

Г. М. Гарибян

К теории переходных эффектов в электродинамике

В работах [1]—[3] было рассмотрено электромагнитное излучение, возникающее при прохождении заряженной частицы через одну или несколько границ раздела сред, когда частица двигалась перпендикулярно этим границам. В настоящей работе рассматривается случай движения заряженной частицы из одной среды в другую наклонно к границе раздела этих сред. С помощью полученных формул рассчитано рассеяние, испытываемое частицей при входе из вакуума в идеальный проводник, и притяжение, испытываемое заряженной частицей, движущейся параллельно поверхности идеального проводника, из-за наличия индуцированных зарядов.

1. Пусть плоскость $z = a$ есть граница раздела двух сред, описываемых диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 . Частица движется со скоростью $\vec{v}$ в плоскости (y, z) . Электромагнитное поле описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{v}t); & \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \text{div} \vec{D} &= 4\pi e \delta(\vec{r} - \vec{v}t). \end{aligned} \quad (1)$$

Поле заряженной частицы будем искать в виде:

$$\vec{E}_{1,2}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_{1,2}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} \quad \text{и т. п.} \quad (2)$$

где индексы 1 и 2 относятся к первой и второй среде, а

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v} = k_y v_y + k_z v_z. \quad (3)$$

Фурье-компоненты полей (2) имеют тот же вид, что и приведенный в [1], с той лишь разницей, что теперь ω определяется формулой (3). Решение однородных уравнений представим в виде

$$\vec{E}'_{1,2}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}'_{1,2}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \lambda_{1,2} z - \omega t)} d\vec{k} \quad \text{и т. п.} \quad (4)$$

$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{1,2} - k^2$, а x и ρ компоненты векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$ в тангенциаль-

ной плоскости. Также как и в [1] $\lambda_1' < 0$, $\lambda_1'' < 0$, $\lambda_2' > 0$, $\lambda_2'' > 0$, где один штрих означает действительную, а два штриха мнимую части $\lambda_{1,2}$. Через $\vec{n}$ обозначим единичный вектор оси z . Тогда

$$\vec{H}_{1,2}(\vec{k}) = \frac{c}{\omega} \left[\vec{z} + \vec{n} \lambda_{1,2} \vec{E}_{1,2}'(\vec{k}) \right]. \quad (5)$$

Электрический вектор поля излучения разложим на тангенциальную и нормальную компоненты, причем ввиду поперечности поля излучения будем иметь:

$$\vec{z} \vec{E}_{1,2}'(\vec{k}) + \lambda_{1,2} \vec{E}_{1,2, n}'(\vec{k}) = 0 \quad (6)$$

Тангенциальную Фурье-компоненту электрического поля представим состоящей из компонент направленных по $\vec{z}$ и $\vec{v}_y$.

$$\vec{E}_{1,2}'(\vec{k}) = \vec{z} E_{1,2,z}' + \vec{v}_y E_{1,2,y}', \quad (7)$$

Из четырех условий непрерывности компонент полей на границе раздела сред получаем шесть уравнений, из которых независимыми являются только четыре с четырьмя неизвестными компонентами полей излучения $E_{1,2,z}'$ и $E_{1,2,y}'$. Решая эти уравнения получим:

$$E_{1,z}'(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{e^{-i\lambda_1 a + ik_2 a}}{\lambda_1 \varepsilon_1 - \lambda_2 \varepsilon_2} \left\{ \lambda_1 \left(\frac{\frac{\varepsilon_2}{k^2} - \frac{v_z \lambda_2}{\omega^2 \varepsilon_1 / c^2} - 1 + \frac{v_z \lambda_2}{\omega^2 \varepsilon_2 / c^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{k_y v_z (k_z - \lambda_1 - \lambda_2)}{\omega} \left(\frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_1 / c^2} - \frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_2 / c^2} \right) \right\} \quad (8)$$

$$E_{1,y}'(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{e^{-i\lambda_1 a + ik_2 a}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{\omega (\lambda_2 - k_z)}{c^2} \left(\frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_1 / c^2} - \frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_2 / c^2} \right). \quad (9)$$

Поля излучения во второй среде получаются из (8) и (9) переменой местами индексов 1 и 2. Нормальные компоненты электрических полей и магнитные поля можно найти с помощью формул (5) и (6).

2. Пусть частица наклонно входит из вакуума в идеальный проводник, т. е. $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \infty$. Тогда получим

$$E_{1,z}'(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \cdot \frac{e^{-i\lambda_1 a + ik_2 a}}{k^2 - \omega^2 / c^2}, \quad (10)$$

$$E_{1,y}'(\vec{k}) = -\frac{ei}{2\pi^2} \frac{\omega / c^2 e^{-i\lambda_1 a + ik_2 a}}{k^2 - \omega^2 / c^2}. \quad (11)$$

$$E_{1n}(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{e^{-i\lambda_1 a + ik_z a}}{\lambda_1} \frac{\frac{\omega}{c^2} k_y v_y - \chi^2}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (12)$$

Компонента поля излучения в точке нахождения частицы направленная по оси y , равна

$$E_{1y} = \frac{ei}{2\pi^2} \int \frac{\chi \cos \Phi - \frac{\omega}{c^2} v_y}{\chi^2 + \left(\frac{\omega - \chi v_y \cos \Phi}{v_z} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e^{i(\chi \cos \Phi \cdot v_y + \lambda_1 v_z - \omega) t} \chi d\chi d\Phi \frac{d\omega}{v_z} \quad (13)$$

где Φ — угол между $\vec{\chi}$ и осью y . Аналогично

$$E_{1n} = \frac{ei}{2\pi^2} \int \frac{\frac{\omega}{c^2} k_y v_y - \chi^2}{\lambda_1 \left[\chi^2 + \left(\frac{\omega - \chi v_y \cos \Phi}{v_z} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right]} e^{i(\chi \cos \Phi v_y + \lambda_1 v_z - \omega) t} \times \chi d\chi d\Phi \frac{d\omega}{v_z} \quad (14)$$

В формулах (13) и (14) время t было заменено на $t + \frac{a}{v_z}$. Это новое t изменяется от $-\infty$ до 0 пока частица находится в вакууме.

Ограничимся случаем $v \ll c$, когда действие индуцированных зарядов будет существенным.

Произведем в полученных формулах сначала интегрирование по ω от $-\infty$ до $+\infty$. Сделав в плоскости комплексного переменного ω разрезы, в результате чего подинтегральная функция становится однозначной, и замыкая контур интегрирования полуокружностью, лежащей в верхней полуплоскости, где находится полюс подинтегральной функции $\omega_0 = k_y k_y + i v_z \chi$, мы согласно лемме Жордана получим

$$E_{1y} = -\frac{e V_z}{2\pi} \int \frac{\chi \cos \Phi}{v_y \cos \Phi + i v_z} e^{2 v_z \chi t} d\chi d\Phi \quad (15)$$

Производя далее интегрирование по χ от 0 до ∞ и по Φ от 0 до 2π будем иметь

$$E_{1y} = -\frac{e}{4 v_z v t^2} \frac{v - v_z}{v_y} \quad (16)$$

Аналогично

$$E_{1n} = \frac{e}{4 v_z v t^2} \quad (17)$$

Сила, смещающая частицу с ее траектории будет равна:

$$F = e \left(E_{1n} \frac{v_z}{v} + E_{1y} \frac{v_y}{v} \right) \quad (18)$$

Если $v_x = v_y = v'$, то она примет вид

$$F = \frac{e^2}{4\sqrt{2} v'^2 t^2} \quad (19)$$

Интегрируя уравнение движения с такой силой и принимая, что смещение равно нулю при скорости смещения меньшей v' , мы для угла дополнительного (переходного) рассеяния получим выражение

$$\chi = \ln \frac{e^2}{8 m v'^2 b} \quad (20)$$

где b — величина порядка размеров атома.

3. В качестве другого примера применения формул (8) и (9) рассмотрим движение заряженной частицы параллельно поверхности идеального проводника на расстоянии a . Можно воспользоваться для данного случая формулами (10)–(12), положив в них $v_z = 0$. Тогда компонента электрического поля, направленная к поверхности проводника будет равна в точке нахождения частицы

$$E_{1a} = \frac{e}{2\pi^2 v} \int e^{-V \sqrt{k_x^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1-\beta^2)} a + i k_z a} \sqrt{k_x^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1-\beta^2)} dk_x d\omega dk_z \quad (21)$$

Интеграл по k_z берется замыканием контура интегрирования верхней полуокружностью. Интеграл по k_x и ω легко берется переходом к сферическим координатам на плоскости k_x, ω . В результате получим

$$E_{1a} = \frac{e}{4a^2 \sqrt{1-\beta^2}} \quad (22)$$

Интегрируя уравнение движения с силой, определяемой (22), мы получим, что за время t частица сместится к поверхности проводника на расстояние

$$\xi = \frac{e^2}{8ma^2} t^2 \quad (23)$$

В заключение отметим, что при расчете обоих эффектов существенным образом было использовано предположение об их малости, т. е. $a \ll 1$ и $\xi \ll a$.

Գ. Մ. Գարիբյան

ԷԼԵԿՏՐՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ԷՖԵԿՏՆԵՐԻ
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հեղինակի նախորդ աշխատություններում մշակված մեթոդի միջոցով հաշվված է մի միջավայրից մյուսը նրանց բաժանման հարթության նկատմամբ լիցքավորված մասնիկի՝ թեք շարժման ժամանակ առաջացող ճառագայթման դաշտը:

Հաշվված է ալն ուժը, որ ազդում է մասնիկի վրա՝ վերջինիս միջավայրերի բաժանման հարթությանը զուգահեռ շարժման ժամանակ, ինչպես նաև անցածային ցրման անկյան մեծությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гарибян Г. М. ЖЭТФ 33, 1403, 1957.
2. Гарибян Г. М., Чаликян Г. А. ЖЭТФ 34, № 11, 1958.
3. Гарибян Г. М. ЖЭТФ 34, № 12, 1958.

М. Л. Тер-Микаелян

К квантовой электродинамике в среде I

§ 1. В в е д е н и е

Работа посвящена исследованию влияния диэлектрических и магнитных свойств среды на радиационные поправки. При вычислении радиационных поправок с необходимостью входит интегрирование по всем возможным значениям четырехмерного импульса виртуального фотона. Поскольку поведение длинноволновых квантов описывается макроскопическими уравнениями Максвелла, постольку применение микроскопических уравнений квантовой электродинамики является некоторым приближением к действительности.

Однако, рассмотрение этого вопроса было вызвано не столь простыми обстоятельствами. Мы объясним идею работы на примере радиационных поправок к кулоновскому рассеянию. Хорошо известно, что при непосредственном вычислении этих поправок получается логарифмически расходящийся результат. Для получения экспериментально наблюдаемого значения поправок необходимо компенсировать эту расходимость прибавлением поперечника тормозного излучения мягких квантов. В итоге получается конечный результат, который естественно должен являться функцией максимальной энергии, излученного кванта (которая в свою очередь определяется чувствительностью экспериментальной установки). Однако, в результате работ Ландау-Померанчука и автора оказалось, что формулы для тормозного излучения при учете среды коренным образом изменяются. Это означает, что изменится величина радиационных поправок. Для расчета последних необходимо научиться писать матричные элементы, для процессов высокого порядка в квантовой электродинамике с учетом влияния среды. Настоящая статья посвящена выводу матрицы рассеяния, с учетом влияния только поляризации среды. Может возникнуть вопрос насколько последовательным является использование макроскопических уравнений. Не является ли точная система микроскопической квантовой электродинамики достаточной. Дело в том, что последнюю систему мы решаем применительно к нескольким частицам, используя параметр разложения $\frac{e^2}{\hbar c}$, использование же макроскопической электродинамики позволяет учесть влияние сосед-

них атомов и переход в микроскопические уравнения происходит только тогда, когда $\frac{Ne^2}{m\omega_0^2} \rightarrow 0$ (где N — плотность частиц; ω_0 — атомная частота). Некоторые вопросы затронутые в этой статье были уже исследованы в работах ряда авторов (Гинзбург, Соколов, Ватсон, Яух и т. д.) в основном применительно к теории излучения Черенкова.

Все литературные ссылки можно найти в статье Рязанова М. [1].

§ 2. Классическая теория

Мы будем пользоваться записью макроскопических уравнений Максвелла в форме предложенной Мандельштамом—Таммом [2].

После введения тензора индукции G_{ik} и тензора поля F_{ik} макроскопические уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} = J^i \quad (1)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \quad (2)$$

где

$$i \neq k \neq l$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad G^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В последующем мы придерживаемся обозначений принятым в работе [3]. Если мы введем потенциалы $A^i\{\varphi, \vec{A}\}$

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \quad (4)$$

то уравнение (2) выполняется автоматически. Запишем связь между тензорами G^{ik} и F_{ik} . Следуя [2] мы имеем для однородной изотропной среды

$$G^{ij} = \epsilon^{ia} \epsilon^{jb} F_{ab} \quad (5)$$

В системе покоя, введенный четырехмерный тензор диэлектрической и магнитной проницаемости имеет вид

$$\epsilon^{ia} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

В противоположность общепринятому написанию связи между F_{ik} и G_{ik} .

$$G_{ij} u^j = \varepsilon F_{ik} u^k$$

$$F_{kl} u_l + F_{li} u_k + F_{lk} u_l = \mu (G_{kl} u_l + G_{li} u_k + G_{lk} u_l) \quad (7)$$

условие (5) более компактно и не содержит u^i — скорости среды. Легко проверить, непосредственным вычислением, что (5) и (7) эквивалентны. Подставляя (5) в (1) мы имеем

$$\varepsilon^{il} \varepsilon^{km} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) = -J^i. \quad (8)$$

Если наложить на потенциалы условие Лоренца

$$\varepsilon^{km} \frac{\partial A_m}{\partial x^k} = 0 \quad (9), \text{ то (8) переписывается}$$

$$\varepsilon^{il} \varepsilon^{km} \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^m} = J^i. \quad (9)$$

Легко видеть, что к потенциалам еще можно прибавить $\frac{\partial \chi}{\partial x^k}$, где функция χ удовлетворяет уравнению $\varepsilon^{km} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^m \partial x^k} = 0$. Переход к обычной электродинамике в пустоте происходит при замене тензора ε^{ik} на метрический тензор g^{ik} .

Уравнение (9) следует из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2} \varepsilon^{km} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] A_\mu \quad (10)$$

и дополнительного условия (9), требуя выполнения последнего независимо от (10).

Выбор лагранжиана в форме (10) который не является градиентно-инвариантным, значительно упрощает все последующие выкладки. От обычного явно градиентно-инвариантного лагранжиана (мы опускаем сейчас член со взаимодействием)

$$L = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

(в системе покоя $L = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 - \mu H^2)$) лагранжиан (10) отличается на величину четырехмерной дивергенции (с учетом выполнения условия Лоренца)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \varepsilon^{lm} \varepsilon^{kj} \left(A_k \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - A_m \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \right).$$

Это обеспечит над градиентную инвариантность теории [4]. Выпишем еще плотность энергии

$$T^{00} = -\varepsilon^{0m} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \frac{\partial A_i}{\partial x^0} + \frac{1}{2} \varepsilon^{km} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \quad (11)$$

и плотность импульса

$$T^{0n} = -\varepsilon^{0m} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \frac{\partial A_j}{\partial x^n} \quad (12)$$

§ 3. Установление перестановочных соотношений матрица рассеяния

При установлении перестановочных соотношений будем вначале исходить из обычной схемы квантовой механики.

Введем согласно схеме квантования полей Паули и Гейзенбергу канонически сопряженный импульс

$$\pi^i = \frac{\partial L_\Phi}{\partial A_{i0}} = -\varepsilon^{i0} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^0} \quad (13)$$

где

$$L_\Phi = -\frac{1}{2} \varepsilon^{km} \varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \quad (14)$$

Тогда перестановочные соотношения можно записать в виде

$$\begin{aligned} [A_i(\vec{x}, t), A_j(\vec{x}', t)] &= [\pi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] = 0 \\ [A_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] &= i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{ij}^0. \end{aligned} \quad (15)$$

Квантовые уравнения Гамильтона-Якоби, получаются из классических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial x_0} &= \frac{\partial H^0}{\partial \pi^i} = [H^0, A_i] \\ \frac{\partial \pi^i}{\partial x_0} &= -\frac{\partial H^0}{\partial A_i} = [H^0, \pi^i]. \end{aligned} \quad (16)$$

Заменой классических скобок Пуассона

$$[H^0, f] = \frac{\partial f}{\partial A^i} \frac{\partial H^0}{\partial \pi_i} - \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \frac{\partial H^0}{\partial A^i}$$

на квантовые скобки, умноженные на $\frac{i}{\hbar}$. Мы сразу напишем эти уравнения в четырехмерном виде

$$\begin{aligned} i\hbar g^{an} \frac{\partial A_i}{\partial x^a} &= [A_i, p^n] \\ i\hbar g^{an} \frac{\partial \pi_i}{\partial x^a} &= [\pi_i, p^n] \end{aligned} \quad (17)$$

($g^{nn} = +1$ при $n=0$ и $g^{nn} = -1$ при $n=1, 2, 3$).

Нулевая компонента этого уравнения, есть квантовый аналог классического уравнения (16) p^n и H^0 входящие в уравнения (17) и (16) суть полные энергия и импульс поля (т. е. интеграл по объему от выражений (10) и (11)), причем поскольку гамильтониан есть функция канонически сопряженных величин и их производных по простран-

ственным переменным, то вместо переменных $A_{i,0}$ нужно подставить π^i согласно формуле (13).

Непосредственным вычислением можно показать, что уравнения (16) приводят к классическому уравнению Максвелла для потенциалов, а квантовые уравнения (17) приводят к квантованному уравнению, имеющему тот же вид, что и классическое уравнение (9) для потенциалов, которые однако, теперь подчиняются перестановочным соотношениям (15).

Для построения матрицы рассеяния нам понадобятся ковариантные перестановочные соотношения. Их можно установить из следующих соображений. Прежде всего из гамильтонова формализма нам известны перестановочные соотношения для одного времени, во вторых необходимо получить правильный переход к вакууму (когда $\epsilon^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$). Мы запишем эти соотношения в виде

$$[A_i(x) A_j(x')] = (a\delta_{ij} + b\epsilon_{ij}) D(x - x'). \quad (18)$$

Поскольку $A(x)$ подчиняется однородному уравнению, то и $D(x - x')$ должно подчиняться уравнению (9), (причем $J^i = 0$), кроме того $D(x - x')$ есть нечетная функция своего аргумента. Этих условий оказывается достаточно для определения коэффициентов a , b и функции $D(x - x')$. Заметим, что если представить функцию $D(x - x')$, по аналогии с вакуумом, как разность опережающей и запаздывающей функции Грина

$$D(x) = \Delta_A(x) - \Delta_R(x), \quad (19)$$

где $\Delta_A(x)$ и $\Delta_R(x)$ удовлетворяют неоднородным уравнениям (9) (с δ функцией вместо J^i), то можно автоматически получить правила обхода полюсов, исходя из аналитических свойств диэлектрической и магнитной постоянных.

Легко видеть, что

$$\Delta_A(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\epsilon_A^{ij} k_i k_j} d^4k \quad (20)$$

$$\Delta_R(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\epsilon_R^{ij} k_i k_j} d^4k. \quad (21)$$

Обход полюсов в запаздывающей функции Грина легко получить исходя из аналитических свойств $\epsilon(\omega)$ в системе покоя. Известно [5], что $\epsilon(\omega)$ есть аналитическая функция в верхней полуплоскости. Поэтому при $t < 0$ мы замкнем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексного переменного k_0 и получим $\Delta_R(t < 0) = 0$. Отметим, что полюса подинтегрального выражения (21), при наличии небольшой мнимой части в диэлектрической про-



ницаемости лежат ниже действительной оси переменной $k_0 = \omega$. Кроме того сама диэлектрическая постоянная в нижней полуплоскости может иметь особенности. Что касается опережающей функции Грина, то ситуация тут полностью противоположная, если заметить, что вместо обычного $\epsilon(\omega)$ нужно взять „опережающую“ диэлектрическую (и магнитную) проницаемость. Аналитические свойства такого $\epsilon_A(\omega)$ можно получить, если в обычном определении $\epsilon(\omega)$ [5]

$$D(t) = E(t) + \int_0^{\infty} E(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\epsilon_R(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (22)$$

изменить знак перед τ в аргументе функции $E(t-\tau)$. Легко видеть, что $\epsilon_A(\omega)$ будет иметь особенности только в верхней полуплоскости; там же лежат полюса подинтегрального выражения (20). Отсюда следует $\Delta_A(-x) = \Delta_R(x)$. Правила обхода перестановочной функции Грина сразу получаются из соотношения (19).

После этих замечаний постоянные a и b легко вычислить и они оказываются равными

$$b = \frac{i\hbar}{\epsilon} \quad a = -\frac{i\hbar}{\epsilon\sqrt{\mu}} (1 + \epsilon\mu). \quad (23)$$

Выпишем полные операторные уравнения макроскопической электродинамики.

Вид уравнений для спинорного поля, полностью совпадает с уравнением для пустоты

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi = -e\gamma^\mu A_\mu \psi. \quad (24)$$

$$\epsilon^{ik} \epsilon^{em} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^e \psi]. \quad (25)$$

Решение этих уравнений будем, как это обычно делается, искать в виде ряда по $\frac{e^2}{\hbar c}$.

$$A_\mu = A_\mu^0 + \frac{e}{V\hbar c} A_\mu^1 + \dots \quad (26)$$

$$\psi = \psi^0 + \frac{e}{V\hbar c} \psi^1 + \dots$$

Свободные поля удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[(A_\mu^0(x) A_\nu^0(x'))] = (ag_{\mu\nu} + b\epsilon_{\mu\nu}) D(x-x') \quad (27)$$

$$[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x')]_+ = -i S_{\alpha\beta}(x - x'). \quad (28)$$

Остальные антикоммутаторы равны нулю. Анализ и решение уравнений (24) и (25) полностью совпадает с соответствующим решением для случая пустоты [6]. В процессе расчета нужно воспользоваться соотношением

$$\epsilon^{em} (a g_{mk} + b \varepsilon_{mk}) = -i \hbar \delta_k^m \quad (29)$$

которое легко проверяется в системе покоя, если учесть соотношения (23). Мы приходим тогда к выражению для S матрицы

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t dt^n P[V(t') V(t'') \dots V(t^n)] \quad (30)$$

где $V = S d^3 x J_1 A_1$, полностью совпадающему со случаем пустоты [6].

Физический институт АН Армянской ССР

Поступило 23 VI 1958

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՐԱԽԼԻԱՆ

ԿՎԱՆՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ 1

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է կոմպրիանային մակրոսկոպիկ էլեկտրոդինամիկայի կոտուցման հարցը:

Արտածված են կոմպրիանա տեղափոխանակային առնչությունները, S մատրիցայի միջոցով դրված են հավասարումների լուծումները:

Տեսության ձևակերպման ժամանակ օգտագործված է Մանդելշտամի-Տամմի տառարկած ձևով հավասարումների դրումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рязанов М. И. ЖЭТФ 32, 1244, 1957.
2. Мандельштам Л. И. Собрание сочинений, т. стр. 273.
3. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, ин. яз. Москва, 1957.
4. Боголюбов Н. И., Ширков Д. В. Введение в теория квантовых полей. Гостехиздат, Москва, 1957, стр. 33.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц, Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, Москва, 1958.
6. Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Гостехиздат, Москва, 1953, § 21.

Л. С. Багдасарян

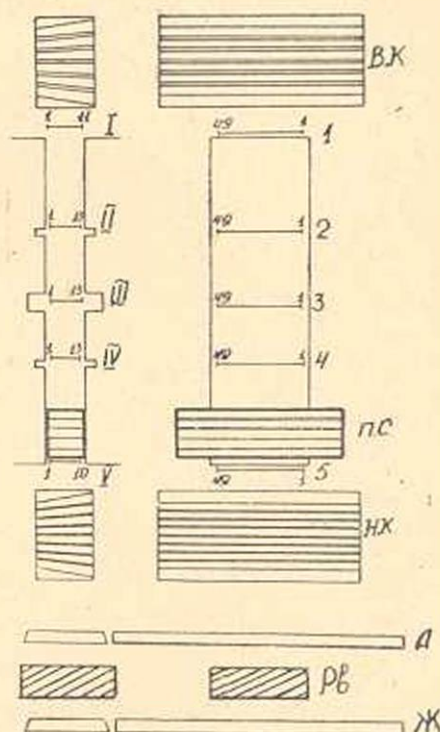
Обработка экспериментальных данных ионизационных измерений

Основной величиной характеризующей элементарную частицу, является ее масса покоя. Поэтому при изучении элементарных частиц в первую очередь ставится задача о достаточно точном определении этой величины. При изучении частиц с помощью магнитных масс-спектрометров широкое распространение получило определение величины масс по импульсу и пробегу. Однако, этот метод обладает тем недостатком, что в ряде случаев частицы останавливаются испытывая неионизационные взаимодействия. В таких случаях измеренная по P и R —импульсу и пробегу масса частицы сильно отличается от ее истинной величины.

Если кроме импульса частицы и пробега определить ее ионизирующую способность, то можно независимо от характера остановки определить массу по импульсу и ионизации.

В статье [1] был описан амплитудный анализатор импульсов, который в сочетании с пятислойным пропорциональным счетчиком позволяет измерять ионизирующую способность отдельных заряженных космических частиц. Описанная установка сочетается с магнитным масс-спектрометром с двумя камерами Вильсона [2], позволяющим с большой точностью и достоверностью измерять импульс частицы и ее пробег (фиг. 1).

Для измерения ионизирующей способности частиц применялся пяти-слойный пропорциональный счетчик, что давало возможность произ- вести пять измерений ионизации.

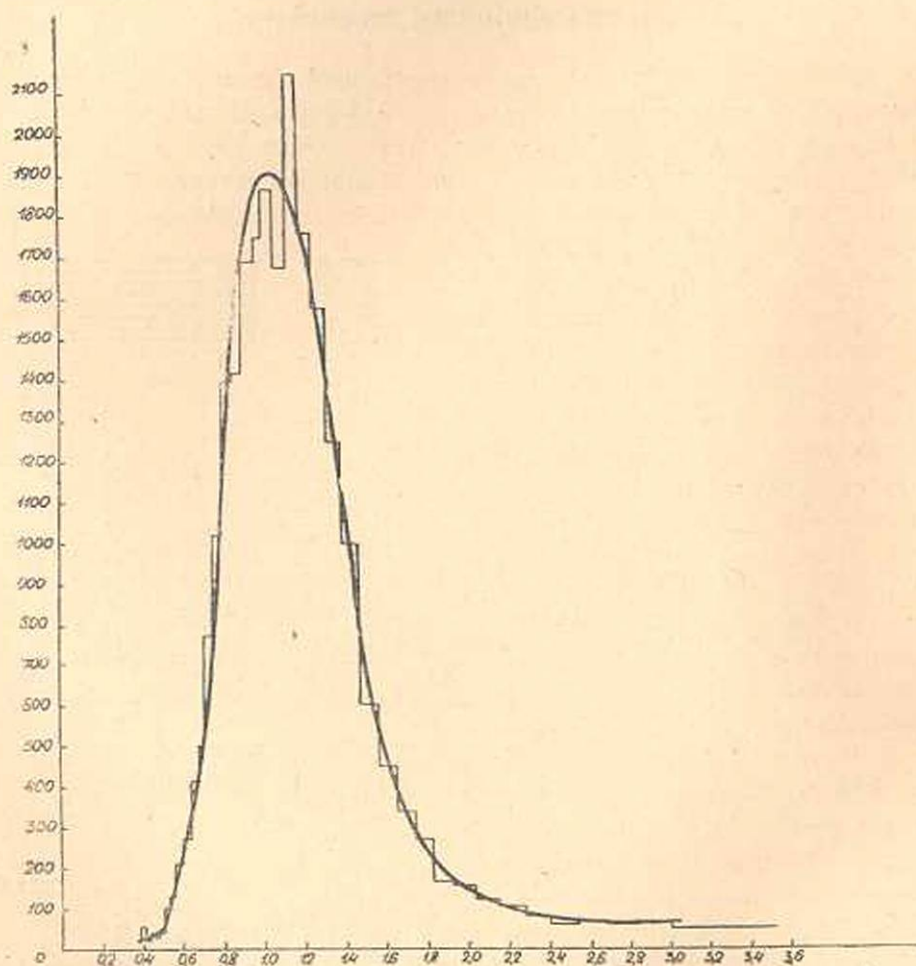


Фиг. 1.

Измерялась ионизирующая способность как мягких частиц, (частицы, остановившиеся в пластинках нижней камеры (Н. К.) Вильсона) так и жестких частиц (частицы, проходящие вещество эквивалентное 17 см свинца).

Измерение ионизирующей способности жестких частиц дало возможность градуировать всю систему и контролировать ее работу.

После тщательного отбора траекторий, на основании 6000 жестких частиц (30000 значений ионизации) была построена кривая распределения ионизации (фиг. 2). Ширина этой кривой на половине высоты равняется $\pm 32,5\%$.



Фиг. 2.

Из пяти измерений ионизации для каждой частицы в пяти слоях пропорционального счетчика, методом максимума правдоподобия (см. например [3], [4], [5], [6]), находим значения ионизации.

Выбор этого метода обработки объясняется тем, что он дает наилучшие результаты.

Уравнение правдоподобия имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_i)/\partial a_k}{f(x_i)} = 0 \dots [1] \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, l.$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ экспериментальные значения измеряемой величины x с функцией распределения $f(x)$, зависящей от параметров $a_1, a_2, \dots, a_l$.

$f(x)$ функция распределения ионизации жестких частиц, которая считается универсальной функцией параметра x и ищется такое значение величины „ a “ при котором уравнение правдоподобия обращается в нуль.

Согласно распределению Ландау [7] ионизационные потери являются функцией параметра $\frac{I - I_0}{\xi}$, где I_0 — есть наивероятное значение ионизации.

Принимается, что $\xi = \frac{\eta}{\beta^2}$, где

$$\eta = \frac{1,54 \cdot 10^5 \cdot M \Sigma Z}{\Sigma A}; \quad \eta \text{ — есть величина,}$$

зависящая только от параметров пропорционального счетчика (M — это масса толщины вещества на см^2 площади).

При этом функция $f(x)$ принимает вид

$$f\left[\frac{(I - I_0)}{\eta} \beta^2\right] = \varphi[(I - I_0) \beta^2].$$

Предполагается, что наше экспериментальное распределение ионизации является универсальной функцией параметра $(I - I_0) \beta^2$.

При этом функция правдоподобия примет вид

$$\frac{\partial \varphi[(I - I_0) \beta^2] / \partial I_0}{\varphi[(I - I_0) \beta^2]} = - \frac{\varphi'}{\varphi} \beta^2.$$

Кривая $\frac{\varphi'}{\varphi}$ строится графическим путем, исходя из кривой распределения жестких частиц на фиг. 2. Для этого сначала кривая фиг. 2 дифференцируется, а затем строится кривая $\frac{\varphi'}{\varphi}$ путем деления соответствующих ординат.

Имея эту кривую и экспериментальные значения ионизации, методом максимума правдоподобия находится значение ионизации.

Поскольку функция правдоподобия зависит от величины β^2 , то для каждого отдельного случая необходимо одновременно найти согласованные значения I и β^2 . Для этого значения $I_1, I_2, \dots, I_n$ умножаются на произвольно выбранное значение β_1^2 и ищется, указанным выше ме-

тодом, значение $I_0 \beta_1^2$. Если β_1^2 , соответствующее значению I_0 , совпадает со значением β_1^2 , то выбор был правильным. В противном случае этот процесс повторяется до тех пор, пока выбранное и полученное значение β^2 не совпадет.

Согласно формуле [1] ищется такое значение $I_0 \beta^2$, при котором уравнение обращается в нуль.

Для этого кривая $\frac{\varphi'}{\varphi}$ перемещается вдоль оси абсцисс, параллельно себе, и ищется такое ее положение, при котором сумма ординат экспериментальных точек равняется нулю.

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)_{I_1} + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)_{I_2} + \dots + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)_{I_n} = 0.$$

Для осуществления указанной операции построена специальная табличная линейка, имеющая следующую конструкцию. На подвижной части линейки нанесены значения функции $\frac{\varphi'}{\varphi}$, а на неподвижной части значения ионизации в произвольных единицах. Пять значений ионизации I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 , умножаются на предварительно выбранное значение β_1^2 . Полученные значения $I_1 \beta_1^2, I_2 \beta_1^2, I_3 \beta_1^2, I_4 \beta_1^2$ и $I_5 \beta_1^2$ наносятся на неподвижной части линейки. Перемещая подвижную часть линейки и каждый раз суммируя значения цифр, соответствующих точкам нанесенным на неподвижной линейке, находим такое положение подвижной линейки, когда сумма равна нулю. При этом значение I_0 , соответствующее значению функции $\frac{\varphi'}{\varphi} = 0$ и есть искомое значение ионизации,

так как при $I = I_0, \varphi' = 0$. (Параметр I_0 соответствует максимуму кривой распределения $\varphi(I - I_0)$). Для подбора величины β^2 этот процесс повторяется несколько раз.

Обработанные таким путем 600С траекторий жестких частиц дали кривую распределения, показанную на фиг. 3. Ширина этой кривой на половине высоты равна $\pm 16,5\%$, тогда как метод среднего значения и интегрально-дифференциальный метод [8] дают $\pm 27,5\%$ и $\pm 23,0\%$ соответственно.

Для определения величины масс частиц по импульсу и ионизации необходимо построить экспериментальную кривую $p/\mu = f(I)$ где p и μ — импульс и масса частицы.

Для построения этой кривой было отобрано 650 мягких частиц, остановившихся в нижней камере Вильсона ионизационным образом.

Масса этих частиц определяется по их импульсу и пробегу. Затем эти частицы были разбиты на десять групп по значениям p/μ .

Чтобы найти значение ионизации для каждой группы частиц, снова использовался метод максимума правдоподобия, но в качестве исходной функции распределения служило распределение жестких частиц фиг. 3.

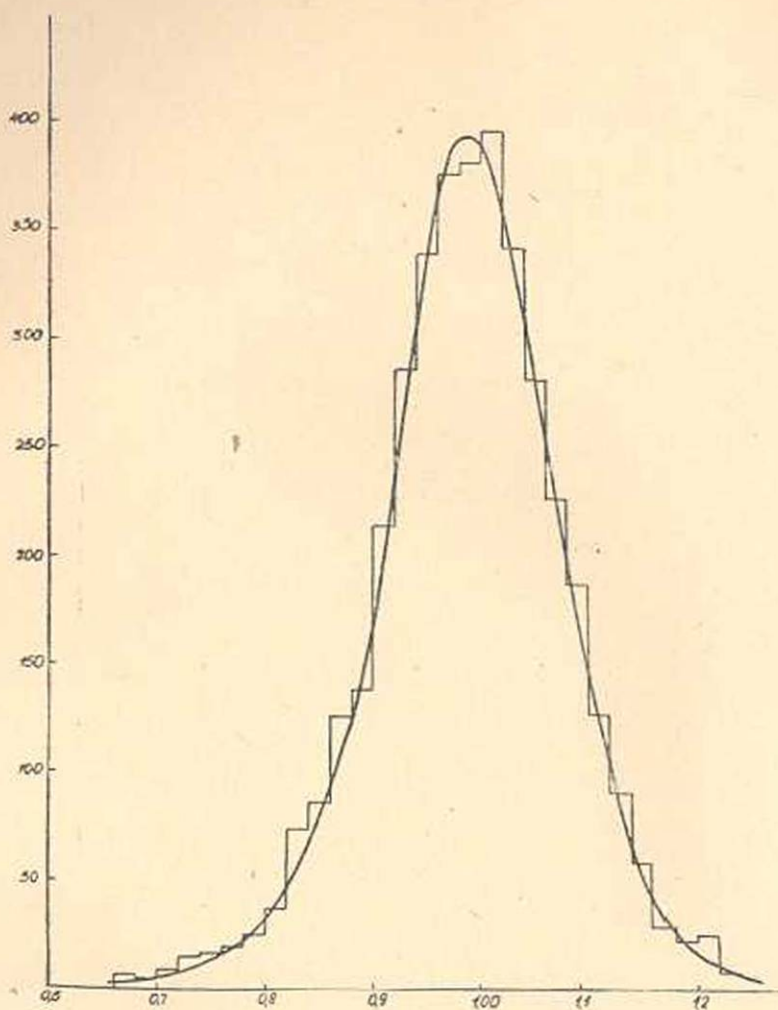


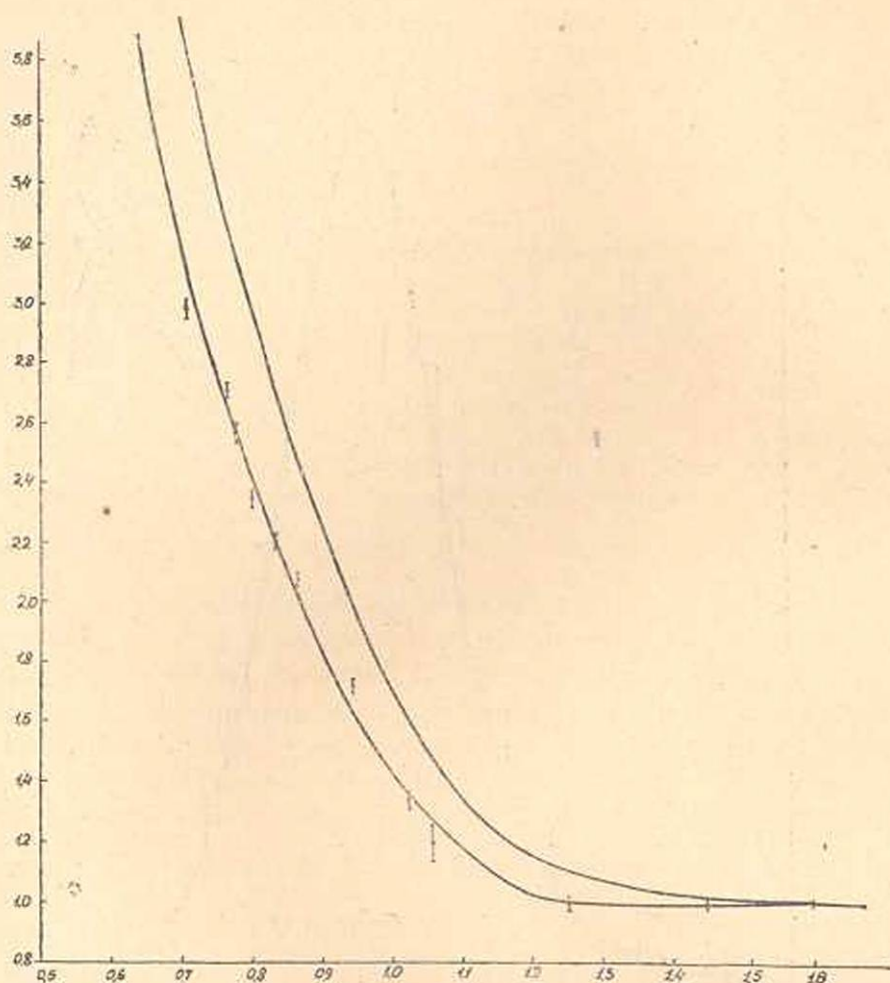
Рис. 3.

