведенный на фиг. 5 импульсный спектр рождения при $p \geq 1$ Бэв/с имеет $\gamma_d = 3,14 \pm 0,44$. Так как большинство дейтронов зарождено в явных „звездах“, главным действующим процессом является не прямой „захват“. Тогда, согласно сказанному выше (см.

также [22]) следовало ожидать, что дифференциальный спектр рождения должен быть круче, чем соответствующий спектр генерирующей компоненты. При небольших энергиях $E \approx 200$ Мэв импульсный спектр первичных нейтронов [21] имеет $\gamma \sim 3$, а протонный спектр — меньше, но в образовании дейтронов вес нейтронов больше, и поэтому, даже если резкий спад нашего дейтронного спектра и существует, его достоверность, в пределах наших экспериментальных ошибок, невелика.



Фиг. 5. Дифференциальный спектр генерированных дейтронов

В работе [15] приведены полные дифференциальные энергетические распределения продуктов ядерных расщеплений в фотозуммули. Полученный нами спектр дейтронов по виду совпадает, в интересующем энергетическом интервале, со спектром дейтронов и тритонов, приведенном в вышеуказанной работе. Это может быть указанием на то, что вид спектра рождения существенным образом

не зависит от вещества генератора. В работах [19—20] получены смешанные воздушно-генерационные спектры дейтронов, которые находятся в качественном согласии с нашим спектром.

Наконец, в предыдущей главе мы оценили поперечное сечение рождения дейтронов в свинце, в данном интервале энергии. В литературе, однако, имеется не много работ по определению сечения рождения быстрых дейтронов. Адлеем и Йорком [16] получено, что полное сечение образования дейтронов с энергией ≥ 27 Мэв при бомбардировке ядер свинца нейтронами с энергией 90 Мэв составляет 75 мб.

Гесс и Мойер [8] определили дифференциальные сечения рождения дейтронов с $E \geq 50$ Мэв под определенными углами при бомбардировке протонами и нейтронами с энергией 300 Мэв различные ядра, в том числе и свинец. Для последнего, в случае протонов получено $\frac{d\sigma(26^\circ)}{d\Omega} = 13,9 \pm 2,86$; $\frac{d\sigma(40^\circ)}{d\Omega} = 18,0 \pm 2,14$; в случае нейтронов: $\frac{d\sigma(26^\circ)}{d\Omega} = 9,71 \pm 1,6$; $\frac{d\sigma(40^\circ)}{d\Omega} = 10,03 \pm 1,2$; все цифры в $\frac{мб}{стерад}$.

Наблюдаемые нами дейтроны образовались от первичных нуклонов с $E \geq 200$ Мэв. Очевидно, что полученное нами выше сечение

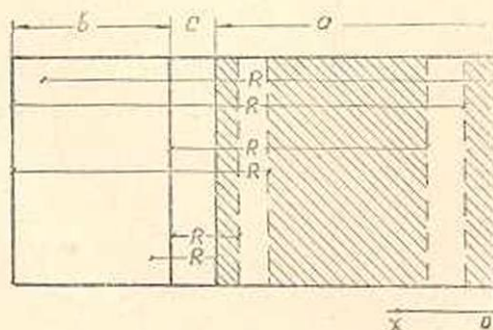
$\left(\tau(0^\circ) = 24,5 \frac{мс}{стер}\right)$ при $\theta = 0$ заметно больше, чем в вышеупомянутой работе, в согласии с представлением о резком угловом распределении генерированных дейтронов при больших энергиях.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. А. И. Алиханяну за постоянный интерес к работе, проф. Н. М. Кочаряну, М. Л. Тер-Микаэляну, Г. М. Гарибяну, И. И. Гольдману за обсуждение результатов, а также А. Т. Дадабяну, В. М. Федорову, Б. Н. Дерягину, В. Г. Кириллов-Угрюмову, Г. И. Мерзону, А. П. Шмелевой — за участие в измерениях.

Приложение

Как отмечалось на странице 8, в силу факторов а) и б), у нас будет неодинаковая вероятность образования дейтронов в разных пластинах В. К., а также неодинаковая эффективность регистрации дейтронов разных пробегов.

Ниже мы увидим, что задача учета этих двух факторов сводится к вычислению некоторых „эффективных толщин“ в В. К., ответственных за образование и регистрацию дейтронов с данным пробегом. На фиг. 6 схематически показаны толщины вещества в В. К. — a и в Н. К. — b ; c — есть „мертвая полоса“ Н. К. от крышки до r_2 , остановки в которой мы не берем. Таким образом, нас интересуют дейтроны, рожденные в пределах a и остановившиеся в пределах b . Легко видеть, что наблюдаемое число генерированных дейтронов с данным пробегом R , или, что одно и то же, число полезных размещений пробега R на нашей схеме (фиг. 6) будет пропорционально некоторой зависящей от R эффективной полосе $l(R)$ в пределах a . Вид функции $l(R)$ будет различный в разных интервалах изменения R . Если учитывать также поглощение потока первичной генерирующей компоненты с пробегом поглощения L , то из не сложных рассуждений получим (фиг. 6);



Фиг. 6. К вычислению кривой „эффективных толщин“.

$$\begin{aligned}
 1) \quad 0 \leq R \leq c \quad I(R) &= 0; \\
 2) \quad c \leq R \leq b+c \quad I(R) &= \int_{a+c-R}^a e^{-x/L} dx = L \left(e^{-\frac{a+c-L}{L}} - e^{-\frac{a}{L}} \right); \\
 3) \quad b+c \leq R \leq a+c \quad I(R) &= \int_{a+c-R}^{a+b+c-R} e^{-x/L} dx = \\
 &= L \left(e^{-\frac{a+c-R}{L}} - e^{-\frac{a+b+c-R}{L}} \right); \\
 4) \quad a+c \leq R \leq a+b+c \quad I(R) &= \int_0^{a+b+c-R} e^{-x/L} dx = \\
 &= L \left(1 - e^{-\frac{a+b+c-R}{L}} \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Так как в нашей установке $a = 7,4$ см, $b = 4,2$ см, $c = 1,2$ см, то, принимая $L = 250$ з/см², можно вычислить кривую изменения $I(R)$. Эта зависимость показана на фиг. 4, стр. 10. Откуда видно, что наиболее эффективно регистрируются генерированные дейтроны средних пробегов.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 13 VI 58

2. Պ. Բադալյան

ԱՐԱԳ ԴԵՅՏՐՈՆՆԵՐԻ ԳԵՆԵՐԱՑԻԱՆ ԿԱՊՍՐԻ ԵՎ ՊՂՆՁԻ ՄԵՋ, ԿՈՍՄԻԿԱԿԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՆԵՐԻ ՆՈՒԿԼՈՆԱՅԻՆ ԿՈՍՄՈՆԵՆՏԻ ԿՈՂՄԻՑ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են նախորդ աշխատության մեջ [1] նկարագրված մեթոդի միջոցով վերին կամերայում ծնված տրադ զեյտրոնների ուսումնասիրության արդյունքները: Ուսումնասիրվել են 160—460 ՄՅՑ էներգիա տնեցող ծնված 96 զեյտրոններ:

