

Г. В. Бадалян

Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора*

§ 3. Тауберовые теоремы

В настоящем параграфе излагаются тауберовые теоремы для $(C_1, 1)$ и (A_1) методов суммирования.

Начнем с метода $(C_1, 1)$.

Определение 7. Условимся говорить, что последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условию (α, γ) , если из

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=n}^{m(n)} \frac{1}{\gamma_v} = 0, \quad 0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$$

следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=n}^{m(n)} \frac{1}{\alpha_v} = 0, \quad v = 1, 2, \dots$$

Теорема 10. Суммируемость ряда $\sum_0^{\infty} a_n$ по методу $(C_1, 1)$ влечет за собой его сходимостъ (в обычном смысле), если только $a_n > -\frac{C}{\alpha_n}$, $n > n_0(C)$, $C > 0$ — произвольное число, а $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условию (α, γ) .

Лемма 1. Если члены ряда $\sum_1^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера $n_0(c)$, удовлетворяют условию

$$a_n > -\frac{C}{\alpha_n},$$

где $C > 0$ — произвольное число, $\{\alpha_n\}$ — заданная последовательность положительных чисел, то справедливо:

$$S_p^{(1)} + \frac{S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)}}{\prod_{v=p_1+1}^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}} - C \sum_{p_1+1}^p \frac{1}{\alpha_v} < S_p < S_p^{(1)} +$$

* Начало см. предыдущий наш журнал.

$$+ \frac{\dot{S}_q^{(1)} - \dot{S}_p^{(1)}}{\prod_{v=1}^q \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1} + C \sum_{p+1}^q \frac{1}{\alpha_v}, \quad (13)$$

где $0 < n_0 < p_1 < p < q$ — произвольные целые числа, $\dot{S}_m^{(1)}$ — введено в определение 2.

Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma_{pq} &= \sum_{m=p}^q \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i}{\prod_{v=2}^m (\gamma_v - \gamma_1)} S_{m-1} = \\ &= \dot{S}_q^{(1)} \prod_{v=2}^q \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - \dot{S}_p^{(1)} \prod_{v=2}^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = \dot{S}_q^{(1)} - \dot{S}_p^{(1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть теперь $p < \mu < q$, тогда

$$S_\mu = S_p + (a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_\mu) > S_p - C \sum_{v=p+1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_v}.$$

Это значит, что

$$\sigma_{pq} = \sum_{m=p}^q \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i}{\prod_{v=2}^m (\gamma_v - \gamma_1)} S_{m-1} > \left(S_p - C \sum_{p+1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_v} \right) \sum_{m=p}^q \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i}{\prod_{v=2}^m (\gamma_v - \gamma_1)}$$

или согласно (14)

$$\begin{aligned} S_p &< \frac{\dot{S}_q^{(1)} - \dot{S}_p^{(1)}}{\sum_{p+1}^q \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i}{\prod_{v=2}^m (\gamma_v - \gamma_1)}} + C \sum_{v=p+1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_v}, \\ S_p &< \dot{S}_q^{(1)} + \frac{\dot{S}_q^{(1)} - \dot{S}_p^{(1)} - \dot{S}_q^{(1)} \sum_{p+1}^q \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i}{\prod_{v=2}^m (\gamma_v - \gamma_1)}}{\sum_{p+1}^q \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i}{\prod_{v=2}^m (\gamma_v - \gamma_1)}} + C \sum_{v=p+1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_v}. \end{aligned}$$

Заметив теперь, что

$$\sum_p^q \frac{\prod_{v=1}^{m-1} \gamma_v}{\prod_2^m (\gamma_v - \gamma_1)} = \prod_2^q \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - \prod_2^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \quad (15)$$

и

$$S_m^{(1)} = S_m^{(1)} \prod_2^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1};$$

получаем

$$S_p < S_q^{(1)} + \frac{-S_p^{(1)} \prod_2^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} + S_q^{(1)} \prod_2^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}}{\prod_2^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \left(\prod_{p+1}^q \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1 \right)} + C \sum_{p+1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_v}.$$

Таким образом получаем

$$S_p < S_q^{(1)} + \frac{S_q^{(1)} - S_p^{(1)}}{\prod_{p+1}^q \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1} + C \sum_{v=p}^q \frac{1}{\alpha_v}. \quad (16)$$

Оценим теперь S_p снизу.

Рассмотрим

$$\sigma_{p,p} = S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)},$$

где $0 < n_0 < p_1 < p$ — произвольное целое положительное число, зная, что при $p_1 < \mu < p$ справедливо:

$$\begin{aligned} S_{\mu} &= S_p - (a_p + a_{p-1} + \dots + a_{\mu+1}) < S_p + C \sum_{v=\mu+1}^p \frac{1}{\alpha_v} < \\ &< S_p + C \sum_{v=p_1}^p \frac{1}{\alpha_v}. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} \sigma_{p,p} &= \sum_{m=p_1}^p \frac{\prod_{v=1}^{m-1} \gamma_v}{\prod_2^m (\gamma_v - \gamma_1)} S_{m-1} < \\ &< \left(S_p + C \sum_{v=p_1+1}^p \frac{1}{\alpha_v} \right) \sum_{m=p_1}^p \frac{\prod_{v=1}^{m-1} \gamma_v}{\prod_2^m (\gamma_v - \gamma_1)} \end{aligned}$$

или

$$S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)} < \left(S_p + C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v} \right) \sum_{p_1}^p \frac{\prod_1^{m-1} \gamma_v}{\prod_2^m (\gamma_v - \gamma_1)}$$

и

$$S_p > \frac{S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)}}{\sum_{m=p_1}^n \frac{\prod_1^m \gamma_v}{\prod_1^m (\gamma_v - \gamma_1)}} - C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v}.$$

В силу соотношений (15) путем повторения уже знакомых выкладок получим

$$S_p > S_p^{(1)} + \frac{S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)} - S_p^{(1)} \prod_2^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} + S_{p_1}^{(1)} \prod_2^{p_1} \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}}{\prod_2^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - \prod_2^{p_1} \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}} - C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v}$$

или

$$S_p > S_p^{(1)} + \frac{(S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)}) \prod_2^{p_1} \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}}{\prod_2^{p_1} \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} \left(\prod_{p_1+1}^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1 \right)} - C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v}.$$

Следовательно,

$$S_p > S_p^{(1)} + \frac{S_p^{(1)} - S_{p_1}^{(1)}}{\prod_{p_1+1}^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1} - C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v}. \quad (17)$$

Из неравенств (16) и (17) следует неравенство (13), чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ и $n_1 = n_1(\varepsilon)$ справедливо:

$$(\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} < \prod_{v=n}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1 < \gamma_1 \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \exp \left(\gamma_1 \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \right), \quad (18)$$

где $m > n \geq n_1$ — произвольные числа.

Имеем

$$\prod_{v=n}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = \prod_{v=n}^m \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) = \exp \sum_{v=n}^m \ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right).$$

Заметим теперь, что при $\gamma_v - \gamma_1 > \gamma_1$

$$\ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) = \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1^2}{(\gamma_v - \gamma_1)^2} + \dots < \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1}.$$

С другой стороны,

$$\ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) > \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right)^2.$$

При достаточно большом $n_1 = n_1(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — число сколь угодно малое и $v \geq n_1$ будем иметь

$$(\gamma_v - \varepsilon) \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} < \sum_{v=n}^m \ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) < \gamma_1 \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1}$$

или

$$\exp \left((\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) < \prod_{v=n}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} < \exp \left(\gamma_1 \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \right),$$

ио

$$\exp \left((\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) - 1 > (\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1}$$

а с другой стороны

$$\exp \left((\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) - 1 < \gamma_1 \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \exp \left(\gamma_1 \sum_{v=n}^m \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} \right).$$

Этим доказана справедливость неравенства (18).

Доказательство теоремы 10. Обозначим

$$A_p = \hat{S}_p^{(1)} + \frac{\hat{S}_p^{(1)} - \hat{S}_{p_1}^{(1)}}{\prod_{p_1+1}^p \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1} - C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v},$$

$$B_q = \hat{S}_q^{(1)} + \frac{\hat{S}_q^{(1)} - \hat{S}_p^{(1)}}{\prod_{p+1}^q \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} - 1} + C \sum_p^q \frac{1}{\alpha_v}.$$

Согласно условию теоремы

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \hat{S}_p^{(1)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \hat{S}_q^{(1)} = S, \quad (19)$$

с другой стороны

$$|A_p - S| \leq |\hat{S}_p^{(1)} - S| + \frac{|\hat{S}_p^{(1)} - \hat{S}_{p_1}^{(1)}|}{(\gamma_v - \varepsilon) \sum_{v=p_1+1}^p \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1}} + C \sum_{p_1}^p \frac{1}{\alpha_v},$$

$$|B_q - S| \leq |\dot{S}_q^{(1)} - S| + \frac{|\dot{S}_q^{(1)} - \dot{S}_p^{(1)}|}{(\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{p+1}^q \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1}} + C \sum_p^q \frac{1}{\alpha_v}.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ в силу (19) найдется число $n_2 = n_2(\varepsilon, C)$ такое, что при произвольных $q > p > p_1 > n_2$ будем иметь

$$|\dot{S}_p^{(1)} - S| < \varepsilon, \quad |\dot{S}_p^{(1)} - \dot{S}_{p_1}^{(1)}| < \varepsilon, \quad |\dot{S}_p^{(1)} - \dot{S}_q^{(1)}| < \varepsilon.$$

Возьмем теперь $q = q(p)$ и $p_1 = p_1(p)$ так, чтобы

$$(\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=p_1+1}^p \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} = V\varepsilon, \quad (\gamma_1 - \varepsilon) \sum_{v=p+1}^q \frac{1}{\gamma_v - \gamma_1} = V\varepsilon,$$

тогда

$$|A_p - S| < \varepsilon + V\varepsilon + C \sum_{p_1}^q \frac{1}{\alpha_v},$$

$$|B_q - S| < \varepsilon + V\varepsilon + C \sum_p^q \frac{1}{\alpha_v}.$$

В силу условия (α, γ) получаем, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = \lim_{p \rightarrow \infty} B_{q(p)} = S.$$

Следовательно, согласно (13)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = S.$$

Этим теорема доказана.

В частном случае, когда $\alpha_v = \gamma_v$, $v = 1, 2, \dots$, доказанная выше теорема является прямым обобщением известной тауберовой теоремы для метода суммирования $(C, 1)$.

Тауберова теорема для обобщенного ряда Тейлора

Теорема 11. Из суммируемости ряда $\sum_0^\infty a_n$ по методу (A_1)

при условии $a_n = \left(\frac{1}{\gamma_n} \exp \left(-\delta \sum_1^n \frac{1}{\gamma_v^2} \right) \right)$, где $\delta > 0$ — произвольное сколь

угодно малое число, $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$, $\sum_1^\infty \frac{1}{\gamma_v} = \infty$, следует его сходимость (к той же сумме) в обычном смысле.

Лемма 1. Для всякого $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство:

$$1 - \omega_n(x) < C \prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - x} x^x,$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от n и x ; $0 < x \leq \gamma_1$ — произвольное число.

Действительно,

$$\omega_n(x) = \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

где $\alpha > 0$ — произвольное число, $x \in (0, 1]$; это значит, что

$$\omega_n(x) = 1 + \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{-x-i\infty}^{-x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)}$$

так как

$$\operatorname{Res}_{\zeta=0} \left(\frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v x^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)} \right) = 1 \text{ и } 0 < x < \gamma_1.$$

Продолжая оценку, будем иметь

$$1 - \omega_n(x) < \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi} \int_{-x-i\infty}^{-x+i\infty} \frac{x^{-\operatorname{Re} \zeta} |d\zeta|}{\prod_{v=1}^n |\zeta + \gamma_v|}$$

или

$$1 - \omega_n(x) < C \prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - x} x^x,$$

Заметим, что в случае $x = \gamma_1$, в качестве контура интегрирования следует брать $(-x - i\infty, -x - ir)$, $|\zeta + \gamma_1| < r$, $\operatorname{Re}(\zeta + \gamma_1) > 0$, и $(-x + ir, -x + i\infty)$ и, после оценки интеграла, перейти к пределу, когда $r \rightarrow 0$.

Лемма 2. Если $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$, то

$$\prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v - \alpha}{\gamma_v} \sum_1^n |a_k| \frac{\prod_1^k \gamma_v}{\prod_1 (\gamma_v - \alpha)} < C, \quad (20)$$

где $\alpha > 0$ — произвольное число, $\alpha \leq \gamma_1$, $C > 0$ — не зависящее от n число.

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_1^n |a_k| \frac{\prod_1^k \gamma_v}{\prod_2^k (\gamma_v - \alpha)} &< C \sum_1^n \frac{\prod_1^k \gamma_v}{\prod_2^k (\gamma_v - \alpha)} = \\ &C \left(\prod_2^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha} - 1 \right) < C \prod_2^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Если ряд $\sum_0^\infty a_n$ суммируем по методу (A_1) и $a_n = 0 \left(\frac{1}{\gamma_n} \exp \left(-\delta \sum_1^n \frac{1}{\gamma_v} \right) \right)$, где $\delta > 0$ — произвольное число, то

$$|S_n| = \left| \sum_1^n a_k \right| < A(\delta),$$

где $A(\delta) > 0$ — не зависящее от n число.

Действительно, пусть

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^\infty a_n \omega_n(x) = S.$$

Это значит, что при достаточно малом $x = x(\varepsilon)$ будет

$$|\varphi(x) - S| < \varepsilon.$$

Далее

$$\begin{aligned} S_m - S &= \varphi(x) - S + S_m - \varphi(x) = \\ &= \varphi(x) - S + \sum_{k=1}^m a_k [1 - \omega_k(x)] - \sum_{n=m+1}^\infty a_n \omega_n(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} |S_m - S| &\leq |\varphi(x) - S| + C \sum_{k=1}^m |a_k| \prod_{v=2}^k \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha} x^\alpha + \\ &+ \left| \sum_{n=m+1}^\infty a_n \omega_n(x) \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно лемме 2 имеем

$$x^\alpha \sum_{k=1}^m |a_k| \prod_{v=2}^k \frac{\gamma_v - \alpha}{\gamma_v} < C_1 x^\alpha \prod_{v=2}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha};$$

примем

$$x^\alpha = \prod_{v=2}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha} \quad (22)$$

где $0 < \alpha \leq \gamma_1$ — по прежнему произвольное, не зависящее от m число. Это значит, что

$$x^\alpha \sum_{k=1}^m |a_k| \prod_{v=2}^k \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha} < C_1. \quad (23)$$

Для третьего слагаемого правой части неравенства (21) будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x) \right| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} \leq \\ &\leq A \exp\left(-\delta \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v^2}\right) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= A \exp\left(-\delta \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v^2}\right) \frac{\prod_{v=1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=0}^m (\zeta + \gamma_v)} < \\ &< \frac{A}{\alpha} \exp\left(-\delta \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v^2}\right) x^{-\alpha} \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha}. \end{aligned}$$

В силу (22) имеем:

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x) \right| < \frac{A}{\alpha} \exp\left(-\delta \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v^2}\right) \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + \alpha} \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha}.$$

Но

$$\begin{aligned} \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v + \alpha} &< \exp\left(-\alpha \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v + \alpha}\right), \\ \prod_{v=1}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \alpha} &< \exp\left(\alpha \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v - \alpha}\right). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x) \right| < \frac{A}{\alpha} \exp\left(-\delta \sum_1^m \frac{1}{\gamma_v^2}\right) \exp\left(\alpha \sum_1^m \frac{2\alpha}{\gamma_v^2 - \alpha^2}\right).$$

Используя произвольность числа α , всегда можно добиться того, чтобы имели

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x) \right| < A_1(\delta),$$

где $A_1(\delta) > 0$ — не зависящая от m постоянная,

Действительно, достаточно взять $\delta < \gamma_1^2$ и $4\alpha^2 = \delta$, тогда

$$2\alpha^2 \sum_1^m \frac{1}{\gamma_v^2 - \alpha^2} < 4\alpha^2 \sum_1^m \frac{1}{\gamma_v^2} = \delta \sum_1^m \frac{1}{\gamma_v^2}.$$

Таким образом доказано, что

$$|S - S_n| < A_2(\delta)$$

где $A_2(\delta) > 0$ — число, не зависящее от n . Этим доказано, что

$$|S_n| < |S| + A_2(\delta) = A(\delta).$$

Лемма 4. Пусть $|a_n| < \frac{C}{\gamma_n}$ и, $C > 0$ — некоторая постоянная

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \quad \text{где } x \in (0, 1],$$

тогда

$$x^\nu \varphi^{(\nu)}(x) = o(1),$$

когда

$$x \rightarrow 0+, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

(25)

Для доказательства заметим, что

$$\varphi'(x) = -x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_v)};$$

значит согласно условию леммы

$$\begin{aligned} |x\varphi'(x)| &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= \frac{C}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = C, \end{aligned}$$

где как и везде при $n=1$, $\prod_1^{n-1} \gamma_v = 1$.

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{(x^{-\zeta-1})' d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{[\zeta + \gamma_1] + 1 - \gamma_1 | x^{-\zeta-2} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_v)} = \\ &= x^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_2^n (\zeta + \gamma_v)} + \\ &+ x^{-2} (1 - \gamma_1) \sum_1^{\infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_v)}.\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}|x^2 \varphi''(x)| &\leq C \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_2^n (\zeta + \gamma_v)} + \right. \\ &\left. + |1 - \gamma_1| \sum_1^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_v)} \right) = \\ &= C_1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} + |1 - \gamma_1| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} \right) < A,\end{aligned}$$

где $A > 0$ — число не зависящее от x .

Продолжая этот процесс, в силу применимости математической индукции будем иметь

$$|x^n \varphi^{(n)}(x)| < C_1,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$.

С другой стороны, известна теорема Ландау:

Если $g(x)$ на $(0, 1)$ дважды дифференцируема,

$$\left. \begin{aligned}g(x) &= 0(1) \\ x^2 g''(x) &= 0(1)\end{aligned} \right\} \quad \text{когда } x \rightarrow 0+,$$

то $xg'(x) = o(1)$, когда $x \rightarrow 0+$.

См. [1], стр. 201, теорема 101.

Применение этой теоремы завершает доказательство леммы, так как

$$\Phi(x) = \varphi(x) - S \rightarrow 0, \text{ когда } x \rightarrow 0+$$

$$\text{и } x^n \Phi^{(n)}(x) = x^n \varphi^{(n)}(x) = o(1),$$

$$\text{значит } x^n \varphi^{(n)}(x) = o(1), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Лемма 5. Пусть $|a_n| < \frac{C}{\gamma_n}$, где $C > 0$ — не зависящая от n постоянная

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \quad x \in (0, 1], \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = S,$$

тогда

$$\varphi_p(x) = o(x^{-\gamma_p-1}), \text{ когда } x \rightarrow 0+,$$

где

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{\gamma_1-1}} \right)', \quad \varphi_p(x) = \left(\frac{\varphi_{p-1}(x)}{x^{\gamma_{p-1}-\gamma_{p-1}-1}} \right)', \quad p = 2, 3, \dots.$$

Имеем

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{\varphi'(x)}{x^{\gamma_1-1}} \right)' = \varphi''(x) x^{-\gamma_1+1} + \varphi'(x) (1 - \gamma_1) x^{-\gamma_1} = o(x^{-\gamma_1-1}),$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= [\varphi_1(x) x^{-\gamma_2-\gamma_1-1}]' = \varphi_1'(x) x^{-\gamma_2-\gamma_1+1} + (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) \varphi_1(x) x^{-\gamma_2+\gamma_1} = \\ &= o(x^{-\gamma_2-2}) x^{-\gamma_2+\gamma_1+1} + o(x^{-\gamma_1+1}) x^{-\gamma_2+\gamma_1} = o(x^{-\gamma_2-1}). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс и применяя математическую индукцию, получим, что

$$\varphi_p(x) = o(x^{-\gamma_p-1}), \quad p = 1, 2, \dots.$$

Лемма 6. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем к S по методу (A_1) ,

то

$$x^{\gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_v - \gamma_1)} \rightarrow S;$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{p+n} \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int_{C_{p+n}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+v})} \rightarrow S,$$

когда $x \rightarrow 0+$. При $n=0$, $\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}$ равно единице.