Кривая зависимости $p/p = f(I)$ показана на фиг. 4 (кривая „А“). Ошибки определены исходя из дисперсии кривой распределения и числа частиц в данной группе.

$$\Delta = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Для сравнения, на фиг. 4 приведена теоретическая кривая (кривая „Б“).

На фиг. 5 и 6 приведены гистограммы масс для 290 протонов ионизационно остановившихся в пластинках нижней камеры. Массы подсчитаны двумя разными методами. На фиг. 5 массы подсчитаны по импульсу и пробегу, на фиг. 6 по импульсу и ионизации.



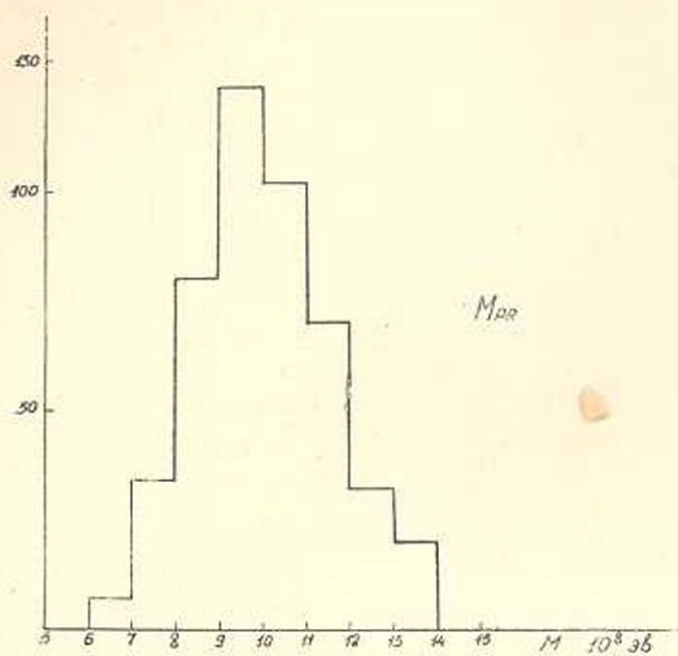
Фиг. 4.

В обоих случаях значение максимума хорошо совпадает со значением массы протона.

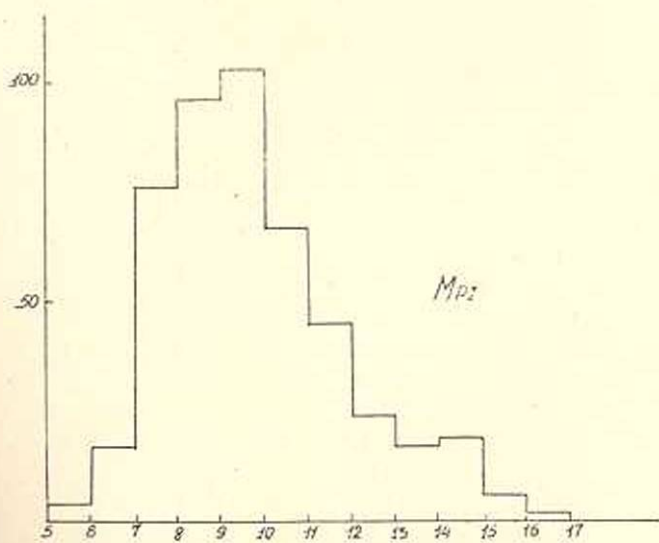
В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность профессору А. И. Алиханяну за постоянный интерес к работе, В. М. Харитонову за руководство работой, а также Г. А. Марикяну за помощь в ее выполнении.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 23 VI 1958



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Լ. Ս. Բաղդասարյան

ԻՈՆԻԶԱՑԻՈՆ ԶԱՓՈՒՄՆԵՐԻ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կոմիտեական ճառագայթման էլեմենտար մասնիկների մասսայի մեծությունը որոշելու համար, մագնիսական մասս-սպեկտրոմետրի միջոցով չափում է մասնիկի իմպուլսի մեծությունը մագնիսական դաշտում և նրա անցած ճանապարհի երկարությունը մինչև կլանիչների մեջ կանգ առնելը: Այս մեթոդի հիմնական թերությունը կայանում է նրանում, որ երբ մասնիկը կանգ է առնում կլանիչների մեջ ոչ իոնիզացիոն կորուստների պատճառով, ապա մասսայի մեծության որոշումը այդ դեպքում ապիս է մեծ շեղումներ. նրա իրական մեծության հետ համեմատած:

Մագնիսական մասս-սպեկտրոմետրում տեղադրված հինգ շերտանոց համեմատական հաշվիչը հնարավորություն է տալիս որոշել մասնիկի իոնիզացիոն հատկությունը: Ունենալով մասնիկի իոնիզացիոն հատկությունը և իմպուլսի մեծությունը մագնիսական դաշտում, կարելի է որոշել մասնիկի մասսայի մեծությունը. անկախ նրա անցած ճանապարհից կլանիչների մեջ:

Քանի որ լուրջ քննարկումներ են անցնում հինգ իոնիզացիոն չափում, մաքսիմալ ճամբարտանմանության մեթոդով որոշում ենք իոնիզացիայի արժեքը [3], [4], [5], [6]: Հոդվածում բերված է այս մեթոդով կատարված հաշվումների մանրամասն նկարագիրը: Եթե իոնիզացիոն մեկ չափում կատարելու դեպքում բաշխման կորի լայնությունը միջին բարձրության վրա հավասար է $\pm 32,5^{\circ}/_{10}$, ապա հինգ չափում կատարելու դեպքում և մաքսիմալ ճամբարտանմանության մեթոդով իոնիզացիայի մեծությունը հաշվելուց հետո, կորի լայնությունը միջին բարձրության վրա ստացվում է $\pm 16,5^{\circ}/_{10}$: Երբ ունենցած հինգ չափումներից իոնիզացիայի մեծությունը որոշում ենք միջին արժեքի կամ ամենափոքր նշանակության [8] մեթոդներով, ապա կորի լայնությունը միջին բարձրության վրա համապատասխանաբար ստացվում է $\pm 27,5^{\circ}/_{10}$ և $\pm 23,0^{\circ}/_{10}$:

$p/\mu = f(I)$ կորի կառուցման համար ընտրվել են 650 մասնիկներ, որոնք իոնիզացիոն կորուստների պատճառով կանգ են առել նեբբեի կամերայի կլանիչների մեջ: Այս կորը հնարավորություն է տալիս որոշել մասնիկի մասսայի մեծությունը, անկախ նրա անցած ճանապարհից կլանիչների մեջ, իմպուլսի և իոնիզացիայի միջոցով:

290 պրոտոնների համար, որոնք կանգ են առել կլանիչների մեջ իոնիզացիոն կորուստների պատճառով, հաշվված են մասսաները իմպուլսի և անցած ճանապարհի, իմպուլսի և իոնիզացիայի միջոցով: Ինչպես երևում է բերված հիստոգրամներից երկու դեպքում էլ հիստոգրամային մաքսիմումի արժեքը լավ համընկնում է պրոտոնի մասսայի արժեքի հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Л. С., Харитонов В. М., Марилян Г. А. «Многоканальный амплитудный анализатор импульсов с логарифмической характеристикой». Известия АН Арм ССР, 3, 1958.

2. Адибян А. И., Шостакович Н. В., Дадаян А. Т., Феодорова В. М., Дерягин Б. Н. „О спектре масс заряженных частиц космического излучения“. ЖЭТФ 6 (12), 1956, 955.
3. Fisher R. A. On an absolute criterion for fitting frequency curves. *Mess. of math.* 41 (1912), 155.
4. Fisher R. A. Theory of statistical estimation. *PCPS*, 22, (1925), 700.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1948.
6. Арлей Н., Бух К. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., 1951.
- * 7. Landau L. On the energy loss of fast particles by ionization. *J. of phys.* 8, 201, (1944).
8. Никитин С. ЖЭТФ, 18, 577 (1948).

ФИЗИКА

Г. В. Бадалян

Наблюдение быстрых дейтронов в системе магнитного спектрометра с двумя камерами Вильсона

В 1954 г. Арагацской высокогорной лабораторией по изучению космических лучей, на высоте 3200 м над уровнем моря, была осуществлена установка, состоящая из магнитного спектрометра сочлененного с 2-мя большими прямоугольными камерами Вильсона [1].

Наличие такого прибора позволяло исследовать не только частицы, идущие из воздуха, но также частицы локально генерированные в веществе одной из камер. Непрерывная эксплуатация этого прибора в течение последующих лет показала, что с его помощью можно получить ценные сведения относительно механизма генерации заряженных космических частиц, в частности π и K мезонов, протонов, дейтронов и т. д.

В настоящей работе приведены некоторые экспериментальные результаты по исследованию дейтронов космического излучения, полученные на такой установке.

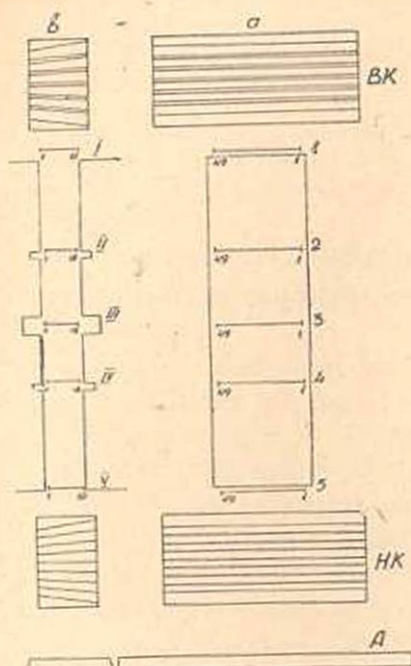
1. Описание прибора

Прибор (фиг. 1) состоит из 3-х основных узлов [1—3]:

1. магнитный спектрометр;
2. нижняя камера Вильсона (Н. К.);
3. верхняя камера Вильсона (В. К.).

Магнитный спектрометр большой разрешающей силы служит для измерения импульсов заряженных космических частиц. Он состоит из большого электромагнита, создающего в межполюсном пространстве размерами $100 \times 30 \times 12$ см однородное магнитное поле вплоть до 19000 гаусс, и фотоскопической системы счетчиков („Телескоп“), расположенной в этом поле. На фиг. 1 приведен разрез прибора в 2-х взаимно перпендикулярных проекциях. Телескоп состоит из пяти рядов тонкостенных счетчиков Гейгера-Мюллера (1—5, проекция α) диаметром 4,6 мм, позволяющих установить пять точек круговой траектории частицы, а следовательно радиус траектории и импульс ($p = 300$ Нр). Ряды 1—5 (т. н. координатные) содержат каждый по 49 счетчиков, приключенных к соответствующим электронным ячейкам с выходными неоновыми лампочками. Кроме того, дополнительно имеются

5 рядов счетчиков (I—V, проекции *b*) т. н. продольные ряды, позволяющие одновременно фиксировать прямолинейную проекцию траектории в плоскости, параллельной магнитному полю.



Фиг. 1.

Измерения проводились при напряженности поля 4500 гаусс. Точность измерения импульса определялась в основном конечными диаметрами счетчиков, рассеянием в стенках счетчиков и незначительными колебаниями магнитного поля. Формула для определения относительной среднеквадратичной ошибки импульса такова (p в единицах $\frac{e\hbar}{c}$):

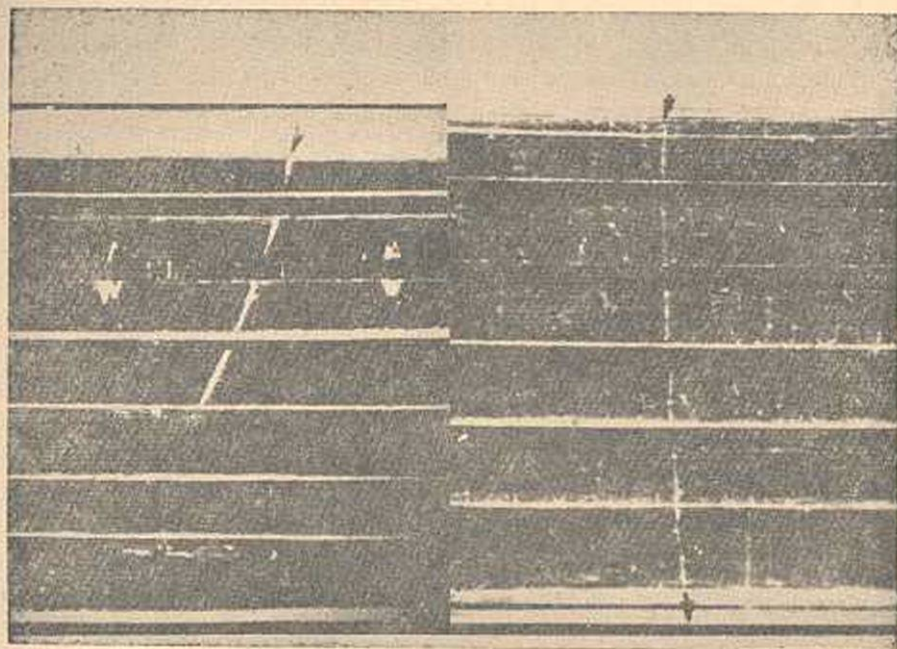
$$\sigma_p = \sqrt{(9,15 \cdot 10^{-11} p)^2 + \left(\frac{0,0262}{\beta}\right)^2 + 0,025^2} \quad (1)$$

Например, дейтроны с импульсами 7×10^8 , 9×10^8 , 11×10^8 и 14×10^8 имеют соответственно ошибки 10,15%, 10,5%, 11,6%, 13,7%, а протоны имеют соответственно—8,15%, 9,4%, 10,9% и 13,4%.

Выходя из магнитного поля, частица попадает в расположенную под полюсами магнита большую прямоугольную многопластинную камеру Вильсона [3] размерами $600 \times 280 \times 180$ мм, служащую для наблюдения остановок (ионизационных или неионизационных) заряженных частиц в веществе камеры. Внутри освещенной области камеры имеются 7 свинцовых пластин толщиной 0,7 см, а также 2 медные 2-х мм пластины.

Если характер остановки частицы ионизационный (с явным ужирением следа к концу пробега, см. фиг. 2а), то по числу пройденных пластин определяется остаточный ионизационный пробег частицы r , а зная заодно и импульс p , можно вычислить массу μ . Интервал пробегов, в котором отбирались ионизационные остановки частиц соответствовал 1,2—5,4 см Pb (с учетом тонкой дюралевой крышки камеры). Точность измерения остаточного пробега почти целиком определяется конечной толщиной пластин: вклад многократного рассеяния, а также флуктуации ионизационных потерь и многократного рассеяния ничтожны для тяжелых частиц и ими можно пренебречь.

Относительная среднеквадратичная ошибка пробега при данной толщине пластин 0,7 см такова:



Фиг. 2.

$$\sigma_r = \frac{0,2}{r} \quad (r \text{ в см Pb}). \quad (2)$$

Если в интересующем нас интервале импульсов разумно аппроксимировать кривую „импульс—пробег“ зависимостью вида $\frac{r}{\mu} = A \left(\frac{p}{\mu} \right)^n$, то решая ее относительно массы, получим удобную формулу для вычисления ошибки в массе. Для протонов и дейтронов, остановившихся в вышеуказанном интервале пробегов, параметр $n \approx 3,0$, относительная среднеквадратичная ошибка в массе, выраженная ошибками импульса и пробега будет:

$$\sigma_p = \sqrt{2,25 \sigma_p^2 + 0,25 \sigma_r^2}. \quad (3)$$

Например, дейтрон со средним импульсом $9 \times 10^8 \frac{\text{эВ}}{c}$ и пробегом 3 см Pb имеет ошибку массы 16,1%, протон со средним импульсом $5,45 \times 10^8 \frac{\text{эВ}}{c}$ и пробегом 3 см Pb имеет ошибку 12%. Такая точность позволяет хорошо отделить дейтроны от протонов (см. ниже массовый спектр).

Под нижней камерой расположен ряд счетчиков антисовпадений, позволяющий регистрировать только частицы, которые останавливаются сами или вместе со своими вторичными продуктами в веществе нижней камеры.

До входа в магнитное поле частица проходит через верхнюю прямоугольную камеру Вильсона таких же размеров, как и нижняя.

В освещенной области верхней камеры крышка и дно имеют толщину $\sim 1,0$ см (латунь), а внутри камеры установлены 5 свинцовых пластин толщиной каждая 1 см и 2 медные пластины по 2 мм толщиной. Таким образом мы имеем возможность наблюдать траекторию частицы до того, как она пройдет через магнитный спектрометр и остановится в нижней камере. Если частица, зарегистрированная установкой, выходит из освещенной области верхней камеры, то можно будет обнаружить звезду, в которой она зародилась, или установить, что она пришла извне. Эффективность наблюдения в верхней камере существенно зависит от импульса частиц [4]. Она значительна для тяжелых частиц (90%) и очень мала для медленных мезонов (22%), большинство которых выходит из торцевых частей верхней камеры и сначала проходит через неосвещенные зоны.

Запуск установки и регистрация кадра производится управляющим импульсом, образованным благодаря совпадению импульсов в координатных рядах 1, 3, 5 и при отсутствии импульса с ряда анти-совпадений (1+3+5-A).

Загорания неоновых лампочек и изображения в камерах Вильсона фотографируются отдельными фотоаппаратами на киноплёнке и, после сопоставления, «сшивания» кадров, поступают на отбор и обработку.

II. Отбор траекторий протонов и дейтронов, спектр масс

При помощи установки, описание которой приведено выше, мы произвели регистрацию траекторий большого числа частиц, испытавших остановку в Н. К., в частности протонов и дейтронов.

Для отбора траекторий были применены следующие критерии:

- а) в плоскости магнитного отклонения траектория частицы имеет по крайней мере четыре точки, укладывающиеся на окружность.
- б) в перпендикулярной плоскости траектория содержит не менее 3-х точек, лежащих на прямой.

в) частица останавливается в пределах освещенной зоны нижней камеры, причем место и характер остановки не вызывают сомнений.

Для большей достоверности характера торможения, остановки в камере брались начиная со 2-ой 7 мм пластины до 7-ой пластины включительно; таким образом можно было легко отделить ионизационные остановки частиц от неионизационных-ядерных, а также от случаев ухода частицы в стекло или толстую часть дна.

Приведенные выше критерии отбора обеспечивают высокую достоверность траектории частицы, такие траектории мы условно относим к I сорту.

Если траектории имеют только 3 точки в плоскости а), или 2 точки в плоскости б), или же характер и место остановки вызывают

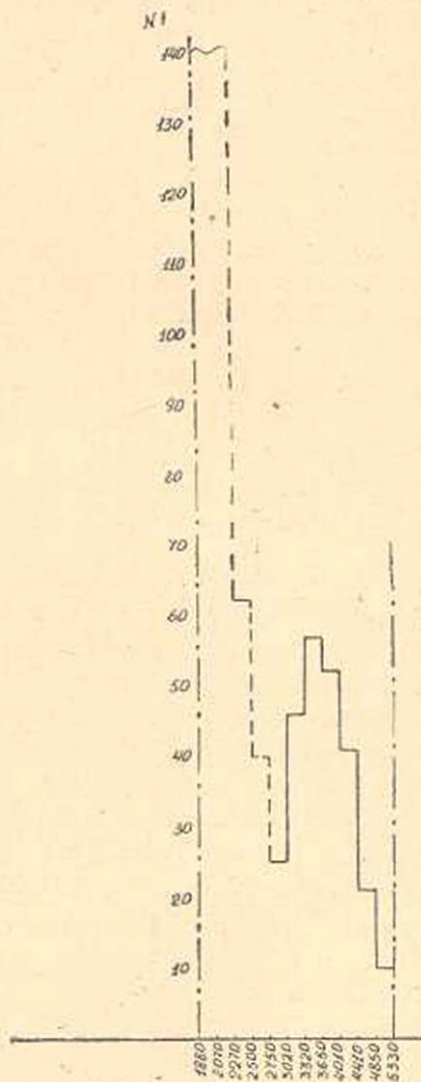
некоторое сомнение, то они менее достоверны и их мы относим ко II сорту. Траектории при неудовлетворении 2-х критерий отбора вообще не брались.

Спектр масс в интервале 1880—5300 m_e тяжелых космических частиц, испытавших ионизационную остановку в пластинах нижней камеры, приведен на фиг. 3. Он построен по траекториям частиц I-го сорта. Видно резко выраженный дейтронный пик с максимумом на 3650 m_e .

Частичное взаимное перекрывание распределений протонов и дейтронов происходит благодаря конечной точности измерения масс (см. формулу (3)), средние стандартные ошибки масс протонов и дейтронов соответственно 220 m_e и 594 m_e , которые хорошо совпадают с ошибками оцененными по полуширине экспериментальных распределений (~ 220 и 590 m_e соответственно). Справа в спектр могли попасть тритоны, но ввиду их незначительности, если мы оборвем спектр дейтронов на массе 5100 m_e (двойная полуширина), вкладом тритонов можно пренебречь. Поэтому, считая спектр дейтронов симметричным, можно определить общее число дейтронов, если количество частиц справа от 3650 m_e до 5100 m_e удвоить. Получается общее число дейтронов I-го сорта ~ 242 шт.

Слева, при заниженных значениях массы, будет существенным хвост протонного распределения, особенно за значением массы 3000 m_e , т. е. на расстоянии, больше чем полуширина дейтронного распределения. Поэтому в дальнейшем, при рассмотрении некоторых количественных соотношений дейтронов, будем, для большей достоверности, исходить только из 224 дейтронов, находящихся в интервале масс 3000—5100 m_e .

Мы зарегистрировали также ~ 86 шт. частиц, которые можно было относить к дейтронам II-го сорта, но эти частицы не введены в



Фиг. 3.

спектр. Количество протонов, зарегистрированных одновременно с дейтронами и введенных в спектр, составляет около 3200.

III. Результаты измерений

Таким образом в интервале пробегов 1,2—5,4 см зарегистрировано 242 дейтронов (I-го сорта) и 3200 протонов. Если проследить траектории частиц в верхней камере, то оказывается, что часть траекторий прослеживается от крышки до дна, и с вычетом случаев генерации в крышке все они принадлежат к частицам идущим из воздуха. Часть траектории берет свое начало в пластинках камеры, это случаи локальной генерации. Имеется также ряд траекторий, которые выходят из неосвещенных зон верхней камеры, или же благодаря различным дефектам снимка (или его отсутствия) вовсе не имеют продолжения в верхней камере.

Относительное содержание дейтронов в вертикальном воздушном потоке протонов

1. Дейтроны и протоны, остановившиеся ионизационным образом в интервале пробегов 1,5—5,3 см свинца.

Чтобы выделить воздушные дейтроны мы оценили число случаев рождения в крышке В. К. Если построить распределение случаев генерации дейтронов по пластинкам верхней камеры, то получается гистограмма, резко возрастающая ко дну камеры. Интерполируя гистограмму до крышки, получаем искомое число. После исправления получается, что из 242 дейтронов ~ 81 явно идут из воздуха. Определяя аналогичным образом число воздушных протонов, получаем 1627. Но эти цифры не представляют истинное соотношение дейтронов и протонов в воздухе, так как во-первых, дейтроны и протоны, остановившиеся в данном интервале пробегов, будут относиться к разным интервалам импульсов, следовательно разные будут у них светосильные поправки [4] и, во-вторых на пути к остановке через вещество В. К. и часть вещества в Н. К. протоны и дейтроны могут испытывать неупругие столкновения с ядрами и выбыть из игры. Так как интересующие нас протоны до входа в В. К. имеют энергию 280—345 Мэв (импульс $7,6-8,6 \times 10^8 \frac{эв}{c}$), то соответствующий пробег неупругого ядерного взаимодействия $\lambda = 245 \text{ г/см}^2 \text{ Pb}$ [5]. Дейтроны до входа в В. К. будут иметь энергию 355—460 Мэв (импульс $12,0-13,9 \times 10^8 \frac{эв}{c}$). Кроме обычного ядерного поглощения, дейтроны могут исчезать благодаря специфическим процессам „срыва“, дифракционного и кулоновского расщепления [6—9], поэтому пробег неупругого ядерного взаимодействия дейтронов должен быть много

меньше, чем протонный. В работах [10—12] рассмотрено поглощение дейтронов при различных энергиях, простирающихся от 75 Мэв до 900 Мэв. В пределах экспериментальных ошибок пробег неупругого ядерного взаимодействия во всем этом интервале остается ~ постоянным и равным $\sim 0,8 \lambda_{\text{геометр}}$.

Для свинца это соответствует $\lambda_d \approx 137 \text{ г/см}^2$. При экспоненциальном законе ослабления соответствующий фактор ослабления есть $\exp(-x/\lambda_d)$, где x есть сумма пройденных пробегов частицы в В. К. ($\sim 87,5 \text{ г/см}^2 \text{ Pb}$ эквивалент) и в Н. К. (в среднем $\sim 3,0 \times 11,4 = 34,2 \text{ г/см}^2 \text{ Pb}$ эквив.) : $x = 122 \text{ г/см}^2$. Все количественные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Частица	Наблюден. число n	Светосила см (4)	Фактор ядерного ослабления	Исправлен. число N	Отношение N_d/N_p
Дейтрон	81	0,8	0,41	246	$0,063 \pm 0,0072^*$
Протон	1627	0,68	0,606	3940	

* Статистическая среднеквадратичная ошибка, вычисленная согласно закону распространения случайных ошибок [13].

2. Дейтроны и протоны, относящиеся к одному и тому же интервалу импульсов

Интервал импульсов воздушных дейтронов до входа в В. К. есть $(12,0 - 13,9) \times 10^8 \frac{\text{эв}}{c}$. Протоны тех же импульсов, пройдя толщину, В. К. будут иметь остаточный импульс в пределах $(10,5 - 12,6) \times 10^8 \frac{\text{эв}}{c}$. Такие протоны могли останавливаться в веществе Н. К. только катастрофически, благодаря неупругим ядерным взаимодействиям.

Наблюдаемое число таких остановок протонов (с поправкой на π^+ мезоны) составляет ~ 300 шт.

Чтобы воспроизвести истинное число протонов в данном интервале импульсов, нужно наблюдаемое число делить на вероятность остановки в веществе Н. К. Кривая вероятности остановки построена у нас аналогичным в (14) образом*. Согласно этой кривой в интересующем нас интервале импульсов $(10,5 - 12,6) \times 10^8 \frac{\text{эв}}{c}$ $w = 0,21$.

Определяя далее светосильные и абсорбционные поправки как выше, получим следующие данные (см. табл. 2).

* При этом использованы некоторые данные, любезно предоставленные нам Н. М. Кочаряном.

Таблица 2

Частица	Наблюден- ное число n	Вероятность остановки w	Светосила с.м [5]	Фактор ядерного ослаб.	Истин. число N	Отношение N_d/N_p
Дейтроны	81	1,0	0,8	0,41	246	$0,086 \pm 0,010^*$
Протоны	300	0,21	0,83	0,606	2850	

* Статистическая среднеквадратичная ошибка.

IV. Обсуждение результатов

Приведенные в предыдущей главе результаты показывают, что нашим прибором в числе ряда других задач можно эффективно регистрировать быстрые дейтроны, причем наличие верхней камеры дает возможность с большой вероятностью отделить воздушные дейтроны от генерированных.

Факт регистрации большего числа воздушных дейтронов (гл. III) говорит о том, что при ядерных взаимодействиях нуклонов в воздухе наряду с другими продуктами образуется и заметное количество энергичных дейтронов, которые и регистрируются детектором.

Вопрос о присутствии дейтронов в равновесном потоке космического излучения на нашей высоте рассматривался ранее в работах [15], [16], [17], [18].

Таблица

Работа	Методика эксперимента	Вещество над установкой	Импульс в воз- духе или остаточ- ный пробег	Доля дейтронов от числа аналог. протонов
[15]	Магнитный масс-спек- трометр	—	1 Бэв/с	4%
[16]	Магнит. спектр+пропорц. счетчик	9 с.м Pb	3,0—6,4 с.м Pb	$8,5 \pm 1,5\%$
[17]	Магнит. спектр+пропорц. счетчик	—	1,15 Бэв/с	8%
[18]	Магнит. спектр+камера Вильсона	6 с.м Pb+20 с.м/с	1,5—3,5 с.м Pb	7—8%
Наши данные	Магнит. спектр с двумя камерами Вильсона	Вещество В. К. 5 с.м Pb+2,4 с.м/Cu	1,2—5,4 с.м Pb	$6,3 \pm 0,72\%$
		(генерация вычтена)	1,2—1,39 Бэв/с	$8,6 \pm 1,0\%$

Для сравнения с нашими данными в таблице 3 приведены некоторые результаты, полученные в вышеупомянутых работах. Полученные нами результаты в пределах экспериментальных ошибок совпадают с [17] и согласуются в большей или меньшей степени (в зави-

симости от методики) с остальными работами. Повидимому, наши данные более точны, так как получены на более совершенной установке и с большей статистикой.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. И. Алиханяну за постоянный интерес к работе и поощрение. Я также благодарен А. Т. Дадабяну и Н. М. Кочаряну за советы и полезную дискуссию.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 13 VI 1958

Հ. Վ. Բաղադյան

ԱՐԱԳ ԴԵՅՏՐՈՆՆԵՐԻ ԴԻՏՈՒՄԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՍՊԵԿՏՐՈՍԵՏՐԸ ՎԷԼՍՈՆԻ ԵՐԿՈՒ ԿԱՄԵՐԱՆԵՐԻ ՇԵՏ ՄԻԱԿՑՎԱԾ ՍԻՍԵՄՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քերված են Վելսոնի երկու կամերաների հետ միակցված մագնիսական սպեկտրոմետրի միջոցով 3200 մ բարձրության վրա կոսմիկական զեկտրոնների զրանցման և ուսումնասիրության մի շարք արդյունքներ: Մանրամասն չարադրված են նոր սարքավորման առավելությունները և հնարավորությունները զեկտրոնները պրոտոններից տարբերելու և օգտվել զեկտրոնները սարքավորման ներսում ծնված զեկտրոններից անջատելու ուղղությամբ: Ցույց է տրված, որ այն օգտվել զեկտրոնները, որոնք անցել են վերին կամերայի միջից (5 սմ կապար + 2,4 սմ արուլը) և կանգ առել ներքին կամերայի միջից 1,2—5,4 սմ Pb վաղքի ինտերվալում, կազմում են նույնպիսի օգտվել պրոտոնների $0,063 \pm 0,0072$ մասը: Այնուհետև, զրանցված օգտվել զեկտրոնների թիվը համեմատված է միևնույն ինպուլսի ինտերվալին $\left(12-13,9 \cdot 10^8 \frac{eV}{c} \right)$ մինչև վերին կամերա մտնելը՝ պատկանող պրոտոնների թվի հետ: Արդյունքում ստացվել են $0,086 \pm 0,010$: Վերջում, ստացված արդյունքները համեմատվել են գրականության մեջ հղած տվյալների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алиханян А. И., Шостакович Н. В., Дадабян А. Т., Федоров В. М., Дерязин Б. Н. ЖЭТФ 31, 955, 1956.
2. Дайон М. И., Федоров В. М., Мерзон Г. И. Пр. и ТЭ № 2, 1956.
3. Дайон М. И., Федоров В. М. ЖТФ, т. XXV, вып. 5.
4. Бадалян Г. В. Изв. АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), т. X, № 6, 1957.
5. Гольданский В. И., Любимов А. Л. и Медведев Б. В. УФН, т. 49, вып. 1, 1953.
6. Власов Н. А. Нейтроны. Москва, 1955.
7. Фейнберг Е. Л. ЖЭТФ, т. 29, вып. 1, 1955.
8. Ахизер А. И., Ситенко А. Г. ЖЭТФ 32, 794, 1957.
9. Dancoff S. M. Phys. rev. 72, 1017, 1947.
10. Camerini U., Fowler P. H., Lock W. O. and Muirhead H. Phil. mag. 41, 413—427, 1950.
11. Любимов В. А. Автореферат диссертации. 1956. Москва.

12. Соловьева Л. П. ЖЭТФ 31, 1086, 1956.
13. Уорсинг А., Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных ИЛ, Москва, 1953.
14. Кочарян Н. М., Саакян Г. С., Айвазян М. Т., Киракосян Э. А. и Александян А. С. Изв. АН СССР, т. 19, 515, 1955.
15. Кочарян Н. М. Докт. диссертация, Ереван 1954.
16. Марибян Г. А. Диссертация, Ереван, 1954.
17. Айвазян М. Т. Изв. АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), т. 9, 91, 1956.
18. Дайон М. И. ДАН СССР, т. 101, № 6, 1955.

Р. С. Оганесян

О гравитационной неустойчивости плоскопараллельного слоя проводящей жидкости при наличии магнитного поля

В настоящей работе рассмотрен вопрос о гравитационной неустойчивости плоскопараллельного проводящего жидкого слоя бесконечной длины по отношению к поперечным колебаниям в собственном поле гравитационных сил при наличии магнитного поля, перпендикулярного к его плоскости. Исследование проводилось при помощи математического аппарата магнитной гидродинамики в рамках линейного приближения, предполагая бесконечную электропроводность гравитирующей среды.

Метод исследования в основном близок к методу Чандрасекара и Ферми [1]. Установлено, что рассматриваемый слой устойчив по отношению к поперечным колебаниям любой длины, если напряженность магнитного поля превышает некоторое критическое значение. В противном случае, начиная с некоторого определенного значения длины возмущения слой становится неустойчивым и распадается.

1. Как известно, в астрофизике неоднократно рассматривались устойчивость систем, состоящих из сжимаемой гравитирующей массы в виде плоскопараллельного слоя. Необходимость такого рассмотрения вытекает из того факта, что многие космические системы можно представить приблизительно в виде плоского слоя. На основе исследования неустойчивости слоя в астрофизике делаются космогонические выводы относительно происхождения нашей солнечной системы, Галактики и т. д.

Вообще говоря, исследование устойчивости проводится не только по отношению систем, состоящих из сжимаемой гравитирующей массы, но и по отношению систем, состоящих из несжимаемой (жидкой) массы. Поэтому исследование гравитационной устойчивости (соответственно и неустойчивости) конфигурации в виде жидкого плоскопараллельного слоя в известной мере может оказаться необходимым, потому что найдет возможное применение в астрофизике и, вообще, представляет определенный интерес.

Факт существования магнитных полей в космическом пространстве приводит к необходимости учета электромагнитных сил наряду с

гравитационными. Учет электромагнитных сил в космических условиях может резко изменить картину движения и гравитационной неустойчивости, поскольку в космическом пространстве материя представляет собой высокоионизированную плазму и обладает малой плотностью.

В последнее время появился ряд работ о равновесии и устойчивости космических невращающихся жидких систем (шар, эллипсоид, цилиндр и т. д.) при наличии магнитного поля [2, 3, 4]. Как мы увидим далее, учет магнитного поля резко изменит картину гравитационной неустойчивости проводящего жидкого слоя. Нами будет рассмотрен тот случай, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости слоя.

Представим себе жидкий плоскопараллельный слой бесконечной длины с толщиной $2h$, перпендикулярно к плоскости которого действует однородное магнитное поле напряженности H_0 . Выбираем систему прямоугольных координат так, чтобы горизонтальная ось x совпала с невозмущенным верхним уровнем слоя, а ось y была направлена вертикально вверх.

Предположим, что жидкий слой подвергается некоторому малому возмущению симметрично относительно центральной плоскости $y = -h$. Уравнение возмущенной поверхности слоя в выбранной системе координат напомним в виде:

$$y = f(x) \quad (1)$$

$f(x)$ — малое ($|f(x)| \ll h$), но произвольное возмущение.

По теореме Фурье функция $f(x)$ может быть разложена в ряд, состоящий из членов вида $a \cos kx$, где a — амплитуда, k — волновое число, принимающее любое значение в интервале $(0, \infty)$.

Таким образом, каждый определенный член этого ряда типа $a \cos kx$ представляет отдельную гармонику, так что исследование устойчивости или неустойчивости слоя можно провести путем рассмотрения отдельных гармоник.

Итак, предположим, что уравнение возмущенной поверхности имеет вид:

$$y = a \cos kx. \quad (2)$$

Ввиду симметричности задачи относительно центральной плоскости $y = -h$ можно ограничиться рассмотрением только верхнего полуслоя. Чтобы судить о гравитационной устойчивости слоя по отношению к возмущениям типа (2), необходимо подсчитать изменение суммарной (потенциальной и магнитной) энергии, обусловленное перераспределением жидкой массы вследствие возмущения. Если изменение суммарной энергии окажется положительным, тогда слой будет устойчивым. В противном случае, слой становится неустойчивым и распадается на отдельные образования. Другими словами, система гравитирующей массы может распадаться на отдельные образования в том случае, если этот распад приводит систему к энергетически более выгодному состоянию.

2. Для подсчета изменения потенциальной энергии следует уста-

новить гравитационный потенциал возмущенного слоя, свободная поверхность которого определяется уравнением (2). Гравитационный потенциал внутри ($\rho \neq 0$) и вне ($\rho = 0$) возмущенного слоя можно найти путем решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 4\pi G\rho$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

при определенных граничных условиях, о которых будем говорить ниже. Здесь G — гравитационная постоянная, ρ — макроскопическая плотность жидкой массы, которая считается величиной постоянной.

Решения уравнений (3) соответственно будем искать в виде:

$$V = V_0 + \delta V; \quad U = U_0 + \delta U. \quad (4)$$

Где V_0 и U_0 являются решениями уравнений (3) в равновесном состоянии, которые в выбранной системе координат будут:

$$V_0 = 2\pi G\rho(h+y)^2; \quad (5)$$

$$U_0 = 4\pi G\rho y + 2\pi G\rho h^2.$$

а δV и δU являются некоторыми добавками к V_0 и U_0 . Можно представить, что эти добавочные потенциалы появляются вследствие наличия некоторой „возмущенной массы“, располагающейся на поверхности недеформированного слоя с поверхностной плоскостью [5, 6]:

$$\sigma = \rho y(x) = \rho a \cos kx. \quad (6)$$

В подобном представлении законно требовать, чтобы добавочные потенциалы, удовлетворяли уравнениям Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \delta V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta V}{\partial y^2} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \delta U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta U}{\partial y^2} = 0,$$

и граничным условиям вида:

$$\begin{aligned} (\delta V)_{y=0} &= (\delta U)_{y=0} \\ \left(\frac{\partial \delta V}{\partial y} \right)_{y=0} - \left(\frac{\partial \delta U}{\partial y} \right)_{y=0} &= -4\pi G\sigma. \end{aligned} \quad (8)$$

Решения для δV и δU можно представить в виде:

$$\delta V = aA \cosh k(h+y) \cos kx; \quad (9)$$

$$\delta U = aB e^{-ky} \cos kx,$$

где A и B — неизвестные константы, подлежащие определению (δV дол-

жен удовлетворять также условию $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$. Граничные условия (8) с точностью до первой степени амплитуды приводят к следующей системе уравнений относительно неизвестных констант A и B :

$$Achkh = B; \quad (10)$$

$$Achkh + B = -\frac{4\pi G\rho}{k},$$

откуда

$$A = \frac{B}{chkh}; \quad B = -\frac{4\pi G\rho}{k} \cdot \frac{1}{1 + thkh}. \quad (11)$$

Таким образом, потенциал возмущенного слоя в рассматриваемом приближении будет:

$$V(x, y) = 2\pi G\rho(h + y)^2 + aAchkh(h + y)\cos kx; \quad (12)$$

$$U(x, y) = 2\pi G\rho h^2 + 4\pi G\rho hy + aBe^{-ky}\cos kx,$$

где A и B определяются через (11).

