

В. А. Амбарцумян

Об эволюции галактик*

§ 1. Введение. Попытки приблизиться к разрешению вопроса о происхождении галактик основывались до сих пор, главным образом, на спекуляциях, связанных со стремлением объяснить замечательный факт взаимного удаления внегалактических туманностей. Иными словами, эти попытки производились в рамках существующих космологических теорий, которые, как правило, основываются лишь на некоторых интегральных и средних характеристиках окружающего нас мира галактик.

Хотя изучение ближайших к нам скоплений и групп галактик, а также исследование отдельных галактик еще не продвинулось достаточно далеко, все же, накопился уже богатый материал, на который можно опираться при решении вопросов, касающихся возникновения и развития галактик.

При этом, особого внимания заслуживают данные, относящиеся к кратным галактикам, к группам галактик и к скоплениям галактик. В этой связи стоит вкратце остановиться на том значении, которое имело изучение кратных звезд и звездных скоплений для проблемы происхождения и эволюции звезд.

1. Само существование звездных скоплений в Галактике, вместе с некоторыми статистико-механическими соображениями о необратимом характере процесса распада скоплений, привел еще в тридцатых годах к выводу о том, что звезды их составляющие возникли совместно. Иными словами, было установлено, что звезды в Галактике *могут* возникать группами [1].

2. Статистические данные, относящиеся к двойным звездам привели к выводу, что составляющие каждой звездной пары имеют общее происхождение [2].

3. Само существование звездных ассоциаций дало возможность сделать вывод о продолжающемся в Галактике процессе звездообразования [3]. Открытие расширения звездных ассоциаций позволило заключить о том, что, по крайней мере, значительная часть звезд, входящих в плоские подсистемы Галактики (спиральные ветви и диск), также возникла в составе звездных групп, теперь уже распавшихся [4].

* Настоящая статья представляет собой отчет, представленный автором XI Сольвейской конференции в Брюсселе в июне 1958 года. Отдельные места переработаны при подготовке статьи к печати.

4. Изучение диаграмм спектр-светимость для звездных скоплений позволило построить интересные схемы эволюции различных звезд. Эти схемы нуждаются в дальнейшей проверке, однако их значение для решения проблемы чрезвычайно велико.

5. Выделение кратных систем типа Трапеции Ориона дало возможность установить существование особенно молодых кратных звезд и, тем самым, приблизиться к самому моменту образования звездной группы.

Нам кажется, что в этом отношении положение дел в мире галактик является еще более благоприятным. Кратные галактики и группы галактик дают интересный материал для суждения о групповом возникновении галактик. Более того, тенденция к группированию в мире галактик настолько сильна, что всякое изучение галактик поневоле связывается с вопросом о природе той или иной группы.

Так, например, такие близкие к нам гигантские звездные системы, как М 31, М 81 и М 101, являются центрами в высшей степени интересных групп галактик. Сама наша Галактика имеет несколько спутников различной природы. Поэтому естественно думать, что вопрос о происхождении галактик не может быть отделен от вопроса о происхождении их групп и скоплений.

Обратим теперь внимание на то, что в кратных галактиках периоды обращения достигают миллиарда лет и более, а в скоплениях время, необходимое для одного оборота вокруг центра скопления, должно измеряться несколькими миллиардами лет. Между тем, возраст самих галактик достигает, как принято думать, тоже всего нескольких миллиардов лет. В таком случае как кратные галактики, так и скопления галактик в их настоящем состоянии должны были даже в самой конфигурации компонентов сохранить следы первоначальных условий образования группы. А это, по-видимому, означает возможность приблизиться хотя бы к кинематике тех явлений, которые привели к образованию группы.

В настоящем сообщении мы начинаем рассмотрение вопроса именно с проблемы кратных галактик и скоплений галактик. Однако изучение некоторых кратных систем привело нас к заключению, что между механизмом образования компонент и способом возникновения отдельных особенностей в структуре галактики существует интимная связь. Пока еще трудно понять точный характер этой связи, но нам кажется, дальнейшее изучение этой стороны вопроса должно открыть большие перспективы в решении вопроса о происхождении наблюдаемых структур отдельных галактик. Наконец, исследование радиогалактик, систем, в которых происходят бурные нестационарные процессы, показало, что в каждой такой системе мы встречаемся в том или ином виде со следами двойственности. Сопоставляя это с другими данными, относящимися к кратным галактикам, мы видим, что чем теснее двойная или кратная система, тем более резко выявляются следы нестационарности. Все это вновь подчеркивает значение фактов, относящихся к кратности галактик и к тенденции галактик составлять группы, для проблемы происхождения и эволюции галактик.

Посвящая настоящий доклад этим вопросам, мы вместе с тем, сознательно опускаем многие данные, относящиеся к звездному населению галактик и представляющие интерес для проблемы эволюции галактик, поскольку эти вопросы освещены в работах Бааде и других астрофизиков.

§ 1. Физический смысл тенденции к группированию. После работ Цвикки [5], а также Скотт и Шена [6] имеются веские основания считать, что большинство галактик входит в состав скоплений или групп галактик, в то время как число изолированных галактик в общем метагалактическом поле мало. В этом смысле даже трудно говорить о сколько-нибудь однородном общем метагалактическом поле, которое может быть противопоставлено сгущениям галактик. Следует считать, что это поле как раз и состоит, в основном, из различных скоплений и групп, т. е. из неоднородностей различного масштаба. В этом отношении положение дел в Метагалактике сильно отличается от того, что имеет место внутри звездных систем, где обычно доминирует общее звездное поле с медленно меняющейся плотностью, а скопления являются отдельными, сравнительно редко встречающимися в этом поле неоднородностями.

Из статистической механики следует, что скопления и группы с течением времени должны распадаться [1]. При этом распад будет носить различный характер и требовать разных сроков в зависимости от того, находятся ли рассматриваемые скопления и группы в стационарных, либо в квазистационарных состояниях с отрицательной энергией, или же в состояниях, когда среди членов скопления имеется значительный процент таких, которые обладают положительной энергией и могут сразу покинуть скопление с большой скоростью.

Во втором случае распад должен происходить за время порядка промежутка, необходимого для того, чтобы галактика, входящая в скопление, пересекла его от одного края до другого, т. е. за время порядка сотен миллионов или 1—2 миллиарда лет.

В первом же случае, когда скопление обладает отрицательной энергией, распад должен произойти благодаря тому, что в результате взаимных сближений некоторые галактики должны получать положительную энергию и покидать скопление. Иными словами, в этом случае действует механизм аналогичный тому, который имеет место в стационарных звездных скоплениях. Однако этот механизм требует уже сроков порядка сотен миллиардов и более лет. Поскольку возраст галактик измеряется всего несколькими миллиардами лет, то значение этого механизма в большинстве случаев невелико.

Таким образом, можно сказать, что либо скопления должны распаться вследствие своей нестационарности, если они имеют в своем составе значительное число членов с положительной энергией, либо они являются стационарными и должны распаться столь медленно, что эффект этого распада не может иметь существенного значения.

Вопрос о том, какой из рассмотренных двух вариантов имеет место в отношении данного скопления в каждом конкретном случае должен решаться на основе анализа лучевых скоростей и их сопоставления с массой скопления, которая должна быть определена, по возможности, независимым путем. В дальнейшем мы приведем некоторые конкретные примеры. Однако, из того факта, что одиночных галактик мало, можно заключить, что скопления с положительной энергией или такие, у которых значительная часть членов обладает скоростями, превосходящими скорость отрыва, во всяком случае, не составляют большинства.

Выше мы говорили о том, что в результате взаимных сближений возможен распад стационарного скопления, происходящий вследствие ухода галактик, получивших большую кинетическую энергию. Можно представить себе, конечно, и обратный процесс, когда внешняя галактика входит в скопление со значительной скоростью и, отдав там свою энергию, остается в скоплении. Однако нетрудно показать, что такие процессы, при современном состоянии Метагалактики, должны происходить с частотой на много порядков меньшей, чем прямые процессы выброса галактик из скопления. Между тем мы видели, что и эти прямые процессы происходят столь редко, что не могут иметь существенного значения для скоплений с орбитальной энергией. Отсюда следует, что процессами захвата можно совершенно пренебречь.

Вывод. В современных условиях Метагалактики, скопления и группы могут либо сохраняться, либо распадаться. Но они не могут обогащаться за счет галактик, которые возникли независимо от них.

§ 2. Отклонения от диссоциативного равновесия. Заслуживает внимания тот факт, что в составе известных нам скоплений галактик встречаются двойные и кратные галактики. Более часто двойные и кратные галактики встречаются в рассеянных скоплениях типа Virgo. По-видимому, их гораздо меньше в компактных скоплениях типа Coma. В таких сравнительно бедных группах, как Местная система галактик двойные и кратные галактики встречаются относительно часто. Однако, если учесть существование субкарликовых галактик типа объектов в Скульпторе и Печи, то каждая из кратных галактик может, по-видимому, считаться группой, состоящей из примерно десятка членов. Так, например, наша Галактика с Магеллановыми облаками образует тройную систему. Но она окружена еще несколькими субкарликовыми системами типа Скульптора. Галактика в Андромеде является кратной системой, состоящей из пяти членов. Но, вероятно, и около нее имеются системы типа Скульптора. По этой причине, казалось, следовало бы говорить скорее о группах, в которые входят соответственно наша Галактика и M 31. Вспомним, однако, что, говоря о кратности звезд, мы не учитываем возможного присутствия планет, поскольку эти последние обладают массой, незначительными по сравнению со звездами. Точно также, при определении кратности галактик целесообразно не учитывать системы типа Скульптора, как не учитываются и шаровые скопления, имеющие, по-

видимому, массы, лишь немного уступающие массам галактик типа Скульптора.

В таком случае приходится считаться с фактом, что в нашей Местной системе, содержащей лишь несколько одиночных галактик (M 33, NGC 6822, IC 1613 и, возможно, некоторые другие), имеется одна тройная галактика и одна галактика еще более высокой кратности. Можно поставить вопрос, каково должно было быть математическое ожидание числа двойных и кратных галактик при диссоциативном равновесии. Оказывается, что при диссоциативном равновесии математическое ожидание числа двойных галактик в Местной системе должно было быть меньше 0.05, а математическое ожидание числа тройных галактик и галактик более высокой кратности во много раз меньше. Поэтому, тот факт, что мы имеем в Местной группе галактик две системы столь высокой кратности, является очень сильным отклонением от диссоциативного равновесия. Таково же положение во многих других группах и скоплениях. В некоторых случаях степень отклонения от диссоциативного равновесия во много раз больше.

Если бы пары галактик и кратные галактики возникали в результате взаимного захвата (при тройных сближениях) или каким-нибудь иным образом, из независимо друг от друга возникших одиночных галактик, то на начальном этапе развития скоплений в них, конечно, могли бы иметь место отклонения от диссоциативного равновесия. Однако эти отклонения должны были быть в противоположную сторону, т. е., число кратных галактик должно было быть меньше, чем при диссоциативном равновесии. Только с течением времени среднее число кратных галактик в скоплениях могло бы достигнуть теоретического значения, соответствующего диссоциативному равновесию. Процент кратных галактик, с точностью до статистических флуктуаций, в этом случае никогда не превзошел бы указанного теоретического значения.

Тот факт, что процент кратных систем на самом деле гораздо выше этого теоретического предела, указывает на неправомерность нашего предположения о том, что кратные галактики возникли из одиночных.

Вывод. Составляющие любой кратной галактики возникли совместно.

Этот вывод основан на статистических соображениях, поэтому он справедлив по отношению к подавляющему большинству кратных галактик. Однако, наше доказательство оставляет возможность отдельных исключений, т. е., возможность того, что какое-то ничтожное меньшинство кратных галактик все же образовалось в результате взаимного захвата (при тройных сближениях или иным путем) из одиночных галактик.

§ 3. Наблюдаемые конфигурации кратных галактик. За время жизни галактик (несколько миллиардов лет) возмущения в состояниях кратных галактик, возникающие вследствие сближений с другими внешними галактиками должны были быть незначительными. Поэтому можно рассчитывать, что эти состояния носят в себе следы первоначальных условий

возникновения кратных систем. Естественно, поэтому, искать в статистических данных, характеризующих совокупность двойных и кратных галактик информацию о механизме их образования. К сожалению, мы не располагаем достаточно надежными *количественными* данными подобного рода. Например, было бы интересно знать закон распределения расстояний между компонентами двойных галактик. Что же касается до значений этого расстояния для отдельных изученных пар, то сами по себе они вряд ли могут дать основание для космогонических обобщений.

Совершенно иначе обстоит дело с кратными галактиками, в которых число компонент больше двух. Каждая такая галактика характеризуется некоторой *пространственной конфигурацией* ее компонентов. Рассмотрев даже небольшое число подобных конфигураций, мы можем сделать заключение *о преобладающем среди кратных галактик типе конфигураций*.

Правда, мы непосредственно наблюдаем не пространственные конфигурации, а лишь их проекции на небесную сферу. Однако изучение этих проекций позволяет сделать заключение о характере пространственных конфигураций.

При изучении проблем, относящихся к сравнительно молодым кратным звездам, мы разделили все возможные конфигурации на два главных типа: *конфигурации типа Трапеции Ориона* и *конфигурации обыкновенного типа* [7]. Напомним определение тех и других.

Под кратной системой типа Трапеции мы подразумеваем кратную систему, в которой можно найти три таких компонента a, b, c , что все три расстояния ab, bc и ac одинакового порядка величины. Если в кратной системе нельзя найти трех таких компонентов, то ее называют системой *обыкновенного типа*.

Это определение нуждается в дополнении. Для его применения нужно условиться о том, в каком случае три расстояния мы считаем величинами одного порядка. Удобно считать расстояния ab, bc, ac одного порядка в том случае, когда все три отношения $\frac{ab}{ac}, \frac{ab}{bc}$ и $\frac{ac}{bc}$ заключены

в пределах между κ_0 и $\frac{1}{\kappa_0}$, где κ_0 — некоторое число порядка $\sqrt{10}$.

Если мы хотим произвести более строгий отбор, то значение κ_0 можно взять несколько меньшим, чем $\sqrt{10}$. Например, в некоторых работах мы брали $\kappa_0 = 2.5$. Те же системы, где нет троек, в которых отношение наибольшего расстояния к наименьшему меньше 2.5, но есть тройка, в которой это отношение заключено между 2.5 и 3, мы называли системами *промежуточного типа*.

Такое разделение конфигураций кратных систем на два основных типа с прибавлением промежуточного типа, введенного нами лишь для большего разграничения основных типов, оказывается полезным и для целей внегалактической астрономии.

Как известно, среди звезд резко преобладают системы обыкновенного типа. Только лишь среди кратных звезд, в состав которых входят

звезды типа О, наблюдается большой процент систем типа Трапеции. В меньшей степени это справедливо в отношении систем, куда входят В0 звезды. Как известно, эта особенность звезд типа О и В0 связана с их относительной молодостью. Поскольку, однако, звезды типа О и В0 составляют ничтожный процент всей совокупности кратных звезд, то это не меняет того факта, что кратные звезды, как правило, представляют собой конфигурации обыкновенного типа.

С совершенно иным положением мы сталкиваемся в случае кратных галактик. Если мы берем кратные системы, содержащиеся в опубликованных списках двойных и кратных галактик, то оказывается, что процент конфигураций типа Трапеции среди них значительно превосходит процент систем обыкновенного типа.

Так, например, среди 132 кратных галактик, встречающихся в каталоге Холмберга [8], 87 имеют такие конфигурации, что безусловно должны быть отнесены к типу Трапеции. Только 27 систем являются системами обыкновенного типа, в то время, как остальные 18 имеют конфигурации промежуточного типа [9].

Резкая противоположность между характером конфигураций кратных галактик и конфигураций кратных звезд может быть проиллюстрирована также следующими примерами.

Если мы выберем из каталога визуально-кратных звезд всего неба те шесть кратных, главные компоненты которых обладают наибольшими видимыми яркостями среди всех главных компонент каталога кратных звезд, то окажется, что все эти шесть кратных звезд обладают конфигурациями обыкновенного типа.

Если же теперь мы выпишем из каталога Холмберга шесть кратных галактик с наибольшими яркостями главных компонент, то все они окажутся системами типа Трапеции.

Возьмем далее наиболее яркую звезду высокой кратности. Например, среди известных нам шестикратных звезд наибольшей видимой яркостью обладает Кастор. Говоря об этой звезде, как о шестикратной системе, мы учитываем, что каждый из ее трех визуальных компонент является спектрально двойной. Это — система, имеющая типичную обыкновенную конфигурацию. С другой стороны, наиболее выдающимся по блеску объектом среди шестикратных галактик является кратная система NGC 6027, изученная Сейфертом [10]. Она является характерной трапецией. Типичность этой трапеции подчеркивается тем, что из ее компонентов многими способами можно выбрать тройки галактик, все расстояния внутри которых — величины одного порядка.

Мы здесь не будем разбирать вопрос об избирательности каталога кратных галактик в отношении конфигураций разного типа. Точно также, мы не будем рассматривать чисто технический вопрос о поправках, которые необходимо внести в статистические данные для перехода от распределения по типам, получающимся в проекции, к распределению по типам, которое должно было бы получиться, если бы мы имели возможность вести статистику *пространственных* конфигураций. Эти вопро-

сы в первом приближении рассмотрены в соответствующих работах автора. Получающиеся количественные поправки не меняют качественный результат. Поэтому мы получаем следующий вывод: *Большинство кратных галактик обладает конфигурациями типа Трапеции.*

§ 4. О причине преобладания трапеций. Тот факт, что подавляющее большинство кратных звезд имеет конфигурации обыкновенного типа, находит следующее естественное объяснение. Конфигурация типа Трапеции, как правило, неустойчива даже в том случае, если полная энергия кратной системы отрицательна. В то время как движения в системе обыкновенного типа могут быть приближенно сведены к сумме нескольких кеплеровских (а значит периодических) движений, движения в системе типа Трапеции являются весьма сложными и запутанными. С течением времени, при близком прохождении друг около друга двух компонент, одна из них может приобрести кинетическую энергию, достаточную, чтобы покинуть систему. Это тот же механизм, который действует в открытых звездных скоплениях. Подсчеты показывают, что для разрушения системы, обладающей конфигурацией типа Трапеции, в среднем нужно, чтобы ее компоненты совершили несколько оборотов. Для большинства звезд этот промежуток времени ничтожен по сравнению с их возрастом. Поэтому подавляющее большинство возникших в Галактике систем типа Трапеции должно было разрушиться. Это объяснение, вместе с тем, дает возможность понять наблюдаемое в отношении звезд типов О и В0 исключение из правила. Многие из этих звезд обладают возрастом порядка 10^6 лет и значительно меньше, чем 10^7 лет. Между тем период обращения в наблюдаемых кратных звездах типа Трапеции должен быть порядка 10^5 — 10^6 лет. Поэтому число оборотов, вокруг центра тяжести, которое могли успеть совершить компоненты этих трапеций должно измеряться всего несколькими единицами. Вследствие этого эти кратные системы не успели разрушиться.

Но в отношении *кратных галактик* имеет место как раз такое же положение дел, что и в отношении О-В звезд. Возраст кратных галактик измеряется несколькими миллиардами лет, между тем как время оборота в них достигает порядка миллиарда лет. Следовательно, компоненты кратных галактик могли успеть совершить лишь очень небольшое число оборотов. По этой причине кратные галактики, имевшие конфигурации типа Трапеции, не успели разрушиться.

Поскольку механизм разрушения наблюдаемых нами кратных галактик, действующий избирательным образом только на системы типа Трапеции, не должен был успеть воздействовать в большинстве систем, то современное распределение конфигураций по типам отражает, по-видимому, то начальное распределение, которое обусловлено закономерностями возникновения кратных галактик.

Вывод. *Высокий процент конфигураций типа Трапеции среди кратных галактик находится в полном согласии с соотношением между возрастом галактик и периодами обращения в кратных системах.*

§ 5. Кратные системы с положительной энергией. В предыдущем параграфе мы говорили об «обращениях» отдельных компонент в кратной галактике. Это предполагает, что речь идет о системах, в которых компоненты, по крайней мере на начальной стадии развития, удерживаются друг около друга гравитационными силами. Иными словами, мы до сих пор подразумевали, что все кратные галактики возникают, как системы с отрицательной полной энергией.

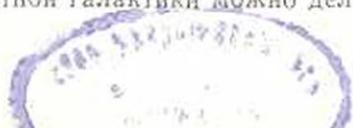
На самом деле, для суждения о знаке энергии данной кратной системы нам нужны довольно подробные данные о массах и скоростях компонент, помимо данных об их конфигурации. К сожалению, имевшиеся до последнего времени сведения о массах двойных и кратных галактик получались из предположения, что система обладает отрицательной энергией, т. е., из гипотезы, которую как раз подлежит проверить.

Постановка вопроса о возможном существовании кратных систем с положительной энергией, может показаться излишней, так как в случае звезд все хорошо изученные до сих пор двойные и кратные системы оказались обладающими только отрицательной энергией. Представим, однако, на минуту, что кратные звезды возникают в Галактике как с отрицательной, так и с положительной энергией. Системы с положительной энергией должны распасться за время порядка 10^5 лет. Это время очень мало по сравнению с возрастом подавляющего большинства звезд. Именно этим должно объясниться, что кратные звезды, внутренние движения которых нами до сих пор изучены, имеют отрицательную энергию. Однако, поскольку кратные звезды типа Трапеции являются молодыми, нельзя без дальнейшего изучения утверждать, что все они обладают отрицательной энергией. Наоборот, следует думать, что некоторые системы типа Трапеции, встречающиеся в звездных ассоциациях, имеют положительную энергию. Так, например, находящаяся в скоплении IC 4996 (ассоциация в Лебедь) звезда ADS 13626 обладает визуальными компонентами, разность радиальных скоростей которых столь велика, что не может быть объяснена при допущении отрицательной полной энергии.

Аналогичное рассуждение справедливо по отношению к кратным галактикам, поскольку возраст некоторых кратных галактик может быть таким (порядка миллиарда лет), что компоненты хотя и находятся в процессе взаимного удаления, но не могли еще удалиться достаточно далеко друг от друга. Однако окончательное решение вопроса о существовании кратных галактик, обладающих положительной энергией, возможно только на основании критического изучения фактического материала, правда, пока весьма скудного.

Мы приведем здесь *некоторые* данные, свидетельствующие в пользу того, что некоторые кратные галактики действительно обладают положительной полной энергией.

а) Если принять, что все кратные системы обладают отрицательной полной энергией, то из наблюдаемых разностей радиальных скоростей компонент двойной или кратной галактики можно делать статистиче-



ские заключения о средних массах галактик. Раздельное рассмотрение вопроса для двойных галактик и для галактик более высокой кратности приводит в этом случае к заключению, что массы галактик, входящих в систему высшей кратности примерно в три раза больше, чем массы компонентов двойных галактик [9]. Поскольку нет оснований считать природу галактик в системах различной кратности различной, приходится допустить, что среди систем высшей кратности относительно чаще встречаются системы с положительной энергией. Вводя предположение о том, что их энергия отрицательна, мы получаем при этом искусственно завышенные значения вероятных масс для входящих в эти системы галактик. Это свидетельство существования кратных систем с положительной энергией носит косвенный характер. Поэтому мы приведем два прямых свидетельства.

в) Рассмотрим группу галактик, связанную с М 81. Она состоит из четырех ярких галактик: NGC 3031 (М 81), NGC 3034 (М 82), NGC 2976 и NGC 3077, а также из нескольких более слабых галактик. Видимые интегральные фотографические звездные величины перечисленных выше четырех ярких галактик, согласно определению Холмберга [11], равны 7.85, 9.20, 10.73, 10.57. Если мы не хотим допустить сверхвысоких значений отношения массы к светимости, мы должны принять, что массы всех членов группы, кроме перечисленных, малы и поэтому можем рассматривать группу, как широкую четверную систему. По своей конфигурации она соответствует типу Трапеции. То, что все четыре перечисленные галактики являются членами одной физической группы, вытекает из следующих соображений. Из них три (кроме М 82) имеют близкие друг к другу радиальные скорости. Их средняя, исправленная за движение Солнца, лучевая скорость равна $+72$ км/сек. Только у галактики М 82 лучевая скорость равна $+410$ км/сек. Поэтому относительно нее может возникнуть сомнение в принадлежности к группе. Однако между галактикой М 82 и галактикой NGC 3077 существует очень тесное физическое сходство. Обе они принадлежат к категории иррегулярных галактик, состоящих из населения второго типа и обе обладают высокой поверхностной яркостью. Вследствие того, что совпадение указанных характеристик среди относительно ярких галактик встречается очень редко, следует считать крайне невероятным, что мы имеем здесь дело со случайным проектированием М 82 на область неба, занимаемую группой. Таким образом, можно считать почти достоверным, что все четыре галактики физически связаны между собой. Тогда разницу в лучевых скоростях следует объяснить орбитальным движением.

Естественно сначала допустить, что наибольшей массой из указанных четырех галактик обладает наиболее яркая, т. е. М 81. Но масса ее определена на основании изучения вращения Гвидо Мюнчем [12]. Она близка к 10^{11} масс Солнца. Лучевая скорость М 82 отличается от лучевой скорости М 81 на 327 км/сек. Разница пространственных скоростей может быть гораздо больше. Нетрудно рассчитать, что такая разность скоростей может соответствовать только гиперболическому движению,

если сумма масс галактик М 81 и М 82 меньше, чем $3 \cdot 10^{11}$ солнечных масс. Таким образом, если предполагать эллиптическое движение, масса галактики М 82 должна, во всяком случае, превосходить $2 \cdot 10^{11}$ солнечных масс. Таким образом, доминирующую роль в системе должна играть галактика М 82, лучевая скорость которой отличается от лучевой скорости NGC 3077 уже на 436 км/сек и которая находится в проекции на расстоянии почти 55 тысяч парсек от М 82. Для того, чтобы объяснить эту разность скоростей, надо допустить, что минимальная масса М 82 больше, чем 10^{12} солнечных масс. Такое предположение ведет к необычайно большому значению отношения $\frac{M}{L}$ для М 82 (порядка 500).

Учитывая же, что реальные относительные скорости могут составлять значительные углы с лучом зрения, мы приходим к еще большим значениям массы М 82. Единственным выходом из создавшегося положения является допущение, что галактика М 82 просто удаляется из группы, связанной с М 81 со скоростью, значительно превосходящей скорость отрыва. Это означает, что один из членов группы получил уже в процессе ее возникновения положительную энергию.

с) Интересным примером является открытая Цвикки [13] группа из трех галактик IC 3481, IC 3483 и анонимная галактика, находящаяся между ними. Лучевые скорости их соответственно равны $+7011 \text{ км/сек}$ $+33 \text{ км/сек}$ и $+7229 \text{ км/сек}$. Загадкой является галактика IC 3483. Если она физически связана с остальными двумя, о чем свидетельствует соединяющее все три галактики волокно также, как и близость видимых величин IC 3481 и IC 3483, то мы прямо должны заключить, что имеем дело с галактикой, удаляющейся от группы, в которой она возникла.

Если же IC 3483 случайно проектируется на конец волокна, а на самом деле является близкой галактикой в соответствии со своей радиальной скоростью, то абсолютная величина этой галактики должна быть очень низка. Если, например, допустить, что она входит в состав скопления в Деве, то мы должны приписать этой галактике абсолютную величину около -14.5 . Такая абсолютная величина является действительно необычайной для спиральных галактик. Поэтому довольно вероятно, что справедливо именно первое предположение*.

д) Квинтет Стефана несомненно является физической группой. При рассмотрении фотографий этой группы особенно бросается в глаза тесная связь между компонентами NGC 7318a и NGC 7318b этой группы. Несмотря на это, разность лучевых скоростей этих двух галактик достигает почти 1000 км/сек . Поскольку две другие галактики этой системы NGC 7317 и NGC 7319 имеют лучевые скорости, отличающиеся от лучевой

*Здесь и в дальнейшем мы исходим из значения постоянной Хаббла $H=180 \text{ км/сек}$ мегапарсек, полученной в работе Хьюмассона, Мейола и Сенделжа [14]. Согласно работе Сенделжа, доложенной на Сольвейской конференции 1958 г., $H=75 \text{ км/сек}$ на мегапарсек.

Однако мы не сочли необходимым изменить цифры, данные в тексте, поскольку основные выводы настоящей статьи сохраняют свою силу независимо от принятия или непринятия нового значения H .

скорости NGC 7318a не более, чем на 100 км/сек, то естественно заключить, что галактика NGC 7318b уходит из группы с положительной энергией.

е) Встречается ряд тесных двойных галактик, где очень трудно считать систему оптической и, тем не менее, разность лучевых скоростей очень велика. Примером может служить пара NGC 2831 и NGC 2832, в которой расстояние между компонентами меньше 30'', что соответствует в проекции менее чем 4000 парсек, тогда как разность лучевых скоростей примерно 1800 км/сек [14]. Однако рассматриваемая пара находится в скоплении галактик, где вероятность проектирования может быть сравнительно большой, а разности лучевых скоростей членов иногда достигают 2000 км/сек и более. Тем не менее, удивительно, что как раз две столь близко проектирующиеся галактики обладают столь большой разностью скоростей.

Перечисленные факты трудно объяснить, основываясь на допущении, что в каждой физической кратной системе все компоненты удерживаются благодаря силе притяжения.

Вывод. Среди кратных галактик встречаются системы, в которых одна или несколько компонент имеют скорости, достаточные для ухода из системы.

§ 6. О знаке полной энергии больших скоплений галактик. Как известно, для определения средних масс галактик часто к скоплениям галактик применяют теорему вириала. Согласно этой теореме, масса скопления определяется из формулы: $M = \frac{2v^2R}{G}$, где v^2 — средний квадрат

скорости, отнесенной к центру масс скопления, а R — радиус скопления. Применение теоремы вириала обосновано только в отношении стационарных скоплений, обладающих отрицательной энергией.

Известно, с другой стороны, что применение приведенной формулы к скоплениям галактик приводит к таким значениям их массы, которые ни в коей мере не соответствуют тем нашим представлениям о массах отдельных галактик, которые получаются на основе исследования их собственного вращения. Так, для скопления в Деве получается масса порядка 1500 M_{\odot} где M_{\odot} — масса нашей Галактики. Это означает, что средняя масса галактики в скоплении в Деве порядка M_{\odot} . Однако, массой порядка M_{\odot} могут обладать только галактики сверхгиганты. Между тем, мы знаем, что скопление в Деве содержит только несколько десятков сверхгигантов. Подавляющее же большинство членов этого скопления являются карликами, массы которых должны быть заключены между 0,01 M_{\odot} и 0,1 M_{\odot} . Это расхождение полностью объясняется, если допустить, что система в Деве имеет положительную полную энергию, т. е. представляет собой распадающееся скопление.

Несколько менее определенными являются данные о скоплении в Сота. Если мы применим теорему вириала, то для его массы получим огромную цифру порядка 5000 M_{\odot} . В этом случае получается, что сред-

няя масса членов скопления превосходит половину M_* . Это значение массы только с большой натяжкой можно примирить со светимостями членов скопления.

Вывод. *Дисперсии скоростей в некоторых больших скоплениях галактик столь велики, что они могут представлять собой распадающиеся системы.*

§ 7. Радиогалактики в Персее и Лебедь. Если мы примем сделанные выше выводы о совместном образовании компонентов кратной галактики и о взаимном удалении галактик в некоторых скоплениях и группах, то естественно заключить, что каждая группа непосредственно после своего образования представляла систему более тесную, чем мы наблюдаем сейчас. При этом возможны две гипотезы: а) галактики данной группы или кратной системы образуются из единой аморфной массы, диаметр которой по порядку величины не меньше диаметра средней галактики (несколько тысяч парсек); б) первоначальное ядро галактики по неизвестным нам причинам делится на отдельные части, которые дают начало самостоятельным галактикам, составляющим компоненты системы. В этом случае процесс деления должен происходить в небольшом объеме с поперечником, измеряемым парсеками или десятками парсек.

Части разделившегося ядра должны в начальный период удаляться друг от друга со скоростями порядка сотен или даже тысяч километров в секунду. В противном случае, их взаимное притяжение не может быть преодолено и получится несколько галактик с совмещенными центрами, которые сольются опять в одну галактику.

Рассмотрим несколько подробнее вторую гипотезу.

Разделение ядра и последующее взаимное удаление продуктов деления (новых ядер в уже существующей галактике) должно вызвать весьма бурные нестационарные процессы, продолжающиеся в течение нескольких десятков миллионов лет. Можно представить себе, что новые ядра прежде чем придти в стационарные состояния, выделяют из себя вещество, которое, распространяясь, образует вокруг них оболочки, состоящие из звезд и газа. Таким образом, мы приходим к представлению о том, что через первоначально существовавшую галактику происходит движение молодых галактик, находящихся в состоянии становления и быстро обрастающих соответствующими оболочками.

Именно такую картину бурных нестационарных процессов мы наблюдаем в случае радиогалактик Лебедь А и Персей А. Наличие интенсивного радиоизлучения должно, при этом рассматриваться, как указание на происходящие бурные процессы столкновений масс межзвездного вещества.

В обоих этих случаях мы наблюдаем огромные скорости взаимных движений. Так, галактика NGC 1275 (Персей А) как бы состоит из двух галактик, движущихся относительно друг друга так, что разность лучевых скоростей, определенная Минковским [15], достигает 3000 км/сек.

В случае радиогалактики Лебедь А мы непосредственно наблюдаем два ядра внутри одной галактики. Мы не имеем данных, относящихся

к скорости относительного движения этих ядер, однако, очевидно, что они не могут быть неподвижными относительно друг друга. Наряду с радиоизлучением огромной интенсивности, галактика Лебедь А излучает эмиссионные линии очень высокой интенсивности, причем, эти линии имеют значительную ширину. Все это свидетельствует об интенсивных движениях и процессах возбуждения в этой галактике.

Таким образом, вторая из высказанных выше гипотез находится в грубом соответствии с данными о радиогалактиках Лебедь А и Персей А. Конечно, такое соответствие еще не является окончательным подтверждением второй гипотезы. Последняя требует дальнейшего сравнения с наблюдениями.