1. Ցույց է տրված, որ նեյտրոնների կողմից զեննրացված զեյտրոնների թիվը $2,64 \pm 0,62$ անգամ գերազանցում է պրոտոնների կողմից զեննրացված զեյտրոնների թիվը:

2. Կառուցվել է զեյտրոնների ծնման իմպուլսային սպեկտրը $0,785—1,38$ ԵՅՑ տիրույթում: Ցույց է տրված, որ $p \gtrsim 1$ ԵՅՑ պարմանի զեյտրոն, իմպուլսային սպեկտրը արտահայտվում է $N(p) dp = (5,7 \pm 1,08) 10^{-7} \times p^{-3,14 \pm 0,44} dp$ մասնիկ գ.վրկ.ստեք(ԵՅՑ)¹⁻⁷ ֆորմուլայով:

3. Գնահատվել է զեյտրոնների ծնման էֆեկտիվ կտրվածքը: Ստացվել է, որ մեր դիտարկված էներգիայի ինտերվալում, զեյտրոնների ծնման էֆեկտիվ կտրվածքը կազմում է $(2,45 \pm 0,28) 10^{-26}$ սմ²/միջուկ ստերադ:

Հոդվածի վերջում արված է, գոյություն ունեցող ֆիզիկական պատկերացումների հիման վրա, աշխատանքում ստացված արդյունքների մանրամասն վերլուծությունը: Պարզված է, որ 1-ին կետում ստացված արդյունքը բացատրվում է առաջնային նեյտրոնների հեղեղի գերակշռությունը պրոտոնների հեղեղի նկատմամբ: 1-ին, 2-րդ և 3-րդ կետերում ստացված արդյունքները համաձայնվում են այն պատկերացման հետ, որ սկզբնական նուկլոնի էներգիայի աճման հետ մեկտեղ փոքրանում է զեյտրոնների ծնման հավանականությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалян Г. В. Изв. АН Армянской ССР* (серия ФМЕТ наук) 11, 29, 1958.
2. Арутюнян Ф. Р. ЖЭТФ 34, 800, 1958.
3. Киракосян Э. А. Диссертация, Ереван, 1957.
4. Саакян Г. С., Киракосян Э. А., Алексакян А. С., ДАН Арм. ССР, т. 24, 97, 1957.
5. Conversi M., Martelli G. and Rothwell P. Nuovo cimento. 10 898—914, 1954.
6. Chew G. F. and Goldberger M. L. Phys. rev. 77 470, 1950.
7. Heidman J. Phys. rev 80 171, 1950.
8. Hess W. N. and Moyer B. J. Phys. rev. 101 337, 1956.
9. Kikuchi K. Prog. theor. phys. 1 503, 1957.
10. Вильсон Дж. Физика космических лучей. т. 1 ИЛ, Москва, 1954.
11. Аджигирей Л. С., Взоров И. К., Эзелов В. П., Мещеряков М. Г., Неганов Б. С., Шабугин А. Ф. ЖЭТФ 33, 1185 1957.
12. Мещеряков М. Г., Неганов Б. С. и др., ДАН СССР, 100 673—676, 1955.
13. Мещеряков М. Г., Неганов В. С. ДАН СССР 100 677—679, 1955.
14. Джедепов В. П., Оганесян К. О. и др., ЖЭТФ 29 886—889, 1955.
15. Camerini U., Fowler P. H., Lock W. O., Muirhead H. Phil. mag. 42 4133, 1950.
16. Hadley F. and York H. F. Phys. rev. 80 345—354 1950.
17. Бадалян Г. В. Изв. АН Арм. ССР (серия ФМЕТ наук), т. X, № 6, 1957.
18. Кочарян Н. М. Докторская диссертация, 1934, Москва.
19. Любимов В. А. Автореферат диссерт. Москва, 1956.
20. Айвазян М. Т. Изв. АН Арм. ССР* (серия ФМЕТ наук), т. 9, 91, 1956.
21. Бадалян Г. В. Диссертация, Ереван, 1958.
22. Bransden B. H. Proc. Phys. Soc. 65, 738, 1952.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

Модель нестационарной зональной муссонной циркуляции атмосферы

В в е д е н и е

Муссонной циркуляции атмосферы посвящены работы [1—9]. Некоторые из них носят описательный характер, другие — теоретический. Так, например, в работе [6] рассмотрены две модели муссонной циркуляции при известных предположениях. Две модели — бесконечно длинные чередующиеся полосы моря и суши, и случай бесконечно простирающихся материка и океана рассмотрены Дмитриевым [7]. В работе [8] дана теория муссонной циркуляции над круглым островом, омываемом бесконечным океаном. В работе [9] рассмотрен случай бесконечно простирающихся материка и океана с прямолинейным берегом, получены интересные результаты, которые хорошо согласуются с наблюдениями, особенно в прибрежной зоне. В работе [10], посвященной изучению свободной тепловой конвекции большого масштаба, приводится решение нестационарной нелинейной незональной задачи о тепловой конвекции реальной бароклинной атмосферы на Земле, в поле сил тяжести и Кориолиса и при наличии основного зонального потока до начала тепловой конвекции.

В настоящей работе показывается, как применить указанное решение к построению нестационарной модели муссонной циркуляции в зональном случае и приводятся примеры расчета. Принимается следующая схема. Сферическая Земля одной параллелью разделена на сплошной однородный материк севернее этой параллели, и на океан — южнее ее. Тогда ясно, что все элементы движения не будут зависеть от долготы места. Кроме того, считается известным распределение температуры атмосферы по поверхности Земли.

§ 1. Постановка задачи и решение уравнений

При сделанных выше предположениях система уравнений гидротермодинамики примет следующий вид [10]

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_\theta^2 \operatorname{ctg} \theta - 2\omega \cos \theta v_\lambda =$$

$$= \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_z^\infty T dz, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta + 2\omega \cos \theta v_\theta = \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z M \sin 2\theta + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (1.4)$$

Здесь принята сферическая система координат, z — высота над уровнем моря; θ — дополнение широты, возрастающее к югу; λ — долгота места, возрастающая к востоку; t — время; v_θ , v_λ , v_z — составляющие скорости; ω — угловая скорость вращения Земли; T — температура, M — перепад температуры от полюса к экватору, причем все величины безразмерные и все возмущения, налагающиеся на основной зональный поток, не считаются малыми (см. (6), (7) и (8) из [10]).

Число Прандтля принято равным единице, а для характерных величин получены следующие соотношения:

$$V = (\nu a)^{1/2} \left(\frac{g T_0}{\bar{T}} \right)^{1/2}, \quad H = (\nu a)^{1/2} \left(\frac{g T_0}{\bar{T}} \right)^{-1/2}, \quad (1.5)$$

где V , T_0 , a , H , t_0 — характерная скорость, температура, длина по горизонтали (принят радиус Земли), высота и время, ν — коэффициент вертикального турбулентного перемешивания, g — ускорение силы тяжести, $\bar{T}$ — средняя температура по земному шару. (Числовые значения приводятся в [10]).