Для доказательства рассмотрим

$$\sum_{n=0}^q a_n \omega_n(x) = \sum_{n=p}^{q-1} (\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x)) \sum_{m=p}^n a_m + \omega_q(x) \sum_{n=p}^q a_n$$

и зная, что $\sum_{n=p}^q a_n$ в силу леммы 3 равномерно ограничено, переходя к пределу, когда $q \rightarrow \infty$, $p = 0$, получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{\nu})}.$$

Это значит, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{\nu})} \rightarrow S.$$

когда $x \rightarrow 0+$.

Для получения второго тождества, утвержденного леммой, будем $p+1$ раз обобщенно дифференцировать ряд

$$\varphi(x) = S_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_1} + S_1 \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} + \dots$$

Нами ранее доказано, что в $(0, 1]$ такой ряд можно дифференцировать, а следовательно и обобщенно дифференцировать любое число раз.

Будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= (-1)^{p+1} \frac{\varphi_p(x) x^{\gamma_{p+1}}}{\prod_{\nu=1}^{p+1} \gamma_{\nu}} = \frac{S_p}{\gamma_{p+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} + \\ &+ \frac{S_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} + S_{p+2} \frac{\gamma_{p+2}}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^3 (\zeta + \gamma_{p+\nu})} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= \frac{S_p}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{1} - S_p \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} + \\ &+ S_{p+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+2}} - S_{p+1} \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} + \dots \end{aligned}$$

$$+ S_{p+2} \frac{\gamma_{p+2}}{2\pi i} \int_{C_{p+3}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta - \gamma_{p+2})(\zeta + \gamma_{p+3})} - S_{p+2} \frac{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}}{2\pi i} \int_{C_{p+3}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^3 (\zeta + \gamma_v)} + \dots$$

Пусть теперь

$$S_p \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} + S_{p+1} \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} + \dots \rightarrow S, \quad (26)$$

когда $x \rightarrow 0+$, тогда в силу того, что $\psi_p(x) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow 0+$, в силу (26) будем иметь

$$S_{p+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+2}} + S_{p+2} \frac{\gamma_{p+2}}{2\pi i} \int_{C_{p+3}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+2})(\zeta + \gamma_{p+3})} + \dots \rightarrow S, \quad x \rightarrow 0+.$$

Таким образом доказано, что для всякого целого положительного p справедливо

$$S_p \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} + S_{p+1} \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} + \dots \rightarrow S, \quad x \rightarrow 0+.$$

Доказательство теоремы 11.

Заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi i} \int_{C_{p+2}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \gamma_{p+1})(\zeta + \gamma_{p+2})} + \dots = 1.$$

и составим

$$\begin{aligned} S_m - S &= \sum_{n=0}^{\infty} (S_m - S) \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+v})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (S_{p+n} - S) \frac{\prod_{v=0}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_{p+v})} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (S_m - S_{p+n}) \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+v})}, \end{aligned}$$

где принято $\gamma_{p+0} = 1$.

Так как согласно лемме 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{p+n} \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+v})} \rightarrow S, \text{ когда } x \rightarrow 0+,$$

то при достаточно малом $x = x(\varepsilon) > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} S_m - S &= \Delta(\varepsilon) + \sum_{v=0}^{\infty} (S_m - S_{p+n}) \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+v})} = \\ &= \Delta(\varepsilon) + \sigma_{mp}(x), \text{ где } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Разобьем $\sigma_{mp}(x)$ на три слагаемые:

- I $I_1(x)$ от 1 до $m_1 - p$,
- II $I_2(x)$ от $m_1 - p + 1$ до $m_2 - p$,
- III $I_3(x)$ от $m_2 - p + 1$ до ∞ ,

так, чтобы имели

$$\begin{aligned} \sum_{v=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}} &= \varepsilon^\delta, \quad 0 < \delta < 1, \\ \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}} &= \frac{1}{\varepsilon^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \\ \gamma_p &= \frac{1}{\varepsilon}, \\ x^\beta &= \varepsilon \exp\left(-x \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}}\right), \\ x &= \frac{1}{\varepsilon^\beta}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$, $1 - 2\beta - \alpha > 0$, $m_1 < m < m_2$.

Заметим, что $x \rightarrow 0$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действительно

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{x}} \exp\left(\sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}}\right) = \varepsilon^\beta e^{-\frac{1}{\varepsilon^\alpha}} \rightarrow 0, \text{ когда } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу лемм

$$|I_1(x)| \leq \sum_{n=0}^{m_1-p} |S_m - S_{p+n}| \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_{p+v}}{2\pi i} \int \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+v})} <$$

$$\begin{aligned}
&< A \cdot \sum_{\nu=0}^{m_1-1} \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} = \\
&= A \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{m_1}} \left[1 - \frac{\prod_{\nu=1}^{m_1-1} \gamma_{p+\nu}}{\prod_{\nu=1}^{m_1-p} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} \right] \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = \\
&= A [1 - w(x, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{m_1})] < A \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - x},
\end{aligned}$$

то есть

$$|I_1(x)| < A \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - x}. \quad (29)$$

Для оценки сверху $I_2(x)$ заметим, что при $m_1 < m < m_2$ и $m_1 - p < n < m_2 - p$, согласно условию теоремы

$$|S_{p+n} - S_m| \leq |a_{m_1}| + |a_{m_1+1}| + \dots + |a_{m_2}| < C \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}};$$

значит

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq \sum_{n=m_1-p}^{m_2-p} |S_{p+n} - S_m| \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} < \\
&< C \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} \sum_{n=m_1-p}^{m_2-p} \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} = \\
&= C \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{m_1}} \left[\prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\zeta + \gamma_{p+\nu}} - \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+1}}{\zeta + \gamma_{p+\nu}} \right] \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = \\
&= A_1 \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} [w_{m_1-p}(x, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{m_1}) - \\
&- w_{m_1-p}(x, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{m_1})] < A_1 \sum_{\nu=m_1-p}^{m_2-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, согласно условию (28) получаем

$$|I_2(x)| < A\varepsilon^5. \quad (30)$$

Оценим, наконец, сверху и $|I_3(x)|$.

Имеем

$$\begin{aligned} |I_3(x)| &< A_1' \sum_{v=m_1-p}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} = \\ &= A_1' \frac{\prod_{\nu=1}^{m_1-p} \gamma_{p+\nu}}{2\pi i} \int_{C_{p+n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{m_1-p} (\zeta + \gamma_{p+\nu})} \end{aligned}$$

или

$$|I_3(x)| < A_2 \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} + x} x^{-s} \quad (31)$$

В силу неравенства (27) и полученных оценок будем иметь

$$\begin{aligned} |S - S_m| &< \Delta(\varepsilon) + Ax^s \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - x} + \\ &+ A_1 \sum_{v=m_1-p}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + A_2 x^{-s} \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} + x}. \end{aligned} \quad (27')$$

Заметим теперь, что в силу (28) имеем

$$x^s \prod_{\nu=1}^{m_1-1} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - x} < \varepsilon \exp \left(-x \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + x \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}} + \frac{x^2}{2} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} + \dots \right).$$

Это значит, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} + \frac{x^3}{3} \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^3} + \dots < \\ < \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{x^2}{2\gamma_{p+\nu}^2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\gamma_{p+\nu}}} < x^2 \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

следовательно,

$$x^s \prod_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+\nu}}{\gamma_{p+\nu} - x} < \varepsilon \exp \left(x^2 \sum_{\nu=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+\nu}^2} \right) <$$

$$\begin{aligned} &< \varepsilon \exp\left(\frac{x^2}{\gamma_{m_1}} \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}}\right) < \varepsilon \exp\left(\frac{x^2}{\gamma_p} \sum_{v=p}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}}\right) < \\ &< \varepsilon \exp(\varepsilon \cdot \varepsilon^{-2\beta} \cdot \varepsilon^{-\alpha}) = \varepsilon \exp(\varepsilon^{1-2\beta-\alpha}) < e\varepsilon. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим теперь

$$x^{-x} \prod_{v=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+v}}{\gamma_{p+v} + x}.$$

Имеем

$$x^{-x} \prod_{v=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+v}}{\gamma_{p+v} + x} < \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(x \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}} + \lambda(x, p, m_2)\right),$$

где

$$\lambda(x, p, m_2) = -x \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}} + \frac{x^2}{2} \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}^2} - \frac{x^3}{3} \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}^3} + \dots$$

Заметим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{x^2}{2\gamma_{p+v}^2} + \frac{x^3}{3\gamma_{p+v}^3} + \dots < \frac{x^2}{\gamma_{p+v}^2},$$

значит

$$\begin{aligned} x^{-x} \prod_{v=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+v}}{\gamma_{p+v} + x} &< \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-x \sum_{v=m_1-p}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}} + x^2 \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}^2}\right) < \\ &< \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon^{-\beta+\alpha} + \frac{\varepsilon^{-2\beta}}{\gamma_{m_1}} \sum_{v=1}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}} + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon^{-2\beta}}{\gamma_{m_1}} \sum_{v=m_1-p}^{m_1-p} \frac{1}{\gamma_{p+v}}\right) < \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon^{-\beta+\alpha} + \varepsilon^{1-2\beta-\alpha} + \varepsilon^{1-2\beta+\delta}\right), \end{aligned}$$

или

$$x^{-x} \prod_{v=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+v}}{\gamma_{p+v} + x} < \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon^\gamma}},$$

где $\gamma = \beta - \alpha > 0$.

Таким образом при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$x^{-x} \prod_{v=1}^{m_1-p} \frac{\gamma_{p+v}}{\gamma_{p+v} + x} < C\varepsilon. \quad (35)$$

Из (27') согласно оценкам (34) и (35) получаем

$$S - S_m = \Delta_1(\varepsilon), \quad \text{где} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_1(\varepsilon) = 0, \quad (26'')$$

следовательно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S.$$

Этим теорема доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 14 I 1958

2. Գ. Բաղալյան

ԹԵՅԼՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՇԱՐՔԻ ՍԻ ՔԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են շարքերի գումարման Չեդարյան
և Աբելյան մեթոդների հետևյալ ընդհանրացումները՝

Դիտարկվում է թվերի (γ_v) հաջորդականությունը, որտեղ

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_\mu < \gamma_{\mu+1} \leq \dots \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \gamma_v^{-1} = \infty.$$

և թվային $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարք:

Պարամադիորվենք ասել, որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարքը հանրագումարելի է (C_1, μ)

մեթոդով, եթե

$$\left\{ S_n^{(\mu)} : \prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_{\mu}} \right\}, n = \mu + 1, \mu + 2, \dots$$

հաջորդականությունը, որտեղ

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{v=1}^{k-1} \gamma_v}{\prod_{v=1}^k (\gamma_v - \gamma_1)} S_{k-1},$$

$$S_n^{(\mu)} = \sum_{k=\mu}^n \frac{\prod_{v=\mu}^{k-1} (\gamma_v - \gamma_{\mu-1})}{\prod_{v=\mu+1}^k (\gamma_v - \gamma_{\mu})} S_{k-1}^{(\mu-1)}, \quad \mu = 2, 3, \dots$$

ունի վերջավոր սահման:

Մասնավոր դեպքում, երբ $\gamma_v = \gamma$, $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ (C_γ, μ) մեթոդը դառնում է Չեդարտյան հալանի (C, μ) մեթոդ:

μ) Պալմանավորվենք ասելու, որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարքը հանրագումարելի է (A_γ)

մեթոդով, եթե

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) \quad (1)$$

շարքը, որտեղ

$$\omega_n(x) = \frac{\prod_{v=1}^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-z} dz}{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)}$$

$x > 0$ — կամայական թիվ է, $x \in (0, 1]$ դեղատեսակում է $(0, 1]$ միջակայքում և դոմինանտ ունի վերջավոր սահման:

$$S = \varphi(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x):$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $\gamma_v = \gamma$, $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ $\omega_n(x) = (1-x)^n$ և (A_γ) մեթոդը դառնում է Աբելյան հալանի (A) մեթոդ:

Աշխատանքում շարադրված են

1) Աբելյան և ատուրերյան տիպի թևորմաներ (1) շարքի վերաբերյալ, որոնք հանդիսանում են ատուրմանային շարքերի վերաբերյալ նույնատիպ հալանի թևորմաների ընդհանրացումը:

2) Տատուրյան թևորման շարքերի գումարման ($C_\gamma, 1$) մեթոդի վերաբերյալ:

3) Ուսումնասիրված է (1) շարքի վարքը, երբ $x \rightarrow 0+$ և նրա գործադիրները բավարարում են որոշ լրացուցիչ պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
2. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций. Известия АН АрмССР, том VI, № 5—6, 1953.
3. Widder D. V. The Zlaplace transform. London, 1946.
4. Бадалян Г. В. Обобщенные факториальные ряды. Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. V, 1950.

Н. Е. Товмасян

О существовании решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае несуммируемых граничных значений

Известно, что задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет решение для непрерывных и кусочно-непрерывных функций, когда область удовлетворяет некоторым условиям.

В настоящей работе дано доказательство существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, когда граничная функция имеет конечное число точек разрыва.

Пусть D — трехмерная область, где для любого непрерывного граничного условия задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет решение, т. е. область нормальная. На границе σ области D дана функция $f(p)$, которая непрерывна на всех точках границы, кроме точки $p = p_0$, где имеет разрыв произвольного порядка. В малой окрестности точки p_0 граница области D имеет непрерывно меняющуюся нормаль, и прямые, параллельные нормали в точке p_0 , в малой окрестности p_0 пересекают границу области один раз.

Теорема. При вышеуказанных условиях налагаемых на область D и функцию $f(p)$ существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т. е. существует функция $U(p)$ такая, что она:

1. непрерывна в точках $p \in D + \sigma$, $p \neq p_0$,
2. гармонична в области D ,
3. $U(p)|_{p \in \sigma} = f(p)$.

Если разрыв функции — первого порядка, то теорема очевидна. Действительно, если определим на σ функция $f_n(p)$, которые равны $f(p)$, если $\overline{pp_0} > \frac{1}{n}$ и в остальной части непрерывно продолжаются так, что модуль не меняется, то последовательность решений $U_n(p)$ соответствующая этим граничным значениям $f_n(p)$, равномерно сходится вне сферы с центром в p_0 и сколь угодно малым радиусом r_0 , так как

$$|U_n(p) - U_{n+k}(p)| \leq 2M \cdot \frac{1}{n \cdot r_{p,p_0}}, \quad \text{если } r_{p,p_0} > \frac{1}{n},$$

где

$$M = \sup_{\substack{p \in \sigma \\ \sigma \neq p_0}} |f(p)|.$$

потому что это неравенство имеет место на границе области

$$D_1 = D \cdot M \left(\overline{pp_0} > \frac{1}{n} \right).$$

Следовательно, предельная функция последовательности удовлетворяет нашей теореме.

В общем случае теорема будет доказана, если покажем существование такой функции $U_1(p)$, что:

1. $U_1(p)$ непрерывна в точках $p \in D + \sigma$, $p \neq p_0$.

2. гармонична в области D ,

3. $|U_1(p) - f(p)| < L$, где L — постоянное положительное число.

Действительно, $U(p) = U_1(p) + U_2(p)$ удовлетворяет нашей теореме, где $U_2(p)$ решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, с граничным значением $f(p) - U_1(p)$ в области D , существование которого следует из вышеуказанного.

Докажем существование функции $U_1(p)$.

Берем как начало координат точку $p = p_0$. Положительным направлением оси z пусть будет направление внешней нормали поверхности в этой точке.

При наших предположениях относительно области и границы, вокруг точки p_0 существует окрестность $2r_0$, причем уравнение поверхности дается в виде $z = z(x, y)$, а $|\operatorname{tg}(n, z)| < \alpha$, где n — направление нормали в этой точке, а α — заранее заданное достаточно малое положительное число.

Построим замкнутые поверхности σ_1 и σ_2 , которые в $S(p_0, r_0)$ определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} z_1 &= z(x, y) + h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}); \\ z_2 &= z(x, y) - h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $S(p_0, r_0)$ — сфера с центром в p_0 и радиусом r_0 , а $h(r)$ — возрастающая функция с непрерывной производной, причем $h(0) = 0$. В остальной части σ_1 и σ_2 непрерывно продолжаются, так что не имеют с σ других общих точек, кроме точки p_0 .

Обозначим $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma'$, а область, ограниченную поверхностью σ' , — через D' .

Определим на поверхности σ' функцию $g(p)$ следующим образом: $g(p') = f(p)$, если $pp' \leq r_0$, $p' \in \sigma'$, $p \in \sigma$ и если p и p' имеют одинаковые ортогональные проекции на плоскости (x, y) . В остальной части σ' функция $g(p)$ продолжается непрерывно.

Для доказательства теоремы докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если

1. $|h'(r)| < \alpha$, (α некоторое положительное число)
2. $h(r) < r^k \left[f\left(\frac{r}{2c_1}\right) \right]^{-1}$,

где

$$f(r) = \max_{pp_0 > r} |f(p)| \quad c_1 = \sqrt{1 + 4\alpha^2}, \quad (2)$$

то в области D' , при граничных значениях $g(p)$, существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Доказательство. Определим на σ' непрерывные функции следующим образом:

$$f_1(p) = \begin{cases} g(p), & \text{если } \overline{pp_0} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

В остальной части продолжаем непрерывно так, чтобы максимум модуля не менялся.

$$f_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{pp_0} \geq \frac{1}{n-1} \\ g(p) - f_{n-1}(p), & \text{если } \frac{1}{n} \leq \overline{pp_0} \leq \frac{1}{n-1} \\ 0, & \text{если } \overline{pp_0} \geq \frac{1}{n+1} \end{cases} \quad (4)$$

В остальной части продолжаем непрерывно так, чтобы максимум модуля не менялся.

Обозначим

$$g(r) = \max_{pp_0 > r} |g(p)|.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} |f_1(p)| &\leq g(1) \\ |f_n(p)| &\leq g\left(\frac{1}{n}\right) + |f_{n-1}(p)| \leq g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{1}{n-1}\right) + \dots + g(1) \\ |f_n(p)| &\leq ng\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что

$$g(p) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(p), \quad (6)$$

когда $p \neq p_0$.

Пусть $U_n(p)$ — гармонические функции, соответствующие граничным значениям $f_n(p)$. Покажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(p)$ равномерно сходится в той части области D' , которая находится вне некоторой окрестности точки p_0 .

Этим лемма будет доказана, т. к. сумма ряда будет удовлетворять условиям леммы.

Оценим $U_n(p)$.

Сравним $U_n(p)$ с функцией, которая гармонична вне сферы $S(p_0, \frac{1}{n-1})$ и на той части сферической поверхности, которая лежит внутри D' , принимает значение $n \cdot g(\frac{1}{n})$, а в остальной части сферической поверхности равна нулю. Очевидно, что $|U_n(p)|$ меньше этой функции, когда $\overline{pp_0} > \frac{1}{n}$. Следовательно, используя интеграл Пуассона, при помощи которого представляется эта функция, получим:

$$|U_n(p)| \leq n^2 g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot S_{\frac{1}{n-1}}, \quad \text{если } \overline{pp_0} > \frac{2}{n}, \quad (7)$$

где S_r — площадь той части $S(p_0, r)$, которая лежит внутри области D' . Оценим S_r в зависимости от $h(r)$.

Уравнение кривой пересечения σ с $S(p_0, r)$, когда $r < r_0$, будет

$$z = z(x, y) \quad (8)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Согласно предположению относительно σ , функции $z(x, y)$, $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ непрерывны по x и по y .

Запишем (8) в полярных координатах

$$z = z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad (9)$$

$$\rho^2 + z^2 = r^2.$$

Из (9) ясно, что ρ и φ связаны следующим образом

$$\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = r^2. \quad (10)$$

Здесь ρ — функция от φ с непрерывной производной.