Что касается до первой гипотезы, то пока трудно говорить о наблюдательных данных, которые бы соответствовали представлению о зарождении групп галактик из аморфного вещества. Наличие радиоизлучения нейтрального водорода в линии 21 см, исходящего от скопления галактик в Соме, Северной Короне и Геркулесе [16], свидетельствует, как будто, о существовании больших масс нейтрального водорода в этих скоплениях. Однако неясно, в какой степени эти массы независимы от отдельных галактик. Еще более неясно, как межгалактическое вещество, излучающее в оптических длинах волн, связано с этим нейтральным водородом. Поэтому нет достаточных данных для обоснования и развития первой гипотезы. В дальнейшем мы остановимся подробнее лишь на второй гипотезе, т. е. на предполагаемом делении ядер галактик.

Необходимо отметить, что открытие радиогалактик дало повод к выдвижению гипотезы, о столкновениях прежде независимых друг от друга объектов. Учитывая, что все радиогалактики, т. е. галактики, дающие особенно интенсивное радиоизлучение, являются сверхгигантами с абсолютной величиной порядка -20 , мы должны отказаться от этой гипотезы, поскольку взаимные столкновения карликовых галактик должны были бы быть гораздо более частыми. В этом отношении следует обратить внимание также и на то, что радиогалактика Персей А является наиболее ярким объектом скопления в Персее, занимающим в этом скоплении центральное положение. Примерно такова же роль галактики Лебедь А в окружающем его скоплении галактик.

В этой связи следует еще раз обратить внимание на тесную двойную галактику NGC 2831 — 2832, о которой говорилось выше. По крайней мере, в проекции это — пара взаимонепроницающих галактик с угловым расстоянием между центрами менее $30''$. Как указывалось, разность лучевых скоростей этой пары доходит до 1800 км/сек. Интересно, что эта пара занимает центральное положение в окружающем ее скоплении и обладает светимостью намного превышающей светимость любого из остальных членов скопления. Яркий компонент пары является сверхгигантом с абсолютной фотографической величиной около $-19,5$. Эти особенности говорят о глубоком сходстве этой пары с NGC 1275, где разность скоростей достигает 3000 км/сек.

В случае NGC 2831—2832 мы имеем дело с парой, в которой процесс оформления отдельных галактик вполне закончился. Интенсивная радиоэмиссия не наблюдается.

Вывод. Радиогалактики Персей А и Лебедь А представляют собой системы, в которых имело место деление ядер, но полное разделение галактик еще не наступило.

§ 8. Радиогалактика Дева А = NGC 4486 = М 87. Эта радиогалактика имеет в оптических лучах две особенности строения, которые ее выделяют среди других эллиптических галактик: 1) наличие струи со сгущениями, которые испускают поляризованное излучение и 2) наличие очень большого количества шаровых скоплений [17].

Тот факт, что струя исходит из центра, не оставляет сомнения в том, что мы имеем в данном случае дело с выбросом из ядра галактики. С другой стороны наличие поляризации излучения указывает на то, что механизм свечения, если не полностью, то частично аналогичен механизму свечения Крабовидной туманности. Отсюда следует, что в сгущениях струи источником излучения являются не только звезды, но и диффузное вещество, находящееся в том же состоянии, что и вещество Крабовидной туманности. Иными словами, в этих сгущениях можно предполагать значительное количество электронов высокой энергии.

С другой стороны, известно, что источники радиоизлучения сосредоточены непрерывно по всему объему галактики NGC 4486.

Возможны два предположения: а) релятивистские электроны были непосредственно выброшены из ядра галактики и б) из ядра выброшены объекты, которые являются источниками релятивистских электронов столь высокой энергии, что их синхротронное излучение сосредоточено в оптической области.

Ограничиться первой гипотезой невозможно, поскольку в этом случае нельзя будет понять сосредоточение оптического излучения в малом объеме сгущений. Поэтому, надо думать, что в самих этих сгущениях сосредоточены источники, испускающие электроны высокой энергии. Наблюдения над объектами нашей Галактики показывают, что мощными источниками электронов высокой энергии являются различные нестационарные объекты (Сверхновые, звезды типа Т Тельца и прочие). Поэтому весьма вероятно наличие в рассматриваемых сгущениях большого числа подобных нестационарных объектов.

Таким образом, мы как будто приходим к пониманию природы рассматриваемых сгущений. Они являются *конгломератами облаков релятивистских электронов, газовых облаков и нестационарных звезд*. Вряд ли подобного рода конгломераты существуют в ядрах галактик. Поэтому приходится сделать заключение, что выброшенная из ядра материя в короткий срок превратилась в подобные конгломераты. Эмиссионная линия λ 3727, наблюдаемая в области ядра NGC 4486, дает, по видимому, представление о скорости выбросов из ядра. Отсюда можно

оценить и порядок сроков, в течение которых могут происходить подобные превращения. Они оказываются порядка $3 \cdot 10^6$ лет.

Выход Наряду с делением ядер галактик в природе могут происходить процессы выбросов из ядер галактик относительно небольших масс. Эти выброшенные массы могут в короткие сроки превращаться в конгломераты, состоящие из молодых нестационарных звезд, межзвездного газа и облаков частиц высокой энергии.

§ 9. Голубые выбросы из ядер эллиптических галактик. Галактика NGC 4486 не является единственной галактикой, в которой мы наблюдаем выброс вещества из ядра [18]. Мы обратили внимание на некоторые другие подобные случаи. Особенно интересен случай галактики NGC 3561a. Эта галактика имеет сферическую форму и истечение в виде струи. Струя заканчивается сгущением, довольно ярким на синем снимке и почти незаметным на красном. Показатель цвета сгущения в интернациональной системе оказывается равным $-0,5$. Расстояние галактики NGC 3561a нам не известно. Однако, весьма осторожная оценка, основанная на сравнении видимой величины голубого выброса с видимой величиной наиболее ярких галактик того скопления, куда входит NGC 3561a, позволяет считать, что абсолютная фотографическая величина выброса не слабее $-14,5$. Это означает, что рассматриваемое голубое сгущение не является O-ассоциацией или даже наложенным несколькими O-ассоциациями. По своей абсолютной величине этот выброс представляет собой по существу карликовую галактику, по-видимому, отделившуюся от ядра гигантской галактики. Необычное значение показателя цвета свидетельствует о том, что состав населения этого выброса весьма своеобразен. Не исключена возможность, что его голубой цвет объясняется наличием коротковолновой непрерывной эмиссии. Несомненно, что галактика NGC 3561a заслуживает дальнейшего изучения.

Как известно, выброс, наблюдаемый в NGC 4486, является, хотя и в небольшой степени, тоже более голубым, чем основная галактика. Поэтому представлялось целесообразным произвести поиски голубых объектов в окрестностях других эллиптических галактик. Было найдено примерно два десятка голубых спутников, как правило, не связанных струей с главной галактикой и имеющих отрицательный показатель цвета. Значительная часть этих объектов по абсолютной величине намного превосходит обычные звездные ассоциации. Они могут быть приняты за отдельные галактики.

Это не значит, что выбросы из центральных частей эллиптических галактик не могут быть желтыми или даже красными. Однако, выбросы с большими показателями цвета трудно отличить от слабых галактик отдаленного фона.

В отличие от NGC 4486, выбросы и спутники, о которых здесь идет речь, проектируются уже за пределами изображения наиболее яркой части соответствующей галактики, а иногда и довольно далеко на расстоянии нескольких радиусов основной галактики. Поэтому нужно считать,

что в возрастном отношении эти объекты являются более старыми. Быть может, вследствие этого мы не наблюдаем интенсивного радиоизлучения от них.

Вывод. В некоторых случаях выбросы из центральных частей эллиптических галактик имеют резко выраженную — голубую окраску. Независимо от того, является ли причиной голубого цвета наличие большого количества ярких голубых звезд, или фиолетовая непрерывная эмиссия, эта особенность не может длительно сохраняться. Поэтому весьма вероятно, что обнаруженные голубые выбросы и спутники являются весьма молодыми галактиками.

§ 10. Перемычки и волокна, связывающие галактики. Большой заслугой Цвикки [13] является то, что он обратил внимание на существование двойных и тройных галактик, компоненты которых связаны между собой волокнами или перемычками различной толщины. При этом, Цвикки считает вероятным, что эти перемычки образовались в результате приливного взаимодействия, происшедшего вследствие сближения двух галактик. Согласно Цвикки, перемычки и волокна состоят из звезд, выброшенных в результате прилива из данной галактики. Нетрудно видеть, что такая интерпретация не соответствует фактическим данным. В самом деле, волокна, соединяющие две галактики, иногда являются весьма тонкими. Между тем, если даже предположить, что приливная волна вырвалась как струя с поверхности данной галактики из узлокализованной области и поэтому должна была иметь сначала небольшую толщину, все же, вследствие наличия дисперсии скоростей, она должна была бы все более расширяться. Отношение толщины к длине на конце струи должно быть порядка отношения дисперсии скоростей звезд к скорости истечения. Простые соображения показывают, что скорость истечения в свою очередь не должна превосходить скорости удаления, вызвавшей прилив галактики. Во многих случаях скорости взаимного удаления должны быть по порядку величины не больше 200 км/сек. Это видно из того, что, например, в системе Кинена разность лучевых скоростей равна 22 км/сек. С другой стороны, дисперсия звездных скоростей в каком-нибудь объеме галактики должна быть порядка 30 км/сек. Отсюда следует, что ширина струи на ее конце должна быть порядка одной шестой длины струи. Между тем в той же системе Кинена ширина струи во много раз меньше.

Во многих системах соединяющая перемычка является продолжением спиральных рукавов. Поэтому предположение о приливном происхождении перемычек, по существу, влечет за собой вывод о том, что спиральные рукава также являются продуктом приливного взаимодействия, причем было бы естественно распространить это и на все остальные спиральные галактики, т. е. и на те, которые не входят в пары или группы, связанные между собою перемычками. Такой вывод, однако, мог бы вызвать серьезные возражения. Например, известно, что в плотных скоплениях галактик, где приливные взаимодействия более вероятны, спираль-

ных галактик очень мало, например в скоплении Coma. Наоборот, их много в разреженных группах и скоплениях.

Поэтому представление о приливных взаимодействиях, как причине образования волокон, должно быть оставлено. В свете высказанной выше идеи о делении галактик волокна следует рассматривать, как последнее звено, связывающее между собой уже разделившиеся и уже значительно удалившиеся друг от друга галактики.

Если волокна, связывающие между собой, например, пару спиральных галактик, возникают в процессе разделения единого первоначального ядра, то можно сказать, что и спиральная структура образовавшихся галактик должна быть тесно связана с процессом разделения. Следует думать, что связь двойственности со спиральной структурой должна иметь место и в тех случаях, когда один из компонентов не является спиральной галактикой, а принадлежит какому-нибудь другому типу (смотреть, например, § 11).

Наконец, заметим, что хотя во многих случаях возникновение спиральной структуры мы приписываем двойственности (или кратности) галактики, это не дает возможности утверждать без дальнейшего исследования, что все спиральные структуры возникли в результате такого разделения.

Вывод. Перемычки и волокна между галактиками не являются следствием приливных взаимодействий. Можно предполагать, что они возникают при взаимном удалении двух или нескольких галактик, возникших из одного ядра.

§ 11. Галактики типа М 51. Наличие в спиральной галактике М 51 спутника NGC 5195, находящегося на конце спиральной ветви, всегда казалось нам сильным доводом в пользу высказанного в предыдущем параграфе предположения. По нашему мнению, тот факт, что спиральный рукав не продолжается, или почти не продолжается за NGC 5195, является серьезным свидетельством против предположения, что NGC 5195 случайно проектируется на экваториальную плоскость спиральной галактики NGC 5194. Однако, было желательно найти другой случай, когда связь между спиральной структурой и наличием спутника является еще более убедительной. Такой случай был найден моей студенткой Искусдарян на картах Паломарского атласа. Речь идет о двойной галактике NGC 7752—7753. На фотографии в синих лучах спиральный рукав состоит из трех параллельных волокон, которые одновременно прерываются, достигнув спутника. Два волокна из трех направлены в центральную область эллиптического спутника, в то время, как третье волокно, идя параллельно первым двум, почти доходит до периферии эллиптического спутника и непосредственно перед достижением спутника резко заворачивает к его центру. Конечно, фотографии большего масштаба смогут дать более точное представление о всей картине явления и уточнить отдельные детали. Однако факт связи между эллиптическим спутником и рукавом не оставляет никаких сомнений.

Сходство между рассматриваемой двойной системой и М 51 подчер-

живается тем, что в обоих случаях, при приближении к спутнику, кривизна спирального рукава сильно уменьшается.

Таким образом, образование типа М 51 нельзя считать результатом простого проектирования. Как было указано Б. А. Воронцов-Вельяминовым [27] это один из типов двойных галактик, в котором компоненты связаны между собой мощным спиральным рукавом, а не тонким волокном. Это, по-видимому, частично обусловлено тем, что расстояние между компонентами, по крайней мере на современной фазе развития системы, сравнительно невелико. В случае М 51 это расстояние порядка всего трех тысяч парсек. Когда же расстояние между компонентами увеличивается, соединяющая перемилька становится значительно тоньше.

Вывод. Существование галактик типа М 51 подтверждает гипотезу о связи между процессом деления первоначального ядра и образованием спиральных рукавов.

§ 12. Крупные сгущения в спиральных рукавах. Галактики типа Sc и галактики с еще более разложившимися рукавами часто содержат в своем составе яркие сгущения, являющиеся богатыми звездными ассоциациями. Ассоциации горячих гигантов с абсолютной величиной —11 являются уже очень яркими объектами. Но в отдельных случаях галактики типа Sc содержат сгущения еще более высокой светимости. Сгущения, имеющие абсолютную величину около —14, уже могут быть сравнены с отдельными галактиками. Иными словами, подобные сгущения могут рассматриваться, как спутники галактики, а подобная галактика, — как некоторая кратная система. Таким образом, между обычными сгущениями в рукавах и галактиками — спутниками нет резкой границы.

NGC 4861, NGC 2366 и другие могут служить примерами галактик, содержащих весьма яркие и большие сгущения. Галактика IC 1613, являющаяся членом локальной группы, имеет, как известно, на своей периферии образование, состоящее из целой совокупности O-ассоциаций. Это образование является своего рода *сверхассоциацией*.

Такая же сверхассоциация, представляющая собой целое созвездие O-ассоциаций, наблюдается на окраине спиральной галактики IC 2574. Подобные сверхассоциации по своим масштабам вполне сравнимы с отдельными галактиками и поэтому тоже могут считаться спутниками соответствующих центральных галактик.

Объекты, о которых говорится в настоящем параграфе, являются в известной степени аналогами спутника М 51, но уже состоящими из крайнего населения I типа Бааде. Эти объекты, очевидно, могли возникнуть только в результате отделения значительной и, вместе с тем, компактной массы от первоначального центрального ядра. Нам кажется, в частности, что существование сверхассоциаций рассмотренного выше типа невозможно объяснить, если допустить, что входящие в них звезды возникли из чисто газовых облаков. В самом деле, газовое облако столь больших размеров, отделившись от центрального ядра, должно было бы рассеять-

ся вследствие эффекта дифференциального вращения по всему объему галактики.

Вывод. Помимо случаев, когда спиральный рукав соединяет данную галактику со спутником, состоящим из населения II типа, имеются случаи, когда спиральный рукав заканчивается спутником, представляющим собой большой конгломерат объектов, относящихся к населению I типа (сверхассоциацию).

§ 13. О природе ядер галактик. Наши сведения о ядрах галактик весьма скудны. Говоря о ядрах, мы имеем в виду небольшие образования, обладающие диаметром в несколько парсек, очень высокой поверхностной яркостью и находящиеся в центре галактики [19]. В прошлом году доктор Бааде любезно показал мне снимок ядра галактики M 31. Это действительно удивительное образование, имеющее необычайно высокую поверхностную яркость. К несчастью, даже у сравнительно близких галактик мы не можем выделить ядро из центрального тела звездной системы. Это связано с ограниченной разрешающей силой наших телескопов.

Выше мы пришли к выводу, что ядра могут делиться, а также выбрасывать спиральные рукава и радиальные струи, содержащие в себе сгущения. Однако, спонтанное деление *звездной системы*, состоящей из одних лишь звезд кажется динамически невозможным. Поэтому, если ядра состоят только из звезд, то мы должны отказаться от развитых выше представлений о фундаментальной роли ядра в генезисе галактик и в деле формирования спиральных рукавов. Серьезная трудность возникает из того факта, что плотность нейтрального водорода в области ядра не превосходит плотность водорода во внешних частях (например, в рукавах) нашей Галактики. Вследствие малого объема ядра это означает совершенно ничтожное суммарное количество нейтрального водорода в нем. Между тем, в некоторых случаях мы наблюдаем истечение вещества из ядра почти непосредственно. Я имею в виду не только струи в NGC 4486 и NGC 3561, но и истечение межзвездного водорода из центра нашей Галактики, открытое голландскими астрономами. Согласно сообщению Ван дер Холста, скорость этого истечения составляет около 50 км/сек. Мощность истечения такова, что за промежутки времени порядка миллионов лет может быть выброшена масса порядка сотен тысяч масс Солнца. Таким образом, получается, что поток водорода огромной мощности вытекает из ядра, где его очень мало, по крайней мере, в диффузном состоянии. Чтобы составить правильное представление о получающихся трудностях, следует учесть, что спиральные рукава галактик содержат большие массы водорода и что, независимо от какой-либо гипотезы, имеет место определенная генетическая связь между рукавами и центральными ядрами.

Здесь мы имеем одну из самых больших трудностей в астрофизике, которая может быть преодолена только путем изменения представления о ядре, как звездной системе.

По-видимому, мы должны отказаться от мысли, что ядра галактик состоят только из обычных звезд. Мы должны допустить, что эти ядра содержат весьма массивные тела, которые не только способны разделиться на части, удаляющиеся друг от друга с большими скоростями, но могут также выбрасывать наружу сгустки материи, имеющие массы во много раз превосходящие массу Солнца.

Новые тела, получающиеся в результате деления или выброса, удаляются от объема первоначального ядра со скоростями, достаточными для того, чтобы преодолеть притяжение к этому объему и при этом выделяют значительные массы газов, а также более плотные сгустки. По истечении некоторого времени эти сгустки могут придти в квазиустойчивое состояние под влиянием собственного притяжения, т. е. превратиться в звезды.

Не все превращения, о которых говорилось выше, должны заканчиваться непосредственно вслед за образованием спирального рукава или новой галактики. В некоторых случаях эти превращения могут запаздывать вследствие перехода ряда отдельных осколков в своего рода метастабильные состояния и лишь после определенного периода времени эти осколки превращаются в звезды и газ. Превращения этого последнего типа мы и наблюдаем, вероятно, в нашей Галактике, как явление возникновения звезд и туманностей в звездных ассоциациях. Это относится как к O , так и к T -ассоциациям.

Эта точка зрения может вызвать возражения, в частности могут указать, что в настоящее время трудно предложить физическую модель массивного тела с описанными выше особенностями. Даже если мы не станем сразу пытаться непосредственно понять конкретный механизм деления массивного тела, расположенного в ядре, тем не менее, могут возникнуть трудности в связи с требованиями различных законов сохранения и, в частности, сохранения вращательного момента. С другой стороны, возможно, что рассмотрение процесса совместного возникновения двух и более звездных систем может оказаться полезным для преодоления этих трудностей.

В заключение этого параграфа мы хотим подчеркнуть, что прежде чем начать строить теории возникновения галактик, было бы весьма полезно определить из наблюдений характер процессов, ведущих к образованию новых звездных систем. Только после этого должна ставиться проблема теоретического истолкования наблюдаемых процессов.

Вывод. Имеются данные, свидетельствующие о возникновении новых галактик и спиральных рукавов за счет вещества, заключенного в ядрах галактик. Эти ядра имеют малые размеры и высокую плотность. Поскольку такие процессы рождения звездных систем не могут происходить за счет звездного населения обычного типа, заключенного в ядрах, мы должны допустить, что ядра могут содержать значительные массы дозвездного вещества.

§ 14. О повторении процессов возникновения компонент и рукавов. Многие спиральные галактики имеют сложное строение, свидетельствующее

щее о том, что процессы выбросов и истечений из их ядер имели место не один раз, и в разное время. Так, например, спиральные ветви нашей Галактики и население ее плоских подсистем сконцентрированы около основной плоскости симметрии Галактики. Однако Магеллановы Облака и слабый спиральный рукав, связывающий Облака с Галактикой, сосредоточены в совершенно другой плоскости. Поэтому кажется, что космогонический процесс, ведущий к образованию спиральных рукавов, повторялся в нашей Галактике дважды.

Хотя в нашем распоряжении нет данных о пространственном расположении спиральных ветвей других галактик, тем не менее обзор изображений большого числа внешних галактик в проекции приводит к впечатлению, что спиральная структура не всегда сосредоточена в одной плоскости. Это в частности касается галактик, обладающих внешней и внутренней спиральными структурами. В некоторых случаях их плоскости, по-видимому, не совпадают. Если это так, то можно думать, что после возникновения одной из спиральных структур ядро галактики, а возможно и осколки, удаляющиеся от него, продолжают оставаться потенциальными центрами активных космогонических процессов. С другой стороны, несомненно, существуют ядра, которые уже утратили эту способность. Наконец, существуют галактики без ядер (как например, галактики типа Скульптора), где не может быть и речи о формировании новых структурных элементов. Такая градация интенсивности космогонической деятельности, по-видимому, в какой-то степени зависит от массы и светимости галактики. Галактики сверхгиганты должны обладать наиболее активными ядрами. В таком случае понятно, почему радиогалактики являются сверхгигантами. Тем не менее возможно, что среди галактик одной и той же массы встречаются объекты, обладающие разной степенью активности.

§ 15. О роли межзвездного газа. Как показывают радионаблюдения в 21 сантиметровой линии нейтрального водорода, межзвездный газ составляет заметную часть массы спиральных галактик позднего типа, а также галактик неправильной формы. Сопоставляя это с тем, что как раз эти системы особенно богаты O-ассоциациями, обычно делают вывод о возникновении молодых звезд из межзвездного газа.

Однако, нам кажется, что параллелизм между присутствием межзвездного газа и наличием O-ассоциаций сам по себе допускает две интерпретации: а) возникновение звезд из газа и б) совместное возникновение звезд и межзвездного газа из дозвездных тел. Поэтому наибольшую ценность должны представлять факты, которые могут позволить делать выбор между этими двумя истолкованиями. Перечислим здесь некоторые из подобных фактов:

1. Ассоциация, в которой находится двойное скопление в Персее, расположено в области особенно бедной межзвездным газом. Об этом свидетельствуют как обычные наблюдения с помощью небулярных спектрографов, так и радионаблюдения нейтрального водорода. Между тем эта ассоциация является одной из самых богатых среди тех, которые об-

излучены в нашей Галактике. Она особенно богата звездами сверхгигантами. Предположение о том, что возникновение ассоциаций сразу привело к исчерпанию газа, является искусственным. Более того, наличие очень ярких сверхгигантов, возраст которых не превышает 10^6 лет указывает на то, что формирование звезд в этой ассоциации продолжается. А это совершенно несовместимо с гипотезой о возникновении звезд из газа.

2. Плотность межзвездного газа в Малом Магеллановом Облаке не меньше, а, пожалуй, больше, чем соответствующая плотность в Большом Магеллановом Облаке [20]. Между тем, Большое Магелланово Облако гораздо богаче ассоциациями и особенно ассоциациями, состоящими из звезд очень высокой светимости. Допустить, что в Малом Магеллановом Облаке ассоциации еще не успели возникнуть, нельзя. В самом деле, время, необходимое для образования ассоциаций, должно быть самое большее порядка 10^7 лет. Между тем современное распределение газа в Малом Облаке должно было существовать не менее чем 10^8 лет. Более того, мы наблюдаем непосредственно некоторое число О-ассоциаций в Малом Облаке. Но они беднее звездами высокой светимости, чем большинство ассоциаций Большого Облака.

3. Наблюдения показывают, что распределение нейтрального водорода в Галактике, гораздо лучше коррелируется с распределением классических цефеид, чем с распределением О-ассоциаций. В частности представляет интерес тот факт, что в Малом Магеллановом Облаке классических цефеид особенно много. Поэтому, несомненно, что происхождение классических цефеид так или иначе связано с межзвездным газом. Если считать, что звезды возникают из газа, то это означает, что процесс превращения газа в звезды в Малом Облаке идет уже давно. Это делает еще более острым противоречие, указанное в предыдущем пункте.

4. Г. Мюнч обратил внимание на то, что в М 13 и в других шаровых скоплениях нашей Галактики имеются отдельные голубые звезды высокой светимости. Между тем, на больших расстояниях от плоскости Галактики плотность межзвездного газа должна быть очень мала, в то время как дисперсия турбулентных скоростей должна быть очень велика.

Указанные факты противоречат гипотезе образования ассоциаций из газа. Вместе с тем, мы не хотим сказать, что они прямо подтверждают гипотезу совместного образования звезд и газа из протозвезд, имеющих совершенно иную природу. Однако общий параллелизм между количеством газа и наличием ассоциаций свидетельствует о генетической связи между ними. Поэтому гипотеза о совместном возникновении звезд и межзвездного газа является единственным остающимся выходом.

Вывод. *Факты, относящиеся к межзвездному газу и ассоциациям, свидетельствуют скорее о совместном возникновении звезд и газа из протозвезд, чем о возникновении звезд из газа.*

§ 16. **О происхождении населения II типа.** Согласно представлениям, развитым в работах Бааде, Шварцшильда и Хойла, звезды, принадлежащие к населению II типа, являются «старыми» звездами, возник-

шими примерно 6 миллиардов лет тому назад. Согласно этой точке зрения, эти звезды не могут возникать непосредственно из дозвездного вещества (независимо от природы последнего). Они являются результатом развития звезд, когда-то имевших те же или почти те же свойства, что и наблюдаемое ныне население I типа.

С другой стороны, Кукаркиным [27] настойчиво выдвигался другой взгляд, согласно которому среди населения II типа должны встречаться не только старые, но и молодые звезды, отличные по своей природе от звезд населения I типа.

Нам кажется, что эта дилемма является фундаментальной как для теории звездной эволюции, так и для проблемы эволюции галактик. Поэтому на этом вопросе необходимо остановиться подробнее.

В свое время мы указывали [21], что огромное различие в законах распределения скоростей звездных населений I и II типа делает невозможным предположение об эволюционных переходах из одного типа в другой. Действительно, изменения в законе распределения скоростей звезд, происходящие под влиянием их взаимных сближений, требуют сроков порядка 10^{15} лет и больше, т. е. промежутков времени, во много раз превосходящих возраст наблюдаемых звезд и галактик. Однако Спизер и Шварцшильд показали, что если допустить существование в Галактике достаточного числа массивных тел (например, комплексов диффузных облаков с массами порядка 10^5 — 10^6 масс Солнца), промежутков времени, необходимый для заметных изменений в распределении скоростей звезд уменьшается до величины порядка 10^9 — 10^{10} лет [22]. Спизер и Шварцшильд считают, что именно этот механизм действует в нашей Галактике. Однако оказывается, что и при таком допущении столь большое изменение, как превращение какой-либо плоской подсистемы в сферическую подсистему, требует сроков намного превышающих среднюю продолжительность жизни звезд.

Поэтому можно считать, что звездное население II типа, т. е. население сферических подсистем возникло с таким же, примерно, начальным распределением скоростей, какое оно имеет сейчас.

Такое заключение само по себе не противоречит допущению, что в начальной стадии своего развития эти звезды по своему физическому строению могли быть сходны со звездами населения I типа. Однако могут быть приведены серьезные факты, свидетельствующие о возрастных различиях среди звезд населения II типа и, в частности, о наличии среди них сравнительно молодых звезд. Так, согласно Переку [23], среди населения II типа мы имеем некоторое количество объектов, галактические орбиты которых являются «гиперболическими». В числе этих объектов имеются типичные представители населения II типа, в том числе шаровое скопление NGC 5694. Исходя из того, что энергия орбитального движения звезд практически не подвергается существенным изменениям, мы должны заключить, что эти объекты образовались в нашей Галактике недавно (порядка 10^9 лет тому назад).

Правда, возможно и другое объяснение, согласно которому все объ-

екты, движущиеся по «гиперболическим» орбитам, пришли к нам из других галактик. Но это прежде всего означает, что в каких-то других галактиках возникает очень большое количество «гиперболических» объектов. Тем самым не отрицается принципиальная возможность появления таких объектов и в нашей Галактике. С другой стороны, не может быть сомнений в том, что звезда АЕ Возничего, также обладающая «гиперболической» скоростью, возникла в нашей Галактике.

Наконец, мы имеем данные о населенных тех шаровых скоплениях, которые находятся от нас на расстоянии более 100 000 парсек и которые, поэтому, действительно являются беглецами из нашей Галактики или из других галактик. Их население отличается от населения более близких шаровых скоплений [26] и, в частности, от NGC 5694. Поэтому было бы весьма искусственным допущением считать, что NGC 5694 и другие гиперболические объекты являются выходцами из других галактик. Следовательно, мы должны допустить, что они являются молодыми объектами среди населения II типа.

С другой стороны, можно утверждать, что имеются некоторые стадии развития, которые присущи звездам сферических подсистем, но не свойственны населению плоских подсистем (диска). Так, например, звезды типа RR Лиры являются такой стадией, через которую проходит довольно значительная часть населения II типа. Если бы через ту же стадию проходила бы значительная часть населения I типа, то, наряду со сферической подсистемой звезд типа RR Лиры, мы наблюдали бы богатую плоскую подсистему этих переменных звезд.

Все сказанное заставляет думать о двух различных путях развития звезд плоских и сферических подсистем.

Отрицая возможность существования молодых звезд среди населения II типа, иногда приводят и тот аргумент, что среди населения II типа нет достаточно массивных туманностей, чтобы из них могли образоваться молодые звезды. Однако этот аргумент может считаться существенным только до тех пор, пока предполагается, что звезды возникают из туманностей. Как мы указывали выше, следует считать вероятной другую точку зрения, согласно которой и звезды, и туманности возникают совместно из более плотных образований. В таком случае особенностью звезд населения II типа должно являться то, что туманности, возникающие вместе с ними, обладают относительно малой массой, вследствие чего мы не наблюдаем массивных туманностей на больших расстояниях от плоскости Галактики.

Сейчас трудно указать, какие именно из наблюдаемых различных стадий развития звезд населения II типа являются начальными, непосредственно следующими за процессом звездообразования. Нам кажется, что сведения в этом отношении скорее всего могут быть получены путем изучения шаровых скоплений, составляющих крайний пример населения II типа.

Согласно фон Херперу [25], наблюдаемые лучевые скорости шаровых скоплений могут быть удовлетворительно объяснены на основе ги-

гипотезы о движении их в Галактике по прямолинейным или очень вытянутым орбитам. Если эти орбиты действительно таковы, то нужно считать, что шаровые скопления были выброшены из центрального ядра Галактики. Допущение, что столь плотные образования, как шаровые скопления, возникают в самой плотной области Галактики, кажется совершенно естественным. Но тогда мы приходим к идее о возможности группового возникновения звезд и среди населения II типа. Возможно, далее, что все остальное население этого типа, не входящее в шаровые скопления, также возникло в каких-то группах, которые, в отличие от наблюдаемых шаровых скоплений, обладали положительной полной энергией. Однако, за отсутствием наблюдательных данных по этому вопросу, вряд ли имеет смысл развивать дальше это предположение. Все сказанное свидетельствует о том, что *образование звезд сферических подсистем идет независимо от образования звезд плоских подсистем.*

§ 17. **О двойных спиральных.** Выше мы приняли, что возникновение спиральных рукавов часто бывает связано с формированием двойной галактики. Тогда возникает следующая возможность проверки гипотезы о разделении первоначального ядра. Поскольку первоначальное ядро небольшого объема не могло иметь вращательный момент, равный по порядку величины большим вращательным моментам наблюдаемых спиральных галактик, то в случае возникновения двух спиральных систем сумма вращательных моментов должна была продолжать оставаться малой. Это условие может быть легко удовлетворено в случае, если вращательные моменты образовавшихся спиралей направлены в противоположные стороны. В таком случае следует ожидать, что направление закручивания спиралей в такой паре должно быть противоположным, т. е. угол между этими направлениями должен быть близок к 180° .

При проверке этого вывода следует иметь в виду четыре обстоятельства: 1. Пара спиралей должна быть изолирована. Если совместно возникли три тела, то момент полученный третьим телом, мог бы компенсировать общий момент рассматриваемой пары. 2. Мы должны быть уверены, что рассматриваемая пара является физической. 3. Если наклоны двух галактик к небесной сфере близки к 90° , то при небольшом отклонении действительного угла между моментами двух галактик от 180° нам может показаться, что спирали закручены в противоположные стороны. Поэтому такие пары не должны рассматриваться. 4. Направление спиральных рукавов должно быть выражено достаточно четко.

Было отобрано 20 пар сравнительно ярких спиралей на картах Паломарского атласа (которые нашей обсерваторией получены еще не полностью), по возможности удовлетворяющих указанным требованиям. Из этих 20-ти пар только три пары показали одинаковое направление спиральных рукавов. Как раз в этих случаях нельзя быть полностью уверенными, что все перечисленные выше требования соблюдаются. С другой стороны, среди остальных семнадцати случаев имеется несколько пар, относительно которых можно утверждать, что эти требования соблюдаются с большой строгостью. К ним относятся NGC 2207—IC 2163,

NGC 4618—4625 и NGC 5394—5395. Таким образом, мы не можем еще окончательно сказать, соблюдается ли правило противоположности направлений спиральных рукавов в изолированных парах всегда или только в большинстве случаев. Несомненно, однако, что в каком-то смысле это правило имеет место. Указанную выше изолированность пары следует понимать в том смысле, что находящиеся в окрестностях рассматриваемых спиралей другие галактики имеют весьма небольшие массы по сравнению с ними. Интересно, что в этом смысле галактики М 31 и М 33 также могут рассматриваться, как изолированная пара. Является фактом, что они показывают противоположное направление спиральных рукавов.