Полагая

$$T = \tau^2 \Theta(\theta, \zeta, \tau), \quad v_\theta = \tau^5 \varphi(\theta, \zeta, \tau), \quad (1.6)$$

$$v_z = \tau^5 \sigma(\theta, \zeta, \tau), \quad v_\lambda = \tau^5 \psi(\theta, \zeta, \tau),$$

где

$$\zeta = \frac{z}{2\sqrt{t}}, \quad Vt = \tau, \quad (1.7)$$

получим следующую систему из четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций Θ , φ , ψ , σ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} - 10\sigma - 2\tau \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + 8\tau^2 \omega \cos \theta \psi = \\ & = 4\tau^2 \left(\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \psi^2 \operatorname{ctg} \theta \right) + 8 \frac{\partial}{\partial \theta} \int_\infty^\zeta \Theta d\zeta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 10\psi - 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - 8\tau^2 \omega \cos \theta \varphi = \\ = 4\tau^7 \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \varphi \psi \operatorname{ctg} \theta \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau \sin \theta) + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} - 4\Theta - 2\tau \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - 4M\tau^2 \sin 2\theta \varphi = 4\tau^7 \left(\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \right). \quad (1.11)$$

Для решения этой системы положим:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\theta, \zeta) \tau^n, \quad \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\theta, \zeta) \tau^n, \\ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\theta, \zeta) \tau^n, \quad \Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, \zeta) \tau^n. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Граничные условия будут иметь вид:

1. $\varphi_n = \psi_n = \sigma_n = 0, \quad \Theta_n = f_n(\theta)$ при $\zeta = 0$,
 2. $\varphi_n = \psi_n = \Theta_n = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$.
- (1.13)

Подставляя ряды (1.12) в систему (1.8) — (1.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ , мы получим бесконечную систему дифференциальных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Для $n < 5$ из (1.11) найдутся Θ_n , затем по этим значениям из (1.8) и (1.9) найдутся φ_n и ψ_n , из (1.10) — σ_n . Далее, пользуясь этими решениями, легко найдем неизвестные последующих номеров. Начиная с $n = 7$ и больше, появляются нелинейные члены, как произведения уже найденных ранее линейных членов в виде известной правой части уравнений.

Однородные уравнения, получающиеся из (1.8), (1.9) и (1.11), можно представлять в следующем, общем виде для всех номеров.

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial U_n}{\partial \zeta} - 2(n+k) U_n = 0, \quad (1.14)$$

причем для φ_n и ψ_n $k = 5$, а для Θ_n $k = 2$.

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$U_n = c_1(\theta) L_{n+k}(\zeta) + c_2(\theta) P_{n+k}(\zeta), \quad (1.15)$$

где c_1 и c_2 постоянные интегрирования, зависящие от θ . Функции L_n введены в работе [11] и имеют вид:

$$L_n(\zeta) = A_n \int_0^{\zeta} \left[\int_0^{\xi} \int_0^{\eta} \dots \int_0^{\eta} e^{-x^2} (dx)^n \right] dx. \quad (1.16)$$

В частности

$$L_0 = A_0 \int_{\infty}^{\zeta} e^{-x^2} dx,$$

$$A_n = 2nA_{n-2}, \quad A_0 = -\frac{2}{\pi}, \quad A_1 = 2,$$

$$L_n(0) = 1, \quad L_n(\infty) = 0. \quad (1.16')$$

Между этими функциями существуют следующие соотношения:

$$\zeta L_n = \frac{A_n}{A_{n+1}} (n+1) (L_{n+1} - L_{n-1}),$$

$$L'_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} L_{n-1}, \quad \int_{\infty}^{\zeta} L_n d\zeta = \frac{A_n}{A_{n+1}} L_{n+1}. \quad (1.17)$$

Полиномы $P_n(\zeta)$ имеют следующий вид:

$$P_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\zeta^{n-2m}}{2^{2m} m! (n-2m)!}. \quad (1.18)$$

Для них легко получаем следующие соотношения:

$$\zeta P_n = (n+1) P_n - \frac{1}{2} P_{n-1}, \quad P'_n = P_{n-1}. \quad (1.19)$$

Используя решение (1.15) в последующих номерах для тех же функций φ_n , ψ_n и θ_n будем иметь неоднородное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial U_n}{\partial \zeta} - 2(n+k) U_n = R_n(\theta, \zeta) + \sum_{i=0}^n b_i L_i. \quad (1.20)$$

При граничных условиях: $U_n = f_n$ при $\zeta = 0$ и $U_n = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ (для φ_n и ψ_n имеем $f_n = 0$, а для θ_n имеем $f_n = f_n(\theta)$), получим решение (1.20) в виде:

$$U_n = L_{n+k}^{(\zeta)} \left[f_n + P_{n+k}(0) \int_{\infty}^0 \frac{L_{n+k} R_n d\zeta}{P_{n+k} L'_{n+k} - L_{n+k} P'_{n+k}} + \right. \\ \left. + \int_0^{\zeta} \frac{P_{n+k} R_n d\zeta}{P_{n+k} L'_{n+k} - L_{n+k} P'_{n+k}} \right] - P_{n+k}(\zeta) \int_{\infty}^{\zeta} \frac{L_{n+k} R_n d\zeta}{P_{n+k} L'_{n+k} - L_{n+k} P'_{n+k}} - \\ - \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{2[i - (n+k)]} (L_{n+k} - L_i). \quad (1.21)$$

Легко убедиться, что $R_n = 0$ для всех $n < 7$ и только начиная с $n = 7$ появляются R_n — как известные функции.

Пользуясь решением для φ_n и граничным условием (1.13), легко находим:

$$\sigma_n = -\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \int_0^{\zeta} \varphi_n d\zeta \right). \quad (1.22)$$

Остается теперь определить $f_n(\theta)$, $b_i(\theta)$ и $R_n(\theta, \zeta)$ для всех случаев, тогда задача решается до конца. Легко убедиться, что для этого необходимо определить все функции $f_n(\theta)$, т. е. определить распределение температуры по земной поверхности.

§ 2 Определение функций $f_n(\theta)$

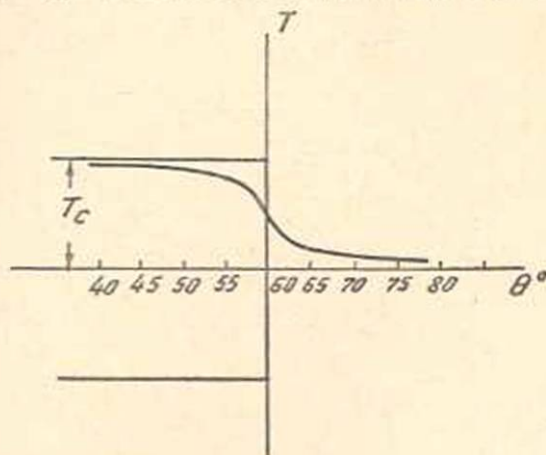
В работе [10] было показано, как, пользуясь условием теплового баланса на поверхности Земли, можно определить функции $f_n(\theta)$. В настоящей работе, в целях построения зональной муссонной циркуляции атмосферы и расчета примеров, будем считать, что распределение температуры по земной поверхности известно и имеет известный годовой ход.

Будем считать, что параллель $\theta = \theta_0$ отделяет материк от океана, кроме того, — отклонения температуры поверхности океана от зонального ее распределения равны нулю, а для материка имеют годовой ход с годовой амплитудой равной $\pm T_c^\circ \text{C}$ (точнее, считаем, что незональные отклонения температуры поверхности Земли над материком значительно больше таких над океаном, что достаточно хорошо согласуется с наблюдениями).