Действительно, каждому фиксированному φ соответствует по крайней мере одно ρ , т. к. функция $\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - r^2$ в точках $\rho = 0$, $\rho = r$ имеет различные знаки и непрерывна по ρ . Она однозначна, т. к. в противном случае существовало бы такое φ_0 , для которого имело бы место

$$\rho_1^2 + z^2 (\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0) = r^2,$$

$$\rho_2^2 + z^2 (\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0) = r^2, \quad \rho_1 \neq \rho_2.$$

Вычитая, получим

$$(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2) = [z(\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0) + z(\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0)] \times \\ \times [z(\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0) - z(\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0)] \quad (11)$$

$$z(\rho_i \cos \varphi_0, \rho_i \sin \varphi_0) = z(\rho_i \cos \varphi_0, \rho_i \sin \varphi_0) - z(0, 0) = \\ = \rho_i \times [z_x(\rho_i^* \cos \varphi_0, \rho_i^* \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 + z_y(\rho_i^* \cos \varphi_0, \rho_i^* \sin \varphi_0) \sin \varphi_0], \\ 0 \leq \rho_i^* \leq \rho_i, \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

$$z(\rho_2 \cos \varphi_0, \rho_2 \sin \varphi_0) - z(\rho_1 \cos \varphi_0, \rho_1 \sin \varphi_0) = \\ = (\rho_2 - \rho_1) [z_x(\bar{\rho} \cos \varphi_0, \bar{\rho} \sin \varphi_0) \times \\ \times \cos \varphi_0 + z_y(\bar{\rho} \cos \varphi_0, \bar{\rho} \sin \varphi_0) \sin \varphi_0] \quad \bar{\rho} \in [\rho_1, \rho_2]. \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}(n, z) = \sqrt{z_x^2 + z_y^2}, \quad \text{откуда} \quad |z_x| < \alpha, \quad |z_y| < \alpha. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (13) в (11) и используя (14), получим $4\alpha^2 \geq 1$.

Беря $\alpha < \frac{1}{2}$, получим противоречие.

Обозначим

$$F(\varphi, \rho) = \rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - r^2,$$

тогда

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| = |2z \times (z_x \rho \cos \varphi + z_y \rho \sin \varphi)| \leq 8\alpha^2 \rho^2.$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \rho} \right| = |2\rho + 2z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot [z_x \cos \varphi + z_y \sin \varphi]| \geq 2\rho(1 - 4\alpha^2),$$

откуда получим, что функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную.

Возьмем $\alpha < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, тогда

$$|\rho'(\varphi)| < \frac{4\alpha^2 r}{1 - 4\alpha^2} < 8\alpha^2 r. \quad (15)$$

Следовательно, уравнение этой кривой запишется следующим образом

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \\ z = z(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi). \quad (16)$$

Обозначим через l , длину этой кривой

$$l_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\rho(\varphi) \sin \varphi + \rho'(\varphi) \cos \varphi)^2 + (\rho(\varphi) \cos \varphi + \rho'(\varphi) \sin \varphi)^2 + [z_r \cdot (-\rho(\varphi) \sin \varphi + \rho'(\varphi) \cos \varphi) + z_y \cdot (\rho(\varphi) \cos \varphi + \rho'(\varphi) \sin \varphi)]^2} d\varphi \quad (17)$$

Из (9), (15) и (17) следует

$$l_r \leq 8\pi r.$$

Обозначим через l_1 кривую пересечения σ_1 и $S(\rho_0, r)$.

Аналогично можно показать, что ее уравнение можно записать в следующем виде

$$x = \rho_1(\varphi) \cos \varphi$$

$$y = \rho_1(\varphi) \sin \varphi$$

$$z = z(\rho_1(\varphi) \cos \varphi, \rho_1(\varphi) \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho_1^2(\varphi) + z^2(\rho_1(\varphi) \cos \varphi, \rho_1(\varphi) \sin \varphi)})$$

где $\rho_1(\varphi)$ определяется из уравнения

$$\rho_1^2 + [z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)})]^2 = r^2. \quad (18)$$

Оценим расстояние между точками l_r и l_1 , соответствующими одному и тому же φ

$$d = \sqrt{(\rho - \rho_1)^2 + [z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}) - h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)})]^2}.$$

Пользуясь неравенствами $|z_x| < \alpha$, $|z_y| < \alpha$ и уравнением (10) получим

$$|z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) - z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)| < 2\alpha |\rho_1 - \rho|; \quad (19)$$

$$h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) = h(r) +$$

$$+ h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) -$$

$$- h(\sqrt{\rho^2 + z^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}) \leq h(r) + 3\alpha |\rho - \rho_1|. \quad (20)$$

Из (10) и (18) получим

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_1)(\rho + \rho_1) &= [z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) + \\ &+ z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)] [z(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi) + \\ &+ h(\sqrt{\rho_1^2 + z^2(\rho_1 \cos \varphi, \rho_1 \sin \varphi)}) - z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (19) и (20) получим

$$|\rho - \rho_1| |\rho + \rho_1| \leq [2\alpha (\rho + \rho_1) + 3\alpha |\rho - \rho_1| + h(r)] (5\alpha |\rho - \rho_1| + h(r))$$

Т. К.

$$|h'(r)| < \alpha, \quad h(0) = 0, \quad \text{то } h(r) < \alpha \cdot r.$$

Из (10) следует $\rho^2 + 4\alpha^2 \rho^2 > r^2$, $\rho > \frac{r}{2}$, следовательно

$$h(r) < 2\alpha\rho.$$

Деля обе части (21) на $\rho_1 + \rho$, получим

$$\begin{aligned} |\rho - \rho_1| &\leq 6\alpha [5\alpha |\rho - \rho_1| + h(r)] = 30\alpha^2 |\rho - \rho_1| + 6\alpha h(r); \\ |\rho - \rho_1| (1 - 30\alpha^2) &\leq 6\alpha h(r) \\ |\rho - \rho_1| &\leq c_2 \alpha h(r). \end{aligned} \quad (23)$$

Используя оценки (19), (20) и (23), получим

$$d < c_2 h(r), \quad (24)$$

откуда вытекает, что минимальное расстояние между точками $S(p_0, r)$, которые находятся внутри области D' , и l_r не превосходит $c_3 h(r)$.

Возьмем на l_r точки $p_1, \dots, p_n$ так, чтобы длина дуги $p_i p_{i+1}$ равнялась $c_3 h(r)$, причем n настолько велико, чтобы впервые $p_n p_1 \leq c_3 h(r)$ и $p_1 \neq p_n$.

Берем эти точки как центры и строим сферы радиусом $2c_3 h(r)$. Очевидно, что S_r целиком принадлежит этим сферам.

Легко вычислить площадь той части поверхности $S(p_0, r)$, которая лежит внутри одной сферы $S(p_i, 2c_3 h(r))$. Это будет $\pi [c_3 h(r)]^2$.

Но число таких сфер $S(p_i, 2c_3 h(r))$ меньше $\frac{l_r}{c_3 h(r)} + 1$, значит

$$S_r \leq \pi [c_3 h(r)]^2 \cdot \left[\frac{8\pi r}{h(r)} + 1 \right] < c_4 r h(r).$$

Следовательно,

$$S_{\frac{1}{n-1}} \leq c_4 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot h\left(\frac{1}{n-1}\right). \quad (25)$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$g(r) \leq f\left(\frac{r}{c_1}\right), \quad \text{где } c_1 = \sqrt{1 + 4\alpha^2}. \quad (26)$$

Из (25) и (26) и второго условия леммы, получим

$$|U_n(p)| < \frac{c_5}{n^2}, \quad \text{если } \overline{pp_0} > \frac{2}{n}, \quad (27)$$

что и доказывает лемму.

Оценим значение функции $U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p)$ в любой точке $p \in D'$.

$$|U(p)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p) \right| \leq \left| \sum_{\frac{2}{n} > \overline{pp_0} = r} U_n(p) \right| + \sum_{\frac{2}{n} < \overline{pp_0} = r} |U_n(p)|. \quad (28)$$

Очевидно,

$$\left| \sum_{k=1}^n U_k(p) \right|_{p \in \sigma'} \leq n \cdot g\left(\frac{1}{n}\right). \quad (29)$$

Наибольший индекс n первого слагаемого (28) удовлетворяет следующим неравенствам 1) $\frac{2}{n} > r$, 2) $\frac{2}{n+1} \leq r$

$$\frac{1}{n} > \frac{r}{2}, \quad n > \frac{2}{r} - 1. \quad (30)$$

Из (27), (28), (29), (30) получим

$$|U(p)| \leq \frac{c_6}{r} f\left(\frac{r}{2c_1}\right). \quad (31)$$

Лемма 2. Если $h(r)$ удовлетворяет условиям 1-ой леммы и дополнительному условию

$$h(r) \leq r \frac{\delta(c_7 r, \varepsilon)}{f(c_7 r)},$$

то $|U(p) - f(p)|_{p \in \sigma, p \neq p_0}$ ограничено, где $U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p)$

функция, построенная для 1-ой леммы, C_7 — некоторая постоянная, а $\delta(r, \varepsilon) = \inf_{p_1 p_0 > r} p_1 p$ при

$$|f(p_1) - f(p)| \geq \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем из точки $p_1 \in \sigma$ шар радиусом $r_1 < \overline{p_1 p_0} < \frac{r_0}{2}$ и рассмотрим область $D^* = M(\overline{p p_1} < r_1) \cdot D'$.

Из (31) очевидно, что в этой области

$$U(p) < \frac{c_6}{r - r_1} \cdot f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right), \quad \text{где } r = \overline{p_0 p_1}, \text{ и}$$

$$|U(p_1) - f(p_1)| \leq \max_{\substack{p' \in \sigma' \\ p, p' < r_1}} |U(p') - f(p_1)| +$$

$$+ \left| \frac{c_6}{r - r_1} f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right) + f(r) \right| \cdot \frac{\overline{S}_r(p_1)}{4\pi r_1^2}, \quad (32)$$

где $\widehat{S}_r(p_1)$ — площадь той части $S(p_1, r_1)$, которая лежит в области D' .

$$U(p') - f(p_1)|_{p' \in \sigma} = f(\bar{p}') - f(p_1),$$

причем $\bar{p}'$ — точка пересечения поверхности σ с прямой, проведенной из точки p' параллельно оси z .

Легко видеть, что

$$\overline{p'p_1} \leq c_1 r_1, \text{ если } \overline{p'p_1} < r_0. \quad (33)$$

Следовательно, если брать

$$r_1 = \frac{\delta(r, \varepsilon)}{2c_1},$$

то из (33) получим, что первое слагаемое (32) меньше ε .

Оценим $\widehat{S}_r(p_1)$.

Обозначим кривые пересечения сферы $S(p_1, r_1)$ с σ_1 и σ_2 соответственно через $l_r(p_1)$ и $l'_r(p_1)$.

Эти уравнения $l_r(p_1)$ и $l'_r(p_1)$ будет

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z(x_1, y_1))^2 &= r_1^2, \\ z &= z(x, y). \end{aligned} \quad (34)$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z(x_1, y_1))^2 = r_1^2,$$

$$z = z(x, y) + h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}).$$

В параметрическом виде

$$x = x_1 + \rho(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y = y_1 + \rho(\varphi) \sin \varphi,$$

$$z = z(x_1 + \rho(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho(\varphi) \sin \varphi);$$

(34').

$$x = x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y = y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} z &= z(x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi) + h(\sqrt{(x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi)^2 + \\ &+ (y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi)^2 + z^2(x_1 + \rho_1(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho_1(\varphi) \sin \varphi)}), \end{aligned}$$

где φ — угол между осью x и проекцией на плоскость (x, y) отрезка, соединяющего данную точку кривой с точкой p_1 , а $\rho(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi)$ соответственно — длины этих проекций, когда p_1 принадлежит 1-ой или 2-ой кривым. Легко получить, что $\rho(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi)$ зависят от φ следующим образом:

$$\rho^2 + [z(x_1 + \rho(\varphi) \cos \varphi, y_1 + \rho(\varphi) \sin \varphi) - z(x_1, y_1)]^2 = r_1^2 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 + [z(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi) + h(\sqrt{(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + \\ + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2 + z^2(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)}) - z(x_1, y_1)]^2 = r_1^2 \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, что $V(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2 \leq r + r_1$, т. к. $(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)$ на плоскости (x, y) — проекция точки кривой $l_r(p_1)$.

$$|z(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)| \leq \\ \leq 2a \sqrt{(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2} \leq 2a(r + r_1).$$

Следовательно,

$$h(V(x_1 + \rho_1 \cos \varphi)^2 + (y_1 + \rho_1 \sin \varphi)^2 + z^2(x_1 + \rho_1 \cos \varphi, y_1 + \rho_1 \sin \varphi)) \leq \\ \leq h(c_1(r + r_1)). \quad (37)$$

Произведя те же операции, которые применяли для оценки S_r и используя (37), получим

$$\bar{S}_r(p_1) \leq c_8 h(c_1(r + r_1)) \cdot r_1.$$

Из полученной оценки, из уравнения $r_1 = \frac{\delta(r, \varepsilon)}{2c_1}$ и из условий леммы легко получим, что второе слагаемое (32) ограничено, если взять $c_7 \leq \frac{1}{8c_1^2}$. Действительно,

$$I_2 = \left[\frac{c_8}{r - r_1} \cdot f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right) + f(r) \right] \cdot \frac{\bar{S}_r(p_1)}{4\pi r_1^2} \leq \\ \leq \frac{2c_8 \cdot c_8}{r - r_1} \cdot f\left(\frac{r - r_1}{2c_1}\right) \cdot \frac{h(c_1(r + r_1))}{4\pi r_1^2} \cdot r_1.$$

Из определения $\delta(r, \varepsilon)$ следует, что

$$r_1 = \frac{\delta(r, \varepsilon)}{2c_1} < \frac{r}{2}$$

$$I_2 \leq \frac{4c_8 \cdot c_8}{r} \cdot f\left(\frac{r}{4c_1}\right) \cdot \frac{h(2c_1 \cdot r) \cdot 2c_1}{4\pi \delta(r, \varepsilon)} \leq c_9 \frac{f\left(\frac{r}{4c_1}\right)}{r \delta(r, \varepsilon)} \cdot \frac{\delta(c_7 \cdot 2c_1 r, \varepsilon)}{f(2 \cdot c_7 \cdot c_1 r)} \leq c_{10},$$

что и доказывает лемму.

Второе условие леммы выполняется, если взять

$$|h'(r)| < a,$$

$$h(r) < \min \left\{ \frac{r \delta(c_7 \cdot r, \varepsilon)}{f(c_7 \cdot r)}, r^4 \cdot \left[f\left(\frac{r}{2c_1}\right) \right]^{-1} \right\} = \varphi(r). \quad (38)$$

Очевидно, что $\varphi(r)$ будет убывающей непрерывной функцией от r и стремится к нулю, когда r стремится к нулю.

Пусть $h(r)$ удовлетворяет 2-ому условию леммы.

Возьмем область $D_m = M\left(\overline{pp_0} > \frac{1}{m}\right) \cdot D + D'$ и на его границе σ^m определим новую функцию $q(p)$, которая равна $g(p)$ на общей части σ' и $\sigma^{(m)}$, а в остальной части непрерывно продолжается.

По методу построения гармонической функции $U(p)$ для 1-ой леммы построим функции $U^{(m)}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(m)}(p)$ в области D_m для граничной функции $q(p)$. Очевидно, что мы можем брать граничные значения так, что

$$\begin{aligned} U_n^{(m)}(p) \Big|_{p \in \sigma^{(m)} \cdot \sigma'} &= U_n(p) \\ U_n^{(m)}(p) \Big|_{\substack{p \in \sigma^{(m)} \cdot \sigma'' \\ p \in \sigma^{(m)}}} &= 0, \quad \text{если } n \geq m+1 \end{aligned} \quad (39)$$

По методу построения области D' построим D'' и D''' . Вместо $h(r)$ берем соответственно $\frac{h(r)}{2}$ и $\frac{h(r)}{4}$ так, что любые две поверхности из $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$, кроме точки p_0 , не имеют других общих точек.

Лемма 3. Существует функция $V^{(m)}(p)$, которая:

$$1. \text{ имеет вид } V^{(m)}(p) = \omega(p) + \sum_{n=N}^{\infty} U_n^{(m)}(p)$$

$$2. |V^{(m)}(p) - U(p)| < \varepsilon, \text{ если } p \in D''',$$

где ε — произвольное положительное число, N — целое число, $U(p)$ — функция, построенная для 1-ой леммы, а $\omega(p)$ — гармоническая функция в области $D'' + D$.

Доказательство. Легко заметить, что для $U_n^{(m)}(p)$ и для $U_n(p)$ имеет место следующая оценка

$$|U_n^{(m)}(p)| < \frac{c_s}{n^2}, \quad \text{если } \frac{1}{n-1} \leq \min\left(r_0, \frac{1}{m}, \frac{\overline{pp_0}}{2}\right)$$

$U_n^{(m)}(p) - U_n(p)$ — гармоническая в области D' и

$$U_n^{(m)}(p) - U_n(p) \Big|_{p \in \sigma'} = \begin{cases} 0 & \text{при } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{m} \\ U_n^{(m)}(p) & \text{при } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{m}, p \in \sigma_2 \\ 0 & \text{при } \overline{pp_0} > \frac{1}{m}, p \in \sigma_1, \end{cases} \quad (40)$$

если $n \geq m+1$.

Следовательно, из (40) получим

$$|U_n^{(m)}(p) - U_n(p)| < \frac{c_5}{n^2}, \quad \text{если} \quad \frac{1}{n-1} \leq \min\left(r_0, \frac{1}{2m}\right). \quad (41)$$

Значит для ε существует такое N , что

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} U_n(p) - \sum_{n=N}^{\infty} U_n^{(m)}(p) \right| < \varepsilon, \quad \text{если } p \in D'. \quad (42)$$

Обозначим

$$V_N(p) = \sum_{n=1}^N U_n(p). \quad (43)$$

Покажем, что для этой функции в области D'' имеет место формула Грина. Для этого достаточно показать, что его производная по любому направлению в этой области ограничена.

Вычислим гармоническую меру $\omega(S_r, M(pp_0 < r), p)$, которую в дальнейшем будем коротко обозначать через $\omega(S_r, p)$.

$$\omega(S_r, p) = \frac{r}{4\pi} \int_{S_r} \frac{(r^2 - \rho^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{(r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2)^{3/2}}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что $\omega(S_r, p)$ получит наибольшее значение, когда S_r есть сегмент, центр которого находится на прямой $\overline{pp_0}$. Значит

$$\omega(S_r, p) \leq \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{(r^2 - \rho^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{(r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2)^{3/2}} \quad (45)$$

где

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{S_r}{2\pi r^2}.$$

Вычислим интеграл, получим

$$\omega(S_r, p) \leq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{r}{\rho} + 1 \right) \left[1 - \frac{r - \rho}{\sqrt{(r - \rho)^2 + \frac{\rho S_r}{\pi r}}} \right]. \quad (46)$$

Отсюда легко получить, что

$$\omega(S_r, p) \leq \omega(S_{r_1}, p) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{r_1} \right) \left[1 - \frac{r - r_1}{\sqrt{(r - r_1)^2 + \frac{r_1 S_r}{\pi r}}} \right], \quad \text{если}$$

$r_1 < r$, далее

$$\frac{\omega(S_r, p) - \omega(S_{r_1}, p)}{\omega(S_{r_1}, p)(r - r_1)} \leq \frac{1}{2r_1} - \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{r}{r_1}}{\sqrt{(r - r_1)^2 + \frac{r_1 S_r}{\pi r}}}. \quad (46')$$

Очевидно, что $\omega(S_r, p)$ имеет непрерывную производную по r , когда $r \leq r_0$.