Если же не ограничиваться изолированными парами, то можно остановиться на случаях, когда в группе встречаются две галактики, связанные между собой мостом. В тройной системе Уилда каждые две связанные мостом галактики показывают противоположное направление рукавов. В известном скоплении галактик в Геркулесе замечательная пара сросшихся между собой близнецов-спиралей удовлетворяет тому же правилу. Нам кажется, что этот вопрос заслуживает внимательного исследования.

Вывод. У большинства физических пар спиральных галактик направление рукавов компонент является противоположным.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступило 15 VII 1958

Վ. Հ. Համբարձումյան

ԳԱԼԱԿՏԻԿԱՆԵՐԻ ԷՎՈԼՅՈՒՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գալակտիկաների կուլաների և բազմազալակտիկաների վերաբերյալ գոյություն ունեցող տվյալները հարուստ նյութ են հանդիսանում գալակտիկաների էվոլյուցիայի հարցերն ստամոնասիրելու համար: Ներկա աշխատության մեջ փորձ է արվում մոտենալ այդ հարցերին առանց a priori ընդունվող որևէ ենթադրության:

Արվում են մի շարք եզրակացություններ, որոնց մի մասը կարելի է հաստատված համարել, իսկ մյուս մասը դեռ ենթակա է ստուգման: Ստորև բերում ենք այդ եզրակացությունների մի մասը՝

1. Մետազալակտիկայի ժամանակակից վիճակում գալակտիկաների կուլաների ու բազմազալակտիկաների զարգացումը ընթանում է մի ուղղությամբ՝ ժամանակի ընթացքում նրանք քաջքայլում են: Հակառակ պրոցեսը, երբ բազմազալակտիկան կամ կուլտը առաջանում է իրարից անկախ ծագում ունեցող գալակտիկաներից, չափազանց հազվադեպ է պատահում ու չի կարող էական դեր խաղալ Մետազալակտիկայի կյանքում:

2. Յուրաքանչյուր խմբի (կուլտի կամ բազմազալակտիկայի) բաղադրիչներն ունեն համատեղ ծագում:

3. Բազմազգալատիկաների մեծամասնությունը հատուկ է Տրապիցիայի տիպի տարածական դասավորության: Այդ վիպում է, որ բազմազգալատիկաների տարիքը ըստ մեծություն կարգի քիչ է գերազանցում նրանց մեջ կատարվող պատրաների պարբերությունները:

4. Բազմազգալատիկաների մի մասում կան բազազրիչներ, որոնց արագությունները թույլ են տալիս նրանց հետանալ համապատասխան բազմազգալատիկաներից:

5. Գալակտիկաների որոշ կուլտերում արագությունների գիտելիքի առկայության մեծ է, որ նրանք հանդիսանում են քաղքալվող (դրական լրիվ էներգիա ունեցող) սխտեմներ:

6. Կարապ Ա ու Պերսի Ա սաղիոզալատիկաները իրենցից ներկայացնում են երկու մասի բաժանվող սխտեմներ:

7. Յուրաքանչյուր բազմազգալատիկայի բազազրիչները ստաշանում են մի սկզբնական մարմնի արոհման հետևանքով: Այդ սկզբնական մարմնի բնույթը նման է խոշոր գալակտիկաներում գոյություն ունեցող կորիզների բնույթին:

8. Գալակտիկաների բաժանման երևույթների կողքին դիտվում են նաև գալակտիկաների կորիզներից դուրս նետվող միջվածքներ, որոնք հանդիսանում են թզուկ գալակտիկաներ:

9. Բաժանման հետևանքով անշատվող արբանյակները հաճախ պահանում են իրենց կողք գլխավոր գալակտիկայի հետ թևի միջոցով: Առանձին դեպքերում թևերում հանդիպող խոշոր իրացուսները (գերասողաստիությունները) ըստ երևույթին ունեն նույնանման ծագում: Այդ տեսակետից դժվար է սկզբունքալին սահման անցկացնել արբանյակ գալակտիկաների և գերասողաստիությունների միջև:

10. Փաստերը վկայում են, որ արբանյակները, ինչպես և թևերը, ստաշանում են գալակտիկայի կորիզում գտնվող նյութից: Ըստ երևույթին, ստաշացման այդ պրոցեսն ընթանում է ի հաշիվ կորիզում գտնվող նախասողային խոշոր զանգվածների:

11. Կրկնակի սպիրալ գալակտիկաներում բազազրիչների թևերի ուղղությունը գերազանցապես իրար հակառակ է:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А., Ученые записки ЛГУ, № 22, Серия математических наук (астрономия), вып. 4, 19—22, 1938.
2. Амбарцумян В. А., Астрономический журнал, **14**, 207—219, 1937.
3. Амбарцумян В. А., Эволюция звезд и астрофизика, Ереван, 1947.
4. Амбарцумян В. А., Астрономический журнал, **26**, 3, 1949; A. Vlaauw, BAN, **11**, 465, 1952.
5. Zwicky F., PASP, **50**, 218, 1938; **64**, 247, 1952.
6. Neuman J., Scott E. L., and Shane C. D., Ap. J., **117**, 92, 1953.
7. Амбарцумян В. А., ДАН Армянской ССР, **13**, 129, 1951; Сообщения Бюраканской обсерватории, № 15, 1954.
8. Holmberg E., Annals of the Lund Observatory, № 6, 1937.
9. Амбарцумян В. А., Известия АН Армянской ССР, серия физико-математических наук, **9**, 23, 1956.
10. Seyfert C., PASP, **63**, 72, 1951.
11. Holmberg E., Meddelande Lund Observatory, Ser. II, № 136, 1958.

12. *Guldo Münch. A. J.*, **62**, 28, 1957; Report of the Director, Mount Wilson and Palomar Observatories, 1955—1956, p. 49.
13. *Zwicky F.*, Ergebnisse d. exakt. Naturwissenschaften, Bd. **29**, 344, 1956.
14. *Humason M. L., Mayall N. U. and Sandage A. R.*, A. J., **61**, 97, 1956.
15. *Minkowski R.*, Report to the Meeting of the AS Pacific, Pasadena, June 21, 22, 1955.
16. *Heeschen D. S.*, Ap. J., **124**, 660, 1956; PASP, **69**, 350, 1957.
17. *Baade W. and Minkowski R.*, Ap. J., **119**, 215, 1954.
18. *Амбарцумян В. А., и Шахбазян Р. К.*, ДАН Армянской ССР, **25**, 185, 1957.
19. *Baade W.*, IAU symposium № 5, p. 1. Cambridge, 1958.
20. *Buscombe W., Gascoigne C. C. B. and de Vaucouleurs G.*, Problems of the Magellanic Clouds, Austr. Journal of Sc. Supplement, 1955.
21. *Ambarzumian V.*, On the mean life-time of the cluster type variables, Observatory, **58**, № 732, 152, 1935.
22. *Spitzer L. and Schwarzschild M.*, Ap. J., **114**, 385, 1951.
23. *Perek*, AN, **283**, 213, 1956.
24. *Воронцов-Вельяминов Б. А.*, Астрономический журнал, **34**, 8, 1957.
25. *Hoerner C. V.*, Zs. für Astrophysik, **35**, 255, 1954.
26. *Burbidge C. R. and Burbidge E. M.*, Handbuch der Physik, Bd. **51**, (в печати).
27. *Кукаркин Б. В.*, Исследование строения и развития звездных систем, М.—Л., 1949.

В. В. Соболев

К теории диффузии излучения

Как известно, многие задачи теории диффузии излучения сводятся к решению линейных интегральных уравнений. Обычно эти уравнения имеют ядра, зависящие от модуля разности двух аргументов. К подобным уравнениям приводят также некоторые другие задачи теоретической физики.

В настоящей статье интегральные уравнения с ядрами, зависящими от модуля разности двух аргументов, сначала рассматриваются в общем виде, а затем результаты применяются к отдельным задачам о диффузии излучения. Основой нашего рассмотрения являются новые уравнения для резольвенты. Полученные в этой статье результаты представляют собой обобщение результатов, полученных ранее в работах В. А. Амбарцумяна [1, 2] и автора [3, 4, 5].

Отметим, что интегральные уравнения указанного типа были раньше подробно изучены в работе В. А. Фок [6] путем использования преобразования Фурье. В. А. Фок получил точные решения уравнений при довольно общих предположениях относительно ядра и свободного члена. Ввиду важности этих уравнений для математической физики, их рассмотрение другим способом, по нашему мнению, также представляет интерес.

§ 1. Уравнение для резольвенты

Рассмотрим интегральное уравнение

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) B(\tau') d\tau' + g(\tau). \quad (1)$$

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$B(\tau) = g(\tau) + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau', \tau) g(\tau') d\tau', \quad (2)$$

где $\Gamma(\tau', \tau)$ — резольвента, удовлетворяющая, как известно, уравнению

$$\Gamma(\tau', \tau) = K(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau''|) \Gamma(\tau'', \tau') d\tau''. \quad (3)$$

Пользуясь уравнением (3), мы можем получить новое уравнение для резольвенты.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\Gamma(\tau', \tau) = K(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\tau} K(\alpha) \Gamma(\tau - \alpha, \tau') d\alpha + \\ + \int_0^{\infty} K(\alpha) \Gamma(\tau + \alpha, \tau') d\alpha. \quad (4)$$

Дифференцируя (4) сначала по τ , затем по τ' и складывая почленно полученные равенства, находим

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = K(\tau) \Gamma(0, \tau') + \\ + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau''|) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau''} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} \right) d\tau''. \quad (5)$$

Из уравнения (3) имеем

$$\Gamma(0, \tau) = K(\tau) + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau''|) \Gamma(\tau'', 0) d\tau''. \quad (6)$$

Сравнение (5) и (6) дает:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau'), \quad (7)$$

где обозначено

$$\Gamma(0, \tau) = \Phi(\tau). \quad (8)$$

Из (7) следует (при $\tau' > \tau$):

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(\tau' - \tau) + \int_0^{\tau} \Phi(\alpha) \Phi(\alpha + \tau' - \tau) d\alpha. \quad (9)$$

Таким образом, резольвента $\Gamma(\tau, \tau')$ выражается через функцию $\Phi(\tau)$, зависящую только от одного аргумента.

Для определения функции $\Phi(\tau)$ может быть использовано уравнение

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau') d\tau', \quad (10)$$

представляющее собой уравнение (6) при учете (8). Другое уравнение для определения $\Phi(\tau)$ будет получено ниже (в § 4).

§ 2. Функция отражения

Рассмотрим уравнение

$$B(\tau, x) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) B(\tau', x) d\tau' + e^{-x\tau}, \quad (11)$$

являющееся частным случаем уравнения (1).

Согласно формуле (2)

$$B(\tau, x) = e^{-x\tau} + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau', \tau) e^{-x\tau'} d\tau'. \quad (12)$$

Пользуясь уравнением (7), мы можем выразить функцию $B(\tau, x)$ через функцию $\Phi(\tau)$.

Умножая (7) на $e^{-x\tau}$, интегрируя по τ' в пределах от 0 до ∞ и учитывая (12), получаем

$$\frac{\partial B(\tau, x)}{\partial \tau} = -xB(\tau, x) + \Phi(\tau) \left[1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') e^{-x\tau'} d\tau' \right]. \quad (13)$$

Но из (12) следует

$$B(0, x) = 1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-x\tau} d\tau. \quad (14)$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial B(\tau, x)}{\partial \tau} = -xB(\tau, x) + B(0, x)\Phi(\tau). \quad (15)$$

Интегрирование уравнения (15) дает:

$$B(\tau, x) = B(0, x) \left[e^{-x\tau} + \int_0^{\tau} e^{-x(\tau-\tau')} \Phi(\tau') d\tau' \right]. \quad (16)$$

Для многих физических задач представляет интерес функция

$$R(x, y) = \int_0^{\infty} B(\tau, x) e^{-y\tau} d\tau, \quad (17)$$

которая может быть названа „функцией отражения“ (смысл этого названия выяснится в § 6).

Умножая (15) на $e^{-y\tau}$, интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ и принимая во внимание (14) и (17), находим

$$R(x, y) = \frac{B(0, x)B(0, y)}{x + y}. \quad (18)$$

Мы видим, что функция отражения симметрична относительно переменных x и y (в этом выражается „принцип обратимости“) и, кроме того, имеет определенную структуру.

§ 3. Уравнения для $B(0, x)$

Будем теперь считать, что ядро интегрального уравнения (1) представляется в виде

$$K(\tau) = \int_a^b A(y) e^{-\tau y} dy. \quad (19)$$

В таком случае из (11) следует:

$$B(0, x) = 1 + \int_a^b A(y) R(x, y) dy. \quad (20)$$

Подставляя (18) в (20) находим

$$B(0, x) = 1 + B(0, x) \int_a^b A(y) \frac{B(0, y)}{x+y} dy. \quad (21)$$

Мы получили нелинейное функциональное уравнение для определения $B(0, x)$.

Во многих случаях уравнение (21) может быть легко решено численно. Однако можно также указать путь для получения точного аналитического выражения для $B(0, x)$.

Умножая (21) на $\frac{A(x)}{x-z}$ и интегрируя по x в пределах от a до b , находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x-z} dx &= \int_a^b \frac{A(x)}{x-z} dx + \\ &+ \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x-z} dx \int_a^b \frac{A(y) B(0, y)}{y+z} dy + \\ &+ \int_a^b \frac{A(y) B(0, y)}{y+z} dy \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x+y} dx, \end{aligned} \quad (22)$$

или, при использовании (21),

$$B(0, z) \left[1 - 2 \int_a^b A(x) \frac{x dx}{x^2 - z^2} \right] = 1 - \int_a^b \frac{A(x) B(0, x)}{x-z} dx. \quad (23)$$

Мы пришли к линейному интегральному уравнению с ядром Коши для определения $B(0, x)$. Решение уравнения (23) в явном виде может быть получено методом Карлемана [7].

§ 4. Определение функции $\Phi(\tau)$

Если ядро интегрального уравнения (1) задано в форме (19), то можно получить новое уравнение для функции $\Phi(\tau)$.

Сравнивая между собой уравнения (10) и (11), мы видим, что свободный член уравнения (10) является суперпозицией свободных членов уравнения (11). Поэтому имеем

$$\Phi(\tau) = \int_a^b A(x) B(\tau, x) dx. \quad (24)$$

Умножая (16) на $A(x)$ и интегрируя по x в пределах от a до b , находим

$$\Phi(\tau) = L(\tau) + \int_0^{\tau} L(\tau - \tau') \Phi(\tau') d\tau', \quad (25)$$

где

$$L(\tau) = \int_a^b A(x) B(0, x) e^{-x\tau} dx. \quad (26)$$

Уравнение (25) типа Вольтерра является искомым уравнением для функции $\Phi(\tau)$.

Применяя к уравнению (25) преобразование Лапласа получаем

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{\int_a^b A(x) B(0, x) \frac{dx}{x+s}}{1 - \int_a^b A(x) B(0, x) \frac{dx}{x+s}}. \quad (27)$$

Таким образом, определение резольвенты уравнения (1) сводится к нахождению функции $B(0, x)$ из уравнения (21) [или (23)] и последующему определению функции $\Phi(\tau)$ из (27) путем обращения преобразования Лапласа.

Заметим, что обращение преобразования Лапласа легко выполняется методом контурного интегрирования при использовании соотношения (23).

§ 5. Случай конечного промежутка интегрирования

Полученные выше результаты легко обобщаются на случай уравнения

$$B(\tau) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) B(\tau') d\tau' + g(\tau). \quad (28)$$

Как и в § 1, находим, что резольвента уравнения (28) $\Gamma(\tau, \tau')$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau') - \Phi(\tau_0 - \tau) \Phi(\tau_0 - \tau'), \quad (29)$$

а функция $\Phi(\tau) = \Gamma(0, \tau)$ — уравнению

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau') d\tau'. \quad (30)$$

Для функции $B(\tau, x)$, определенной вспомогательным уравнением

$$B(\tau, x) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) B(\tau', x) d\tau' + e^{-x\tau}, \quad (31)$$

пользуясь (29), получаем

$$\frac{\partial B(\tau, x)}{\partial \tau} = -xB(\tau, x) + B(0, x)\Phi(\tau) - B(\tau_0, x)\Phi(\tau_0 - \tau), \quad (32)$$

причем

$$B(0, x) = 1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau) e^{-x\tau} d\tau, \quad (33)$$

$$B(\tau_0, x) = e^{-x\tau_0} + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau_0 - \tau) e^{-x\tau} d\tau. \quad (34)$$

Введем „функцию отражения“

$$R(x, y) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, x) e^{-y\tau} d\tau \quad (35)$$

и „функцию пропуска“

$$S(x, y) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, x) e^{-y(\tau_0 - \tau)} d\tau. \quad (36)$$

При помощи (32) находим

$$R(x, y) = \frac{B(0, x)B(0, y) - B(\tau_0, x)B(\tau_0, y)}{x + y}, \quad (37)$$

$$S(x, y) = \frac{B(0, x)B(\tau_0, y) - B(\tau_0, x)B(0, y)}{x - y}. \quad (38)$$

Если ядро интегрального уравнения (28) представлено в форме (19), то для определения функций $B(0, x)$ и $B(\tau_0, x)$ имеем

$$B(0, x) = 1 + \int_a^b A(y) \frac{B(0, x)B(0, y) - B(\tau_0, x)B(\tau_0, y)}{x + y} dy, \quad (39)$$

$$B(\tau_0, x) = e^{-x\tau_0} + \int_a^b A(y) \frac{B(0, x)B(\tau_0, y) - B(\tau_0, x)B(0, y)}{x - y} dy. \quad (40)$$

Пользуясь соотношением (24) и уравнением (32), получаем

$$\Phi(\tau) = L(\tau) + \int_0^\tau [L(\tau - \tau')\Phi(\tau') - M(\tau - \tau')\Phi(\tau_0 - \tau')] d\tau'. \quad (41)$$

где

$$L(\tau) = \int_a^b A(x)B(0, x)e^{-x\tau} dx, \quad M(\tau) = \int_a^b A(x)B(\tau_0, x)e^{-x\tau} dx. \quad (42)$$

Таким образом, решение уравнения (28) при любом свободном члене $g(\tau)$ сводится к нахождению функций $B(0, x)$ и $B(\tau_0, x)$ из уравнений (39) и (40) (эти функции представляют самостоятельный интерес, так как решение многих задач выражается непосредственно через них), и последующему определению функции $\Phi(\tau)$ из уравнения (41).

Другой путь для решения уравнения (28) заключается в определении функции $\Phi(\tau)$ из уравнения (30) (очевидно, что в случае численного решения уравнений при различных функциях $g(\tau)$ определение $\Phi(\tau)$ из уравнения (30) и последующее вычисление $\Gamma(\tau, \tau')$ и $B(\tau)$ интегрированием гораздо проще, чем непосредственное решение уравнения (28)). После определения $\Phi(\tau)$ функции $B(0, x)$ и $B(\tau_0, x)$ могут быть найдены по формулам (33) и (34).

§ 6. Применение к проблеме диффузии излучения

Как уже сказано, к уравнению (1) (или к более общему уравнению (28)) приводят различные физические задачи. Одной из них является задача о диффузии излучения в плоском слое оптической толщины τ_0 .

В данном случае входящие в указанные уравнения величины имеют следующий физический смысл. Величина $g(\tau) d\tau$ представляет собой количество энергии, испускаемое непосредственно источниками излучения, находящимися в слое толщиной $d\tau$ на оптической глубине τ , величина $B(\tau) d\tau$ — количество энергии, испускаемое тем же слоем, как благодаря действию источников излучения, находящихся в этом слое, так и благодаря рассеянию излучения, приходящего от других слоев, величина $K(\tau - \tau') d\tau d\tau'$ — вероятность того, что квант, излученный между оптическими глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$, будет излучен затем между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$ (без диффузии в среде).

В виде примера применения полученных выше результатов рассмотрим задачу о диффузии излучения в полубесконечной среде ($\tau_0 = \infty$).

Допустим сначала, что диффузия излучения происходит в одномерной среде. Тогда интегральное уравнение для функции $B(\tau)$ имеет вид

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} B(\tau') e^{-\lambda(\tau - \tau')} d\tau' + g(\tau), \quad (43)$$

где λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния.

Так как в рассматриваемом случае $A(y) = \frac{\lambda}{2} \delta(1 - y)$, где δ — функция Дирака, то вместо уравнения (21) имеем

$$B(0, x) = 1 + \frac{\lambda}{2} B(0, x) \frac{B(0, 1)}{x + 1}, \quad (44)$$

откуда следует:

$$B(0, 1) = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}) \quad (45)$$

и

$$B(0, x) = \frac{x + 1}{x + \sqrt{1 - \lambda}}. \quad (46)$$

Учитывая (14), получаем

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{s + \sqrt{1 - \lambda}}, \quad (47)$$

а значит

$$\Phi(\tau) = (1 - \sqrt{1 - \lambda}) e^{-\tau\sqrt{1 - \lambda}}. \quad (48)$$

Подставляя (48) в (9) находим

$$\Gamma(\tau', \tau) = \frac{1}{2k} \{ (1 - k^2) e^{-k|\tau' - \tau|} - (1 - k)^2 e^{-k(\tau + \tau')} \}, \quad (49)$$

где $k = \sqrt{1 - \lambda}$.

Рассмотрим теперь диффузию излучения в трехмерной полубескочечной среде. В данном случае уравнение (1) принимает вид

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E i |\tau - \tau'| B(\tau') d\tau' + g(\tau), \quad (50)$$

где

$$E i \tau = \int_1^{\infty} e^{-y\tau} \frac{dy}{y}. \quad (51)$$

Введем обозначения: $x = \frac{1}{\zeta}$, $y = \frac{1}{\eta}$, $B(0, x) = \varphi(\zeta)$,

$$\frac{\lambda}{4} R(x, y) = \rho(\eta, \zeta) \eta \zeta. \quad (52)$$

Как видно из сравнения (17) и (52), величина $\rho(\eta, \zeta)$ представляет собой коэффициент яркости среды, освещенной параллельными лучами (ζ — косинус угла падения, η — косинус угла отражения).

Вместо формулы (18) и уравнения (21) имеем

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (53)$$

$$\varphi(\zeta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \varphi(\zeta) \zeta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta. \quad (54)$$

Уравнение (27) для $\Phi(\tau)$ принимает вид

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{1+s\zeta}}{1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{1+s\zeta}}. \quad (55)$$

Обращение преобразования Лапласа дает:

$$\Phi(\tau) = \frac{e^{-k\tau}}{\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta) \eta d\eta}{(1-k\eta)^2}} + 2\lambda \int_1^{\infty} \frac{x e^{-x\tau}}{\pi^2 \lambda^2 + \left(2x + \lambda \lg \frac{x-1}{x+1}\right)^2} \frac{dx}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad (56)$$

где k определяется из уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \lg \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (57)$$

Соотношения (53) — (56) уже были найдены раньше. В. А. Амбарцумян [1, 2], занимаясь задачей о диффузном отражении света полубесконечной средой, получил формулу (53) и уравнение (54). В дальнейшем автор [3, 4] для резольвенты интегрального уравнения (50) получил уравнения (7), (25) и (55). Решение уравнения (55) в форме (56) было найдено И. Н. Минным [8]. Сейчас мы получили указанные соотношения как частный случай более общей теории.

Диффузия излучения в среде конечной оптической толщины τ_0 может быть рассмотрена путем использования результатов, полученных в § 5.

Аналогично может быть изучена задача о диффузии излучения в спектральной линии с перераспределением по частотам. Для одномерной среды ядро интегрального уравнения в этом случае имеет вид

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\pi(\nu)\tau} \alpha^2(\nu) d\nu / \int_0^{\infty} \alpha(\nu) d\nu, \quad (58)$$

где $\alpha(\nu)$ — отношение коэффициента поглощения в частоте ν к коэффициенту поглощения в центре линии. Указанная задача была ранее подробно рассмотрена в работе автора [9]. Некоторые результаты этой работы непосредственно вытекают из уравнений и формул, полученных выше.

§ 7. Вероятностная интерпретация проблемы

Проблема диффузии излучения имеет простую вероятностную интерпретацию. Мы можем считать, что величина $g(\tau) d\tau$ представляет собой вероятность возникновения кванта между глубинами τ и $\tau + d\tau$ (при соответствующей нормировке функции $g(\tau)$), величина $K(|\tau - \tau'|) d\tau'$ — вероятность того, что квант, излученный на глубине τ , будет излучен затем (без диффузии в среде) между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$, величина $B(\tau) d\tau$ — вероятность излучения кванта между глубинами τ и $\tau + d\tau$ после диффузии в среде при заданном распределении вероятности возникновения кванта.

Для нахождения функции $B(\tau)$ при любой функции $g(\tau)$ надо знать резольвенту $\Gamma(\tau, \tau')$. Величина $\Gamma(\tau, \tau') d\tau'$ представляет собой вероятность того, что квант, излученный на глубине τ , будет излучен затем после диффузии в среде между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$.

Указанный вероятностный смысл величин $g(\tau)$, $B(\tau)$, $K(\tau)$ и $\Gamma(\tau, \tau')$ позволяет весьма просто получить многие из соотношений, приведенных выше. Например, пользуясь вероятностным смыслом резольвенты и методом сложения слоев, предложенным В. А. Амбарцумяном [2], можно легко получить уравнения (7) и (29) для резольвенты (это и было сделано ранее в [3] и [5]).

Для практических применений большой интерес представляет определение интенсивности излучения, выходящего из среды. Для нахождения этой интенсивности при любых источниках излучения до-

статочны знать вероятность выхода кванта из среды. Предположим для простоты, что диффузия излучения происходит в полубесконечной среде без изменения частоты. Обозначая через $p(\tau, \eta) d\omega$ вероятность того, что квант, поглощенный на глубине τ , выйдет из среды под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$, для интенсивности излучения, выходящего из среды имеем

$$I(\eta) = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} g(\tau) p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (59)$$

Очевидно, что

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') e^{-\frac{\tau'}{\eta}} d\tau'. \quad (60)$$

и

$$\Phi(\tau) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (61)$$

Сравнивая (12) и (60), находим

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} B\left(\tau, \frac{1}{\eta}\right), \quad (62)$$

т. е. функция $p(\tau, \eta)$ определяется уравнением

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} p(\tau', \eta) E_1|\tau - \tau'| d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}}. \quad (63)$$

Учитывая (61) и (62), из (15) получаем другое уравнение для определения $p(\tau, \eta)$:

$$\frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + 2\pi p(0, \eta) \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (64)$$

Вероятность выхода кванта из среды была введена в теорию диффузии излучения в работе автора [10]. В частности, в ней были получены (другим способом, чем выше) уравнения (63) и (64) для $p(\tau, \eta)$. Путем использования функции $p(\tau, \eta)$ (и аналогичных функций, характеризующих вероятность выхода кванта из среды в более сложных случаях) были решены многие задачи теории диффузии излучения (см. [3]).

В дальнейшем С. Уэно [11, 12], рассматривая диффузию излучения как марковский процесс, также получил уравнение (64) для $p(\tau, \eta)$. Пользуясь этим уравнением (а также аналогичным уравнением

для случая диффузии излучения с перераспределением по частотам), он решил ряд задач, связанных с образованием линий поглощения в звездных спектрах.

Недавно Л. М. Биберман и Б. А. Векленко [13] для процесса диффузии излучения написали уравнения Колмогорова—Феллера и указали на то, что из них могут быть получены многие известные уравнения теории диффузии излучения.

Можно думать, что дальнейшее применение вероятностных методов к проблеме диффузии излучения приведет к новым интересным результатам. Разумеется, эти результаты будут иметь значение и для других физических задач, которые сводятся к уравнению (1).

Ленинградский
государственный университет

Поступило 15 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А. Астр. Журнал, 19, № 5, 1942.
2. Амбарцумян В. А. ДАН, 38, № 8, 1943.
3. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
4. Соболев В. В. ДАН, 116, № 1, 1957.
5. Соболев В. В. ДАН, 120, № 1, 1958.
6. Фок В. А. Матем. сборник, 14 (56), № 1—2, 1944.
7. Carleman T. Arkiv för Mat., Astr. och Fysik, 16, № 26, 1922.
8. Минин И. Н. ДАН, 120, № 1, 1958.
9. Соболев В. В. Вестник Ленингр. ун-та, № 5, 1955; № 11, 1955; № 19, 1957.
10. Соболев В. В. Астр. журнал, 28, вып. 5, 1951.
11. Ueno S. Contr. Inst. Ar. Kyoto, № 64, 1956.
12. Ueno S. Ar. J., 126, № 2, 1957.
13. Биберман Л. М., Векленко Б. А., ЖЭТФ, 31, вып. 2 (8), 1956.

Վ. Վ. Սոբոլևի

ՀԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԴԻՖՈՒԶԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Քննարկվում են երկու արդումենտների տարբերություն մոդուլից կախված կորիզներով ինտեգրալ հավասարումները: Քննարկման հիմքում ընկած են սեղանաձևի համար ստացված նոր հավասարումները: Ստացված արդյունքները կիրառվում են հասագալիթային դիֆուզիայի մի քանի պրոբլեմների նկատմամբ: Տրվում է այդ պրոբլեմների հավանական բացատրությունը:

О. А. Мельников

К столетию астроспектроскопии

Многочисленные исследования астрономов, физиков-оптиков и физиков-спектроскопистов XVIII и первой половины XIX в. подготовили необходимый научный фундамент для возникновения в 1859—60 гг. новой науки—Астроспектроскопии. Возникнув, спектроскопия продолжала развиваться и расширяться исключительно быстро, настолько, что сейчас эта сравнительно молодая наука включает целый ряд важнейших разделов астрофизики: спектрометрию, спектрофотометрию, теоретическую астроспектроскопию и т. д.

Характерным направлением для астроспектроскопии XIX в. было с одной стороны построение удобной и физически правильной классификации звезд по их температурам (цветам), а позднее и светимостям, и, с другой, изучение ничтожных по величине сдвигов спектральных линий, обусловленных (согласно принципу Допплера-Физо) движением светил (спектрометрия).

В XX в. характерным направлением для астроспектроскопии явилось изучение вида линий в спектрах небесных объектов и их интенсивностей сначала визуальным, а в последнее время, фотографическим, фотоэлектрическим и др. методами (спектрофотометрия). Успехи в этой области позволили в 30—50 гг. XX в., в первом приближении, решить задачу определения обилия химических элементов в небесных телах и проблему физического строения этих тел, их оболочек (теоретическая астроспектроскопия). При этом естественно, что благодаря огромной яркости нашего соседнего небесного тела—Солнца—первые надежные результаты были получены в этой области по его спектру.

Разложение излучения Солнца в спектр было сделано еще в XVII в. Яном Марекком Марци и Исааком Ньютоном. В начале XIX в. У. Х. Волластоном и, немногим позднее, но зато более уверенно, Ж. Фраунгофером (1814—15 гг.) были открыты темные линии поглощения в спектре Солнца, названные впоследствии фраунгоферовыми.

За этими открытиями последовали многочисленные лабораторные, спектроскопические работы. Область исследования расширилась от ультрафиолетовых до инфракрасных лучей. Однако, этот период еще не являлся началом новой науки—астроспектроскопии, которая, применив мощный метод физики—спектроскопию, сделала её подлинным „языком Вселенной“ (по выражению одного из популяризаторов астрономии).

Первые же успехи астроспектроскопии развеяли мнение, пропагандировавшееся О. Контом и другими философами-идеалистами о

том, что человек никогда не сможет узнать химического состава удаленных небесных тел.

Связь между картиной спектра и химическим составом излучающего тела была установлена в результате работ ряда физиков и в первую очередь в 1859 г. Густава Роберта Кирхгофа (1824—1887), работавшего в содружестве с химиком Р. Буизеном. Кирхгофом сформулирован основной закон, устанавливающий соответствие между поглощенной и излученной энергиями нагретых тел. С большой тщательностью Кирхгофом была составлена карта линейчатого солнечного спектра. Сравнение длин волн солнечных линий с лабораторными позволило отождествить 9 элементов в фраунгоферовом спектре Солнца. Для объяснения возникновения линий поглощения существенным явилось также и то, что солнечный свет, пропущенный, например, через пары натрия при разложении в спектр давал усиленные линии D_1 , D_2 и усиление подчеркивалось еще больше при увеличении плотности паров.

В дальнейшем исследования общего фраунгоферова спектра Солнца продолжались и венцом в этой области явились карты и таблицы [PRT] длин волн Г. Роуланда, полученные (1895—97 гг.) с помощью вогнутой дифракционной решетки и точно измеренные Л. К. Ивеллом. В них было занесено в области 2970—7330 Å 20027 линий и идентифицировано 39 элементов, два из которых [Ti, Bi] были идентифицированы ошибочно. Эти таблицы были в 1928 г. пересмотрены и пересчитаны на интернациональную систему Ш. Е. Сент-Джоном, В. Адамсом, Х. Д. Бэбкоком, Ш. Мур и Л. М. Вейре [RRT]. Они распространяются на область спектра 2975—7331 Å*, содержат около 21835 линий с длинами волн, идентификацией, глазомерными оценками интенсивностей (в спектре центра Солнца и пятен), классами температуры, давления и т. д. Около 30% линий еще не идентифицировано. В этих таблицах идентифицированные линии соответствуют 57 известным элементам.

С появлением специальных инфракрасных (ИК) фотопластинок изучение солнечного спектра было продолжено до 33495 Å (В. Ф. Меггерс, 1919 г. и др., Х. Д. Бэбкок, Ш. Мур, 1947 г.), а с появлением других приемников для ИК-области (серно-свинцовые ФЭ и др.) высокой чувствительности солнечный фраунгоферов спектр был изучен вплоть до 25242 Å, но только в тех областях или "окнах", где он свободен от теллурических полос (А. Адель, 1940—50; Р. Мак Мас, Л. Гольдберг, О. К. Молер и А. К. Гирс, 1944—50; М. Мижо и Г. Нильсон, 1952 и др.). Была также сделана ревизия коротковолнового участка с небольшим расширением в УФ область (Х. Д. Бэбкок, Ш. Мур и М. Ф. Коффи, 1948) до предельной зоны невидимости из-за поглощения озоном, а именно 2950—3060 Å. Некоторые успехи были достигнуты благодаря ракетным данным (Д. Д. Холфильда и Г. Е. Клирмана, 1948 г.;

* и дополнительно область 7333—10218 Å.