Схематически это представлено на фиг. 1.

Так как согласно (1.6) в момент $t = 0$ отклонения температуры равны нулю, то их можно представлять в следующем виде:

$$T(\theta, t) = \frac{T_c}{2} [1 - \text{th} \epsilon(\theta - \theta_0)] \sin 2\omega t. \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Зависимость наземной температуры от широты и времени.

Здесь T_c — температура суши, ϵ — безразмерное число, характеризующее контраст температуры. (2.1) показывает, что южнее береговой черты, когда $\epsilon(\theta - \theta_0) \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$, а севернее, когда $\epsilon(\theta - \theta_0) \rightarrow -\infty$, $T \rightarrow T_c$. Из этих условий может быть выбрано значение ϵ , чтобы добиться боль-

шего или меньшего температурного контраста летом и зимой. Ω — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца.

В безразмерных величинах (см. (8) из [10]) выражение (2.1) будет иметь точно такой же вид.

С одной стороны, согласно (1.6), (1.12) и (1.13), имеем:

$$T(\theta, 0, \tau) = \tau^2 \Theta(\theta, 0, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, 0) \tau^n = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) \tau^n. \quad (2.2)$$

С другой стороны, согласно (2.1) имеем:

$$T(\theta, 0, \tau) = \frac{T_c}{2} [1 - \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0)] \sin(\Omega \tau^2). \quad (2.3)$$

Следовательно

$$\tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) \tau^n = \frac{T_c}{2} [1 - \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0)] \sin(\Omega \tau^2)$$

или

$$\tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) \tau^n = \frac{T_c}{2} [1 - \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0)] \left(\Omega \tau^2 - \frac{(\Omega \tau^2)^3}{3!} + \frac{(\Omega \tau^2)^5}{5!} - \dots \right).$$

Откуда

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{T_c}{2} \Omega [1 - \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0)], \\ f_1 &= f_2 = f_3 = 0, \\ f_4 &= -\frac{T_c}{2} \frac{\Omega^3}{3!} [1 - \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0)], \\ f_5 &= f_6 = f_7 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим:

$$F_0(\theta) = \frac{T_c}{2} [1 - \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0)]. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_0 &= \Omega F_0, \quad f_4 = -\frac{\Omega^3}{3!} F_0, \quad f_8 = \frac{\Omega^5}{5!} F_0, \dots, \\ f_1 &= f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = f_7 = f_9 = \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

т. е. в конечном итоге все f_n , b_i и R_n будут выражены через одну функцию $F_0(\theta)$ и ее производные.

Прежде чем перейти к численным примерам, выпишем все результаты, которыми мы будем пользоваться, и численные величины всех введенных параметров.

§ 3. Решение для десяти первых номеров

Выпишем подробно все выражения для температуры и скоростей при $n \leq 9$.

Имеем:

$$\Theta_0 = f_0 L_2, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0, \quad \Theta_4 = f_4 L_6, \quad (3.1)$$

$$\Theta_5 = M \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \Theta_{5,2}, \quad \Theta_6 = 0,$$

$$\Theta_7 = \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 \Theta_{7,5} + f_0 \Delta f_0 \Theta_{7,6}, \quad \Theta_8 = f_8 L_{10},$$

$$\Theta_9 = M \sin 2\theta \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \Theta_{9,2} - M \omega \cos^2 \theta \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \Theta_{9,7} \quad (3.1)$$

и т. д.

Далее;

$$\varphi_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{0,1}, \quad \psi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 = \omega \cos \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{2,2}, \quad \varphi_3 = \psi_3 = 0,$$

$$\varphi_4 = \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \varphi_{4,1} - \omega^2 \cos^2 \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{4,4}, \quad \psi_4 = 0, \quad (3.2)$$

$$\varphi_5 = M \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \varphi_{5,6}, \quad \psi_5 = 0,$$

$$\varphi_6 = 0, \quad \psi_6 = \omega \cos \theta \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \varphi_{6,2} - \omega^2 \cos^2 \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{6,8},$$

$$\varphi_7 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 \varphi_{7,12} + \frac{\partial}{\partial \theta} (f_0 \Delta f_0) \varphi_{7,13} - \Delta f_0 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \varphi_{7,14},$$

$$\psi_7 = -M \omega \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \varphi_{7,10}, \quad \psi_8 = 0$$

и т. д.

И наконец

$$\sigma_0 = -\Delta f_0 \sigma_{0,1}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_4 = -\Delta f_4 \sigma_{4,1} + \omega^2 \left(\cos^2 \theta \Delta f_0 - \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \sigma_{4,4},$$

(3.3)

$$\sigma_5 = M \Delta \left(\sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \sigma_{5,6}, \quad \sigma_6 = 0,$$

$$\sigma_7 = -\Delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 \sigma_{7,12} - (\Delta f_0)^2 \sigma_{7,13} - f_0 \Delta \Delta f_0 \sigma_{7,14} - \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta f_0}{\partial \theta} \sigma_{7,15},$$

$$\sigma_8 = -\Delta f_8 \sigma_{8,1} + \omega^2 \left(\cos^2 \theta \Delta f_4 - \sin 2\theta \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \right) \sigma_{8,4} -$$

$$-\omega^4 \left(\cos^4 \theta \Delta f_0 - 2 \cos^2 \theta \sin 2\theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)_{\theta_{8,13}}$$

и т. д.

Здесь

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.4)$$

Имеем следующие значения для параметров [10]:

$$M = 8, \omega = 46,44, \Omega = 0,127, V = 10 \text{ м/сек}, H = 1,04 \cdot 10^3 \text{ м}, a = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$t_0 = 6,4 \cdot 10^5 \text{ сек.} \approx 7,5 \text{ суток}$; и так как $T_0 = 5^\circ \text{C}$, то $\frac{T_c}{2} = 1$ (если принять размерную температуру суши равной 10°C).

Далее принимаем $\varepsilon = 10$. Имеем:

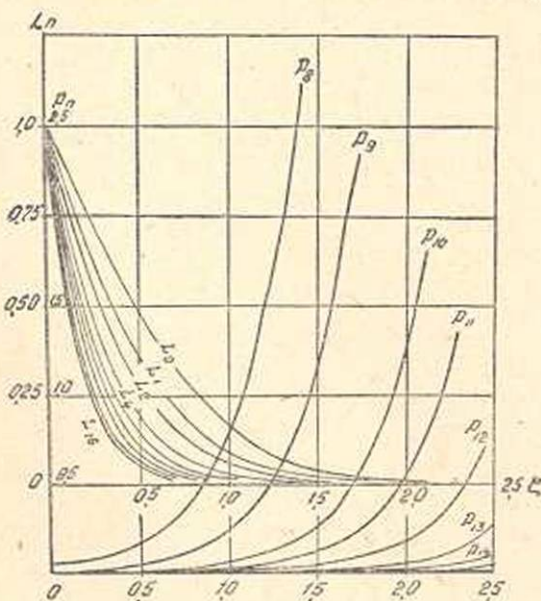
$$F_0(\theta) = 1 - \text{th } 10(\theta - \theta_0). \quad (3.5)$$

Причем $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ (т. е. 30° с. ш.).