Изменение потенциальной энергии можно подсчитать несколькими способами. Однако, более целесообразно (как это было показано в работе [7]), изменение потенциальной энергии, приходящееся на единицу длины слоя, подсчитать по формуле [6]:

$$\delta\Omega = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda |V|_{y(x)}^2 dx, \quad (13)$$

где $|V|_{y(x)}$ — выражение потенциала на профиле свободной поверхности, а λ — поверхностная плотность так называемой возмущенной массы.

Подставляя соответствующие значения из (12), (11), (6), (2) в (13), получим:

$$\delta\Omega = \frac{1}{2\lambda} \left\{ 2\pi G\rho \int_0^\lambda (h + a\cos kx)^2 \rho a \cos kx dx - \frac{4\pi G\rho}{kchkh} \cdot \frac{1}{1 + thkh} \int_0^\lambda chkh (h + a\cos kx) \rho a \cos kx dx \right\}.$$

С точностью до второго порядка относительно амплитуды, найдем:

$$\delta\Omega = \pi G\rho^2 h a^2 \left[1 - \frac{1}{z(1 + thz)} \right], \quad (14)$$

где введено обозначение

$$z = kh = \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

3. Теперь переходим к подсчету изменения магнитной энергии. В магнитной гидродинамике установлено, что, если в среде с бесконечной электропроводностью существует магнитное поле, то перемещение магнитных силовых линий относительно среды невозможно. Следовательно, магнитные силовые линии деформируются, оставаясь как бы „приклеенными“ к среде [8]. Колебания магнитных силовых линий приводят к изменению напряженности магнитного поля, следовательно, и к изменению магнитной энергии.

Предположим, что магнитное поле направлено вертикально вверх по оси y . Изменение напряженности магнитного поля происходит как внутри, так и вне рассматриваемой среды. Существует определенная связь между изменением напряженности магнитного поля и вектором смещения ($\vec{\xi}$), характеризующим перераспределение жидкой массы. В несжимаемой среде вектор $\vec{\xi}$ удовлетворяет уравнению $\text{div} \vec{\xi} = 0$ [1].

Следовательно, вектор $\vec{\xi}$ можно представить в виде:

$$\vec{\xi} = -\text{grad} \Phi. \quad (15)$$

Где Φ является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

Установив поле вектора смещения $\vec{\xi}$, можно найти изменение вектора напряженности магнитного поля внутри слоя $\vec{h}_i$ по формуле:

$$\vec{h}_i = (\vec{H}_0 \text{ grad}) \vec{\xi} \quad (17)$$

установленной в магнитной гидродинамике [6]. Напряженность магнитного поля внутри возмущенного слоя будет:

$$\vec{H}_i = \vec{H}_0 + (\vec{H}_0 \text{ grad}) \vec{\xi}. \quad (18)$$

Изменение вектора напряженности магнитного поля ($\vec{h}_e$) вне рассматриваемой среды можно представить в виде:

$$\vec{h}_e = -\text{grad} \Psi, \quad (19)$$

где $\Psi = \Psi(x, y)$ есть магнитоэстатический потенциал, являющийся решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (20)$$

Вне возмущенного слоя напряженность будет:

$$\vec{H}_e = \vec{H}_0 - \text{grad} \Psi. \quad (21)$$

Представим решение (16) в виде:

$$\Phi(x, y) = A \text{ch} k(h + y) \cos kx, \quad (22)$$

где A — некоторая константа, подлежащая определению.

Соответствующие компоненты по осям координат вектора смещения $\vec{\xi}$, согласно (15) будут:

$$\xi_x = Akchkh(h+y)\sin kx; \quad (23)$$

$$\xi_y = -Akshkh(h+y)\cos kx.$$

На уровне $y=0$, компонента ξ_y должна совпадать с $a\cos kx$, т.е.

$$[-Akshkh(h+y)\cos kx]_{y=0} = a\cos kx.$$

Отсюда найдем неизвестную константу:

$$A = \frac{a}{kshkh}. \quad (24)$$

С помощью (17), (23) и (24) найдем:

$$h_{ix} = H_{oy} \frac{\partial \xi_x}{\partial y} = akH_0 \frac{\text{sh}k(h+y)}{\text{sh}kh} \sin kx; \quad (25)$$

$$h_{iy} = H_{oy} \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = akH_0 \frac{\text{ch}k(h+y)}{\text{sh}kh} \cos kx.$$

Изменение магнитной энергии внутри возмущенного слоя, приходящееся на единицу длины, подсчитывается по формуле:

$$\delta M_l = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \int_{-h}^0 (\vec{H}_0 + \vec{h}_i)^2 dy - \int_{-h}^0 H_0^2 dy \right\} dx.$$

Подставляя в последнюю формулу соответствующие значения из (25), получим:

$$\begin{aligned} \delta M_l = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{-h}^0 H_0^2 dy - \int_{-h}^0 H_0^2 dy + \frac{2akH_0^2}{\text{sh}kh} \int_{-h}^0 \text{ch}k(h+y) \cos kx dy + \right. \\ \left. + \frac{a^2 H_0^2 k^2}{\text{sh}^2 kh} \int_{-h}^0 \left[\text{sh}^2 k(h+y) \sin^2 kx + \text{ch}^2 k(h+y) \cos^2 kx \right] dy \right\} dx. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование с точностью до a^2 включительно, найдем:

$$\delta M_l = \frac{a^2 z \text{ch} z H_0^2}{8\pi h \text{sh} z} + \frac{a^2 z \text{ch} z H_0^2}{16\pi h \text{sh} z}, \quad (26)$$

где $z = kh$.

Представим решение уравнения (21) для магнитостатического потенциала вне возмущенного слоя в виде:

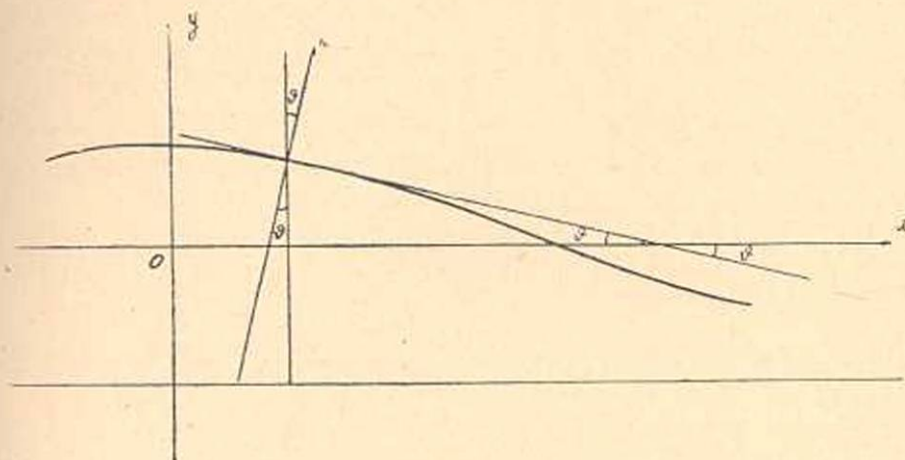
$$\Psi(x, y) = -Bae^{-ny} \cos kx. \quad (27)$$

Константу B найдем из условия непрерывности нормальной компоненты:

$$\left\{ h_{ix} \cos(\dot{n}x) + (H_0 + h_{iy}) \cos(\dot{n}y) \right\}_{y(x)} =$$

$$= \left\{ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos(\dot{n}x) + H_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos(\dot{n}y) \right\}_{y(x)}. \quad (28)$$

Легко видеть, что (см. фиг. 1).



Фиг. 1.

$$(\dot{n}y) = \varphi; \quad (\dot{n}x) = \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

где ϑ есть угол, образованный касательной с осью x .
При малых амплитудах:

$$-\operatorname{tg} \vartheta = -\vartheta = \frac{dy}{dx} = -ak \sin kx.$$

Следовательно,

$$\cos(\dot{n}x) = \sin(ak \sin kx) = ak \sin kx + \dots \quad (29)$$

$$\cos(\dot{n}y) = \cos(ak \sin kx) = 1 - \frac{a^2 k^2 \sin^2 kx}{2!} + \dots$$

Из (28) и (29) с точностью до a , найдем:

$$B = -H_0 \operatorname{cth} kh. \quad (30)$$

Компоненты вектора $\vec{h}_e$ примут вид:

$$h_{ey} = akH_0 \operatorname{cth} ze^{-ky} \cos kx; \quad (31)$$

$$h_{ex} = akH_0 \operatorname{cth} ze^{-ky} \sin kx.$$

Изменение магнитной энергии вне гравитирующей среды можно подсчитать по формуле:

$$\delta M_e = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \left[\int_0^{\lambda} \int_{\cos \chi}^{\pi} (\vec{H}_0 + \vec{h}_e)^2 dy - \int_0^{\lambda} H_0^2 dy \right] dy \right\}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) найдем:

$$\delta M_e = -\frac{a^2 H_0^2 z \operatorname{ch} z}{8\pi h \operatorname{sh} z} + \frac{a^2 H_0^2 z \operatorname{cth}^2 z}{16\pi h}. \quad (33)$$

Складывая (26) и (33), получим изменение магнитной энергии:

$$\delta M = \delta M_i + \delta M_e = \frac{a^2 H_0^2}{16\pi h} z \operatorname{cth} z (1 + \operatorname{cth} z). \quad (34)$$

4. Объединяя результаты (14) и (34), получим общее изменение гравитационной и магнитной энергии:

$$\delta E = \delta \Omega + \delta M = \pi G \rho^2 h a^2 F_s(z), \quad (35)$$

где введено обозначение

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1 + \operatorname{th} z)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 z \operatorname{cth} z (1 + \operatorname{cth} z); \quad (36)$$

(в дальнейшем индекс „нуль“ при H не пишется).

$$H_s = 4\pi \rho h \sqrt{C}. \quad (37)$$

H_s — характеристическая константа, имеющая размерность напряженности магнитного поля.

Об устойчивости или неустойчивости слоя можно судить по знаку функции $F_s(z)$. При некоторых конкретных значениях параметра H/H_s вид кривых $F_s(z)$ представлен на фиг. 2. Асимптотические значения функции $F_s(z)$ имеют следующий вид:

$$1. \text{ при } z \rightarrow \infty \quad F_s(z) \rightarrow \infty; \quad (38)$$

$$2. \text{ при } z \rightarrow 0$$

$$F_s(z) = 1 - \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \frac{1}{1+z} + \frac{\left(\frac{H}{H_s} \right)^2 - 1}{z(1+z)} \quad (39)$$

Из последнего выражения видно, что при малых z знак функции зависит от отношения H/H_s .

Действительно, из (38) и (39) видно, что

$$\text{при } H/H_s \geq 1 \quad F_s(z) > 0, \text{ для любых } z;$$

$$\text{при } H/H_s < 1 \quad F_s(z) > 0, \text{ если } z > z_s;$$

$$F_s(z) < 0, \text{ если } z < z_s,$$

где z_s является единственным положительным корнем уравнения:

$$F_s(z) = 1 - \frac{1}{z(1 + \operatorname{th} z)} + \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 z \operatorname{cth} z (1 + \operatorname{cth} z) = 0. \quad (40)$$

Решение этого уравнения можно провести графическим путем. Однако, имея в виду, что при $H_0 = 0$, $z_s = 0,64$ и при стремлении H_0 к H_s численное значение корня z_s уменьшается (см. также фиг. 2), можно

приблизительно удовлетвориться решением следующего алгебраического уравнения второй степени относительно z :

$$xz^2 + \beta z + c = 0$$

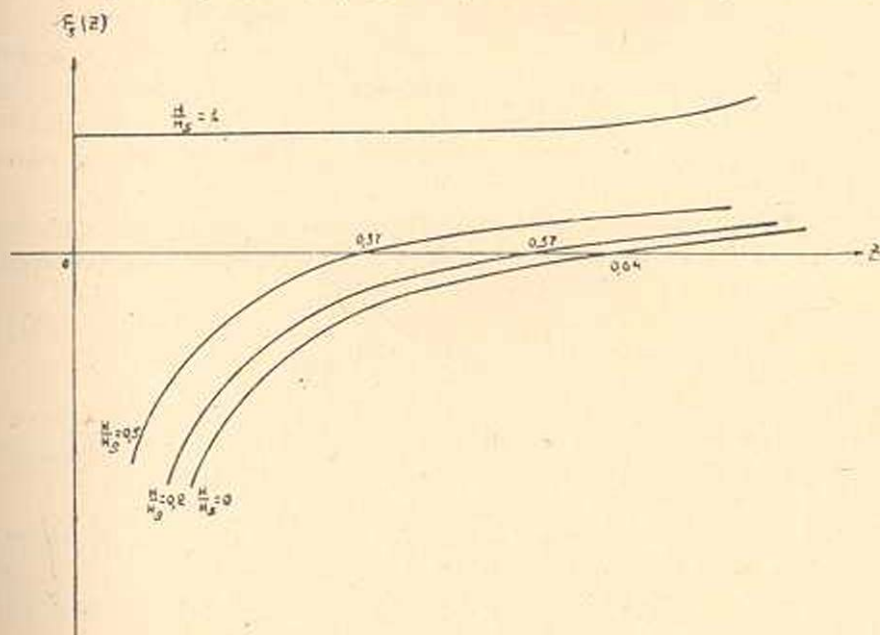
$$z = 1 + \frac{5}{3} \left(\frac{H}{H_s} \right)^2; \quad \beta = \left[1 + 2 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad c = \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 - 1,$$

которое получается путем замены гиперболических функций, встречающихся в уравнении (40), их главными значениями при $z \rightarrow 0$.

Полученные выше результаты приводят к следующим выводам:

а) При $H > H_s = 4\pi\rho h\sqrt{G}$ слой устойчив по отношению к поперечным возмущениям любой длины, поскольку при этом деформация сопровождается увеличением суммарной (гравитационной и магнитной) энергии ($\delta E > 0$). Иными словами, все гармоники возмущения в данном случае являются устойчивыми.

б) При $H < H_s = 4\pi\rho h\sqrt{G}$ могут появляться как устойчивые, так



Фиг. 2.

и неустойчивые гармоники. Все гармоники для которых $z < z_s$, являются неустойчивыми, они приводят к уменьшению суммарной энергии. Гармоники, удовлетворяющие условию $z > z_s$ устойчивы. Другими словами, слой становится неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям, если длина периодической структуры свободной поверхности превышает некоторое критическое значение ($\lambda > \lambda_s$).

где λ_s определяется формулой:

$$\lambda_s = \frac{2\pi h}{z_s},$$

z_s , следовательно и λ_s зависят от параметров h , H/H_s , и не зависят от плотности среды.

в) При $z = z_s$, $\delta E = 0$, следовательно, слой с вполне определенной длиной ($\lambda = \lambda_s$), периодической структуры свободной поверхности представляет собою конфигурацию изоэнергетическую по сравнению с плоским слоем.

г) При $H \rightarrow H_s$ область неустойчивых гармоник сокращается (см. фиг. 2) и при $H = H_s$ появление таких гармоник исключается.

Важно отметить, что изменение магнитной энергии положительно ($\delta M > 0$) при любых λ , следовательно, неустойчивость слоя обусловлена характерной особенностью дальнего и коллективного взаимодействия гравитационных сил [9].

Таким образом, магнитное поле оказывает стабилизирующее воздействие, передает жидкому проводящему слою гибкость, и деформация при $H > H_s$ приобретает как бы "упругий" характер.

5. Целесообразно доказать, что все устойчивые гармоники ($z > z_s$) приводят к периодическому изменению амплитуды во времени, а при неустойчивых гармониках амплитуда неограниченно возрастает и слой распадается на отдельные части.

Предполагая зависимость амплитуды от времени, найдем уравнение движения с помощью функции Лагранжа.

Кинетическую энергию движения жидких частиц, приходящуюся на единицу длины возмущенного слоя, можно вычислить по формуле:

$$\delta T = \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \int_{-h}^{a \cos kx} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (41)$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей, который, ввиду предположения несжимаемости и невязкости жидкой массы, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (42)$$

Потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ должен удовлетворять условию

$$\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} = 0,$$

означающему отсутствие вертикальных скоростей жидких частиц на центральной плоскости $y = -h$. Учитывая справедливость последнего требования, решение (42) представим в виде:

$$\varphi(x, y) = A \cosh k(h + y) \cos kx. \quad (43)$$

Постоянную A можно определить из условия:

$$\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} = \frac{dy}{dt}, \quad \text{где } y = a \cos kx.$$

Отсюда найдем

$$A = -\frac{1}{kshkh} \frac{da}{dt}. \quad (44)$$

Следовательно, решение (43) примет вид:

$$\varphi(x, y) = -\frac{da}{dt} \frac{\operatorname{ch} k(h+y)}{k \operatorname{sh} kh} \cos kx. \quad (45)$$

Находя отсюда $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и подставляя в выражение кинетической энергии (41), получим:

$$\delta T = \rho \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 kh} \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-h}^h [\operatorname{sh}^2 k(h+y) \cos^2 kx + \operatorname{ch}^2 k(h+y) \sin^2 kx] dx dy.$$

Проводя вычисления в рассматриваемом приближении, найдем:

$$\delta T = \frac{h \rho \operatorname{ch} z}{4 z \operatorname{sh} z} \left(\frac{da}{dt} \right)^2. \quad (46)$$

С помощью (46) и (36) составим функцию Лагранжа:

$$L = \delta T - \delta E = \frac{h \rho}{4 z} \operatorname{cth} z \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \pi G \rho^2 h F_s(z) a^2.$$

Имея в виду уравнения движения в обобщенных координатах в форме Лагранжа, получим:

$$\ddot{a} + 4\pi G \rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z) a = 0. \quad (47)$$

Решение этого уравнения будет:

$$a = \operatorname{const} \cdot \exp \{ \pm p t \}, \quad (48)$$

где

$$p^2(z) = -4\pi G \rho \frac{z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} F_s(z). \quad (49)$$

На фиг. 3 представлен вид кривых функции $(4\pi G \rho)^{-1} p^2(z)$ при некоторых конкретных значениях параметра H/H_s .

Для устойчивых гармоник ($z > z_s$), $p(z)$ будет чисто мнимой величиной. Это приводит к периодическому изменению амплитуды во времени. А периодичность наступает при $z < z_s$, так как $p(z)$ становится действительной величиной.

Очень существенно отметить тот факт, что среди неустойчивых гармоник ($z < z_s$) имеется гармоника, обладающая максимальной неустойчивостью.

Действительно, из (49) видно, что $p^2(z) = 0$ при $z = 0$ и $z = z_s$ следовательно, существует такое значение z_m , при котором функция $p(z)$ максимальна (см. также фиг. 3), а z_m является единственным положительным корнем уравнения:

$$\frac{d}{dz} \{ z \operatorname{th} z F_s(z) \} = 0. \quad (50)$$

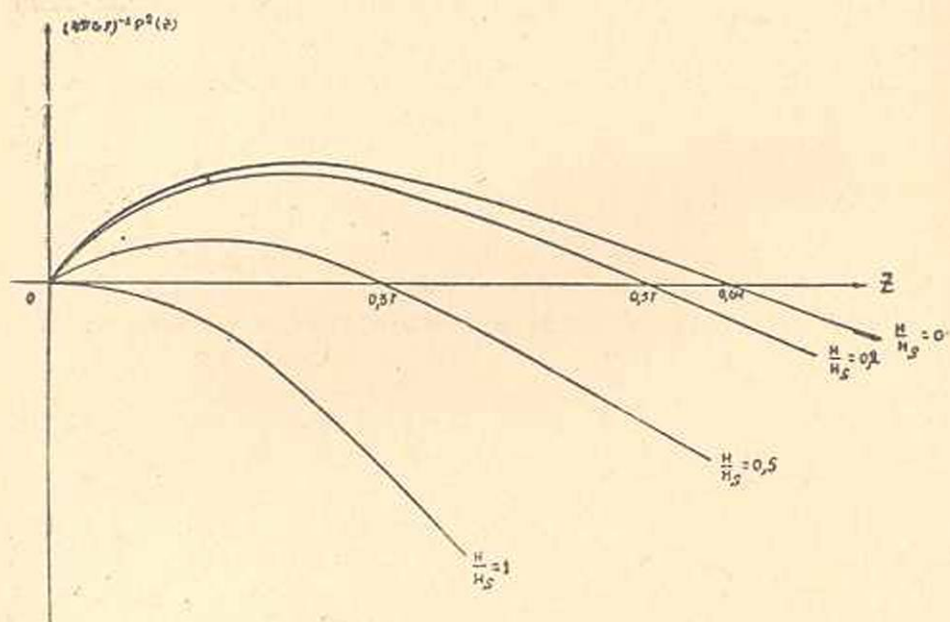
Выполняя дифференцирование, заменяя гиперболические функции первыми членами разложения при малых z и отбрасывая члены содержащие z выше второй степени, получим:

$$\alpha' z^2 + \beta' z + C = 0$$

где

$$\alpha' = \left[2 + 3 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad \beta' = \left[3 + 3 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right]; \quad C = \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 - 1.$$

Искомое значение z_m приблизительно будет положительным корнем этого уравнения. Для нахождения более точного значения z_m придется уравнение (50) решать графическим методом.



Фиг. 3.

Эта гармоника называется максимально неустойчивым, так как она проявляется прежде всего среди неустойчивых гармоник и ее амплитуда нарастает наиболее быстро.

Можно утверждать, что $\lambda_m = \frac{2\pi h}{z_m}$ приблизительно выражает горизонтальную длину тех «частей», на которые распадается слой. Максимальное значение функции $p(z)$ (обозначим его через p_m) представляет время релаксации, необходимое для проявления неустойчивости.

6. Рассмотрим конкретный пример для иллюстрации полученных результатов. Возьмем Галактический слой, принимая $h = 100$ пс; $\rho = 2 \cdot 10^{-23}$ г/см³.

При этом найдем:

$$H_s = 4\pi\rho h \sqrt{C} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ гаусс.}$$

Следовательно, Галактический слой будет устойчивым по отношению к поперечным возмущениям любой длины, если $H > 2 \cdot 10^{-5}$ гаусс.

Когда $H < 2 \cdot 10^{-5}$ гаусс и $\lambda > \lambda_s$, наступает неустойчивость.

Для некоторых конкретных значений отношения H/H_s , найдены

безразмерные величины z_s ; z_m ; $p_m (4\pi G \rho)^{-1/2}$ и соответствующие им значения λ_s ; λ_m ; p_m^{-1} (см. таблицы 1 и 2).

Анализ численных данных, приведенных в таблице 2, действительно показывает, что с ростом напряженности магнитного поля от

Таблица 1

Зависимость безразмерных величин

 z_s ; z_m ; $p_m (4\pi G \rho)^{-1/2}$
от отношения H/H_s

H/H_s	z_s	z_m	$p_m (4\pi G \rho)^{-1/2}$
0	0,64	0,3	0,371
0,1	0,62	0,276	0,366
0,2	0,58	0,261	0,351
0,5	0,37	0,175	0,256
0,6	0,29	0,141	0,212
0,9	0,07	0,037	0,0648

Таблица 2

Зависимость λ_s ; λ_m ; p_m^{-1} от напряженности магнитного поля

H (гаусс)	λ_s (парсек)	λ_m (парсек)	p_m^{-1} (год)
0	$0,981 \cdot 10^3$	$2,093 \cdot 10^3$	$2,085 \cdot 10^7$
$0,2 \cdot 10^{-5}$	$1,013 \cdot 10^3$	$2,275 \cdot 10^3$	$2,114 \cdot 10^7$
$0,4 \cdot 10^{-5}$	$1,083 \cdot 10^3$	$2,406 \cdot 10^3$	$2,205 \cdot 10^7$
10^{-5}	$1,637 \cdot 10^3$	$3,588 \cdot 10^3$	$3,017 \cdot 10^7$
$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,165 \cdot 10^3$	$4,454 \cdot 10^3$	$1,650 \cdot 10^7$
$1,8 \cdot 10^{-5}$	$8,971 \cdot 10^3$	$1,697 \cdot 10^4$	$1,150 \cdot 10^8$

нуля до критического значения H_s возрастают длины неустойчивых волн, максимально неустойчивых гармоник и время релаксаций, необходимых для проявления неустойчивости.

Если во всех предыдущих результатах приравнять $H = 0$, получим решение задачи о гравитационной устойчивости (соответственно и неустойчивости) слоя в собственном поле гравитационных сил. При этом обычная неустойчивость наступает тогда, когда длина возмущения почти в пять раз превышает толщину слоя ($\lambda_s = 4,9d$; d — толщина слоя). Длина волны максимально устойчивой гармоники — порядка $\lambda_m = 10,9d$, а время релаксации — порядка $2,085 \cdot 10^7$ лет.

Отношение $\lambda_m/d = 10,9$ показывает, что образования, возникающие в результате гравитационной неустойчивости слоя, далеко не имеют круговых сечений. Они вытянуты вдоль слоя [11].

Постепенное увеличение плотности Галактического слоя может ускорить время, необходимое для развития неустойчивости. Если возраст рассматриваемого слоя превышает вычисленное время развития неустойчивости, необходимо предположить о существовании сильных магнитных полей.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. А. А. Власову за ценные указания.

Московский Государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ленинградский педагогический институт
им. М. М. Налбандяна.

Բ. Ս. Հովհաննիսյան

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ ՇԵՂՈՒԿ ՀԱՂՈՐԴԻԶ
ՀԱՐԹ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՇԵՐՏԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված է անասման երկարություն ունեցող հեղուկ հաղորդիչ շերտի գրավիտացիոն անկայունության հարցը լաճական տատանումների նկատմամբ իր սեփական գրավիտացիոն և շերտին ուղղահայաց մագնիսական դաշտերում: Ուսումնասիրությունը կատարված է մագնիսական հիգրոդինամիկայի մաթեմատիկական ապարատի օգնությամբ, զմային մոտավորության շրջանակներում, հեղուկ գրավիտացիոն մասնալին վերադրելով անասման մեծ էլեկտրահաղորդունակություն:

Ուսումնասիրությունը կատարված է հիմնականում Չանդրասեկարի և Ֆերմիի մեթոդով [1]: Հոդվածում ապացուցված է, որ ուսումնասիրվող շերտը կալուն է ցանկացած ալիքի երկարություն ունեցող լաճական տատանումների նկատմամբ, եթե միայն մագնիսական դաշտի լարվածությունը գերազանցում է մի որոշակի կրիտիկական մեծությունից: Հակառակ դեպքում, սկսած ալիքի երկարության մի որոշակի արժեքից, շերտը դառնում է գրավիտացիոն անկայուն և տրոհվում է առանձին մասերի:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чандрасекар С. и Ферми. Э. Проблемы гравитационной устойчивости в магнитном поле. «Проблемы современной физики», 2, 1954.
2. Gjellestad Guro. On equilibrium configurations of celestial fluid spheroid with a magnetic field. *Astrophys. J.* 119, № 4, 1954.
3. Ferraro, V. C. A. On the equilibrium of magnetic stars. *Astrophys. J.* 119, № 4, 1954.
4. Chandrasekhar S. Limbur P. On the pulsation of a star in which there is a prevalent magnetic field. *Astrophys. J.* 119, № 1, 1954.
5. Оганесян Р. С. К теории гравитационной устойчивости. Кандидатская диссертация. МГУ, 1956.
6. Власов А. А. О переносе массы и заряда поверхностными волнами. *ЖЭТФ*, 27, 1954.
7. Оганесян Р. С. О гравитационной устойчивости цилиндрической конфигурации. *Астр. Журн.* XXXIII, вып. 6, 1956.
8. Альфвэн Х. Космическая электродинамика. Москва, 1952.
9. Власов А. А. Теория многих частиц. Москва, 1950.
10. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. Москва, 1954.
11. Гуревич Л. Э., Лебединский А. И. Известия АН СССР, серия физическая, 14, № 6, 1950.

Г. С. Кочарян

О приближении рациональными функциями в комплексной области

Введение

Настоящая работа посвящена вопросам наилучшей аппроксимации функций комплексного переменного рациональными дробями и разложению функций в ряд по рациональным дробям, имеющим полюсы в наперед заданном множестве точек, лежащих вне тех областей или линий, на которых происходит аппроксимация или разложение.

Известные в теории приближения полиномы Фабера дают возможность разложить аналитические в односвязных областях функции, при определенных ограничениях, в ряд полиномов. Задача построения базиса рациональных функций с заданным множеством полюсов, лежащих вне односвязной области, была решена М. М. Джрбашяном [1]. Им же [2] ранее был исследован вопрос разложения функций, заданных на единичной окружности, в ряд по ортонормальной системе рациональных функций Уолша [3] $\{\Phi_n(z)\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

В работе М. М. Джрбашяна и С. Н. Мергеляна [4] даются оценки наилучших приближений для функций, заданных на единичной окружности рациональными дробями с наперед заданными полюсами, лежащими внутри и вне единичной окружности, а также даются обратные теоремы наилучшего приближения.

В работах Сэуэла [5], Эллиота [6] и Уолша [7] приводятся оценки наилучших приближений для функций, аналитических на множестве с аналитической жордановой границей, рациональными функциями, имеющими полюсы в заданных точках, не имеющих предельных точек на границе множества.

Данная работа состоит из четырех параграфов. В первом параграфе приводится оценка отклонения частных сумм ряда Фурье по рациональным функциям $\{\Phi_n(z)\}$ и, в отличие от работы [2], рассматриваются случаи сходимости ряда Фурье, когда полюсы имеют предельные точки на единичной окружности.

Во втором параграфе, при помощи результатов работы [4], устанавливаются оценки наилучших приближений рациональными дробями

для функций, аналитических внутри и непрерывных в замкнутой жордановой области, на границу которой наложены определенные ограничения. Аналогичный вопрос, при тех же ограничениях, рассматривается и для непрерывных функций, заданных только на замкнутой жордановой кривой.

В третьем параграфе, при некоторых ограничениях, даются оценки отклонения частных сумм рядов по базисным системам рациональных функций, введенных М. М. Джрбашьяном [1], в случае, когда аппроксимация происходит в замкнутой области или на замкнутой жордановой кривой.

Отметим, что во втором и третьем параграфах применяется способ перехода от круга к области, предложенный С. Я. Альпером [8], и что все полученные нами результаты можно распространить и на многосвязные области, но, только ради простоты изложения, нами приводятся случаи односвязной или двухсвязной области.

В четвертом параграфе приводятся обратные теоремы о приближении функций посредством рациональных дробей.

Работа выполнена под руководством академика АН Армянской ССР, профессора М. М. Джрбашьяна, кому автор и приносит искреннюю благодарность.

§ 1. Оценка отклонения частных сумм ряда Фурье по рациональным функциям

Пусть $\{\alpha_k\}$ ($|\alpha_k| < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$) и $\{\beta_k\}$ ($|\beta_k| > 1$, $k = 1, 2, \dots$) — произвольные последовательности комплексных чисел, среди которых могут быть и числа конечной и даже бесконечной кратности, причем они, вообще, могут иметь предельные точки и на единичной окружности. Составим системы рациональных функций

$$\varphi_0(z) = \sqrt{\frac{1 - |\alpha_0|^2}{2\pi}} \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_0 z};$$

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{1 - |\alpha_n|^2}{2\pi}} \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$\psi_1(z) = \sqrt{\frac{|\beta_1|^2 - 1}{2\pi}} \frac{1}{1 - \bar{\beta}_1 z};$$

$$\psi_m(z) = \sqrt{\frac{|\beta_m|^2 - 1}{2\pi}} \frac{1}{1 - \bar{\beta}_m z} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{z - \beta_k}{1 - \bar{\beta}_k z} \quad (m = 2, 3, \dots);$$

и положим

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \varphi_n(z) & \text{при } n \geq 0; \\ \psi_{-n}(z) & \text{при } n \leq -1. \end{cases}$$

Система функций $\{\Phi_n(z)\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ортонормальна на единичной окружности (см. [2]). Для непрерывной на единичной окружности функции $f(z)$ образуем коэффициенты Фурье

$$C_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{\Phi_k(e^{it})} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и составим частную сумму

$$S_{n,m}(e^{ix}, f) = \sum_{k=-m}^n C_k \Phi_k(e^{ix}). \quad (1.1)$$

М. М. Джрбашьяном [2] исследован вопрос об обычной сходимости ряда Фурье, когда последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ не имеют предельных точек на окружности $|z| = 1$.

Для оценки отклонения частных сумм (1.1) нам понадобится следующая лемма:

Лемма. Пусть на окружности $|z| = 1$ дана непрерывная функция $f(z)$. Если $\max_{|z|=1} |f(z)| \leq M$, то для частных сумм (1.1) справедлива оценка:

$$\max_{|z|=1} |S_{n,m}(z, f)| \leq M(\pi + \lg \gamma_{n,m}),$$

где

$$\gamma_{n,m} = \sum_{k=0}^n (1 - |\alpha_k|)^{-1} + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right)^{-1}. \quad (1.2)$$

Доказательство. В работе [2] для частных сумм (1.1) имеется выражение

$$S_{n,m}(e^{ix}, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(x+y)}) K_{n,m}(x+y, x) dy, \quad (1.3)$$

где

$$K_{n,m}(x+y, x) = e^{\frac{i}{2}[y\mu_m(y, x) - y\lambda_n(y, x) + y]} \sin \frac{y\lambda_n(y, x) + y\mu_m(y, x)}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \sin \frac{y}{2}}, \quad (1.4)$$

$$y\lambda_n(y, x) = \int_x^{x+y} \sum_{k=0}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2} du, \quad \vartheta_k = \arg \alpha_k, \quad (1.5)$$

$$y\mu_m(y, x) = \int_x^{x+y} \sum_{k=1}^m \frac{|\beta_k|^2 - 1}{1 - 2|\beta_k| \cos(u - \omega_k) + |\beta_k|^2} du, \quad \omega_k = \arg \beta_k. \quad (1.6)$$

Из (1.3), (1.4) и из неравенств $\max_{|z|=1} |f(z)| \leq M$, $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi} |t|$ при $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ приходим к оценке:

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(e^{ix}, f)| &\leq \frac{M}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{y\lambda_n(y, x) + y\mu_m(y, x)}{2}}{y} \right| dy = \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{y\lambda_n(y, x) + y\mu_m(y, x)}{2} \right| + \\ &+ \left| \sin \frac{-y\lambda_n(-y, x) - y\mu_m(-y, x)}{2} \right| \frac{dy}{y} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из (1.5) и (1.6) имеем оценки:

$$|y\lambda_n(y, x)| \leq 2|y| \sum_{k=0}^n (1 - |\alpha_k|)^{-1}$$

и

$$|y\mu_m(y, x)| \leq 2|y| \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right)^{-1}.$$

откуда

$$\left| \frac{y\lambda_n(y, x) + y\mu_m(y, x)}{2} \right| \leq \gamma_{n,m} |y|. \quad (1.8)$$

Разобьем в (1.7) отрезок интегрирования $[0, \pi]$ на две части $\left[0, \frac{\pi}{\gamma_{n,m}}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{\gamma_{n,m}}, \pi\right]$, для первой части применим оценки $|\sin x| \leq |x|$ и (1.8), а для второй части неравенство $|\sin x| \leq 1$, тогда получим:

$$|S_{n,m}(e^{ix}, f)| \leq M \left(\gamma_{n,m} \cdot \frac{\pi}{\gamma_{n,m}} + \lg \gamma_{n,m} \right).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\alpha_0 = 0$. Если функция $f(z)$ дана и непрерывна на окружности $|z| = 1$ вместе со своими производными до p -го порядка включительно ($p \geq 0$), причем $f^{(p)}(z)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$, то

$$\max_{|z|=1} |f(z) - S_{n,m}(z, f)| = O \left(\lg \gamma_{n,m} |\varepsilon_{n,m}| \lg \varepsilon_{n,m} \right)^{p+\alpha}. \quad (1.9)$$

где

$$\varepsilon_{n,m} = \left[1 + \sum_{k=0}^n (1 - |\alpha_k|) \right]^{-1} + \left[1 + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|} \right) \right]^{-1}. \quad (1.10)$$

Доказательство. Обозначим через $E_{n,m}(f)$ нижнюю грань чисел $\max_{|z|=1} |f(z) - R_{n,m}(z)|$ в классе всевозможных рациональных функций вида

$$R_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{\omega_{n,m}(z)},$$

где $P_{n,m}(z)$ произвольный полином степени $\leq n+m$, а $\omega_{n,m}(z) = (z-\alpha_1) \cdots (z-\alpha_n)(z-\beta_1) \cdots (z-\beta_m)$. Если $\tilde{R}_{n,m}(z)$ есть рациональная функция наилучшего приближения, то

$$\max_{|z|=1} |f(z) - \tilde{R}_{n,m}(z)| = E_{n,m}(f). \quad (1.11)$$

Применяя доказанную лемму к функции $f(z) - \tilde{R}_{n,m}(z)$ и принимая во внимание, что ряд Фурье рациональной функции $\tilde{R}_{n,m}(z)$ совпадает с $\tilde{R}_{n,m}(z)$ (см. [2]), получаем:

$$\max_{|z|=1} |S_{n,m}(z, f) - \tilde{R}_{n,m}(z)| \leq E_{n,m}(f) (\pi + \lg \gamma_{n,m}). \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) следует оценка:

$$\max_{|z|=1} |f(z) - S_{n,m}(z, f)| \leq (1 + \pi + \lg \gamma_{n,m}) E_{n,m}(f). \quad (1.13)$$

В работе М. М. Джрбашяна и С. Н. Мергеляна [4] для функций с непрерывной p -й производной, удовлетворяющей условию Липшица порядка $\alpha > 0$, имеется следующая оценка наилучшего приближения:

$$E_{n,m}(f) < C |\varepsilon_{n,m}| |\lg \varepsilon_{n,m}|^{p+\alpha}, \quad (1.14)$$

где C — константа, зависящая только от функции $f(z)$ и от p .

Из (1.13) и (1.14) следует (1.9).

Известно [3], что для полноты системы $\{\Phi_n(z)\}$ на единичной окружности необходимо и достаточно условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right) = +\infty. \quad (1.15)$$

Следствие. Если на окружности $|z|=1$ функция $f(z)$ имеет непрерывную p -ю производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем $\alpha > 0$, то при условиях (1.15) и

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} |\varepsilon_{n,m}| |\lg \varepsilon_{n,m}|^{p+\alpha} \lg \gamma_{n,m} = 0 \quad (1.16)$$

имеет место равномерно сходящееся на $|z|=1$ разложение в ряд Фурье:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \Phi_k(z) \quad (1.17)$$

($\varepsilon_{n,m}$ и $\gamma_{n,m}$ определяются из (1.10) и (1.12) соответственно).

Примеры.

1) Пусть при некотором целом $N > 1$ имеется:

$$1 - |\alpha_k| > \frac{C_1}{K^\delta}, \quad 1 - \frac{1}{|\beta_k|} > \frac{C_2}{K^\delta} \quad (K > N, 0 < \delta < 1).$$

Тогда из (1.2), и (1.10) следует:

$$\gamma_{n, m} = O(n^{1+\delta} + m^{1+\delta}); \quad \varepsilon_{n, m} = O(n^{-1+\delta} + m^{-1+\delta}).$$

Значит в этом случае (1.16), а следовательно и (1.17) имеют место при любых $p > 0$ и $\alpha > 0$.

2) Пусть

$$0 < C_3 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} k(1 - |\alpha_k|) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k(1 - |\alpha_k|) < G_4 < +\infty$$

и

$$0 < C_3' \leq \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right) \leq C_4' < +\infty.$$

Тогда

$$\gamma_{n, m} = O(n^2 + m^2); \quad \zeta_{n, m} = O\left(\frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg m}\right).$$

поэтому

$$|\varepsilon_{n, m}| |\lg \varepsilon_{n, m}|^{p+\alpha} \cdot \lg \gamma_{n, m} = O\left\{\frac{(\lg \lg n)^{p+\alpha}}{(\lg n)^{p-1+\alpha}}\right\}.$$

следовательно (1.16) и (1.17) имеют место при $p > 1$ и $\alpha > 0$.