Переходя к пределу в (46'), когда $r_1 \rightarrow r$, получим

$$\frac{d \ln \omega(S_r, p)}{dr} = \frac{1}{2r} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}}, \quad \omega(S_r, p) \leq \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}} e^{-\int_p^r \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr} \quad (47)$$

Из (25), (43) и (47) получим

$$\begin{aligned} |V_N(p)| &\leq N \cdot f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) \cdot \omega\left(S_{\frac{1}{N+1}}, p\right) \leq \\ &\leq N \cdot f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) \cdot \frac{e^{-\int_p^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr}}{\sqrt{N+1} \cdot \sqrt{p}}, \text{ если } \overline{pp_0} \leq \frac{1}{N+1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Легко показать, что если описывать вокруг каждой точки p , $\overline{pp_0} = \rho$ области D'' сферы радиусом $\frac{h(p)}{4}$, то они принадлежат области D' , откуда, используя известную формулу для оценки производной гармонической функции, получим (l любое направление)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V_N(p)}{\partial l} \right|_{p \in D''} &\leq \frac{\max_{\overline{pp'} = \frac{h(p)}{4}} |V_N(p)|}{\frac{h(p)}{4}} \leq \frac{4Nf\left(\frac{1}{c_1 N}\right)}{h(p) \cdot \sqrt{N+1} \sqrt{\rho - \frac{h(p)}{4}}} \cdot \\ &\cdot e^{-\int_{\rho + \frac{h(p)}{4}}^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr} \leq \\ &\leq c_{11} \sqrt{N} f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) \cdot \frac{e^{-\int_p^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr}}{\sqrt{p} h(p)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Берем уравнение

$$\frac{e^{-\int_p^{\frac{1}{N+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S_r}} dr} \cdot \frac{1}{\sqrt{p} h(p)}}{\frac{c_4}{\pi} \cdot \rho \cdot h(p)} = A(\rho), \quad (50)$$

где $A(\rho)$ — положительная функция с непрерывной производной. Логарифмируя и беря производную из обеих частей, получим линейное

дифференциальное уравнение относительно $\sqrt{\frac{c_4}{\pi} r h(r)}$, одно из частных решений которого есть

$$\sqrt{\frac{c_4}{\pi} r h(r)} = \frac{1}{2} \int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{A'(\sigma)}{A(\sigma)} d\sigma} d\tau,$$

откуда и
$$h(r) = \frac{\pi}{4c_4 r} \left(\int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{A'(\sigma)}{A(\sigma)} d\sigma} d\tau \right)^2.$$

Берем $A(\sigma) = e^{-\int_0^{\sigma} \frac{c_{12} d\tau}{V \varphi(\tau) \cdot \tau}}$. Очевидно, что $|A(\sigma)| < 1$.
Тогда

$$h(r) = \frac{\pi}{4c_4 \cdot r} \left[\int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{c_{12} d\sigma}{V \varphi(\sigma) \cdot \sigma}} d\tau \right]^2. \quad (51)$$

Имея в виду, что $\varphi(r)$ — возрастающая непрерывная функция, получим

$$\int_0^r e^{-\int_{\tau}^r \frac{c_{12}}{V \varphi(\sigma) \cdot \sigma} d\sigma} d\tau \leq \int_0^r e^{-\frac{c_{12}(r-\tau)}{V \varphi(r) \cdot \tau}} d\tau = \frac{V \varphi(r) \cdot r}{c_{12}}. \quad (52)$$

Из этой оценки легко получим, что можно взять c_{12} так, чтобы $h(r)$ удовлетворяла условию 2-ой леммы. С другой стороны, легко видеть, что $h(r)$ удовлетворяет (50), если взять вместо $A(r)$ $c_{13} A(r)$, где c_{13} — некоторая постоянная.

Значит, беря $h(r)$, которая определяется из уравнения (51), получим

$$\left| \frac{\partial V_N(p)}{\partial l} \right| \leq c_{14} V_N f\left(\frac{1}{c_1 N}\right) e^{\int_1^{\frac{r_0}{N+1}} \frac{V \pi}{V c_1 r h(r)} dr} \quad (53)$$

Получим, что производная функции $V_N(p)$ в области D'' по любому направлению ограничена, откуда вытекает, что формула Грина применима в области D''

$$V_N(p) = \int_{S_0} \left[\frac{1}{r_{p0}} \cdot \frac{\partial V_N(0)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{p0}} \right) \cdot V_N(0) \right] dS_0.$$

Применим метод перенесения полюсов для гармонических функ-

ций $\frac{1}{r^{p_0}}$ и $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{p_0}} \right)$ из формулы (54) и перенесем полюсы во внутрь сферы радиуса $r = \frac{1}{2}$ с центром в точке p_0 так, что абсолютное значение разности полученной функции $\omega_2(p)$ и функции $V_N(p)$ в области D''' меньше $\frac{\varepsilon}{2^2}$, откуда вытекает, что функция $\omega_2(p)$ — гармоническая в области $D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{2} \right)$ и $|\omega_2(p) - V_N(p)| < \frac{\varepsilon}{2^2}$, если $p \in D'''$. (55)

Аналогично из $\omega_2(p)$ получим $\omega_3(p)$, которая

1. гармоническая в области $D'' + D \cdot M(pp_0 > 1/3)$,
2. $|\omega_3(p) - \omega_2(p)| < \frac{\varepsilon}{2^3}$, если $p \in D''' + D \cdot M(pp_0 > 1)$.

Вообще $\omega_n(p)$ удовлетворяет условиям

1. гармоническая в $D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n} \right)$,
2. $|\omega_n(p) - \omega_{n-1}(p)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$, если $p \in D''' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n-2} \right)$.

Очевидно, что последовательность $\omega_2 \dots \omega_n \dots$ равномерно сходится в области D и что предельная функция $\omega(p)$, гармоническая в области D , удовлетворяет условию

$$|\omega(p) - V_N(p)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } p \in D'''. \quad (56)$$

Легко видеть, что построенная функция

$$V^{(m)}(p) = \omega(p) + \sum_{n=N}^{\infty} U_n^{(m)}(p) \quad (57)$$

удовлетворяет условию леммы.

Из 1-ой, 2-ой, 3-ей лемм вытекает, что можно построить последовательность функций $V_1(p) \dots V_n(p) \dots$ таких, что

2. $V_n(p)$ гармонична в области $D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n+2} \right)$,
2. $|V_n(p) - V_{n-1}(p)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$, если $p \in D'' + D \cdot M \left(pp_0 > \frac{1}{n} \right)$,
3. $|V_1(p) - f(p)| < M$, если $p \in \sigma$, $p \neq p_0$.

Следовательно, последовательность функций $V_1(p) \dots V_n(p) \dots$ равномерно сходится внутри области $D + D''$ и предельная функция $V(p)$ гармонична в этой области и

$$|V(p) - f(p)| \leq M + \varepsilon, \text{ если } p \in \sigma, p \neq p_0. \quad (58)$$

что заканчивает доказательство теоремы.

Следствие. Теорема верна, если число разрывов функции конечно.

Доказательство. Пусть эти точки будут $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Построим функции $f_1(p), f_2(p), \dots, f_{m-1}(p)$ так, что $f_k(p) = f(p)$ в малой окрестности p_k , где $f(p)$ не имеет других точек разрыва, кроме p_k , а в остальной части непрерывны.

Берем $f_m(p) = f(p) - f_1(p) - \dots - f_{m-1}(p)$. Очевидно, что функции $f_m(p)$ имеют одну точку разрыва и что сумма гармонических функций $U_1(p), \dots, U_m(p)$, являющихся решениями нашей задачи, которые соответствуют граничным условиям $f_1(p), \dots, f_m(p)$, удовлетворяет нашей теореме.

Из доказательства 2-ой и 3-ей лемм вытекает.

Следствие: к каждой функции на σ , которая имеет разрывы в конечном числе точек, можно приблизиться при помощи функций, которые гармоничны везде, кроме этих точек, если σ имеет непрерывно меняющуюся нормаль.

По методу доказательства теоремы Келдыша и Лаврентьева* можно легко показать, что.

Теорема 1. Чтобы в двухмерной области D существовало решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для каждого данного граничного значения $f(p)$, которое непрерывно в любой точке, кроме точки $p = p_0$, необходимо:

А. существование монотонно стремящейся к нулю при $t \rightarrow 0$ функции $r(t) > 0$ так, чтобы любую точку z в области D можно было соединить с точкой p_0 линией Жордана, которая находилась бы внутри окружности $|z| < r(|z'|)$ в области D .

Теорема 2. Если двухмерная нормальная область D удовлетворяет условию А и существует малая окрестность точки p_0 , где нет точек из дополняющих областей, для которых точка p_0 — не граничная точка, то существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для каждого вышеуказанного граничного значения $f(p)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему уважаемому руководителю профессору С. Н. Мергеляну за постановку задачи и доценту Р. А. Александриану за ряд ценных указаний.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 1 II 1958

* См. например С. Н. Мергелян УМН., том VII, вып. 2 (48) 1952, стр. 59–63.

Ն. Ե. ԹԱՎԱՏՅԱՆ

ԼԱՊԼԱՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ
ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՈՋ ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐԵԼԻ ԵԶՐԱՅԻՆ
ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԴԵՊՓՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ արված է Լապլասի համարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյություն ապացույցը և արդ լուծումը կառուցելու մեթոդը, երբ եզրային ֆունկցիան անընդհատ չէ վերջավոր թվով կետերում: Թող D -ն լինի եռաչափ տիրույթ, որտեղ ամեն մի անընդհատ եզրային արժեքի ղեկավար Դիրիխլեի խնդիրը Լապլասի համարման համար ունի լուծում: Այսինքն D տիրույթը նորմալ է: Նրա σ մակերևույթի վրա արված է $f(p)$ ֆունկցիան, որն անընդհատ է բոլոր կետերում, բացի $p = p_0$ կետից: p_0 կետի փոքր շրջակայքում σ մակերևույթն ունի անընդհատ փոփոխվող նորմալ և ուղիղները, որոնք ղուգանհու են p_0 կետում մակերևույթի նորմալին, p_0 կետի փոքր շրջակայքում մակերևույթին հասում են մեկ անգամ:

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. D տիրույթի և $f(p)$ ֆունկցիայի վրա վերը արված ենթադրությունների ղեկավար գոյություն ունի Դիրիխլեի խնդրի լուծումը Լապլասի համարման համար, այսինքն գոյություն ունի $U(p)$ ֆունկցիա, որը

1. Անընդհատ է, երբ $p \in D + \sigma$, $p \neq p_0$:

2. Հարմոնիկ է D տիրույթում

3. $U(p)|_{p \in \sigma} = f(p)$
 $p \neq p_0$

Յույց է արվում, որ թեորեմը ճիշտ է նաև այն ղեկավար, երբ եզրային ֆունկցիան անընդհատ չէ վերջավոր թվով կետերում:

Այս թեորեմի ապացուցման եղանակից բխում է հետևյալ կարևոր հետևանքը:

Հետևանք. Եթե σ մակերևույթը ունի անընդհատ փոփոխվող նորմալ, ապա σ -ի վրա արված ամեն մի վերջավոր թվով կետերում խզումներ ունեցող ֆունկցիային հարասարաչափ կերպով կարելի է մոտենալ ֆունկցիաներով, որոնք հարմոնիկ են ամենուրեք, բացի արդ խզման կետերից:

Երկչափ տարածության ղեկավար ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 1. Որպեսզի երկչափ D տիրույթում գոյություն ունենա Լապլասի համարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծումը, յուրաքանչյուր աված $f(p)$ եզրային արժեքի ղեկավար, որն անընդհատ է ամեն մի կետում, բացի $p = p_0$ կետից, անհրաժեշտ է, որ՝

Ա. Գոյություն ունենա մոնոտոն կերպով զրոյի ձգտող, երբ $t \rightarrow 0$, $r(t) > 0$ ֆունկցիա, այնպես որ D տիրույթի ամեն մի կետը հնարավոր լինի միացնել p_0 կետի հետ ժողովանյա կորով, որը գտնվի $|\xi| < r(|z|)$ շրջանի և D տիրույթի ներսում:

Թեորեմ 2. Եթե երկչափ նորմալ D տիրույթը բավարարում է Ա պայմանին և գոյություն ունի p_0 կետի փոքր շրջակայք, որտեղ չկան կետեր D

տիրույթի լրացուցիչ տիրույթներից, որոնց համար p_0 կետը եզրային կետ է, ապա գոյություն ունի Դիրիխլեի խնդրի լուծումը Լապլասի համարաման համար D տիրույթում, վերևում նշված $f(p)$ եզրային արժեքի դեպքում:

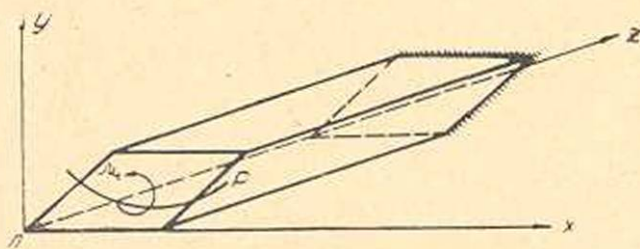
ЛИТЕРАТУРА

1. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функции комплексного переменного. УМН, том VII, выпуск 2 (48), 1952.
2. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики.
3. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. УМН, вып. VIII, (1941).
4. Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа. УМН, том XI, вып. 5 (71), 1956.
5. Мергелян С. Н. УМН, VIII, вып. 4 (5), 1953.

Р. С. Минасян

О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма

В работе дается решение задачи о кручении и изгибе анизотропного призматического стержня (фиг. 1), когда последний в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси. Решение представляется одновременно двумя



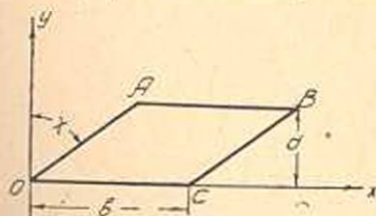
Фиг. 1.

видами разложения в ряд. Выполнение граничных условий приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Приводится способ вычисления с избытком и недостатком функциональных рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Дается численный пример. Для улучшения оценок вводится понятие бирегулярных систем.

§ 1. Кручение анизотропного стержня.

Постановка задачи и построение решения

Рассмотрим задачу кручения анизотропного призматического стержня, имеющего поперечное сечение в виде параллелограмма $OABC$, грань OA которого составляет угол χ с осью OY . (фиг. 2).



Фиг. 2.

В этом случае функция напряжений $\psi(x, y)$, как известно [1], удовлетворяет уравнению

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = -2\theta \quad (1.1)$$

где a_{ik} — упругие постоянные материала стержня, причем $a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0$;

ϑ — неизвестный угол кручения.

Условия на контуре поперечного сечения будут

$$\psi(x, 0) = \psi(x, a) = \psi(\omega y, y) = \psi(b + \omega y, y) = 0, \quad (1.2)$$

где $\omega = \operatorname{tg} \chi$.

При этом составляющие напряжений определяются из формул:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Прежде, чем переходить к отысканию решения, преобразуем систему координат:

$$x - \omega y = \xi, \quad \sqrt{\beta} y = \eta \quad (1.4)$$

где

$$\beta = \frac{a_{44} + 2\omega a_{45} + \omega^2 a_{55}}{a_{55}}. \quad (1.5)$$

В этом случае, обозначив

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \frac{\vartheta}{\zeta} U(\xi, \eta), \quad \alpha = \frac{a_{45} + \omega a_{55}}{\sqrt{a_{55}}}, \\ \zeta = a_{44} + 2\omega a_{45} + \omega^2 a_{55}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

уравнение (1.1) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = -2. \quad (1.7)$$

При этом неизвестный угол кручения ϑ определится из соотношения

$$\vartheta = \frac{M_t}{C_t}. \quad (1.8)$$

Здесь

$$C_t = \frac{2}{\zeta \sqrt{\beta}} \iint_{\Omega} U(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.9)$$

— жесткость при кручении, Ω — область поперечного сечения, M_t — скручивающий момент.

Для нахождения функции $U(\xi, \eta)$ воспользуемся работой [2]. Будем искать решение уравнения (1) одновременно посредством двух разложений в ряд:

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta, \quad (1.10)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \cos \gamma_k \eta,$$

где

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{d_1}, \quad d_1 = \sqrt{\beta} d, \quad f_k(\xi) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} U(\xi, \eta) \sin \gamma_k \eta d\eta, \quad (1.11)$$

$$\varphi_k(\xi) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} U(\xi, \eta) \cos \gamma_k \eta d\eta.$$

Умножая уравнение (1.7) соответственно на $\frac{2}{d_1} \sin \gamma_k \eta d\eta$ и $\frac{2}{d_1} \cos \gamma_k \eta d\eta$ и интегрируя от 0 до d_1 , для определения $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_k''(\xi) + 2\alpha \gamma_k \varphi_k'(\xi) - \gamma_k^2 f_k(\xi) = -4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k d_1}, \quad (1.12)$$

$$\varphi_k''(\xi) - 2\alpha \gamma_k f_k'(\xi) - \gamma_k^2 \varphi_k(\xi) = \frac{2}{d_1} \left[S_1(\xi) - (-1)^k S_2(\xi) - 2 \int_0^{d_1} \cos \gamma_k \eta d\eta \right].$$

Здесь обозначено

$$S_1(\xi) = \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \quad S_2(\xi) = \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=d_1}. \quad (1.13)$$

Решая уравнения (1.12) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям (1.2), для $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ получим следующие выражения:

$$f_k(\xi) = - \frac{2}{\gamma_k d_1 \operatorname{sh} \gamma_k b} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) \int_0^\xi [p_k(t) \cos \alpha \gamma_k (\xi - t) - \right.$$

$$- q_k(t) \sin \alpha \gamma_k (\xi - t)] \operatorname{sh} \gamma_k t dt + \operatorname{sh} \gamma_k \xi \int_\xi^b [p_k(t) \cos \alpha \gamma_k (t - \xi) +$$

$$+ q_k(t) \sin \alpha \gamma_k (t - \xi)] \operatorname{sh} \gamma_k (b - t) dt \Big\}, \quad (1.14)$$

$$\varphi_k(\xi) = - \frac{2}{\gamma_k d_1 \operatorname{sh} \gamma_k b} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) \int_0^\xi [p_k(t) \sin \alpha \gamma_k (\xi - t) + \right.$$

$$+ q_k(t) \cos \alpha \gamma_k (\xi - t)] \operatorname{sh} \gamma_k t dt - \operatorname{sh} \gamma_k \xi \int_\xi^b [p_k(t) \sin \alpha \gamma_k (t - \xi) -$$

$$- q_k(t) \cos \alpha \gamma_k (t - \xi)] \operatorname{sh} \gamma_k (b - t) dt \Big\}.$$

где

$$\nu = \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad p_k(\xi) = -2 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k},$$

$$q_k(\xi) = S_1(\xi) - (-1)^k S_2(\xi) - 2 \int_0^{d_1} \cos \gamma_k \eta d\eta, \quad (1.15)$$

В выражения для $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ входят неизвестные функции $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$. Для определения последних потребуем, чтобы вторым представлением (1.10) функции $U(\xi, \eta)$ также выполнялись граничные условия (1.1) на прямых $\eta = 0$ и $\eta = d_1$:

$$\frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi) = 0; \quad \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \varphi_j(\xi) = 0. \quad (1.16)$$

Умножим оба уравнения (1.16) на $\frac{2}{b} \sin \delta_k \xi d\xi$, где $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$, и проинтегрируем от 0 до b . При этом, вследствие равномерной сходимости рядов, входящих в левые части (1.16), возможна перестановка

знаков суммы и интеграла. Для нахождения значения $\int_0^b \varphi_j(\xi) \sin \delta_k \xi d\xi$

воспользуемся уравнениями (1.12), а также условиями (1.2). После некоторых преобразований для определения коэффициентов Фурье функций $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$ получим следующие соотношения:

$$g_k = -2\alpha\nu\delta_k^3 \frac{\text{ch } \nu\delta_k d_1 + \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \text{sh } \nu\delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} [1 - (-1)^j] \times$$

$$\times \frac{[1 - (-1)^k] m_j + [1 + (-1)^k] n_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2}, \quad (1.17)$$

$$h_k = -2\alpha\nu\delta_k^3 \frac{\text{ch } \nu\delta_k d_1 - \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \text{sh } \nu\delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} [1 + (-1)^j] \times$$

$$\times \frac{[1 - (-1)^k] m_j + [1 + (-1)^k] n_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2} + t_k.$$