Тогда

$$\begin{aligned} f_0 &= 0,127 F_0, \\ f_4 &= 0,34 \cdot 10^{-3} F_0, \\ f_8 &= 0,28 \cdot 10^{-6} F_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Значения функций $L_n(\zeta)$ до $n=9$ приводятся в работе [11]. Для наших целей необходимо было иметь $L_n(\zeta)$ до $n=16$, поэтому, воспользуясь соотношением (1.17), мы подсчитали недостающие номера и представили эти функции на фиг. 2.



Фиг. 2. Функции L_n и P_n в зависимости от ζ .

Далее, так как при $n \leq 7$ уравнение имеет решение $U_n = c_1 L_{n+k} + c_2 P_{n+k}$ + частн. решение, а последнее при $\zeta \rightarrow \infty$ ограничено, то условие $U_n = 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ требует, чтобы $c_2 = 0$. Следовательно, полиномы P_n при $n < 8$ в расчетах не участвуют, а P_n при $n > 8$ в пределах $\zeta = 0 - 2,5$ очень малы. Для удобства расчетов мы их определяем особым образом

(1.18). Тогда между ними получаются очень простые соотношения (1.19), пользуясь которыми мы подсчитали эти полиномы и необходимые из них представили на той же фиг. 2.

Легко убедиться, что между полиномами $P_n(\zeta)$, определяемыми по (1.18), и полиномами Чебышева—Эрмита [12] существует следующая связь:

$$P_n(\zeta) = \frac{H_n(i\zeta)}{i^n 2^n n!}. \quad (3.7)$$

Выпишем некоторые из них:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= \zeta, \\ P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{\zeta^2}{2!}, \\ P_3 &= \frac{\zeta}{4} + \frac{\zeta^3}{3!}, \\ P_4 &= \frac{1}{4^2 2!} + \frac{\zeta^2}{4 \cdot 2!} + \frac{\zeta^4}{4!} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (3.8)$$

В частности

$$P_{2n}(0) = \frac{2}{2^{2n} n!}, \quad P_{2n+1}(0) = 0. \quad (3.9)$$

Далее, в решении (3.1), (3.2) и (3.3) вошли величины $\Theta_{n,m}(\zeta)$, $\varphi_{n,m}(\zeta)$ и $\sigma_{n,m}(\zeta)$, которые являются комбинациями от функций $L_n(\zeta)$ и носят универсальный характер, так как они имеют один и тот же вид, независимо от распределения температуры по земной поверхности, и могут быть рассчитаны заранее. Для функций φ_n и ψ_n (горизонтальные составляющие скорости) они одинаковы.

В общем случае незональной задачи все функции f_n зависят не только от θ , но и от λ , тогда решение может быть представлено в виде конечной суммы

$$U_n(\theta, \lambda, \zeta) = \sum_{m=0}^n K_m(\theta, \lambda) U_{n,m}(\zeta), \quad (3.10)$$

где K_m — выражаются через $f_n(\theta, \lambda)$ и их производные по θ и λ , а $U_{n,m}$ — как раз те $\Theta_{n,m}(\zeta)$, $\varphi_{n,m}(\zeta)$ и $\sigma_{n,m}(\zeta)$, о которых только что говорилось. Мы подсчитали все эти функции для общего случая, но так как в настоящей работе решается зональная задача, поэтому слагаемые в сумме с производными по λ обращаются в ноль, а в решении (3.1) — (3.3) мы сохранили нумерацию общей задачи. Выпишем некоторые из них.

$$\Theta_{n,2} = \frac{A_{n-3}}{A_{n-2}} (L_{n+2} - 2L_n + L_{n-2}), \quad (3.11)$$

$$\Theta_{n,4} = \frac{A_{n-5}}{A_{n-4}} \frac{4}{3} (L_{n+2} - 3L_n + 3L_{n-2} - L_{n-4})$$

и т. д.

$$\varphi_{n,1} = 2 \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}), \quad (3.12)$$

$$\varphi_{n,2} = 2 \frac{A_n}{A_{n+1}} (L_{n+5} - 2L_{n+3} - L_{n+1}),$$

$$\varphi_{n,3} = \frac{1}{2} \frac{A_{n-1}}{A_n} (L_{n+5} - 3L_{n+3} + 3L_{n+1} - L_{n-1}).$$

Для определения $\sigma_{n,m}$ приходится вычислять интеграл $\int_0^{\zeta} \varphi_{n,m} d\zeta$,

т. е. интеграл от L_n , который легко берется

$$\int_0^{\zeta} L_n d\zeta = \frac{A_n}{A_{n+1}} (L_{n+1} - 1). \quad (3.13)$$

Пользуясь этой формулой, легко получим

$$\sigma_{n,1} = 2 \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} \left[\frac{A_{n+5}}{A_{n+6}} (L_{n+6} - 1) - \frac{A_{n+3}}{A_{n+4}} (L_{n+4} - 1) \right],$$

или

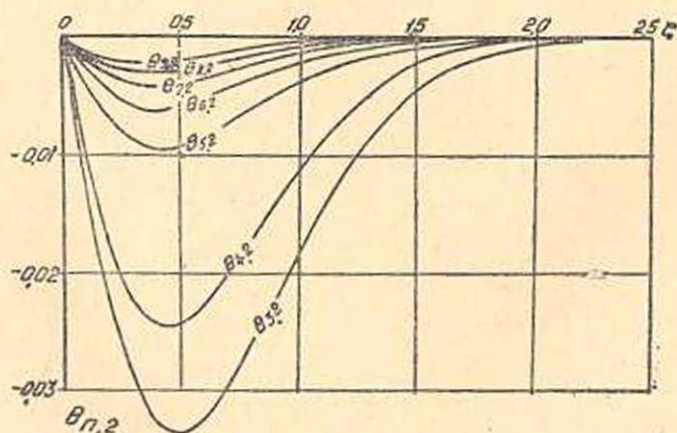
$$\sigma_{n,1} = \frac{2}{(n+4)(n+6)} [(n+5)L_{n+6} - (n+6)L_{n+4} + 1] \quad (3.14)$$

и т. д.

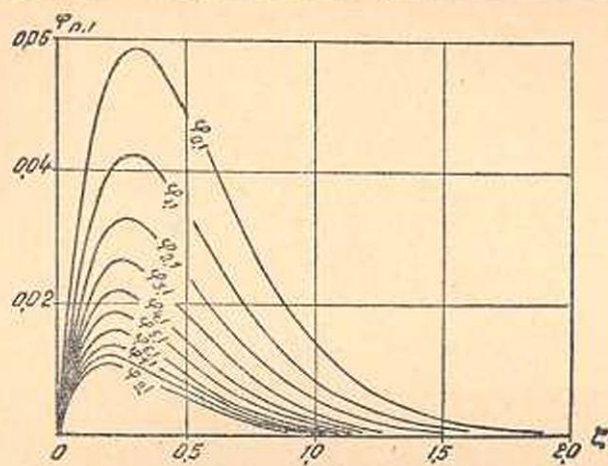
Коэффициенты A_n берутся согласно (1.16').