3) Пусть

$$0 < C_5 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \{k(\lg k)^\delta (1 - |\alpha_k|)\} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \{k(\lg k)^\delta (1 - |\alpha_k|)\} \leq C_6 < \infty,$$

$$0 < C_5' \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{k(\lg k)^\delta \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right)\right\} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{k(\lg k)^\delta \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right)\right\} \leq C_6' < \infty,$$

где $0 < \delta < 1$, тогда

$$\gamma_{n, m} = O\{n^2 (\lg n)^\delta + m^2 (\lg m)^\delta\},$$

$$\varepsilon_{n, m} = O\{(\lg n)^{\delta-1} + (\lg m)^{\delta-1}\},$$

$$|\varepsilon_{n, m}| |\lg \varepsilon_{n, m}|^{p+\alpha} \cdot \lg \gamma_{n, m} = O\left\{\frac{(\lg \lg n)^{p+\alpha}}{(\lg n)^{(1-\delta)(p+\alpha)-1}}\right\},$$

т. е. (1.17) имеет место при $p + \alpha > \frac{1}{1-\delta}$.

Приведенные примеры показывают, что сходимость ряда (1.17) для функции $f(z)$ существенно зависит от поведения последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ и от дифференциальных свойств самой функции $f(z)$. В частности, пример 3 показывает, что если δ достаточно близка к единице, то для того, чтобы получить теорему разложения, мы вынуждены потребовать от функции наличие произвольно большого числа производных.

§ 2. Наилучшие приближения рациональными функциями в замкнутой области

Следуя С. Я. Альперу [8], будем говорить, что односвязная область G_1 или ее граница Γ_1 удовлетворяют условию j , если Γ_1 представляет собой замкнутую гладкую кривую Жордана, у которой угол $\theta(s)$ наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги s на Γ_1 , имеет модуль непрерывности $j(h)$, удовлетворяющий условию:

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h} |\lg h| dh < \infty.$$

Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, конформно отображающую внешнюю часть G_1 на область $|w| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Пусть $z = \psi(w)$ обратная функция. Пусть, далее, вне области G_1 имеется такая последовательность точек $\{\lambda_k\}$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|}\right) = +\infty, \quad \text{где } \lambda_k^* = \Phi(\lambda_k). \quad (2.1)$$

Теорема 2. Пусть $f(z)$ аналитическая в G_1 , непрерывная в $\bar{G}_1$ функция, удовлетворяющая в $\bar{G}_1$ условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. Тогда, если область G_1 удовлетворяет условию j , то существует рациональная функция $R_1(z)$ с полюсами в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такая, что

$$|f(z) - R_1(z)| < C_n \{\varepsilon_n(\lambda^*)\} |\lg \varepsilon_n(\lambda^*)|^\alpha \quad (2.2)$$

для всех $z \in \bar{G}_1$, где

$$\varepsilon_n(\lambda^*) = \left[1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|}\right)\right]^{-1}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Функция $f_1(\tau) = f[\psi(\tau)]$ будет непрерывной функцией, удовлетворяющей условию Липшица порядка α на окружности $|\tau| = 1$. Интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau - w} d\tau$$

определяет две функции $\theta_1(w)$ и $\theta_2(w)$, аналитические, соответственно, в областях $|w| < 1$ и $|w| > 1$. По лемме И. И. Привалова для разности граничных значений имеем:

$$\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau) = f[\psi(\tau)] \quad (|\tau| = 1). \quad (2.4)$$

Введя обозначения $\theta_1[\Phi(\xi)] = \lambda(\xi)$ и $\theta_2[\Phi(\xi)] = \mu(\xi)$, можно переписать (2.4) в виде:

$$f(\zeta) = \lambda(\zeta) - \mu(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma_1. \quad (2.4')$$

Надо отметить, что $\lambda(z)$ определена только на Γ_1 , а $\mu(z)$ аналитична вне области G_1 .

Функция $\theta_1(\tau)$, как граничное значение интеграла типа Коши от функции $f[\psi(\tau)]$, удовлетворяет условию Липшица с показателем α^* , следовательно (см. [4]) найдется рациональная функция с полюсами в точках $\{\lambda_k^*\}$ вида

$$R_1^*(w) = \frac{P_1^*(w)}{(w - \lambda_1^*) \cdots (w - \lambda_n^*)},$$

где $P_1^*(w)$ полином степени не выше n , что на $|\tau| = 1$

$$|\theta_1(\tau) - R_1^*(\tau)| < C_8 |\varepsilon_n(\lambda^*)| |\lg \varepsilon_n(\lambda^*)|^a. \quad (2.5)$$

Обозначим через $R_1(z)$ главную часть функции $R_1^*[\Phi(z)]$. Она будет рациональной функцией вида

$$\frac{P_1(z)}{(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)}$$

где $P_1(z)$ полином степени не выше n .

Для любой точки z , находящейся вне области G_1 и отличной от $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, можно провести замкнутую жорданову кривую L_n так, чтобы z лежала внутри L_n , а все точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ находились вне L_n . Очевидно, функция

$$R_1^*[\Phi(z)] - R_1(z)$$

аналитична вне области G_1 и имеет в бесконечности нуль не ниже первого порядка, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{R_1^*[\Phi(t)] - R_1(t)}{t - z} dt = 0$$

для любой точки z внутри L_n . Но рациональная функция $R_1(z)$, по построению кривой L_n , не имеет внутри нее полюсов, поэтому

$$R_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{R_1^*[\Phi(t)]}{t - z} dt.$$

Далее, функция $R_1^*[\Phi(z)]$ аналитична в двусвязной области, заключенной между кривыми Γ_1 и L_n , поэтому для точек z , находящихся внутри упомянутой области, будем иметь:

$$R_1^*[\Phi(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{R_1^*[\Phi(t)]}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{R_1^*[\Phi(t)]}{t - z} dt.$$

Из последних равенств для любой точки z вне области G_1 , отличной от полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, следует интегральное представление:

*) При $\alpha = 1$ это получается, например, из леммы 3 работы [8].

$$R_1(z) = R_1^*[\Phi(z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{R_1^*[\Phi(t)]}{t-z} dt. \quad (2.6)$$

Для внутренних точек области G_1 легко получить:

$$R_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{R_1^*[\Phi(t)]}{t-z} dt. \quad (2.6')$$

По условию $f(z)$ аналитична внутри G_1 , поэтому из (2.6) согласно (2.4') получим:

$$\begin{aligned} R_1(z) &= R_1^*[\Phi(z)] - \mu(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta-z} \{R_1^*[\Phi(\zeta)] - \lambda(\zeta)\} = \\ &= R_1^*[\Phi(z)] - \mu(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} [\theta_1(\tau) - R_1^*(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, при стремлении z извне G_1 к граничной точке $\xi = \psi(\tau^*)$ ($|\tau^*|=1$), по лемме И. И. Привалова будем иметь:

$$\begin{aligned} R_1(\xi) &= R_1^*[\Phi(\xi)] - \mu(\xi) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} - \frac{1}{\tau - \tau^*} \right] [\theta_1(\tau) - \\ &\quad - R_1^*(\tau)] d\tau, \end{aligned}$$

или по (2.4')

$$\begin{aligned} f(\xi) - R_1(\xi) &= \lambda(\xi) - R_1^*[\Phi(\xi)] + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} - \frac{1}{\tau - \tau^*} \right] [\theta_1(\tau) - R_1^*(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В работе С. Я. Альпера [8] для областей, удовлетворяющих условию J , имеется оценка:

$$\int_{|\tau|=1} \left| \frac{1}{\tau - \tau^*} - \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} \right| |d\tau| < C_9, \quad (2.8)$$

где C_9 не зависит от τ^* .

Из (2.7), (2.8) и (2.5) следует:

$$|f(\xi) - R_1(\xi)| < C_{10}(\varepsilon_n(\lambda^*)) |\lg \varepsilon_n(\lambda^*)|^\alpha.$$

Эта оценка, полученная только на границе области G_1 , по принципу максимума остается справедливой и внутри G_1 , что и требовалось доказать.

Пусть теперь имеется односвязная область G_2 с границей Γ_2 и внешней частью G_2^∞ . Обозначим через $w = F(z)$ функцию, конформно отображающую G_2 на круг $|w| < 1$ так, что $F(a) = 0$, $F'(a) > 0$, где $a \in G_2$, произвольная точка, а $z = \varphi(w)$ — обратная функция. Пусть внутри области G_2 имеется последовательность точек $\mu_1, \mu_2, \dots$, различных от a , такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\mu_k^*|) = +\infty$, где $\mu_k^* = F(\mu_k)$.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая и ограниченная в области G_2^∞ , удовлетворяющая на границе Γ_2 условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. Тогда, если область G_2 удовлетворяет условию j , то существует рациональная функция $R_2(z)$ с полюсами в точках $\mu_1, \dots, \mu_m$ такая, что

$$|f(z) - R_2(z)| < C_{11} |\varepsilon_m(\mu^*)| |\lg \varepsilon_m(\mu^*)|^\alpha \quad (2.9)$$

для всех $z \in \overline{G_2^\infty}$, где

$$\varepsilon_m(\mu^*) = \left[1 + \sum_{k=1}^m (1 - |\mu_k^*|) \right]^{-1} \quad (2.10)$$

Доказательство. Функция $z_1 = \frac{1}{z-a}$ отображает область G_2^∞ на некоторую область G_2^* , также удовлетворяющую условию j . При этом отображении образы точек $\{\mu_k\}$ будут лежать вне области G_2^* , а функция $f\left(a + \frac{1}{z_1}\right)$ будет аналитической внутри G_2^* и будет удовлетворять условию Липшица с показателем α в $\overline{G_2^*}$. Далее, функция $w_1 = \left[F\left(a + \frac{1}{z_1}\right)\right]^{-1}$ отображает внешность области G_2^* на область $|\omega_1| > 1$, следовательно, к функции $f\left(a + \frac{1}{z_1}\right)$ в замкнутой области $\overline{G_2^*}$ применима теорема 2, что дает:

$$\left| f\left(a + \frac{1}{z_1}\right) - R_2^*(z_1) \right| < C_{11} |\varepsilon_m(\mu^*)| |\lg \varepsilon_m(\mu^*)|^\alpha, \quad (2.11)$$

где $z_1 \in \overline{G_2^*}$, а $R_2^*(z_1)$ рациональная функция с полюсами в точках $(\mu_1 - a)^{-1}, (\mu_2 - a)^{-1}, \dots, (\mu_m - a)^{-1}$.

(2.9) получается из (2.11) при переходе $z_1 = \frac{1}{z-a}$.

Исходя из рассуждений теорем 2 и 3, можно получить оценки наилучших приближений рациональными функциями в случае многосвязных областей. Для простоты здесь рассматривается случай двухсвязной области.

Пусть имеется двухсвязная область D , ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2 (Γ_2 находится внутри Γ_1). Обозначим через G_1 область, ограниченную кривой Γ_1 , а через G_2 область, ограниченную кривой Γ_2 . Будем говорить, что двухсвязная область D удовлетворяет условию j , если области G_1 и G_2 одновременно удовлетворяют этому условию. В обозначениях теорем 2 и 3 докажем теорему:

Теорема 4. Пусть в двухсвязной области D дана аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ в D . Тогда, если область D удовлетворяет усло-

вию j , то существует рациональная функция $R(z)$ с полюсами в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ такая, что для всех точек $z \in \bar{D}$,

$$|f(z) - R(z)| < C_{12} \{ [\varepsilon_n(\lambda^*) | \lg \varepsilon_n(\lambda^*) |]^\alpha + [\varepsilon_m(\mu^*) | \lg \varepsilon_m(\mu^*) |]^\alpha \}. \quad (2.12)$$

Доказательство. В теореме 2 была построена рациональная функция $R_1(z)$ с интегральным представлением (2.6). Интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\varphi(\tau)]}{\tau - w} d\tau$$

определяет две функции $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$, аналитические, соответственно, в областях $|w| < 1$ и $|w| > 1$. По теореме И. И. Привалова имеем:

$$\chi_1(\tau) - \chi_2(\tau) = f[\varphi(\tau)] \quad (|\tau| = 1).$$

Полагая

$$\chi_1[F(t)] = \lambda^*(t), \quad \chi_2[F(t)] = \mu^*(t),$$

получаем:

$$\lambda^*(t) - \mu^*(t) = f(t) \quad (t \in \Gamma_2), \quad (2.13)$$

причем $\lambda^*(z)$ определена и голоморфна в области G_2 , а $\mu^*(z)$ определена только на границе Γ_2 . Функция $\chi_2(\tau)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α на $|\tau| = 1$, следовательно (см. [4]), найдется рациональная функция $R_2^*(w)$ вида

$$R_2^*(w) = \frac{P_2^*(w)}{(\bar{w} - \mu_1) \cdots (\bar{w} - \mu_m)},$$

где $P_2^*(w)$ полином степени не выше m , что на $|\tau| = 1$,

$$|\chi_2(\tau) - R_2^*(\tau)| C_{13} \{ \varepsilon_m(\mu^*) | \lg \varepsilon_m(\mu^*) | \}^\alpha. \quad (2.14)$$

Обозначим через $R_2(z)$ главную часть функции $R_2^*[F(z)]$. Она будет рациональной функцией вида

$$\frac{P_2(z)}{(z - \mu_1) \cdots (z - \mu_m)},$$

где $P_2(z)$ — полином степени не выше m . Для точек z , лежащих вне области G_2 , имеем:

$$R_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{R_2^*[F(t)]}{t - z} dt, \quad (2.15)$$

а для точек z , лежащих внутри G_2 ,

$$R_2(z) = R_2^*[F(z)] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{R_2^*[F(t)]}{t - z} dt. \quad (2.15')$$

Из (2.6) и (2.15) для точек z , лежащих вне области G_1 , получаем:

$$R_1(z) - R_2(z) = R_1^*[\Phi(z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{R_1^*[\Phi(t)]}{t-z} dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{R_2^*[F(t)]}{t-z} dt.$$

Отсюда, на основании (2.4') и (2.13), следует:

$$R_1(z) - R_2(z) = R_1^*[\Phi(z)] - \mu(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{t-z} \{R_1^*[\Phi(t)] - \\ - \lambda(t)\} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{t-z} \{R_2^*[F(t)] - \mu^*(t)\} dt.$$

Наконец, при стремлении z извне G_1 к граничной точке $\zeta = \psi(u)$ ($\zeta \in \Gamma_1$, $|u|=1$), приходим к равенству:

$$R_1(\zeta) - R_2(\zeta) = R_1^*[\Phi(\zeta)] - \mu(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(u)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\tau - u} \right] \{R_1^*(\tau) - \lambda(\tau)\} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{t-\zeta} \{R_2^*[F(t)] - \mu^*(t)\} dt.$$

Из (2.4'), (2.5), (2.14) и из последнего равенства получается оценка (2.12) на границе Γ_1 . Если же взять интегральные представления (2.6') и (2.15') для точек z , находящихся внутри области G_2 , то аналогичным путем получится оценка (2.12) на границе Γ_2 , после чего остается применить принцип максимума.

В частном случае, когда области G_1 и G_2 совпадают, аналогичными рассуждениями получается:

Теорема 5. Пусть на границе Γ односвязной области G дана непрерывная функция $f(z)$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. Тогда, если область G удовлетворяет условию j , то существует рациональная функция $R(z)$ с полюсами в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ такая, что при $z \in \Gamma$,

$$|f(z) - R(z)| < C_{13} \{ |\varepsilon_n(\lambda^*)| |\lg \varepsilon_n(\lambda^*)|^\alpha + |\varepsilon_m(\mu^*)| |\lg \varepsilon_m(\mu^*)|^\alpha \}.$$

§ 3. Оценка отклонения частных сумм ряда по рациональным функциям в замкнутой области

Пусть имеется последовательность точек $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_1 = \infty$), лежащих вне области G_1 . В работе М. М. Джрбашяна [1] построена базисная система рациональных функций $\{M_m(z)\}$ с полюсами в точках $\{\lambda_k\}$, где $M_m(z)$ представляет главную часть функции $\Phi_m[\Phi(z)]$ ($m = 1, 2, \dots$),

$$\Phi_1(w) = \sqrt{\frac{|\lambda_1^*|^2 - 1}{2\pi}} \frac{1}{\lambda_1^* - w}, \quad (3.1)$$

$$\Phi_m(w) = \sqrt{\frac{|\lambda_m^*|^2 - 1}{2\pi}} \frac{1}{\lambda_m^* - w} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \lambda_k^* w}{w - \lambda_k^*} \quad (m = 2, 3, \dots)$$

и установлено равномерно сходящееся внутри области G_1 разложение в ряд по функциям $M_m(z)$ для аналитических внутри области G_1 функций (здесь приняты обозначения параграфа 2).

Теорема 6. Пусть $f(z)$ аналитическая в области G_1 функция, непрерывная в $\bar{G}_1$ и удовлетворяющая там условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. Тогда, если область G_1 удовлетворяет условию j , то для всех $z \in \bar{G}_1$,

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^m a_k M_k(z) \right| \leq C_{14} \left[1 + \pi + \right. \\ \left. + \lg \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|} \right)^{-1} \right] [\varepsilon_m(\lambda^*) |\lg \varepsilon_m(\lambda^*)|]^\alpha, \quad (3.2)$$

$$a_k = \frac{1}{i} \int_{|\tau|=1} \frac{\theta_1(\tau)}{\tau} \overline{\Phi_k(\tau)} d\tau = \frac{1}{i} \int_{|\tau|=1} \frac{f(\psi(\tau))}{\tau} \overline{\Phi_k(\tau)} d\tau,$$

а $\varepsilon_m(\lambda^*)$ определяется из (2.3).

Доказательство. Для точек z , находящихся вне области G_1 , имеем:

$$M_m(z) = \Phi_m[\Phi(z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\Phi_m[\Phi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.3)$$

Из (3.3) и (2.4') получаем:

$$\sum_{k=1}^m a_k M_k(z) = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k[\Phi(z)] - \mu(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\lambda(\zeta) - \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k[\Phi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta.$$

Отсюда, при $z \rightarrow \xi = \psi(\tau^*)$ ($|\tau^*| = 1$),

$$f(\xi) - \sum_{k=1}^m a_k M_k(\xi) = \lambda(\xi) - \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k[\Phi(\xi)] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)} - \frac{1}{\tau - \tau^*} \right] \left[\theta_1(\tau) - \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k(\tau) \right] d\tau. \quad (3.4)$$

Для доказательства теоремы нам понадобится оценка для $\theta_1(\tau) = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k(\tau)$. Повторяя преобразования работы [2], имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k(\tau) &= \frac{1}{i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\theta_1(\zeta)}{\zeta} \sum_{k=1}^m \overline{\Phi_k(\zeta)} \Phi_k(\tau) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\theta_1(\zeta)}{\zeta(1-\bar{\zeta}\tau)} \left\{ \prod_{k=1}^m \frac{\tau - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k \tau} \prod_{k=1}^m \frac{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}_k}{1 - \bar{\alpha}_k \bar{\zeta}} - 1 \right\} d\zeta, \quad \alpha_k = \frac{1}{\lambda_k^*}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Но, введя обозначение

$$y\lambda_m(y, x) = \int_x^{x+y} \sum_{k=1}^m \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \omega_k) + |\alpha_k|^2} du, \quad (3.6)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m \frac{e^{ix} - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k e^{it}} \prod_{k=1}^m \frac{e^{it} - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k e^{it}} - 1 &= \exp\{i(x-t)\lambda_m(x-t, t)\} - 1 = \\ &= 2i \exp\left\{\frac{i(x-t)\lambda_m(x-t, t)}{2}\right\} \cdot \sin \frac{(x-t)\lambda_m(x-t, t)}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.5) и (3.7) получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k(e^{ix}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_1[e^{i(x-2y)}] e^{iy[1+\lambda_m(-2y, x)]} \frac{\sin[y\lambda_m(-2y, x)]}{\sin y} dy - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_1[e^{i(x+2y)}] e^{-iy[1+\lambda_m(2y, x)]} \frac{\sin[y\lambda_m(2y, x)]}{\sin y} dy. \end{aligned} \quad (3.8)$$

По условию, функция $f(z)$ непрерывна на границе области, следовательно $\theta_1(e^{ix})$ будет ограничена, пусть $|\theta_1(e^{ix})| \leq C_{15}$. Употребляя еще оценку $\sin y \geq \frac{2}{\pi} y$ ($0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$), из (3.8) получим:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k(e^{ix}) \right| &\leq C_{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin[y\lambda_m(-2y, x)]|}{y} dy + \\ &+ C_{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin[y\lambda_m(2y, x)]|}{y} dy. \end{aligned}$$

Из (3.6) имеем:

$$|y\lambda_m(2y, x)| \leq |y| \left| \sum_{k=1}^m \frac{1 + |a_k|}{1 - |a_k|} \right| < 2|y| \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k|} \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Из (3.9) и из оценки наилучшего приближения (2.2) приходим к оценке:

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} \left| \theta_1(\tau) - \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k(\tau) \right| &\leq C_{17} \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k|} \right)^{-1} \right] \times \\ &\times [\varepsilon_m(\lambda^*) |\lg \varepsilon_m(\lambda^*)|]^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4) уже нетрудно получить (3.2).

Пусть теперь функция $f(z)$ аналитична в области G_2^∞ . По данной последовательности точек $\{\mu_k\}$, лежащих внутри области G_2 , по аналогии функций, введенных в [1], образуем систему рациональных функций:

$$\begin{aligned} \psi_1(w) &= \sqrt{\frac{1 - |\mu_1^*|^2}{2\pi}} \frac{1}{\mu_1^* - w}, \\ \psi_n(w) &= \sqrt{\frac{1 - |\mu_n^*|^2}{2\pi}} \frac{1}{\mu_n^* - w} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \overline{\mu_k^*} w}{w - \mu_k^*} \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Обозначим через $N_n(z)$ главную часть функции $\psi_n[F(z)]$ ($n = 1, 2, \dots$).

Теорема 7. Пусть $f(z)$ функция, аналитическая и ограниченная в области G_2^∞ , удовлетворяющая на границе Γ_2 условию Липшица с показателем α . Тогда если область G_2 удовлетворяет условию j , то для всех точек $z \in \overline{G_2^\infty}$,

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) \right| &\leq C_{18} \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^n (1 - |\mu_k^*|)^{-1} \right] \times \\ &\times [\varepsilon_n(\mu^*) |\lg \varepsilon_n(\mu^*)|]^\alpha, \end{aligned}$$

где

$$b_k = -\frac{1}{i} \int_{|\tau|=1} \frac{\chi_k(\tau)}{\tau} \overline{\psi_k(\tau)} d\tau = \frac{1}{i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\overline{\psi(\tau)}]}{\tau} \overline{\psi_k(\tau)} d\tau,$$

$\alpha \varepsilon_n(\mu^*)$ определяется из (2.10).

Доказательство. Для точек z , лежащих в области G_2^∞ , имеем интегральное представление:

$$N_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\psi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (3.10)$$

откуда в силу (2.13) получается:

$$f(z) - \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\mu^*(\zeta) + \sum_{k=1}^n b_k \psi_k[F(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta.$$

Для доказательства остается совершить предельный переход при $z \rightarrow \xi \in \Gamma_2$ и оценить, как и в предыдущей теореме,

$$\mu^*(\xi) + \sum_{k=1}^n b_k \psi_k[F(\zeta)].$$

Теорема 8. Пусть функция $f(z)$ аналитична в двухсвязной области D и удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ в $\bar{D}$. Тогда, если область D удовлетворяет условию j , то для всех точек $z \in \bar{D}$,

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^m a_k M_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) \right| < \\ < C_{19} \left\{ \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|} \right)^{-1} \right] |\varepsilon_m(\lambda^*)| |\lg \varepsilon_m(\lambda^*)|^\alpha + \right. \\ \left. + \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^n (1 - |\mu_k^*|)^{-1} \right] |\varepsilon_n(\mu^*)| |\lg \varepsilon_n(\mu^*)|^\alpha \right\}$$

(коэффициенты a_k и b_k определены в теоремах 6 и 7 соответственно).

Доказательство. Для точек z , лежащих вне области G_1 , из интегральных представлений (3.3) и (3.10) получаем:

$$\sum_{k=1}^m a_k M_k(z) + \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k[\Phi(z)] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\sum_{k=1}^m a_k \Phi_k[\Phi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\sum_{k=1}^n b_k \psi_k[F(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta.$$

Отсюда на основании (2.4') и (2.13) следует:

$$\sum_{k=1}^m a_k M_k(z) + \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) = \sum_{k=1}^m b_k \Phi_k[\Phi(z)] - \mu(z) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\sum_{k=1}^m a_k \Phi_k[\Phi(\zeta)] - \lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\sum_{k=1}^n b_k \psi_k[F(\zeta)] + \mu^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Дальнейший ход доказательства похож на доказательство теоремы 4 и мы его опускаем.

Из этой теоремы в частности получается:

Теорема 9. Если на границе Γ односвязной области G , удовлетворяющей условию j , дана непрерывная функция $f(z)$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$, то для всех точек $z \in G$,

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^m a_k M_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) \right| < \\ < C_{20} \left\{ \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|} \right)^{-1} \right] |\varepsilon_m(\lambda^*)| |\lg \varepsilon_m(\lambda^*)|^\alpha + \right. \\ \left. + \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^n \left(1 - |\mu_k^*| \right)^{-1} \right] |\varepsilon_n(\mu^*)| |\lg \varepsilon_n(\mu^*)|^\alpha \right\}.$$

Как уже было отмечено, в работе М. М. Джрбашяна [1] для функций, аналитических в односвязной области, установлено равномерно сходящееся внутри области разложение в ряд по функциям $M_m(z)$. Аналогичный результат можно получить и в случае многосвязных областей, в частности для двухсвязной области.

Следуя М. М. Джрбашяну, будем говорить, что двухсвязная область D принадлежит к классу U , если

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\psi'(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \sup \int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty.$$

Теорема 10. Пусть функция $f(z)$ аналитична в двухсвязной области D и непрерывна в $\bar{D}$. Тогда, если область D принадлежит к классу U и если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|} \right) = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\mu_k^*|) = +\infty,$$

то имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k M_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k N_k(z),$$

равномерно сходящееся внутри области D .

Доказательство. При $z \in D$, представляя функцию $f(z)$ интегралом Коши, имеем:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} f[\psi(\tau)] d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - z} f[\varphi(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из условий теоремы вытекает (см. [1]) разложение

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \frac{2\pi}{w} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\Phi_k\left(\frac{1}{w}\right)} M_k(z), \quad (3.12)$$

в среднем сходящееся на окружности $|w|=1$, при этом равномерно относительно $z \in \bar{D}_1 < D$. Аналогичными рассуждениями можно получить разложение

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - z} = -\frac{2\pi}{w} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi_k\left(\frac{1}{w}\right)} N_k(z). \quad (3.13)$$

Из (3.11), учитывая выражения коэффициентов a_k и b_k , приходим к выражению:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} f[\psi(\tau)] \left\{ \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} - \frac{2\pi}{w} \sum_{k=1}^n \overline{\Phi_k\left(\frac{1}{\tau}\right)} M_k(z) \right\} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} f[\varphi(\tau)] \left\{ \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - z} + \frac{2\pi}{w} \sum_{k=1}^n \overline{\psi_k\left(\frac{1}{\tau}\right)} N_k(z) \right\} d\tau + \\ &+ \sum_{k=1}^n a_k M_k(z) + \sum_{k=1}^n b_k N_k(z). \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы остается применить неравенство Буяковского, (3.12), (3.13) и совершить предельный переход при $n \rightarrow \infty$.

§ 4. Обратные теоремы о приближении рациональными функциями

В настоящем параграфе приводятся результаты, показывающие, что условия на густоту последовательности полюсов, которые накладывались нами в предыдущих теоремах, необходимы. Аналогичный результат в случае приближения на вещественной оси был установлен С. Н. Бернштейном [9].

Пусть даны последовательности точек $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, $|\alpha_k| < 1$, $|\beta_k| > 1$.

*Теорема II. Пусть**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right) < +\infty \quad (4.1)$$

и некоторая дуга l окружности $|z|=1$ не содержит предельных точек последовательности $\{\beta_k\}$.

Если для непрерывной на $|z|=1$ функции $f(z)$ существует последовательность рациональных функций $\{R_n(z)\}$ с полюсами в точках $\{\beta_k\}$ такая, что

$$\max_{|z|=1} |f(z) - R_n(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

то функция $f(z)$ будет аналитической внутри круга $|z| < 1$ и на дуге l окружности $|z|=1$, а во внешней части круга $|z| > 1$ она будет мероморфной с полюсами только в точках $\{\beta_k\}$.

Доказательство. Из условий (4.2) вытекает, что для данной последовательности чисел

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_k > \dots > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty \quad (4.3)$$

можно выбрать последовательность индексов $\{n_k\}$, $n_k \rightarrow \infty$ такую, что

$$\max_{|z|=1} |f(z) - R_{n_k}(z)| < \frac{\delta_k}{2}. \quad \text{Полагая}$$

$$R_{n_k}(z) = U_1(z), \quad R_{n_k}(z) - R_{n_{k-1}}(z) = U_k(z) \quad (k > 1)$$

убеждаемся, что равномерно на $|z|=1$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(z) \quad (4.4)$$

причем

$$\max_{|z|=1} |U_k(z)| < \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

Очевидно, оценка (4.4) имеет место и для всех точек круга $|z| < 1$, откуда следует, что $f(z)$ будет аналитической внутри круга $|z| < 1$.

Функция

$$U_k(z) \cdot \prod_{j=1}^{n_k} \frac{z - \beta_j}{1 - \bar{\beta}_j z}$$

будет аналитической в области $|z| > 1$, ограниченной в бесконечности и по модулю меньше δ_k на $|z|=1$, поэтому

$$|U_k(z)| < \delta_k \prod_{j=1}^{n_k} \left| \frac{1 - \bar{\beta}_j z}{z - \beta_j} \right| \quad \text{при } |z| > 1, \quad \text{или}$$

$$|U_k(z)|^2 < \delta_k^2 \prod_{j=1}^{n_k} \left[1 + \frac{(|z|^2 - 1)(|\beta_j|^2 - 1)}{|z - \beta_j|^2} \right].$$

Таким образом,

$$|U_k(z)|^2 < \delta_k^2 \exp \left\{ (|z|^2 - 1) \sum_{j=1}^{n_k} \frac{|\beta_j|^2 - 1}{|z - \beta_j|^2} \right\}, \quad |z| > 1. \quad (4.5)$$

Из сходимости ряда (4.1) следует, что последовательность $\{\beta_k\}$ будет иметь предельные точки только на окружности $|z| = 1$, поэтому при произвольно малом $\delta > 0$ и произвольно большом $R > 0$ в области $1 + \delta \leq |z| \leq R$ будет только конечное число полюсов β_j . Окружив в указанном кольце полюсы β_j кружками радиуса δ , получим некоторую связную область E , где, в силу (4.5), будем иметь:

$$|U_k(z)|^2 < \delta_k^2 \exp \left\{ \frac{R^2}{\delta^2} \sum_{j=1}^{n_k} (|\beta_j|^2 - 1) \right\}. \quad (4.6)$$

Но ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} (|\beta_j|^2 - 1) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\beta_j|} \right)$$

сходятся или расходятся одновременно, поэтому из (4.1) и (4.6) следует:

$$|U_k(z)| < C_2 \delta_k \quad (z \in E), \quad (4.7)$$

где C_2 не зависит от z и k .

Аналогичную оценку можно получить и в окрестности дуги l окружности $|z| = 1$, откуда и из (4.3) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(z)$ равномерно сходится в области E и в окрестности дуги l . Так как числа δ и R произвольны, то теорема доказана.

Теорема 12. Пусть сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|} \right) \quad (4.8)$$

и некоторая дуга l окружности $|z| = 1$ не содержит предельных точек последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$.

Если для непрерывной на $|z| = 1$ функции $f(z)$ существует последовательность рациональных функций $\{R_n(z)\}$ с полюсами в точках $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ такая, что

$$\max_{|z|=1} |f(z) - R_n(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

то функция $f(z)$ будет аналитической на дуге l , а в круге $|z| < 1$ и в области $|z| > 1$ она будет мероморфной с полюсами только в точках $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $\{R_n(z)\}$ такая последовательность, что для взятых чисел $\{\delta_k\}$ (4.3) $\max_{|z|=1} |f(z) - R_n(z)| < \frac{\delta_n}{2}$. Полагая $v_1(z) = R_1(z)$, $v_k(z) = R_k(z) - R_{k-1}(z)$ ($k > 1$), будем иметь равномерно сходящееся на $|z| = 1$ разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(z), \quad \text{где} \quad \max_{|z|=1} |v_n(z)| < \delta_k^* \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.10)$$

Пусть $v_k(z)$ имеет вид

$$v_k(z) = \frac{P_k(z)}{\prod_{j=1}^n (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^m (z - \beta_j)} \quad (m + n = k),$$

где $P_k(z)$ полином степени не выше k .

Функция $v_k(z) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - z\alpha_j}$ будет аналитической в круге $|z| < 1$ и по модулю меньше δ_k на окружности $|z| = 1$, следовательно, как и в предыдущей теореме,

$$|v_k(z)|^2 < \delta_k^2 \exp \left\{ (1 - |z|^2) \sum_{j=1}^n \frac{1 - |\alpha_j|^2}{|z - \alpha_j|^2} \right\}, \quad \text{при} \quad |z| \leq 1. \quad (4.11)$$

Аналогично получается:

$$|v_k(z)|^2 < \delta_k^2 \exp \left\{ (|z|^2 - 1) \sum_{j=1}^m \frac{|\beta_j|^2 - 1}{|z - \beta_j|^2} \right\}, \quad \text{при} \quad |z| \geq 1. \quad (4.12)$$

Из сходимости рядов (4.8) следует, что последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ могут иметь предельные точки только на окружности $|z| = 1$. При произвольно малом $\delta > 0$, окружив точки α_k , находящиеся в круге $|z| < 1 - \delta$, кружками радиуса δ , в полученной области, в силу (4.11), будем иметь:

$$\max |v_k(z)| < C_{22} \delta_k, \quad (4.13)$$

где C_{22} не зависит от z и k .

Аналогичную оценку в силу (4.12) получим в окрестности дуги l и в области, полученной из кольца $1 + \delta \leq |z| \leq R$, если окружить в последнем точки β_k кружками радиуса δ . Теорема получается из (4.10), (4.13) и (4.3).

Аналогичные теоремы можно сформулировать и в случае жордановых областей.

Пусть G — некоторая односвязная область с жордановой границей Γ , а G^∞ ее дополнение. Пусть, далее, в области G имеется последовательность точек $\{\mu_k\}$, а в области G^∞ последовательность точек $\{\lambda_k\}$. В обозначениях § 2 докажем следующую теорему:

Теорема 13. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|}\right) < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\mu_k^*|) < +\infty \quad (4.14)$$

и пусть некоторый кусок L границы Γ не содержит предельных точек последовательностей $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$.

Если для непрерывной на Γ функции $f(z)$ существует последовательность рациональных функций $\{R_n(z)\}$ с полюсами в точках $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ такая, что

$$\max_{z \in \Gamma} |f(z) - R_n(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

то функция $f(z)$ будет аналитической на L , а внутри областей G и G^∞ она будет мероморфной с полюсами только в точках $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает существование такой последовательности рациональных функций $\{w_k(z)\}$, что равномерно на границе Γ

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z), \quad \max_{z \in \Gamma} |w_k(z)| < \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4.15)$$

где $\{\delta_k\}$ взяты из (4.3).

Пусть

$$w_k(z) = \frac{Q_k(z)}{\prod_{j=1}^n (z - \lambda_j) \prod_{j=1}^m (z - \mu_j)} \quad (k = m + n),$$

где $Q_k(z)$ полином степени не выше k .

Функция

$$w_k(z) \cdot \prod_{j=1}^m \frac{F(z) - \mu_j^*}{1 - F(z) \mu_j^*}$$

будет аналитической в области G и по модулю меньше δ_k на границе Γ , поэтому

$$|w_k(z)| < \delta_k \prod_{j=1}^m \left| \frac{1 - F(z) \mu_j^*}{F(z) - \mu_j^*} \right|, \quad z \in G,$$

откуда

$$|w_k(z)|^2 < \delta_k^2 \exp \left\{ (1 - |F(z)|^2) \sum_{j=1}^m \frac{1 - |\mu_j^*|^2}{|F(z) - \mu_j^*|^2} \right\}. \quad (4.16)$$

Если при произвольно малом $\delta > 0$ взять линию уровня $|F(z)| = 1 - \delta$ и находящиеся внутри нее точки μ_j (их будет конечное число в силу (4.14)) окружить замкнутыми линиями $|F(z) - \mu_j^*| = \delta$, то в полученной таким образом связной области из (4.16) и (4.14) получим:

$$|w_k(z)| < C_{23} \delta_k, \quad (4.17)$$

C_{23} не зависит от z и k .

Далее, функция

$$w_k(z) = \prod_{j=1}^n \frac{\Phi(z) - \lambda_j^*}{1 - \Phi(z)\lambda_j^*}$$

будет аналитической в области G^∞ и по модулю меньше δ_k на границе Γ , поэтому

$$|w_k(z)|^2 < \delta_k^2 \exp \left\{ (|\Phi(z)|^2 - 1) \sum_{j=1}^n \frac{|\lambda_j^*|^2 - 1}{|\Phi(z) - \lambda_j^*|^2} \right\}, \quad z \in G^\infty.$$

Теперь, если взять линии уровня $|\Phi(z)| = 1 + \delta$ и $|\Phi(z)| = R$, окружить находящиеся между ними точки λ_j замкнутыми кривыми $|\Phi(z) - \lambda_j^*| = \delta$, то в полученной связной области будем иметь оценку вида (4.17). Очевидно эта оценка будет иметь место и в окрестности L . Теорема доказана.