Здесь обозначено

$$g_k = \frac{2\delta_k}{d_1} \int_0^b [S_1(\xi) + S_2(\xi)] \sin \delta_k \xi d\xi;$$

$$h_k = \frac{2\delta_k}{d_1} \int_0^b [S_1(\xi) - S_2(\xi)] \sin \delta_k \xi d\xi;$$

$$m_k = \gamma_k [f'_k(0) + f'_k(b)]; \quad n_k = \gamma_k [f'_k(0) - f'_k(b)]; \quad (1.18)$$

$$t_k = 8\nu \frac{1 - (-1)^k}{\delta_k d_1} \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{ch} \nu \delta_k d_1} \right).$$

При этом величины m_k и n_k , входящие в (1.17), определяются, согласно (1.18) и (1.14), из следующей системы уравнений:

$$m_k = -2\alpha \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + \cos \alpha \gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} [1 - (-1)^j] \times \\ \times \frac{[1 - (-1)^k] g_j + [1 + (-1)^k] h_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2}; \quad (1.19)$$

$$n_k = -2\alpha \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - \cos \alpha \gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} [1 + (-1)^j] \times \\ \times \frac{[1 - (-1)^k] g_j + [1 + (-1)^k] h_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2} + u_k,$$

где

$$u_k = 8\nu \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k d_1} \left(\operatorname{cth} \nu \gamma_k b - \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right). \quad (1.20)$$

§ 2. Исследование полученных систем линейных уравнений (1.17) и (1.19). Определение выражений для $\phi(x, y)$, составляющих напряжений и жесткости при кручении

Займемся исследованием полученной совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (1.17) и (1.19). Как легко видеть, данные системы разбиваются на четыре отдельные совокупности систем. При этом, как будет показано ниже, неизвестные

$$g_{2k+1} = m_{2k+1} = h_{2k} = n_{2k} = 0. \quad (1.20)$$

Определим суммы модулей коэффициентов каждого из уравнений полученных систем. Для сумм модулей коэффициентов уравнений систем (1.17) получим следующие выражения:

$$s(g_k) = |\alpha| \left(1 - \nu \frac{\sin \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{ash} \nu \delta_k d_1} \right); \\ s(h_k) = |\alpha| \left[1 + \nu \frac{\sin \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{ash} \nu \delta_k d_1} - \frac{4\nu}{\delta_k d_1} \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right) \right]. \quad (2.1)$$

Аналогичные значения получаются и для сумм модулей коэффициентов систем (1.19). В каждом из этих выражений вторые сла-

гаемые убывают с экспоненциальной скоростью и, начиная с некоторого k , суммы модулей коэффициентов, вследствие неравенства $\alpha^2 < 1$, становятся меньше 1. Заметим, что почти во всех практически интересных случаях, когда $|\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$, суммы модулей коэффициентов строго меньше единицы для всех k и при любых отношениях сторон $\frac{d}{b}$, т. е. системы (1.17) и (1.19) вполне регулярны. Свободные члены t_k и u_k этих систем стремятся к нулю с возрастанием k . Из теории бесконечных систем [3] следует единственность ограниченного решения и сходимость метода последовательных приближений. Кроме того, как видно из (1.17), для g_{2k+1} и m_{2k+1} , а также для h_{2k} и n_{2k} получаются однородные системы, не имеющие, согласно общей теории [3], ограниченного решения, отличного от нуля. Поэтому имеем $g_{2k+1} = m_{2k+1} = h_{2k} = n_{2k} = 0$.

Что касается g_{2k} , n_{2k+1} и т. п., то с возрастанием k они стремятся к нулю. Как будет показано ниже, в частном примере, решения мажорантной системы также убывают со скоростью $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Перейдем теперь к получению выражений для $U(\xi, \eta)$, а также для функции напряжений $\psi(x, y)$, составляющих напряжений τ_{xz} , τ_{yz} и жесткости при кручении C_t .

Предварительно обозначим

$$\begin{aligned} g_{2k} &= \frac{16\gamma}{\pi} G_{2k}; & h_{2k+1} &= \frac{16\gamma}{\pi} G_{2k+1}; \\ m_{2k} &= \frac{16\gamma}{\pi} N_{2k}; & n_{2k+1} &= \frac{16\gamma}{\pi} N_{2k+1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда, согласно (1.17) и (1.19), для определения неизвестных G_k и N_k окончательно приходим к следующей совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} G_k &= -4\alpha\gamma\delta_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\delta_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \operatorname{sh} \gamma\delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{j+k}] N_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2} + t_k^*, \\ N_k &= -4\alpha\gamma\gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh} \gamma\gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{j+k}] G_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2} + u_k^*, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где свободные члены t_k^* и u_k^* имеют вид

$$t_k^* = \frac{1 - (-1)^k}{2kd_1} b \left(\operatorname{cth} \gamma\delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha\delta_k d_1}{\operatorname{sh} \gamma\delta_k d_1} \right); \quad (2.4)$$

$$u_k^* = \frac{1 - (-1)^k}{2k} \left(\operatorname{cth} \gamma_k b - \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \gamma_k b} \right). \quad (2.4)$$

При этом, согласно (1.18) и (2.2), для функций $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$ получаем следующие выражения:

$$S_1(\xi) = \frac{8\nu}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k}{\delta_k} \sin \delta_k \xi; \quad S_2(\xi) = \frac{8\nu}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k G_k}{\delta_k} \sin \delta_k \xi. \quad (2.5)$$

Определив из (1.14) и (2.5) функцию $f_k(\xi)$ и подставив ее значение в первое из разложений (1.10), после некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \eta(d_1 - \eta) - \frac{8d_1}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \cos \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \gamma_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k d_1]} \times \\ & \times [\sin \alpha \gamma_k \eta \operatorname{sh} \gamma_k (d_1 - \eta) + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \gamma_k \eta] - \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \sin \gamma_k \eta}{\gamma_k [\operatorname{ch} \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} [\cos \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) - \\ & - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \gamma_k \xi]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Как нетрудно видеть из этого выражения, на контуре области поперечного сечения функция $U(\xi, \eta)$ обращается в нуль, внутри же области ряды в правой части выражения (2.6) весьма быстро сходятся.

К другому представлению функции $U(\xi, \eta)$ придем, определив из (1.14) и (2.5) $\varphi_k(\xi)$ и подставив ее во второе из разложений (1.10):

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \xi(b - \xi) - \frac{8d_1}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \gamma_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k d_1]} \times \\ & \times [\cos \alpha \gamma_k \eta \operatorname{sh} \gamma_k (d_1 - \eta) - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \gamma_k \eta] - \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \cos \gamma_k \eta}{\gamma_k [\operatorname{ch} \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\ & \times [\sin \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \gamma_k (b - \xi) + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \gamma_k \xi]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (1.5), для функции напряжений $\psi(x, y)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{\theta}{\zeta} \left\{ \beta y(d - y) - \frac{8\sqrt{\beta} d}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \cos \delta_k (x - \alpha y)}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \lambda_k d + (-1)^k \cos \mu_k d]} \times \right. \\ & \times [\sin \mu_k y \operatorname{sh} \lambda_k (d - y) + (-1)^k \sin \mu_k (d - y) \operatorname{sh} \lambda_k y] - \\ & \left. - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \sin \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k [\operatorname{ch} \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [\cos \alpha \gamma_k (x - \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) - \\ & - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y)] \Big\}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{\vartheta}{\zeta} \left\{ (x - \omega y)(b - x + \omega y) - \frac{8\sqrt{\beta}d}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \times \right. \\ & \times \frac{G_k \sin \delta_k (x - \omega y)}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} [\cos \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d - y) - \\ & - (-1)^k \cos \mu \delta_k (d - y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y] - \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \cos \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k^2 [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \cdot [\sin \alpha \gamma_k (x - \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) + \\ & + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y)] \Big\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\lambda = \sqrt{(1 - \alpha^2) \beta}, \quad \mu = \alpha \sqrt{\beta}.$$

Для вычисления значений функции $\psi(x, y)$ или ее производных можно воспользоваться любым из двух представлений (2.8), предпочитая одно другому в зависимости от быстроты сходимости рядов в исследуемых точках.

Получим теперь выражения для жесткости при кручении C_t и составляющих напряжений τ_{xz} , τ_{yz} . Подставив значение $U(\xi, \eta)$ из (2.6) в (1.9), придем к следующему выражению для жесткости C_t :

$$C_t = \frac{2\sqrt{\beta}d^4}{\zeta} \left[\frac{b}{6d} - \frac{16\nu}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4} N_k \right]. \quad (2.10)$$

С другой стороны, согласно (1.9) и (2.8), имеем:

$$C_t = \frac{2b^2d}{\zeta} \left[\frac{1}{6} - \frac{16\nu}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4} G_k \right]. \quad (2.11)$$

Далее, используя, например, (2.11), получим, согласно (1.8), величину угла закручивания ϑ :

$$\vartheta = \frac{M_t \zeta}{2b^2d} \left[\frac{1}{6} - \frac{16\nu}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4} G_k \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Другое выражение для ϑ получим из (1.8) и (2.11).

Наконец, из (1.3) и (2.3) будем иметь:

$$\tau_{yz} = - \frac{8\sqrt{\beta}d\vartheta}{\zeta\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k (x - \omega y)}{\delta_k [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} \times$$

$$\begin{aligned} & \times [\sin \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d-y) + (-1)^k \sin \mu \delta_k (d-y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y] - \\ & - \frac{8\theta}{\zeta \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \sin \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} [\cos \alpha \gamma_k (x - \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \\ & - x + \omega y) [a \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (x - \omega y) + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (b - x + \omega y)] + \\ & + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y) [a \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (b - x + \\ & + \omega y) + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (x - \omega y)]], \quad (2.13) \end{aligned}$$

Аналогично получаем для τ_{xz} :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{8V\sqrt{\beta}d\theta}{\zeta \pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k (x - \omega y)}{\delta_k [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} \times \\ & \times [\cos \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d-y) [\omega \operatorname{ctg} \delta_k (x - \omega y) + \mu \operatorname{tg} \mu \delta_k y + \lambda \operatorname{cth} \lambda \delta_k (d-y)] - \\ & - (-1)^k \cos \mu \delta_k (d-y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y [\omega \operatorname{ctg} \delta_k (x - \omega y) - \mu \operatorname{tg} \mu \delta_k (d-y) - \\ & - \lambda \operatorname{cth} \lambda \delta_k y]] + \frac{8\theta}{\zeta \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k \cos \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\gamma_k [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\ & \times [\sin \alpha \gamma_k (x - \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) [\sqrt{\beta} \operatorname{tg} \sqrt{\beta} \gamma_k y + \\ & + \omega a \operatorname{ctg} \alpha \gamma_k (x - \omega y) - \omega \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (b - x + \omega y)] + \\ & + (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y) [\sqrt{\beta} \operatorname{tg} \sqrt{\beta} \gamma_k y - \\ & - \omega a \operatorname{ctg} \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) + \omega \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (x - \omega y)]]. \quad (2.14) \end{aligned}$$

В случае, если $\omega = 0$, т. е. когда поперечное сечение стержня обращается в прямоугольник, выражения (2.13) и (2.14) значительно упрощаются.

Задаваясь значениями упругих постоянных, отношением сторон $\frac{d}{b}$, а также величиной $\omega = \operatorname{tg} \chi$, решением усеченных систем уравнений из (2.3) найдем оценки для G_k и N_k сверху и снизу. Подставляя эти оценки в выражения для $\phi(x, y)$, τ_{yz} , τ_{xz} , а также C_t , найдем значения этих величин с избытком и недостатком. Для этого поступаем следующим образом: возьмем среднеарифметические верхних и нижних оценок неизвестных G_k и N_k и подставим их, например, в (2.13). Получим выражения для средних значений τ_{yz}^* :

$$\tau_{yz}^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(G_k^+ + G_k^-) Q_k(x, y) + (N_k^+ + N_k^-) R_k(x, y)]. \quad (2.15)$$

Здесь знаки $+$ и $-$ над G_k и N_k обозначают соответственно верхнюю или нижнюю оценки G_k и N_k ;

$$Q_k(x, y) = - \frac{8V\sqrt{\beta} d \sin \delta_k (x - \omega y)}{\zeta \pi \delta_k b [\operatorname{ch} \lambda \delta_k d + (-1)^k \cos \mu \delta_k d]} [\sin \mu \delta_k y \operatorname{sh} \lambda \delta_k (d - y) + (-1)^k \sin \mu \delta_k (d - y) \operatorname{sh} \lambda \delta_k y]; \quad (2.16)$$

$$R_k(x, y) = - \frac{8 \vartheta \sin V \sqrt{\beta} \gamma_k y}{\zeta \pi \gamma_k [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} [\cos \alpha \gamma_k (x - \omega y) \times \\ \times \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - x + \omega y) [\alpha \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (x - \omega y) + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (b - x + \omega y)] + \\ + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) \operatorname{sh} \nu \gamma_k (x - \omega y) [\alpha \operatorname{tg} \alpha \gamma_k (b - x + \omega y) + \nu \operatorname{cth} \nu \gamma_k (x - \omega y)]];$$

Для определения значений τ_{yz} с избытком или недостатком к выражению (2.15) прибавляем либо вычитаем величину

$$T(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(G_k^+ - G_k^-) |Q_k(x, y)| + (N_k^+) |R_k(x, y)|]. \quad (2.17)$$

При этом, очевидно, $|\tau_{yz} - \tau_{yz}^*| \leq T(x, y)$, откуда следуют оценки для τ_{yz} :

$$\tau_{yz}^- = \tau_{yz}^* - T(x, y); \quad \tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^* + T(x, y). \quad (2.18)$$

Для получения желаемой близости между оценками возьмем столько уравнений в усеченных системах, чтобы сумма первых m членов ряда (2.17) была меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. При этом, вследствие ограниченности G_k и N_k и достаточно быстрой сходимости ряда (2.17), m можем выбрать так, чтобы сумма ряда (2.17) от $k = m + 1$ до $k = \infty$ была тоже меньше заданного числа ε .

Полученные выше выражения для функции $\phi(x, y)$, касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} упрощаются в случае, если материал стержня изотропен или ортотропен. Заметим, что задачу кручения изотропного стержня с сечением в виде параллелограмма в частном случае, когда угол $\chi = 45^\circ$, способом сшивания решила Е. А. Александрян [4].

В заключение параграфа отметим небезынтесный случай анизотропии, когда отношение упругих постоянных $\frac{a_{45}}{a_{55}}$ равно тангенсу угла между осью Oy и гранью OA , взятому с обратным знаком: $\frac{a_{45}}{a_{55}} = -\omega$. В этом случае $\alpha = 0$; $\nu = 1$, и преобразованием (1.4) задача сводится к задаче кручения изотропного стержня с прямоугольным поперечным сечением. При этом ряды в уравнениях (2.3) исчезают и бесконечные системы линейных уравнений (2.3) для определения неизвестных G_k и N_k вырождаются в равенства

$$G_k = \frac{1 - (-1)^k}{2kd_1} b \operatorname{th} \frac{\delta_k d_1}{2}; \quad N_k = \frac{1 - (-1)^k}{2k} \operatorname{th} \frac{\gamma_k b}{2}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.6), получим решение уравнения (1.7)

$$U(\xi, \eta) = \eta(d_1 - \eta) - \frac{4}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^3 \operatorname{ch} \frac{\gamma_k b}{2}} \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{b}{2} - \xi \right) \sin \gamma_k \eta, \quad (2.20)$$

совпадающее с классическим решением [5].

§ 3. Численный пример. Некоторые замечания к вопросу оценок решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим, в качестве примера, кручение анизотропного стержня с прямоугольным поперечным сечением, отношения упругих постоянных и сторон которого соответственно равны: $\frac{a_{45}}{a_{44}} = -0.4$; $\frac{a_{55}}{a_{44}} = 0.8$; $\frac{b}{d} = 2$. В этом случае величины, входящие в предыдущие выражения, будут

$$\omega = 0; \alpha = -\sqrt{0.2}; \beta = 1.25; \gamma = \sqrt{0.8}; \mu = -0.5; \lambda = 1.$$

Прежде чем переходить к вычислению неизвестных G_k и N_k из (2.3), остановимся вкратце на вопросе оценки решений совокупности бесконечных систем линейных уравнений.

Пусть имеем совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{j,k} x_j + \beta_{j,k} y_j) + r_k; \quad (3.1)$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{j,k}^* x_j + \beta_{j,k}^* y_j) + r_k^*.$$

Обозначим для краткости

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| = \alpha_k; \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{j,k}| = \beta_k; \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}^*| = \alpha_k^*; \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{j,k}^*| = \beta_k^*. \quad (3.2)$$

Вопрос двухсторонней оценки неизвестных x_k и y_k наряду с вопросами существования и единственности решений, широко освещен в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [3], а также в большой работе Б. М. Кояловича [6] и ряде других исследований. Как известно [3], для регулярных систем имеет место следующая оценка:

$$|x_k| < K; |y_k| < K; \quad K = \sup_{(k, i)} \left\{ \frac{|r_k|}{1 - \alpha_k - \beta_k}; \frac{|r_i^*|}{1 - \alpha_i^* - \beta_i^*} \right\}. \quad (3.3)$$

Улучшение оценок неизвестных для больших k было дано Б. М. Кояловичем [6], введшим понятие лимитант. Однако иногда вычисление лимитант бывает сопряжено со значительными трудностями. При этом оценка получается одна для решений обеих систем, даже если свободные члены одной из систем обращаются в нуль.

В некоторых случаях может быть удобной следующая оценка.

Пусть, каковы бы ни были k и i , для сумм модулей коэффициентов уравнений систем (3.1) имеют место неравенства

$$1 - \alpha_k > 0; \quad 1 - \beta_i^* > 0; \quad \rho_{ki} = (1 - \alpha_k)(1 - \beta_i^*) - \beta_k \alpha_i^* > 0. \quad (3.4)$$

Тогда, если существуют два числа X и Y

$$X = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{\beta_k} + \frac{|r_i^*|}{1 - \beta_i^*}}{1 - \alpha_k - \frac{\alpha_i^*}{\beta_k}}; \quad Y = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{1 - \alpha_k} + \frac{|r_i^*|}{\alpha_i^*}}{\frac{1 - \beta_i^*}{\alpha_i^*} - \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k}}, \quad (3.5)$$

такие, что $|r_k| \leq (1 - \alpha_k)X - \beta_k Y$; $|r_i^*| \leq (1 - \beta_i^*)Y - \alpha_i^* X$, то существует ограниченное решение системы (3.1), которое может быть найдено методом последовательных приближений, причем

$$|x_k| \leq X, \quad |y_k| \leq Y. \quad (3.6)$$

Очевидно, что для регулярных систем условия (3.4) выполняются для любых k и i (заметим, в частности, что для совокупности систем (2.4) эти условия выполняются для любых значений отношения сторон $\frac{b}{d}$ и всех k и i при $|\alpha| \leq \sqrt{\frac{7}{8}}$). Легко также видеть, что всегда $X \leq K$; $Y \leq K$. В самом деле, перепишем, например, выражение для X так:

$$X = \sup_{(k, i)} \frac{\left(\frac{1 - \alpha_k}{\beta_k} - 1 \right) \frac{|r_k|}{1 - \alpha_k - \beta_k} + \left(1 - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*} \right) \frac{|r_i^*|}{1 - \alpha_i^* - \beta_i^*}}{\frac{1 - \alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*}} \leq K.$$

Заметим, что оценками (3.5) особенно удобно пользоваться, когда из свободных членов системы (3.1) либо r_k , либо r_i^* равны нулю. Кроме того, разбивая исследуемую систему уравнений на части, можно получить улучшенные оценки неизвестных при больших K . Для иллюстрации рассмотрим бесконечную систему линейных уравнений (получающуюся при определении установившегося потока тепла в бесконечном прямом уголке, когда на боковых стенках поддержи-

вается нулевая температура, а внутри уголка происходит тепловыделение постоянной интенсивности)

$$m_k = \frac{2k}{\pi(1 + \operatorname{ch} k\pi)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j^2 + k^2} + \frac{1 - (-1)^k}{k^2}. \quad (3.7)$$

Сумма модулей коэффициентов k -го уравнения системы (3.7) равна $e^{-k\pi} \left(\operatorname{ch} k\pi - \frac{\operatorname{sh} k\pi}{k\pi} \right)$, откуда, согласно общей теории регулярных систем, имеем $K = 3,039$. Примем теперь $x_1 = m_1$; $y_k = m_k$ (при $k \geq 2$). Тогда для величин (3.2) получаем следующие значения $\alpha_1 = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi}$; $\beta_1 = \frac{\pi \operatorname{ch} \pi - 2}{\pi(\operatorname{ch} \pi + 1)}$; $\alpha_k = \frac{k}{\pi(k^2 + 1)}(1 - e^{-2k\pi})$; $\beta_k = e^{-k\pi} \left(\operatorname{ch} k\pi - \frac{3k^2 + 1}{k^2 + 1} \cdot \frac{\operatorname{sh} k\pi}{k\pi} \right)$; и из (3.5) имеем $\lambda = 2,536$; $\gamma = 0,721$. Таким образом, не решая ни одного уравнения системы (3.7), для неизвестных m_k при $k \geq 2$ получаем значительно лучшую оценку, чем получаемая по общей теории.