Е. Дорольда, Д. Д. Оберлея и Р. Тузи, 1949 г. и др.) в области 2000—2950 Å и даже в последнее время до области 1025.7 Å, т. е. L_{β} (Ф. С. Джонсон, Х. Х. Малитсон, Ю. Д. Парселл, Р. Тузи, 1958 г.).

Однако разрешающая сила поднимаемых спектрографов, с учетом вибраций и термических эффектов, невелика и блендирование значительно. Особый интерес в этой области представляют элементы HgI , Bil и $TcII$, имеющие в этой части спектра интересные и важные для идентификации линии.

С перечисленными дополнениями к списку длин волн в спектре Солнца были идентифицированы линии 66 химических элементов. После пересмотра Ш. Мур (1951 г.) их стало 67, но аргон, входящий в это число был идентифицирован Б. Эдленом не в фраунгоферовом спектре, а в корональном спектре, излучения по линии 5536 Å, принадлежащей запрещенному переходу $[ArX]$, т. е. аргону, потерявшему 9 электронов и аналогичному FI (со спектроскопической точки зрения). Соответствующая таблица Ш. Мур, элементов обнаруженных на Солнце, прилагается ниже*.

Благодаря успехам в изучении HK и $V\Phi$ областей спектра Солнца удалось значительно пополнить список элементов, присутствующих в его атмосфере. Например, наличие PI (около 10500 Å), более уверенная идентификация SI (около 3000—10500 Å), Sil (около 8000—11000 Å) и др. При этом, как заметила Ш. Мур (1956) солнечные волновые числа Sil дают даже более точные значения уровней энергии этого элемента чем лабораторные. Это обусловлено тем, что соответствующие линии очень резки в солнечном спектре, но очень широки в лабораторном, правда в том случае, когда электрическая дуга, в которой возбуждаются линии Sil горит в воздухе. Всего сейчас в спектре Солнца, как мы видели, идентифицировано более 67 элементов, но многие обнаружены только по одной линии, т. е. неуверенно (Ar , Cd , Au , Th), многие только в соединениях (BH , MgF , SrF), только в короне $[ArX]$, только в пятнах (Li , Rb , In) и т. д.

Трудности с идентификацией обусловлены большим количеством линий, их наложениями и случайными совпадениями длин волн. Для идентификации используются интенсивности и длины волн линий, мультиплеты и серии, зеемановские картины расщепления (в солнечных пятнах), данные предсказания из структур энергетических термов и уровней (например, для Fel и Sil многие предсказания слабых линий оправдались и затем были подтверждены в лаборатории, после применения специальных источников, дающих слабые линии в спектре,

* Отметим, что присутствие лития весьма загадочно (он обнаружен в пятнах). Конвективные токи Солнца должны хорошо перемешивать его вещество. Но литий, попав в глубокие слои, не мог бы уже выйти наружу. Это обусловлено тем, что в глубоких слоях литий за несколько минут, путем ядерных реакций, перерабатывается в другие химические элементы (атомы). Этого однако не произойдет, если вещество Солнца по внутренним и внешним слоям полностью разделено и не перемешивается.

Таблица 1

(Химические элементы на Солнце, Ш. Мур 1951 г.).

Где обнаружен	Элементы										Число	
1) Обнаружены в спектре Солнца надежно	<i>H</i>	<i>He</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>Na</i>	<i>Mg</i>	<i>Al</i>	<i>Si</i>	}	55
	<i>P</i>	<i>S</i>	<i>K</i>	<i>Ca</i>	<i>Sc</i>	<i>Ti</i>	<i>V</i>	<i>Cr</i>	<i>Mn</i>	<i>Fe</i>		
	<i>Co</i>	<i>Ni</i>	<i>Cu</i>	<i>Zn</i>	<i>Ga</i>	<i>Ge</i>	<i>Sr</i>	<i>Y</i>	<i>Zr</i>	<i>Nb</i>		
	<i>Mo</i>	<i>Ru</i>	<i>Rd</i>	<i>Pd</i>	<i>Ag</i>	<i>Sn</i>	<i>Sb</i>	<i>Ba</i>	<i>La</i>	<i>Ce</i>		
	<i>Pr</i>	<i>Nd</i>	<i>Sm</i>	<i>Eu</i>	<i>Gd</i>	<i>Dy</i>	<i>Tu</i>	<i>Yb</i>	<i>Lu</i>	<i>Hf</i>		
2) Обнаружено в спектрах пятен	<i>Li</i>	<i>Rb</i>	<i>In</i>									3
3) Обнаружено в соединениях	<i>B</i>	<i>F</i>										2
4) Обнаружено только по одной линии	<i>Ar*</i>	<i>Cd</i>	<i>Au</i>	<i>Th</i>								4
5) Обнаружены неуверенно	<i>Tb</i>	<i>Er</i>	<i>Ta</i>									3
Всего: 67												
6) Обнаружено очень ненадежно (или косвенно, по другим объектам - гипотетически)	<i>As</i>	<i>Te</i>										2
7) Для обнаружения недостаточно лабораторных данных	<i>Pm</i>	<i>Ho</i>										2
4												
8) Не обнаружены**, основные линии доступны, E=эв.	<i>Cs</i>	<i>Re</i>	<i>Tl</i>	<i>Bi</i>	<i>Ra</i>	<i>U</i>						6
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0						
9) Не обнаружены, основные линии трудно доступны, E=эв.	<i>Hg</i>	<i>Te</i>	<i>Se</i>	<i>I</i>	<i>Br</i>	<i>Xe</i>	<i>Cl</i>	<i>Kr</i>	<i>Ar**</i>	<i>Ne</i>		9
	4,9	5,5	6,0	6,9	7,8	8,3	8,9	9,9	11,5	16,6		
Всего: 15												
10) Не обнаружены и обнаружение не ожидается	<i>Po</i>	<i>At</i>	<i>Fa</i>	<i>Fr</i>	<i>Ra***</i>	<i>Ac</i>	<i>Pu</i>	<i>Np</i>	<i>Pr</i>	<i>Am</i>		16
	<i>Cm</i>	<i>Bk</i>	<i>Cf</i>	[<i>Es</i>	<i>Fm</i>	<i>Mv</i>	[<i>No</i>]	****				
Всего: 16												

* Запрещенная линия 5536 Å [*ArX*], по короне;** Доступны основные линии низкого потенциала возбуждения E=эв, необнаруженных элементов, *Ar* также в гр. № 4;

*** Понадеет также в группу № 8 основных, доступных линий;

**** Эйнштейний (99), Фермий (100), Менделеев (101), Нобелей (102), см. УФН, 58, 825, 1957.

К. К. Кисс и Ш. Е. Мур, 1950), лабораторных и астрофизических данных (по разным типам звезд, например в случае *TcI*).

Все же 15 элементов еще вовсе не обнаружено в общем спектре Солнца или же хотя бы в спектрах образований последнего, а 16 и не ожидаются.

Тысячи слабых линий в спектре Солнца еще не отождествлены и большинство из них обусловлено своим происхождением молекулами (иногда принадлежащими, по-видимому, атмосфере Земли), что доказывается их лишь незначительным или даже нулевым зеемановским расщеплением (или уширением) в магнитных полях солнечных пятен.

В настоящее время Ш. Мур, внесшая большой вклад в проблему идентификации линий в солнечном спектре, подготавливает вторую ревизию таблиц Г. Роуанда—„*SRRT*“. Существенную помощь при этом оказывают перечисленные выше таблицы и списки длин волн и точные интенсивности—эквивалентные ширины линий, которые можно получить из utrechtского фотометрического атласа солнечного спектра М. Миннаерта, Я. Хаутгаста и Г. Ф. Мюлдерса 1940 г. в области 3612—3771 Å для центра диска Солнца (по Маунт-Вилсоновским спектрограммам) и в области 3332—3637 Å в интегральном потоке (по Utrechtским спектрограммам). То же самое можно сказать и о мичиганском фотометрическом атласе солнечного спектра Р. Мак Маса, О. К. Молера, А. К. Пирса и Л. Гольдберга для области 8465—25242 Å (1951 г.), и ряда других.

На примере изложенной проблемы—идентификации линий в солнечном спектре, мы убеждаемся в совершенной необходимости тесного контакта между астроспектроскопистами и спектроскопистами-физиками. То же самое можно сказать и об аналогичной проблеме при изучении спектров звезд, туманностей, планет, комет и т. д. Обилие атомов в этих, не пекулиарных объектах, близко к солнечному и земному.

Параллельно с линейчатым спектром исследовался и непрерывный спектр Солнца (т. е. излучение между линиями поглощения), как в относительных, так и в абсолютных единицах, т. е. например в *эрг/сек.см²*. Первые работы подобного рода в абсолютных единицах на современной основе были начаты в Смитсоновском институте С. В. Ланглеем в 1883 г. и продолжены К. М. Абботом с сотрудниками в разных географических точках и на разных высотах, вплоть до 4520 м над уровнем моря.

Наблюдения велись путем сочетания трех инструментов: пиргелиометра, спектроболметра I и спектроболметра II (для измерения потока и интенсивности излучения).

В последующем подобные работы продолжались другими учеными, однако, чаще всего исследования ограничивались относительными измерениями.

Достаточно точные редукции были выполнены М. Миннаертом и др.

В самое последнее время абсолютные измерения распределения энергии в спектре Солнца были произведены сравнением с моделью

эталонной лампы и черного тела в Кучинской обсерватории Г. Ф. Ситником (фотоэлектрически, 1955 г.) и Е. Л. Макаровой (фотографически, 1957 г.).

Из последних зарубежных работ следует указать на исследования Д. Шалонжа и Р. Коноваджи (1946 г.), Р. Мишара (1950 г.), Р. Пейтуро (1952 г.), А. К. Пирса (1954 г.), А. Лабса (1957 г.) и др. К ним также следует отнести и новейшие исследования в далеком ультрафиолете, выполненные с высотными ракетными снарядами (до 100 км и выше) и описанные Н. Л. Вилсоном, Р. Тоузи, И. Д. Парселом, Ф. С. Джонсоном, Ш. Мур (1954 г.) и др. Новейшие обзоры этих работ сделаны К. де Ягером и С. Л. Мандельштамом (1957).

Наряду с изучением отдельных участков спектра, полученного от центра солнечного диска, исследовались спектры отдельных деталей на поверхности и на краю диска. Почти одновременно И. Локьер и П. Ж. С. Жансен научились наблюдать спектры протуберанцев, вне затмения (1868). Линии в их спектрах оказались блестящими, т. е. указывали на свечение раскаленных газов. Была открыта желтая линия излучения D_2 , приписанная еще неизвестному элементу гелию, который лишь спустя почти 30 лет был открыт на Земле. Эту линию независимо наблюдал также Ф. А. Бредихин (о чем он сообщил в письме физику А. Г. Столетову), построивший свою обсерваторию в Погосте. В последующем он эти наблюдения перенес в Московскую обсерваторию и наблюдал спектры протуберанцев в течение 11 лет, т. е. полный цикл с 1872 и по 1883 г.

По инициативе Ф. А. Бредихина, подобные наблюдения были начаты также в Одессе, Харькове и Юрьеве (Тарту, ЭССР).

В начале XX века Г. Е. Хэл, по зеemanовскому расщеплению линий в спектрах, открыл магнитные поля солнечных пятен и научился измерять напряженность соответствующих полей. Оказалось, что в центре пятен напряженность магнитного поля составляет от 0 до 5000 эрстедт и более, увеличиваясь с ростом площади пятен. С каждым новым циклом преобладающее направление силовых линий магнитного поля меняется на обратное, поэтому период магнитных явлений на Солнце составляет 23 года (11,5+11,5). Это важнейшее явление изучается по сей время в США, Германии, СССР и др. странах.

Успешно изучался спектр Солнца во время полных или даже частных затмений.

В спектре солнечной короны была открыта знаменитая зеленая линия излучения 5303 Å [Fe XIV], а затем красная и ряд других (сейчас их известно до 31 в области 3328—10797 Å). Первоначально эти линии приписывались неизвестному элементу „коронно“. Много труда составило описание этого „элемента“ или „элементов“. Лишь недавно Б. Эдлену удалось (в 1945 г.) установить, что эти линии принадлежат высокоионизированным, но уже известным на Земле элементам FeXIV, FeXIII, NiXV, CaXII, CaXIII и др. Как число солнечных пятен, так и форма короны (А. П. Ганский), а также линии излучения в ее спек-

тре, хорошо связаны с целым рядом земных явлений. Это побудило построить в СССР специальные, корональные станции, близ Кисловодска (М. Н. Гневышев) и Алма-Аты (В. Г. Фесенков, М. Г. Каримов). Эти станции, как и сеть станций „Службы Солнца“ (Абастумани, Львов, Ташкент, Харьков и др.) и вообще обсерватории имеющие солнечное оборудование, успешно решают проблему воздействия Солнца на земные процессы, имеющую большое народно-хозяйственное значение.

В СССР подобные исследования проводятся с наибольшим размахом, а сейчас, в связи с МГГ, они еще более усилены.

Лучшими в СССР специальными солнечными инструментами являются Крымский башенный и Пулковской горизонтальный солнечные телескопы, изготовленные под руководством инженера П. В. Добычина по техническим заданиям А. В. Северного, В. А. Крата и др.

За границей отличные солнечные телескопы и корональные станции находятся в США (Маунт-Вилсон, Мак Мас, отделение Гарварда и т. д.), во Франции (Медон, Пик дю Меди), Германии (Потсдам), Англии (Кембридж), Швейцарии (Ароза) и др. Именно с помощью телескопов этих обсерваторий, а также при затменных наблюдениях, удалось раскрыть спектральную природу солнечной атмосферы (фотосферы, обращющего слоя, хромосферы и короны) и отдельных ее образований, в частности „факелов“, „вспышек“ и др.

Первая, пионерская в СССР, спектрофотометрическая работа по изучению солнечных факелов была выполнена В. А. Амбарцумяном совместно с Н. А. Козыревым еще в 1932 г. Они смогли определить температуру излучения этих интересных образований.

Спектрами вспышек в СССР успешно занимаются А. Б. Северный, Э. Р. Мустель, В. А. Крат и др.

Параллельно развивалась и звездная спектроскопия.

Первые наблюдения спектров звезд начал делать еще в начале XIX в. (1824 г.) Ж. Фраунгофер (по методу призмной камеры).

Большим вкладом явилось создание спектральной классификации звезд. Ее основы были заложены А. Секки в Италии (4000 звезд), Н. Локьером, В. Хеггинсом в Англии, Л. М. Резерфордом в США и Г. К. Фогелем в Германии в 1830—1924 гг.

Эти важнейшие исследования были завершены гарвардской спектральной классификацией, которая используется до настоящего времени. Она была создана трудами Э. Пикеринга, А. Кэнион, А. К. Мори, В. П. Флеминг и др. в результате наблюдений в Гарварде и на станции Аркипе (Перу).

Первые спектральные классификации были в основном одномерными. Звезды классифицировались фактически по температурам. Однако уже в работах Н. Локьера (1870 г.), открывшего усиление или ослабление линий в спектрах при переходе от Вольтовой дуги к искре (имеющей более высокую температуру), а также в работах А. К. Мори содержались элементы двухмерности. Именно первый, т. е. Н. Локьер

пытался связать классы спектров с физическими условиями в звездных атмосферах. В частности, необходимость этого стала очевидной после того, как Э. Герципрунг обнаружил, что звезды подгруппы „с“ в классификации Мори имеют высокую светимость (1907—1909 гг.). Вторым параметром классификации, наряду с классом спектра, явился класс светимости. Появились названия звезд: карликов, гигантов, сверхгигантов, субгигантов, субкарликов, белых карликов и т. д.

В 1914 г. В. Адамс и А. Кольшуттер из Маунт-Вилсона опубликовали результаты определения спектральных параллаксов звезд.

Двухмерная классификация была разработана в Йеркской обсерватории, после появления атласа спектров В. В. Моргана, Ф. К. Кинана и Е. Кильмана (1943 г.).

В настоящее время та же задача решается другим путем, по непрерывным спектрам (а не линиям), в Парижском институте астрофизики под руководством Д. Шалонжа.

В последних работах ряда ученых намечается также построение трехмерной классификации: по классам спектров, классам светимостей и обилия элементов (последнее, в частности, для поздних углеродных звезд). Изучение ряда пекулиарных объектов (в частности, звезд Вольф-Райе, открытых еще в 1867 г.) потребовало создания специальной классификации, которая для этих объектов была разработана трудами К. С. Билса и Б. А. Воронцова-Вельяминова. Тоже можно сказать и о звездах с большими скоростями в Галактике (по данным В. И. Ивановской, 1950 и др.), типа А с усиленными металлическими линиями переменной интенсивности и др. Во многих случаях эти последние звезды показывают магнитную интенсификацию линий (Ф. В. Бэбкок), которая в некоторых случаях коррелируется с переменностью магнитных полей звезд (например у *BD-18°3789*).

Звезды подгруппы „в“ в классификациях Мори оказались быстровращающимися. Скорость осевого вращения можно определять по профилям линий в спектрах, что предлагал еще в 1877 г. В. Абней. Однако осуществить это с нужной точностью удалось только в 1929 г. в совместной работе О. Л. Струве и Г. А. Шайна. По дифференциальным же сдвигам линий компонент затменно-переменных звезд осевое вращение было обнаружено ранее у звезды δ Весов и др. Ф. Шлезингером (1909 г.).

Первое пионерское в СССР, спектрофотометрическое исследование звезды γ Кассиопеи, выполненное В. А. Амбарцумяном и Н. А. Козыревым (1932) и последующая дискуссия этого вопроса с О. Л. Струве привела к критической проверке ротационной гипотезы последнего об уширении линий в этой и подобного типа Ве звезд.

Уширение линий, обусловленное турбулентными движениями в атмосферах звезд было обнаружено методом „кривых роста“ в 1934 году, О. Л. Струве и К. Т. Эльви.

В последующие годы О. Л. Струве и Су Шу-хуан'ом, был разработан метод для раздельного изучения мелкомасштабной и крупно-

масштабной турбулентии (или конвекции, вращения) в звездных атмосферах.

Наряду с процессами, ведущими к уширению всех звездных спектральных линий, были обнаружены и такие явления, при которых, например, у ранних звезд типа В, уширены только одни группы линий, в то время как другие сохраняются узкими. Еще в 1922 г. Р. Е. д'Аткинсон считал, что уширение водородных звездных линий обусловлено ионными полями в звездных атмосферах, что было подтверждено Г. Н. Ресселом и Д. К. Стюартом, в 1924 г. Той же причиной объясняли уширение линий гелия в спектрах В звезд, О. Л. Струве и К. Т. Эльви и, позднее, А. Уизольд, А. Паннекук и С. Вервей, Э. Ван Дин, И. Г. Гусев и др. Существенным подтверждением явилось открытие в спектрах ряда звезд запрещенной линии [HeI] 4470 Å. Известно, что появление этой линии, по соседству с разрешенной 4471 Å, является свидетельством наличия электрических полей (явление Штарка).

Было обнаружено также уширение линий, обусловленное наличием постороннего газа или даже собственным давлением и т. д.

Все эти данные значительно расширили наши сведения о звездных спектрах, особенно если учесть тот факт, что к этому времени была создана теория ионизации индийского ученого Мег Над Саха, были хорошо разработаны теории образования линий Шустера-Шварцшильда, Милна-Эддингтона и др.

Изучение непрерывных спектров звезд также принесло много сведений о строении звездных атмосфер. Действительно, применением формулы М. Планка (1900 г.) можно было бы определить "температуры" звезд, а сравнением с теорией найти те факторы, которые обуславливают непрерывное поглощение или непрозрачность звездных атмосфер (фотосфер). Именно так было изучено, что основное непрерывное поглощение в ранних звездах определяется атомарным гелием и водородом, в средних типах звезд отрицательными ионами водорода и в поздних — молекулярным поглощением.

Наиболее точные визуальные исследования непрерывных спектров звезд впервые выполнены Ю. Шейнером и Ю. Вильзингом в Потсдаме в области спектра 4500—6400 Å. В 1909 г. был опубликован каталог 109 звезд. Работу продолжал (но фотографически) Г. Розенберг в области 3400—5700 Å (1914 г.). Оказалось, что температуры звезд по непрерывным спектрам составляют от 3000 до 10000° K для звезд классов спектров от М до А—В. При этом, эти цветовые "температуры" хорошо коррелируются с классом спектров, что соответствовало корреляции классов спектров и цветов, известной ранее (еще в классификации А. Секки).

Знание температуры и светимости позволило оценить звездные радиусы. Оказалось, что красные гиганты Арктур и Антарес имеют радиусы в несколько десятков солнечных, а красный карлик "Грумбридж 1618" — наоборот гораздо меньше солнечного.

Обширные исследования по определению цветовых температур (спектрофотометрических) в СССР выполнил В. Г. Фесенков (1927—1931 гг.). Ряд работ, также в СССР, выполнен Б. А. Воронцовым-Вельяминовым (для звезд Вольф-Райе и др.), С. К. Всехсвятским, О. А. Мельниковым, Л. В. Мирзояном, Н. Л. Ивановой, М. В. Долидзе и др.

За границей таких работ выполнено очень много. Особенно выдающимися являются работы, сделанные в Гринвиче, Гёттингене, Париже, Эп-Арборе и др. При этом оказалось возможным не только измерить спектрофотометрические температуры, но и учесть искажающее влияние на них ослабляющей свет межзвездной среды. Оказалось, согласно исследованию ряда ученых, что это ослабление изменяется с длиной волны. По О. А. Мельникову в области коротких волн оно почти не зависит от длины волны, а в области длинных волн подчиняется закону Релея (т. е. пропорционально λ^{-4}).

Это ослабление обусловлено пылевой межзвездной средой (металлы, диэлектрики), с которой также связано (хотя бы частично) явление поляризации звездного света, обнаруженное Д. С. Холлом и В. А. Хильтнером, а также независимо от них В. А. Домбровским (1949—1950 гг.).

Гораздо ранее, чем пылевая среда, обнаруженная Г. А. Тиховым в 1910 г., была замечена Д. Гартманом в 1904 г. газовая межзвездная среда, дающая стационарные линии *Call H* и *K* в спектре двойной δ Ориона.

Позднее были обнаружены межзвездные линии *D₁*, *D₂*, *NaI*, *TiII*, *Fel*, *CaI* и др., а также и линии полос молекул *CH*, *CH⁺*, *CN* и многие еще неизвестного происхождения (4430 Å и др.).

Большой вклад в эту область был сделан К. С. Вилсом (1936), В. С. Адамсом (1948—1949 гг.), обнаружившими расщепление линий на компоненты, обусловленное облачной структурой межзвездного газа. Основываясь на этом, О. А. Мельников (1949 г.), по методу кривых роста, нашел, что эти облака межзвездного газа имеют „турбулентные“ движения со скоростями порядка ± 8 км/сек.

Важные исследования межзвездных линий и среды вообще выполнили также П. В. Меррилл и Р. Е. Вилсон, Б. А. Воронцов-Вельяминов и др. Последний, в частности, большое внимание уделил генетической связи между звездами и межзвездной средой.

Теорию вопроса о межзвездной среде (распределении в Галактике, облачной структуре и т. д.), имеющей клочковатый характер и обуславливающей, в частности, флуктуации в числе внегалактических туманностей, разработал В. А. Амбарцумян в целом ряде работ (1938—1950 г.г.).

После того, как в Йеркской и Макдоньядовской обсерваториях был разработан специальный „небулярный“ спектрограф (1937), с помощью этого интересного инструмента О. Л. Струве и К. Т. Эльви обнаружили области со свечением водородных линий в соседстве с

O—В звездах. Это слабые *HII** области с электронными температурами 10000—15000° К. С удалением от горячих звезд они переходят в *HI* области с температурами в 100—500° К. В областях *HII* были найдены также запрещенные свечения *OII*, *NI*, *SI* и др. Плотность в них составляет до 1 электрона и иона в см^3 , что в несколько сотен раз меньше чем, например, в большой туманности Ориона. Условия свечения межзвездного водорода в Галактике вообще были выяснены Г. К. ван де Холстом и И. С. Шкловским, в результате чего и была обнаружена радиоастрономами линия 21 см, обусловленная переходом между подуровнями сверхтонкой структуры первого водородного состояния.

До сих пор мы касались изучения физики звезд по их спектрам. Согласно Т. Денхему (1956), это изучение, начатое еще Фраунгофером, можно разбить на три этапа, в соответствии с уровнем спектроскопической техники.

Первый этап характеризуется применением визуальных спектроскопов с разрешающей силой около 1000, т. е. на пределе разрешались линии D_1 , D_2 натрия. Этот период (1817—1863 гг.) связан с именами Ж. Фраунгофера, А. Секки и В. Хэггинса. В частности последний впервые обнаружил в спектрах ряда ярких звезд элементы *Na*, *Mg*, *Fe*, *Ca*, *H* и др. (1863 г.).

Второй этап характеризуется применением фотографических методов регистрации спектров звезд и связан с именами В. Хэггинса и В. А. Миллера, Г. Дренера, Н. Локьера, Ф. А. Бредихина и др. В этот период (1863—1888 гг.) была применена фотографическая призмная камера, что дало возможность получить разрешающую силу до 5000.

Третий этап (с 1888 г. и по настоящее время) характеризуется развитием щелевых фотографических спектроскопов, или иначе, спектрографов с разрешающей силой до 30000 и более.

В современных Куде спектрографах, установленных в неподвижном фокусе, свободно разделяются, например, железные линии 3918,318 и 3918,418 Å, что говорит о разрешающей силе 80000! Этот период спектроскопии связан с именами Г. К. Фогеля и Ю. Шейнера, А. А. Белопольского, Г. Ф. Ньюолла, Д. Е. Киллера, В. В. Кэмбелла, В. М. Слайфера и др. в первую половину и с именами О. Л. Струве, Д. Гринстейна, Л. Х. Аллера, Т. Данхема, Д. Шалонжа, Б. Эдлена, Г. Кинле, Д. Менцеля, А. Б. Эндерхилл, А. Унзольда, Х. Д. Бэбкока и Х. В. Бэбкока, Б. Маклофлина, П. В. Мерилла, А. Джоя, А. Дейча, К. С. Билса, Р. Вулли, В. А. Амбарцумяна, Н. А. Козырева, Б. А. Воронцова-Вельяминова, Г. А. Шайна, А. Б. Северного, Э. Р. Мустеля и многих других.

Изучение звездных спектров, вида и интенсивностей линий, привело к раскрытию картины физики их атмосфер. Измерение же сдви-

**HII* и *HI*—области*—области межзвездного пространства, где преобладает ионизированный (*HII*) или нейтральный (*HI*) водород.

гов линий дало очень много в деле изучения кинематики и динамики звезд и звездных систем.

Первые попытки определения сдвигов линий по принципу Доплера-Физо визуальным способом сделал еще В. Хёггинс. Более десятилетия их также определяли в Гринвиче, но точность оказалась слишком низкой. Только после внедрения фотографического метода удалось ее повысить до удовлетворительного значения. Это сделали в Потсдаме Г. К. Фогель и Ю. Шейнер в 1888 г. и еще более уверенно, с ошибкой $\pm 2,6$ км/сек, А. А. Белопольский в Пулковке с 30-дюймовым рефрактором в 1890 и последующих годах. Для обоснования этих наблюдений последний осуществил также лабораторную проверку принципа Доплера-Физо в применении к свету (1900 г.). Вторично работа была повторена еще точнее, также в России, Б. Б. Голицыным и И. И. Виллипом (1907 г.).

А. А. Белопольский измерил лучевые скорости многих звезд, обнаружив при этом ряд новых спектроскопически—двойных и спектрально-двойных.

Первой спектроскопически-двойной звездой была открыта звезда Мицар (в Гарварде, Э. Пикеринг, А. К. Мори, 1889 г.); ее компоненты близки по блеску и линии в спектре периодически раздвигаются. Наоборот, в спектре Спика видны периодически сдвигающиеся, но одиночные линии (К. Г. Фогель, 1890 г.), т. е. блеск компонента слабее 0^m.7, а при этом видимость его линий исчезает.

Вскоре таких звезд стало известно до 50 (1900 г.), а теперь значительно больше.

Спектрально-двойные звезды также многочисленны (пример 89 Водолея G0+A2), но видимость двух систем линий обусловлена в них различием классов спектров.

Значительный прогресс в определении лучевых скоростей был достигнут в Ликской обсерватории и ее Миллской экспедиции в Чили. Значительно улучшив подвес спектрографа к телескопу (В. Г. Райт, 1905 г.), в Лике смогли довести точность измерения лучевых скоростей звезд с резкими линиями до $\pm 0,25$ км/сек (В. В. Кэмпбелл в 1896 г. и позднее, а также Д. Г. Мур и др.).

Появились замечательные каталоги лучевых скоростей звезд, выполненные в Маунт-Вилсоне, Виктории, Лике, Йерксе, СССР и др.

В Советском Союзе первый каталог был создан Г. А. Шайном и В. А. Альбицким в Симеизском отделении Пулковы (343 звезды). В последующем были опубликованы четыре дополнения (305 звезд), причем все наблюдения и вычисления были выполнены в кратчайший срок—за 2,5 года (с 1929 по 1932 гг.).

В недавнее время в Маунт-Вилсоне был закончен Р. Е. Вилсоном сводный каталог лучевых скоростей звезд числом около 15000. Эти скорости были получены со щелевыми спектрографами. В последние годы к ним добавились измерения с призмными камерами в Гар-

варде, Упсале, Пулкове и особенно активно во Франции (Ш. Ференбах и др.).

Уже в прошлом столетии метод определения лучевых скоростей по сдвигам линий в спектре был применен для определения скорости осевого вращения Солнца.

В последующем, согласно международному соглашению, весь спектр Солнца был разбит на участки с одной общей областью и работа велась в ряде обсерваторий, ибо именно это должно было обеспечить нужную точность.

В 1925 году в Пулкове был получен 7-метровый дифракционный спектрограф, с помощью которого А. А. Белопольский стал определять скорость вращения Солнца по участку 3820—4000 Å, где сдвиги линий составили всего лишь несколько сотых миллиметра. Результаты публиковались в Бюллетене Комиссии по исследованию Солнца вплоть до 1934 г., т. е. до последних лет жизни Аристарха Апполоновича.

Тот же метод изучения сдвигов линий из-за вращения тел был применен А. А. Белопольским и к планетам, особенно успешно к Сатурну и его кольцу (противостояние 1895 г. и др.). Наблюдения велись на 33 см астрографе и спектрографе. Одновременно с другими учеными (Киллер, Деландр и др.) А. А. Белопольский показал, что кольцо вращается не как твердое тело и состоит из мелких тел, что согласовывалось с голубым характером его спектра, отмеченным им одновременно.

Параллельно с исследованиями сдвигов линий, проводилось, как указывалось, изучение интенсивностей линий в спектрах звезд и планет. Интенсивность линий служит мерой числа поглощающих атомов. Поэтому сравнение наблюдаемых интенсивностей линий с теоретически предполагаемыми (рассчитанными методами квантовой механики) и с измеренными в лаборатории дает возможность определения обилия данного элемента в атмосфере звезды. Пионерами подобных исследований были А. Паннекук, Г. Я. Рессел, О. Л. Струве, В. В. Морган, К. Т. Эльви, Г. А. Шайн и др.

Еще Н. Локьер заметил (около 1873 г.) значительные различия в температуре звезд путем сопоставления их спектров с лабораторными спектрами в электрической дуге и искре. Линии с высокими энергиями возбуждения наблюдались только в высокотемпературной части дуги в середине разряда, или даже только в искре, где многие линии „усиливались“. Линии с меньшими энергиями возбуждения, низкотемпературные, наблюдались по всему пламени разряда. В частности линия 4227 Å *CaI* в дуге оказалась значительно более интенсивной чем линии 3933 и 3968 Å *CaII*. Отсюда был сделан вывод, что температура Солнца выше чем дуги, ибо в его фраунгоферовом спектре последние две линии гораздо интенсивнее первой. Обратное, было получено для солнечных пятен, температура их оказалась ниже, чем в солнечной атмосфере, что согласуется с наличием более заметных полос поглощения молекул в спектрах пятен. Большое различие ин-

тенсивностей линий железа в спектре излучения хромосферы по сравнению с лабораторными, чего не наблюдается в фраунгоферовом спектре, было объяснено ее высокой температурой, что, как известно сейчас, в большей степени обусловлено соответствующей электронной плотностью (низкой). Спектр Денеба с подавляющим числом усиленных высокотемпературных линий железа ($FeII$) и спектры Орионовых В-звезд с высокотемпературными линиями N , O , C (а позднее и HeI , $HeII$) также были истолкованы наличием высоких температур. Наоборот, спектры Арктур, Альдебарана и особенно Бетельгейзе с молекулярными спектрами считались низкотемпературными.

Наличие обрамляющего слоя Солнца—места эффективного образования линий поглощения, было установлено во время затмения 1870 г. К. А. Юнгом. Теория переноса излучения сквозь него была создана в результате решения уравнений А. Шустером (1902—1905 гг.) и К. Шварцшильдом (1906—1914 гг.). Теория строения, ионизации и возбуждения атомов в атмосферах звезд была создана в результате работ Л. Больцмана, Н. Бора (1913—1915), М. Н. Саха (1922), Е. А. Милна и А. Фаулера (1924), А. Паннекука и др. Специальный вопрос—ионизация атомов в оболочках, окружающих звезды—был изучен В. А. Амбарцумяном (1935 г.), давшим соответствующую формулу.