Заметим, что все $\theta_{n,m}$ и $\varphi_{n,m}$ обращаются в ноль как при $\zeta=0$, при котором все $L_n = 1$, так и при $\zeta \rightarrow \infty$, при котором $L_n = 0$. Для $\sigma_{n,m}$ имеем $\sigma_{n,m} = 0$ при $\zeta=0$, а при $\zeta \rightarrow \infty$ все $\sigma_{n,m}$ принимают различные постоянные значения, что вытекает из условий нашей задачи.

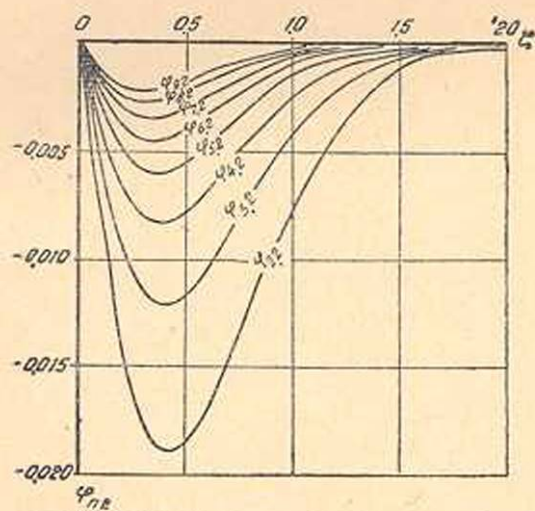
$\theta_{n,2}$ приводится на фиг. 3. На фиг. 4, 5, 6, приводятся соответ-



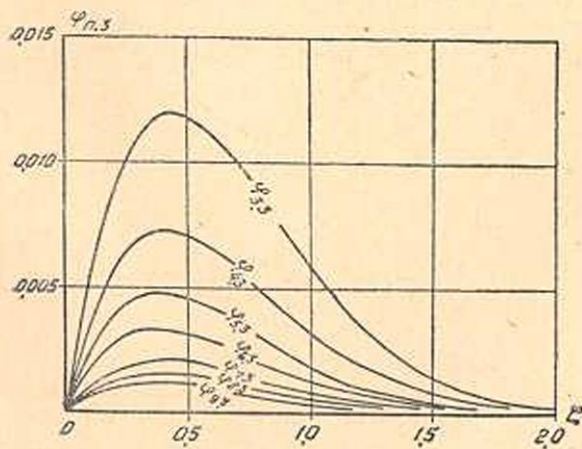
Фиг. 3. Функции $\theta_{n,2}$ в зависимости от ζ .



Фиг. 4. Функции $\varphi_{n,1}$ в зависимости от ζ .



Фиг. 5. Функции $\varphi_{n,2}$ в зависимости от ζ .

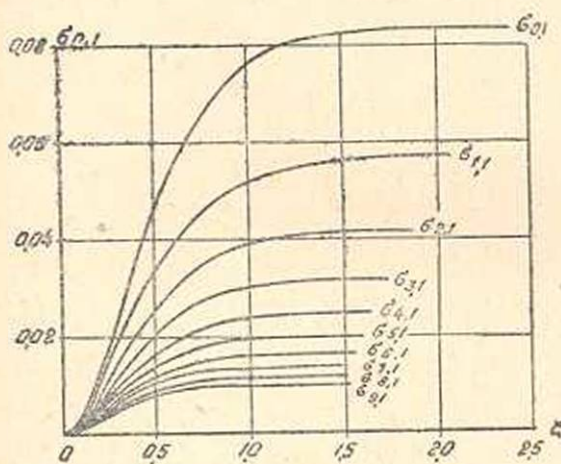


Фиг. 6. Функции $\varphi_{n,3}$ в зависимости от ζ .

ственно $\varphi_{n,1}$, $\varphi_{n,2}$ и $\varphi_{n,3}$, на фиг. 7, 8, 9, — $\sigma_{n,1}$, $\sigma_{n,2}$ и $\sigma_{n,3}$.

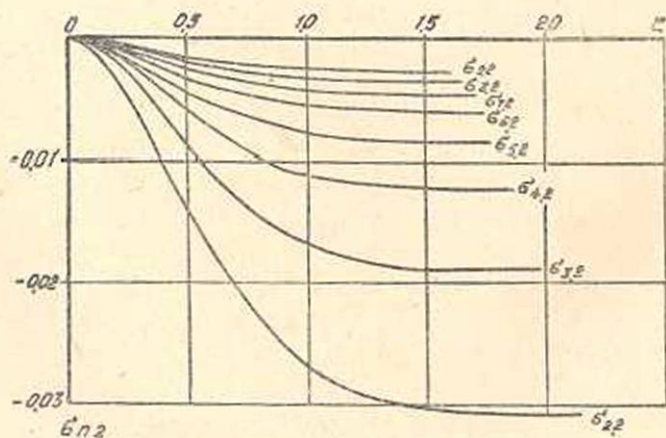
Приведем еще одну из этих функций при нелинейном члене.

$$\begin{aligned} \theta_{8,6} = & -4L_{10}(\zeta) P_{10}(0) \int_0^\infty \frac{L_{10}(\varphi_{0,1}L_3 + \varphi_{1,1}L_2)}{P_{10}L'_{10} - L_{10}P'_{10}} d\zeta + \\ & + 4L_{10}(\zeta) \int_0^\zeta \frac{P_{10}(\varphi_{0,1}L_3 + \varphi_{1,1}L_2)}{P_{10}L'_{10} - L_{10}P'_{10}} d\zeta + \\ & + 4P_{10}(\zeta) \int_\zeta^\infty \frac{L_{10}(\varphi_{0,1}L_3 + \varphi_{1,1}L_2)}{P_{10}L'_{10} - L_{10}P'_{10}} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

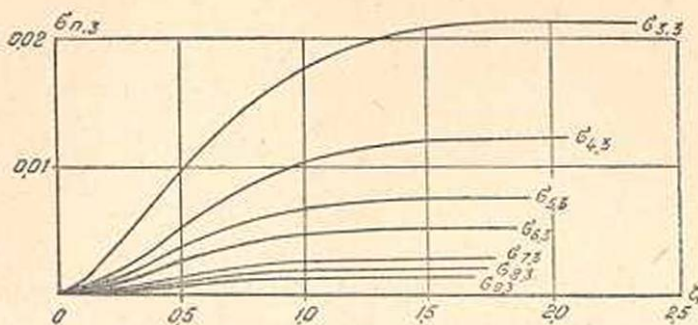


Фиг. 7. Функции $\sigma_{n,1}$ в зависимости от ζ .

Интегралы подсчитаны нами численным путем, пользуясь методом трапеций. Все эти функции нами протабулированы, таблицами можно пользоваться также при решении незональной задачи. Мы здесь их не приводим за недостатком места. Имея все эти выражения, мы теперь можем подсчитывать примеры.



Фиг. 8. Функции $\sigma_{n,2}$ в зависимости от ζ .

Фиг. 9. Функции $\sigma_{n,z}$ в зависимости от ζ .