Ереванский Государственный университет

Поступило 18 III 1958

2. Ա. Քոչարյան

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՏԻՐՈՒՅՔՈՒՄ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ ուսումնասիրվում են կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաները արված բևեռներն ունեցող սացիոնալ կոտորակներով մոտարկելու և ըստ սացիոնալ կոտորակների շարքի վերածելու հարցերը:

Աշխատությունը բաղկացած է 4 պարագրաֆից: Առաջին պարագրաֆում քննարկվում է Ուոլշի [3] $\{\Phi_n(z)\}$ սացիոնալ ֆունկցիաների օրթոնորմալ սիստեմով Ֆուրյեի շարքի մասնակի գումարների չեղման դնանտականը և դիտարկվում են շարքի զուգամիտության օրինակներ այն դեպքում, երբ բևեռները միավոր շրջանագծի վրա ունեն սահմանային կետեր: Իրիցք $\{\Phi_n(z)\}$ -ի բևեռները գտնվում են $\{\alpha_k\}$ ($|\alpha_k| < 1$) և $\{\beta_k\}$ ($|\beta_k| > 1$) կետերում: Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1. Եթե $|z| = 1$ միավոր շրջանագծի վրա արված $f(z)$ անընդհատ ֆունկցիան ունի Լիպշիցի $\alpha > 0$ պայմանին բավարարող $\rho > 0$ կարգի ածանցյալ, ապա

$$\max_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=-m}^n C_k \Phi_k(z) \right| = O(|g_{n,m}[\varepsilon_{n,m}]| |g_{\varepsilon_{n,m}}|^{p+a}),$$

որակը

$$C_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{\Phi_k(e^{it})} dt,$$

$$j_{n,m} = \sum_{k=0}^n (1 - |a_k|)^{-1} + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right)^{-1},$$

$$\varepsilon_{n,m} = \left[1 + \sum_{k=0}^n (1 - |a_k|)\right]^{-1} + \left[1 + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\beta_k|}\right)\right]^{-1}.$$

Երկրորդ պարագրաֆում ստացված են փակ տիրույթում կամ միայն ժորդանյան փակ կորի վրա տրված ֆունկցիաների՝ տվյալ բեկումներն ունեցող ռացիոնալ կոտորակներով լավագույն մոտավորությունների գնահատականներ: Դիցուք D երկկապ տիրույթը սահմանափակված է Γ_1 և Γ_2 ժորդանյան փակ գծերով (Γ_1 -ն ընդգրկում է Γ_2 -ը): Γ_1 -ի արտաքին մասը միավոր շրջանի արտաքին մասի վրա արտապատկերող ֆունկցիան նշանակենք $\Phi(z)$ -ով, իսկ Γ_2 -ի ներքև միավոր շրջանի վրա արտապատկերող ֆունկցիան՝ $F(z)$ -ով: Այս պարագրաֆի հիմնական արդյունքն է՝

Թեորեմ 4. Դիցուք j պայմանին [8] բավարարող D երկկապ տիրույթում արված $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D -ում, իսկ $\bar{D}$ փակ տիրույթում բավարարում է Լիպշիցի $\alpha > 0$ պայմանին: Այդ դեպքում գոյություն կունենա Γ_1 -ից դուրս գտնվող $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ և Γ_2 -ի ներքև գտնվող $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ կետերում բեկումներ ունեցող այնպիսի $R(z)$ ռացիոնալ ֆունկցիա, որ

$$\max_{z \in \bar{D}} |f(z) - R(z)| < C_{12} \{ [\varepsilon_n(\lambda^*) |g_{\varepsilon_n}(\lambda^*)|]^{\alpha} + [\varepsilon_m(\mu^*) |g_{\varepsilon_m}(\mu^*)|]^{\alpha} \},$$

որակը

$$\lambda_k^* \Phi(\lambda_k), \quad \mu_k^* = F(\mu_k),$$

$$\varepsilon_n(\lambda^*) = \left[1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k|}\right)\right]^{-1}; \quad \varepsilon_m(\mu^*) = \left[1 + \sum_{k=1}^m (1 - |\mu_k^*|)\right]^{-1}.$$

Երրորդ պարագրաֆում, որոշ սահմանափակումների դեպքում, տրվում են Մ. Մ. Զրբաշյանի [1] կառուցած ռացիոնալ ֆունկցիաներով շարքի մասնակի գումարների շեղման գնահատականներ այն դեպքում, երբ մոտարկումը կատարվում է փակ տիրույթում կամ ժորդանյան փակ կորի վրա: Ապացուցվում է՝

Թեորեմ 8. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է j պայմանին բավարարող D երկկապ տիրույթում, բավարարում է Լիպշիցի $\alpha > 0$ պայմանին $\bar{D}$ -ում, ապա

$$\max_{z \in D} \left| f(z) - \sum_{k=1}^m a_k M_k(z) - \sum_{k=1}^n b_k N_k(z) \right| < \\ < C_{10} \left\{ \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|} \right)^{-1} \right] |\varepsilon_m(\lambda^*)| |\lg \varepsilon_m(\lambda^*)| \right\}^{\alpha} + \\ + \left\{ \left[1 + \pi + \lg \sum_{k=1}^n \left(1 - |\mu_k^*| \right)^{-1} \right] |\varepsilon_n(\mu^*)| |\lg \varepsilon_n(\mu^*)| \right\}^{\beta} \right\}$$

$\{a_k, b_k$ գործակիցները և $M_k(z), N_k(z)$ ֆունկցիաները սահմանված են 6 և 7 թեորեմներում):

Չորրորդ պարագրաֆում բերվում են ապացիոնալ ֆունկցիաներով մոտավորությունների հակադարձ թեորեմներ: Դրանցից հիմնականն է՝

Թեորեմ 13. Դիցուք

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k^*|} \right) < +\infty \quad \text{և} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\mu_k^*|) < +\infty$$

և ժողովանյալն Γ փակ կորի մի L աղեղ չի պարունակում $\{\lambda_k\}$ և $\{\mu_k\}$ հաջորդականությունների սահմանային կետեր: Եթե Γ եզրի վրա անընդհատ $f(z)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\{\lambda_k\}$ և $\{\mu_k\}$ բևեռներով $\{R_n(z)\}$ ապացիոնալ ֆունկցիաների այնպիսի հաջորդականություն, որ

$$\max_{z \in \Gamma} |f(z) - R_n(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ապա $f(z)$ ֆունկցիան L -ի վրա կլինի անալիտիկ, իսկ եզրի ներսում և գրքում կլինի մերոմորֆ՝ միայն $\{\lambda_k\}$ և $\{\mu_k\}$ բևեռներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Джербашиян М. М. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов. Изв. АН АрмССР, серия Ф.-М. наук, том X, № 1, 1957.
2. Джербашиян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Изв. АН АрмССР, серия ФМЕТ-наук, том IX, № 7, 1956.
3. Walsh J. L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York, 1935.
4. Джербашиян М. М., Мкртчян С. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями. ДАН СССР, т. 99, № 5, 1954.
5. Szewell W. E. Rev. scienc. 41, 435-451, 1939.
6. Elliott H. M Proc. Am. Math. Soc. 4, 161-167, 1953.
7. Walsh J. L. Note on degree of approximation to analytic functions by rational functions with preassigned poles. Proc. Nat. Acad. USA, 42, N 12, 1956.
8. Альян С. Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области. Изв. АН СССР, серия мат., т. 19, № 6, 1955.
9. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.-Л., 1937.

В. А. Толян

О взвешенно-полиномиальном приближении на действительной оси

Введение

Аппроксимационная проблема Бернштейна* заключается в отыскании необходимых и достаточных условий, при которых

$$\inf_{\{P\}} \sup_{-\infty < x < \infty} \{h(x) |f(x) - P(x)|\} = 0,$$

где $h(x)$ — некоторая фиксированная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{\pm x \rightarrow \infty} x^n h(x) = 0$; $n = 0, 1, \dots$, функция $f(x)$ определена и непрерывна на действительной оси и удовлетворяет условию

$$\lim_{\pm x \rightarrow \infty} f(x) h(x) = 0.$$

В 1954 г. С. Н. Мергеляном [1] было доказано, что для полноты системы полиномов с произвольным неотрицательным измеримым весом $h(x)$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sup \ln |P(x)|}{1+x^2} dx$$

расходился; верхняя грань берется по всевозможным полиномам удовлетворяющим условию $h(x) |P(x)| \leq 1 + |x|$.

Первые результаты о связи между свойствами аппроксимируемой функции $f(x)$, скоростью убывания ее наилучших приближений

$$E_n(f, h) = \inf_{\{P_n(x)\}} \sup_{-\infty < x < \infty} \{h(x) |f(x) - P_n(x)|\}$$

и свойствами весовой функции $h(x)$ были получены в 1952 г. М. М. Джрбашьяном. Им установлены прямые и обратные теоремы о наилучших приближениях дифференцируемых функций. Примером его прямых теорем может служить следующая [5]:

* В этой статье мы не будем касаться истории вопроса, достаточно полно изложенной в обзорных статьях, вышедших в последние годы; см. например [2], [3], [4].

А) Если $f(x)$ — функция непрерывная и ограниченная на всей оси $-\infty < x < \infty$ вместе со своими производными до порядка $k \geq 1$ включительно, то при $\lambda > 1$

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq \frac{C}{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}k}},$$

где C — некоторая постоянная не зависящая от n .

Впоследствии [2] ему удалось получить более общий результат, чем сформулированный выше, а именно:

В) Если $f(x)$ непрерывна и ограничена на оси $-\infty < x < \infty$ вместе со своими производными до порядка $k \geq 1$ включительно, причем

$$\forall \text{rat} \max_{-\infty < x < \infty} |f^{(k)}(x)| \leq m_k,$$

то при весе $h(x) = e^{-p(x)}$, удовлетворяющем условиям

$$xp'(x) \uparrow \infty; \quad x \frac{p'(x)}{p(x)} \geq a > 1; \quad x > 1$$

и при $n > N$

$$E(f, e^{-p(x)}) \leq \frac{\pi m_k}{\rho^k} p_n^{-k},$$

где $p_n = \int_1^n \frac{dy}{q(y)}$; $x = q(y)$ — функция, обратная $y = p(x)$; $\rho > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $f(x)$.

В то время, как обратные теоремы, полученные М. М. Джрбашяном сформулированы для произвольной весовой функции, обеспечивающей полноту, в прямых теоремах, по замечанию самого автора, „на приближаемую функцию и на вес приходится накладывать ограничения, которые отнюдь не необходимы для полноты полиномов на оси“ [2].

Настоящая статья посвящена взвешенно-полиномиальным приближениям на вещественной оси и оценке убывания наилучших приближений в зависимости от свойств аппроксимируемой функции для широкого класса весовых функций.

Ниже, например, приводятся теоремы об оценке наилучших приближений в которых:

1) в качестве веса рассматривается произвольная нормально убывающая функция (теоремы III, IV);

2) допускается рост как аппроксимируемой функции, так и ее производной (теоремы I, II).

Изложению основных результатов предпослано некоторые вспомогательные предложения.

§ 1. Вспомогательные предложения

№ 1.1. Лемма. Если $\lambda > 1$ и $\zeta = \xi + i\eta$; $1 > \eta > 0$, то

$$E_n \left(\frac{1}{\zeta - x}, e^{-|x|^\lambda} \right) \leq \frac{1}{\eta} e^{-C\eta \frac{\lambda-1}{\lambda}},$$

где C — абсолютная константа ($\geq 0,04$).

Доказательство.

Составим целую функцию

$$G_{m,\zeta}(z) = \frac{e^{-im(z-\bar{\zeta})} - e^{m\eta}}{(z-\zeta)e^{m\eta}}.$$

Как легко убедиться при заданном $\delta > 0$ и надлежаще выбранном целом $m > 0$ эта целая функция приближает на всей оси $-\infty < x < \infty$ ядро Коши $(\zeta - x)^{-1}$:

$$\left| G_{m,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right| \leq \delta, \quad -\infty < x < \infty$$

при

$$m = \left[\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta \eta} \right] + 1. \quad (1.1.1)$$

Оценим рост функции $G_{m,\zeta}(z)$. Пусть z — произвольная точка с условием $|Imz| \geq \eta + 1$.

Тогда

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 1 + \delta e^{m|\eta|}.$$

Оценим теперь $G_{m,\zeta}(z)$ в полосе $|Imz| \leq \eta + 1$. На границе полосы имеем, очевидно,

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 1 + \delta e^{m(\eta+1)}.$$

По теореме Фрагмена-Линделёфа эта же оценка имеет место везде внутри полосы. Таким образом всюду выполняется

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 1 + \delta e^{m(|Imz|+2)}$$

и учитывая значение m , выбранное в (1.1.1) можем написать

$$|G_{m,\zeta}(z)| \leq 2\delta e^{m(|Imz|+2)}. \quad (1.1.2)$$

Легко проверить, что если $P_{n,\zeta}(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ — отрезок ряда тейлоровского разложения целой функции $G_{m,\zeta}(z)$ вокруг начала, то

для любого $R > 0$, пока произвольного, при $|z| \leq \frac{R}{e}$ и

$$n = \left[\frac{C_1 R}{\eta} \ln \frac{1}{\delta \eta} \right] + 1,$$

$$\left| P_{n,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right| \leq 2\delta,$$

где $0 < C_1 < 3$ — абсолютная постоянная.

Для оценки $e^{-|x|^\lambda} \left| P_{n,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right|$ вне $|x| < \frac{R}{e}$ заметим, прежде всего, что для полинома $P_{n,\zeta}(z)$ имеем, учитывая (1.1.2)

$$|P_{n,\zeta}(z)| \leq 4\delta e^{4m|z|}$$

и для выполнения неравенства

$$e^{-|x|^\lambda} \left| P_{n,\zeta}(x) - \frac{1}{\zeta - x} \right| \leq 2\delta \quad \text{при} \quad |x| \geq \frac{R}{e}$$

достаточно выбрать $R = C_2 m^{\frac{1}{\lambda-1}}$ где $0 < C_2 < 8$.

Таким образом если положить

$$n = \left[C_1 C_2 \left(\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta \eta} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \right] + 1,$$

то полином $P_{n,\zeta}(z)$ при рассматриваемом весе будет отклоняться от функции $(\zeta - x)^{-1}$ на всей вещественной оси не больше, чем на δ .

Теперь утверждение леммы вытекает непосредственно из решения последнего уравнения относительно δ .

п° 1.2. Имея полином, приближающий ядро Коши, теперь нетрудно приблизить и функцию, представляемую интегралом типа Коши.

Пусть $F(\zeta)$ — функция, заданная на отрезке

$$L_R: z = x + i\mu; \quad \mu > 0; \quad -R \leq x \leq R.$$

Тогда для ее преобразования Коши

$$I_{L_R}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

имеем

$$E_n \left[I_{L_R}'(x), e^{-|x|^\lambda} \right] \leq \frac{R}{\pi \mu} e^{-c\mu \frac{\lambda-1}{\lambda}} \max_{\zeta \in L_R'} |F(\zeta)|,$$

что легко проверить, оценив весовую разность

$$e^{-|x|^\lambda} |I_{L_R}'(x) - P_n(x)|:$$

здесь

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(\zeta) P_{n,\zeta}(z) d\zeta,$$

где $P_{n,\zeta}(z)$ — полином, построенный в предыдущей лемме.

Для приближения интеграла, распространенного по отрезку

$$L_R: z = x - i\mu; \mu > 0; -R \leq x \leq R$$

получим аналогичное неравенство с другим полиномом.

§ 2. Весовое полиномиальное приближение дифференцируемых функций

п° 2.1. Теорема 1*

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на всей оси

$$|f(x)| < 1 \text{ при } -\infty < x < \infty \text{ и}$$

$$\max_{-x < f < x} |f'(t)| \leq M(x), \text{ тогда при } \lambda > 1$$

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A \left\{ \exp \left[- \left(M^{-1} \left(n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right) \right)^\lambda \right] + \frac{\ln^2 n}{n^\lambda} \right\},$$

где λ — любое число в пределах $0 < \lambda < \frac{\lambda-1}{\lambda}$, постоянная A не зависит от n .

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $M(x) > 1$.

Распространим функцию $f(x)$ с действительной оси на всю плоскость, определив ее в точке $z = x + iy$ равенством $f(z) \equiv f(x)$.

Через D обозначим полосу $|\operatorname{Im} z| \leq \mu$; L — ее граница; D_R — прямоугольник $|x| \leq R$; $|y| \leq \mu$, ограниченный отрезками L_R и L'_R и сторонами K_R и K'_R параллельными оси y ; $L_R + L'_R = L$; $K_R + K'_R = \dots$

Для функции $f(z)$ имеем следующее интегральное представление, являющееся аналогом интеграла Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in D_R} \frac{f'(\xi)}{\zeta-z} d\bar{\xi} d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при } z \notin \bar{D}_R \\ f(z) & \text{при } z \in D_R \end{cases} \quad (2.1.1)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$.

* Формулировки теорем 1 и 2 были опубликованы в заметке [6].

Докажем, что при надлежащем выборе толщины полосы μ двойной интеграл может быть сделан меньше выбранного числа δ . С этой целью обозначим через $S_{R,x}$ отрезок действительной оси $E(|t| \leq R + \mu) \times E(|t - x| \leq \mu)$ и через $Q_{R,x}$ дополнение $S_{R,x}$ до отрезка $[-R, R]$. Тогда

$$\left| \iint_{\zeta \in D_R} \frac{f'(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z} \right| \leq \int_{Q_{R,x}} M(\zeta) d\zeta \int_{-\mu}^{\mu} \frac{d\eta}{|\zeta - z|} + \\ + \iint_{D_{R,x}} \frac{M(\zeta) d\zeta d\eta}{|\zeta - z|} = I_1 + I_2,$$

где $D_{R,x}$ — прямоугольник $|\eta| \leq \mu, \zeta \in S_{R,x}$. Теперь $I_1 \leq C_3 M(R) \mu \ln \frac{R}{\mu}$,

C_3 — абсолютная постоянная.

Для оценки I_2 пользуемся следующим утверждением:

Из всех областей B площади A максимум интегралу $\iint_{\zeta \in B} \frac{d\zeta d\eta}{|\zeta - z|}$

сообщает круг $|\zeta - z| \leq \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Для нашего случая $I_2 \leq C_4 M(R) \mu$; C_4 — абсолютная постоянная. Таким образом, чтобы было всюду

$$\frac{1}{2\pi} \left| \iint_{\zeta \in D_R} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta \right| \leq \delta \quad (2.1.2)$$

достаточно положить

$$C_3 M(R) \mu \ln \frac{R}{\mu} = \delta, \quad (2.1.3)$$

т. е.

$$\mu = \frac{C_3 \delta}{M(R) \ln \frac{R}{\delta}}. \quad (2.1.4)$$

C_5 и C_6 — абсолютные постоянные.

Для дальнейшего нам необходима также оценка интеграла

$$I_{K_R}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R} \frac{f(t) dt}{t - x} = I_{K_R}' + I_{K_R}''.$$

Для I_{K_R}' имеем

$$I_{K_R}' = \frac{1}{2\pi i} f(R) \int_{-\mu}^{\mu} \frac{i\eta}{R - x + i\eta} d\eta = \frac{f(R)}{\pi} \arctg \frac{\mu}{R - x}.$$

Аналогично вычисляем I_{K_R} . Таким образом

$$|I_{K_R}(x)| \leq 1 \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty$$

и, в силу (2.1.4)

$$|I_{K_R}(x)| \leq \delta \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1. \quad (2.1.5)$$

Учитывая (2.1.1) и (2.1.2) получим

$$|I_{L_R}(x) + I_{K_R}(x) - f(x)| \leq \delta \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1,$$

откуда, в силу (2.1.5), имеем

$$|I_{L_R}(x) - f(x)| \leq 2\delta \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1.$$

Последнее неравенство с учетом п. 1.2, дает

$$e^{-|x|^\lambda} |f(x) - P_n(x)| \leq 2\delta + E_n(\lambda, \mu, R) \quad \text{при} \quad |x| \leq R-1,$$

где

$$E_n(\lambda, \mu, R) = \frac{R}{\pi\mu} e^{-C\mu n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}$$

С другой стороны вне отрезка $|x| \leq R-1$ вещественной оси имеем

$$e^{-|x|^\lambda} |f(x) - P_n(x)| \leq E_n(\lambda, \mu, R) + C_7 e^{-R^\lambda}$$

и, следовательно,

$$e^{-|x|^\lambda} |f(x) - P_n(x)| \leq C_8 (\delta + E_n + e^{-R^\lambda}) \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty.$$

Это неравенство справедливо для всех значений δ и R , которые сейчас выберем оптимальным образом.

Покажем, что сумма первых двух слагаемых в правых скобках последнего неравенства при надлежащем выборе δ не превосходит

$$C_9 M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \ln^2 n.$$

В самом деле, положим

$$E_n = \frac{R}{\pi\mu} e^{-C\mu n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} = \frac{M(R)}{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}.$$

Решив это уравнение относительно μ и учитывая, что в дальнейшем выбор R будет таким, что $\frac{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{M(R)} \rightarrow \infty$, а так же соответствующее значение δ по (2.1.3), получим

$$\delta + E_n \leq C_9 M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \ln^2 n.$$

Теперь можем написать

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A \ln \left(M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \ln^2 n + e^{-R^\lambda} \right),$$

где A не зависит от n .

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что правая часть нужной нам оценки является мажорантой для полученной нижней грани, в чем легко убедиться, положив $M(R) n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = n^*$, где λ — любое число в пределах $0 < \lambda < \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

п° 2.2. При конкретном задании роста аппроксимируемой функции можно дать в явном виде более точную оценку для убывания наилучших приближений.

Так, например, если $M(R) = R^\alpha$, то

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} (\ln n)^{\frac{\alpha}{\lambda} + 2}.$$

При $M(R) = e^{R^\alpha}$; $\alpha < \lambda$

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq A n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} e^{(\ln n)^{\frac{\alpha}{\lambda}}} \cdot \ln^2 n \left(\leq \frac{A(\varepsilon)}{n^{\frac{\lambda-1}{\lambda}-\varepsilon}}; \text{ где } \varepsilon - \text{любое малое} \right).$$

Если $M(R) = e^{R^\alpha}$; $\alpha > \lambda$;

$$E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq \frac{A(\varepsilon)}{e^{(\ln n)^{\frac{\lambda}{\alpha}-\varepsilon}}} \left(\leq \frac{A(\varepsilon, N)}{(\ln n)^N} \right),$$

где $\varepsilon > 0$ как угодно мало, $N > 0$ как угодно велико.

п° 2.3. В случае когда растет не только производная аппроксимируемой функции, но и сама функция, и для более общей весовой функции имеет место

Теорема 2. Пусть $\hat{h}(x)$ — произвольная четная функция удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{|x|} \ln \frac{1}{\hat{h}(x)} = \varphi(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty;$$

$x = \vartheta(y)$ — функция, обратная к $y = x\varphi(x)$. Пусть, далее, $\max_{-x \leq t \leq x} |f(t)| \leq M_1(x)$; $\max_{-x \leq t \leq x} |f'(t)| \leq M_2(x)$; $M_1(x) \cdot \hat{h}(x) = M_3(x)$.

Тогда

$$E_n(f, h) \leq A \{ M_3 [M_2^{-1} (\vartheta(n)^{1-\kappa})] + [\vartheta(n)]^{-\kappa} \},$$

где κ — любое число в пределах $0 < \kappa < 1$; A — не зависит от n .

Доказательство теоремы 1 без больших изменений распространяется и на теорему 2.

Заметим, что из первой или второй теорем в условиях применимости приведенной выше теоремы А) М. М. Джрбашяна получается несколько более слабое утверждение, а именно $E_n(f, e^{-|x|^\lambda}) \leq Cn^{\frac{1-\lambda}{\lambda} + \varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое число.

п° 2.4. Оценки наилучших приближений дифференцируемых функций при произвольном нормально убывающем весе.

В следующих двух теоремах, в качестве веса рассматривается произвольная нормально убывающая функция $h(x)$.

$$\left[\frac{1}{h(x)} \equiv \Phi(x) \in N, \text{ если } \frac{d \ln \Phi(x)}{d \ln x} \uparrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty \right].$$

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 1, только вместо леммы п° 1.1 используется следующая оценка принадлежащая С. Н. Мергеляну и М. М. Джрбашяну*.

$$\text{При } \frac{1}{h(x)} \in N$$

$$E_n\left(\frac{1}{\zeta - x}, h\right) \leq \frac{C|\zeta|}{\eta} \exp\left\{-\frac{C\eta}{1+|\zeta|^2} \nu_n\right\}; \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad \eta \neq 0,$$

здесь

$$\nu_n = \int_0^{C_0 P^{-1}(n)} \frac{P(t) dt}{1+t^2},$$

где $P(t) = -\ln h(x)$; $C > 0$ и $C_0 > 0$ не зависят от n .

Фигурирующие в этой оценке числа ν_n при определенных не существенных дополнительных ограничениях на весовую функцию эквиваленты числам μ_n , приведенной выше теоремы В) М. М. Джрбашяна.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1;

тогда при $\frac{1}{h(x)} \in N$

$$E_n(f, h) \leq A \{ h[\psi^{-1}(\nu_n^{1-\kappa})] + \nu_n^{-\kappa} \ln^2 \nu_n \},$$

где $\psi(x) = x^2 M(x)$; x — произвольное число в пределах $0 < x < 1$; A не зависит от n .

* Идею получения этой оценки мне сообщил в устной беседе С. Н. Мергелян.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2; тогда

$$E_n(f, h) \leq A \{M_2[\psi^{-1}(v_n^{1-x})] + v_n^{-x}\},$$

где $\psi(x) = x^2 M_2(x)$; x — произвольное число в пределах $0 < x < 1$; A не зависит от n .

§ 3. Оценка убывания наилучших приближений для нормально убывающего веса в одном классе недифференцируемых функций

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$; $|f(x)| \leq 1$ равна нулю при $|x| > R$ и имеет на отрезке $[-R, R]$ модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда

$$E_n(f, h) \leq AR^{\frac{3}{2}} \omega\left(v_n^{\frac{1-\epsilon}{2}}\right),$$

где $\epsilon > 0$ — произвольное малое число, A — не зависит от n .

Доказательство. Распространим функцию $f(x)$ с действительной оси на всю плоскость полагая $f(z) \equiv u(z) + iv(z) \equiv f(x)$. Следуя С. Н. Мергеляну [7] введем функции

$$K_\delta(r) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\delta^2} \left(1 - \frac{r}{\delta}\right) & \text{для } 0 < r \leq \delta \\ 0 & \text{для } r > \delta \end{cases}$$

$$U_\delta + iv_\delta = \Phi_\delta(z) = \iint_{|\zeta-z|<\delta} f(\zeta) K_\delta(|\zeta-z|) d\zeta d\eta; \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

где $\delta < 1$ — некоторое положительное число.

В цитированной выше работе доказываются следующие свойства введенных сейчас функций

1. $|\Phi_\delta(z) - f(z)| \leq \omega(\delta)$ при $|x| < R$;
2. $\left| \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \frac{\partial v_\delta}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial y} + \frac{\partial v_\delta}{\partial x} \right) \right| \leq \frac{12\omega(\delta)}{\delta}$;

3. Если $f(z)$ аналитична в δ -окрестности точки z , то $\Phi_\delta(z) = f(z)$;
- 3*. В нашем случае $\Phi_\delta(z) = 0$ при $|x| > R + \delta$.

Пусть теперь L — граница полосы толщиной 2μ , симметричной относительно действительной оси; D_R — прямоугольник $|y| \leq \mu$; $|x| \leq R$, тогда для усредненной функции $\Phi_\delta(z)$ имеем:

$$\Phi_\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_\delta(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi} \iint_{D_{R+\delta}} \frac{\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \frac{\partial v_\delta}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial y} + \frac{\partial v_\delta}{\partial x} \right)}{\zeta - x} d\zeta d\eta;$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Учитывая перечисленные выше свойства, замечание, сделанное на стр. 8, относительно двойного интеграла и оценки п° 1.2, в применении к весу $\frac{1}{h(x)} \in N$, можем написать:

$$\begin{aligned} E_n(f, h) &\leq h(x) |f(x) - P_n(x)| \leq h(x) |f(x) - \Phi_k(x)| + \\ &+ h(x) |\Phi_k(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_k(t) dt}{t-x}| + h(x) \left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_k(t) dt}{t-x} - P_n(x) \right| \leq \\ &\leq C \left[\omega(\delta) + \frac{\omega(\delta)}{\delta} \sqrt{\mu R} + \frac{R^2}{\mu} e^{-\frac{\mu^2 \gamma_n}{R^2}} \right], \end{aligned}$$

где C — абсолютная константа.

Пользуясь произвольностью μ и $0 < \delta < 1$, положим $\delta = \sqrt{\mu R}$, тогда

$$E_n(f, h) \leq C \left[\omega(\delta) + \frac{R^2}{\delta} e^{-\frac{\mu^2 \gamma_n}{R^2}} \right].$$

Теперь пусть $\frac{\delta^2}{R^2} \gamma_n = \varepsilon_n$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число. Тогда первое слагаемое справа является главным откуда и следует доказываемое утверждение.

§ 4. Влияние аналитичности аппроксимируемой функции в некоторой области, содержащей действительную ось, а также метрических свойств этой области на скорость убывания наилучших весовых приближений на оси

М. М. Джрбашьяном [2] было установлено, что при весе, обеспечивающем полноту из достаточно быстрого убывания взвешенно-наилучших приближений данной функции следует ее аналитичность в некоторой бесконечной области.

В цитированной работе им устанавливается так же и обратная теорема при дополнительных предположениях относительно весовой функции для полосы. А именно доказывается, что

Если $f(z)$ голоморфна и ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ и если определенная на всей оси $-\infty < x < \infty$ четная функция $y = P(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{x p'(x)}{p(x)} > a > 1 \quad \text{при} \quad x > x_0 > 0,$$

то

$$E_n(f, e^{-p(x)}) \leq A \exp \left\{ -\varepsilon d \int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right\} \quad (n > 1),$$

где $A > 0$ и $\varepsilon > 0$ — постоянные, не зависящие от n .

В следующих теоремах нас интересует оценка убывания наилучших приближений на оси при произвольном нормально убывающем весе для функций, регулярных в бесконечных областях специального вида и, в частности, в полюсе.

Теорема 6. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полосе $|Imz| \leq \frac{a}{2}$; $a < 1$ и такова, что $|f(z)| \leq \lambda(r) |Imz| \leq \frac{a}{2}$, $|z| \geq r$. $1 \geq \lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty^*$.

Тогда при $\frac{1}{h(x)} \in N$

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ \lambda \left(a^{\frac{1}{2}} \gamma_n^{\frac{1-x}{2}} \right) + e^{-c\gamma_n^x} \right\},$$

где $0 < x < 1$; A и $C > 0$ не зависят от n .

Доказательство.

Выберем пока произвольное значение $R > 0$ и обозначим через L_R и $L_R^{\pm\infty}$ части границы $|Imz| = \frac{a}{2}$, лежащие соответственно в полосе $Re z \leq R$ и вне этой полосы. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R^{\pm\infty}} \frac{f(t) dt}{t-z} = I_{L_R}(z) + I_{L_R^{\pm\infty}}(z); \quad |Imz| < \frac{a}{2}.$$

Покажем, что интегралы $I_{L_R^{\pm\infty}}(z)$ равномерно ограничены на всей оси.

Имеем для $x = R - \frac{a}{2}$

$$\begin{aligned} |I_{L_R^{\pm\infty}}(x)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^R \frac{f\left(t + \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{f(R+iy) dy}{R-x+iy} \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{-\infty} \frac{f\left(t - \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{f(R+iy) dy}{R-x+iy} \right| \leq \lambda(R-1) \end{aligned}$$

для $x \geq R - \frac{a}{2}$

* Требование $\lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, повидимому, не существенно и может быть снято.

$$\begin{aligned}
|I_{L_R^\infty}(x)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{R-a} \frac{f\left(t + \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{f(R-a-iy) dy}{R-a-x+iy} \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{R-a}^{\infty} \frac{f\left(t - \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{f(R-a+y) dy}{R-a-x+iy} \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{R+a} \frac{f\left(t + \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{f\left(t - \frac{ia}{2}\right) dt}{t-x} \right| \leq \\
&\leq C\lambda(R-a) \leq C\lambda(R-1).
\end{aligned}$$

Таким образом на всей оси $|I_{L_R^\infty}(x)| \leq C\lambda(R-1)$. Та же оценка имеет место для $I_{L_R^{-\infty}}(x)$.

Пользуясь результатом п° 1.2 в применении к весу $\frac{1}{h(x)} \in N$ и интегральным представлением функции $f(z)$, можем написать

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ \lambda(R) + \frac{R^2}{a} e^{-\frac{Ca}{1+R^2} \nu_n} \right\},$$

откуда следует утверждение теоремы, если принять $R^2 = a\nu_n^{1-\alpha}$; $0 < \alpha < 1$.

Аналогично доказывается и следующая

Теорема 7. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $\bar{D}$, ограниченной кривыми $L^\pm$: $y = \pm \varphi(x) \downarrow 0$ и $|f(z)| \leq \lambda(r)$; $|z| \geq r$; $z \in D$; $1 > \lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Тогда при $\frac{1}{h(x)} \in N$

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ \lambda \left[\psi^{-1}(\nu_n^{1-\alpha}) \right] + e^{-C\nu_n^\alpha} \right\},$$

где $\psi(R) = \frac{R^2}{\varphi(R)}$, $0 < \alpha < 1$, A не зависит от n .

Покажем, что существуют области довольно быстро суживающиеся с двух сторон на действительную ось и регулярные в них функции, для которых второе слагаемое в правой части последней теоремы является большим и следовательно определяет скорость убывания наилучших приближений.

Пользуясь оценками Л. Альфорса [8] об искажении отрезков при конформном отображении областей типа полосы на полосу, легко

получить, что предельная скорость убывания не равной тождественно нулю функции, аналитической в области D теоремы 7 имеет порядок

$e^{-C_0 \int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)}}$, где $C_0 > 0$ некоторая константа. Для наилучшего приближения такой функции имеем, согласно теореме 7

$$E_n(f, h) \leq A \left\{ e^{-C_0 \int_0^{\psi^{-1}(\nu_n^{1-\varepsilon})} \frac{dx}{\varphi(x)}} + e^{-C \nu_n^\varepsilon} \right\}. \quad (4.1)$$

Положим $\alpha = 1 - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$; тогда

$$\int_0^{\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)} \frac{dx}{\varphi(x)} \geq \int_{\frac{1}{2} \psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)}^{\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)} \frac{dx}{\varphi(x)} \geq \frac{\frac{1}{2} \psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)}{\varphi\left[\frac{1}{2} \psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)\right]}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{2} \psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon) = K, \quad (4.2)$$

тогда

$$\int_0^{\psi^{-1}(\nu_n^\varepsilon)} \frac{dx}{\varphi(x)} \geq \frac{K}{\varphi(K)}. \quad (4.3)$$

С другой стороны, учитывая, значение, $\psi(x)$ в теореме 7 и (4.2), имеем

$$\nu_n^{1-\varepsilon} = \left[\frac{4K^2}{\varphi(2K)} \right]^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}. \quad (4.4)$$

Теперь, если положить, например, $\varphi(x) = Ce^{-x}$, то из (4.3) и (4.4) следует, что при $n > N_0$ первое слагаемое в правой части (4.1) меньше второго, т. е.

Существуют области, суживающиеся с двух сторон на действительную ось и функции, регулярные в них и стремящиеся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, для которых при нормально убывающем весе и $n > N_0$

$$E_n(f, h) \leq Ae^{-\nu_n^{1-\varepsilon}}$$

A не зависит от n , $\varepsilon > 0$ произвольное малое число.

Վ. Ա. Տոնյան

ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ԿՇՈՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ստացված են գնահատականներ իրական առանցքի վրա կշռվող լավագույն բազմանդամային մոտավորությունների՝

$$E_n(f, h) = \inf_{\{P_n\}} \sup_{-\infty < x < \infty} (h(x) | f(x) - P_n(x) |)$$

թվերի նվազման արագությունը վերաբերյալ, նորմալ նվազող $h(x)$ կշիռների համար մոտարկելի $f(x)$ ֆունկցիաների դանդաղ դասերում:

Առաջնաստիճան է հասնում իրական առանցքը պարունակող որոշ անվերջ տիրույթներում անսլիտիկ ֆունկցիաների կշռվող լավագույն մոտավորությունների նվազման արագությունը առանցքի վրա, նույն կշիռների դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мергелян С. Н. О весовых приближениях многочленами, ДАН СССР, 97, 4, 1954.
2. Джрбашян М. М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сборник, т. 30 (78) : 3, 1955.
3. Мергелян С. Н. Весовые приближения многочленами. УМН, II, 5, 107, 1955.
4. Ахиезер Н. И. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. УМН, XI, 4/70, 1956.
5. Джрбашян М. М., О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси ДАН СССР, 84, 6, 1952.
6. Тонян В. А. О взвешенно-полиномиальном приближении дифференцируемых функций, на вещественной оси. ДАН СССР, 105, 1955.
7. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, 2 : 48, 1952.
8. L. Ahlfors Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Fenn., N. S. A., т. 1, № 9, 1930.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, А. А. Бабоян

К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой

В настоящей статье рассматривается задача об изгибе круглой толстой плиты произвольной осесимметричной нагрузкой, приложенной к ее основаниям.

Плита предполагается закрепленной так, что одна из окружностей на боковой поверхности или какая-либо точка на оси плиты не имеет осевых перемещений, а вся боковая поверхность не имеет радиальных перемещений [1].

Аналогичного типа задачи были рассмотрены в работах Клеммова [2], А. Надаи [3], А. И. Лурье [1, 4], В. К. Прокопова [5] и Л. С. Лейбензона [6].

Задача решается методом Фурье, при этом исходя из основных уравнений теории упругости, без каких-либо допущений.

Рассмотрим круглую толстую плиту (или цилиндр) радиуса R и толщины h . Будем пользоваться цилиндрической системой координат и совместим ось z с осью плиты (фиг. 1).

Известно [7], что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению функции напряжений $\Phi(r, z)$ (r — направление радиуса, z — направление оси вращения), которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (1)$$

а на поверхности тела задается законом распределения напряжений или перемещений.

Напряжения и перемещения при осесимметричной деформации выражаются через функцию напряжений $\Phi(r, z)$ соотношениями

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right),$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\
 \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\
 u_r &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \\
 u_z &= \frac{1}{2\mu} \left[2(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right],
 \end{aligned} \quad (2)$$

где μ — модуль сдвига, а ν — коэффициент Пуассона.

Решая уравнение (1) методом Фурье для круглого сплошного цилиндра, функцию $\Phi(r, z)$ получим в виде [8, 9]

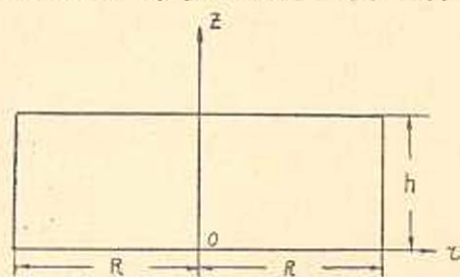
$$\begin{aligned}
 \Phi(r, z) &= z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k I_0(\lambda_k r) + \\
 &+ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \mu_k z + \\
 &+ B_k \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k r),
 \end{aligned} \quad (3)$$

где $J_i(x)$ — функция Бесселя i -го порядка первого рода с действительным аргументом, $I_i(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента [10], $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$, а

μ_k — корни уравнения

$$J_1(xR) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра при следующих граничных условиях



Фиг. 1.

$$\left. \begin{aligned}
 u_r(R, z) &= f_1(z) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \lambda_k z \\
 \tau_{rz}(R, z) &= f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k z
 \end{aligned} \right\} \quad (0 < z < h)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z(r, 0) &= f_3(r) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) \\
 \tau_{rz}(r, 0) &= f_4(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(\mu_k r)
 \end{aligned} \right\} \quad (0 < r < R) \quad (5)$$

$$\tau_z(r, h) = f_3(r) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r)$$

$$\tau_{rz}(r, h) = f_6(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_1(\mu_k r)$$

Здесь мы допускаем, что функции $\{f_i\}$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z имеем также

$$\tau_{rz}(0, z) = u_r(0, z) = 0. \quad (6)$$

Условиями (6) и (5) полностью определяются все напряжения и перемещение u_r . Перемещение же u_z определяется с точностью до постоянной C . Для определения последней предполагаем, что перемещения u_z на окружности $r = R$, $z = 0$ боковой поверхности цилиндра равны нулю

$$u_z(R, 0) = 0. \quad (7)$$

Вычислив по формулам (2) с помощью (3) напряжения и перемещения, получим

$$\begin{aligned} \tau_r(r, z) = & -2(1-2\nu)A + 6\nu B - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \left\{ [E_k + \right. \\ & \left. + (1-2\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) - E_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [A_k + (1+2\nu)D_k] \operatorname{ch} \mu_k z + [B_k + (1+2\nu)C_k] \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \left\{ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + \right. \\ & \left. + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_z(r, z) = & 4(2-\nu)A + 6(1-\nu)B + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \{ [E_k + \\ & + 2(2-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [D_k(1-2\nu) - \\ & - A_k] \operatorname{ch} \mu_k z + [C_k(1-2\nu) - B_k] \operatorname{sh} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \{ [E_k + 2(1-\nu) G_k] I_1(\lambda_k r) + \\ & + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) \} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_1(\mu_k r) \{ (A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z) = & -\frac{1}{2\mu} \left\{ 2Ar + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z [E_k I_1(\lambda_k r) + \right. \\ & + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r)] - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_1(\mu_k r) [(A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z] \Big\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, z) = & \frac{1}{2\mu} \left\{ [8(1-\nu)A + 6(1-2\nu)B]z + 2(1-2\nu)C + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sin \lambda_k z [[E_k + 4(1-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r)] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k r) [[2(1-2\nu)D_k - A_k] \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + [2(1-2\nu)C_k - B_k] \operatorname{ch} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z] \Big\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что условия (6) удовлетворяются тождественно. Удовлетворив же условиям (5) и (7), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (3), получаем ряд соотношений.