Оказалось, что линейчатые спектры звезд, их различие обусловлены в наибольшей степени характером и силой возбуждения и ионизации атомов в их фотосферах, дающих континуум и темные линии, а также хромосферах, дающих светлые линии. В начале употреблялся статистический метод анализа линий, основанный (В. С. Адамс Г. Н. Рессел, 1928) на методе калибровки глазомерных интенсивностей линий в спектре Солнца Г. Роуланда в числах эффективных атомов (В. С. Адамс, Г. Н. Рессел, М. Е. Мур, 1928). После же анализа работ Шустера-Шварцшильда, давших формулу профиля звездных линий поглощения, определение обилия атомов делалось по отдельным, особенно сильным, резонансным линиям. Причем для коэффициента поглощения в линии использовалась классическая (Д. К. Стюарт, 1924) или квантово-механическая (А. Уизольд, 1927 г.) формула.

Весьма существенные исследования по определению чисел атомов звездных атмосферах были опубликованы в трех работах В. А. Амбарцумяна (1929—30 гг.).

В дальнейшем после работ В. Миннзерта, Д. Менцела, О. А. Мельникова и многих других, по определению обилия атомов в атмосферах, снова возвратились к статистическому, но более точному спектрофотометрическому методу „кривых роста“.

Применение принципа Доплера позволило не только судить о движении самой звезды, но и о тепловом и др. движении поглощающих атомов в ее атмосфере, которое различно сказывается на линиях разных элементов и в разных частях профиля одной и той же линии. То же можно сказать и о влиянии давления, столкновений атомов, электрических и магнитных полей и т. д.

Именно поэтому изучение профилей линий и их полных интенсивностей методами спектрофотометрии позволяет изучить строение и физические свойства атмосфер звезд.

Особенно большие успехи в этой области были достигнуты в два последних десятилетия. Именно для этих исследований во многих странах были созданы очень хорошие спектроскопические лаборатории (особенно в Пасадене, США), которые органически связаны с обсерваториями.

В России в Пулкове спектроскопическая, хорошо оборудованная лаборатория, была организована еще Б. Гассельбергом, которого и сменил на этом посту А. А. Белополюский.

Сейчас в Пулкове строится специальное новое здание спектроскопической лаборатории. Аналогичная или еще более широкого профиля лаборатория строится и в Крыму близ гор. Бахчисарай (в Крымской обсерватории).

Большую пользу в деле изучения звездных спектров сыграли результаты исследования негативов, полученных в высокогорных экспедициях. Начало этому было положено группой парижских астрономов под руководством Д. Шалонжа в тридцатых годах и до сего времени исследования продолжают (Швейцария, 3650 м над ур. моря) в стационарных условиях. Аналогичные экспедиции были организованы пулковскими (О. А. Мельников и др.) и бюраканскими (Л. В. Мирзоян и Н. Л. Иванова) астрономами в тесном содружестве (в 40, 50-х гг.).

Исследования, выполненные в подобных экспедициях раскрыли сущность явления „ультрафиолетового быльмерозского скачка“ и много других важных характеристик $УФ$ -континуумов звезд.

Естественно, что спектроскопические исследования не ограничились звездами и Солнцем. Изучались также и туманности, как планетарные, так и газовые или газопылевые. Изучение этих интересных объектов было начато еще в прошлом столетии Ф. А. Бредихиным в Москве. Именно он один из первых визуально изучал загадочные „небулярные“ линии спектров туманностей.

Новые возможности открылись после разработки теории свечения планетарных туманностей Г. Занстра и В. А. Амбарцумяна с одной стороны и внедрения в практику „небулярных“ спектрографов (для газово-пылевых туманностей) с другой. Упомянутые выше небулярные спектрографы, гасящие сильный, мешающий непрерывный спектр неба, установлены в СССР в Крыму* (С. Б. Пикельнер и др.), Бюракане* (Г. А. Гурздян) и в измененном виде на станции Государственного Астрономического Института (Н. Н. Парийский и др.). Исследования с этими инструментами дали о диффузных туманностях много новых сведений и, в частности, в вопросе об обилии газа и пыли в них.

Отметим, что первое, пионерское в СССР исследование спектров

* Конструкция Б. К. Иоаннисиани, изготовление Гос. Оптического Института.

туманностей (монохроматических изображений) путем сравнения их с таковым для звезды типа G было выполнено В. А. Амбарцумяном в 1933 г.

Успешно изучались спектры планет. В СССР этим вопросом занимались А. А. Белопольский, Г. А. Тихов, Н. П. Барабашев, Н. А. Козырев и др. Однако работы носили преимущественно колориметрический характер. В настоящее время теоретической основой в изучении атмосфер планет являются важные исследования по теории рассеяния излучения В. А. Амбарцумяна, его ученика В. В. Соболева и др. За рубежом большой вклад в планетную спектроскопию внесли В. М. Слайфер, Р. Вилдт, В. Г. Райт, Г. П. Кайпер, Г. Герцберг, Н. Бобровников, С. Чандрасекар (по теории) и др. Первые работы были сделаны визуально: А. Секки и В. Хэггинс в XIX в. обнаружили темные полосы в спектре урана.

Многое дало и изучение спектров комет. В СССР его начали Ф. А. Бредихин, А. А. Белопольский, Г. А. Шайн, С. В. Орлов, С. К. Всехсвятский, В. С. Шульман и др.

За рубежом этим занимались многие ученые. Наибольший вклад был сделан П. Свингсом, под руководством которого сейчас подготовлен атлас спектров большинства известных комет.

Интересными были и теоретические исследования по спектрам комет, в частности С. М. Полоскова о видимости излучений, полос в спектрах голов и хвостов комет. Наблюдаемые полосы оказались резонансными и поэтому отсутствие тех или иных полос, при наличии данного химического соединения в комете, обусловлено тем, что их резонансные излучения расположены в трудно доступной области спектра.

Весьма активно изучались и спектры метеоров и болидов. Долгие годы С. Н. Блажко был обладателем наибольшей их коллекции. Ему „везло“, но кроме того, он специально „охотился“ за ними и разработал метод редукций спектрограмм с изображениями линий метеоров.

Также в СССР тем же вопросом занимались А. М. Бахарев, Д. Л. Аставин-Разумин, И. С. Астапович, В. В. Федынский и др. Сейчас наибольшая коллекция спектров метеоров находится за рубежом и периодически пополняется. Р. М. Милман в Канаде составил сводку 214 фотографических спектров метеоров (по 1957 г.).

Здесь же следует указать и на исследование спектров метеоритов. В России этим занимались еще А. П. Ганский (1905 г.) и Н. Н. Калитин, а в СССР в 1950 г. А. А. Явнель (Сихотэ-Алиньский метеорит 1947 г.) и др. Изучение интенсивностей линий ответило на вопрос о точном химическом составе метеорита. Изучение спектров подобных тел непрерывно продолжается, как в СССР, так и за рубежом.

Большой вклад в мировую науку был сделан при спектроскопическом изучении различных вопросов атмосферной оптики. „Теллурические“ линии, открытые еще Д. Брюстером, изучал в Петербурге и Ораниенбауме физик Н. Г. Егоров и доказал их безусловную принадлежность атмосфере Земли (1882 и последующие годы).

Аналогичные исследования за рубежом выполнили А. Беккерель

Д. Гладстон, Г. Деляндр, П. Ж. С. Жансен, А. Корню, Р. Копеланд, С. Ланглей, Г. Мюллер, К. Смайс, Л. Толлон, Г. К. Фогель и др. в XIX в. П. Ж. С. Жансен еще в 1862 г. доказывал, что теллурические линии обусловлены парами земной атмосферы. Для изучения поглощательных свойств земной атмосферы в конце этого столетия Г. А. Тихов поднимался на Монблан (4810 м над уровнем моря) и позднее продолжал эти исследования в Пулковке и ряде экспедиций, за время которых доказал, в частности, наличие аномальной дисперсии атмосферы Земли в соседстве с теллурическими полосами в спектре прошедших лучей заходящего и восходящего Солнца.

Вопросом отождествления теллурических линий в спектре Солнца занимался также в Пулковке на 7-метровом дифракционном спектрографе В. Н. Кондратьев с сотрудниками (1932—35 гг.). При этом было открыто много новых теллурических линий.

Вопросом общей (непрерывной) спектральной дневной и ночной прозрачности земной атмосферы занимались много и на разных высотах. Обширная монография по этому вопросу вышла в последнее время в результате исследований Е. В. Пясковской-Фесенковой.

Теоретические исследования, вместе с наблюдениями, опубликованы В. Г. Фесенковым, В. А. Кратом и др. Работы опубликованы также П. И. Дугиным, М. В. Севастьяновой, В. И. Кучеровой, В. С. Соколовой, Н. Н. Сытинской, Л. В. Мирзояном, Е. Н. Котовой, Т. Г. Мегрелишвили, В. Б. Никоновым и многими другими (для ряда точек СССР).

К разделу атмосферной оптики примыкает также изучение свечения дневного, сумеречного и ночного неба. Особенно быстрый прогресс в этой области был достигнут в результате развития электроники. Применение электронно-оптических преобразователей позволило В. И. Красовскому найти новые инфракрасные полосы (1949 г.), отождествленные И. С. Шкловским с полосами гидроксидов *ОН*.

Интересной и трудной задачей для астроспектроскопистов является получение спектров зодиакального света и противостояния (Н. А. Козырев, М. Г. Каримов, Н. Н. Парийский, З. В. Корягина, К. Т. Эльви и П. Радник и др.).

Работы астрономов тесно связаны с геофизическими. Эта связь особенно укрепилась в течение МГГ (1957—58 гг.). Так например, в программе МГГ важное место занимают исследования по спектрам полярных сияний, начатые еще визуально в Пулковке в 1868 г. О. В. Струве и продолженные фотографически И. И. Сикорой по материалам, полученным во время героической русско-шведской экспедиции на Шпицберген (1899—1901 гг.).

В последнее время в СССР этим вопросом много занимались С. С. Журавлев, И. И. Лебединский, А. В. Миронов и Н. И. Шефов, Б. А. Багарецкий, Ю. И. Гальперин, В. И. Красовский и др. Получение спектров полярных сияний требовало применения оригинальных конструкций спектрографов (в частности типа „небулярных“) и элект-

тропно-оптических преобразователей. Любопытно, что в 1939 г. за рубежом Л. Вегард, а за ним В. Гортлейн и А. Мейвел (1957 г.) зарегистрировали в спектре некоторых полярных сияний три блестящие линии водорода, которые были очень широки и сдвинуты в ультрафиолет. Тоже наблюдал в 1957 г. Ю. Н. Гальперин на станции СССР в зоне полярных сияний. По величине этого сдвига была определена максимальная скорость залета корпускул-протонов, которая, как оказалось, достигала 2000 км/сек.

Г. А. Тихов и его ученики применили спектральный анализ для изучения отражательных спектров растений с целью обнаружить растительность на Марсе. При этом было доказано самоизлучение растений в ряде областей спектра, изменяемость полосы хлорофилла в спектрах растений с переходом к более суровым условиям, особенности спектров отражения растений и т. д. Благодаря этим исследованиям появился новый раздел астрономии—Астробиология.

В еще большей степени, чем при изучении планетной и галактической системы, развитие спектрального анализа сыграло решающую роль при изучении Метагалактики.

С его помощью были изучены закономерности осевого вращения галактик, угловая скорость которого оказалась различной на разных расстояниях от центра.

Сопоставление фотометрических, колориметрических, спектральных и радионаблюдений галактик дало возможность ответить на вопрос о направлении вращения спиральных рукавов галактик типа S. Впервые скорость большой Галактики в Андромеде по сдвигу линий в спектре измерил в 1912 г. В. М. Слайфер.

При спектроскопическом изучении Метагалактики наблюдается так называемое „красное смещение“ линий в их спектрах, которое пропорционально ($\Delta\lambda \sim \lambda$) длине волны света во всем диапазоне от ультрафиолетового и до радиодиапазона (т. е. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \text{const}$ или $c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \text{const}$) и не может быть отделено от доплеровского смещения. Соответствующие наблюдения 600 галактик были произведены в Маунт-Вилсоне и Паломаре (1928—1958), в частности, первоначально Ф. Пизе, затем М. Л. Юмассоном и др. Для этой цели использовались два самые мощные отражательные телескопа США—100 и 200-дюймовый.

В настоящее время наибольший измеренный сдвиг линий составляет $1/5$ скорости света (+60920 км/сек, в среднем для трех галактик. Если эти сдвиги являются доплеровскими, т. е. соответствуют движению (удалению) галактик, то истинная скорость согласно релятивистскому уравнению будет меньше чем $c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ (например, на 10% при

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{5}).$$

Исследовались спектры периодических переменных типа цефеид, долгопериодических, затменных и другие.

Много новых сведений было получено из изучения спектров Новых и Сверхновых звезд (Ц. Пэйн-Гапошкин, Д. Б. Маклофлин, Р. Минковский, Э. Р. Мустель и др.).

Однако, самый большой вклад остается за самой еще малочисленной группой переменных, нестационарных звезд: типа Т Тельца, AG Дракона, UV Кита и вообще вспыхающих. В их спектрах удалось обнаружить непрерывную эмиссию еще неизвестной природы и особенного распределения по спектру. Для обычного, температурного излучения, интенсивность I_λ убывает с возрастанием длины волны (λ) пропорционально λ^{-4} : $I_\lambda \sim \lambda^{-4}$ при $T \rightarrow \infty$, а например, в спектре звезды VY Ориона $I_\lambda \sim \lambda^{-4.7}$ (К. Г. Бем, 1957). Эта эмиссия либо выделяется в коротковолновом участке спектра, либо „заливает“ или вуалирует дискретные линии в нем. „Нетенловые“ спектры обнаруживаются и у некоторых туманностей (например, Крабовидной), $I_\lambda \sim \lambda^{-4}$ в области 3300–3000 Å (П. В. Щеглов, 1957), у Новых и Сверхновых звезд, „радиозвезд“ (в радиодиапазоне), или иначе дискретных радиисточников, у которых $I_\lambda \sim \lambda^{-2.5}$ и $\lambda^{-4.2}$ (Г. Р. Вайтфильд, 1957 г.) и т. д.

Явление непрерывной эмиссии, которое было открыто в спектрах нашими зарубежными коллегами, сейчас особенно подробно изучается теоретически в СССР В. А. Амбарцумяном, а также И. М. Гордоном и др. Развивая свою весьма оригинальную идею о звездных ассоциациях, В. А. Амбарцумян обнаружил, что звезды типа Т Тельца, показывающие явления непрерывной эмиссии составляют звездные ассоциации — „Т-ассоциации“, а некоторые „О-ассоциации“ одновременно являются и „Т-ассоциациями“ и т. д.

Первая классификация звезд типа Т Тельца, а также UV Кита, AG Дракона, RW Возничего и др., анализ их случайных колебаний блеска, цвета, спектра, а также генетическая связь с диффузными, в частности, кометообразными, туманностями, привел В. А. Амбарцумяна к заключению, что явление непрерывной эмиссии не есть тепловое или температурное*. Оно, по-видимому, связано с освобождением больших внутризвездных дискретных порций энергии (ДИП) в наружных областях звезд с дальнейшей ее переработкой в оптическое излучение. Таким образом эти исследования В. А. Амбарцумяна открывают большие перспективы для изучения природы нового, пока еще таинственного излучения. В этом явлении безусловно лежит разгадка многих „тайн“ Вселенной. Возможно, что в некоторых случаях излучение является синхротронным**. Наблюдательной проверке посвяще-

* Термин „нетемпературное“ излучение, по-видимому, впервые введен В. А. Амбарцумяном (1956 г.), а не автором этой статьи, как им было неточно указано (1958 г.)

** По И. М. Гордону аномальное распределение энергии в УФ-спектре звезд NX Единорога типа Т Тельца, быстрые колебания блеска и высокая его поляризация объясняется его теорией возбуждения эмиссионных линий в спектрах нестационарных звезд синхротронным излучением релятивистских электронов.

ны работы А. Джоя, Н. Роман, Г. Хербига, Г. Аро, К. Бема, Л. В. Мирзояна и др.

К ведущим направлениям современной астроспектроскопии следует также отнести изучение обилия изотопов в атмосферах звезд и планет. Соответствующие исследования в спектрах N и R , иначе $C=$ —звезд, сделаны в работах Р. Ф. Сэнфорда, Д. Менцела, К. Вурма, А. Маккилара, Г. А. Шайна, Ш. Ференбаха, Г. Герцберга и др.

Оказалось, в частности, что обилие C^{12}/C^{13} сильно отличается от земного (90:1, в коре) и очень колеблется от звезды к звезде.

То же можно сказать и об атмосферном (земном) обилии O^{16}/O^{18} , O^{16}/O^{17} и других изотопах.

Все это представляет исключительный интерес для космогонии и проблема является ведущей, ибо вопрос о распространенности элементов и их изотопов в природе крайне важен.

К безусловно ведущим проблемам относится также изучение вспышек на Солнце, что обусловило большую активацию этих исследований в СССР и за рубежом.

Из приведенного беглого обзора мы видим, что за 100 лет своего существования астроспектроскопия и спектральный анализ вообще действительно явились и будут являться „языком Вселенной“, рассказывающим нам о многих ее „тайнах“. Весьма существенно, что по мере разработки новых технических средств, спектроскописты все дальше и дальше отвоевывают „белые места“ на картах спектров светил, так что современные исследования, например в случае Солнца, простираются от жестких рентгеновских лучей и до метровых радиолучей. И этот прогресс сделан всего лишь за сто лет!

Победы будущего еще более интересны и золотой фонд мировой науки будет пополнен новыми открытиями и фактами, все более подтверждающими материальность и бесконечность окружающего нас мира.

Главная астрономическая обсерватория
АН СССР

Поступило 28 VIII 1958

Օ. Ա. ՄԵԼՆԻԿՈՎ

ԱՍՏՐՈՍՊԵԿՏՐՈՍԿՈՊԻԱՅԻ ՀԱՐՅՈՒՐԱՄՅԱԿԻ ՇՈՒՐԶԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածու՛մ տրված է աստրոպեկտրոսկոպիայի դժուր հարյուր աստիճանի թաղանթում կատարված հետազոտությունների համառոտ վերլուծությունը և վեր է հանված այն հոկայական գերք, որ խաղացել է աստրոպեկտրոսկոպիան, որպես «Տիեզերքի լեզու», վերջինիս «զազանիքների» առաջնատիպ լեզուն դարձում:

Л. В. Мирзоян

О К-эффекте O-B0 звезд

С момента обнаружения Фростом и Адамсом [1] К-эффекта в лучевых скоростях O—B звезд прошло более пятидесяти лет. Этому явлению посвящены многочисленные исследования, однако в настоящее время проблема К-эффекта остается актуальной, так как еще не получила своего однозначного решения. Здесь имеется в виду не столько отсутствие общепринятой интерпретации этого явления, несмотря на отдельные удачные попытки [2], сколько, прежде всего, отсутствие единого мнения о реальном существовании К-эффекта в лучевых скоростях O—B звезд.

В ряде работ было показано [3—6], что в лучевых скоростях ярких O—B звезд (ярче 6-й величины) имеется положительный К-член порядка 4 км/сек. Что касается более слабых звезд тех же спектральных классов, то в лучевых скоростях последних К-член, согласно этим работам, совершенно отсутствует.

С другой стороны, в последние годы появились работы [7—9], в которых для К-эффекта получены отрицательные значения и на этом основании реальность существования К-эффекта, как особенности, присущей O—B звездам ставится под сомнение [9].

Настоящее исследование ставит своей целью анализ лучевых скоростей O—B0 звезд по общеизвестным формулам галактического вращения на основе наиболее точных современных данных. В конце работы в общих чертах рассмотрена одна возможность интерпретации полученных результатов.

В основе работы лежат лучевые скорости 330 звезд до 10-й величины в спектральной области O—B0.5 из „Общего каталога“ Р. Вилсона [10]. Для подавляющего большинства (более 80%) из них имеются электрофотометрические определения избытков цвета [11—14].

В эту совокупность не вошли звезды с галактическими широтами превышающими 25° по обе стороны от галактической плоскости. Из рассмотрения исключены также звезды с лучевыми скоростями, превышающими по абсолютной величине 50 км/сек, после исправления за стандартную скорость Солнца $V_\odot = 20$ км/сек.

В таблице 1 представлено распределение вошедших в наш список звезд по спектральным подклассам. Спектры заимствованы из работы [14]. В редких случаях, когда не имелись определения спектров по классификации МК, использованы данные, приведенные в каталоге Вилсона.

Таблица 1

Распределение звезд по спектральным классам

Спектр	O5	O6	O7	O8	O9	O9.5	B0	B0.5
Число звезд	11	21	18	35	38	14	124	69

Все звезды этого списка были разделены на три группы по видимым величинам:

$$m < 6.0; \quad 6.0 < m < 8.0; \quad 8.0 < m < 10.0.$$

Для каждой из этих групп способом наименьших квадратов решались системы уравнений вида:

$$V_r = -V_{\odot} \cos \lambda + A \bar{r} \sin 2(l-l_0) \cos^2 b + K \quad (1)$$

для определения неизвестных V_{\odot} , $A \cdot \bar{r}$ и K . В левой части уравнений (1) V_r — наблюдаемая лучевая скорость звезды, а в правой части представлены составляющие этой скорости: проекция пространственной скорости Солнца на луч зрения к звезде, член обусловленный галактическим вращением (A — постоянная Оорта, \bar{r} — среднее расстояние группы) и K — член.

Для апекса Солнца использованы стандартные значения координат: $A = 270^\circ$, $D = 30^\circ$, для долготы центра Галактики $l = 325^\circ$, а галактические координаты звезд вычислены по таблицам Ольсона. Значения $\cos \lambda$, где λ — угловое расстояние звезды, от апекса, определены с помощью номограммы, составленной по аналогии с номограммой, предложенной А. Дюффоном [15] с большим увеличением.

Результаты решений для указанных трех групп, относящиеся к K -эффекту сведены в четвертом столбце таблицы 2. Здесь и дальше мы займемся только этими данными, оставляя вне рассмотрения в настоящей статье результаты, касающиеся скорости Солнца относительно центроидов звезд каждой группы и Оортовской постоянной A галактического вращения.

Во втором и третьем столбцах приведенной таблицы даны, соответственно число звезд в группах и среднее расстояние групп.

Расстояния звезд вычислены по абсолютным величинам и избыткам цвета в системе Стеббинса и Уитфорда. Используются данные работ: для абсолютных величин [16, 17], а для избытков цвета [11—14]. В немногих случаях избытки цвета вычислены интерполированием данных для соседних звезд. Во всех случаях учтены поправки за нормальные показатели цвета.

* Здесь и в остальных таблицах, приведены вероятные ошибки.

Таблица 2
Решения для групп по видимым величинам*

Группа	n	\bar{r} (кпс)	K (км/сек.)
$m < 6.0$	64	0.85	-2.34 ± 1.2
$6.0 < m < 8.0$	126	1.51	-2.62 ± 1.1
$8.0 < m < 10.0$	140	2.24	-6.95 ± 1.2

На основе данных таблицы 2 можно констатировать весьма существенный факт: К-член для всех рассматриваемых групп отрицательный, при этом намечается определенный ход величины К-эффекта со средним расстоянием.

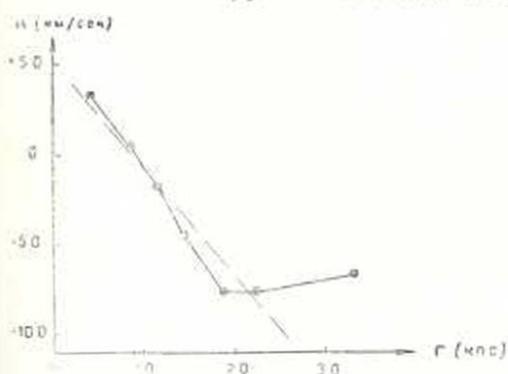
Существование зависимости между величиной К-эффекта и средним расстоянием рассматриваемой группы звезд заслуживает внимания. Поэтому, прежде, чем заняться изучением этой зависимости, мы сочли необходимым проверить реальность наличия такой зависимости.

С этой целью все звезды нашего списка были разделены на семь групп, в этот раз уже по известным фотометрическим расстояниям. Пределы расстояний для отдельных групп были выбраны таким образом, чтобы иметь примерно равномерное распределение звезд по группам.

Решения систем уравнений вида (1) для новых групп привели к результатам, представленным в таблице 3. Обозначения здесь прежние.

Новые решения полностью подтверждают реальность существования зависимости между величиной К-эффекта и средним расстоянием рассматриваемых групп звезд. Обращает на себя внимание положительный знак К-члена для ближайших двух групп. Ход изменения величины К-эффекта со средним расстоянием прежний: она непрерывно убывает, возрастая по абсолютной

величине в области отрицательных значений. Следует отметить, что для ближайшей группы величина К-эффекта близка к результатам



Фиг. 1. Зависимость величины К-эффекта от среднего расстояния рассматриваемых групп, по данным настоящей работы (табл. 3).

от среднего расстояния по данным таблицы 3 графически представлена на фиг. 1. Из этого графика следует, что с достаточным осно-

Таблица 3

Решения для групп по фотометрическим расстояниям

Группа (r в кпс)	n	r (кпс)	K (км/сек)
0-600	33	0.41	+3.69 ± 1.3
600-1000	47	0.83	+0.47 ± 1.3
1000-1300	42	1.15	-1.63 ± 2.1
1300-1600	53	1.44	-4.12 ± 1.8
1600-2050	56	1.88	-7.41 ± 1.8
2000-2500	46	2.25	-7.45 ± 1.9
>2500	53	3.34	-6.58 ± 2.3

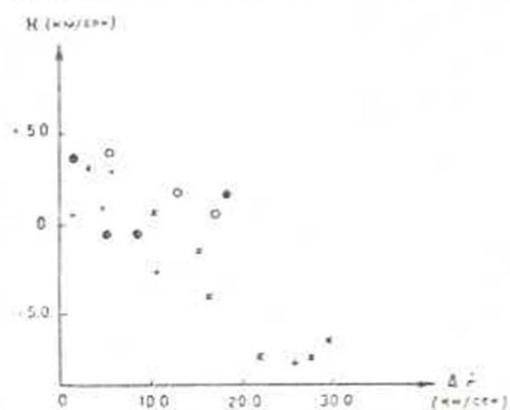
классических работ (см. например [6]), которые были получены для наиболее ярких звезд. Весьма интересно, что в отличие от распространенного до сих пор представления о наличии разрыва между значениями К-эффекта, соответствующими ярким и слабым O-B0 звездам, К-член оказывается непрерывно изменяющимся с расстоянием.

Для наглядности зависимость величины К-эффекта

ванием эту зависимость можно считать, в первом приближении, линейной. Наблюдаемое отклонение точки, соответствующей наиболее удаленной группе от линейной зависимости, возможно, обусловлено незаконностью применения формулы (1) для больших расстояний от Солнца. Для этой, также как и для двух предыдущих по расстояниям групп следует учесть члены галактического вращения высших порядков. Однако мы этим не будем заниматься, так как учет членов высших порядков не может существенным образом повлиять на полученную зависимость (K, \bar{r}) .

Наличие линейной зависимости между K -членом и средним расстоянием для O - V звезд, по всей вероятности, обусловлено определенными физическими, возможно и динамическими особенностями этих звезд. Может оказаться, что она является следствием совокупного действия ряда физических и динамических факторов, свойственных этим звездам.

Небезинтересно здесь добавить, что существование зависимости (K, \bar{r}) подтверждается данными других авторов, не обративших внимание, на это весьма важное обстоятельство. Сказанное иллюстрируется графиком зависимости



Фиг. 2. Зависимость величины K -эффекта от произведения $A \cdot \bar{r}$, по данным: ооо Плаккета и Пирса [4], ●●● Али [7], +++ Пишмиш и Прието [8] и ××× настоящей работы.

величины K -эффекта от произведения $A \cdot \bar{r}$ по данным работ [4, 7, 8] и нашей (фиг. 2). Поскольку в указанных работах отсутствуют точные определения расстояний, то мы сочли возможным рассмотреть вместо зависимости (K, \bar{r}) , зависимость $(K, A \cdot \bar{r})$, так как произведение $A \cdot \bar{r}$ непосредственно получается из решений уравнений вида (1). Замена среднего расстояния через это произведение не может заметно менять характер зависимости.

Фиг. 2 показывает, что реальность обнаруженной зависимости K -эффекта от среднего расстояния рассматриваемой группы звезд не может вызвать никаких сомнений. Следует указать также, что аналогичная зависимость, как показывают данные О. А. Мельникова [18], наблюдается и для долгопериодических цефеид. Однако эта зависимость для долгопериодических цефеид отличается от зависимости для O - V звезд как нуль-пунктом, так и угловым коэффициентом зависимости.

Для объяснения полученной зависимости между величиной K -эффекта и средним расстоянием значительный интерес представляет

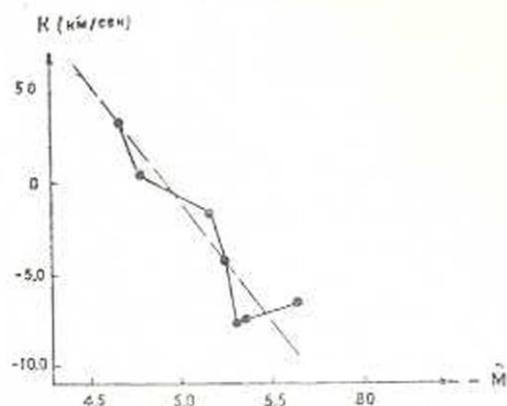
приведенный на фиг. 3 график. Он весьма наглядно показывает, что существует аналогичная зависимость между К-эффектом и средней абсолютной величиной Θ -В0 звезд. Это свидетельствует о том, что полученная выше зависимость К-эффекта от среднего расстояния звезд является, на самом деле, следствием этой зависимости, благодаря тому, хорошо известному факту, что доля звезд высокой светимости растет среди всех наблюдаемых звезд до данной видимой яркости с возрастанием видимой величины, иначе говоря с возрастанием среднего расстояния.

Таким образом фиг. 3 наглядно иллюстрирует исключительно важный факт: *Величина К-эффекта является определенной убывающей функцией от средней светимости звезд рассматриваемых групп.* Она регулярно убывает, возрастая, по абсолютной величине, в области отрицательных значений. Поскольку у звезд высокой светимости вполне вероятно истечение материи с их поверхностей, то полученная зависимость, с этой точки зрения, свидетельствует о том, что скорость истечения растет вместе со светимостью.

Если это действительно так, что вполне допустимо, то К-эффекту в лучевых скоростях О-В0 звезд можно дать следующее объяснение.

Наблюдаемый эффект, по-видимому, состоит из двух компонентов. Первый из этих компонентов во всех случаях, положительный и по величине, в среднем, почти одинаков для всех О-В0 звезд (по-видимому, порядка 10 км/сек). Второй компонент отрицательный и по абсолютной величине растет со светимостью. Этот компонент может быть рассмотрен как результат истечения материи с поверхностных слоев О-В0 звезд. Что касается вопроса о природе первого, положительного компонента К-эффекта, то для его объяснения можно привлечь ряд известных в настоящее время явлений (Эйнштейновское красное смещение, расширение звездных ассоциаций, состоящих из горячих гигантов и т. д.).

В свете такой интерпретации К-эффекта, полученным выше (табл. 3) результатам, можно дать следующее возможное объяснение. Для ближайших групп звезд, содержащих, в среднем, звезды сравнительно низкой светимости, положительный компонент К-эффекта по своей абсолютной величине превышает второй и следовательно К-эффект в целом должен быть положительным. По мере возрастания



Фиг. 3. Зависимость величины К-эффекта от средней абсолютной величины для групп, представленных в табл. 3.

среднего расстояния, в среднем, растет и светимость звезд в группах и постепенно картина меняется*. И это приводит к тому, что для сравнительно далеких групп К-эффект становится, в целом отрицательным. Для совокупности всех O—B0 звезд второй компонент К-эффекта, поэтому должен превышать над первым, положительным, то есть в самом общем случае, когда все O—B0 звезды рассматриваются вместе, К-эффект должен быть отрицательным.

Этот вывод подтверждается таблицей 4, где даны результаты общих решений для всех звезд нашего списка с расстояниями до

Таблица 4 2.5 кпс (первая строка) и всех звезд независимо от расстояния (вторая строка).

Общие решения			
Группа	n	\bar{r} (кпс)	K (км/сек)
$r < 2500$ пс	277	1.40	-3.50 ± 0.7
Все звезды	330	1.71	-3.45 ± 0.7

Следовательно, приведенные в этой таблице данные, относящиеся к К-эффекту могут рассматриваться как говорящие в

пользу представления об истечении материи с поверхностных слоев O—B0 звезд.

Здесь следует упомянуть о работе Г. А. Шайна [19], где впервые отрицательный К-эффект, полученный для звезд-сверхгигантов типов B5—A3 ($K \approx -6$ км/сек) интерпретируется как результат истечения материи из атмосфер этих звезд.

Поскольку, согласно полученной выше зависимости между величиной К-эффекта и светимостью (фиг. 3), отрицательный К-эффект, по абсолютной величине растет вместе со светимостью, то максимальный эффект следует ожидать у звезд наиболее высокой светимости. Для дополнительной проверки указанной зависимости мы выделили в отдельную группу все звезды нашего списка с расстояниями до 2.0 кпс и абсолютными величинами не ниже $-5^m - 5^{**}$. Общее число таких звезд*** оказалось равным 31, а средняя абсолютная величина $-6^m - 26$. К-эффект для этой группы получен равным $-8,61$ км/сек, т. е. максимальным, как и следовало ожидать. Таким образом эта проверка подтверждает основной вывод настоящей работы о существовании отрицательного компонента в К-эффекте O—B0 звезд, возрастающего, по абсолютной величине, со светимостью звезд.

Отметим также, что из изложенного становится понятным расхождение между результатами работ [3—6] и [7—9], относящимися к величине К-эффекта у O—B звезд. В первых из них рассматривались сравнительно близкие звезды, и поэтому полученный в этих работах

* Как видно из графика (фиг. 3) К-эффект равен нулю при $\bar{M} \approx -1.9$. В этом случае положительный и отрицательный компоненты К-эффекта, по абсолютной величине равны.