Далее, при исследовании систем иногда условие (3.5) бывает удобно (по сравнению с условием регулярности) тем, что при изменении параметров, которые, как правило, входят в выражения коэффициентов $\alpha_{j,k}$; $\beta_{j,k}$; $\alpha_{j,k}^*$; $\beta_{j,k}^*$, бывают случаи, когда условие регулярности нарушается для некоторых уравнений совокупности (3.1), тогда как условие (3.5) (его можно назвать для краткости условием бирегулярности систем) остается верным. Рассмотрим, например, систему, аналогичную (2,3), коэффициенты при неизвестных которой соответственно равны

$$\alpha_{j,k} = 0; \quad \beta_{j,k} = 4\alpha\gamma\delta_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\delta_k d_1 - (-1)^k \cos \alpha\delta_k d_1}{d_1 \operatorname{sh} \gamma\delta_k d_1} \cdot \frac{1 + (-1)^{j+k}}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2};$$

$$\beta_{j,k}^* = 0; \quad \alpha_{j,k}^* = 4\alpha\gamma\gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \gamma\gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh} \gamma\gamma_k b} \cdot \frac{1 + (-1)^{j+k}}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_k^2 \delta_j^2}.$$

Как легко вычислить, при $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1,23}}$ для любого k или i можно указать такое значение отношения $\frac{b}{d}$ (и наоборот), для которого либо β_k , либо α_i^* становятся больше 1,0042, тогда как при всех k и i величина $\rho_{ki} = 1 - \beta_k \alpha_i^* > 0,014$.

Практически, для облегчения отыскания границ неизвестных x_k и y_k , вместо (3.5) во многих случаях можно пользоваться более грубыми оценками:

$$X_1 = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{\beta_k}}{1 - \alpha_k - \frac{\alpha_i}{\beta_k}} + \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_i^*|}{1 - \beta_i^*}}{1 - \alpha_k - \frac{\alpha_i^*}{1 - \beta_i^*}};$$

$$Y_1 = \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_k|}{1 - \alpha_k}}{1 - \beta_i^* - \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k}} + \sup_{(k, i)} \frac{\frac{|r_i^*|}{\alpha_i^*}}{1 - \beta_i^* - \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k}}.$$

Так, для приведенного выше примера имеем $X_1 = 2.553$; $Y_1 = 0.783$.

Перейдем теперь к вычислению неизвестных G_k и N_k из (2.3) при заданных выше значениях постоянных.

Взяв усеченную систему и применяя предыдущие оценки, а также замечая, что свободные члены систем (2.3) стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{k}$, получим:

$$\begin{array}{ll} 1.5705 < G_1 < 1.5706 & 0.4297 < G_2 < 0.4306 \\ 0.7488 < G_3 < 0.7493 & 0.4698 < G_4 < 0.4728 \\ 0.5273 < G_5 < 0.5288 & 0.4075 < G_6 < 0.4140 \\ 0.4290 < G_7 < 0.4315 & 0.3567 < G_8 < 0.3685 \\ 0.3697 < G_9 < 0.3738 & 0.3190 < G_{10} < 0.3371 \\ 0.3282 < G_{11} < 0.3341 & 0.2913 < G_{12} < 0.3163 \\ 0.2981 < G_{13} < 0.3062 & 0.2660 < G_{14} < 0.3033 \\ 0.2744 < G_{15} < 0.2849 & \end{array}$$

$$\frac{4.288}{2k+1} < G_{2k+1} < \frac{1.86}{\sqrt{2k+1}} + \frac{4.372}{2k+1} \quad (k > 7) \quad \frac{3.724}{2k} < G_{2k} < \frac{2.73}{\sqrt{2k}} + \frac{3.812}{2k} \quad (k > 7) \quad (3.8)$$

$$\begin{array}{ll} 1.2017 < N_1 < 1.2028 & 0.5284 < N_2 < 0.5292 \\ 0.5202 < N_3 < 0.5296 & 0.3861 < N_4 < 0.3900 \\ 0.3740 < N_5 < 0.4037 & 0.3139 < N_6 < 0.3238 \\ 0.3025 < N_7 < 0.3590 & 0.2687 < N_8 < 0.2860 \\ 0.2580 < N_9 < 0.3399 & 0.2367 < N_{10} < 0.2615 \\ 0.2272 < N_{11} < 0.3163 & 0.2128 < N_{12} < 0.2443 \\ 0.1178 < N_{13} < 0.3250 & 0.1942 < N_{14} < 0.2313 \\ 0.1021 < N_{15} < 0.3140 & 0.1788 < N_{16} < 0.2206 \end{array}$$

$$\frac{1.532}{2k+1} < N_{2k+1} < \frac{1.99}{\sqrt{2k+1}} + \frac{2.700}{2k+1} \quad (k > 7) \quad \frac{2.985}{2k} < N_{2k} < \frac{1.83}{\sqrt{2k}} + \frac{3.057}{2k} \quad (k > 8)$$

Из этих оценок видно, что значения G_k и N_k как с недостатком, так и с избытком с возрастанием индекса k стремятся к нулю соответственно со скоростью $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Подставляя найденные значения G_k и N_k , например, в (2.11), определим величину жесткости при кручении C_t :

$$C_t^- = 0,55055 \frac{d^4}{a_{44}}; \quad C_t^+ = 0,55075 \frac{d^4}{a_{44}}. \quad (3.9)$$

Как видно из (3.9), оценки для C_t сверху и снизу практически совпадают. Аналогичные оценки для C_t получим из (2.10). Подставляя значения C_t из (3.9) в (1.5), получим величину угла кручения ϑ :

$$\vartheta^- = 1,81570 \frac{a_{44}}{d^3} M_t; \quad \vartheta^+ = 1,81637 \frac{a_{44}}{d^3} M_t. \quad (3.0)$$

Прежде, чем переходить к вычислению значений составляющих напряжений, отметим, что величины $\frac{G_k}{k}$ и $\frac{N_k}{k}$ монотонно убывают с возрастанием k (отдельно по четным и нечетным k). Это обстоятельство облегчает вычисление оценок в знакпеременных рядах, входящих в выражения для составляющих напряжений.

Ниже приведены значения τ_{xz} и τ_{yz} в некоторых точках.

Таблица 1

Значения напряжения τ_{xz} (выраженные в отношениях к $\frac{M_t}{d^3}$)

x	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	$b = 2d$
1	2	3	4	5	6
$\tau_{xz}^+(x, 0)$	0	+2,0631	+2,0623	+1,5666	0
$\tau_{xz}^-(x, 0)$	0	+1,9757	+2,0298	+1,4794	0
$\tau_{xz}^*(x, 0)$	0	+2,0194	+2,0461	+1,5230	0
$\tau_{xz}^+\left(x, \frac{d}{4}\right)$	0	+0,8035	+1,0194	+0,8626	0
$\tau_{xz}^-\left(x, \frac{d}{4}\right)$	0	+0,8019	+1,0185	+0,8609	0
$\tau_{xz}^*\left(x, \frac{d}{4}\right)$	0	+0,8027	+1,0190	+0,8618	0
$\tau_{xz}^+\left(x, \frac{d}{2}\right)$	0	-0,1392	0	+0,1401	0
$\tau_{xz}^-\left(x, \frac{d}{2}\right)$	0	-0,1401	0	+0,1392	0
$\tau_{xz}^*\left(x, \frac{d}{2}\right)$	0	-0,1397	0	+0,1397	0

1	2	3	4	5	6
$\tau_{xz}^+\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	0	-0,8609	-1,0185	-0,8019	0
$\tau_{xz}^-\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	0	-0,8626	-1,0194	-0,8035	0
$\tau_{xz}^*\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	0	-0,8618	-1,0190	-0,8027	0
$\tau_{xz}^+(x, d)$	0	-1,4794	-2,0298	-1,9757	0
$\tau_{xz}^-(x, d)$	0	-1,5666	-2,0623	-2,0631	0
$\tau_{xz}^*(x, d)$	0	-1,5230	-2,0461	-2,0194	0

Таблица 2

Значения напряжения τ_{yz} (выраженные в отношениях к $\frac{M_1}{d^3}$)

x	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	$b = 2d$
$\tau_{yz}^+(x, 0) = \tau_{yz}^-(x, 0)$	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}^+\left(x, \frac{d}{4}\right)$	-1,4463	-0,2200	+0,0429	+0,3345	+0,9502
$\tau_{yz}^-\left(x, \frac{d}{4}\right)$	-1,5505	-0,2211	+0,0426	+0,3333	+0,8463
$\tau_{yz}^*\left(x, \frac{d}{4}\right)$	-1,4984	-0,2206	+0,0428	+0,3339	+0,8983
$\tau_{yz}^+\left(x, \frac{d}{2}\right)$	-1,3804	-0,3989	0	+0,3998	+1,4548
$\tau_{yz}^-\left(x, \frac{d}{2}\right)$	-1,4548	-0,3998	0	+0,3989	+1,3804
$\tau_{yz}^*\left(x, \frac{d}{2}\right)$	-1,4176	-0,3994	0	+0,3994	+1,4176
$\tau_{yz}^+\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	-0,8463	-0,3333	-0,0426	+0,2211	+1,5505
$\tau_{yz}^-\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	-0,9502	-0,3345	-0,0429	+0,2200	+1,4463
$\tau_{yz}^*\left(x, \frac{3d}{4}\right)$	-0,8983	-0,3339	-0,0428	+0,2206	+1,4984
$\tau_{yz}^+(x, d) = \tau_{yz}^-(x, d)$	0	0	0	0	0

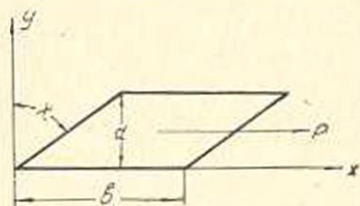
В этих таблицах даны значения оценок сверху и снизу составляющих напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , а также значения их среднеарифметических $\tau_{xz}^* = \frac{\tau_{xz}^+ + \tau_{xz}^-}{2}$ и $\tau_{yz}^* = \frac{\tau_{yz}^+ + \tau_{yz}^-}{2}$.

§ 4. Изгиб анизотропной консоли. Постановка задачи и построение решения

Рассмотрим теперь задачу изгиба анизотропной консоли силой P , приложенной к свободному концу в центре тяжести поперечного сечения и направленной параллельно оси ox (фиг. 3).

Координатные оси берем параллельно главным осям сечения. В этом случае напряжения в сечении стержня будут [1]

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} &= 0; \\ \sigma_z &= -\frac{P_z}{I} \left(x - \frac{b + \omega d}{2} \right),\end{aligned}\quad (4.1)$$



Фиг. 3.

где, как и выше, $\omega = \operatorname{tg} \chi$, I — момент инерции сечения относительно оси $x = \frac{b}{2}$. Уравнения равновесия при этом сведутся к следующему

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{P}{I} \left(x - \frac{b + \omega d}{2} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Будем искать касательные напряжения в виде

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{P}{I} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{2} (x - \omega y) (b - x + \omega y) - \frac{\omega^2}{2} y (d - y) \right]; \\ \tau_{yz} &= -\frac{P}{I} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\omega}{2} y (d - y) \right].\end{aligned}\quad (4.3)$$

Подставляя выражения (4.3) в уравнения совместности, для определения $\psi(x, y)$ получаем уравнение [1]

$$\begin{aligned}& a_{44} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = \\ &= (2a_{13} - a_{45} - \omega a_{55}) \left(\frac{b + \omega d}{2} - x \right) + (a_{36} + 2\omega a_{45} + 2\omega^2 a_{55}) \left(\frac{d}{2} - y \right).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Граничные условия для функции $\psi(x, y)$ на контуре s , согласно [7], будут

$$\psi \Big|_s = \frac{P}{2I} \int_0^s [\omega y (d - y) (\omega dy - dx) + (x - \omega y) (b - x + \omega y) dy] = 0. \quad (4.5)$$

Производя преобразования

$$x - \omega y = \xi, \quad \sqrt{\beta} y = \eta, \quad \psi(x, y) = \frac{U(\xi, \eta)}{\zeta}, \quad (4.6)$$

придем к следующему уравнению для функции $U(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = \\ = A \left(\frac{b}{2} - \xi \right) + B \left(\frac{d_1}{2} - \eta \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$A = 2a_{13} - a_{45} - \omega a_{55}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{\beta}} [2\omega a_{13} + a_{36} + \omega a_{45} + \omega^2 a_{55}]. \quad (4.8)$$

Аналогично § 1, ищем функцию $U(\xi, \eta)$ в виде

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta; \quad (4.9)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \cos \gamma_k \eta,$$

причем $f_k(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ определяются из дифференциальных уравнений

$$f_k'(\xi) + 2\alpha \gamma_k f_k'(\xi) - \gamma_k^2 f_k(\xi) = \frac{2}{d_1} p_k(\xi); \quad (4.10)$$

$$\varphi_k'(\xi) - 2\alpha \gamma_k \varphi_k'(\xi) - \gamma_k^2 \varphi_k(\xi) = \frac{2}{d_1} [S_1(\xi) - (-1)^k S_2(\xi) + q_k(\xi)],$$

где

$$p_k(\xi) = \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k} A \left(\frac{b}{2} - \xi \right) - \frac{1 + (-1)^k}{\gamma_k} d_1 B; \quad q_k(\xi) = \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} B; \quad (4.11)$$

$$q_0(\xi) = A d_1 \left(\frac{b}{2} - \xi \right); \quad S_1(\xi) = \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}; \quad S_2(\xi) = \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=d_1}.$$

Удовлетворяя граничным условиям и используя первое из разложений (4.9), придем к следующему выражению для функции $U(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = - \frac{\eta(d_1 - \eta)}{12} [3A(b - 2\xi) - B(d - 2\eta)] - \\ - \frac{1}{2\alpha b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \cos \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \gamma \delta_k d_1 + (-1)^k \cos \alpha \delta_k d_1]} [\sin \alpha \delta_k \eta \operatorname{sh} \gamma \delta_k (d_1 - \eta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^k \sin \alpha \delta_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \nu \delta_k \eta] - \\
& - \frac{1}{2 \nu d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) + (-1)^k \cos \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi}{\gamma_k^2 [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\
& \times \sin \gamma_k \eta \left\{ N_k - 4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} \left[A - (\alpha A + B) \left(2\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) \right] \right\} - \\
& - \frac{2}{d_1} (2\alpha A + B) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^4 \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} [\sin \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) - \\
& - \sin \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi] \sin \gamma_k \eta. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Аналогично получаем другое представление функции $U(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
U(\xi, \eta) &= \frac{A}{12} \xi (b - \xi) (b - 2\xi) - \frac{1}{24} (2\alpha A + B) (d_1 - 2\eta) (d_1^2 + 2\eta d_1 - \\
& - 2\eta^2) - \frac{1}{2 \nu b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \sin \delta_k \xi}{\delta_k^2 [\operatorname{ch} \nu \delta_k d_1 - (-1)^k \cos \alpha \delta_k d_1]} [\cos \alpha \delta_k \eta \operatorname{sh} \nu \delta_k (d_1 - \\
& - \eta) + (-1)^k \cos \alpha \delta_k (d_1 - \eta) \operatorname{sh} \nu \delta_k \eta] - \\
& - \frac{1}{2 \nu d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) - (-1)^k \sin \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi}{\gamma_k^2 [\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b]} \times \\
& \times \cos \gamma_k \eta \left\{ N_k - 4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} \left[A - (\alpha A + B) \left(2\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{2}{d_1} (2\alpha A + B) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^4 \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} [\cos \alpha \gamma_k \xi \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b - \xi) + \\
& + \cos \alpha \gamma_k (b - \xi) \operatorname{sh} \nu \gamma_k \xi] \cos \gamma_k \eta. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Неизвестные G_k и N_k , входящие в выражения (4.12) и (4.13), определяются из следующей совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
G_k &= -4\alpha \nu \delta_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \delta_k d_1 - (-1)^k \cos \alpha \delta_k d_1}{d_1 \operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+k}] N_j}{(\gamma_j^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \delta_k^2} + t_k; \\
N_k &= -4\alpha \nu \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu \gamma_k b - (-1)^k \cos \alpha \gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+k}] G_j}{(\delta_j^2 + \gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2 \delta_j^2 \gamma_k^2} + u_k;
\end{aligned} \quad (4.14)$$

причем свободные члены уравнений (4.14) имеют вид:

$$t_k = -\frac{4[1 - (-1)^k]}{\delta_k^2} \left[\frac{\nu}{2} \delta_k d_1 B \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 + \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right) - B + \right. \\ \left. + (A + 2\alpha B) \left(\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right) \right] - \frac{1 + (-1)^k}{\delta_k} 2\nu b A \left(\operatorname{cth} \nu \delta_k d_1 - \frac{\cos \alpha \delta_k d_1}{\operatorname{sh} \nu \delta_k d_1} \right); \quad (4.15)$$

$$u_k = -4 \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^2} \left[\frac{\nu}{2} \gamma_k b A \left(\operatorname{cth} \nu \gamma_k b + \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) - \right. \\ \left. - A + (2\alpha A + B) \left(\alpha - \nu \frac{\sin \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right) \right] - \\ - \frac{1 + (-1)^k}{\gamma_k} 2\nu d_1 B \left(\operatorname{cth} \nu \gamma_k b - \frac{\cos \alpha \gamma_k b}{\operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \right).$$

Что касается постоянных α , ν и d_1 , то они определяются из (1.6), (1.11) и (1.15).

Коэффициенты при неизвестных G_k и N_k систем уравнений (4.14) совпадают с соответствующими коэффициентами систем (2.3), свободные члены t_k и u_k так же стремятся к нулю с возрастанием k , как и свободные члены уравнений (2.3). Поэтому все сказанное выше относительно решений бесконечных систем линейных уравнений (2.4) справедливо также и для систем (4.14).