При получении этих соотношений пользуемся разложениями Фурье-Дани [11] функций $I_0(\lambda_k r)$ и $rI_1(\lambda_k r)$ по функциям $\{J_0(\mu_k r)\}$ [8], где μ_k — корни уравнения (4).

Из указанных обоих соотношений для постоянных интегрирования получаем следующие значения

$$A = -\frac{\mu g_0}{2R}, \quad (13)$$

$$B = \frac{1}{6(1-\nu)} \left[a_0 + \frac{2(2-\nu)\mu g_0}{R} - \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k} \right], \quad (14)$$

$$C = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k R)}{1-\beta_k^2} \left\{ N_k (\beta_k \cosh \mu_k h + \operatorname{cth} \mu_k h) - \right. \\ \left. - M_k (\sinh \mu_k h + \beta_k \operatorname{cth} \mu_k h) + \frac{d_k \beta_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{2\mu_k (1-\nu)} (1-2\nu + \beta_k^2) \right\}, \quad (15)$$

$$G_k = \frac{q_k + 2\mu_k \lambda_k g_k}{2(1-\nu)\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)}, \quad (16)$$

$$E_k = -\frac{1}{\lambda_k^2 I_1(\lambda_k R)} \left[2\mu_k g_k - \frac{(q_k + 2\mu_k \lambda_k g_k) R I_0(\lambda_k R)}{2(1-\nu) I_1(\lambda_k R)} \right], \quad (17)$$

$$D_k = \frac{1}{\mu_k^2 (1-\beta_k^2)} \left[M_k \beta_k - N_k + \frac{c_k}{\mu_k} (\beta_k \cosh \mu_k h - \operatorname{cth} \mu_k h) - \right. \\ \left. - \frac{d_k}{\mu_k} (\beta_k \operatorname{cth} \mu_k h - \cosh \mu_k h) \right], \quad (18)$$

$$C_k = \frac{1}{\mu_k^2 (1-\beta_k^2)} \left[N_k (\beta_k \cosh \mu_k h + \operatorname{cth} \mu_k h) - \right. \\ \left. - M_k (\cosh \mu_k h + \beta_k \operatorname{cth} \mu_k h) + \frac{c_k}{\mu_k} + \frac{d_k \beta_k}{\mu_k} \right], \quad (19)$$

$$A_k = \frac{N_k}{\mu_k^2} + (1-2\nu) D_k, \quad (20)$$

$$B_k = \frac{c_k}{\mu_k^3} - 2\nu C_k, \quad (21)$$

где введены следующие обозначения

$$\beta_k = \mu_k h \cosh \mu_k h \quad (22)$$

$$N_k = -\frac{a_k}{\mu_k} + \frac{2}{\mu_k R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p q_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^2} + \\ + \frac{2\mu_k}{(1-\nu) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p (q_p + 2\mu_p \lambda_p g_p)}{(\lambda_p^2 + \mu_k^2)^2}, \quad (23)$$

$$M_k = -\frac{b_k}{\mu_k} + \frac{2}{\mu_k R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p q_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^2} + \\ + \frac{2\mu_k}{(1-\nu) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p (q_p + 2\mu_p \lambda_p g_p)}{(\lambda_p^2 + \mu_k^2)^2}. \quad (24)$$

Из упомянутых выше соотношений получается также следующее равенство

$$a_0 - b_0 = \frac{4}{R} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k}, \quad (25)$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих вдоль оси плиты.

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования из (13)–(21) в (8)–(12), получим формулы для определения напряжений и перемещений.

В качестве примера рассмотрим случай, когда плита изгибается нормальной нагрузкой, приложенной осесимметрично к верхнему ее основанию, при отсутствии радиальных перемещений на всей боковой поверхности и осевых перемещений на средней окружности ($r = R$ при $z = \frac{h}{2}$) этой поверхности, то-есть: когда граничные условия заданы соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_r(R, z) = f_1(z) &= 0, \\ \tau_{rz}(R, z) = f_2(z) &= a(z - h)z, \\ z_z(r, 0) = f_3(r) &= 0, \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_4(r) &= 0, \\ z_z(r, h) = f_5(r) &= \begin{cases} -q & r < \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases} \\ \tau_{rz}(r, h) = f_6(r) &= 0, \\ u_r\left(R, \frac{h}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где постоянная величина

$$a = \frac{3q\varepsilon^2}{Rh^2} \quad (27)$$

определяется из условия равновесия (25).

При таких условиях имеем

$$a_k = c_k = d_k = g_k = 0, \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= -\frac{Q}{\pi R^2}, \\ b_k &= -\frac{2QJ_1(\mu_k \varepsilon)}{\pi R^2 J_0^2(\mu_k R) \varepsilon \mu_k}, \\ q_h &= \frac{12Q}{\pi R h^4 \mu_k^3} [1 + (-1)^{h+1}], \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где введено обозначение

$$Q = q\varepsilon^2. \quad (30)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q\varepsilon^2 = Q_0$, что имеет место, когда плита изгибается сосредоточенной силой Q_0 , приложенной в центре ее верхнего основания.

Пользуясь значениями (28) и (29), для неизвестных постоянных получим следующие значения

$$A = 0,$$

$$B = -\frac{Q}{12(1-\nu)\pi R^2},$$

$$C = \frac{Qh}{8(1-\nu)\pi R^2} - \frac{24Q}{(1-2\nu)\pi Rh^4} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} I_0(\lambda_k R)}{\lambda_k^4 I_1(\lambda_k R)} +$$

$$+ \frac{6Q}{(1-\nu)(1-2\nu)\pi h^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\lambda_n^4} \left[\frac{I_0^2(\lambda_n R)}{I_1^2(\lambda_n R)} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k R) (b_k + 2N_k^*)}{\mu_k (1-\beta_k)} \left[(1-\nu) \operatorname{csh} \frac{\mu_k h}{2} + \frac{1}{4} \mu_k h \operatorname{sch} \frac{\mu_k h}{2} \right]. \quad (31)$$

$$G_k = \frac{12Q}{\pi R h^4 \lambda_k^6 (1-\nu) I_1(\lambda_k R)},$$

$$E_k = \frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} G_k,$$

$$C_k = -\frac{2Q J_1(\mu_k z) (\beta_k \operatorname{cth} \frac{\mu_k h}{2} + \operatorname{csh} \frac{\mu_k h}{2})}{\pi R^2 (1-\beta_k^2) \mu_k^4 z J_0^2(\mu_k R)} + \frac{N_k^* \operatorname{cth} \frac{\mu_k h}{2}}{\mu_k^3 (1-\beta_k)}, \quad (32)$$

$$D_k = \frac{2Q \beta_k J_1(\mu_k z)}{\pi R^2 (1-\beta_k^2) \mu_k^4 z J_0^2(\mu_k R)} - \frac{N_k^*}{\mu_k^3 (1-\beta_k)},$$

$$A_k = \frac{N_k^*}{\mu_k^3} + (1-2\nu) D_k,$$

$$B_k = -2\nu C_k.$$

где использованы обозначения (22), (30), а также

$$N_k^* = \frac{6Q}{\pi R^2 h^2 (1-\nu) \mu_k^2 J_0(\mu_k R)} \left\{ (1-\nu) \left(1 - \frac{2 \operatorname{th} \frac{\mu_k h}{2}}{\mu_k h} \right) + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{\operatorname{th} \frac{\mu_k h}{2}}{\mu_k h} (3-\beta_k) \right] \right\}. \quad (33)$$

Подставляя эти значения в выражения (8) и (12), для определения нормального напряжения σ_r и осевого перемещения u_z получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & -\frac{Q\nu}{2\pi R^2(1-\nu)} - \frac{12Q}{\pi R^2 h^4(1-\nu)} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k z}{\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)} \left\{ \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + \right. \\ & + \frac{R I_1(\lambda_k r) I_0(\lambda_k R)}{r I_1(\lambda_k R)} + \left[1 - 2\nu \frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} \right] I_0(\lambda_k r) \Big\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{(1-\beta_k^2) \operatorname{sh} \mu_k h} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \{ b_k [\operatorname{sh} \mu_k z - \mu_k (h-z) \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + \beta_k (1 + \mu_k z) \operatorname{ch} \mu_k (h-z)] + N_k^* [(1 + \beta_k) \operatorname{sh} \mu_k z - \operatorname{sh} \mu_k (h-z) + \\ & + (1 + \beta_k) \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k (h-z) + \beta_k \operatorname{ch} \mu_k (h-z) - (1 - \beta_k) \mu_k (h-z) \operatorname{ch} \mu_k z] \} - \\ & - 2\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r (1-\beta_k^2) \operatorname{sh} \mu_k h} \{ b_k [\operatorname{sh} \mu_k z + \beta_k \operatorname{ch} \mu_k (h-z)] + \\ & + N_k^* [\operatorname{sh} \mu_k z - \operatorname{sh} \mu_k (h-z) + \beta_k \operatorname{ch} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k h] \}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2\mu u_z(r, z) = & \frac{(1-2\nu)Qz}{2(1-\nu)\pi R^2} + 2(1-2\nu)C + \\ & + \frac{48Q}{\pi R h^4} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k^4} \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} - \\ & - \frac{12Q}{\pi R h^4(1-\nu)} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k^3 I_1^2(\lambda_k R)} [R I_0(\lambda_k r) I_0(\lambda_k R) - r I_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R)] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r) \left\{ \frac{b_k}{\mu_k (1-\beta_k^2) \operatorname{sh} \mu_k h} [(2\nu - 2 - \beta_k \operatorname{ch} \mu_k h) \operatorname{ch} \mu_k z - \right. \\ & - (1 - 2\nu) \beta_k \operatorname{ch} \mu_k (h-z) + \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - \mu_k z \beta_k \operatorname{sh} \mu_k (h-z)] - \\ & - \frac{N_k^*}{\mu_k (1-\beta_k) \operatorname{sh} \mu_k h} [2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu_k (h-z) + 2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + \mu_k (h-z) \operatorname{sh} \mu_k z + \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k (h-z)] \Big\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Некоторые значения напряжения σ_r и перемещения u_z , вычисленные по формулам (34) и (35) для различных точек плиты, при $\nu = 0,3$, в зависимости от отношений $\frac{z}{R}$ и $\frac{h}{R}$ приведены в таблицах

Таблица 1

	$\frac{h}{R}$	$\frac{z}{R}$	
		1	1/2
$\frac{u_z(0, 0)}{K_1}$	1	-0,324	-0,583
	1/3	-6,996	-19,388
	1/4	-21,322	—
$\frac{u_z(0, \frac{h}{2})}{K_1}$	1	-0,387	-0,787
	1/3	-7,918	-19,450
$\frac{u_z(0, h)}{K_1}$	1	-0,467	-1,242
	1/3	-8,425	-21,172
	1/4	-21,465	—
$\frac{u_z(R, 0)}{K_1}$	1	-0,033	-0,085
	1/3	+0,327	+0,106
$\frac{u_z(R, h)}{K_1}$	1	-0,176	-0,294
	1/3	-1,102	-1,149

Таблица 2

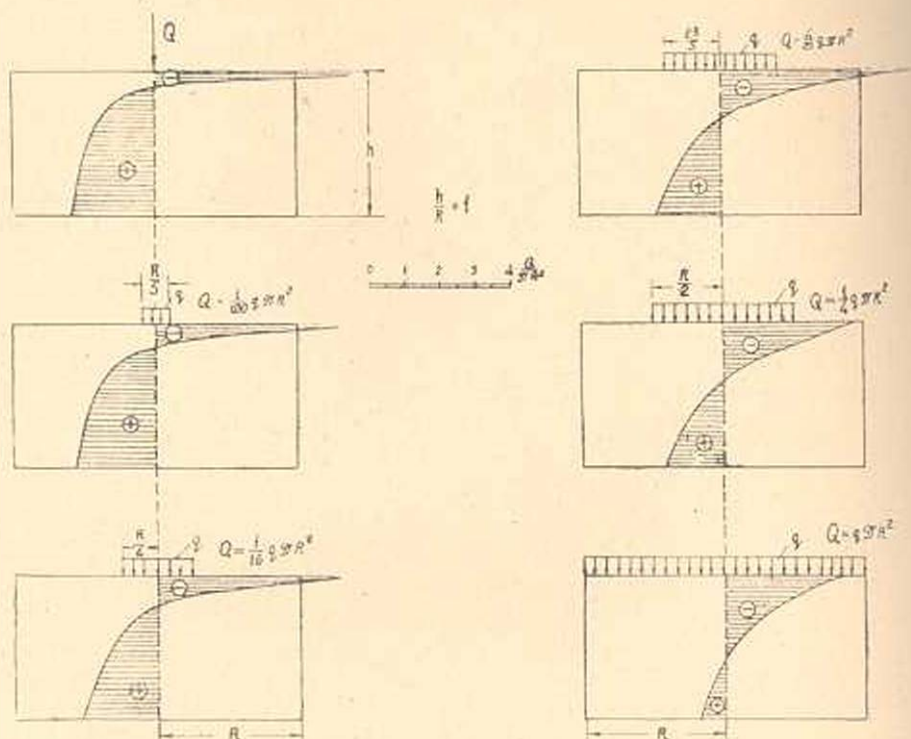
	$\frac{h}{R}$	$\frac{z}{R}$						
		1	1/2	2/5	1/4	1/10	1/20	0
$\frac{\tau_r(0, 0)}{K}$	1	0,760	1,602	1,817	2,105	2,290	2,319	2,329
	1/3	3,504	13,730	17,070	24,783	28,105	37,178	38,024
$\frac{\tau_r(0, \frac{h}{2})}{K}$	1	-0,214	0,449	0,750	1,327	1,865	1,964	1,999
	1/3	-0,214	0,459	1,211	3,532	13,555	18,830	21,379
$\frac{\tau_r(0, h)}{K}$	1	-3,589	-3,727	-5,556	-13,392	-80,614	-320,617	—
	1/3	-3,943	-12,859	-17,912	-29,524	-99,698	-340,202	—

В таблицах 1 и 2 перемещения u_z приведены в долях $K_1 = \frac{qh}{\mu} \left(\frac{z}{R} \right)^2 = \frac{Qh}{\pi R^2 \mu}$, а напряжения τ_r — в долях $K = q \left(\frac{z}{R} \right)^2 = \frac{Q}{\pi R^2}$.

При вычислениях было использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k z)}{\mu_k J_0(\mu_k R)} = \frac{z}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} - 1 \right), \quad \text{где } 0 \leq z \leq R. \quad (36)$$

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений τ_r вдоль оси плиты на фигурах 2 и 3 приведены эпюры этих напряжений. Следует отметить, что приведенные эпюры составлены приближенно: на основании расчетов, произведенных только для трех точек оси.



ՓԻՂ. 2.

Բ. Լ. Աբրահամյան, Ա. Ա. Բաբոյան

ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՈՎ ՀԱՍՏ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

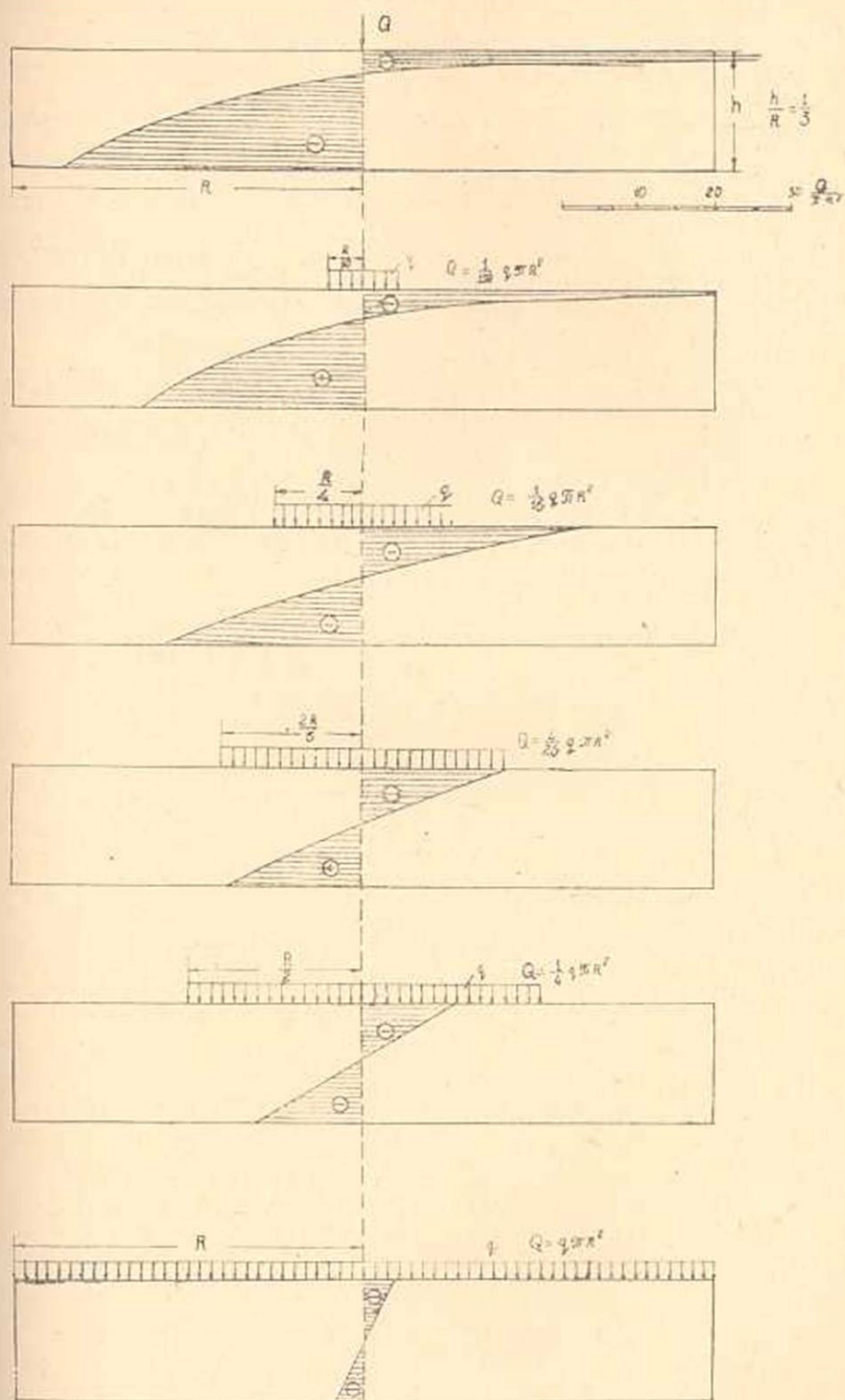
Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ բետոն հաստ կլոր սալերի ծոման խնդիրը, երբ բետը կամավոր ձևով կիրառված է սալի հիմքերին:

Սալը ենթադրվում է ամրացված ալյուրե, որ նրա կողմնալիճ մակերևույթի մի շրջանագծի վրա կամ առանցքի մի որևէ կետում բացակայում են առանցքի ուղղությամբ տեղափոխումները, իսկ ամբողջ կողմնալիճ մակերևույթի վրա չկան տեղափոխումներ շառավղի ուղղությամբ:

Նման խնդիրները դիտարկված են հղել Կլեմմովի [2], Նազարի [3], Ա. Լուրյեի [1, 4], Վ. Պրոկոպովի [5] և Լ. Լիբենդոնի [6] աշխատություններում:

Այս աշխատության մեջ քննարկվում խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի եզանակով, առաձգականության տեսության հիմնական հավասարումներից ելնելով, առանց որևէ կինեմատիկական հիպոթեզի:



Фиг. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, том VI, вып. 2—3, 1942, стр. 151—163.
2. CLEMMOW C. A. Flexure of Thick Circular Plates, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. 'A', Vol. 112, p. 559, 1926.
3. Nadai A. Elastische Platten, Berlin, 1925.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955, стр. 218—230.
5. Прокопов В. К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. ПММ, том XIV, вып. 5, 1950, стр. 527—536.
6. Лейбензон Л. С. К теории безбалочных покрытий. Собрание трудов, том I, изд. АН СССР, 1951, стр. 100—148.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
8. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. ДАН АрмССР, том XIX, № 1, 1954, стр. 3—12.
9. Абрамян Б. Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. ДАН АрмССР, том XXVI, № 2, 1958, стр. 65—72.
10. Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиниздат, М., 1949.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Госиниздат, часть I, М., 1949, стр. 655.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Р. Месчян

О ползучести связного грунта при сжатии в условиях
невозможности бокового расширения

Вопросы уплотнения связных водонасыщенных грунтов во времени имеют весьма важное значение для решения задач осадок сооружений во времени, устойчивости откосов сооружений, возводимых в условиях высокой влажности укладываемого грунта, устойчивости оснований сооружений при нестабилизированном состоянии возводимых на сравнительно слабопроницаемых грунтах высокой влажности и т. д. [1].

Для решения указанных выше задач пользуются теорией уплотнения земляных масс, развитой в работах [1, 2, 3 и т. д.].

Следует однако отметить, что до последнего времени (1953 г.) теория уплотнения базировалась на таких предпосылках, которые неполностью соответствовали действительной природе деформирования водонасыщенного связного грунта [4]. В частности, в теории уплотнения приближенно принималось, что длительность процесса деформирования связного грунта обусловлена временем, необходимым для перемещения свободной воды, вытекающей из пор, пренебрегая ролью внутренних связей грунта, которые обуславливают его прочность. При этом во всех работах принималось то допущение, что деформация скелета грунта изменяется мгновенно при изменении напряжений [5].

В дальнейшем, по мере развития физико-химии коллоидов, грунтоведения, инженерной геологии и механики грунтов, точка зрения на природу деформирования связных грунтов во времени постепенно изменилась. В развитии этих новых представлений имели большое значение работы [4, 6, 7, 8, 9, 10 и т. д.].

На основании достижений указанных выше наук и анализа факторов, влияющих на процесс деформирования водонасыщенного глинистого грунта, установлено [4], что наряду с сопротивлением пор при вытекании свободной воды из них имеет не менее важное значение сопротивление от взаимного перемещения частиц и агрегатов грунта.

Выражаясь словами Н. Н. Маслова [11], при деформировании водонасыщенного грунта всегда имеет место конкурентная борьба за счет: 1) сопротивляемости проходимого через толщу воды (фактор коэф. фильтрации) и 2) сопротивляемости деформации уплотнения

грунта за счет его внутренних водно-коллоидальных связей (фактор вязкости). Под фактором вязкости понимается то сопротивление, которое препятствует взаимному перемещению частиц в породе (грунте).

Дальнейшим развитием теории уплотнения земляных масс явились работы [8, 9]. В этих работах для учета фактора, обусловленного сопротивлением взаимному перемещению частиц и агрегатов грунта в теорию уплотнения земляных масс, впервые В. А. Флориным было введено понятие о ползучести скелета грунта и были решены задачи уплотнения с учетом ползучести скелета, используя для этого теорию упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [12, 13].

Под ползучестью скелета грунта подразумевается деформация [8, 9], обусловленная относительным смещением твердых частиц и агрегатов грунта, а также разрушением цементационных связей, вследствие чего, при действии внешней нагрузки, деформации возникают не сразу, а постепенно.

В зависимости от истории образования данного грунта указанные выше факторы в процессе деформирования будут иметь ту или иную роль. В частности для сравнительно неплотных новых образований, у которых связи между частицами очень слабы, когда перемещение частиц в грунте происходит почти беспрепятственно, процесс деформирования будет в основном обусловлен фильтрационными свойствами грунта, однако, по мере уплотнения, упрочнения и образования более прочных связей между его частицами и агрегатами, роль структурных и структурно-адсорбционных деформаций [4], т. е. ползучести скелета грунта, значительно повышается.

Таким образом, соотношение между указанными выше основными факторами деформирования водонасыщенного связного грунта не остается постоянным, оно может изменяться в процессе уплотнения, как по мере приложения внешних нагрузок, так и при длительном выдерживании образцов грунта под нагрузкой.

Если процесс деформирования связного водонасыщенного грунта в основном зависит от фактора фильтрации, то для решения задачи уплотнения необходимо пользоваться теорией фильтрационного уплотнения, пренебрегая ролью ползучести скелета грунта и, наоборот, если явление выжимания воды из пор не имеет существенного значения, то можно пренебрегать ролью фильтрации, используя для решения задач уплотнения теорию ползучести. А когда оба фактора выступают совместно, то ясно, что в этом случае необходимо пользоваться совместным решением теории фильтрационного уплотнения и теории ползучести [8, 9].

Критерием, определяющим значение того или иного фактора, должна служить продолжительность деформирования образцов разной толщины при их испытании одинаковыми нагрузками. Если окажется, что продолжительность деформирования не зависит от высоты образцов, то это будет означать, что основная роль в процессе деформи-

рования принадлежит ползучести скелета грунта. Если же продолжительность деформирования будет зависеть от второй степени высоты образца, т. е. будет соответствовать решению фильтрационного уплотнения то можно будет пренебрегать ползучестью скелета грунта. Во всех остальных случаях необходимо считаться как с ползучестью скелета, так и фильтрационными явлениями. Следовательно для решения задач уплотнения в каждом отдельном случае необходимо, путем экспериментирования, определить значение того или иного фактора в процессе деформирования грунта.

Оставляя пока в стороне вопрос о влиянии высоты образца на продолжительность деформирования, в этой статье приводим только результаты экспериментального исследования характеристик **ползучести скелета связных грунтов**, проведенных на образцах одинаковых размеров с целью установления возможности применения к связным грунтам теории упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [12, 13], при их сжатии в условиях отсутствия бокового расширения.

В целях выполнения поставленной задачи были экспериментально исследованы все те основные предпосылки, которые положены в основу указанной выше теории, как-то: 1) зависимость между мгновенными деформациями и напряжениями; 2) изменяемость модуля мгновенной деформации; 3) зависимость между деформациями ползучести и напряжениями; 4) справедливость закона наложения для деформации ползучести грунта.

При выполнении указанной работы мы пользовались образцами водонасыщенных грунтов, т. е. не исключались деформации, вызванные фильтрационными явлениями, однако, учитывая то обстоятельство, что испытанию подвергались образцы небольшой толщины (10—20 мм), у которых явления фильтрации проявляются в самом начале испытания, то ролью фильтрационных явлений пренебрегли.

Ввиду необходимости выполнения множества параллельных опытов из образцах с одинаковыми физическими и механическими свойствами и практической невозможности подобрать таковые из грунтов естественной структуры, для решения поставленной задачи мы пользовались образцами грунта нарушенной структуры.

Материалы и приборы

При ведении экспериментальных исследований в качестве материала были использованы восемь различных грунтов, отобранных из участков работ Армянского отделения Института „Гидроэнергопроект“ и из оснований фундаментов ряда строящихся зданий в г. Ереване.

Данные об основных физических свойствах исследованных грунтов сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Лаб. № грунта	Гранулометрический состав в %			Удельн. вес в г/см³	Объемн. вес в г/см³	Естеств. влажн. в %	Пористость в %	Коэф. пористости	Пределы пластичности		
	Наименование частиц								нижн. граница текучести	нижн. граница пластичн.	число пластичности
	песчаных	пылеватых	глинистых								
3248	49,60	30,81	19,59	2,75	1,83	23,8	46,20	0,86	27,5	17,4	10,1
3363	11,79	72,19	16,02	2,69	1,76	32,6	50,01	1,04	46,8	26,4	20,4
3371	20,71	56,20	23,09	2,69	1,89	27,9	45,10	0,82	40,4	24,1	16,3
3389	27,25	62,49	10,26	2,72	1,81	28,9	48,50	0,94	47,0	34,7	12,3
3454	17,28	59,74	22,58	2,76	1,68	38,7	56,20	1,28	—	—	—
3455	11,75	55,51	32,74	2,79	1,58	32,6	57,30	1,35	44,6	23,5	21,1
1—57	—	—	—	2,64	—	—	—	—	44,3	17,3	27,0
2—57	21,8	67,4	10,8	2,66	—	—	—	—	31,3	18,6	12,7

Из вышеприведенной таблицы следует, что нами рассмотрена почти вся гамма глинистых грунтов, начиная от легких пылеватых суглинков (гр. за лаб. № 3389), кончая глиной (гр. за лаб. № 1—57).

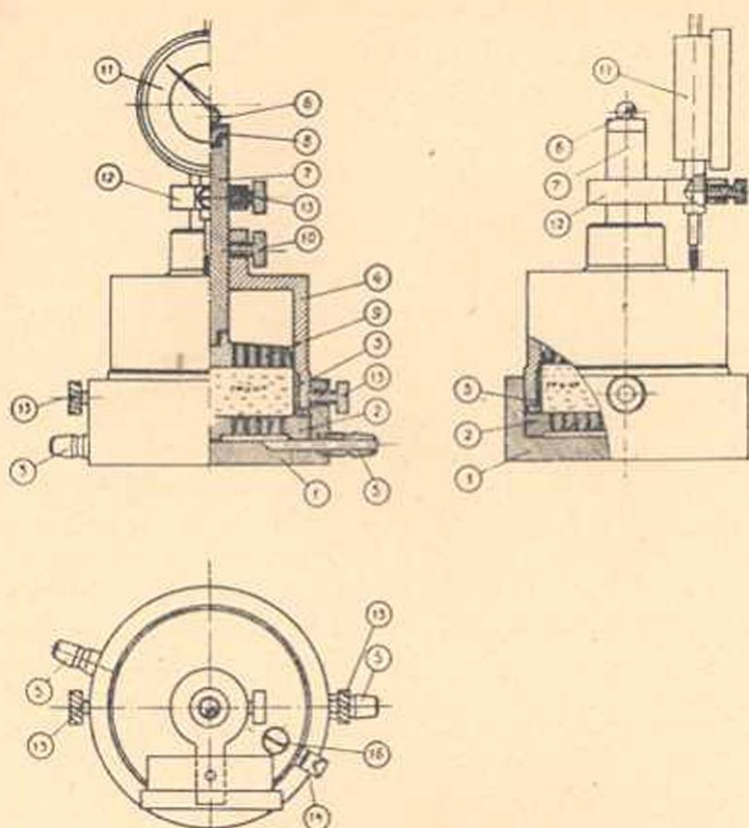
Для выполнения экспериментального исследования указанных выше основных предпосылок теории ползучести и определения основных характеристик деформативности грунтов были использованы компрессионно-фильтрационные приборы—комфилтметры—Г. И. Тер-Степаняна [14] и приборы нашей конструкции [15] (фиг. 1 и 2).

Прибор, предназначенный для исследования ползучести связных грунтов при сжатии в условиях отсутствия бокового расширения, состоит из днища 1, помещенного в нем нижнего дырчатого диска (фильтра) 2, грунтового кольца 3, цилиндра 4 с направляющей головкой. Днище 1 снабжено штуцерами 5, предназначенными для выпуска и подачи воды в прибор снизу. Внешняя нагрузка воспринимается стальным шариком 6, через стальную подушку 8, шток 7 и дырчатый поршень 9 передается на образец грунта, помещенный в кольцо 3. Образец грунта арретируется винтом 10. Деформация образца грунта измеряется индикатором часового типа 11 с точностью от 0,01 мм до 0,001 мм, который при помощи держателя 12 и винта 13 закрепляется к штоку 7.

Прибор снабжен патрубком 14, являющимся указателем уровня воды в приборе, а также прижимными винтами 15, закрепляющими цилиндр 4 к днищу 1. Для налива воды в прибор сверху служит отверстие, снабженное пробкой 16.

При испытании грунтов с естественной влажностью, т. е. без предварительного водонасыщения, для предотвращения высыхания образца патрубком 14 заменяется пробка, а штуцера 5 закрываются с помощью резиновых трубок и зажимов Гофмана.

Прибор позволяет вести как исследования ползучести грунтов в условиях невозможности бокового расширения при любой влажности, так и компрессионные и фильтрационные испытания по всем схемам [14].



Фиг. 1.

Технические данные прибора: диаметр грунтового кольца 70 мм, высота 10 и 20 мм.

Передача внешней нагрузки на прибор осуществляется с помощью рычажных прессов любых конструкций.

Результаты исследования зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями грунта

Известно [4], что при приложении нагрузки на грунт в момент нагружения проявляется мгновенная деформация, вслед за которой с течением времени развиваются структурные и структурно-адсорбционные деформации, то при исследовании их деформативных свойств необходимо исходить из указанного расчленения деформаций. Конечно, при этом необходимо также учесть такое специфическое свойство связного грунта, как изменяемость его механических свойств, как за счет уплотнения, так и под влиянием продолжительности нагружения (фактор времени).

В связи с вышесказанным, при исследовании деформативных свойств связных грунтов, нами принято деформации грунта разбивать на две части: на мгновенные деформации, которые проявляются в момент приложения нагрузки, и на деформации ползучести, которые

протекают в течение времени, вслед за мгновенными деформациями.

Под деформацией ползучести понимается суммарное значение структурных и структурно-адсорбционных деформаций.

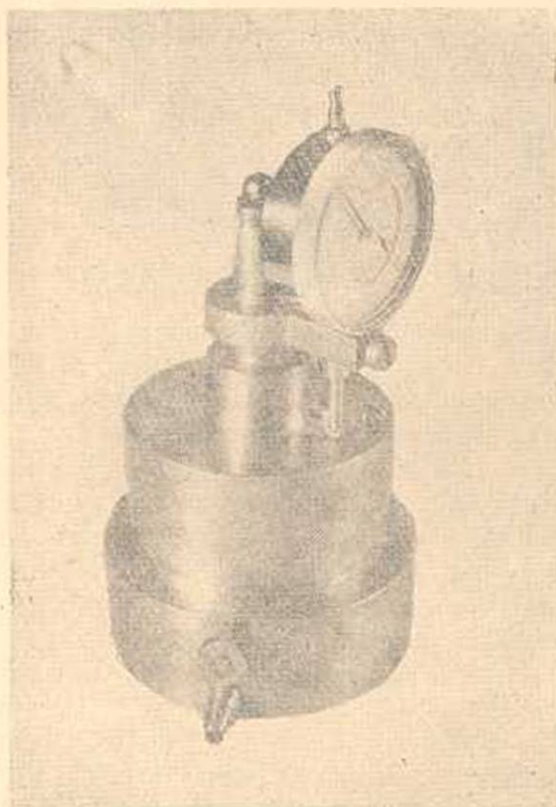
Сделанное нами разделение деформаций на мгновенные деформации и деформации ползучести полностью соответствует как современным представлениям о деформативности связных грунтов, так и рассматриваемой нами теории ползучести [12, 13].

При исследовании зависимости между мгновенными деформациями и напряжениями, по указанным выше причинам, взамен общепринятого понятия модуля упругости

грунта мы перешли к понятию модуля мгновенной деформации [16].

В отличие от модуля упругости, модуль мгновенной деформации не является постоянным, а характер его изменчивости зависит как от физико-механических свойств самого грунта, так и от способа и длительности загрузки. Модуль мгновенной деформации является характеристикой, выражающих механические и деформативные свойства материала, соответствующей его некоторому определенному состоянию в определенный момент времени.

При определении мгновенных деформаций, соответствующих разным значениям нагрузок, во избежание влияния уплотнения на механические и деформативные свойства грунта, мы воспользовались методикой параллельного испытания нескольких образцов-близнецов, обладающих одинаковыми физико-механическими свойствами, путем



Фиг. 2.

их мгновенного, безударного нагружения постоянными нагрузками различной величины с фиксацией мгновенных деформаций.

Говоря о мгновенных нагрузках и мгновенных деформациях, нельзя не привести то замечание В. А. Флорина [17], что под условным термином „мгновенной“ нагрузки обычно следует понимать однократно приложенную нагрузку, возрастание которой от нуля до своего конечного значения происходит с предельной скоростью, при которой она может еще рассматриваться как постепенно возрастающая нагрузка. При этом под термином „начальное“ напряженное состояние земляной среды понимается состояние, соответствующее моменту окончания предельного быстрого возрастания нагрузки, которое определяется, естественно, без учета сил инерции.

При выполнении экспериментальных работ мы, обычно, попарно испытывали восемь образцов-близнецов четырьмя значениями нагрузок: 0,25, 0,5, 1,0, 2,0 кг/см².

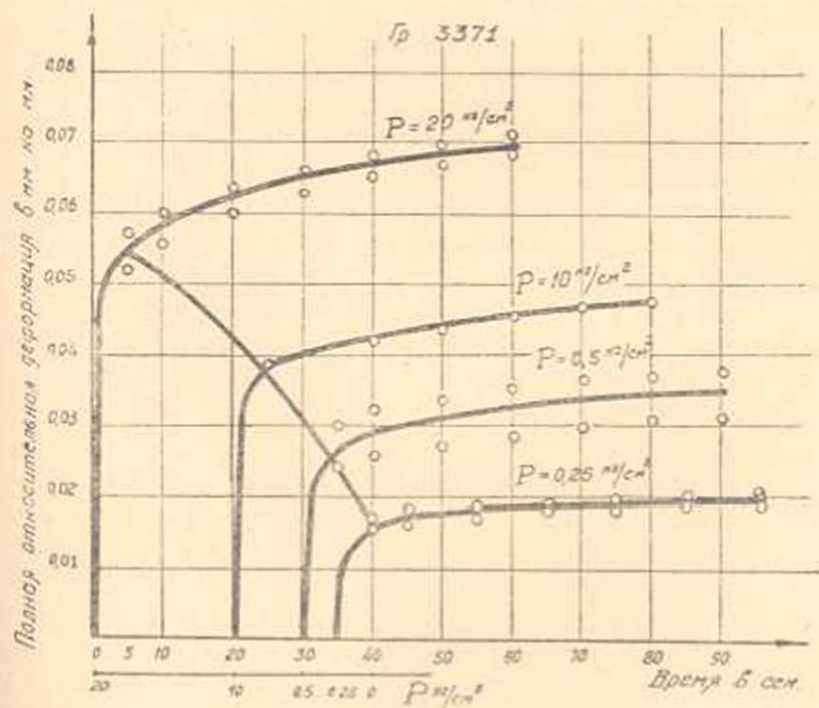
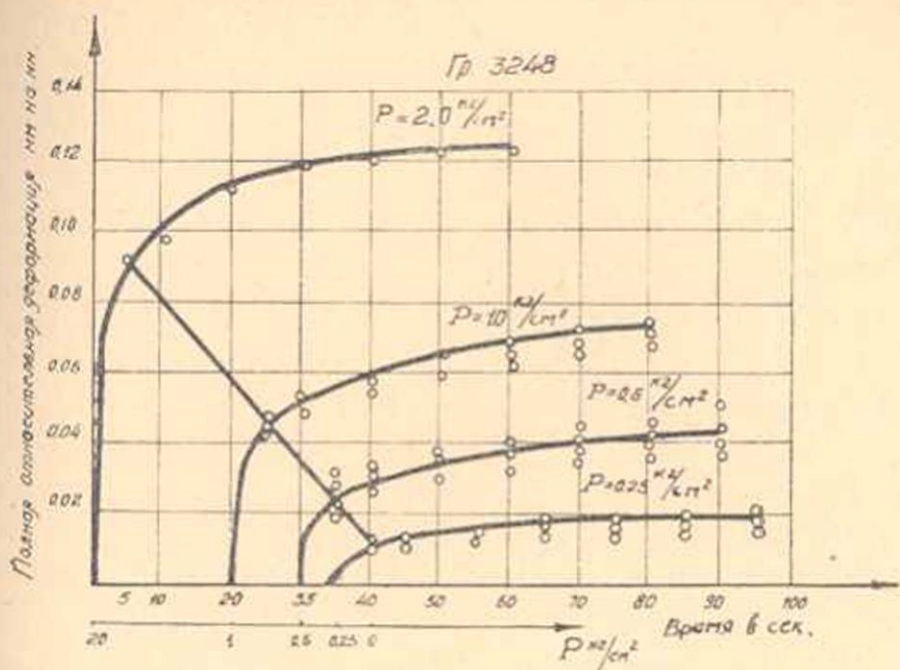
Учитывая то обстоятельство, что точность полученных результатов в значительной степени зависит от физико-механических свойств образцов-близнецов, при их приготовлении прилагали все усилия для получения образцов с одинаковыми физическими и механическими свойствами.