** Классе светимости не ниже II.

*** Исключены три звезды, сомнительные, в смысле принадлежности к потоку Скорпиона—Центавра [20, 21].

К-эффект или положительный (наиболее яркие звезды), или близок к нулю. В последних работах, наоборот, пределы расстояний заметно расширены, что привело к изменению знака К-эффекта.

Необходимо здесь добавить, что в наш список вошли только две три звезды, принадлежащие потоку Скорпиона—Центавра [20, 21], причем это обстоятельство совершенно не сказалось на полученных решениях. Поэтому возможность объяснения положительного К-эффекта для ближайшей группы (табл. 3) движением этого потока полностью исключается.

В заключение следует отметить, что полученные выше результаты носят предварительный характер, в том смысле, что рассматриваемые лучевые скорости не исправлены за возможные ошибки, вводимые использованием лабораторных длин волн при их определении [22]. Что касается приведенного выше объяснения полученных в настоящей работе результатов, то оно весьма предварительное и схематичное. Автор надеется вернуться к затронутым выше вопросам позже.

Бирюканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступило 12 VIII 1958

Լ. Վ. Միրզոյան

О—В0 ԱՍՏՂԵՐԻ Կ-ԷՖԵԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Օ—В0 աստղերի տեսագծային արագությունների վերլուծությունից ստացված է Կ-էֆեկտի մեծությունը այդ աստղերի Արեգակից սարքեր հեռավորությունների վրա գտնվող խմբերի համար (աղյուսակ 3): Ստացված արդյունքները հանդեպի են այն կարևոր եզրակացությանը, որ Կ-էֆեկտի մեծությունը անընդհատ նվազող ֆունկցիա է քննարկված խմբերի միջին հեռավորությունից (գծ. 1): Այնուհետև ցույց է արված, որ իրականում գոյություն ունի խորը ֆիզիկական իմաստ ունեցող համանման անհշարժյուն Կ-էֆեկտի մեծության և հիշյալ խմբերի աստղերի միջին լուսատվության միջև (գծ. 3) և որ վերջինիս ուղղակի հետևանքն է Կ-էֆեկտի մեծության և միջին հեռավորության միջև ստացված կախումը:

Աշխատության մեջ արվում է նաև ստացված նոր արդյունքների մի հնարավոր բացատրություն:

Հիմնավորված է այն հիմնական եզրակացությունը, որ Օ—В0 աստղերի մոտ Կ-էֆեկտն իր մեջ պարունակում է մի բացասական բաղադրիչ, որն իր բացարձակ մեծությամբ աճում է աստղերի լուսատվության հետ միասին: Այդ բաղադրիչը աշխատության մեջ քննարկվում է որպես Օ—В0 աստղերի մակերևույթային շերտերից նյութի արտահոսքի երևույթի հետևանք:

ЛИТЕРАТУРА

1. Frost E. B. and Adams E. C., Dec. Publ. Univ. of Chicago, 8, 105, 1904.
2. Торошадзе А. Ф., Булл. Абаст. Обс. 15, 115, 1933.
3. Plaskett J. S., MN. 90, 616, 621, 1930; 98, 518, 1938.

4. *Plaskatt J. S. and Pearce J. A.* Publ. Dom. Ap. Obs., 5, 4, 1936.
5. *Smart W. M. and Green H. E.* MN, 96, 471, 1936.
6. *Weaver H. F.* Vistas in Astronomy (Ed. A. Beer.), 1, 227, 1955.
7. *Ali A.* MN, 101, 324, 1941.
8. *Pişmiş P. and Prieto A.* Ap. J., 101, 314, 1945.
9. *Филин А. Я.* Астр. Ж., 84, 525, 1957.
10. *Wilson R. E.* General Catalogue of Stellar Radial Velocities, Washington, 1953.
11. *Stebbins J., Huffer C. and Whitford A.*, Ap. J., 91, 20, 1940.
12. *Oosterhoff P. Th.* BAN, 11, 299, 1951.
13. *Schilt J. and Jackson C.* A. J. 56, 209, 1951.
14. *Morgan W. W., Code A. D. and Whitford A. E.* Ap. J. Suppl., 2, 41, 1955.
15. *Dufton A. F.* MN, 92, 688, 1932.
16. *Keenan P. C. and Morgan W. W.* Astrophysics (Ed. J. A. Hynek), New York, Mc Graw-Hill Book, p. 23, 1951.
17. *Johnson H. L. and Hiltner W. A.* Ap. J. 123, 267, 1955.
18. *Мельников О. А.* Труды ГАО, 64, 127, 1950.
19. *Шайн Г. А.* Бюлл. Абст. Обс., 7, 83, 1943.
20. *Куликовский П. Г.* Бюлл. ГАИШ, № 2, 1940.
21. *Vlaauw A.* Publ. Karteyn Astr. Lab. Groningen, № 52, 1946.
22. *Аракелян М. А.* Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 3, 1957.

М. А. Аракелян

О дисперсии скоростей карликов с эмиссионными линиями

Ж. Делаем [1], Я. Э. Эйнасто [2], А. Виссотским и Э. Дайером [3] было показано, что дисперсия пекулярных пространственных скоростей карликов с эмиссионными линиями заметно отличается от дисперсии скоростей карликов, не имеющих в своих спектрах эмиссионных линий. Согласно [3] дисперсия пекулярных скоростей карликов, не имеющих эмиссионных линий, равна 30 км/сек , карликов, содержащих в своих спектрах эмиссионные линии ионизованного кальция, — 18 км/сек , и, наконец, карликов имеющих в излучении линии ионизованного кальция и водорода, — 15 км/сек . Последняя группа звезд представляет особенно большой интерес, так как спектр dM с эмиссионными линиями водорода и кальция имеют вне вспышки все известные переменные типа UV Кита. По существу, упомянутый спектр dMe является единственной характерной особенностью этих звезд, наблюдаемой вне вспышек. Не исключена возможность, что все, или почти все звезды, имеющие спектр dMe , относятся к категории вспыхивающих звезд.

Представляется целесообразным рассматривать в отдельности кинематические характеристики двух типов красных карликов с эмиссионными линиями, т. к. возможно, что эти звезды, заметно отличаясь друг от друга по своему физическому состоянию, представляют и кинематически различные группы. Действительно, для возникновения эмиссионных линий водорода необходима значительно более высокая энергия, чем это требуется для возникновения эмиссионных линий ионизованного кальция. Поэтому возможно, что отличны и физические процессы, приводящие к возникновению тех и других эмиссионных линий. В пользу этого говорит и тот упомянутый выше факт, что спектры всех вспыхивающих звезд характеризуются вне вспышки наличием эмиссионных линий водорода. Создается впечатление, что наличие эмиссионных линий ионизованного кальция, не сопровождающихся эмиссионными линиями водорода, не является достаточным условием для вспышки. Необходимо упомянуть также то обстоятельство, что среди звезд, находящихся в ближайших окрестностях Солнца, эмиссионные линии водорода наблюдаются в очень узком диапазоне спектральных классов — у звезд типа $dM0$ и более поздних. Эмиссионные же линии ионизованного кальция наблюдаются в спектрах карликов типов $G-M$.

Дисперсия пекулярных скоростей карликов типа M с эмиссионными линиями водорода приобретает особенно большой интерес в связи с пространственным распределением вспыхивающих звезд. Как известно, в ближайших окрестностях Солнца за сравнительно короткий промежуток времени обнаружено два десятка звезд типа UV Кита. С другой стороны, большое количество слабых вспыхивающих звезд, по существу ничем не отличающихся от вспыхивающих звезд, наблюдаемых в окрестностях Солнца, обнаружено Г. Аро и его сотрудниками [4, 5] в темных туманностях Тельца и Ориона. Поиски слабых вспыхивающих звезд в примыкающих к этим туманностям областях неба к положительному результату не привели. В настоящее время можно считать установленным, что вспыхивающие звезды вместе со звездами типа T Тельца являются составляющими T -ассоциаций. Как было отмечено В. А. Амбарцумяном [6], из приведенных фактов, касающихся пространственного распределения вспыхивающих звезд, следует возможность существования ассоциаций, состоящих только лишь из звезд типа UV Кита— UV -ассоциаций. Наличие значительного числа вспыхивающих звезд в ближайших окрестностях Солнца дало В. А. Амбарцумяну основание указать на возможность того, что Солнце находится случайно внутри такой UV -ассоциации.

Обнаруженные в [3] различия кинематических характеристик карликов типа M говорят о том, что карлики с эмиссионными линиями возможно представляют собой особый класс звезд, не связанный со звездами этого спектрального типа, лишенными эмиссионных линий. Величина же дисперсии скоростей этих звезд отрицает возможность предположения, что этот класс звезд представляет сферическую подсистему Галактики. В связи с этим небезинтересно упомянуть, что средняя дисперсия лучевых скоростей пяти известных групп звезд типа T Тельца равна, согласно Т. А. Урановой [7], 20 км/сек .

С другой стороны, если карлики с эмиссионными линиями водорода, наблюдаемые в окрестностях Солнца, действительно представляют собой генетически связанную группу звезд, то следует ожидать наличия заметного K -эффекта в их лучевых скоростях. (При этом величина K -эффекта будет зависеть, очевидно, и от того, насколько близко находится Солнце от центра системы).

Постольку поскольку приведенная выше величина дисперсии пекулярных пространственных скоростей карликов с эмиссионными линиями водорода и кальция основана на данных всего лишь о 13 звездах этого типа, представляется целесообразным проверить этот результат на основании сравнительно большего материала. К сожалению имеются данные о собственных движениях лишь очень небольшого числа карликов с эмиссионными линиями водорода. Поэтому для сравнительного увеличения доступного материала мы решили ограничиться определением дисперсии пекулярных *лучевых* скоростей звезд этого типа.

Пользуясь данными, приведенными в „Общем каталоге лучевых скоростей звезд“ Р. Вилсона [8] (45 звезд) и в списке лучевых скоростей звезд-карликов Э. Дайера [9] (11 звезд), мы вычислили координаты апекса, скорость Солнца и K -эффект для карликов с эмиссионными линиями водорода. Результаты вычислений вместе со своими вероятными ошибками приведены во второй строке таблицы 1.

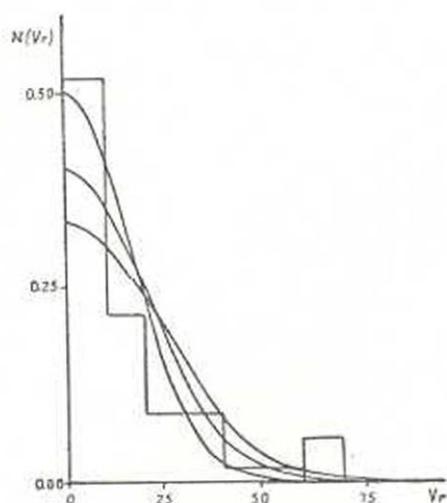
Таблица 1

n	Верхний предел V_r	A	D	$V_{\odot} \left(\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right)$	$K \left(\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right)$	$\sqrt{V_r^2}$
56	—	$264^{\circ} \pm 14^{\circ}$	$-48^{\circ} \pm 17^{\circ}$	22.9 ± 6.7	$+2.1 \pm 2.6$	23.4
54	60 км/сек	247 ± 14	$+47 \pm 15$	23.3 ± 6.1	$+4.5 \pm 2.3$	19.6
52	50	249 ± 13	$+43 \pm 15$	20.5 ± 5.5	$+3.2 \pm 2.1$	17.6
50	40	250 ± 10	-43 ± 11	24.6 ± 4.7	$+6.6 \pm 1.8$	14.7
46	30	265 ± 11	-50 ± 11	21.6 ± 4.2	$+6.5 \pm 1.6$	12.7

Однако приведенное значение средней квадратичной пекулярной скорости нельзя считать реальным значением дисперсии, так как оно определено завышено благодаря наличию нескольких звезд со скоростями, резко отличающимися от скоростей подавляющего большинства остальных. Ввиду этого для определения дисперсии скоростей мы построили кривую распределения пекулярных скоростей звезд этой группы и подобрали кривую нормального распределения, наилучшим образом представляющую наблюдаемое распределение пекулярных скоростей.

На фиг. 1 приведено распределение пекулярных скоростей карликов типа M с эмиссионными линиями H и $CaII$ и три кривые нормального распределения ($\sigma = 16, 20, 24$ км/сек). Рисунок показывает, что значение $\sqrt{V_r^2} = 23.4$ км/сек обусловлено именно влиянием малого числа звезд и большими скоростями и реальная дисперсия пекулярных скоростей близка к $\sigma = 16$ км/сек. Этот результат находится в согласии с данными, полученными А. Виссотским и Э. Дайером [3].

Далее, хотя значение, приведенное во второй строке таблицы 1, основано на сравнительно небольшом количестве данных и прида-



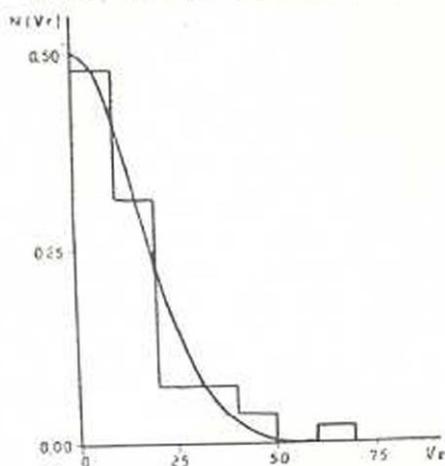
Фиг. 1. Распределение пекулярных лучевых скоростей карликов с эмиссионными линиями водорода и ионизованного кальция. Кривые представляют нормальное распределение при дисперсиях 16, 20 и 24 км/сек.

вать большого значения полученным координатам апекса и скорости Солнца не приходится, тем не менее величина K -эффекта в 2 км/сек , по-видимому, не является следствием малочисленности данных и влияния нескольких звезд с очень большими скоростями. Действительно, среди последних преобладают звезды с отрицательными лучевыми скоростями и в случае их неучета K -эффект исследуемой группы возрастает. В этом можно убедиться по данным третьей и последующих строк таблицы 1. В них приведены результаты, полученные в случае отброса нескольких звезд с наибольшими абсолютными значениями лучевой скорости. В первом столбце таблицы приведено число звезд, на данных о которых основано решение, приведенное в соответствующей строке. Во втором столбце этой таблицы дано максимальное значение абсолютной величины лучевой скорости оставшихся звезд.

Данные таблицы показывают, что влияние звезд с большими скоростями направлено на уменьшение K -эффекта и значение $K=+2 \text{ км/сек}$ можно рассматривать как нижний предел этой величины.

Не исключена возможность, что на самом деле K -эффект карликов с эмиссионными линиями водорода больше.

На фиг. 2 приведено распределение пекулярных лучевых скоростей 54 карликов после отброса двух звезд с $|V_r| > 60 \text{ км/сек}$. Как видно из таблицы средняя квадратичная пекулярная скорость в этом случае равна 19.6 км/сек . Однако рисунок 2 показывает, что распределение пекулярных скоростей очень хорошо представляется кривой нормального распределения при дисперсии $\sigma = 16 \text{ км/сек}$. Это говорит о том, что выброс звезд с $|V_r| > 60 \text{ км/сек}$ является обоснованным. Величину же 16 км/сек



Фиг. 2. Распределение пекулярных скоростей после исключения двух звезд с $|V_r| > 60 \text{ км/сек}$. Кривая соответствует дисперсии в 16 км/сек .

можно принять за окончательное значение дисперсии пекулярных скоростей карликов типа M с эмиссионными линиями водорода и ионизованного кальция.

Таким образом, мы должны констатировать факт существования вокруг Солнца группы карликов типа M с эмиссионными линиями водорода, представляющей по своим кинематическим характеристикам

во всяком случае не сферическую составляющую Галактики*. С другой стороны, эта группа звезд расширяется со скоростью в несколько километров в секунду. Эти две особенности окружающих Солнце карликов с эмиссионными линиями водорода делают эту группу весьма сходной с известными звездными ассоциациями. Однако она отличается от других ассоциаций карликов большей рассеянностью и отсутствием заметного количества ассоциирующейся с ней диффузной материи.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступило 28 VIII 1958

Մ. Ս. Ստարկլյան

ԷՄԻՍԻՈՆ ԳԾԵՐՈՎ ԹՁՈՒԿՆԵՐԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ս Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ջրածնի և իոնացված կալցիումի էմիսիոն գծերով M ախյի թղակների համար որոշված են Արեղակի շարժման արագությունը, նրա ապեկսի կորդինատները և այդ աստղերի K -էֆեկտը: Արդյունքները բերված են աղյուսակ 1-ում: Այդ աղյուսակի երրորդ և հաջորդ ստղերում բերված արդյունքները համապատասխանում են այն դեպքերին, երբ լուծման մեջ հաշվի չեն սանված մեծ տեսադժային արագություններ տնեցող մի քանի աստղեր: Ինչպես երևում է աղյուսակից, էմիսիոն գծերով աստղերի շարժման ունի զգալի K -էֆեկտ:

Պեկուլյար արագությունների միջին քառակուսային շեղումները այդ աստղերի համար բերված են աղյուսակ 1-ի վերջին սյունակում: Այնուհետև կազմված են պեկուլյար արագությունների բաշխումների կորերը և բնարված են նորմալ բաշխման այն կորերը, որոնք լավագույն կերպով համընկնում են արագությունների ստացված բաշխումների հետ (գծ.գծ. 1 և 2): Գծ. 2-ից երևում է, որ իոնացված կալցիումի և ջրածնի էմիսիոն գծերով չարմիր թղակների արագությունների դիսպերսիան մոտ է 16 կմ/վրկ արժեքին, այսինքն համապատասխանում է Գալակտիկայի ոչ սֆերիկ ենթասխեմին:

Արեղակի շուրջը գտնվող ջրածնային էմիսիոն գծերով աստղերի արագությունների փոքր դիսպերսիան, ինչպես նաև նրանց շարժումների K -էֆեկտի գոյությունը այդ խումբը նմանեցնում է թղակներից կազմված աստղասփյուռների:

* Может представить интерес дисперсия скоростей звезд, заведомо являющихся вспыхвающими: из двадцати известных звезд типа UV Кита, приведенных в списке М. Пети [10], известны лучевые скорости тринадцати, а в трех случаях известны скорости их визуальных компонент. Средняя квадратичная пекулярная скорость этих шестнадцати звезд равна лишь 12 км/сек, что уже очень близко к дисперсиям, соответствующим плоским подсистемам Галактики.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Delhae J.*, *C. R.* 237, 294, 1953
2. *Эйнасто Я. А.*, Публикации Тартуской обсерватории, 33, 57, 1955.
3. *Vyssotsky A., Dyer E.*, *Ap. J.* 125, 297, 1957.
4. *Haro G.*, *Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya*, 11 17, 1954.
5. *Haro G.*, *Нестационарные звезды*, стр. 31, Ереван, 1957.
6. *Амбарцумян В. А.*, *Нестационарные звезды*, стр. 9, Ереван, 1957.
7. *Уранова Т. А.*, *Переменные звезды*, 8, 196, 1951.
8. *Wilson R.*, *General Catalogue of Stellar Radial Velocities*, 1953.
9. *Dyer E.*, *A. J.* 59, 218, 1954.
10. *Pettit M.*, *Acta Astronomica Sinica* (in press).

М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсисян

Критерии разложимости функций в ряды Дирихле

Пусть $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию

$$0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty. \quad (1)$$

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\mu_n s}, \quad (s = \sigma + it), \quad (2)$$

известный под названием ряда Дирихле, после замены переменной $e^{-s} = z$ превращается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\mu_n}. \quad (3)$$

расположенный по степеням данной последовательности $\{\mu_n\}$.

Ряд Дирихле (2) обладает многими свойствами, аналогичными свойствам степенных рядов. Основные из этих свойств изложены в известной монографии Владимира Бернштейна [1], в книжке С. Мандельброта [2] и в работах других авторов.

В частности, хорошо известно, что если ряд (2) сходится в некоторой точке $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то он сходится также во всей полуплоскости $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0$.

В связи с этим представляет интерес вопрос о том, каковы функции, представимые рядом Дирихле по данной последовательности $\{\mu_n\}$, сходящимся в некоторой полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$.

В специальном случае, когда $\mu_n = n$ ($n \geq 0$), заменой переменного $e^{-s} = z$ ряд Дирихле (2) переходит в обыкновенный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Как хорошо известно, для представимости функции $f(x)$, определенной на интервале $[0, \Delta)$, степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

сходящимся на $[0, \Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно-дифференцируемой на $[0, \Delta)$ и чтобы выполнялись неравенства

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \Delta^{-n} n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где M — постоянная, не зависящая от n .

Поэтому, возвращаясь к переменной s , можем утверждать, что если функция $F(s)$ определена на полуоси $(\sigma_0, +\infty)$, то для справедливости разложения

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}, \quad (\sigma_0 < s < +\infty) \quad (4)$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$|L^{(n)}F(s)| \leq M e^{-\sigma_0 n} n! \quad (\sigma_0 < s < +\infty) \quad (5)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots),$$

где операторы $L^{(n)}F(s)$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ последовательно определяются таким образом

$$|L^{(0)}F(s)| = F(s), \quad L^{(1)}F(s) = -e^s \frac{d}{ds} F(s)$$

и вообще

$$L^{(n)}F(s) = -e^s \frac{d}{ds} L^{(n-1)}F(s) \quad (6)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

В настоящей работе приводится определение операции обобщенного дифференцирования, ассоциированного с данной последовательностью $\{\mu_n\}$.

Это определение основано на применении понятия дробного интеграла Лиувилля и порождает формулу типа Маклорена для системы функций $\{x^{\mu_n}\}$, имеющую в новых обозначениях вид классической формулы с интегральным остаточным членом.

С другой стороны, эти операции позволяют в обозримых формах решить проблему о разложимости функций в ряд вида (3) или в ряд Дирихле по данной последовательности функций $\{e^{-\mu_n s}\}_{(n > 0)}$.

§ 1. Обобщенные производные, аналог формулы Маклорена. Достаточное условие разложимости функций в обобщенный ряд Маклорена

1°. Если функция $f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, как известно, дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с началом в точке a от функции $f(x)$ называется интеграл

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(x-a)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.1)$$

$$a \leq x \leq b,$$

Дробным интегралом порядка α с концом в точке b называют выражение

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(b-x)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.2)$$

при этом в обоих случаях, как легко видеть, интегралом нулевого порядка естественно называть самую функцию $f(x)$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то, как легко убедиться, справедлива следующая формула обобщенного интегрирования по частям [3]

$$\int_a^b f(x) \frac{d^{-\alpha} g(x)}{d(x-a)^{-\alpha}} dx = \int_a^b g(x) \frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(b-x)^{-\alpha}} dx. \quad (1.3)$$

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность неотрицательных чисел $\{\mu_n\}$, ($n \geq 0$), удовлетворяющих условиям:

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leq 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty.$$

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0, \Delta)$.

Обозначая

$$\alpha_k = 1 - (\mu_k - \mu_{k-1}), \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

введем в рассмотрение функции

$$D^{(\mu_0)} f(x) \equiv f(x)$$

$$D^{(\mu_1)} f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha_1}}{dx^{-\alpha_1}} \frac{d}{dx} D^{(\mu_0)} f(x) \quad (1.6)$$

$$D^{(\mu_k)} f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} \frac{d}{dx} D^{(\mu_{k-1})} f(x).$$

Назовем функцию $D^{(\mu_k)} f(x)$ k -ой обобщенной производной от $f(x)$, ассоциированной с последовательностью $\{\mu_n\}$, ($n \geq 0$). Очевидно, что в частном случае, когда $\mu_n = n$, ($n = 0, 1, \dots, N$), будем иметь

$$D^{(\mu_n)} f(x) = f^{(n)}(x), \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (1.7)$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[0, \Delta)$ и удовлетворяет условиям:

а) Обобщенные производные

$$D^{(\mu_k)} f(x), \quad (k = 0, 1, \dots, n+1)$$

существуют и непрерывны на $[0, \Delta)$;

б) функции

$$\frac{d}{dx} D^{(\mu_k)} f(x), \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

непрерывны на $(0, \Delta)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, \Delta)$.

Если $x \in [0, \Delta)$, то справедлива формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} x^{\mu_k} + \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{n+1}-1} D^{(\mu_{n+1})} f(t) dt. \quad (1.8)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $x > 0$ фиксировано и $0 \leq t \leq x$, то интеграл порядка $\alpha > 0$ от функции $(x-t)^{\mu-1}$, ($\mu > 0$) с концом в точке x легко вычисляется

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(x-t)^{-\alpha}} \{(x-t)^{\mu-1}\} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)} (x-t)^{\mu+\alpha-1}; \quad t \in [0, x]. \quad (1.9)$$

Имея в виду формулу интегрирования по частям (1.3), формулы (1.6) для обобщенных производных, а также (1.9) и (1.5), последовательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\mu_{k+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{k+1}-1} D^{(\mu_{k+1})} f(t) dt = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\mu_{k+1})} \int_0^x \frac{d^{-\mu_{k+1}}}{d(x-t)^{-\mu_{k+1}}} \{(x-t)^{\mu_{k+1}-1}\} \frac{d}{dt} D^{(\mu_k)} f(t) dt = \\ & = \frac{1}{\Gamma(1 + \mu_k)} \int_0^x (x-t)^{\mu_k} \frac{d}{dt} D^{(\mu_k)} f(t) dt = \\ & = - \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} x^{\mu_k} + \frac{1}{\Gamma(\mu_k)} \int_0^x (x-t)^{\mu_k-1} D^{(\mu_k)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем тождества

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_k)} \int_0^x (x-t)^{\mu_k-1} D^{(\mu_k)} f(t) dt =$$

$$= \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} x^{\mu_k} + \frac{1}{\Gamma(\mu_{k+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{k+1}-1} D^{(\mu_{k+1})} f(t) dt, \quad (1.10)$$

$$(k = n, n-1, \dots, 1),$$

сложением которых получим:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \int_0^x (x-t)^{\mu_1-1} D^{(\mu_1)} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} x^{\mu_k} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{n+1}-1} D^{(\mu_{n+1})} f(t) dt. \quad (1.11)$$

Наконец, отметив, что $\alpha_1 = 1 - \mu_1$, имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \int_0^x (x-t)^{\mu_1-1} D^{(\mu_1)} f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \int_0^x \frac{d^{-\alpha_1}}{d(x-t)^{-\alpha_1}} \left\{ (x-t)^{\mu_1-1} \right\} f'(t) dt^* =$$

$$= \int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) \equiv f(x) - D^{(\mu_1)} f(0), \quad (1.12)$$

откуда и из (1.11) следует формула (1.8).

По форме формула (1.8) напоминает классическую формулу Маклорена с интегральным остаточным членом и, как легко видеть, в частном случае, когда $\mu_k = k$, ($k = 0, 1, \dots, n+1$), мы отсюда получим указанную формулу.

Отметим, что в работе Г. В. Бадаляна [4] при помощи существенно иных операций обобщенного дифференцирования дано другое обобщение формулы Тейлора для системы функций $\{x^{\mu_n}\}$. Эта формула в специальном сингулярном случае, не рассмотренном однако в указанной работе, в силу единственности разложения эквивалента** формуле (1.8).

Но одновременно следует особо отметить, что как по смыслу вводимых нами в данной работе операций, так и по объему тех классов функций, для которых она применима, формула (1.8) существенно отличается от указанного выше сингулярного случая формулы работы [4].

2°. Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная на $[0, \Delta]$, бесконечно дифференцируема по последовательности $\{\mu_n\}$, ($n \geq 0$),

* Символ $\frac{d^{-\alpha_1}}{d(x-t)^{-\alpha_1}}$, означает, что интегрирование производится по переменной t .

** Это обстоятельство было замечено затем самим Г. В. Бадаляном.

удовлетворяющей условиям (1.4), и, ради краткости, напомним $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta])$, если

а) существуют и непрерывны на $[0, \Delta]$ обобщенные производные

$$D^{(\mu_k)} f(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

б) функции

$$\frac{d}{dx} D^{(\mu_k)} f(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

непрерывны на $(0, \Delta)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, \Delta]$.

Предположим теперь, что $f(x) \in I(\mu_n, [0, \Delta])$, тогда при любом $n \geq 1$ и $x \in [0, \Delta]$ будем иметь формулу

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} x^{\mu_k} + R_n(f; x), \quad (1.13)$$

где

$$R_n(f; x) = \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_0^x (x-t)^{\mu_{n+1}-1} D^{(\mu_{n+1})} f(t) dt. \quad (1.14)$$

Из класса функций $I(\mu_n; [0, \Delta])$ выделим теперь подкласс $I^*(\mu_n, [0, \Delta])$ тех функций $f(x)$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f; x) = 0 \quad (1.15)$$

притом равномерно на любом отрезке $[0, \delta]$, ($\delta < \Delta$).

Таким образом, если $f(x) \in I^*(\mu_n; [0, \Delta])$, то справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(\mu_k + 1)} x^{\mu_k} \quad (1.16)$$

равномерно сходящееся на любом отрезке $[0, \delta]$, ($\delta < \Delta$).

Заметив, что после замены переменной $x = e^{-\sigma}$ ряд (1.16) переходит в ряд Дирихле, сходящийся на полуоси $\sigma = \text{Res} > \sigma_0 = \log \frac{1}{\Delta}$.

легко приходим к выводу, что функции класса $I^*(\mu_n; [0, \Delta])$ аналитически продолжаются на всю риманову поверхность $-\infty < \arg z < +\infty$, ($0 \leq |z| < \Delta$) и поэтому разложение (1.16) сохранит силу на этой поверхности.

Из обобщенной формулы Маклорена (1.13)–(1.14) следует:

Теорема 1. Пусть $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta])$, если, кроме того, справедливы оценки

$$\sup_{[0, \Delta]} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leq M \Delta^{-\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \quad (1.17)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

где M — постоянная, не зависящая от x и k , то $f(x) \in I^*$ (μ_n ; $[0, \Delta]$); иначе говоря, функция $f(x)$ разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} x^{\mu_k} \quad (1.18)$$

равномерно сходящийся на любом отрезке $[0, \delta] \subset [0, \Delta]$.

Доказательство. Из (1.14) и (1.17) получим оценку

$$|R_n(f; x)| \leq M \left(\frac{x}{\Delta} \right)^{\mu_{n+1}}, \quad x \in [0, \Delta]$$

откуда и из (1.13) следует утверждение теоремы.

Таким образом, условия (1.17) достаточны для того, чтобы функция $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta])$ представлялась равномерно сходящимся на $[0, \delta] \subset [0, \Delta]$ рядом (1.18).

В следующем параграфе будет показано, что, если кроме условий (1.4), на последовательность $\{\mu_n\}$, ($n > 0$) наложить дополнительное ограничение, то условия (1.17) будут также и необходимы.

§ 2. Необходимое условие разложимости функции в обобщенный ряд Маклорена

В настоящем параграфе, сохранив условие

$$\begin{aligned} \mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leq 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty, \end{aligned} \quad (2.1)$$

наложим на последовательность $\{\mu_n\}$, ($n > 0$) дополнительное ограничение

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k} < l < +\infty \quad (2.2)$$

и докажем теорему, являющуюся обращением теоремы 1.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, ($n > 0$) удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

Если имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k} \quad (2.3)$$

сходящееся на $[0, \Delta]$, то для любого $\delta_0 < \Delta e^{-l}$ справедливы утверждения

а) $f(x) \in I(\mu_n; [0, \delta_0])$,

б) $\sup_{0 < x < \delta_0} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leq A \cdot B^{\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k)$
 $(k = 0, 1, 2, \dots)$,

где A и B — постоянные, не зависящие от k ,

в) коэффициенты разложения (2.3) определяются из формул

$$a_k = \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Иначе говоря, в условиях теоремы $f(x) \in I^*(\mu_n; [0, \delta_0])$ и ряд (2.3) является обобщенным рядом Маклорена своей суммы.

Доказательство. После замены переменной $x = e^{-s}$ ряд (2.3) переходит в ряд Дирихле, сходящийся на полуоси $(\tau_0, +\infty)$, где $\tau_0 = \log \frac{1}{\Delta}$. Поэтому ряд (2.3) равномерно сходится на любом отрезке вида $[0, \Delta_1]$, $\Delta_1 < \Delta$ и, следовательно, функция

$$f(x) \equiv D^{(\mu_0)} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}$$

непрерывна на $[0, \Delta]$.

Рассмотрим ряды

$$S_p(x) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1 + \mu_k)}{\Gamma(1 + \mu_k - \mu_p)} x^{\mu_k - \mu_p} \quad (2.4)$$

$(p = 0, 1, 2, \dots)$

и докажем, что все они абсолютно и равномерно сходятся, а также установим оценки для их сумм $S_p(x)$, $(p = 0, 1, 2, \dots)$ на отрезках вида $[0, \delta_0]$, где $\delta_0 < \Delta e^{-l}$.

Из формулы Стирлинга

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \frac{\theta_x}{e^{1/2x}}; \quad x > 0, \quad 0 < \theta_x < 1$$

и из элементарного неравенства

$$1 - x^{-1} > \exp\left\{-\frac{1}{x-1}\right\}, \quad x > 1$$

получим оценку

$$\frac{\Gamma(1 + \mu_k)}{\Gamma(1 + \mu_k - \mu_p)} < e(1 + \mu_k)^{\mu_p}, \quad k \geq p \geq 0. \quad (2.5)$$

Выберем $\Delta_0 < \Delta$ и $l_0 > l$ так, чтобы было

$$\delta_0 < \Delta_0 e^{-l_0}. \quad (2.6)$$

Так как ряд (2.3) сходится при $x = \Delta_0$, то

$$|a_k \Delta_0^{\mu_k}| \leq M_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.7)$$

где M_0 не зависит от k .