Принимая во внимание (4.6), из (4.12) или (4.13) получим выражение для функции $\psi(x, y)$, после чего, согласно (4.3), определим величины касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

Заметим, что в случае, если $\frac{a_{45}}{a_{55}} = -\operatorname{tg} \chi$, то $\alpha = 0$, $\nu = 1$, и преобразованием (4.6) задача сводится к задаче изгиба изотропной консоли с прямоугольным поперечным сечением [8].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 8 II 1958

Ռ. Ս. Մինասյան

ՋՈՒԳԱՆԵՌԱԳԾԱՏԻՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՈՒ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հոդվածում արվում է զուգահեռադժարին լայնական հատվածք ունեցող անիզոտրոպ պլրիզմատիկ ձողերի ոլորման ու ծաման խնդիրների էֆեկտիվ լուծումը:

Ձողի ոլորման դեպքում, ինչպես հայտնի է [1], լարումների ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ հավասարմանը

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = -2\theta$$

որտեղ a_{ik} -երը ձողի նյութի առաձգական հաստատուններն են, ընդ որում $a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0$, իսկ θ -ն ուղրման անհալա անկյունն է:

Լուծումը որոշվում է միաժամանակ երկու տեսակ շարքերով ներկայացմամբ

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta;$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\varphi_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \cos \gamma_k \eta,$$

որտեղ

$$U(\xi, \eta) = \frac{\zeta}{\beta} \psi(x, y); \quad \xi = x - \omega y, \quad \eta = \sqrt{\beta} y, \quad \omega = \operatorname{tg} \chi,$$

$$\zeta = a_{44} + 2\omega a_{45} + \omega^2 a_{55}; \quad \beta = \frac{\zeta}{a_{55}}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{d_1}, \quad d_1 = \sqrt{\beta} d.$$

Դիֆերենցիալ հավասարման և եզրային պայմաններին բավարարումը բերում է գծային հանրահաշվային հավասարումների անվերջ սխառնների լուծմանը: Յուրջ է տրվում, որ համարյա բոլոր զործնականորեն հետաքրքիր դեպքերում այդ սխառնները լիովին սեղուկար են: Անհիդրոսպիայի մասնավոր դեպքում, երբ $\frac{a_{45}}{a_{55}} = -\omega$, հավասարումների անվերջ սխառնները վերածվում են սուրբական հավասարությունների, ու վերևում նշված ձևավորումների օգնությամբ խնդիրը բերվում է ազդանկյուն կտրվածք ունեցող իզոտրոպ ձողի ուղրմանը, և լուծումը համընկնում է կլասիկ լուծման հետ [5]:

Տրվում է լարումների, և առհասարակ, ֆունկցիոնալ շարքերի վերից ու վարից գնահատման եղանակ:

Դիտարկվում է մի հաշվային օրինակ: Անվերջ սխառններից որոշվող անհալաների գնահատականների լավացման համար ներմտծվում է սխառնների բխեզուլարությունից հասկացողությունը:

Ձողի ծաման դեպքում հավասարակշռության հավասարումներին բավարարելու համար շոշափող լարումներն որոնվում են հետևյալ կերպ՝

$$\tau_{xz} = \frac{P}{J} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{2} (x - \omega y) (b - x + \omega y) - \frac{\omega^2}{2} y (d - y) \right],$$

$$\tau_{yz} = -\frac{P}{J} \left[\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} y (d - y) \right],$$

որտեղ $\psi(x, y)$ ֆունկցիան վերահիշյալ եղանակով որոշվում է համառեզու-թյան հավասարումից և եզրագծի վրա զրո լինելու պայմանից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. Минасян Р. С. О решении задачи Дирихле уравнений с неразделяющимися переменными для прямоугольника. ДАН Армянской ССР, т. XXIII, № 4, 1956.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
4. Александрян Е. А. О кручении некоторых призматических стержней. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. 5, № 2, 1952.
5. Saint-Venant B. Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires présentés par divers savants..., Sciences math. et phys., t. 14, 1856, Paris.
6. Кондович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных уравнений. Известия физико-математ. института им. В. А. Стеклова, т. III, 1930.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. Гостехиздат, 1947.
8. Saint-Venant B. Mémoire sur la flexion des prismes. Journal de Math. pures et appliquées (Liouville), Ser. II, t. I, 1856.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. Костандян

Кручение вала с насаженным диском

§ 1. Постановка задачи

Для валов переменного сечения показано, что, при кручении, перемещение каждой точки перпендикулярно к осевой плоскости, проходящей через эту точку. Это перемещение обозначим через V . Возьмем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и совместим ось z с осью вала. В силу симметричности задачи относительно оси z , тангенциальное перемещение V не зависит от угла φ . Из всех компонентов тензора напряжений остаются отличными от нуля только две касательные напряжения $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$. В дальнейшем $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$ обозначаются соответственно через τ_z и τ_r .

Тангенциальное перемещение $V(r, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{V}{r} \right) = 0,$$

а напряжения определяются следующими формулами

$$\tau_r = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right);$$

$$\tau_z = Gr \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{r} \right),$$

где $G = \mu$ модуль сдвига.

Положив $V = r \Psi(r, z)$, получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= Gr \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \\ \tau_z &= Gr \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.2)$$

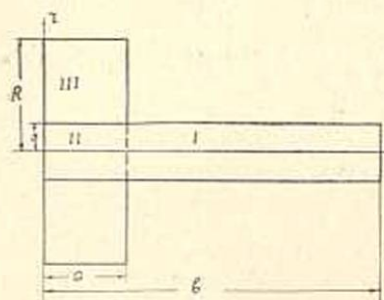
На контуре осевого сечения функция $\Psi(r, z)$ удовлетворяет следующему граничному условию [2]

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{1}{G} \frac{p(l)}{r(l)}, \quad (1.3)$$

где $p(l)$ — интенсивность внешней нагрузки, $r(l)$ — радиус сечения в данной точке контура, а l — длина дуги по образующей вала.

Рассмотрим кручение кругового цилиндрического вала конечной длины, на одном конце которого насажен диск из другого материала (фиг. 1). Внешние радиусы вала и диска обозначим соответственно через s и R , длину вала через b и толщину диска через a .

Пусть крутящая нагрузка распределена по всей свободной поверхности вала и диска, по следующим законам:



Фиг. 1.

$$\left. \begin{aligned} \tau_z(r, 0) &= \varphi_1(r) & 0 \leq r \leq s \\ \tau_z(r, 0) &= \varphi_2(r) & s \leq r \leq R \\ \tau_r(R, z) &= \varphi_3(z) & 0 \leq z \leq a \\ \tau_z(r, a) &= \varphi_4(r) & s \leq r \leq R \\ \tau_r(s, z) &= \varphi_5(z) & a \leq z \leq b \\ \tau_z(r, b) &= \varphi_6(r) & 0 \leq r \leq s \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Предположим, что функции $\{\varphi_i\}$ кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. Тогда функции φ_i могут быть представлены в виде рядов Фурье и Фурье — Дини [6]

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3(z) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi z}{a} & 0 < z < a; \\ \varphi_5(z) &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a} & a < z < b; \\ \varphi_1(r) &= a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1 \left(\mu_k \frac{r}{s} \right) & 0 < r < s; \\ \varphi_2(r) &= b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r) & s < r < R; \\ \varphi_4(r) &= f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r) & s < r < R; \\ \varphi_6(r) &= \beta_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_1 \left(\mu_k \frac{r}{s} \right) & 0 < r < s, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где $J_n \left(\mu_k \frac{r}{s} \right)$ — функция Бесселя n -ого порядка первого рода;

$$W_n(\lambda_k r) = \frac{J_n(\lambda_k r)}{J_n(\lambda_k R)} - \frac{Y_n(\lambda_k r)}{Y_n(\lambda_k R)}, \quad (1.6)$$

где $Y_n(\lambda_k r)$ функция Бесселя второго рода n -ого порядка, а числа $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ являются соответственно корнями уравнений

$$J_2(x) = 0; \\ W_2(sx) = \frac{J_2(sx)}{J_2(Rx)} - \frac{Y_2(sx)}{Y_2(Rx)}. \quad (1.7)$$

Для функций $J_n(x)$ и $W_n(x)$ справедливы следующие формулы:

$$\int_0^s x J_1\left(\frac{\mu_k}{s}x\right) J_1\left(\frac{\mu_p}{s}x\right) dx = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_0^s x J_2\left(\frac{\mu_k}{s}x\right) J_2\left(\frac{\mu_p}{s}x\right) dx = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2} [s J_1(\mu_k)]^2 & \text{при } p = k; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\int_s^R x W_1(\lambda_k x) W_1(\lambda_p x) dx = \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \int_s^R x W_2(\lambda_k x) W_2(\lambda_p x) dx = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2} [R W_1(\lambda_k R)]^2 - [s W_1(\lambda_k s)]^2 & \text{при } p = k; \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\int_0^s x^2 J_1\left(\frac{\mu_k}{s}x\right) dx = \int_s^R x^2 W_1(\lambda_k x) dx = 0. \quad (1.10)$$

Из формул (1.8) — (1.10) следует, что коэффициенты разложений (1.5) определяются единственным образом. Внешняя нагрузка должна удовлетворять уравнениям равновесия, т. е. сумма крутящих моментов должна равняться нулю.

$$M = \int_F r(l) p(l) dF = 2\pi \int_l r^2(l) p(l) dl,$$

где

$$p(l) = \tau_r \frac{dz}{dl} - \tau_z \frac{dr}{dl}.$$

Составим сумму крутящих моментов, действующих на вал и на диск

$$\Sigma M = 2\pi \left\{ - \int_0^s r^2 \tau_z(r, 0) dr - \int_s^R r^2 \tau_z(r, 0) dr + \right.$$

$$+ \int_0^a R^2 \tau_r(R, z) dz - \int_b^s r^2 \tau_z(r, a) dr + \int_a^b s^2 \tau_r(s, z) dz - \\ - \int_s^0 r^2 \tau_z(r, b) dz \Big\}.$$

Подставляя значение τ_z и τ_r из (1.4) в предыдущие интегралы, имея в виду (1.5) и значения интегралов (1.10), получим

$$- \frac{1}{2\pi} \sum M = \frac{a_0 - \beta_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \\ - \frac{c_0 a R^2}{2} - \frac{g_0 (b - a) s^2}{2} = 0 \quad (1.12)$$

Это соотношение представляет уравнение равновесия крутящих моментов, действующих на вал с диском.

Область осевого сечения разделим на три части, как показано на фиг. 1. Ищем функцию $\Psi(r, z)$ в виде

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \Psi_1(r, z) & \text{в области I;} \\ \Psi_2(r, z) & \text{в области II;} \\ \Psi_3(r, z) & \text{в области III.} \end{cases}$$

На смежных сторонах областей I, II, и II, III неизвестные напряжения формально разложим в ряды

$$\left. \begin{aligned} \tau_r(s, z) &= \frac{\tau_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \cos \frac{k\pi z}{a} & 0 < z < a; \\ \tau_z(r, a) &= \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right) & 0 < r < s, \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

где $\{\tau_k\}$ и $\{\xi_k\}$ — пока неизвестные коэффициенты.

Граничные условия для функций Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 получим приравняв нулю перемещение на оси вала и из (1.1), (1.3)

$$\left. \begin{aligned} r G_1 \frac{d\Psi_1}{dz} \Big|_{z=b} &= \beta_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right) & 0 < r < s; \\ s G_1 \frac{d\Psi_1}{dr} \Big|_{r=s} &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a} & a < z < b; \\ r G_1 \frac{d\Psi_1}{dz} \Big|_{z=a} &= \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right) & 0 < r < s; \\ [r\Psi_1(r, z)]_{r=0} &= 0 & a < z < b. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned}
 G_1 r \frac{d\Psi_2}{dz} \Big|_{z=0} &= a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1 \left(\frac{\mu_k}{s} r \right) & 0 < r < s; \\
 [r\Psi_2(r, z)]_{r=0} &= 0 & 0 < z < a; \\
 G_1 r \frac{d\Psi_2}{dz} \Big|_{z=a} &= \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1 \left(\frac{\mu_k}{s} r \right) & 0 < r < s; \\
 G_1 s \frac{d\Psi_2}{dr} \Big|_{r=s} &= \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos \frac{k\pi z}{a} & 0 < z < a;
 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 G_2 r \frac{d\Psi_3}{dz} \Big|_{z=0} &= b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r) & s < r < R; \\
 G_2 r \frac{d\Psi_3}{dz} \Big|_{z=a} &= f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r) & s < r < R; \\
 G_2 R \frac{d\Psi_3}{dr} \Big|_{r=R} &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi z}{a} & 0 < z < a; \\
 G_2 s \frac{d\Psi_3}{dr} \Big|_{r=s} &= \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos \frac{k\pi z}{a} & 0 < z < a.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

где G_1 и G_2 — модули сдвига соответственно для вала и для диска.

Принимая во внимание, что каждая разделенная часть остается в равновесии, если учтено действие других частей, для η_0 и ξ_0 получим

$$\begin{aligned}
 \eta_0 &= c_0 \frac{R^2}{s^2} - \frac{b_0 - f_0}{2as^2} (R^4 - s^4); \\
 \xi_0 &= \beta_0 + \frac{2g_0(b-a)}{s^2}.
 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Функции

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(r, z) &= \frac{1}{G_1} \left\{ g_0 \frac{r^2 - 4z^2}{4s^2} + z \left(\beta_0 + \frac{2g_0 b}{s^2} \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k(z-a)}{s} - \xi_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k(b-z)}{s} \right] \frac{s}{\mu_k} \frac{J_1 \left(\frac{\mu_k}{s} r \right)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k(b-a)}{s}} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{b-a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)k} \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \quad \left(\begin{matrix} 0 \leq r \leq s \\ a \leq z \leq b \end{matrix} \right); \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, z) = & \frac{1}{G_1} \left\{ \left[a_0 - \beta_0 - \frac{2g_0(b-a)}{s^2} \right] \frac{1}{8a} r^2 + \right. \\ & + \left[\beta_0 - a_0 + \frac{2g_0(b-a)}{s^2} \right] \frac{z^2}{2a} + a_0 z + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{s} - \right. \\ & \left. \left. - a_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k(a-z)}{s} \right] \frac{s}{\mu_k} \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s}} + \right. \\ & \left. + \frac{a}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{k I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)} \cos \frac{k\pi z}{a} \right\}, \quad \left(\begin{matrix} 0 \leq r \leq s \\ 0 \leq z \leq a \end{matrix} \right); \quad (1.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(r, z) = & \frac{1}{G_2} \left\{ \frac{b_0 - f_0}{8a} r^2 + \frac{R^2}{8a} \left[(b_0 - f_0) R^2 - 2ac_0 \right] \frac{1}{r^2} - \frac{b_0 - f_0}{2a} z^2 + \right. \\ & + b_0 z + K + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} [f_k \operatorname{ch} \lambda_k z - b_k \operatorname{ch} \lambda_k(a-z)] \frac{W_1(\lambda_k r)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k a} - \\ & - \frac{a}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_k \Delta_1 \left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a} \right) - \right. \\ & \left. - c_k \Delta_1 \left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right) \right] \frac{\cos \frac{k\pi z}{a}}{k \Delta \left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right)} \right\}, \quad \left(\begin{matrix} s \leq r \leq R \\ 0 \leq z \leq a \end{matrix} \right); \quad (1.20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= I_2(x) K_2(y) - I_2(y) K_2(x); \\ \Delta_1(x, y) &= I_1(x) K_2(y) + K_1(x) I_2(y), \end{aligned} \quad (1.21)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.2) и всем граничным условиям (1.14) — (1.16). [2, 1, 3, 4].

Потребуем, чтобы на линии контакта $r = s$, $0 < z \leq a$ равнялись касательные напряжения и перемещения для обеих областей, т. е.

$$\tau_r^{\text{II}} = \tau_r^{\text{III}}, \quad r = s \quad 0 < z < a;$$

$$V^{\text{II}} = V^{\text{III}} \quad r = s \quad 0 < z < a,$$

или, что тоже самое,

$$G_1 \frac{d\Psi_2}{dr} \Big|_{r=s} = G_2 \frac{d\Psi_3}{dr} \Big|_{r=s}, \quad 0 < z < a; \quad (1.22)$$

$$\Psi_2(s, z) = \Psi_3(s, z), \quad 0 < z < a. \quad (1.23)$$

Условие (1.22) мы уже принимали, когда предполагали, что на смежной линии областей II и III τ_r разлагается на один и тот же ряд для обеих областей (последние граничные условия в (1.15) и (1.16)). На линии смежения областей I и II потребуем, чтобы

$$V^{\text{II}} = V^{\text{I}}, \quad \Psi_2(r, a) = \Psi_1(r, a) \quad 0 < r < s; \quad (1.24)$$

$$\frac{d\Psi_1}{dz} \Big|_{z=a} = \frac{d\Psi_2}{dz} \Big|_{z=a} \quad 0 < r < s, \quad (1.25)$$

т. е. перемещения и касательные напряжения равны с обеих сторон.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции Ψ_i ($i = 1, 2, 3$) в формулах (1.18) — (1.20) построены так, что условия (1.23) и (1.25) удовлетворяются.

§ 2. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений

1°. Функции $\Psi_1(r, z)$ и $\Psi_2(r, z)$ должны удовлетворять условию (1.24), т. е.

$$\Psi_1(r, a) = \Psi_2(r, a) \quad 0 < r < s. \quad (2.1)$$

Составляя это равенство, после несложных действий, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k (b-a)}{s} - a_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k a}{s} - \right. \\ \left. - \xi_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k (b-a)}{s} \right] \frac{s J_1 \left(\frac{\mu_k r}{s} \right)}{\mu_k r} - (r^2 - 4a^2) [2g_0 b + \\ + (g_0 - a_0) s^2] \frac{1}{8as^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k\pi r} (-1)^{k+1} \gamma_k \frac{I_1 \left(\frac{k\pi r}{a} \right)}{I_2 \left(\frac{k\pi s}{a} \right)} + \\ + \frac{b-a}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_1 \left(\frac{k\pi r}{b-a} \right)}{I_2 \left(\frac{k\pi s}{b-a} \right) k}, \quad 0 < r < s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Умножив обе части равенства (2.2) на $r^2 J_1 \left(\frac{\mu_r}{s} r \right)$ и интегрируя по r в пределах $(0, s)$, используя формулы (1.8), (1.10) и значение интегралов

$$\int_0^s r J_1\left(\frac{\mu_p}{s} r\right) I_1(\beta r) dr = \frac{\beta s I_2(\beta s) J_1\left(\frac{\mu_p}{s}\right)}{\beta^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}; \quad (2.3)$$

$$\int_0^s r^2 J_1\left(\frac{\mu_p}{s} r\right) dr = \frac{2s^3 J_1\left(\frac{\mu_p}{s}\right)}{\mu_p^2}, \quad (2.4)$$

получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \operatorname{ch} \frac{\mu_p b}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_p a}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_p (b-a)}{s} s J_1(\mu_p) = \\ & = \frac{2\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \tau_{1k} \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} + \left[a_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p a}{s} + \right. \\ & \left. + \beta_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p (b-a)}{s} \right] s J_1(\mu_p) + \frac{2\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} + \\ & + [2g_0 b + (\beta_0 - a_0) s^2] \cdot \frac{s}{4a\mu_p}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2°. Функции $\Psi_2(r, z)$ и $\Psi_3(r, z)$ должны удовлетворять условию (1.23), т. е.

$$\Psi_2(s, z) = \Psi_3(s, z) \quad 0 < z < a. \quad (2.6)$$

Из формул (1.19) и (1.20) составим равенство (2.6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_1} \left\{ \left[a_0 - \beta_0 - \frac{2g_0(b-a)}{s^2} \right] \frac{s^2 - 4z^2}{8a} + a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varepsilon_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{s} - \right. \right. \\ & \left. \left. - a_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k (a-z)}{s} \right] \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s}\right)}{\mu_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s}} + \frac{a}{\pi s} \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{1k} \frac{I_1\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{k I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)} \cos \frac{k\pi z}{a} \right\} = \\ & = \frac{1}{G_2} \left\{ \frac{b_0 - f_0}{8a} s^2 + \frac{R^2}{8as^2} [(b_0 - f_0) R^2 - 2a c_0] - \frac{b_0 - f_0}{2a} z^2 + b_0 z + K + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} [f_k \operatorname{ch} \lambda_k z - b_k \operatorname{ch} \lambda_k (a-z)] \frac{W_1(\lambda_k s)}{\lambda_k s \operatorname{sh} \lambda_k s} - \right. \\ & \left. - \frac{a}{\pi s} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tau_{1k} \Delta_1\left(\frac{k\pi s}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) - c_k \frac{a}{k\pi s} \right] \frac{\cos \frac{k\pi z}{a}}{k \Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \right\}, \quad 0 < z < a. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь использована формула Вронского $I_n(x)K_{n+1}(x) + I_{n+1}(x)K_n(x) = \frac{1}{x}$.