Для примера в табл. 2 приведены основные физические характеристики испытанных образцов-близнецов грунтов за лаб. №№ 3248

Таблица 2

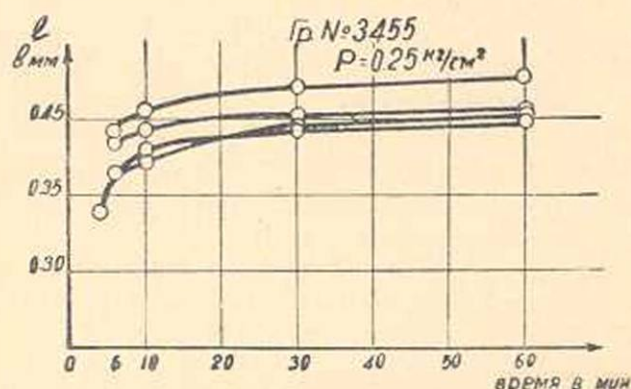
№№ пп	№№ опытов	Удельный вес в г/см ³	Объемный вес в г/см ³	Влажность в %	Коэффци пористости	Внешняя нагрузка в кг/см ²
Грунт № 3248						
1	4-54	2,75	2,03	25,0	0,698	0,25
2	5-54	2,75	2,00	25,0	0,718	0,50
3	6-54	2,75	2,00	23,5	0,697	0,50
4	7-54	2,75	2,06	23,8	0,697	0,50
5	8-54	2,75	2,00	25,4	0,730	1,00
6	9-54	2,75	2,06	14,3	0,658	1,00
7	11-54	2,75	2,00	25,4	0,730	1,00
8	12-54	2,75	2,06	25,5	0,698	2,00
Грунт № 3371						
1	14-54	2,69	1,78	43,5	1,17	0,25
2	50-54	2,69	1,80	44,7	1,17	0,25
3	152-55	2,69	1,76	41,3	1,17	0,25
4	15-54	2,69	1,84	45,0	1,12	0,50
5	153-55	2,69	1,76	41,3	1,17	0,50
6	16-54	2,69	1,79	48,5	1,22	1,00
7	17-54	2,69	1,72	41,5	1,20	2,00
8	43-54	2,69	1,76	43,5	1,18	2,00

и 3371, а на фиг. 3—сводный график кривых ползучести грунта № 3455 полученных при испытании образцов-близнецов равными нагрузками 0,25 кг/см².



Фиг. 4.

Рассматривая результаты определений физических свойств образцов, приведенных в таблице 2, а также результаты механического испытания их во времени (фиг. 2), приходим к выводу, что образцы действительно обладают достаточно близкими физическими и механическими свойствами и мы вправе сравнивать те результаты, которые получены в результате их испытания.



Фиг. 3.

Эксперименты выполнялись двумя способами: а) способом испытания предварительно неуплотненных и б) способом испытания предварительно уплот-

ненных образцов грунта нагрузкой $0,25 \text{ кг/см}^2$ в течение одного часа.

При проведении испытания предварительно неуплотненных образцов в силу больших значений как величин, так и скоростей деформирования в начальные моменты времени, во избежание ошибок, фиксировались условно-мгновенные деформации, которые соответствовали пятой секунде после момента нагружения. Что же касается второго способа, то в силу сравнительно небольших деформаций фиксировались мгновенные деформации, соответствующие моменту нагружения.

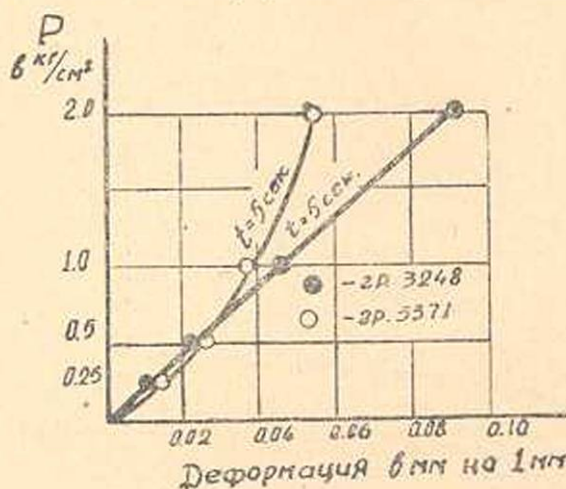
Приведем результаты исследования зависимости между напряжениями и условно-мгновенными деформациями двух грунтов за №№ 3248 и 3371 (фиг. 4 и 5) и зависимости между мгновенными деформациями и напряжениями шести грунтов (фиг. 6), выполненные по второму способу.

На графиках фиг. 4 приведены кривые полных относительных деформаций, определенных при испытании образцов-близнецов нагрузками $0,25$, $0,5$, $1,0$ и $2,0 \text{ кг/см}^2$ в интервале времени до 60 сек , а на графике фиг. 5 — кривые зависимости между напряжениями и условно-мгновенными деформациями. Как следует из графика фиг. 5, связь между условно-мгновенными деформациями и напряжениями, в зависимости от физических свойств испытанных образцов грунта (табл. 2), выражается как линейным (гр. № 3248), так и нелинейным законом (гр. № 3371).

Отклонение указанной выше зависимости от линейного закона обусловлено как проявлением деформаций ползучести в течение пяти секунд после приложения нагрузок, так и наличием неровностей на поверхности образцов [18]. Следует однако отметить, что указанная

зависимость с достаточной для практики точностью для нагрузок до $1,0 \text{ кг/см}^2$ почти всегда можно выразить линейным законом.

Если теперь рассмотреть кривые зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями (фиг. 6), то нетрудно заметить, что ввиду



Фиг. 5.

отсутствия влияния как деформаций ползучести ($t = 0$), так и неровностей на поверхности образцов, которые были сглажены при предварительном уплотнении образцов, для всех грунтов без исключения она с достаточной точностью выражается линейным законом [16].

Рассмотрим вопрос изменяемости модуля мгновенной деформации который тесно связан с переходом от понятия

модуля упругости к понятию модуля мгновенной деформации.

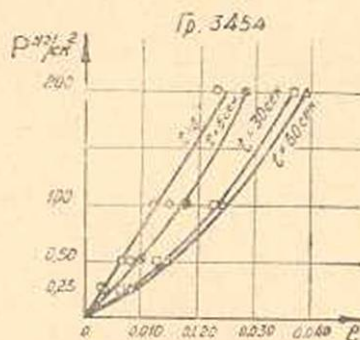
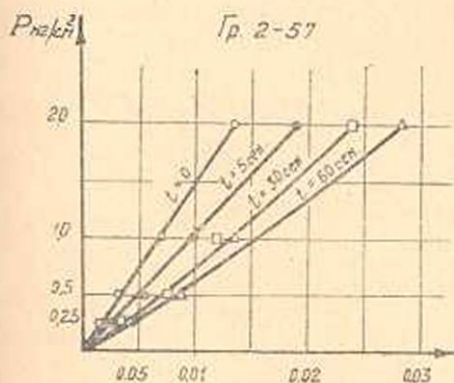
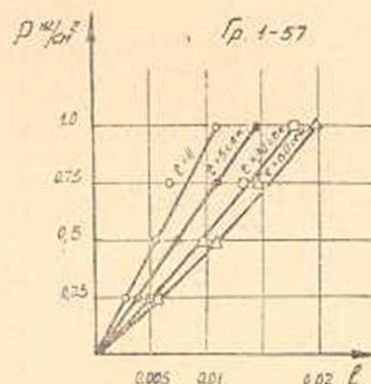
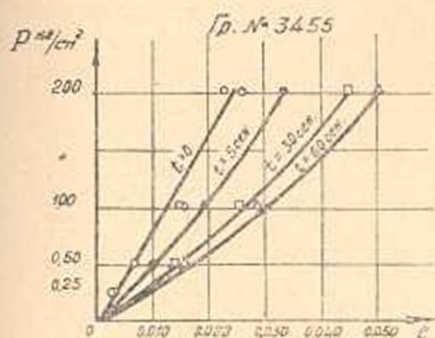
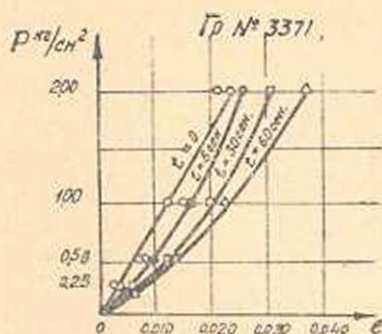
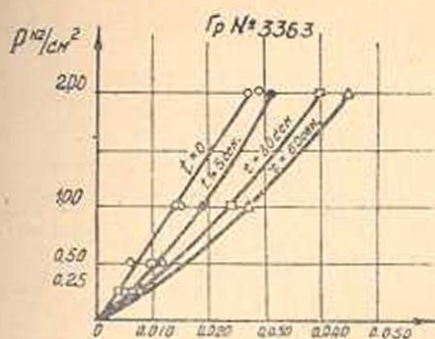
Известно, что процесс твердения бетона в течение времени сопровождается изменением его физико-механических свойств, его старением, что в конечном итоге выражается изменением его упругих характеристик и ползучести. Поэтому основной задачей равновесия упруго-ползучего тела Н. Х. Арутюнян считает определение напряжения и деформации в этом теле под воздействием внешних нагрузок с учетом ползучести и изменения во времени модуля мгновенной деформации.

Сказанное в полной мере относится и к связным грунтам с той лишь разницей, что в одном случае старение является результатом твердения цементного камня, а в другом случае результатом как увеличения плотности грунта под действием внешних нагрузок, так и проявлением сцепления [19].

Вопрос же исследования влияния старения на деформируемость грунта в конечном итоге сводится к исследованию деформативных свойств грунта (мгновенной деформации и деформации ползучести) при разных состояниях его физико-механических свойств.

Не останавливаясь на вопросе изменяемости мгновенных деформаций во времени под действием постоянных нагрузок [16], покажем изменяемость модуля мгновенной деформации в случае, когда внешняя нагрузка не постоянна, а нарастает во времени.

Для выяснения закона изменяемости модуля мгновенной деформации во времени при переменных нагрузках, нарастание их представим в виде последовательно приложенных равных ступеней через определенные интервалы времени [16].



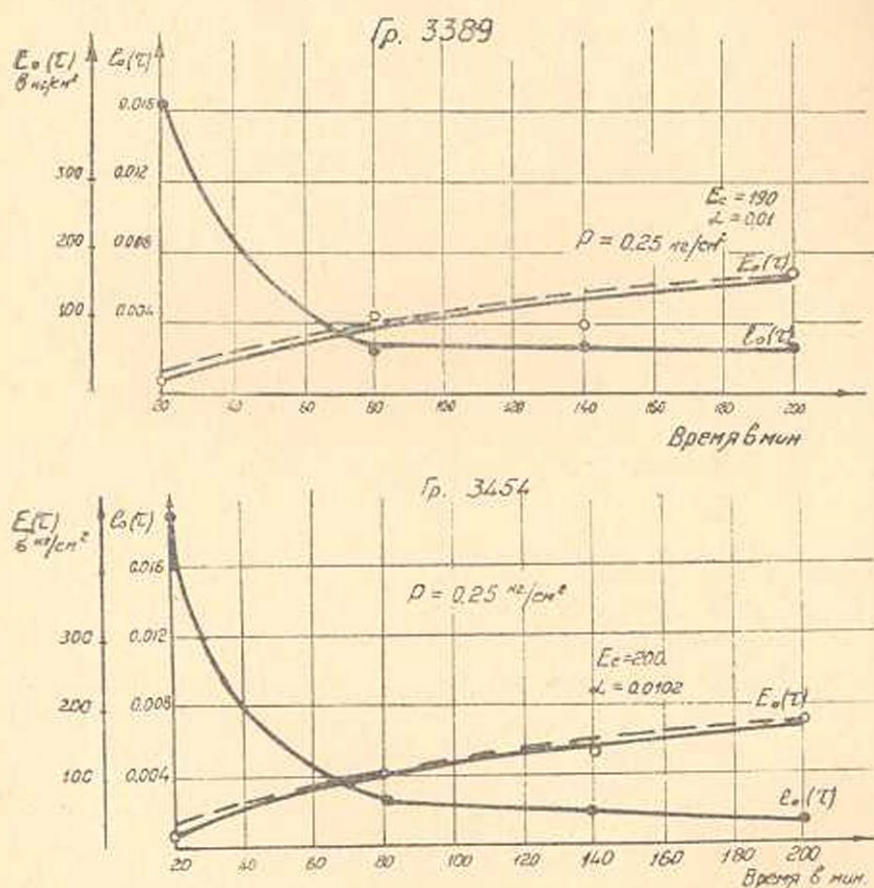
Фиг. 6.

Нами исследованы два случая изменяемости модуля мгновенной E и условно-мгновенной E_0 деформаций: а) при кратковременном и б) при длительном выдерживании образцов под каждой ступенью нагрузки. Время выдерживания в первом случае равнялось одному часу, а во втором случае — от 10 до 30 дней.

Модули мгновенных или условно-мгновенных деформаций определялись, как отношение величины напряжения к величине относи-

тельной мгновенной (условно-мгновенной) деформации от приложения данной ступени нагрузки.

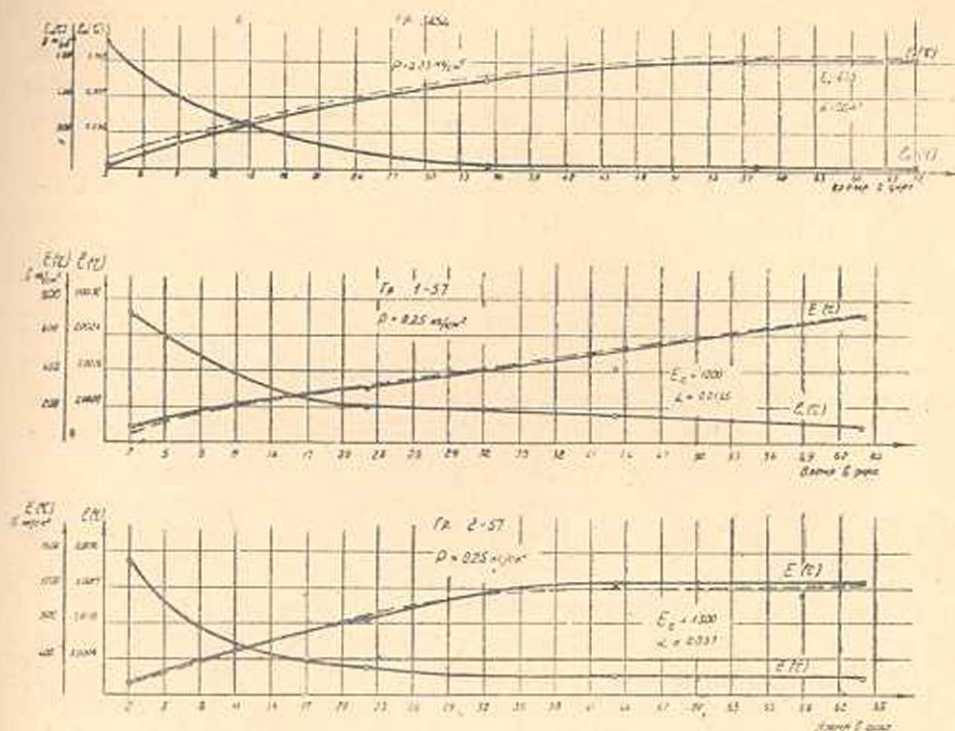
На графиках фиг. 7 приведены кривые изменяемости модуля мгновенной (E_t) и условно-мгновенной (E_{0t}) деформаций совместно с кривыми изменяемости относительных мгновенных (l_t) и условно-мгновенных деформаций (l_{0t}) во времени при выдерживании образцов под нагрузками в течение одного часа, а на фиг. 8 при длительном их выдерживании под ступенями нагрузок.



Фиг. 7.

Рассматривая вышеприведенные графики (фиг. 7 и 8), приходим к выводу, что по мере уплотнения и упрочнения грунта повышаются его механические свойства, что выражается уменьшением мгновенных деформаций при последовательном приложении равных ступеней нагрузок с соответствующим увеличением модуля мгновенной или условно-мгновенной деформаций.

Значительным является то, что по мере уплотнения и упрочнения грунта, модуль мгновенной (условно-мгновенной) деформации асимптотически стремится к некоторой постоянной величине, т. е., по



Фиг. 8.

мере приближения грунта к упруго-уплотненному состоянию, деформативные свойства его стабилизируются.

Во всех вышеприведенных графиках величина каждой ступени нагрузки равнялась 0.25 кг/см^2 .

Для описания закона изменяемости модуля мгновенной E_t и условно-мгновенной E_0 , деформации во времени использовано известное выражение (1) теории ползучести [13]

$$E(t) = E_c (1 - \beta e^{-\alpha t}) \quad (1)$$

при $\beta = 1$ и соответствующем подборе параметров E_c и α по экспериментальной кривой.

Теоретические кривые, построенные по выражению (1), показаны на графиках фиг. 7 и 8 пунктирными линиями. Значения параметров E_c и α показаны на графиках.

Из приведенных графиков следует, что при соответствующем подборе параметров можно добиться достаточно хорошего совпадения теоретических и опытных кривых.

Зависимость между напряжениями и деформациями ползучести

Известно [13], что в зависимости от того, какая связь существует между напряжениями и деформациями ползучести, к упруго-ползучему телу применяется та или иная теория ползучести.

В частности, в теории ползучести бетона связь между напряжениями и деформациями материала линейная, если $\sigma \leq 0,5R$, и нелинейная, если $\sigma > 0,5R$, где R —величина временного сопротивления бетона. Следовательно, для напряжений $\sigma \leq 0,5R$ применяется линейная, а при $\sigma > 0,5R$ —нелинейная теория ползучести [12, 13].

Для применения указанной теории к другим материалам, в частности к связным грунтам, которые обладают свойством ползучести, и определения границ ее применимости необходимо экспериментально определить указанную выше зависимость.

В целях установления зависимости между напряжениями и деформациями ползучести связных грунтов нарушенной структуры при их сжатии в условиях отсутствия бокового расширения были исследованы семь различных грунтов в компрессионных приборах под водой после их полного водонасыщения [20].

Сущность метода определения указанной зависимости заключалась в параллельном определении деформаций ползучести на нескольких образцах-близнецах при разных значениях уплотняющих нагрузок с последующим их сравнением между собой. При этом деформации ползучести определялись как разность полных и мгновенных (условно-мгновенных) деформаций. Следовательно, исследование зависимости между напряжениями и деформациями ползучести по сути дела представляет собой непосредственное продолжение исследования зависимости между напряжениями и мгновенными (условно-мгновенными) деформациями.

Для определения деформации ползучести, как и при определении мгновенных и условно-мгновенных деформаций, обычно, попарно испытывались восемь образцов-близнецов нагрузками 0,25, 0,5, 1,0 и 2,0 кг/см² в течение времени (от одного часа до 100 дней).

Как и в предыдущем случае, при определении деформации ползучести пользовались методами испытания предварительно неуплотненных и предварительно уплотненных образцов грунта нагрузками 0,25 кг/см² в течение одного часа. В первом случае из полных деформаций исключались условно-мгновенные деформации, а во втором случае—мгновенные деформации.

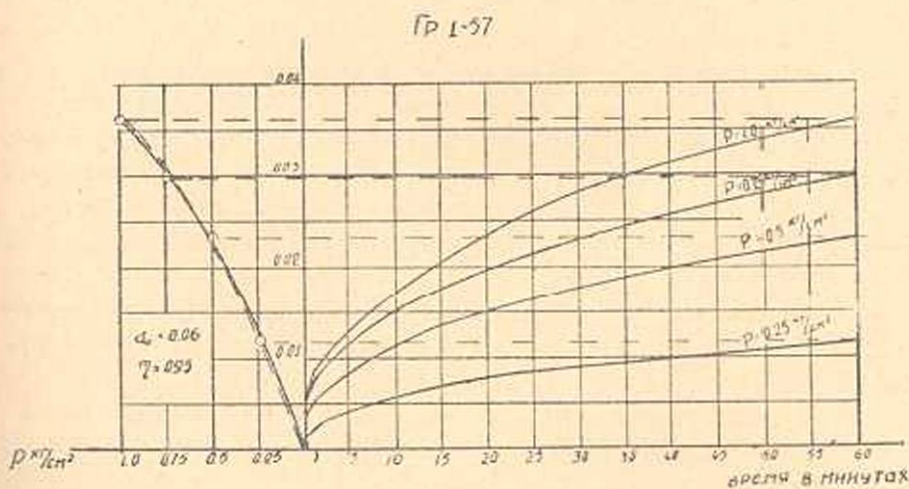
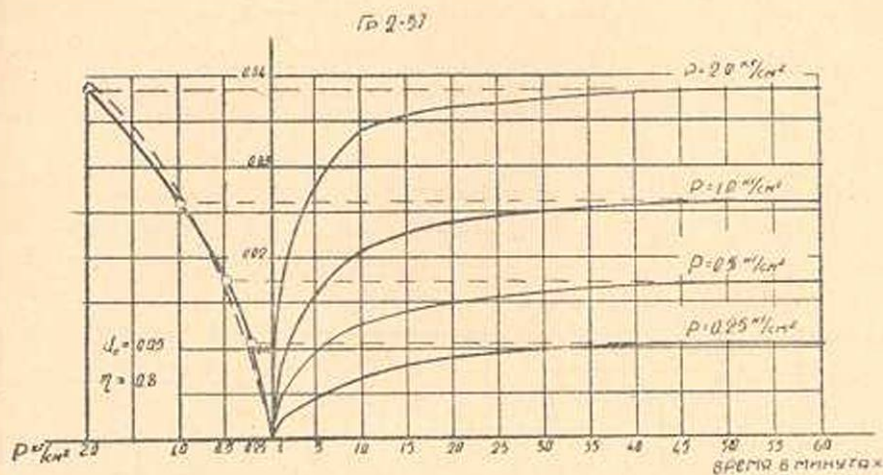
Учитывая то обстоятельство, что при определении деформации ползучести путем испытания предварительно уплотненных образцов деформации от предварительно уплотняющих нагрузок не успевали затухать в течение часа и суммировались с деформациями ползучести от основной нагрузки, во избежание искажения результатов опытов, эти деформации исключались из общих деформаций ползучести, путем специального определения их значений.

Рассмотрим результаты экспериментального исследования интересующей нас зависимости для двух грунтов за №№ 1—57 и 2—57, приведенных на графиках фиг. 9 и 10.

В таблице 3 приведены осредненные значения основных физических свойств исследованных серий образцов-близнецов.

Таблица 3

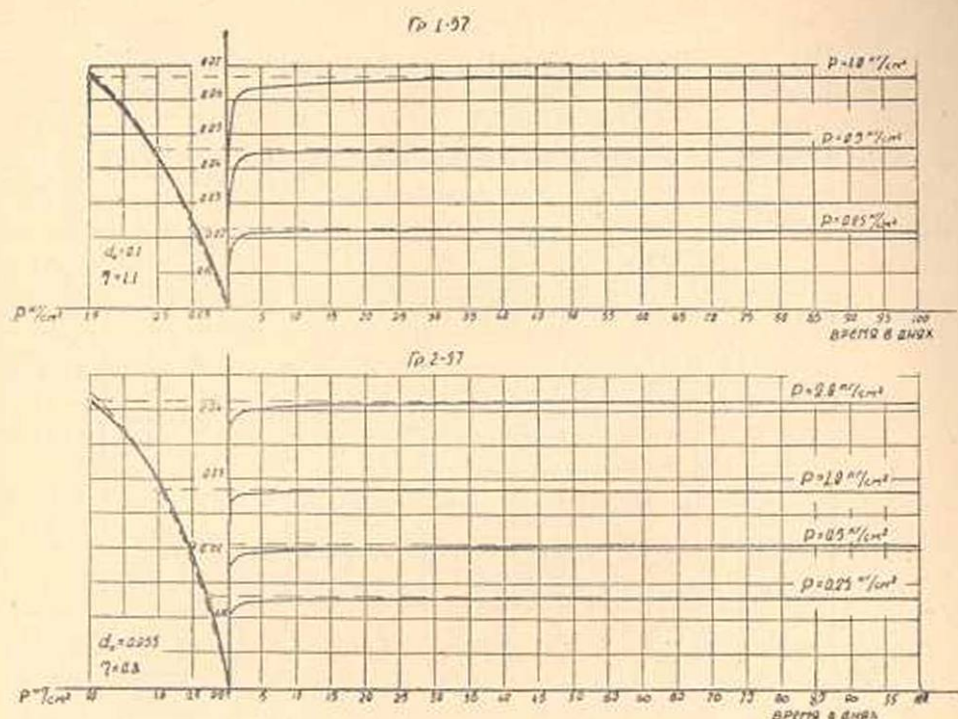
№№ пп	Лаб. № грунта	Удельный вес в г/см ³	Объемный вес в г/см ³	Влажность в %	Коэффициент пористости
1	1-57	2,64	1,75	38,7	1,10
2	2-57	2,66	1,80	34,86	1,00



Фиг. 9.

На правых половинах графиков фиг. 9 и 10 приведены кривые ползучести, определенные путем испытания предварительно уплотненных образцов-близнецов нагрузками 0,25, 0,5, 0,75, 1,0 и 2,0 кг/см². На этих графиках по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат—деформация ползучести, выраженная в мм на 1 мм [20].

На основании семейства кривых ползучести построены кривые зависимости между напряжениями и деформациями ползучести, которые показаны на левых половинах указанных графиков, где по оси



Фиг. 10.

абсцисс отложены напряжения в кг/см^2 , а по оси ординат—деформации ползучести в мм на 1 мм .

Из рассмотрения указанных кривых следует, что между деформациями ползучести грунтов и напряжениями нет линейной зависимости. Следовательно, при сжатии грунтов нарушенной структуры, в условиях отсутствия бокового расширения следует пользоваться нелинейной теорией ползучести.

Сделанный вывод справедлив как для предварительно-уплотненных, так и предварительно-неуплотненных грунтов нарушенной структуры [20].

Ввиду отсутствия линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести, для получения кривой ползучести при любом напряжении необходимо ординаты кривой при единичном напряжении умножить на некоторый множитель, являющийся функцией напряжений $F(P)$ [21].

Обработка многочисленных экспериментов показала, что для исследуемого нами случая функция напряжений $F(P)$ может быть аналитически приближенно выражена экспоненциальной зависимостью вида

$$F(P) = d_0 (1 - e^{-\eta P})$$

где d_0 и η —параметры, подбираемые по результатам экспериментов, P —напряжение, e —основание натуральных логарифмов.

На левых половинах графиков фиг. 9 и 10 пунктирными линиями показаны теоретические кривые, которые построены по выражению (2) с соответствующим подбором параметров d_0 и τ . Значения параметров d_0 и τ приведены на графиках. Кривые построенные по выражению (2), дают хорошее совпадение с данными опыта.

Следует отметить, что при малых нагрузках порядка 0,5—1,0 кг/см² интересующую нас зависимость с достаточной точностью можно выразить линейным законом.

Исследование закона наложения для деформации ползучести грунта

Рассмотрим последнюю из основных предпосылок теории упруго-ползучего тела [12, 13], закон наложения для деформации ползучести грунта.

В отличие от теории „старения“ Я. В. Столярова, С. Е. Фрейфельда и др., в теории упруго-ползучего тела [12, 13] деформации ползучести при переменном во времени напряжении определяются не на основании гипотезы „старения“, а в соответствии с принципом наложения [22].

Принцип наложения П. И. Васильев [22] сформулировал следующим образом: „суммарная деформация ползучести при переменном напряжении может быть найдена как сумма деформаций ползучести, вызванных соответствующими приращениями напряжений“.

Т. е. закон наложения в теории упруго-ползучего тела применяется для перехода от деформаций ползучести, определенных при постоянных напряжениях, к деформациям ползучести при переменных напряжениях.

Закон наложения для деформаций ползучести непосредственно вытекает из основного интегрального уравнения теории упруго-ползучего тела [13], которое соответствует непрерывному росту напряжений и при линейной ползучести выражается зависимостью:

$$\epsilon(t) = \frac{P(t)}{E(t)} - \int_0^t P(\tau) \frac{\partial \epsilon(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

или

$$\epsilon(t) = \frac{P(t)}{F(t)} - \int_0^t P(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (3)$$

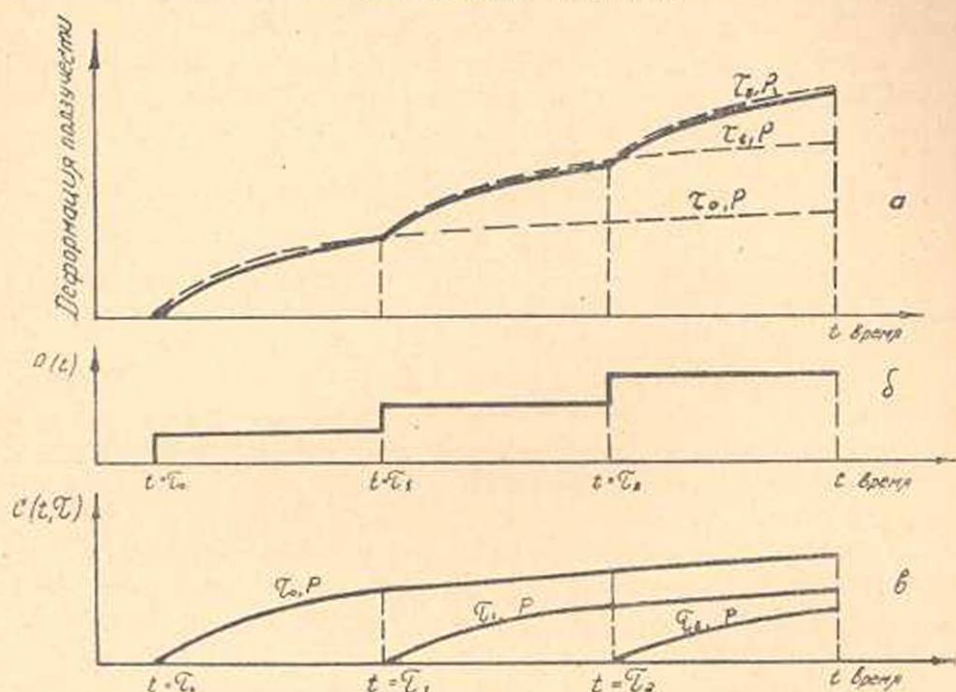
где E —модуль мгновенной деформации,

P —напряжение,

$C(t, \tau)$ —мера ползучести.

Если, для простоты, непрерывный рост напряжений, для материала обладающего свойством старения, заменить ступенчатым нагружением, т. е. в момент времени τ_0 приложено напряжение P_0 , в

момент времени τ_1 приложено напряжение P_1 , в момент времени τ_2 приложено напряжение P_2 и т. д., то при линейной и нелинейной ползучести закон наложения для деформации ползучести будет выражаться соответственно выражениями (4) и (5):



Фиг. 11.

$$I_n(t) = P_0(\tau_0) C(t, \tau_0) + P_1(\tau_1) C(t, \tau_1) + P_2(\tau_2) C(t, \tau_2) + \dots + P_n(\tau_n) C(t, \tau_n); \quad (4)$$

$$I_n(t) = F[P_0(\tau_0)] C(t, \tau_0) + F[P_1(\tau_1)] C(t, \tau_1) + F[P_2(\tau_2)] C(t, \tau_2) + \dots + F[P_n(\tau_n)] C(t, \tau_n); \quad (5)$$

где:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-(t-\tau)}]; \quad (6)$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}. \quad (7)$$

$F[P]$ —функция напряжений, определяемая из экспериментов, имеющая вид (2);

$\varphi(\tau)$ —предельная мера ползучести;

P_n —приращение напряжений;

τ —момент приложения нагрузки;

t —момент времени, для которого определяется деформация;

C_0 , A_1 и γ —параметры.

Из выражений (4) и (5) следует, что деформация ползучести от ступенчатого нагружения $I_n(t)$ к моменту времени t (на фиг. 11а показана сплошной линией) может быть определена суммированием

деформаций ползучести от приращений напряжений с учетом старения материала к моменту приложения их (фиг. 11в), т. е. для проверки закона наложения необходимо сопоставить кривую деформации ползучести от ступенчатого нагружения с суммой кривых деформаций ползучести от приращения напряжений, определенных на образцах, обладающих такими физико-механическими свойствами, какими обладает ступенчато-загруженный образец в моменты приложения ступеней нагрузок.

Для выполнения указанной проверки, в случае нарастания нагрузок равными ступенями P , необходимо на графике деформации ползучести от ступенчатого нагружения (фиг. 11а, сплошная линия) построить кривую ползучести от нагрузки P , приложенной к грунту в возрасте $t = \tau_0$ до конца исследуемого отрезка времени t (на фиг. 11а и 11в кривая τ_0, P). На эту кривую, начиная с момента приложения второй ступени нагрузки, когда ступенчато-загруженный образец обладает возрастом $t = \tau_1$, необходимо наложить кривую деформации ползучести, определенной в возрасте $t = \tau_1$ (на фиг. 11а и 11в, кривая τ_1, P), до момента времени t , и т. д.

Из вышеизложенного следует, что для выполнения проверки закона наложения для деформаций ползучести грунта, обладающего свойством старения, необходимо экспериментально определить кривые деформации ползучести, соответствующие его разным возрастам к началу нагружения (фиг. 11в), знать закон его „старения“.

Выше мы уже говорили, что, как бетон, так и грунт способны менять свои физико-механические свойства. Способность грунта изменять свои физико-механические свойства под суммарным воздействием ряда факторов, по аналогии со старением бетона, названа нами „старением“ грунта. При этом необходимо иметь в виду то обстоятельство, что в старении бетона основную роль играют его внутренние физико-химические процессы, протекающие в течение времени, тогда как „старение“ грунта, помимо указанного выше фактора, обусловлено еще и уплотнением.

Следовательно, при экспериментальном исследовании деформаций ползучести грунтов, соответствующих их разным „возрастам“, необходимо одновременно считаться как с фактором внутренних физико-химических процессов, так и фактором уплотнения. Поэтому для экспериментального определения кривых деформаций ползучести мы пользовались [15] методикой, несколько отличной от методики определения кривых деформаций бетона в его разных возрастах к моменту нагружения.

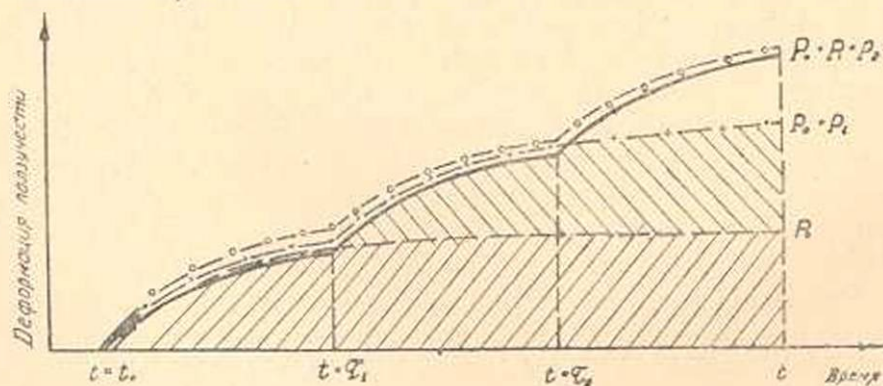
Как уже говорили, для выполнения проверки закона наложения необходимо, чтобы между физико-механическими свойствами образцов грунта, подвергавшихся испытанию в его разных возрастах, и физико-механическими свойствами ступенчато-нагруженного образца в моменты приложения нагрузок было полное соответствие.

Для достижения указанного выше соответствия физико-механических свойств недостаточно приготовить образец грунта с физическими свойствами (пористость, влажность), соответствующими этим свойствам ступенчато-нагруженного образца в момент приложения какой-либо ступени нагрузки, необходимо также, чтобы структуры их соответствовали друг другу, так как в течение времени имеет место упрочнение грунта [19], в результате проявления сцепления, упрочнения [4] за счет протекания внутренних физико-химических процессов, которое в свою очередь зависит как от продолжительности загрузки, так и от величины нагрузки.

Следовательно, мы полностью достигаем своей цели только тогда, когда параллельно с испытанием образца на ступенчатое нагружение другие образцы-близнецы, обладающие одинаковыми с ним физико-механическими свойствами к началу нагружения, будут доведены до интересующего нас „возраста“ путем уплотнения в течение времени точно так, как был уплотнен ступенчато-нагруженный образец при достижении им какого-либо „возраста“.

Указанная методика подготовки образцов грунта отличается от методики подготовки образцов бетона тем, что, если для достижения какого-либо возраста образцы бетона выдерживаются в течение определенного времени, то образцы грунта, помимо выдерживания в течение времени, подвергаются и уплотнению.

Порядок уплотнения образцов-близнецов грунта и определение деформации ползучести в разных возрастах к моменту нагружения приведены на фиг. 12.



Фиг. 12.

В соответствии с вышеизложенным, для испытания образца-близнеца в „возрасте“ $t = \tau_0$ (фиг. 12) достаточно его загрузить нагрузкой P_0 в указанном возрасте и выдержать под нагрузкой до момента времени t , для которого определяется деформация (показана пунктиром). Для испытания образца в „возрасте“ $t = \tau_1$ второй образец-близнец в „возрасте“ $t = \tau_0$ загружается нагрузкой P_0 и, после достижения им возраста $t = \tau_1$, с выдерживанием под этой нагрузкой

в интервале времени $\tau_1 - \tau_0$ загружается нагрузкой P_1 и выдерживается до момента времени t (показана пунктирной линией с крестиками). Наконец для испытания третьего образца-близнеца в „возрасте“ $t = \tau_2$ он сперва уплотняется нагрузкой P_0 в течение времени от $t = \tau_0$ до $t = \tau_1$, в момент времени $t = \tau_1$ загружается нагрузкой P_1 и, после достижения им „возраста“ $t = \tau_2$, загружается P_2 и выдерживается до момента времени t (показана пунктирной линией с кружечками). На этом же графике сплошной линией показана кривая деформации ползучести, определенная ступенчатым нагружением образца нагрузками P_0 , P_1 и P_2 в моменты времени $t = \tau_0$, $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$.