Из (2.5), (2.6) и (2.7) получим:

$$\sup_{0 < x < \delta_0} |S_p(x)| \leq e^{1+l} M_0 \delta_0^{-\mu p} \sum_{k=p}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu p}, \quad p \geq 0. \quad (2.8)$$

Пусть число l_1 выбрано так, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k} < l_1 < l, \quad (2.2)$$

тогда

$$\mu_k \geq \frac{1}{l_1} \log k \quad \text{при} \quad k \geq N_0. \quad (2.9)$$

Далее, заметим, что функция $x^{\mu p} e^{-l_0 x}$, $x > 0$ монотонно убывает при $x \geq \frac{\mu p}{l_0}$, поэтому из (2.9) будем иметь оценку

$$e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu p} \leq l_1^{-\mu p} \frac{(\log k)^{\mu p}}{k^s} \quad \text{при} \quad k \geq N_p, \quad (2.10)$$

где $s = \frac{l_0}{l_1} > \frac{l}{l_1} > 1$.

Из (2.8) и (2.10) вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов (2.4) на отрезке $[0, \delta_0]$.

Обозначим через $\rho_n(x)$ число членов последовательности $\{\mu_n\}$, ($n \geq 1$), лежащих на отрезке $[0, x]$, тогда сумму ряда, стоящего в правой части неравенства (2.8), можно оценить, написав ее в виде интеграла Стильтьеса.

Действительно, из условия (2.2) следует, что

$$\rho_n(x) < N_1 + e^{lx}, \quad x \geq 0 \quad (2.11)$$

где N_1 постоянная, не зависящая от x , поэтому последовательно получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu p} &< \int_0^{\infty} e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu p} d\rho_n(x) = \\ &= \int_0^{\infty} \rho_n(x) \left\{ e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu p} \right\}' dx + C_0 < \\ &< \mu_p \int_0^{\infty} \rho_n(x) e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu p-1} dx + \\ &+ l_0 \int_0^x \rho_n(x) e^{-l_0(1+x)} (1+x)^{\mu p} dx + C_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

($p \geq 0$)

где C_0 от p не зависит.

Наконец, имея в виду (2.11), отсюда легко приходим к оценке

$$\sum_{k=p}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu_p} < A_1 B_1^{\mu_p} \Gamma(1+\mu_p), \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

где A_1 и B_1 подходящим образом выбранные постоянные, не зависящие от p .

Таким образом

$$\sup_{0 < x < l_0} |S_p(x)| < AB^{\mu_p} \Gamma(1+\mu_p) \quad p=0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

где A и B — другие постоянные, не зависящие от p .

Теперь рассмотрим ряды вида

$$S_p^*(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(\mu_k - \mu_p)} x^{\mu_k - \mu_p} \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

Из (2.5) следует оценка

$$\frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(\mu_k - \mu_p)} < e(1+\mu_k)^{\mu_p+1} \quad k > p+1 \geq 1$$

откуда вполне аналогично, как и выше, получим

$$\sup_{0 < x < l_0} |S_p^*(x)| \leq e^{1+l} M_0 l_0^{-\mu_p} \sum_{k=p+1}^{\infty} e^{-l_0(1+\mu_k)} (1+\mu_k)^{\mu_p+1}, \quad p \geq 0$$

а в силу (2.10) убедимся отсюда, что ряды (2.15) абсолютно и равномерно сходятся на $[0, l_0]$.

Поэтому функции

$$\frac{dS_p(x)}{dx} = x^{-1} S_p^*(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(1+\mu_k) x^{\mu_k - \mu_p - 1}}{\Gamma(\mu_k - \mu_p)} \quad (2.16)$$

непрерывны на $(0, l_0]$; кроме того, так как при $k \geq k_0$ $\mu_k - \mu_p \geq 1$,

то ряд (2.16) допускает почленное применение операции $\frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}}$, где

$$\alpha_{p+1} = 1 - \mu_{p+1} + \mu_p.$$

Таким образом получим:

$$\frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}} \frac{d}{dx} S_p(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1+\mu_k)}{\Gamma(\mu_k - \mu_p)} \frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}} \left\{ x^{\mu_k - \mu_p - 1} \right\},$$

но, как легко видеть,

$$\frac{d^{-\alpha_{p+1}}}{dx^{-\alpha_{p+1}}} \left\{ x^{\mu_k - \mu_p - 1} \right\} = \frac{\Gamma(\mu_k - \mu_p)}{\Gamma(\mu_k - \mu_p + \alpha_{p+1})} x^{\mu_k - \mu_p - 1 + \alpha_{p+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu_k - \mu_p)}{\Gamma(1 + \mu_k - \mu_{p+1})} x^{\mu_k - \mu_{p+1}}$$

поэтому

$$\frac{d^{-a_{p+1}}}{dx^{-a_{p+1}}} \frac{d}{dx} S_p(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(1 + \mu_k)}{\Gamma(1 + \mu_k - \mu_{p+1})} x^{\mu_k - \mu_{p+1}} \equiv S_{p+1}(x). \quad (2.17)$$

Но, очевидно,

$$S_0(x) \equiv D^{(\mu_0)} f(x) \equiv f(x)$$

поэтому последовательным применением формулы (2.17) получим

$$S_p(x) \equiv D^{(\mu_p)} f(x) \quad (2.18)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dx} D^{(\mu_p)} f(x) = x^{-1} S_p^*(x). \quad (2.18')$$

Из формул (2.18) и (2.18') и из свойств функций $S_p(x)$ и $S_p^*(x)$ и, в частности, из оценок (2.14) следуют утверждения а) и б) теоремы.

Наконец, из (2.4) и (2.18) получим

$$a_p = \frac{D^{(\mu_p)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_p)}, \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.19)$$

и, таким образом, теорема полностью доказана.

Ради компактности объединим теоремы 1 и 2.

Теорема 3. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условиям (1.4), тогда

а) если $f(x) \in I(\mu_n; [0, \Delta])$ и кроме того

$$\sup_{[0, \Delta]} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leq M \Delta^{-\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

то $f(x) \in I^*(\mu_n; [0, \Delta])$, т. е. имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(\mu_k + 1)} x^{\mu_k}$$

равномерно сходящееся на любом отрезке $[0, \delta] \subset [0, \Delta]$;

б) если последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет дополнительному условию (2.2) и имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}$$

сходящееся на $[0, \Delta)$, то для любого $\delta_0 < \Delta e^{-1}$

$$\sup_{[0, \delta_0]} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leq AB^{\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

где A и B не зависят от k .

Коэффициенты $\{a_k\}$ разложения определяются из формул

$$a_k = \frac{D^{(\mu_k)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

§ 3. Обобщение предыдущих результатов

1°. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mu_n = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k < N, \quad (N > 1), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обозначив

$$\nu_k = \frac{\mu_k}{N} \quad (3.2)$$

получим последовательность $\{\nu_n\}$, $(n \geq 0)$, удовлетворяющую условиям (1.4). Кроме того, условия

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k} < l, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\nu_k} < Nl \quad (3.3)$$

следуют один из другого.

Заметим далее, что если определенная на $[0, \Delta)$ функция $f(x)$ разлагается в ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}, \quad x \in [0, \Delta)$$

то функция $F(x) = f\left(x^{\frac{1}{N}}\right)$ разложится в ряд вида

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\nu_k}, \quad x \in [0, \Delta^N)$$

и наоборот. Из теоремы 3 получим:

Теорема 4. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условиям (3.1), тогда

а) если

$$f\left(x^{\frac{1}{N}}\right) \in I\left(\frac{\mu_n}{N}; [0, \Delta^N)\right)$$

и

$$\sup_{[0, \Delta^N]} \left| D^{(\nu_k)} f \left(x^{\frac{1}{N}} \right) \right| \leq M \Delta^{-\mu_k} \Gamma \left(\frac{\mu_k}{N} + 1 \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

то имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[D^{(\nu_k)} f \left(u^{\frac{1}{N}} \right) \right]_{u=0}}{\Gamma \left(1 + \frac{\mu_k}{N} \right)} x^{\mu_k}$$

равномерно сходящееся при $x \in [0, \delta] \subset [0, \Delta]$.б) Если последовательность $\{\mu_k\}$ удовлетворяет условию (3.3) и справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}, \quad x \in [0, \Delta]$$

то для любого $\delta_0 < \Delta^N e^{-Nl}$ будем иметь

$$1) \quad f \left(x^{\frac{1}{N}} \right) \in J(\nu_n; [0, \Delta^N])$$

$$2) \quad \sup_{[0, \delta_0]} \left| D^{(\nu_k)} f \left(x^{\frac{1}{N}} \right) \right| < A \cdot B^{\mu_k} \Gamma \left(1 + \frac{\mu_k}{N} \right) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$3) \quad a_n = \frac{\left[D^{(\nu_k)} f \left(u^{\frac{1}{N}} \right) \right]_{u=0}}{\Gamma \left(1 + \frac{\mu_k}{N} \right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

2°. Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{\mu_n\}$ ($n \geq 0$) удовлетворяет условию

$$\mu_0 \geq 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty \quad (3.4)$$

в частности, условие (3.1) может не выполняться.

Дополним эту последовательность каким-либо способом до последовательности $\{\mu_n^*\}$, ($n \geq 0$) так, чтобы выполнялись условия (1.4), т. е.

$$\mu_0^* = 0, \quad 0 < \mu_{k+1}^* - \mu_k^* < 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^* = +\infty \quad (3.5)$$

Этого можно достигнуть, например, добавлением только целых чисел.

Покажем, что если

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k} \leq l < +\infty, \quad (3.6)$$

то всегда существует такая пополненная последовательность $\{\mu_n^*\}$, ($n \geq 0$), что вместе с (3.5) выполняется также условие

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k^*} \leq l^* < +\infty. \quad (3.7)$$

Пусть $\{\nu_n\}$, ($n \geq 0$) произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\nu_0 = 0, \quad 0 < \nu_{k+1} - \nu_k < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = +\infty$$

и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\nu_k} \leq l_1 < +\infty. \quad (3.8)$$

Пополним теперь $\{\mu_n\}$, ($n \geq 0$) всеми теми числами из $\{\nu_n\}$, ($n \geq 0$), которые отличны от чисел μ_n , ($n = 0, 1, 2, \dots$). Нумеруя полученную таким образом последовательность чисел в порядке возрастания, получим некоторую последовательность $\{\mu_n^*\}$, ($n \geq 0$), удовлетворяющую условию (3.5).

Убедимся, что $\{\mu_n^*\}$, ($n \geq 0$) удовлетворяет также условию (3.7), где $l^* = \max(l, l_1)$. Действительно, пусть $\rho_\mu(x)$, $\rho_\nu(x)$ и $\rho_{\mu^*}(x)$ суть соответственно числовые функции последовательностей $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ и $\{\mu_n^*\}$. Очевидно,

$$\rho_{\mu^*}(x) \leq \rho_\mu(x) + \rho_\nu(x), \quad x \geq 0$$

поэтому из (3.6) и (3.8) для $x \geq 0$

$$\rho_{\mu^*}(x) \leq A e^{l^* x} \quad l^* = \max(l, l_1) \quad (3.9)$$

где A — не зависит от x . Наконец, из (3.9) получим:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k^*} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \rho_{\mu^*}(x)}{x} \leq l^*.$$

Теорема 5. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, ($n \geq 0$) удовлетворяет условию (3.4).

а) Пусть функция $f(x)$ определена на $[0, \Delta]$ и существует такое пополнение последовательности $\{\mu_n\}$ до последовательности $\{\mu_n^*\}$, удовлетворяющей условиям (3.5), что

$$1) \quad f(x) \in I(\mu_n^*; [0, \Delta])$$

$$2) \quad \sup_{[0, \Delta]} |D^{(\mu_k)} f(x)| \leq M \Delta^{-\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$3) \quad D^{(\mu_k^*)} f(0) = 0, \quad \text{если } \mu_k^* \in \overline{\{\mu_k\}}$$

тогда справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu_k^*)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k^*)} x^{\mu_k^*}$$

равномерно сходящееся на каждом отрезке $[0, \delta] \subset [0, \Delta]$.

б) Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условиям (3.4), (3.6) и имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\mu_k}$$

сходящееся на $[0, \Delta]$.

При любом пополнении последовательности $\{\mu_n\}$ до последовательности $\{\mu_n^*\}$, удовлетворяющей условиям (3.5), (3.7), и для любого $\delta_0 < \Delta e^{-1}$ справедливы утверждения

- 1) $f(x) \in I(\mu_n^*; [0, \delta_0])$;
- 2) $\sup_{[0, \delta_0]} |D^{(\mu_k^*)} f(x)| < AB^{\mu_k^*} \Gamma(1 + \mu_k^*) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$;

где A, B от k не зависят;

$$3) \quad a_k = \frac{D^{(\mu_k^*)} f(0)}{\Gamma(1 + \mu_k^*)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

где $D^{(\mu_k^*)} f(x) = D^{(\mu_n^*)} f(x)$, если $\mu_k = \mu_n^*$.

Доказательство. а) Так как по условию $D^{(\mu_k^*)} f(0) = 0$, если $\mu_k^* \in \overline{\{\mu_n\}}$, то в обобщенной формуле Тейлора (1.8) соответствующие члены, содержащие степени $x^{\mu_k^*}$, $\mu_k^* \in \overline{\{\mu_n\}}$, исчезают. Поэтому остаточный член в этой формуле всегда можно написать так, чтобы под интегралом фигурировала $D^{(\mu_n^*)} f(x)$.

Из сказанного и из 2) следует наше утверждение.

б) Если $\{\mu_n^*\}$ — любое пополнение последовательности $\{\mu_n\}$, удовлетворяющее условиям (3.5), (3.7), то можем написать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* x^{\mu_k^*} \quad x \in [0, \Delta]$$

где $a_k^* = a_p$, если $\mu_k^* = \mu_p$ и $a_k^* = 0$, если $\mu_k^* \in \overline{\{\mu_n\}}$.

Но тогда по теореме 2 все три утверждения будут справедливы.

§ 4. Перенесение полученных результатов на ряды Дирихле

Для функции $F(z)$, определенной и непрерывной на полуоси $(z_0, +\infty)$, и для любого $\alpha > 0$ определим оператор

$$\frac{d_e^{-\alpha} F(z)}{d_e \sigma^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (e^{-z} - e^{-u})^{\alpha-1} e^{-u} F(u) du \quad (4.1)$$

называя его e дробным интегралом от функции $F(z)$ порядка $\alpha > 0$ с концом в точке $+\infty$.

Легко видеть, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{d_e^{-\alpha} F(z)}{d_e \sigma^{-\alpha}} = F(z)$$

поэтому естественно интегралом нулевого порядка считать саму функцию $F(z)$.

Пусть последовательность чисел $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условию (1.4); обозначая $\alpha_k = 1 - (\mu_k - \mu_{k-1})$, $(k \geq 1)$, введем в рассмотрение функции

$$L^{(\mu_0)} F(z) \equiv F(z)$$

$$L^{(\mu_1)} F(z) \equiv - \frac{d_e^{-\alpha_1}}{d_e \sigma^{-\alpha_1}} \left\{ e^z \frac{d}{dz} L^{(\mu_0)} F(z) \right\} \quad (4.2)$$

$$L^{(\mu_k)} F(z) \equiv - \frac{d_e^{-\alpha_k}}{d_e \sigma^{-\alpha_k}} \left\{ e^z \frac{d}{dz} L^{(\mu_{k-1})} F(z) \right\} \\ (k = 1, 2, \dots)$$

предполагая, что они существуют и непрерывны на полуоси $(z_0, +\infty)$.

Заметим теперь, что после замены переменной $x = e^{-z}$ переводящей полуось $(z_0, +\infty)$ в отрезок $[0, \Delta)$, $\Delta = e^{-z_0}$, если обозначим $f(x) = F\left(\log \frac{1}{x}\right)$, то получим:

$$\frac{d_e^{-\alpha}}{d_e \sigma^{-\alpha}} F(z) \equiv \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x), \quad x = e^{-z} \quad (4.3)$$

и поэтому

$$L^{(\mu_k)} F(z) \equiv D^{(\mu_k)} f(x), \quad x = e^{-z} \quad (4.4) \\ (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Условимся говорить, что функция $L^{(\mu_k)} F(z)$ непрерывна на $(z_0, +\infty)$, если

1) она непрерывна на интервале $(z_0, +\infty)$;

2) существует и конечен предел

$$L^{(\mu_k)} F(+\infty) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L^{(\mu_k)} F(\sigma).$$

Имея в виду формулы (4.3), (4.4), простой перефразировкой леммы 1 получим:

Лемма 1 bis. Пусть функция $F(\sigma)$ определена и непрерывна на $(\sigma_0, +\infty]$ и удовлетворяет условиям:

а) Функции

$$L^{(\mu_k)} F(\sigma) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n+1)$$

существуют и непрерывны на $(\sigma_0, +\infty]$,

б) Функции

$$e^\sigma \frac{d}{d\sigma} L^{(\mu_k)} F(\sigma), \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(\sigma_0, +\infty)$.

Если $\sigma \in (\sigma_0, +\infty)$, то справедлива формула

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^n \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)} e^{-\mu_k \sigma} + \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_{\sigma}^{+\infty} (e^{-\tau} - e^{-u})^{\mu_{n+1}-1} e^{-u} L^{(\mu_{n+1})} F(u) du. \quad (4.5)$$

Будем говорить, что $F(\sigma) \in L(\mu_n; \sigma_0)$, если существуют и непрерывны на $(\sigma_0, +\infty]$ все функции

$$L^{(\mu_k)} F(\sigma), \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

а функции

$$e^\sigma \frac{d}{d\sigma} L^{(\mu_k)} F(\sigma), \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(\sigma_0, +\infty)$.

Если $F(\sigma) \in L(\mu_n; \sigma_0)$, тогда при любом $n \geq 1$ и $\sigma \in (\sigma_0, +\infty)$ по формуле (4.5) будем иметь

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^n \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)} e^{-\mu_k \sigma} + R_n(F; \sigma) \quad (4.6)$$

где

$$R_n(F; \sigma) = \frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})} \int_{\sigma}^{+\infty} (e^{-\tau} - e^{-u})^{\mu_{n+1}-1} e^{-u} L^{(\mu_{n+1})} F(u) du. \quad (4.7)$$

Из класса $L(\mu_n; \tau_0)$ выделим подкласс $L^*(\mu_n; \tau_0)$ тех функций $F(z)$, для которых

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} R_n(F; \sigma) = 0$$

притом равномерно на любом отрезке вида $[\sigma_1, +\infty) \subset (\tau_0, +\infty)$. Следовательно, если $F(z) \in L^*(\mu_n; \tau_0)$, то справедливо разложение

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + \mu_k)} e^{-\mu_k z} \quad (4.8)$$

равномерно сходящееся на любой полуоси $[\sigma_1, +\infty) \subset (\tau_0, +\infty)$.

Очевидно, что если $F(z) \in L^*(\mu_n; \tau_0)$, то она аналитически продолжается на всю полуплоскость $z = \text{Re} z > \sigma_0$, ($\sigma = \sigma_0 + it$) и разложение (4.8) сохранит силу и той же полуплоскости.

Из теоремы 3 простой заменой следует

Теорема 6. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, ($n \geq 0$) удовлетворяет условиям

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty \quad (4.9)$$

а) если $F(z) \in L(\mu_n; \tau_0)$, и кроме того

$$\sup_{\sigma \rightarrow +\infty} L^{(\mu_k)} F(z) = M e^{-\tau_0 z} \Gamma(1 + \mu_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

то $F(z) \in L^*(\mu_n; \tau_0)$, т. е. имеет место разложение

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + \mu_k)} e^{-\mu_k z}, \quad z \in (\sigma_1, +\infty)$$

б) если кроме (4.9) последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет также условию

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\mu_k)}{\mu_k} < +\infty \quad (4.10)$$

и имеет место разложение

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\mu_k z}$$

сходящееся на $(\tau_0, +\infty)$, то для $\tau_1 = \tau_0 + 1$ $F(z) \in L(\mu_n; \tau_1)$, кроме того

$$\sup_{\sigma \rightarrow +\infty} L^{(\mu_k)} F(z) = A B^{\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и

$$a_k = \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + \mu_k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Оставляя теорему 4, приводим перефразировку теоремы 5 на ряды Дирихле.

Теорема 7. Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условию

$$\mu_0 > 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty.$$

а) Пусть $F(z)$ определена на $(\sigma_0, +\infty)$ и существует такое пополнение $\{\mu_n^*\}$ до последовательности $\{\mu_n^*\}$, удовлетворяющей условиям (4.9), что

- 1) $F(z) \in L(\mu_n^*; \sigma_0)$
- 2) $\sup_{(\sigma_0, \sigma+1]} |L^{(\mu_k^*)} F(z)| < M e^{-\sigma_0 \mu_k^*} \Gamma(1 + \mu_k^*) \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- 3) $L^{(\mu_k^*)} F(+\infty) = 0$, если $\mu_k^* \notin \{\mu_n\}$

тогда справедливо разложение

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(\mu_k^*)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + \mu_k^*)} e^{-\mu_k^* z} \quad (4.12)$$

равномерно сходящееся на каждом $[\tau_1, +\infty] \subset (\sigma_0, +\infty)$.

При этом функция $F(z)$ аналитически продолжима на полуплоскость $z = \text{Res} > \sigma_0$, $(z = \sigma + it)$, и разложение (4.12) сохранит силу во всей полуплоскости $\text{Res} > \sigma_0$.

б) Пусть последовательность $\{\mu_n\}$, $(n \geq 0)$ удовлетворяет условиям (4.11) и (4.10) и имеет место разложение:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\mu_k z}$$

сходящееся на $[\tau_0, +\infty]$.

При любом пополнении последовательности $\{\mu_n\}$ до последовательности $\{\mu_n^*\}$, удовлетворяющей условиям

$$\mu_0^* = 0, \quad 0 < \mu_{k+1}^* - \mu_k^* \leq 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^* = +\infty$$

и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\mu_k^*} < \sigma^* < +\infty$$

для $\sigma^* = \sigma_0 + 1$ справедливы утверждения

$$1) \quad F(\sigma) \in L(\mu_n^*; \sigma^*)$$

$$2) \quad \sup_{(\sigma^*, +\infty)} |L^{(\mu_k)} F(\sigma)| \leq AB^{\mu_k} \Gamma(1 + \mu_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$3) \quad a_k = \frac{L^{(\mu_k)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + \mu_k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

զծե $L^{(\mu_k)} F(\sigma) = L^{(\mu_{n_k}^*)} F(\sigma)$, եթե $\mu_k = \mu_{n_k}^*$.

Институт математики и механики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступило 29 III 1978

Մ. Մ. ԶԺՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Բ. ՆԵՐՍԻԱՅԱՆ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԴԻՌԻԻԼԵԻ ՇՐՔԵՐԻ ՎԵՐԱՇԵԼՈՒ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում բերվում են բազմաբար և անհրաժեշտ պայմաններ, որոնց դեպքում $(\sigma_0 + \infty)$ կիսաառանցքի վրա սահմանված ֆունկցիան կարող է վերածվել Դիրիսլեի շարքի բազմ $\{e^{-\mu_n \sigma}\}$ ֆունկցիաների:

Դիցուք $F(\sigma)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(\sigma_0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա և $\alpha > 0$:

Սահմաններ հեռակալ օպերատորը՝

$$\frac{d_{\varepsilon}^{-\alpha} F(\sigma)}{d_{\varepsilon} \sigma^{-\alpha}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma}^{+\infty} (e^{-\sigma} - e^{-u})^{\alpha-1} e^{-u} F(u) du.$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{d_{\varepsilon}^{-\alpha} F(\sigma)}{d_{\varepsilon} \sigma^{-\alpha}} = F(\sigma).$$

Ենթադրենք, որ $\{\mu_n\}$ ($n \geq 0$) հաջորդականությունը բազմաբար է հեռակալ պայմաններին՝

$$\mu = 0, \quad 0 < \mu_{k+1} - \mu_k \leq 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty.$$

Նշանակելով $\alpha = 1 - (\mu_k - \mu_{k-1})$, ($k \geq 0$), դիտարկենք հեռակալ ֆունկցիաները՝

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Բարձրագույն և ցածրագույն կետերի համարում

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1])$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Գծապատկեր

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1])$$

մաս

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1])$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

(1) և (2)

Բարձրագույն և ցածրագույն կետերի համարում

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1])$$

Գծապատկեր

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Բարձրագույն և ցածրագույն կետերի համարում

Գծապատկեր

Գծապատկեր

Գծապատկեր

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1])$$

ա) եթե $F(z)$ սահմանված է $(z_0, +\infty)$ վրա և գոյություն ունի այնպիսի (1) պայմաններին բավարարող լրացված $\{p_n^*\}$ հաջորդականություն, որ

$$1) \quad F(z) \in L(p_n^*; z_0)$$

$$2) \quad \sup_{(z_0, +\infty)} |L^{(p_k^*)} F(z)| \leq M e^{-z_0 p_k^*} \Gamma(1 + p_k^*)$$

$$3) \quad L^{(p_k^*)} F(+\infty) = 0 \quad \text{երբ} \quad p_k^* \in \{p_n^*\}$$

ապա տեղի ունի

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(p_k^*)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + p_k^*)} e^{-p_k^* \sigma}$$

վերածումը, ըստ որում հավասարաչափ ամեն մի $[z_1, +\infty] \subset (z_0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա

բ) եթե $\{p_n^*\}$ հաջորդականությունը բավարարում է (3) և (4) պայմաններին և

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-p_k^* z}, \quad z \in (z_0, +\infty],$$

ապա, եթե $\{p_n^*\} \supset \{p_n\}$ այնպիսին է, որ բավարարվում են (1) և (3) պայմանները կոնկրետ

$$1) \quad F(\sigma) \in L(p_n^*; z^*), \quad z^* = z_0 + l$$

$$2) \quad \sup_{(z^*, +\infty)} |L^{(p_k^*)} F(z)| < AB^{p_k^*} \Gamma(1 + p_k^*)$$

$$3) \quad a_k = \frac{L^{(p_k^*)} F(+\infty)}{\Gamma(1 + p_k^*)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

որտեղ

$$L^{(p_k^*)} F(z) = L^{(p_k^*)} F(\sigma),$$

երբ

$$p_k = \frac{p_k^*}{n_k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Vladimir Bernstein, Leçons sur les Progrès Récents de la théorie des Series Dirichlet; Paris, (1933).
2. Mandelbrojt S. Dirichlet Series; The Rice Institute Pamphlet, vol. XXXI, № 4 (1944).
3. Erdelyi A. On some biorthogonal sets of functions, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, vol. XI, pp. 111—123 (1940).
4. Бабалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций. Изв. АН Армянской ССР, т. VI, № 5 (1953).

М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсисян

Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квази-аналитические классы функций

В нашей предыдущей статье [1] задача о разложимости функций в ряд Дирихле с данной последовательностью экспонентов $\{\alpha_n\}$ была решена введением особых интегро-дифференциальных операций, являющихся естественными обобщениями операций последовательного дифференцирования. Эти операции определялись с помощью интегралов дробного порядка.

В настоящей статье, при помощи операций дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля или Г. Вейля, определяются классы функций, бесконечно дифференцируемых в обобщенном смысле на полуоси $[0, +\infty)$, или на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Для введенных таким образом классов указываются условия квази-аналитичности, т. е. даются условия, определяющие функции этих классов единственным образом.

§ 1. Квази-аналитические классы на полуоси $[0, +\infty)$.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$. Интегралом Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с началом в нулевой точке называют функцию

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = f(x) \quad (1.2)$$

поэтому интегралом нулевого порядка от $f(x)$ естественно называть саму эту функцию.

Для заданной последовательности чисел $\{\alpha_k\}$, ($k \geq 0$), где $0 < \alpha_k < 1$, введем в рассмотрение операции

$$D^{(n)} f(x) = \frac{d^{-\alpha_n}}{dx^{-\alpha_n}} f(x)$$

$$D^{(1)}f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha_1}}{dx^{-\alpha_1}} \frac{d}{dx} D^{(0)}f(x) \quad (1.3)$$

$$D^{(k)}f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} \frac{d}{dx} D^{(k-1)}f(x),$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Назовем функцию $D^{(k)}f(x)$ (если она существует) k -ой обобщенной производной* от $f(x)$ по данной последовательности $\{\alpha_k\}$, очевидно, что в частном случае, когда $\alpha_k = 0$, ($k = 0, 1, \dots, N$), будем иметь:

$$D^{(k)}f(x) \equiv f^{(k)}(x), \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Скажем, что $f(x) \in C\{\alpha_k\}$, если функции

$$D^{(k)}f(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

непрерывны на полуоси $[0, +\infty)$, а функции

$$\frac{d}{dx} D^{(k)}f(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

непрерывны на $(0, +\infty]$ и абсолютно интегрируемы на $[0, \delta]$, ($\delta > 0$).

Пусть $\{m_n\}$, ($n \geq 0$) некоторая последовательность положительных чисел. Отнесем к классу $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ все те функции $f(x)$ из класса $C\{\alpha_k\}$, для которых выполняются условия

$$a) \quad |D^{(n)}f(x)| \leq A \cdot B^{1 - \sum_{k=0}^n (1 - \alpha_k)} m_n e^{cx}, \quad (1.4)$$

$$0 \leq x < +\infty, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где A , B и C постоянные, зависящие от данной функции $f(x)$.

$$b) \quad e^{-cx} \left| \frac{d}{dx} D^{(n)}f(x) \right| \in L_1(0, +\infty), \quad (1.5)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Скажем, что множество функций $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ составляет квази-аналитический класс в обобщенном смысле, если для любых двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из класса $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ равенства

$$D^{(n)}f_1(0) = D^{(n)}f_2(0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

повлекут за собой тождество

$$f_1(x) \equiv f_2(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (1'.6)$$

* В статье [1] это понятие определяется несколько иначе, но не трудно видеть, какова связь этих определений.

Для выяснения вопроса о том, при каких условиях, наложенных на последовательность чисел $\{m_n\}$, класс $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ квази-аналитический, введем функцию

$$T(r) = \sup_{n > 1} \frac{r^{\sum_1^n (1-\alpha_k)}}{m_n} \quad (1.7)$$

аналогичную функции А. Островского.

Отметим, что в частном случае, когда $\alpha_k = 0$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), будем иметь $D^{(n)}f(x) = f^{(n)}(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$); а функция $T_\alpha(r)$ совпадает с функцией А. Островского.

Докажем теорему, являющуюся аналогом теоремы Карлемана—Островского [2] для класса $C_{m_n}\{\alpha_k\}$.

Теорема 1. Если для данной последовательности $\{\alpha_k\}$, $0 \leq \alpha_k < 1$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) последовательность $\{m_n\}$ такова, что

$$\int_1^\infty \frac{\log T_\alpha(r)}{r^2} dr = +\infty \quad (1.8)$$

то класс $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ — квази-аналитический.

Доказательство. Достаточно показать, что если некоторая функция $f_0(x)$ из класса $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ удовлетворяет условиям

$$D^{(n)}f_0(0) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

то $f_0(x) = 0$, $0 \leq x < +\infty$.

По условию имеем:

$$|D^{(n)}f_0(x)| \leq A_0 B_0^{-1} \frac{\sum_1^n (1-\alpha_k)}{e^{c_0 x}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где $A_0 = A_0(f)$, $B_0 = B_0(f)$, $c_0 = c_0(f)$ зависят только от функции $f_0(x)$.

Поэтому интеграл

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-uz} D^{(n)}f_0(u) du \quad (1.10)$$

абсолютно сходится и представляет аналитическую функцию в полуплоскости $Re z > c_0$.

Далее, так как имеем также

$$e^{-c_0 x} \left| \frac{d}{dx} D^{(n)}f_0(x) \right| \in L_1(0, +\infty) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

то из (1.10) интегрированием по частям с учетом (1.9) получим:

$$F(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-uz} \frac{d}{du} D^{(0)} f_0(u) du, \quad (1.11)$$

где, очевидно, интеграл абсолютно сходится в той же полуплоскости $\text{Re} z > c_0$.

Заметим теперь, что справедлива формула

$$e^{-uz} = \frac{z^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^{\infty} e^{-vz} (v-u)^{\alpha_1-1} dv, \quad \text{Re} z > 0, u > 0$$

откуда и из (1.11) получим:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z^{1-\alpha_1}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^{\infty} e^{-vz} (v-u)^{\alpha_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} D^{(0)} f_0(u) du = \\ &= \frac{1}{z^{1-\alpha_1}} \int_0^{\infty} e^{-vz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^v (v-u)^{\alpha_1-1} \frac{d}{du} D^{(0)} f_0(u) du \right\} dv = \\ &= \frac{1}{z^{1-\alpha_1}} \int_0^{\infty} e^{-vz} D^{(\alpha_1)} f_0(v) dv, \quad \text{Re} z > c_0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

при этом легко видеть, что перемена порядка интегрирования при получении окончательной формулы (1.12) законна в силу абсолютной сходимости всех интегралов при $\text{Re} z > c_0$.

Повторяя буквально те же рассуждения для интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-vz} D^{(k)} f_0(v) dv,$$

получим окончательно

$$F(z) = \frac{1}{z^{\sum_1^n (1-\alpha_k)}} \int_0^{\infty} e^{-vz} D^{(n)} f_0(v) dv, \quad \text{Re} z > c_0, (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

Но из формул (1.13) вытекает оценка

$$|F(z)| \leq A \frac{B^{\sum_1^n (1-\alpha_k)}}{|z|^{\sum_1^n (1-\alpha_k)}} m_n, \quad \text{Re} z \geq c_0 + 1, (n=1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

или, в силу (1.7), оценка

$$|F(z)| < AT_n^{-1} \left(\frac{|z|}{B} \right), \quad \operatorname{Re} z > c_0 + 1. \quad (1.15)$$

Но из условия (1.8) теоремы и из (1.15) следует, что для ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c_0 + 1$ функции $F(z)$ расходуется интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |F(c_0 + 1 + iy)|}{1 + y^2} dy = -\infty,$$

поэтому, по известной теореме единственности [2], $F(z) \equiv 0$. Отсюда, в частности, вытекает тождество

$$F(1 + c_0 + iy) = \int_0^{\infty} e^{-iyv} \{ e^{-(c_0+1)v} D^{(0)} f_0(v) \} dv = 0, \quad -\infty < y < +\infty$$

обратив которое, получим:

$$D^{(0)} f_0(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^u (u-v)^{\alpha_0-1} f_0(v) dv = 0, \quad 0 \leq u < +\infty. \quad (1.16)$$

Остается только отметить, что, по известной формуле обращения интеграла Абеля, из (1.16) получим

$$f_0(u) = \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)} \int_0^u (u-v)^{-\alpha_0} D^{(0)} f_0(v) dv \right\} = 0$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Но условие (1.8) не только достаточно, но и необходимо для квази-аналитичности класса $C_{m_n} \{ \alpha_k \}$. Докажем следующую теорему, являющуюся обращением теоремы 1.