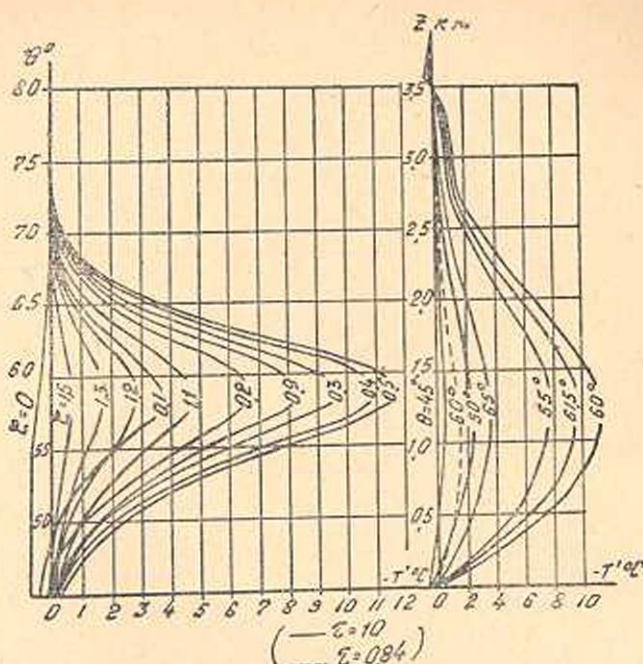
§ 4. Примеры расчетов

Пользуясь вышеприведенными формулами, мы рассчитали распределение зональной температуры и скоростей в муссонной циркуляции для материка и океана, согласно принятой схеме. Расчет проводился для морского (летнего) муссона следующим образом.

Для дополнения широты взяты следующие значения:

$\theta = 45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 57,5^\circ, 58,75^\circ, 60^\circ, 61,25^\circ, 62,5^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ$, причем, как говорилось выше, параллель, отделяющая материк от океана, проходит по $\theta = 60^\circ$, поэтому значения θ в ее окрестности взяты чаще. Далее, по формуле (3.5) для указанных значений θ вычислены $F_0(\theta)$, по (3.6) — f_0, f_4, f_8 и их первые четыре производные, а также Лапласиан по формуле (3.4). Результаты сведены в таблицы, которые здесь не приводятся. Имея $\Theta_{n,m}, \varphi_{n,m}$ и $\sigma_{n,m}$, легко подсчитать Θ_n по (3.1), φ_n и ψ_n — по (3.2) и τ_n — по (3.3). Далее восстанавливаются ряды (1.12), а по (1.6) рассчитываются безразмерные температура и скорости. Результаты всех этих подсчетов для некоторых значений τ представлены на фиг. 10—14. На фиг. 10, слева, показано распределение температурных отклонений (T') в зависимости от широты на различных высотах (ζ по (1.7)) через 7,5 суток после начала возникновения летнего (морского муссона). На правой фигуре приводятся вертикальные профили этих температур на различных широтах. Как видно из фиг. 10, T' положительны на поверхности Земли, на высотах — отрицательны, достигают наибольших значений на высоте порядка 1,2—1,3 км, разных для разных широт. На высотах 3—3,5 км эти отклонения снова меняют знак, а на больших высотах затухают. Хорошо видно также, что высота обращения T' зависит от широты.

На фиг. 11 представлены: слева — профили скоростей на различных широтах, в зависимости от высоты, также для $\tau = 1$ (7,5 суток), а справа — изменение v_0 по широте на различных высотах. Эти кривые показывают, что v_0 направлена с моря на материк и значительно превосходит v_1 в деятельном слое, имеющем толщину порядка 1,5—2,0 км. Наибольшее значение v_0 достигает на высоте 600—800 м., почти для всех широт, причем, как показывают кривые справа, v_0 на всех вы-



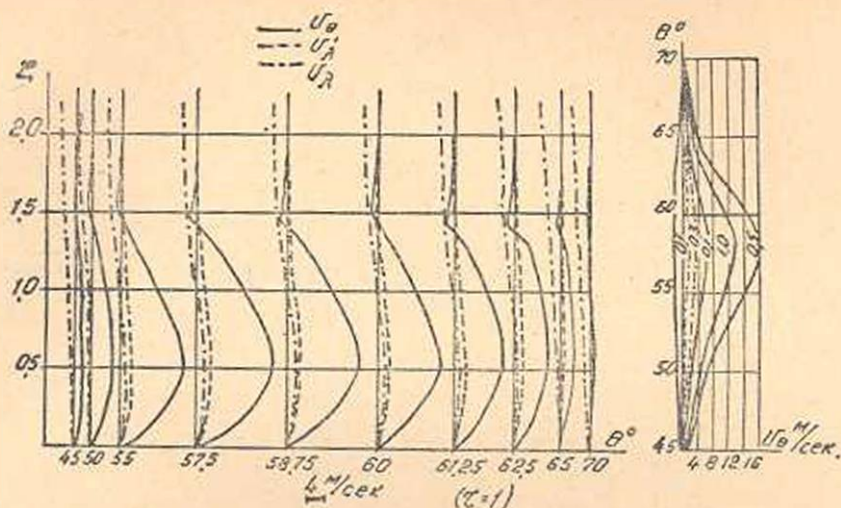
Фиг. 10. Зависимость температурных отклонений от высоты, широты и времени.

сотах растет с увеличением θ , достигая максимального значения еще до береговой линии, и далее постепенно затухает над материком. Высота обращения равна примерно 2,0–2,5 км, выше имеется слабое обратное течение. Эта высота также зависит от широты. На больших высотах устанавливается западный поток. В деятельном слое v_z направлена на запад и, в зависимости от широты, быстро меняет знак на противоположный, т. е. ветер на малых высотах дует под некоторым углом к берегу на СЗ, с увеличением высоты угол уменьшается, на некоторой высоте, зависящей от широты, ветер дует на С (высоты, где $v_z = 0$), затем на еще больших высотах ветер дует на СВ, постепенно приближаясь к западному потоку. Значительный интерес представляют профили в зависимости от высоты для трех значений $\theta = 50^\circ$, 60° , 65° в различные моменты времени, представленные на фиг. 12. Эти кривые показывают развитие муссона во времени.

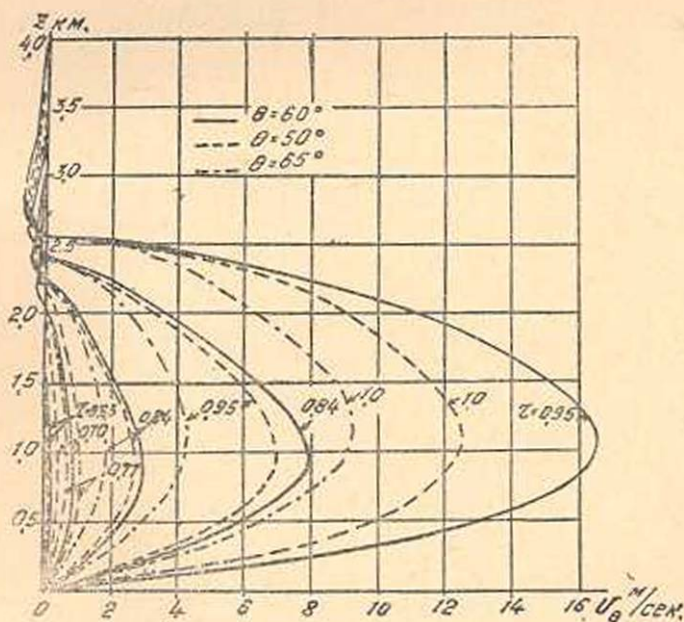
По времени взяты значения $\tau = 0,63; 0,70; 0,77; 0,84; 0,95; 1,0$, что соответствует времени в сутках 4,6; 5,2; 5,8; 6,4; 7,0; 7,5 после начала возникновения муссона.