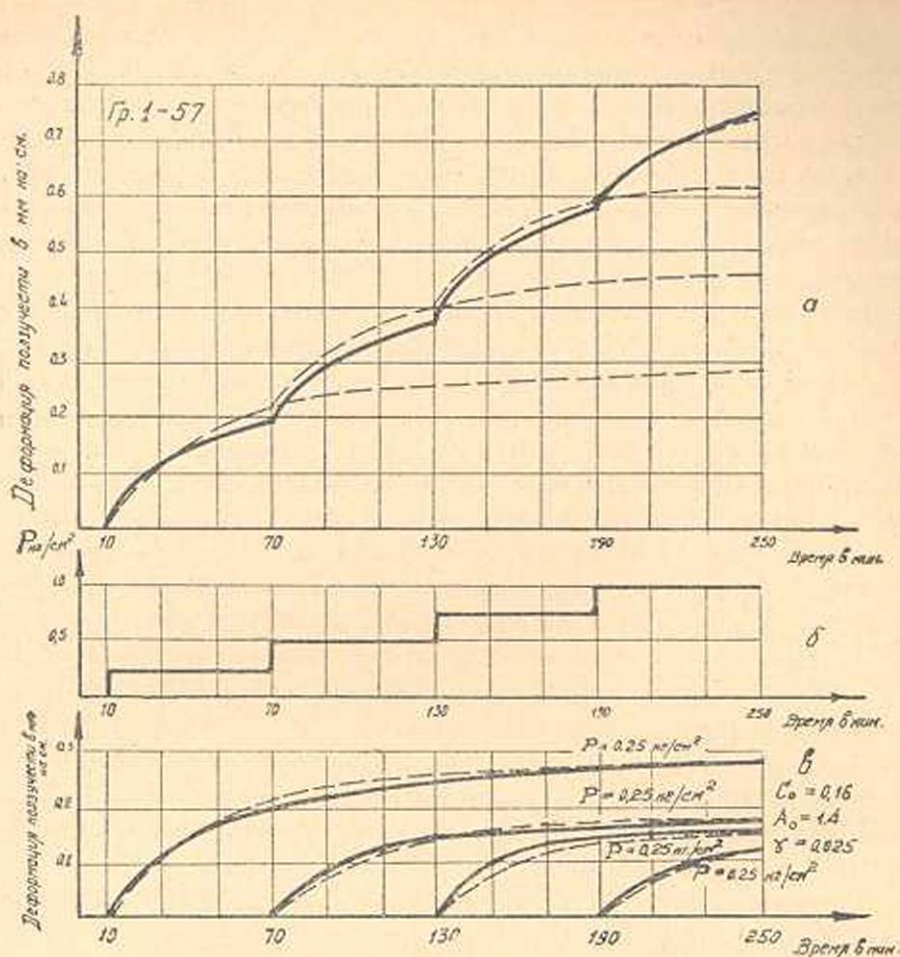
Кривая деформации ползучести, соответствующая „возрасту“ $t = \tau_0$ к началу нагружения заштрихована восходящими линиями, а деформации ползучести, соответствующие „возрасту“ $t = \tau_1$, заштрихованы нисходящими линиями. Последние определялись как разность ординат между кривыми ползучести от нагрузок $(P_0 + P_1)$ и P_0 .

Из сказанного непосредственно следует, что, если кривые деформации ползучести, соответствующие разным „возрастам“ грунта, определяются указанным выше методом, то ясно, что расхождение между кривой, построенной путем суммирования элементарных приращений деформации от приращений напряжений, и кривой, определенной ступенчатым нагружением образца, будет в пределах точности параллельных испытаний образцов-близнецов. А это значит, что при сжатии глинистого грунта нарушенной структуры в условиях невозможности бокового расширения закон наложения для деформации ползучести справедлив.

Таким образом, для осуществления перехода от деформации ползучести постоянных нагрузок к деформациям ползучести при переменных нагрузках по зависимостям теории упруго-ползучего тела (3), (4) и (5), необходимо закон изменения кривых деформации ползучести грунта при его „старении“ выразить аналитически по зависимостям (6) и (7) теории упруго-ползучего тела и экспериментальную кривую деформации ползучести от ступенчатого нагружения сопоставить с суммой элементарных приращений деформаций от приращений напряжений, определенных аналитически, на основании семейства экспериментальных кривых ползучести.

В отношении методики экспериментального определения закона изменения кривых деформации ползучести грунта в зависимости от его „возраста“ следует добавить, что наряду с точной приведенной выше методикой, когда для определения указанного закона необходимо испытать несколько образцов-близнецов, можно воспользоваться упрощенной методикой [24], при помощи которой этот закон, с достаточной точностью, можно определить испытанием одного образца.

Остается показать, что семейство кривых ползучести старения грунтов нарушенной структуры (фиг. 11в) можно описать аналитическим выражением изменения во времени меры ползучести (6) теории упруго-ползучего тела [12, 13].

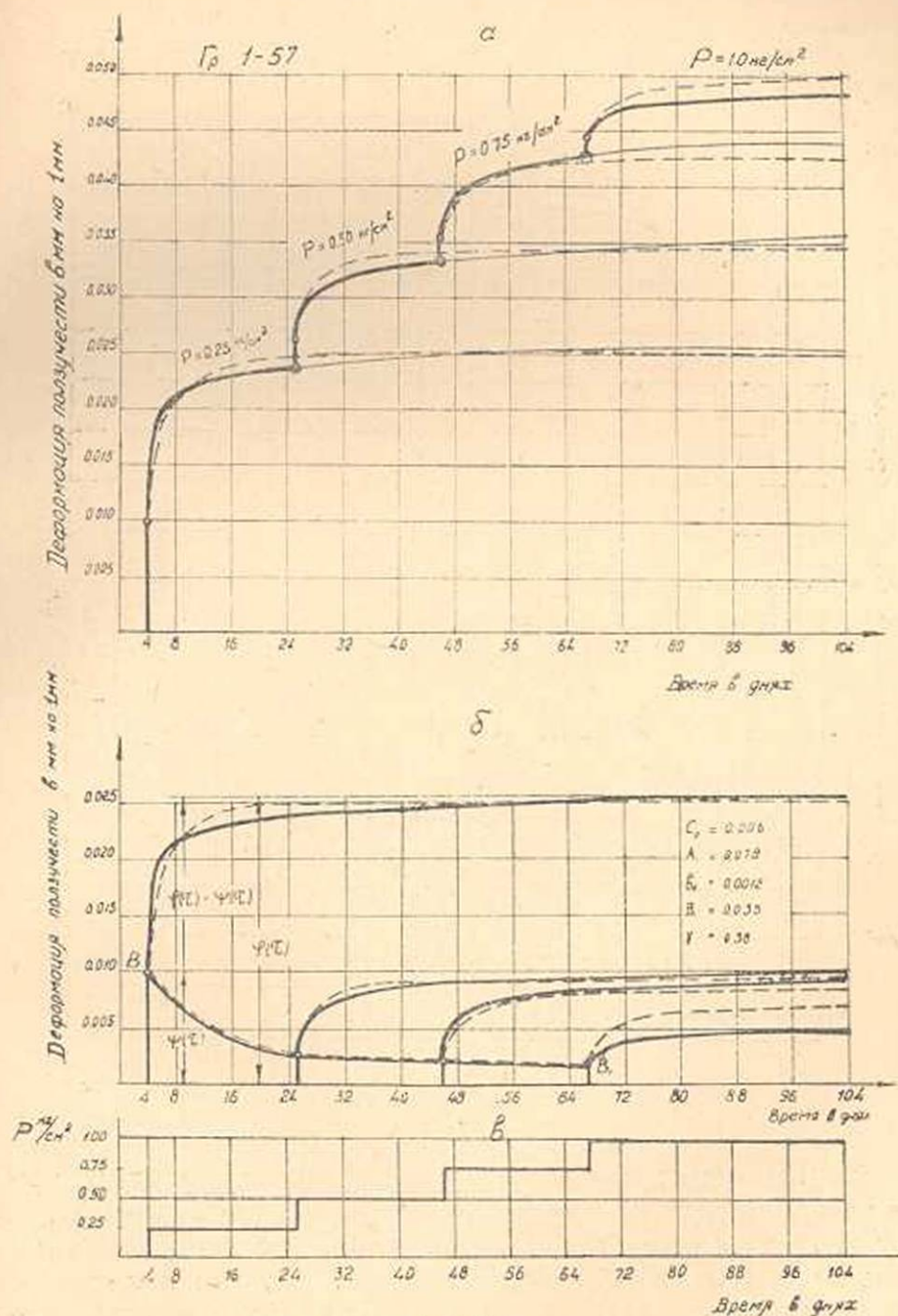


Фиг. 13.

На графике фиг. 13в приведен пример описания семейства кривых ползучести и старения, определенных вышеизложенным способом, при сжатии шенгавитской глины (№ 1—57) нарушенной структуры в условиях невозможности бокового расширения при продолжительности нагружения образцов от 60 до 240 минут, а на фиг. 14б и 15б описание семейств кривых старения грунтов 1—57 и 2—57 при продолжительности нагружения образцов от 37 до 116 дней.

На фиг. 13в показаны теоретические кривые, построенные на основании зависимостей (6) и (7), при соответствующем подборе параметров C_0 , A_0 и γ , значение которых приведено на графике. Из графика фиг. 12в следует, что расхождение между кривыми ползучести и кривыми, построенными на основании указанных выше зависимостей, небольшое.

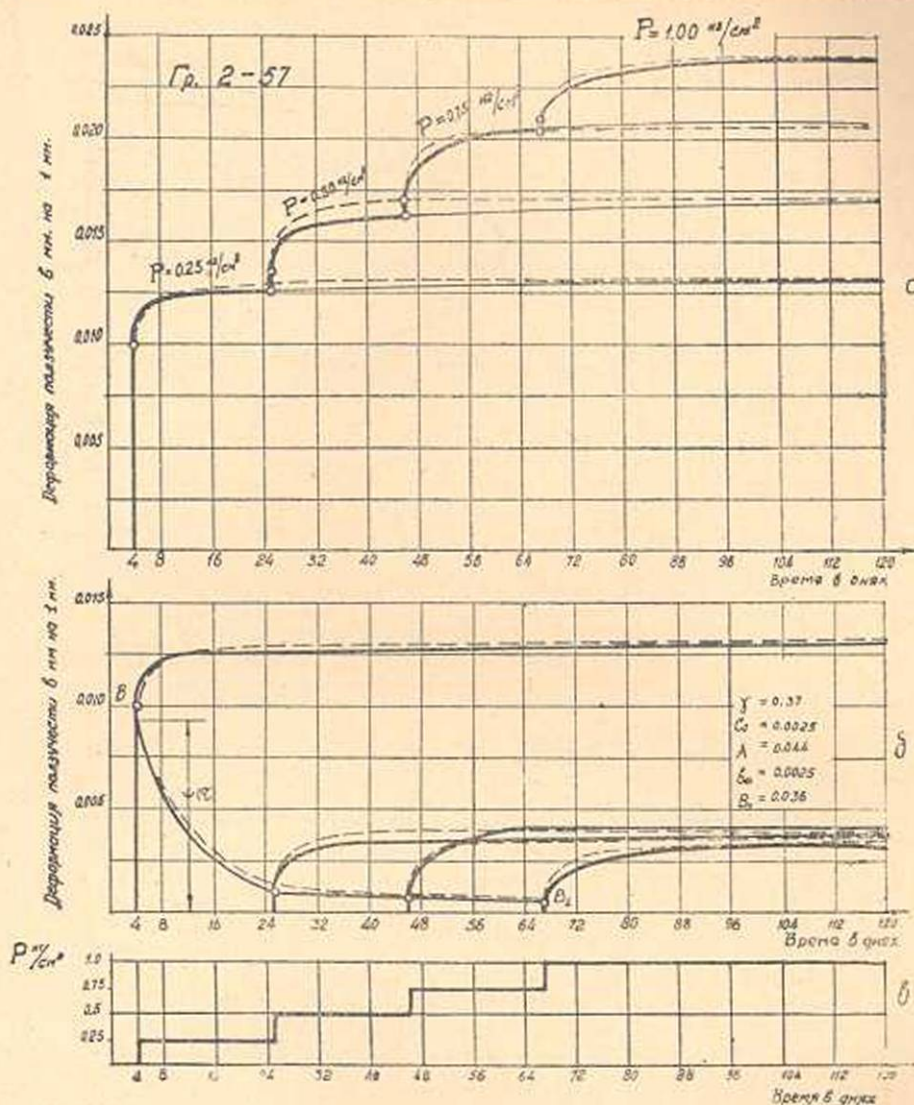
На основании приведенного здесь примера и других выполненных нами многочисленных опытов мы пришли к заключению, что выражения закона изменения во времени меры ползучести (6) и (7) в таком виде достаточно точно описывают семейства кривых ползу-



Фиг. 14.

части связных грунтов нарушенной структуры при сравнительно непродолжительных испытаниях их.

Несколько иначе обстоит дело с описанием указанного семейства кривых при длительных выдерживаниях образцов грунта под каждой ступенью нагрузки (фиг. 146 и 156).



Фиг. 15.

Как показывают эксперименты при длительных испытаниях, кривые ползучести грунта, определенные в разных его "возрастах", по виду отличаются друг от друга, т. е. они не являются подобными. Такое же явление наблюдается и в бетонах, где, как и в грунтах, кривые ползучести, определенные в разных их возрастах, не являются аффинно-подобными [23].

Следовательно, основная зависимость упруго-ползучего тела (6), которая учитывает как влияние длительности нагружения, так и возраст материала и выведена из условия подобия кривых ползучести, не вполне соответствует действительному процессу старения бетона [23] и грунтов.

Изменение характера кривых ползучести грунта при переходе от одного возраста к другому, можно объяснить как его уплотнением, так и проявлением сцепления упрочнения в течение времени, при участии внешних уплотняющих нагрузок.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в грунтах, как и в бетоне [23], у образцов загруженных в раннем возрасте в начале наблюдается быстрый рост деформации ползучести, тогда как для образцов, загруженных в более „старом“ возрасте, рост деформации ползучести во времени в начале загрузки протекает более спокойно (фиг. 14 и 15).

В целях описания семейства кривых ползучести грунтов при длительных испытаниях их, выражение (6) мы несколько видоизменили и придали ему следующий вид [24]:

$$C(t, \tau) = \psi(\tau) + [\varphi(\tau) - \psi(\tau)] [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}] \quad (8)$$

где

$$\varphi(\tau) = b_0 + \frac{B_1}{\tau} \quad (9)$$

$\psi(\tau)$ — деформация ползучести, которая соответствует первому часу после момента загрузки; b_0 и B_1 — параметры, которые подбираются на основании экспериментов.

На графиках фиг. 13б и 14б пунктирными линиями показаны кривые деформации ползучести, построенные на основании выражений (7), (8) и (9) при соответствующем подборе параметров C_0 , A_1 , b_0 , B_1 и λ , значения которых приведены на тех же графиках. На этих же графиках кривыми BB_1 показан закон изменения функции $\psi(\tau)$. Сплошной линией показана экспериментальная кривая, а пунктирной — кривая, построенная по выражению (9).

Из приведенных графиков следует, что выражения (7), (8) и (9) достаточно точно описывают семейства кривых ползучести грунтов нарушенной структуры при их сжатии в условиях отсутствия бокового расширения.

Если теперь в соответствии с выражением (4) сопоставить кривые деформации ползучести грунта (фиг. 13а, 14а и 15а), определенные путем их ступенчатого нагружения нагрузками $0,25 \text{ кг/см}^2$ (сплошная линия), с суммой деформаций ползучести от приращений напряжений, определенных аналитически (показаны пунктирной линией) по выражениям (6), (7), (8) и (9) на основании семейств экспериментальных кривых ползучести (фиг. 13а, 14б и 15б), нетрудно заметить, что расхождение между ними небольшое.

Следовательно, зная аналитическое выражение закона изменения кривых деформации ползучести грунта в зависимости от „возраста“ его, можно, при помощи зависимостей (3), (4) и (5), осуществить переход от деформаций ползучести, определенных при постоянных нагрузках, к деформациям ползучести при переменных нагрузках.

В заключение коснемся вопроса влияния продолжительности загрузки на процесс ползучести связных грунтов.

Известно [24], что, при последовательном нагружении образцов грунта равными ступенями нагрузок, через интервалы времени 60 минут, при переходе от одной ступени нагрузки к другой, по мере его старения, имеет место закономерное уменьшение деформации ползучести. Известно также, что при более длительном выдерживании образца по ступеням нагрузок (от 10 до 20 дней) имеет место нарушение изложенной выше закономерности, т. е. не всегда предельное значение деформации ползучести от данной ступени нагрузки меньше, чем деформация ползучести от предыдущей ступени нагрузки.

Нарушение указанной выше закономерности объяснялось нами [19] тем, что за время выдерживания образца грунта под какой-либо ступенью нагрузки имеет место его некоторое упрочнение за счет протекания внутренних физико-химических процессов (за счет проявления сцепления упрочнения) и что, если при последующем нагружении образца силы сцепления упрочнения будут превышать значения внешней нагрузки, будет иметь место уменьшение деформации ползучести по сравнению с предыдущей ступенью нагрузки, в противном случае будет иметь место разрушение ранее образованной структуры и увеличение деформации ползучести.

Если теперь рассмотреть семейство кривых ползучести грунтов, приведенных на графиках фиг. 13в, 14б, 15б, нетрудно заметить, что вышесказанное полностью относится и к ним. А именно: в случае непродолжительных испытаний, когда грунт не успевает достаточно упрочниться за счет внутренних физико-химических процессов, т. е. структурные связи между частицами и агрегатами грунта еще слабы, а старение его в основном обусловлено его уплотнением, наблюдается уменьшение деформации ползучести по мере испытания образцов в более старом возрасте (фиг. 13в). В случае продолжительных испытаний, когда старение грунта обусловлено как фактором уплотнения, так и фактором внутренних физико-химических процессов, наблюдается нарушение указанной выше закономерности (фиг. 15б), тем, что предельное значение деформации ползучести, определенное в возрасте $\tau = 25$ дней, меньше, чем предельное значение деформации ползучести, определенное в возрасте $\tau = 46$ дней к моменту загрузки. Увеличение деформации ползучести при испытании образца грунта в возрасте 46 дней по сравнению с испытанием образца в возрасте 25 дней объясняется разрушением ранее образованной структуры.

Что же касается семейства кривых ползучести, приведенного на фиг. 14б, замечаем, что здесь, как и в случае непродолжительных испытаний образцов, при переходе от молодого „возраста“ к более старому „возрасту“ имеет место уменьшение деформации ползучести. Указанное поведение данного грунта можно объяснить небольшим значением силы сцепления, которая не оказывает существенного влияния на ход процесса деформирования [19].

Резюмируя вышесказанное, приходим к выводу, что связный грунт нарушенной структуры, при сжатии в условиях отсутствия бокового расширения, ведет себя в соответствии с основными предпосылками теории упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [12, 13] и что можно к нему применить указанную теорию при их сжатии в отмеченных выше условиях.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР В. А. Флорину и академику АН АрмССР Н. Х. Арутюняну, ценные указания которых были учтены при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 18 XII 1957

Ս. Ռ. Մկրչյան

ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ԳՐՈՒՆՏԻ ՍՈՂՔԻ ՄԱՍԻՆ՝ ԿՈՂԱՅԻՆ ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԲԱՑԱԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ՍԵՂՄՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են խախտված սարուկտուրա ունեցող կապակցված գրունտների դեֆորմատիվ հատկությունների ուսումնասիրությունները սեղմման ժամանակ, երբ բացակայում է կողային ընդարձակման հնարավորությունը, նպատակ ունենալով ստուգել Մատուլ-Հարությունյանի սողքի տեսության կիրառման հնարավորությունը նրանց նկատմամբ՝ փորձարկման նշված պայմանների համար:

Հիշյալ նպատակի համար ուսումնասիրված են՝ 1) ակնթարթային դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած առնչությունը, 2) ակնթարթային մոդուլի ժամանակի ընթացքում փոփոխման օրինաչափությունը, երբ արտաքին բևեռ հաստատուն չէ, այլ աճում է ժամանակի ընթացքում հալոստար աստիճաններով, 3) լարումների և սողքի դեֆորմացիաների միջև եղած առնչությունը և 4) սողքի դեֆորմացիաների համար վերադրման օրենքի կիրառման հնարավորությունը:

Նշված ուսումնասիրությունները կատարելու համար օգտագործված են կապակցված գրունտների ութ տարատեսակները, որոնք փորձարկման են ենթարկվել Գ. Ի. Տեր-Ստեփանյանի և Հոդվածի հեղինակի մշակած կոմպրեսիոն սարքերում:

Կատարված փորձերի հիման վրա պարզված է, որ ակնթարթային դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած առնչությունը բավականին ճշտությամբ արտահայտվում է գծային օրենքով, իսկ ակնթարթային մոդուլի ժամանակի ընթացքում փոփոխման կապը արտաքին բևեռի աստիճանածի փոփոխման դեպքում կարելի է ներկայացնել սողքի տեսության (1) արտահայտությամբ [13]:

Ուսումնասիրություններից պարզված է, որ սողքի դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած առնչությունը արտահայտվում է ոչ գծային օրենք-

քով: Սակայն, փոքր լարումների դեպքում ($0,25, 0,5$ կգ/սմ²), թուլաստելի ճշտությամբ այն կարելի է արտահայտել դժային օրենքով:

Պարզված է նաև, որ պրակտիկայի համար թուլաստելի ճշտության սահմաններում, խախտված սարսկառուր առնչող գրունտների սողքի զեֆորմացիաների նկատմամբ կիրառելի է վերադրման օրենքը:

Ամփոփելով վերոհիշյալը, հեղինակը հանգել է այն հզորացուցիչ, որ վերևում նշված պայմանների համար, խախտված սարսկառուր առնչող կապակցված գրունտների սկզբնական դեպքում, նրանց նկատմամբ կիրառելի է Մասլով-Հարուսթյանյանի սողքի տեսությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, М.—Л., 1948.
2. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. Стройиздат, 1937.
3. Герсеванов Н. М. и Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практические применения. Стройиздат, М., 1918.
4. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минеречфлота, М., 1951.
5. Флорин В. А. Некоторые вопросы экспериментальных и теоретических исследований уплотнения земляной среды. В кн. Новое в области оснований гидротехнических сооружений, Л., 1953.
6. Денисов Н. Я. и Рабиндер П. А. О коллоидно-химической природе связности глинистых пород. ДАН СССР, том 54, № 6, 1946.
7. Дерягин Б. В. Расклинивающее действие жидких пленок и его практическое значение. «Природа», № 2, 1943.
8. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей среды. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
9. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1953.
10. Покровский, О физических принципах расчета деформации грунтов. В кн. Материалы Всесоюзного совещания по основаниям и фундаментам 1938. Госстройиздат, М.—Л., 1939.
11. Маслов Н. Н. Условия устойчивости склонов и откосов в гидроэнергетическом строительстве. Госэнергиздат, М.—Л., 1955.
12. Маслов Г. Н. Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Изв. ВНИИГ, т. 28, 1940.
13. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Изд. технико-теоретической лит., М.—Л., 1952.
14. Тер-Степанян Г. И. Комфилтметр—прибор для компрессионных и фильтрационных испытаний грунтов. Изв. АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, т. IX, № 4, 1956.
15. Месчян С. Р. К вопросу о законе наложения для деформации ползучести связных грунтов при сжатии. ДАН АрмССР, т. XXV, № 4, 1957.
16. Месчян С. Р. К вопросу экспериментального определения упругих характеристик связных грунтов при сжатии. ДАН АрмССР, т. XXIII, № 3, 1956.
17. Флорин В. А. Вопросы развития механики грунтов. В кн. Совещание о путях развития механики грунтов. Изд. ВНИГОС, Лен. отд., Л., 1950.
18. Черкасов И. И. Влияние метода установки штампа на результаты испытания грунта пробной нагрузкой. ДАН СССР, т. XXXII, № 3, 1952.
19. Месчян С. Р. К вопросу о влиянии продолжительности нагружения на ползучесть связных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР, т. XXIII, № 2, 1956.
20. Месчян С. Р. Экспериментальное исследование взаимосвязи между напряжениями и деформациями ползучести связных грунтов. ДАН АрмССР, т. XXIV, № 2, 1957.

21. *Васильев П. И.* Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетом времени. Изв. ВНИИГ, т. 45, 1951.
22. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Изв. ВНИИГ, т. 49, 1953.
23. *Васильев П. И.* Влияние старения бетона на вид кривых ползучести. Изв. ВНИИГ, т. 57, 1957.
24. *Месчан С. Р.* К вопросу об описании ползучести связанных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР, т. XXI, № 2, 1955.

НАУЧНАЯ ЗАМЕТКА

Л. А. Мовсисян

О некоторых специфических особенностях
 анизотропных оболочек

Целью настоящей заметки является выявление некоторых специфических особенностей напряженного состояния и перемещений оболочки, когда материал ее подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности, т. е. обладает анизотропией достаточно общего вида.

Задача излагается по безмоментной теории на примерах цилиндрической, конической и сферической оболочек.

За координатные линии берутся главные линии кривизны.

1. Цилиндрическая оболочка. Пусть положение точки на срединной поверхности оболочки определяется параметрами α и β , где α — расстояние точки от одного торца оболочки, β — длина дуги направляющей, отсчитываемая от некоторой определенной образующей.

Для простоты будем рассматривать цилиндрические оболочки кругового очертания. В этом случае для коэффициентов первой квадратичной формы и для главных радиусов кривизны будем иметь значения: $A = 1$, $B = 1$, $R_1 = \infty$, $R_2 = r$, где r — радиус поперечного круга.

Из общих уравнений безмоментной теории оболочек имеем следующие уравнения равновесия [1, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} + X &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + Y &= 0, \\ T_2 + rZ &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

в формулы, связывающие компоненты деформаций с перемещениями u , v , w :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{r}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}. \quad (1.2)$$

Из уравнений теории анизотропных оболочек для соотношений упругости имеем [2,5]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{h} (a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{16}S), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{h} (a_{12}T_1 + a_{22}T_2 + a_{26}S), \\ \omega &= \frac{1}{h} (a_{16}T_1 + a_{26}T_2 + a_{66}S),\end{aligned}\quad (1.3)$$

где h — толщина оболочки, a_{ik} — коэффициенты деформации.

Уравнения (1.1) и (1.2) в общем виде интегрируются весьма элементарно, но мы это сделаем для частных случаев.

а) Пусть оболочка длиной L несет равномерно распределенную нагрузку с постоянной интенсивностью q . Пусть один из торцов оболочки ($\alpha = 0$) полностью закреплен, а другой торец ($\alpha = L$) совершенно свободен.

Для рассматриваемой оболочки имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}\text{при } \alpha = 0 \quad u &= 0; \quad v = 0; \\ \text{при } \alpha = L \quad T_1 &= 0; \quad S = 0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Грузовыми членами уравнений (1.1) будут:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -q. \quad (1.5)$$

Из (1.1) в силу (1.4) и (1.5) легко получить значения внутренних усилий:

$$T_2 = rq, \quad T_1 = 0, \quad S = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя в первое соотношение (1.2) значения ε_1 из (1.3) и T_1, T_2, S из (1.6), и произведя интегрирование по α , получим:

$$u = a_{12}q \frac{r}{h} \alpha + f_1(\beta).$$

В силу (1.4) для произвольной функции интегрирования имеем $f_1(\beta) = 0$, тогда для перемещения u окончательно получим:

$$u = a_{12}q \frac{r}{h} \alpha. \quad (1.7)$$

Аналогичным образом из второго и третьего соотношений (1.2) получим:

$$v = a_{26}q \frac{r}{h} \alpha, \quad (1.8)$$

$$\bar{w} = -a_{22}q \frac{r^2}{h}. \quad (1.9)$$

Несмотря на то, что оболочка имеет ось симметрии (как с точки зрения геометрии, так и с точки зрения статики), она под действием равномерно распределенного поверхностного давления претерпевает кручение относительно оси симметрии, и образующие оболочки после деформации становятся винтовыми линиями. Здесь интересно еще то, что если вместо давления имеем равномерное поверхностное растяжение, то кручение оболочки происходит в обратном направлении.

в) Пусть оболочка одним торцом ($\alpha=0$) закреплена полностью, а другое торцовое сечение ($\alpha=L$), не имея продольных перемещений, несет равномерно распределенное сдвигающее усилие с интенсивностью S_0 . Оболочка свободна от внешних поверхностных нагрузок.

Для рассматриваемой оболочки имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha=0 \quad u=0; \quad v=0; \\ \text{при } \alpha=L \quad u=0; \quad S=S_0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.1) в силу (1.10) для внутренних усилий получим:

$$T_1 = f_1(\beta), \quad T_2 = 0, \quad S = S_0, \quad (1.11)$$

где $f_1(\beta)$ — неизвестная функция интегрирования.

Из первого соотношения (1.2) в силу (1.3) и (1.11) для перемещения u получим:

$$u = a_{11} \frac{\alpha}{h} f_1(\beta) + a_{16} \frac{\alpha}{h} S_0 + f_2(\beta).$$

Из граничных условий (1.10) для функций интегрирования $f_1(\beta)$ и $f_2(\beta)$ будем иметь:

$$f_1 = -\frac{a_{16}}{a_{11}} S_0, \quad f_2 = 0, \quad (1.12)$$

в силу чего для усилия T_1 и касательного перемещения u получим:

$$T_1 = -\frac{a_{16}}{a_{11}} S_0, \quad u = 0. \quad (1.13)$$

Имея значения внутренних усилий T_1, T_2, S и перемещения u , поступая как в первом примере, получаем значения v и w :

$$v = \left(a_{66} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}} \right) \frac{\alpha}{h} S_0. \quad (1.14)$$

$$w = \left(\frac{a_{12}a_{16}}{a_{11}} - a_{26} \right) \frac{r}{h} S_0. \quad (1.15)$$

Заметим, что к рассмотренной задаче приводится также задача кручения замкнутой круговой цилиндрической оболочки, когда одно торцевое сечение закреплено полностью, а к другому сечению, которое не имеет продольных перемещений, с помощью жесткой диафрагмы приложен крутящий момент — $M_{кр}$. В этом случае достаточно в расчетных формулах вместо S подставить $\frac{M_{кр}}{2\pi r^2}$.

Рассматривая полученные результаты, замечаем, что в отличие от изотропных оболочек здесь продольное усилие T_1 и нормальное перемещение w не равны нулю и в зависимости от направления кручения меняют свой знак, т. е. если в одном случае в оболочке появляются растягивающие продольные усилия T_1 , то в случае изменения знака момента появляются сжимающие продольные усилия. Что же касается перемещения v , то оно уменьшается с увеличением коэффициента a_{10} .

2. Коническая оболочка. Пусть α означает расстояние точки от вершины оболочки, а β — центральный угол, отсчитываемый от некоторой определенной образующей.

Геометрические характеристики в этом случае будут: $A=1$, $B=\alpha \sin \theta$, $R_1=\infty$ и $R_2=\alpha \operatorname{tg} \theta$, где θ угол при вершине, составленный центральной осью и образующим. Здесь тоже рассматриваем круговые оболочки, вследствие чего θ — постоянный угол.

Исходные уравнения для конической оболочки будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha T_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \beta} - T_2 + \alpha X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha S) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + S + \alpha Y &= 0, \\ T_2 + \alpha \operatorname{tg} \theta Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\alpha \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{u}{\alpha} - \frac{w}{\alpha \operatorname{tg} \theta}, \\ w &= \frac{1}{\alpha \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

и соотношения упругости (1.3).

Как раньше, займемся лишь конкретными примерами.

а) Коническая оболочка свободна от внешних нагрузок ($X=Y=Z=0$). Один торец ($\alpha=L$) жестко закреплен, а другой свободен и к нему приложено постоянное касательное усилие S_0 . Краевые условия при этом будут:

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha=L \quad u=0; \quad v=0; \\ \text{при } \alpha=a_0 \quad T_1=0; \quad S=S_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая последнее условие (2.3) и (2.1) имеем:

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad S = \frac{x_0^2}{x^2} S_0. \quad (2.4)$$

Из (1.3) и (2.2) в силу (2.3) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} u &= a_{16} \frac{x_0^2}{h} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{x} \right) S_0, \\ v &= a_{66} \frac{x_0^2}{2h} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{x^2} \right) S_0, \\ w &= \left(\frac{a_{16}}{L} - \frac{a_{16} + a_{26}}{x} \right) \frac{x_0^2}{h} S_0 \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

в) Та же оболочка, но на свободном конце действует нормальное усилие $T_1 = T_0 = \text{const}$.

Для искомых величин находим:

$$T_1 = \frac{x_0}{x} T_0, \quad T_2 = 0, \quad S = 0, \quad (2.6)$$

$$u = a_{11} T_0 \frac{x_0}{h} \ln \frac{x}{L},$$

$$v = a_{16} T_0 \frac{x_0}{h} \left(\frac{x}{L} - 1 \right), \quad (2.7)$$

$$w = T_0 \frac{x_0}{h} \left(a_{11} \ln \frac{x}{L} - a_{12} \right) \operatorname{tg} \theta.$$

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод, аналогичный приведенному в п.1, что u и w в первом и w во втором примерах появляются вследствие анизотропии и меняют знак с изменением направления краевого усилия. Интересно еще то, что от угла θ зависит только нормальное перемещение w , которое увеличивается с увеличением угла. Кроме того, как видно из (2.5), величина w зависит как от a_{26} , так и от a_{16} за исключением на линии $x=L$, где w зависит только от a_{26} .

3. Сферическая оболочка. Отнесем срединную поверхность к географической системе координат, в которой положение точки задается полярным расстоянием θ и долготой φ .

Положим [1]:

$$\alpha = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \beta = \varphi. \quad (3.1)$$

Тогда геометрические характеристики оболочки будут: $A = B = \frac{R}{\operatorname{ch} \alpha}$, $R_1 = R_2 = R$, где R — радиус сферы.

Исходные уравнения для безмоментной сферической оболочки будут:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + A \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \alpha} (T_1 - T_2) + A^2 X &= 0, \\ A \frac{\partial S}{\partial \alpha} + A \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial A}{\partial \alpha} S + A^2 Y &= 0, \\ T_1 + T_2 + RZ &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R}, \\ w &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{A} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

и соотношения упругости (1.3).

Уравнения (3.3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{A} \right) &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) &= w. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим примеры.

а) Полусферический купол, жестко закрепленный на границе находится под равномерным давлением интенсивностью q . Из симметрии задачи следует, что u и v в полюсе равны нулю.

Интегралами уравнения (3.2) будут:

$$T_1 = \frac{Rq}{2} + \frac{f_1}{A^2}, \quad T_2 = \frac{Rq}{2} - \frac{f_1}{A^2}, \quad S = \frac{f_2}{A^2}. \quad (3.5)$$

Имея (3.5) и (1.3) из (3.4) для перемещений получим (изотермические координаты заменены географическими):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{h} \left\{ (a_{11} - a_{22}) \frac{Rq}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + [(a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) f_1 + \right. \\ &\quad \left. + (a_{16} - a_{26}) f_2] \frac{1}{2R^2} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\} R \sin \theta + f_3 R \sin \theta, \\ v &= \frac{1}{h} \left\{ (a_{16} + a_{26}) \frac{Rq}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + [(a_{16} - a_{26}) f_1 + \right. \\ &\quad \left. + a_{66} f_2] \frac{1}{2R^2} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\} R \sin \theta + f_4 R \sin \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

где f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — произвольные функции интегрирования. Определить w можно из первых уравнений (3.3).

Удовлетворяя теперь граничным условиям, для произвольных функций получаем нулевые значения. Усилия и перемещения при этом будут:

$$T_1 = \frac{Rq}{2}, \quad T_2 = \frac{Rq}{2}, \quad S = 0, \quad (3.7)$$

$$u = \frac{R^2 q}{2h} (a_{11} - a_{22}) \sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$v = \frac{R^2 q}{2h} (a_{16} + a_{26}) \sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (3.8)$$

$$w = -\frac{R^2 q}{2h} (a_{11} + a_{12}) + \frac{R^2 q}{2h} (a_{11} - a_{22}) \left(1 + \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \theta \right).$$

Из полученного видно, что в отличие от изотропных сферических оболочек, которые при равномерном давлении остаются сферическими, здесь появляются u , v и второе слагаемое w .

в) Сферическая полоса. Край $\theta = 90^\circ$ жестко зашпелен, а на краю $\theta = 0^\circ$ действует касательное усилие; вместе с тем перемещение в направлении касательной к меридианам отсутствует. Оболочка свободна от внешних нагрузок. Имеем следующие краевые условия

$$\begin{aligned} \text{при } \theta = 0^\circ \quad u = 0; \quad S = S_0; \\ \text{при } \theta = 90^\circ \quad u = 0; \quad v = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям для произвольных функций получаем:

$$f_1 = \frac{a_{26} - a_{16}}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}} S_0 R^2 \sin^2 \theta_0, \quad f_2 = S_0 R^2 \sin^2 \theta_0, \quad f_3 = f_4 = 0. \quad (3.10)$$

После чего из (3.5) и (3.6) будем иметь

$$\begin{aligned} T_1 = -T_2 = S_0 \frac{a_{26} - a_{16}}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}} \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}, \\ S = S_0 \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

и перемещения в виде:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= \frac{S_0 R}{2h} \left[a_{66} - \frac{(a_{16} - a_{26})^2}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}} \right] \left(\sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{ctg} \theta \right) \sin^2 \theta_0, \\ w &= -\frac{S_0 R}{h} \left[(a_{11} - a_{12}) \frac{a_{26} - a_{16}}{2a_{12} + a_{22}} + a_{16} \right] \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. Описанные здесь явления специфичны для анизотропных оболочек вообще. Эти явления совершенно не обнаруживаются в случае

изотропных оболочек, а также в некоторых частных случаях анизотропных оболочек.

Например эти явления не обнаруживаются в случае ортотропных оболочек, когда главные направления упругости совпадают с главными геометрическими направлениями координатной поверхности оболочки [4].

Полученные здесь результаты, по сути дела, являются обобщением задач элементарного напряженного состояния анизотропных материалов [2] на случай безмоментных оболочек.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 III 1958

Լ. Ա. Մովսիսյան

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՍՊԵՑԻՖԻԿ ԱՌԱՆՋՆԱՂԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության նպատակն է երևան հանել անիզոտրոպ թաղանթների լարվածության միջակի ու տեղափոխումների մի քանի առանձնահատկություններ այն դեպքում, երբ թաղանթի նյութը ենթարկվում է հսկի ընդհանրացրած օրենքին և ամեն մի կետում ունի առանձնականության սիմետրիայի մեկ հարմարություն, որը դուզահն է միջին մակերևութին:

Խնդիրը շարադրված է անժամկետ տեսությամբ՝ դրանալին, կոնական և դնդալին թաղանթների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
4. Амбарцумян С. А. Безмоментная теория анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), I, № 6 1948.
5. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, т. XII, № 1, 1948.