Теорема 2. Если последовательности $\{ \alpha_k \}$, $(k \geq 0)$; $\alpha_0 = 0$, $0 \leq \alpha_k < 1$, $(k \geq 1)$ и $\{ m_n \}$, $(n \geq 1)$ таковы, что

$$\mu_n = \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad (1.17)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T_{\alpha}(r)}{r^2} dr < +\infty, \quad T_{\alpha}(r) = \operatorname{Sup} \frac{r^{\mu_n}}{m_n} \quad (1.18)$$

то существует функция $f_*(x) \neq 0$, принадлежащая к классу $C_{m_n} \{ \alpha_k \}$ и удовлетворяющая условиям

$$D^{(k)} f_*(0) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.19)$$

Доказательство. Рассмотрим интервалы вида $[k, k+1)$, ($k \geq 0$). Так как $0 < \mu_{n+1} - \mu_n = 1 - \alpha_{n+1} < 1$, то из (1.17) следует, что в каждом таком интервале может лежать лишь конечное число чисел из последовательности $\{\mu_n\}$.

Обозначая

$$m_k^* = \min_{\mu_p \in [k, k+1)} \{m_p\}$$

и

$$T_n^*(r) = \sup_{k \geq 0} \frac{r^{k+1}}{m_k^*} \quad (1.20)$$

для $r > 1$ будем иметь:

$$T_n(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\mu_n}}{m_n} > \sup_{n \geq 1} \frac{r^{[\mu_n]}}{m_n} = \sup_{k \geq 0} \frac{r^k}{m_k^*} = \frac{1}{r} T_n^*(r). \quad (1.21)$$

Из оценки (1.21) и из условия (1.18) теоремы вытекает, что

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T_n^*(r)}{r^2} dr < +\infty. \quad (1.22)$$

Но, как хорошо известно, [2], по теореме Карлемана-Островского из (1.22) следует существование функции $f_*(x) \neq 0$, бесконечно дифференцируемой на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющей условиям:

$$f_*^{(n)}(0) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.23')$$

$$\sup_{(0, +\infty)} |f_*^{(n)}(x)| \leq m_{n-1}^*, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.23'')$$

Покажем теперь, что функция $f_*(x)$ — требуемая, т. е. что $f_*(x) \in C_{m_n}(\alpha_n)$ и для нее выполняются условия (1.19).

Напишем для функции $f_*(x)$ формулу Маклорена с интегральным остаточным членом, тогда, имея в виду условия (1.23'), для любого $k \geq 0$ получим:

$$f_*(x) = \frac{1}{1 + k} \int_0^x (x-t)^k f_*^{(k+1)}(t) dt, \quad 0 < x < +\infty. \quad (1.24)$$

Пусть $j > 0$ — целое, фиксированное; число μ_j принадлежит некоторому интервалу $[k_j, k_j + 1)$. Напишем формулу (1.24) для $k = k_j$, после чего непосредственным вычислением найдем

$$D^{(j)} f_*(x) = \frac{d^{-\alpha_j}}{dx^{-\alpha_j}} \frac{d}{dx} D^{(j-1)} f_*(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k_j - \nu_j + 1)} \int_0^x (x-t)^{(k_j - \nu_j)} f^{(k_j-1)}(t) dt, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.25)$$

Из (1.25) получим

$$D^{(j)} f_*(0) = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

и так как $j \geq 0$ произвольно, то (1.19) удовлетворяется.

Далее, из (1.25) имеем также

$$|D^{(j)} f_*(x)| \leq \frac{x^{k_j - \nu_j + 1}}{\Gamma(k_j - \nu_j + 2)} m_{k_j}^*, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (1.26)$$

Но, по определению,

$$m_{k_j}^* = \min_{\nu_j \in [k_j, k_j+1]} \{m_{\nu_j}\}$$

и $\nu_j \in [k_j, k_j+1]$, поэтому

$$m_{k_j}^* \leq m_j. \quad (1.27)$$

Из (1.26) и (1.27) получим

$$|D^{(j)} f_*(x)| < A_\infty x m_j$$

т. е. $f_*(x) \in C_{m_j} \{x_k\}$.

§ 2. Квази-аналитические классы на всей оси $(-\infty, +\infty)$

Вводимые в настоящем параграфе классы функций связаны с операцией дробного интегрирования в смысле Г. Вейля и представляют собой естественное расширение классов бесконечно-дифференцируемых функций, рассмотренных в работах [3, 4].

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Интегралом Г. Вейля порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ называют функцию

$$W^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Интегралом нулевого порядка от $f(x)$ естественно называть саму функцию, т. е.

$$W^0 f(x) = f(x).$$

Как и в § 1, для данной последовательности $\{x_k\}$, $(k \geq 0, 0 \leq x_k < 1)$ введем в рассмотрение операции

$$\begin{aligned} R^{(0)} f(x) &\equiv W^{x_k} f(x) \\ R^{(1)} f(x) &\equiv W^{x_1} \frac{d}{dx} R^{(0)} f(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R^{(k)} f(x) \equiv W^{2k} \frac{d}{dx} R^{(k-1)} f(x).$$

Назовем функцию $R^{(k)} f(x)$ (если она существует) k -ой обобщенной производной от $f(x)$ по двойной последовательности $\{a_k\}$.

Скажем, что $f(x) \in C(-\infty, +\infty; a_k)$, если функции

$$R^{(k)} f(x) \text{ и } \frac{d}{dx} R^{(k)} f(x), \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

непрерывны на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Пусть функция $p(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, при этом

а) $p(0) = p'(0) = 0^*$,

б) $p'(t)$ монотонно возрастает на $[0, +\infty)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} p'(t) = +\infty$.

Пусть, как и в работе [4], функция $q(x)$ двойственна с $p(x)$ по Юнгу, тогда при любых $\zeta > 0$ и $\eta > 0$

$$\zeta \cdot \eta < p(\zeta) + q(\eta). \quad (2.4)$$

Отнесем теперь к классу $C_{m_n}[p(x); a_k]$ все функции $f(x)$ из класса $C(-\infty, +\infty; a_k)$, удовлетворяющие условиям

$$|R^{(k)} f(x)| \leq m_n \omega_f(x) e^{-p(x)}, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.5')$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел и $\omega_f(x) \geq 0$ суммируема на $(-\infty, +\infty)$, а $p_1(x) = p(|x|)$ при $x \leq 0$ и $p_1(x) \geq c_0$ при $x > 0$, c_0 — действительное число

$$|(1+x^2) \frac{d}{dx} R^{(k)} f(x)| \leq c_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.5'')$$

где c_k — некоторые постоянные.

Докажем теорему, являющуюся естественным обобщением как теоремы 5 работы [4], так и теоремы Карлемана-Островского.

Теорема 3. Класс $C_{m_n}[p(x); a_k]$ пуст, иначе говоря, содержит лишь функцию $f(x) \equiv 0$, $(-\infty < x < +\infty)$, если

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T_*(r)}{r^2} dr \right\} = -\infty, \quad (2.6)$$

где

$$T_*(r) = \sup_{n>1} \frac{r^{\frac{\pi}{2}(1-a_k)}}{m_n}. \quad (2.7)$$

* Условие а) не существенно и вводится лишь для удобства (см. [4]).

Доказательство. Нужно доказать, что при выполнении условия (2.6) любая функция класса $C_{m_n}\{p(x); \alpha_k\}$ сводится к тождественному нулю.

Пусть $f(x) \in C_{m_n}\{p(x); \alpha_k\}$. Покажем сначала, что интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} R^{(0)} f(u) du \quad (2.8)$$

преобразование Фурье функции $R^{(0)} f(x)$, является аналитической функцией в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z \leq 0$. Действительно, из (2.5') имеем

$$|R^{(0)} f(u)| \leq m_0 \omega_f(u) e^{-p|u|}, \quad (-\infty < u < +\infty) \quad (2.5'')$$

откуда при $u \leq 0$ следует оценка

$$\begin{aligned} |\Phi(x+iy)| &\leq \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(y+|u|) - p|u|} \omega_f(u) du + \\ &+ \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-|y| - p|u|} \omega_f(u) du, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Но, по неравенству (2.4),

$$|y| + |u| - p|u| \leq q(|y|) \quad (2.4')$$

поэтому из (2.9) имеем оценку

$$|\Phi(x+iy)| \leq c(f) e^{q(|y|)} \quad (2.9')$$

справедливую в нижней полуплоскости $y \leq 0$.

Но оценку (2.9) можно существенно улучшить, если воспользоваться всеми неравенствами (2.5).

Из формулы

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izu} R^{(0)} f(u) du,$$

которая представляет из себя аналитическую в нижней полуплоскости функцию, интегрированием по частям с учетом (2.5'') получим представление

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izu} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du, \\ &(\operatorname{Im} z < 0, z \neq 0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Но это представление, согласно (2.5''), остается справедливым при $\operatorname{Im} z \leq 0, z \neq 0$.

Заметив далее, что для $0 \leq \alpha_1 < 1$, $-\infty < u, x < +\infty$ имеет место формула

$$e^{-ix} (ix)^{-\alpha_1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{+\infty} (v-u)^{\alpha_1-1} e^{-ivx} dv, \quad (x \neq 0),$$

напишем (2.10) для $z = x$ в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (ix)^{1-\alpha_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^{+\infty} (v-u)^{\alpha_1-1} e^{-ivx} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (x \neq 0). \quad (2.11)$$

Но интеграл (2.11) можно рассматривать как сумму следующих функций

$$\psi_1(x) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{+\infty} e^{-ivx} (v-u)^{\alpha_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (2.12')$$

$$\psi_2(x) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^0 e^{-ivx} (v-u)^{\alpha_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (2.12'')$$

$$\psi_3(x) = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_u^{+\infty} e^{-ivx} (v-u)^{\alpha_1-1} dv \right\} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \quad (2.12''')$$

при этом из того, что

$$\left| \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) \right| < \frac{C_0}{1+u^2}, \quad -\infty < u < +\infty,$$

следует абсолютная сходимость внешних интегралов в формулах (2.12).

Но легко видеть, что интеграл (2.12') абсолютно сходится при $\operatorname{Im} z \leq 0$, интеграл (2.12'') абсолютно сходится при $\operatorname{Im} z \geq 0$ и интеграл (2.12''') абсолютно сходится при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Кроме того, при $\operatorname{Im} z < 0$ в двойном интеграле (2.12') можно произвести перемену порядка интегрирования, откуда получим

$$\psi_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{-ivz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{-\infty}^0 (v-u)^{\alpha_1-1} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \right\} dv \quad \operatorname{Im} z < 0. \quad (2.13')$$

Аналогично будем иметь

$$\psi_2(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-ivz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_{-\infty}^v (v-u)^{z_1-1} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \right\} dv$$

$\operatorname{Im} z > 0$

(2.13'')

и

$$\psi_3(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-ivz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z_1)} \int_0^v (v-u)^{z_1-1} \frac{d}{du} R^{(0)} f(u) du \right\} dv$$

$\operatorname{Im} z < 0$.

(2.13''')

Из формул (2.13) получим

$$\psi_1(z) + \psi_3(z) = \int_0^{\infty} e^{-ivz} R^{(0)} f(v) dv, \quad \operatorname{Im} z < 0$$
(2.14')

$$\psi_2(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-ivz} R^{(1)} f(v) dv, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$
(2.14'')

Но по условию (2.5')

$$|R^{(1)} f(v)| < m_1 \omega_f(v) e^{-\rho_1(v)},$$

поэтому интегралы (2.14) абсолютно сходятся в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и, следовательно,

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} R^{(1)} f(v) dv, \quad -\infty < x < +\infty.$$
(2.15)

Из (2.11) и (2.15) следует

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (ix)^{1-\alpha_n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} R^{(1)} f(v) dv, \quad (x \neq 0)$$

и легко видеть, что эта формула остается в силе в области

$$D_0: (\operatorname{Im} z \leq 0, |z| > 1)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (iz)^{1-\alpha_n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivz} R^{(1)} f(v) dv.$$
(2.16)

Повторяя буквально те же рассуждения, получим, что в области D_0

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (iz)^{1-\sum_{k=1}^n \alpha_k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivz} R^{(n)} f(v) dv \quad (n = 1, 2, \dots).$$
(2.17)

Из (2.17) и (2.5') получим

$$|\Phi(x+iy)| \leq \frac{m_n}{\sqrt{2\pi}|z|^{\sum_{k=1}^n(1-\alpha_k)}} \int_{-\infty}^0 \omega_f(v) e^{-p(|v|)+|v||y|} dv + \\ + \frac{m_n}{\sqrt{2\pi}|z|^{\sum_{k=1}^n(1-\alpha_k)}} \int_0^{+\infty} \omega_f(v) e^{-|y|v-p(v)} dv \\ (z = x + iy \in D_0)$$

или, по (2.4), т. к. $q(|y|) \rightarrow +\infty$ при $|y| \rightarrow +\infty$

$$|\Phi(x+iy)| \leq c(f) \frac{e^{q(|y|)}}{T_n(|z|)}, \quad (z = x + iy \in D_0) \quad (2.18)$$

где

$$T_n(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\sum_{k=1}^n(1-\alpha_k)}}{m_n}.$$

Предполагая, что $\Phi(z) \neq 0$, применим формулу Карлемана к функции $\Phi(z)$ в нижней полуплоскости. Тогда, как и при доказательстве теоремы 5 работы [4], получим

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log T_n(r)}{r^2} dr \right\} > -\infty.$$

что противоречит условию (2.6) теоремы.

Таким образом, $\Phi(x) \equiv 0$, $(-\infty < x < +\infty)$, или, по (2.8)

$$R^{(\alpha_0)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha_0-1} f(t) dt \equiv 0, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.19)$$

Рассматривая тождество (2.19) сначала для значений $x \in (-\infty, 0]$, после замены переменных $x = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{\tau}$ получим обыкновенное уравнение Абеля с нулевой правой частью откуда будет следовать, что $f(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, 0]$. Затем, в силу этого, полагая, что $x \in [0, +\infty)$, получим тождество

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha_0-1} f(t) dt \equiv 0, \quad x \in [0, +\infty)$$

откуда следует $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$. Следовательно, $f(x) \equiv 0$, $(-\infty < x < +\infty)$ и теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что можно рассматривать и другие классы бесконечно-дифференцируемых в обобщенном смысле функций, в частности можно доказать теорему, являющуюся обобщением теоремы 6 работы [4]. Однако на этом мы останавливаться не будем.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 17 IV 1968

Մ. Մ. ԶԻՐԲԱՅԻԱՆ և Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍԻԱՆ

ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐՈ-ԴԻԲԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՇԵՏ
ԿԱՊՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՔՎԱԶԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ԴԱՍԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ռիման-Լիուվիլի կամ Հ. Վելլի կոտորակային ինտեգրալի օգնությամբ $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի կամ $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա դիտարկվում են ընդհանրացրած իմաստով անվերջ դիֆերենցիալի ֆունկցիաների դասեր:

Այդ դասերի համար նշվում են քվազիանալիտիկության պայմաններ, այսինքն, տրվում են այդ դասերի ֆունկցիաները միակ ձևով որոշող պայմաններ:

Բերենք հարվածում ապացուցված արդյունքներից մեկը.

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա: $f(x)$ ֆունկցիալի Ռիման-Լիուվիլի իմաստով $\alpha > 0$ կարգի ինտեգրալ են անվանում հետևյալ արտահայտությունը

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt:$$

Բնական է ընդունել $\frac{d^0}{dx^0} f(x) \equiv f(x)$:

Տված $\{a_k\}$, $(k \geq 0, 0 \leq a_k < 1)$ հաջորդականության համար մտցնենք հետևյալ օպերացիաները

$$D^{(0)} f(x) \equiv \frac{d^{-a_0}}{dx^{-a_0}} f(x), D^{(k)} f(x) \equiv \frac{d^{-a_k}}{dx^{-a_k}} \frac{d}{dx} D^{(k-1)} f(x), (k \geq 1):$$

Անվանենք $D^{(k)} f(x)$ -ը $f(x)$ ֆունկցիալի k -րդ ընդհանրացրած սծանցյալը ըստ $\{a_k\}$ հաջորդականության:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե $a_k = 0$, $(k \geq 0)$ ապա

$$D^{(k)} f(x) \equiv f^{(k)}(x), (k \geq 0):$$

Դիցուք տված է $\{m_n\}$, $(n \geq 0)$ դրական թվերի հաջորդականություն: Կասենք, որ $f(x) \in C_{m_n} \{a_k\}$ դասին, եթե

$$m) |D^{(n)} f(x)| \leq AB^{\sum_{k=0}^n (1-a_k)} m_n e^{cx}, (0 \leq x < +\infty, \\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

որտեղ A, B և C թվերը կախված են միայն $f(x)$ -ից.

$$p) \quad e^{-cx} \left| \frac{d}{dx} D^{(n)} f(x) \right| \in L_1(0, +\infty) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Անուշեհտե կասենք, որ $C_{m_n}\{z_k\}$ գասը քվադրանալիտիկ է, եթե ամեն d ի երկու $f_1(x), f_2(x) \in C_{m_n}\{z_k\}$ ֆունկցիաների համար

$$D^{(n)} f_1(0) = D^{(n)} f_2(0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

հավասարություններից բխում է, որ

$$f_1(x) \equiv f_2(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

Հեշտ է անսենյ, որ $z_k = 0, (k > 0)$ գեպքում վերոհիշյալ սահմանումը համընկնում է քվադրանալիտիկ գասերի կլասիկ սահմանման հետ:

Տեղի ունի Կարլեման-Պատրոֆսկու քվադրանալիտիկ գասերի վերաբերյալ հայտնի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը:

Թեորեմ. Որպեսզի $C_{m_n}\{z_k\}$ գասը լինի քվադրանալիտիկ անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T_n(r)}{r^2} dr = +\infty,$$

որտեղ

$$T_n(r) = \sup_{n-1} \frac{r^{\sum_{k=1}^n (1-\sigma_k)}}{m_n}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. и Нерсисян А. Б. Критерии разложимости функций и ряды Дирихле. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. XI, № 5, 1958.
2. См. напр., Мандельброт С., Квази-аналитические классы функций, гл. I, (1937).
3. Бабенко, К. И. Об одной новой проблеме квази-аналитичности—о преобразовании Фурье целых функций. Труды Моск. мат. об-ва, т. 5, стр. 23—542 1956.
4. Джрбашян М. М., Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 6, 1957 стр. 7—24.

К. С. Чобанян

Общая задача изгиба стержня, составленного из различных материалов

Изгиб составных стержней в случае, когда изгибающая сила действует в одной из главных приведенных плоскостей изгибаемого стержня, через функции кручения и изгиба, исследован академиком Н. И. Мухелишвили [1]. Эта же задача, в связи с задачей устойчивости плоской формы изгиба, была исследована через функцию напряжений в работе [2].

При решении задачи поперечного изгиба стержня в упруго-пластической стадии, как приведенный центр тяжести сечения стержня, так и приведенные главные оси инерции зависят от внешней нагрузки и подлежат определению по ходу решения задачи. Поэтому, для определения касательных напряжений при изгибе стержня за пределами упругости, необходимо иметь решение задачи изгиба составных стержней в общей постановке, когда изгибающая сила имеет произвольное направление, а координатные оси не являются главными приведенными осями инерции сечения стержня. Эта задача для однородных стержней была решена в 1935 г. академиком Л. С. Лейбензоном [3].

Здесь мы решаем задачу изгиба составных стержней, при произвольном расположении поперечной изгибающей силы, через функцию напряжения, исходя из линейного представления осевой деформации ε_z через координаты точек поперечного сечения стержня.

Начало координат возьмем в произвольной точке сечения заданного конца изгибаемого стержня. Ось z направим параллельно образующим поверхности призматического составного стержня, а оси x и y в плоскости поперечного сечения. К другому концу стержня приложим поперечную изгибающую силу P произвольного направления. Для осевой деформации ε_z принимаем следующее выражение:

$$\varepsilon_z = (A_0x + B_0y + D_0)(l - z) \quad (1.1)$$

где l — длина стержня, а A_0 , B_0 и D_0 — постоянные, подлежащие определению.

Область поперечного сечения составного стержня D_0 состоит из нескольких областей D_1, D_2, \dots , соответствующих различным материалам, составляющим стержень. Контур поперечного сечения обоз-

начим через L_0 , а линии раздела областей D_i и D_j ($i, j = 1, 2, \dots$) через L_{ij} .

Принимая во внимание, что боковая поверхность стержня свободна от внешних воздействий и поперечные размеры по сравнению с его длиной малы, для напряженного состояния изгибаемого стержня будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x^i = \sigma_y^i = 0 \\ \sigma_z^i = E_i \varepsilon_z = E_i (A_0 x + B_0 y + D_0) (l - z). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь через σ_x^i , σ_y^i , σ_z^i обозначены компоненты напряжений в соответствующих областях D_i и использован закон Гука.

Из условий равновесия части стержня, расположенной между свободным концом $z = l$ и произвольным сечением $l = \text{const}$, будем иметь

$$\iint_{D_0} \sigma_z dx dy = 0 \quad (1.3)$$

$$\iint_{D_0} \sigma_z^i y dx dy = -M_x, \quad \iint_{D_0} \sigma_z^i x dx dy = -M_y$$

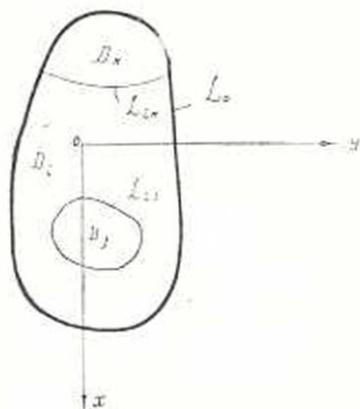
где M_x и M_y — моменты изгибающей силы относительно осей x и y .

$$M_x = P_y (l - z), \quad M_y = P_x (l - z) \quad (1.4)$$

Используя (1.2) и (1.4), из (1.3) для постоянных A_0 , B_0 и D_0 получим уравнения

$$\begin{aligned} A_0 \sum_{i=1}^n E_i S_{iy} + B_0 \sum_{i=1}^n E_i S_{ix} + D_0 \sum_{i=1}^n E_i S_i = 0 \\ A_0 \sum_{i=1}^n E_i J_{ixy} + B_0 \sum_{i=1}^n E_i J_{iy} + D_0 \sum_{i=1}^n E_i S_{ix} = -P_y \\ A_0 \sum_{i=1}^n E_i J_{ix} + B_0 \sum_{i=1}^n E_i J_{ixy} + D_0 \sum_{i=1}^n E_i S_{iy} = -P_x \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь E_i — модуль упругости материала, соответствующего области D_i ; S_i — площадь области D_i ; S_{ix} и S_{iy} — статические моменты площади S_i относительно осей x и y , а J_{ix} , J_{iy} и J_{ixy} — моменты инерции и центробежный момент инерции площади S_i относительно осей x и y .



Фиг. 1.

Системой уравнений (1.5) определяются постоянные A_0 , B_0 и D_0 , через которые в свою очередь определяются нормальная деформация ε_z и нормальное напряжение σ_z^i .

Перейдем теперь к определению касательных напряжений τ_{xz}^i и τ_{yz}^i в соответствующих областях D_i ($i = 1, 2, \dots$), предполагая, что

$$\tau_{xy}^i = 0. \quad (1.6)$$

На основании уравнений упругого равновесия, принимая во внимание (1.2) и (1.6), находим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} - E_i(A_0 x + B_0 y + D_0) = 0.$$

Первые два уравнения (1.7) показывают, что напряжения τ_{xz}^i и τ_{yz}^i не зависят от координаты z , а третье уравнение будет удовлетворено, если напряжения τ_{xz} и τ_{yz} через функцию $F(x, y)$ представить в следующем виде:

$$\tau_{xz}^i = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{1}{2} E_i (A_0 x^2 + D_0 x) + \varphi_i(y) \quad (1.8)$$

$$\tau_{yz}^i = -\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{2} E_i (B_0 y^2 + D_0 y) + \psi_i(x).$$

Здесь через F_i обозначена функция $F(x, y)$ в области D_i , а $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ — произвольные функции.

Для деформаций ε_x^i и ε_y^i на основании закона Гука будем иметь

$$\varepsilon_x^i = \varepsilon_y^i = -\frac{\nu}{E_i} \varepsilon_z^i = -\nu (A_0 x + B_0 y + D_0) (1 - z). \quad (1.9)$$

Из условия совместности деформаций, принимая во внимание (1.9), находим

$$2\nu B_0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial x} \right) \quad (1.10)$$

$$2\nu A_0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial y} \right)$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial x} = 2\nu (B_0 x - A_0 y) + c_1, \quad (1.11)$$

где c_1 — произвольная постоянная интегрирования.

Подставляя выражения γ'_{xz} и γ'_{yz} через τ'_{xz} и τ'_{yz} согласно закону Гука и принимая во внимание (1.8), получаем

$$\Delta F_i = 2\nu G_i (B_0 x - A_0 y) - (\varphi'_i - \psi'_i) + G_i \epsilon_i. \quad (1.12)$$

Уравнению (1.12) должна удовлетворять функция напряжений в каждой из областей D_i .

Перейдем теперь к контурному условию на L_0 и к условиям, которым должна удовлетворять функция напряжений $F(x, y)$ на линиях раздела L_{ij} .

Условие, что боковая поверхность свободна от внешних сил, выражается следующим образом:

$$\tau'_{xz} l + \tau'_{yz} m = 0 \quad \text{на } L_0,$$

где

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (1.14)$$

Внеся (1.2) в (1.13) и используя (1.14), получаем:

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = \left[\frac{1}{2} E_i (B_0 y^2 + D_0 y) + \psi'_i \right] \frac{dx}{ds} - \left[\frac{1}{2} E_i (A_0 x^2 + D_0 x) + \varphi'_i \right] \frac{dy}{ds}. \quad (1.15)$$

Условию (1.15) должен удовлетворять функция напряжений $F(x, y)$ на контуре L_0 .

Из условия равновесия элемента линии раздела L_{ij} имеем

$$\tau'_{xz} l + \tau'_{yz} m = \tau'_{xz} l + \tau'_{yz} m. \quad (1.16)$$

Подставляя выражения напряжений из (1.8) в (1.16) и принимая во внимание (1.14), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_j}{\partial s} &= \frac{1}{2} (E_i - E_j) \left[y (B_0 y + D_0) \frac{dx}{ds} - \right. \\ &\left. - x (A_0 x + D_0) \frac{dy}{ds} \right] + (\psi'_i - \psi'_j) \frac{dx}{ds} - (\varphi'_i - \varphi'_j) \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Воспользуемся условием непрерывности перемещений на линиях раздела L_{ij} . Имеем

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial z} = \gamma'_{xz} = \frac{1}{G_i} \tau'_{xz}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial z} = \gamma'_{yz} = \frac{1}{G_i} \tau'_{yz}. \quad (1.18)$$

Внеся (1.8) в (1.18), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial x} &= \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{E_i}{2G_i} (B_0 y^2 + D_0 y) + \frac{1}{G_i} \psi'_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} &= -\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{E_i}{2G_i} (A_0 x^2 + D_0 x) + \frac{1}{G_i} \varphi'_i \end{aligned} \quad (1.19)$$

Помножив первое из соотношений (1.19) на $\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$, а второе — на $\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$, и складывая полученные результаты, находим:

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} = \left(\frac{1}{G_i} \varphi_i - \frac{1}{G_j} \varphi_j \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{1}{G_i} \varphi_i - \frac{1}{G_j} \varphi_j \right) \frac{dy}{ds}. \quad (1.20)$$

Таким образом, при решении задачи косоугольного изгиба составной консоли, функция напряжений $F(x, y)$ в каждой из областей D_i должна удовлетворять уравнению (1.12), контурному условию (1.15) и условиям (1.17) и (1.20) на линиях раздела L_{ij} .

Выясним смысл постоянных c_i в правых частях уравнений (1.12). С этой целью обратимся к понятию о среднем вращении элементов поперечного сечения изгибаемого стержня вокруг оси z .

Имеем:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{G_i} \tau_{xz}^i - \frac{\partial u_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} = \frac{1}{G_i} \tau_{yz}^i - \frac{\partial v_i}{\partial z}. \quad (1.21)$$

Используя (1.8), из (1.2) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial x} &= \frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{1}{2} A_i x^2 + \frac{1}{2} D_i x + \varphi_i \right) - \frac{\partial u_i}{\partial z} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} &= \frac{1}{G_i} \left(-\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{2} B_i y^2 + \frac{1}{2} D_i y + \psi_i \right) - \frac{\partial v_i}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Составляя смешанные вторые производные w_i при помощи (1.22) и приравнявая их, получаем

$$\Delta F_i = G_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = \tau_{xy}^i + \psi_i. \quad (1.23)$$

Сравнивая (1.23) с (1.13), находим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = 2\gamma (B_0 x - A_0 y) + c_i. \quad (1.24)$$

Здесь выражение

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} = 2\Omega_i \quad (1.25)$$

представляет среднее вращение элементов поперечного сечения вокруг оси z .

На основании (1.24) и (1.25) находим

$$\frac{\partial}{\partial z} \Omega_i = -\gamma (B_0 x - A_0 y) + c_i. \quad (1.26)$$

Соотношение (1.26) показывает, что изменение среднего вращения элементов поперечного сечения Ω_i по направлению оси z состоит из двух частей; первая часть, соответствующая последнему члену правой части (1.26), не зависит от координат x и y и обусловлена общим поворотом поперечного сечения вокруг оси z , как при чистом кручении. Вторая часть обусловлена искажением поперечного сечения вследствие изгиба и зависит от координат x и y линейно.

Так как на поверхностях раздела имеем условие непрерывности перемещений, среднее вращение, следовательно и его изменение по направлению оси z , должны быть непрерывны на линиях раздела L_{ij} . Поэтому имеем

$$c_i = c_j \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Если изгибающая поперечная сила приложена к концу составной консоли так, что изгиб не сопровождается кручением, то мы должны положить

$$c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (1.27)$$

Это положение изгибающей силы P , при котором изгиб не сопровождается кручением, можно определить после решения задачи изгиба в предположении (1.27).

Из условия, что равнодействующая касательных усилий в данном поперечном сечении должна уравниваться изгибающей силой P , находим положение линии раздела.

Действительно, обозначим через \bar{x} и \bar{y} координаты некоторой точки линии действия силы P . Сумма моментов всех касательных усилий относительно этой точки должна быть равна нулю:

$$\iint_{D_0} [(x - \bar{x})\tau_{yz}^i - (y - \bar{y})\tau_{xz}^i] dx dy = 0. \quad (1.28)$$

Принимая во внимание, что

$$P_x = \iint_{D_0} \tau_{xz}^i dx dy, \quad P_y = \iint_{D_0} \tau_{yz}^i dx dy$$

Вместо (1.28) будем иметь

$$\bar{y}P_x - \bar{x}P_y + M_0 = 0 \quad (1.29)$$

где $M_0 = \iint_{D_0} (x\tau_{yz}^i - y\tau_{xz}^i) dx dy$ — крутящий момент касательных напряжений относительно начала координат.

На основании линейного характера рассматриваемой задачи зависимость касательных напряжений τ_{xz}^i и τ_{yz}^i от P_x и P_y должна быть линейной и однородной. Поэтому, если будем изменять P_x и P_y независимо друг от друга, (1.29) будет представлять уравнение пучка

прямых, проходящих через одну точку, в котором параметром будет служить отношение $\frac{P_x}{P_y}$. Таким образом, чтобы поперечный изгиб составного стержня не сопровождался кручением, линия действия изгибающей поперечной силы P должна проходить через определенную точку сечения, называемую центром изгиба [3].

Согласно (1.29) координаты центра изгиба должны быть определены при помощи следующих формул:

$$\bar{x} = \frac{M_0(P_y)}{P_y}, \quad \bar{y} = \frac{M_0(P_x)}{P_x}. \quad (1.30)$$

Здесь $M_0(P_x)$ и $M_0(P_y)$ — моменты касательных напряжений изгиба относительно начала координат с условием, что при вычислении $M_0(P_x)$ принимается $P_y = 0$ и, наоборот, при вычислении $M_0(P_y)$ принимается $P_x = 0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 24.IV.1958

Կ. Ս. Չորանյան

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԶՈՂԻ ԾՈՒՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է մի ծայրով ամրակցված այն բազադրյալ ձողի ծաման խնդիրը, որի մյուս ծայրում ազդում է P լայնական ուժը, երբ կոորդինատային առանցքները չեն համընկնում ձողի կտրվածքի խնդրային բերված զլխավոր առանցքների հետ, իսկ P ուժն ունի կամայական ուղղություն:

Խնդրի լուծումը բերվում է լարումների ֆունկցիայի որոնմանը: Այդ ֆունկցիան ձողի տարբեր նյութերին համապատասխանող լայնական հատվածքի տիրույթներից յուրաքանչյուրում պետք է բավարարի համապատասխան աշխատով (1.12) Պուասոնի հավասարմանը, իսկ եղբւրւմ ու բաժանման գծի վրա (1.15), (1.17) և (1.18) պայմաններին:

Ապացուցվում է, որ զոլույթյան ունի ծաման կենտրոն, որի կոորդինատները որոշման համար ստացված են (1.30) բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. Чобакян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН Арм. ССР, т. XXII, № 3, 1956.
3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.