Как видно из графика, скорость v_z довольно быстро растет с увеличением времени, причем этот рост зависит от широты. Увеличиваются также высота обращения v_z , а также высота, где достигается максимальное значение и само максимальное значение.

На фиг. 13 представлены вертикальные скорости в зависимости от широты на различных высотах при $\tau = 1$. Максимальное значение вертикальной составляющей скорости над материком оказывается по-



Фиг. 11. Зависимость горизонтальных составляющих скорости от высоты, широты и времени.



Фиг. 12. Развитие муссона во времени и по высоте, на различных широтах.

рядка 1,2 м/сек в пяти градусах широты севернее от береговой черты на высоте около 2,1 км. Вертикальная скорость на всех высотах меняет знак не над самой береговой чертой ($\theta_0 = 60^\circ$), где она еще отрицательна (направлена вниз), а несколько севернее. Максимальные отрицательные скорости получаются над океаном, несколько южнее береговой черты.

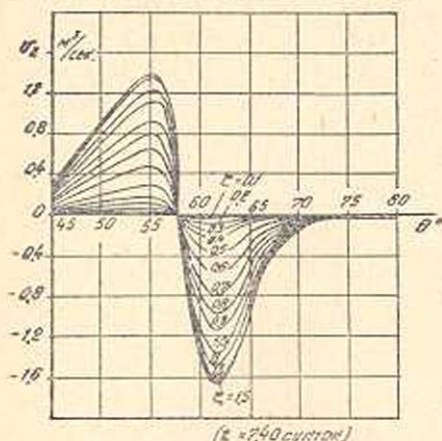
Вдали от берега эти скорости затухают над океаном быстрее, чем над материком.

На фиг. 14 представлены профили v_z в зависимости от высоты для различных широт в два момента времени при $\tau = 0,84$ и $\tau = 1,0$.

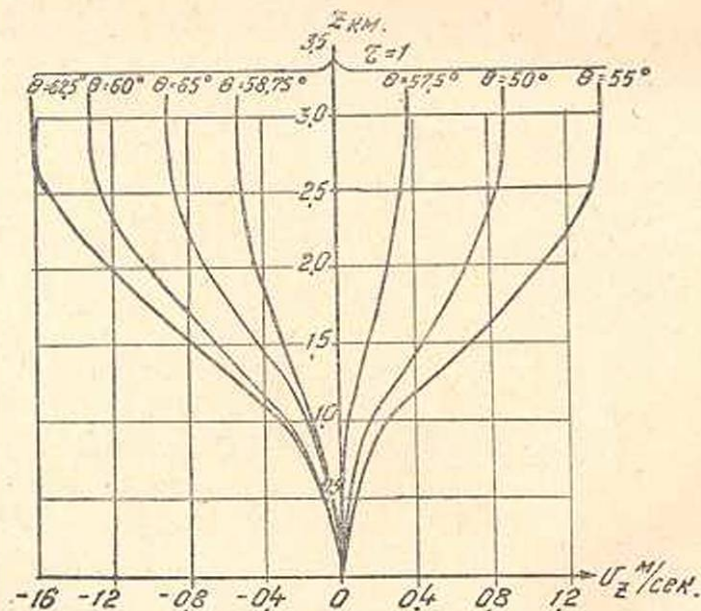
Кривые показывают развитие вертикальных скоростей по времени.

Полученные результаты показывают достаточно хорошее согласие теории с наблюдениями. Следует отметить, что принятая зональная схема не отвечает действительности и, кроме того, значительное влияние оказывают горы.

Решение незоной задачи не встречает принципиальных затруднений, следует только при определении f_n считать $\theta_0 \neq \text{const}$. $\theta_0 = \theta_0(\lambda)$, где λ — долгота места. Расчету примеров по этой схеме будет посвящена наша следующая статья.



Фиг. 13. Зависимость вертикальной скорости от высоты, широты и времени.



Фиг. 14. Развитие вертикальной скорости во времени и по высоте, на различных широтах.

Ա. Մ. Մխիթարյան

ՄՔՆՈԼՈՐՏԻ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԶՈՆԱԼ ՄՈՒՍՍՈՆԱՅԻՆ
ՑԻՐԿՈՒԼԱՑԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հիմնվելով [10] աշխատության վրա, ալյատեղ առաջարկվում է մթնոլորտի ոչ-ստացիոնար զոնալ ցիրկուլացիայի մոդել: Երկրագունդը դիտվում է որպես սֆերա, որը մի զուգահեռականով բաժանված է ցամաքի (Հյուսիսում) և օվկիանոսի (Հարավում): Պարզ է, որ այս դեպքում, ցիրկուլացիայի էլեմենտները կախված չեն լինի աշխարհագրական երկարությունից: Ընդունվում է, որ ցիրկուլացիան սկսվելուց առաջ զոնալ լինի ունի հիմնական զոնալ հոսանք: Հաշվի է առնվում կորիոլիսի ուժի ազդեցությունը: Մուսսոնային ցիրկուլացիան դիտվում է որպես հիմնական զոնալ հոսանքի զրգուռմաներ, բնդ որում վերջիններս վերջավոր մեծություններ են և համեմատելի հիմնական զոնալ հոսանքի հետ, որի պատճառով ոչ-զոնալ անդամներն արհամարհել չի կարելի:

Հալասարումների (1.1)–(1.4) սխեման (1.7) ձևափոխությունից հետո բերվում է (1.8)–(1.11) տեսքին, լուծումը որոնվում է (1.12) տեսքով: Ընդունելով երկրի վրա ջերմաստիճանի բաշխումը (2.1) տեսքով, ստացվում են (3.1)–(3.4) արդյունքները: Այնուհետև բերվում են տեսական հաշվումների օրինակներ, որոնց արդյունքները ներկայացված են նկարներ 1–14-ի վրա: Այդ արդյունքները բավականաչափ լավ համընկնում են դիտումների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner. Zur Aeorologie des Indischen monsons. Gerlands Beitr., 1931.
2. Воейков А. И. Климаты земного шара. 1884.
3. Алисов Б. П. и др. Курс климатологии под редакцией Рубинштейна Е. С. ГИМИЗ. 1940.
4. Шулейкин В. В. Физика моря. 1953.
5. Гусев А. М. К теории муссонов. Изв. АН СССР (сер. геогр. и геофиз.), 4, 1938.
6. Jeffreys H. On the Dynamics of Winds. Quart. Journ., v. 52, 1926.
7. Дмитриев А. А. Влияние материков и океанов на общую циркуляцию атмосферы. 1946.
8. Линейкин П. С. Гидродинамическая теория муссонов над круглым островом. Изв. АН СССР, (сер. геогр. и геофиз.), 2, 1947.
9. Гутман Л. И. и Монин А. С. О вертикальной структуре муссонов. Метеор. и гидр. 6, 1947.
10. Мхитарян А. М. К теории конвекции большого масштаба. Изв. АН АрмССР, (сер. ф.-м. н.), 1, 1955.
11. Гутман Л. Н. К вопросу о расчете теплового состояния твердых тел. Инж. сборник, т. 15, 1953.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, 1953.