Умножив равенство (2.7) на $\cos \frac{p\pi z}{a}$ и интегрируя в пределах $0 < z < a$, получим

$$\begin{aligned} a(-1)^{p+1} \tau_p &= \frac{2 \frac{p\pi}{a}}{\frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{G_1}{G_2} \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{J_1(\mu_k)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2} + \frac{(-1)^{p+1} 2 \frac{p\pi s}{a}}{\frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{G_1 I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{G_2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{G_1 s} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{J_1(\mu_k)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{G_2 s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^p f_a - b_k}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2} W_1(\lambda_k s) + \frac{a}{2G_2} \left(\frac{a}{p\pi s}\right)^2 \frac{c_p}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} + \\ &\left. + \left(\frac{a}{p\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{f_0}{G_2} - \frac{\beta_0}{G_1} - \frac{2g_0(b-a)}{G_1 s^2} \right) (-1)^p - \frac{b_0}{G_2} + \frac{a_0}{G_1} \right] \right\}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\xi_p \operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_p a}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_p (b-a)}{s} s J_1(\mu_p) = L_p, \quad \frac{a}{\alpha} (-1)^{p+1} \tau_p = F_p. \quad (2.9)$$

где $\alpha > 0$ — пока неизвестное число, которое в дальнейшем выбирается так, чтобы система была вполне регулярна. Тогда бесконечная система линейных уравнений (2.5) и (2.10) приводится к виду

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} F_k + R_p \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

$$F_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} L_k + D_p \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\alpha\mu_p}{as} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}; \quad (2.12)$$

$$b_{pk} = \frac{2p\pi}{asa} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-a)}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k b}{s}}{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right) \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{G_1}{G_2} \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times \\ \times \frac{1}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2}; \quad (2.13)$$

$$R_p = sJ_1(\mu_p) \left[\frac{a_p}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s}} + \frac{\beta_p}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-a)}{s}} \right] + \\ + \frac{2\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} - [2g_0 b + (\beta_0 - a_0) s^2] \frac{s}{4a\mu_p}; \quad (2.14)$$

$$D_p = \frac{2p\pi s}{aa} \frac{(-1)^{p+1}}{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right) \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{G_1 I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{G_2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{G_1 s} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{J_1(\mu_k)}{\left(\frac{\mu_k}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} + \frac{1}{G_2 s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^p f_k - b_k}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2} W_1(\lambda_k s) + \right. \\ \left. + \frac{a}{2G_2} \left(\frac{a}{2\pi s}\right)^2 \frac{c_p}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} + \left(\frac{a}{p\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{f_0}{G_2} - \frac{\beta_0}{G_1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{2g_0(b-a)}{G_1 s^2} \right) (-1)^p - \frac{b_0}{G_2} + \frac{a_0}{G_1} \right] \right\}. \quad (2.15)$$

Совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (2.10) и (2.11) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.16)$$

если ввести обозначения

$$Z_{2p-1} = L_p; \quad Z_{2p} = F_p; \quad B_{2p-1} = R_p; \quad B_{2p} = D_p; \quad (2.17)$$

$$A_{2p,2k} = 0; \quad A_{2p,2k-1} = b_{pk}; \quad A_{2p-1,2k-1} = 0; \quad A_{2p-1,2k} = a_{pk}.$$

§ 3. Исследование бесконечной системы линейных уравнений

В обозначениях (2.9) введенное число $\alpha > 0$ можно выбирать таким образом, чтобы система (2.16) была вполне регулярной [7].

Рассмотрим отдельно два следующих случая.

1°. Для нечетных строк

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p-1,k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\mu_p^2}{s^2} + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} = \\ &= \alpha \left(\operatorname{cth} \frac{\mu_p \alpha}{s} - \frac{s}{\mu_p a} \right) \leq \alpha, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в силу обозначений (2.17), (2.12). При этом использовано неравенство

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1, \quad 0 < x < \infty \quad (3.2)$$

и значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right). \quad (3.3)$$

2°. Для четных строк из (2.16) в силу (2.17) и (2.13)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2}{as} \frac{\frac{p\pi}{a}}{\left| \frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{G_1}{G_2} \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \right|} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-a)}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k b}{s}}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-a)}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k b}{s} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Показано [1], что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{p_k}{s}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} = \frac{as}{2p\pi} \frac{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}; \quad (3.6)$$

и

$$\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) = I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) - K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) > 0. \quad (3.7)$$

Ясно, что

$$\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) = I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) + K_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) > 0, \quad (3.8)$$

так как

$$I_n(x) > 0, \quad K_n(x) > 0 \quad \text{при } x > 0, \quad R(n) > -\frac{1}{2}, \quad (3.9)$$

Показано [3], что

$$I_{n+1}(x) \leq I_n(x) \quad \text{при } R(n) > -\frac{1}{2}, \quad x > 0 \quad (3.10)$$

и

$$K_n(x) \leq K_{n+1}(x) \quad \text{при } x > 0.$$

Имея в виду (3.5) — (3.10), для оценки (3.4) получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p, k}| &\leq \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \frac{1}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \times \\ &\times \frac{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} + \frac{G_1 I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{G_2 I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \cdot \frac{\Delta_1\left(\frac{p\pi s}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \frac{I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_1\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \leq \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выбирая $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, для оценок (3.1) и (3.11) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{pk}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Тем самым доказана вполне регулярность бесконечной системы линейных уравнений (2.16).

Совокупность свободных членов системы (2.16) ограничена и стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ [1]

$$B_p = O(p^{-b}), \quad (0 < b < 1) \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Напряжения определяются формулами (1.1), где в соответствующих областях надо брать соответствующие функции перемещения Ψ_i ($i = 1, 2, 3$) и модули сдвига.

В качестве численного примера рассмотрен вал с насаженным диском для следующих соотношений параметров $a = \frac{\pi}{2}s$, $b = 3\pi s$, $R = 3s$ и $G_2 = 2G_1$. Крутящая нагрузка приложена к торцу вала по линейному закону $\tau_z(r, b) = \tau_1 \frac{r}{s}$ и равномерно распределена по боковой поверхности диска $\tau_r(R, z) = \tau_2$.

Аналогичную задачу рассмотрел Н. Saito [8] для бесконечно длинного вала с диском.

Методом последовательных приближений получены значения шести неизвестных коэффициентов и оценки для остальных. Найдены численные значения напряжений τ_z для точек вала и диска, которые приведены в таблице 1.

Для наглядного представления закона распределения касательного напряжения τ_z на фиг. 2 приведены эпюры этих напряжений по некоторым сечениям.

Таблица 1

		$\frac{\tau_z}{\tau_1}$			
$\frac{r}{s}$	$\frac{z}{a}$	0	0,8	1,2	2
0	0	0	0	0	0
0,4	0	0	0,0561	0,2745	0,3997
0,8	0	0	0,4450	0,8004	0,8004
1	0	0	1,3553	1,1617	1,0302
1,2	0	0	0,4571	—	—
2	0	0	0,0317	—	—
3	0	0	0,0068	—	—

բով: Օրինակում սկզբնական և լիսենի սահմանի մոդուլները վերցված են $\frac{G_2}{G_1} = 2$ հարաբերությամբ: Կազմված են լարումների բաշխման էպյուրները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., Джрбациян М. М. О кручении валов переменного сечения, ПММ, т. XV, в. 4, 1951.
2. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. Костандян Б. А. О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы. Известия АН Армянской ССР, том VII, № 4, 1954.
4. Костандян Б. А. О кручении полого ступенчатого вала. Известия АН Армянской ССР, том IX, № 3, 1955.
5. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Гостехиздат, М., 1949.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1949.
8. Hideo Saito. Torsion of a circular shaft press-pitted with a disc. ZAMP, Vol. VI, 1955, № 6, pp. 498—503.

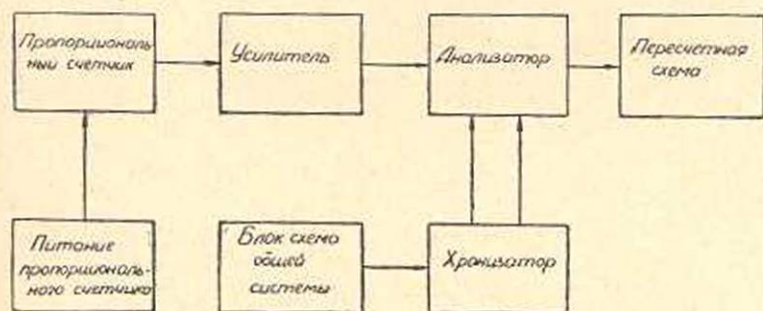
НАУЧНАЯ ЗАМЕТКА

Багдасарян Л. С., Харитонов В. М. и Марикян Г. А.

Многоканальный амплитудный анализатор импульсов с логарифмической характеристикой

Блок-схема всей системы приведена на фиг. 1.

Импульсы от пропорционального счетчика усиливаются в линейном усилителе и поступают на вход амплитудного анализатора. В этот же момент импульсом тройного совпадения запускается хронизатор, который дает отрицательный импульс „1“ с длительностью 30 мксек, и синусоидальное колебание (метки времени). Начало синусоидальных колебаний совпадает с концом импульса „1“. Оба сигнала поступают в амплитудный анализатор импульсов. Число синусоид на выходе анализатора определяет величину измеряемого импульса в логарифмической шкале. Эти импульсы подсчитываются с помощью 3-х декадной пересчетной схемы, интерполяционные лампочки которой фотографируются вместе с неоновыми лампочками годоскопической системы телескопа.

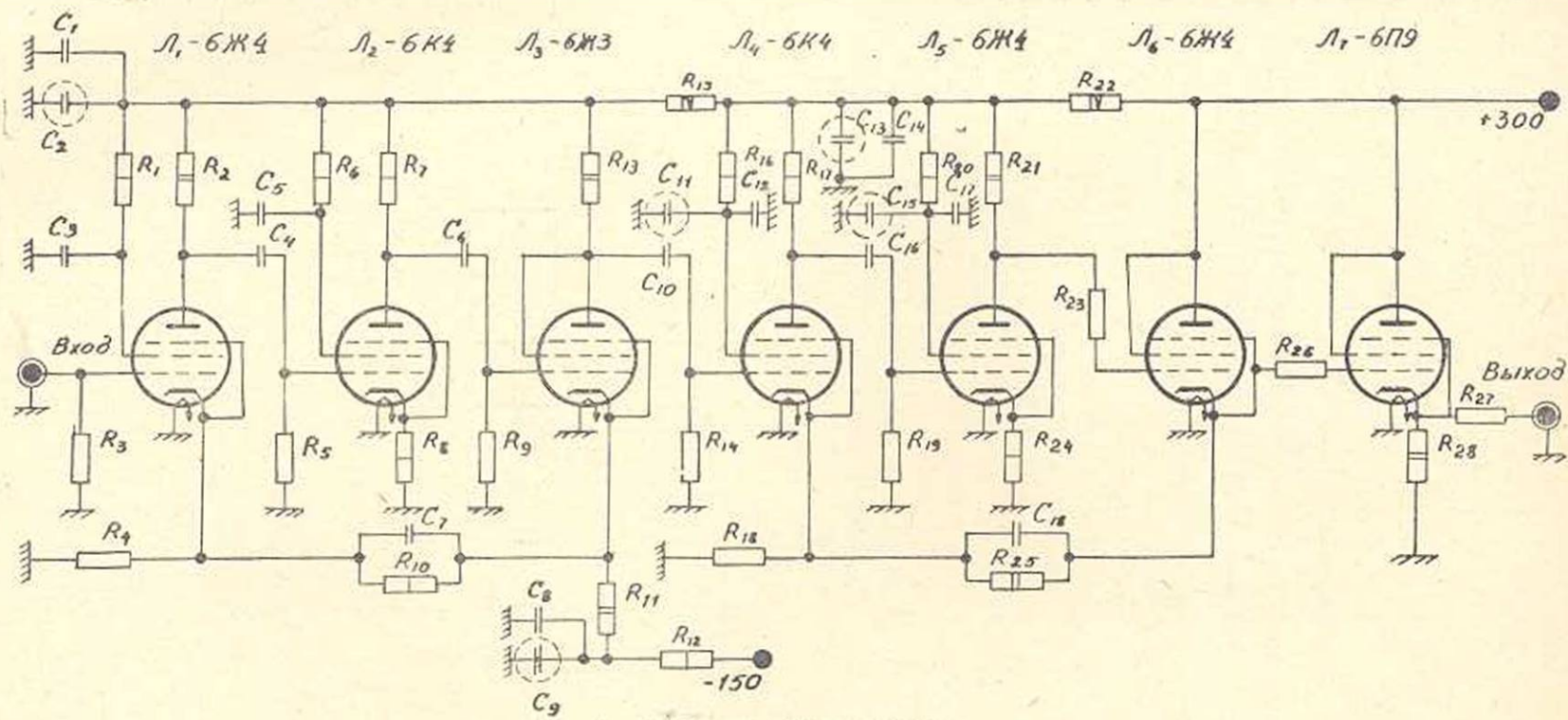


Фиг. 1. Блок-схема всей системы

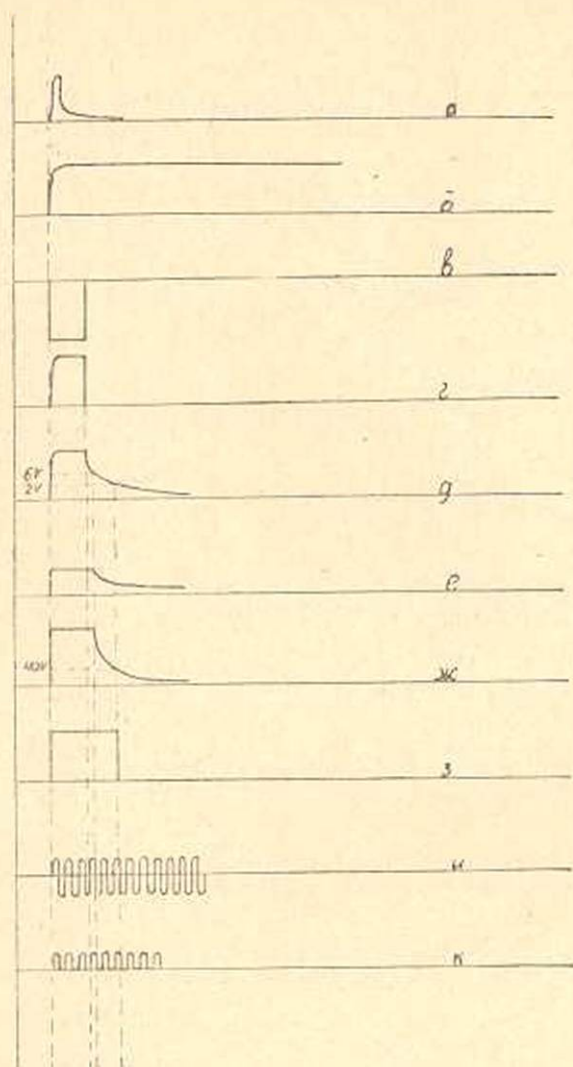
Пропорциональный счетчик

Пятислойный пропорциональный счетчик имеет прямоугольную форму. Размеры рабочего объема каждого слоя $27 \times 100 \times 300$ мм. Счетчик наполнен пропаном с давлением 480 мм ртутного столба. Все выводы счетчика осуществляются с помощью переходных спаев медь-стекло с охранными кольцами, которые помещены с торцевой стороны счетчика. Наполнение и откачка счетчика также осуществляются с помощью переходных спаев.

Счетчик работает с коэффициентом газового усиления ~ 200 при напряжении ≈ 4000 вольт.



Фиг. 2. Схема линейного усилителя.



Фиг. 5. Формы импульсов в схеме анализатора

- а) Измеряемый импульс поступающий от линейного усилителя.
- б) Измеряемый импульс после затягивания.
- в) Селектирующий импульс от хронизатора (ширина 30 мксек).
- г) Измеряемый импульс после обрезаия через 30 мксек от начала.
- д) Импульс на выходе "генератора экспонанты".
- е) Импульс после обрезаия на уровне 6 вольт.
- ж) Импульс на выходе усилителя.
- з) Импульс на выходе дискриминатора.
- и) Синусоидальные колебания (метки времени) поступающие от хронизатора.
- к) Метки времени на выходе анализатора.

Линейный усилитель

Для измерения величины импульса на выходе пропорционального счетчика его предварительно усиливали в линейном усилителе, коэффициент усиления которого $K=8000$ (фиг. 2).

Для уменьшения фона переменного тока накалы ламп усилителей питались постоянным током, который выпрямлялся с помощью селенового выпрямителя и фильтровался. Для уменьшения фона от внешних источников усилители помещались в заземленный экран. Внутренние шумы сводились к минимуму благодаря правильному расчету и монтажу усилителей. Для уменьшения шумов от механических толчков усилители закреплялись к стойкам с помощью резиновых прокладок.

Уровень шумов на выходе усилителей составляет $0,09 - 0,12$ вольт.

Хронизатор

Схемы анализаторов управляются с помощью хронизатора (фиг. 3). Запускающим импульсом для хронизатора служит импульс тройного совпадения в телескопе системы, служившем для определения радиуса кривизны траектории частицы в магнитном поле.

Мультивибратор на лампе L_2 (фиг. 3) дает отрицательный импульс „1“ шириной 30 мксек. Этот импульс через вход 2 поступает в анализатор и является для него селектирующим импульсом.

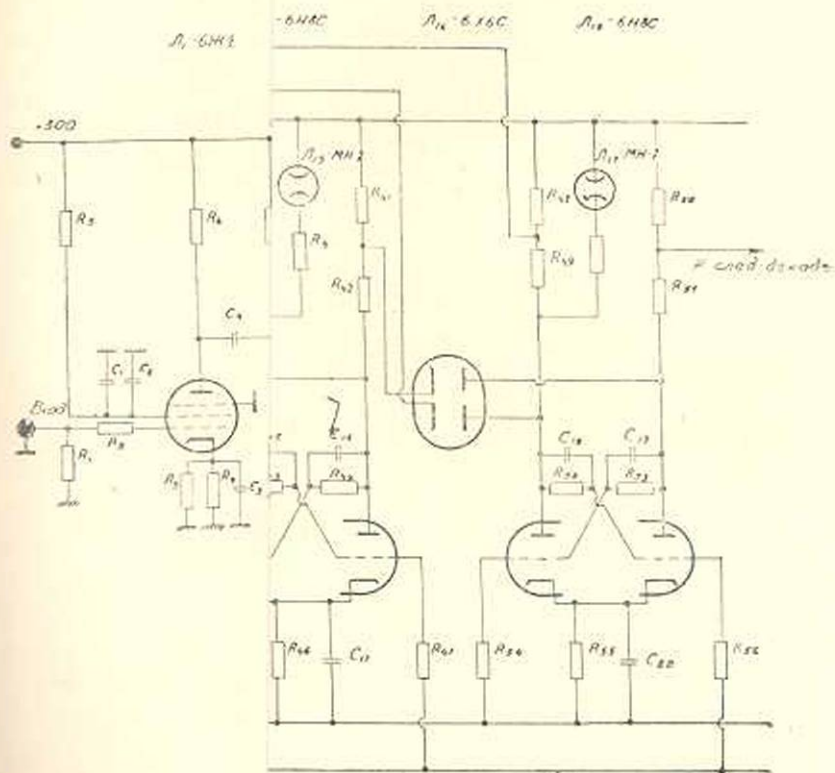
Генератор ударного возбуждения (L_6, L_6, L_7) запускается задним фронтом импульса „1“. При этом генератор дает синусоидальные колебания — „метки времени“. Генератор работает с частотой ~ 100 кГц. Максимальная частота генератора определяется разрешающим временем пересчетной схемы.

Изменение частоты колебательного контура генератора из-за изменения температуры окружающей среды $\pm 5^\circ\text{C}$ составляет $\pm 0,02\%$. Применение отдельного накаливого трансформатора для лампы L_6 уменьшает влияние на частоту колебаний емкости между катодом лампы и накалом.

Амплитудный анализатор импульсов

Измеряемый импульс положительного знака через вход 1 поступает в анализатор (фиг. 4).

С помощью ламп $L_1 - L_4$ импульс формируется так, что полученный прямоугольный импульс имеет амплитуду, равную амплитуде измеряемого импульса, и ширину в 30 мксек. Для этого импульс затягивается с помощью конденсатора C_4 и диода L_2 , а затем обрывается через 30 мксек, после начала (кривая „г“, фиг. 5). С помощью лампы L_6 , конденсатора C_{11} и сопротивления R_{13} затягивается задний фронт импульса. При этом он получает форму экспоненты с $\tau=1,1$ мксек. Величина τ выбирается так, чтобы максимальному сигналу соответствовало ~ 400 колебаний меток времени.



В дальнейшем все импульсы на уровне 6-вольт обрезаются и усиливаются для уменьшения влияния неустойчивости порога срабатывания дискриминатора (J_{15} и J_{16}).

Ширина прямоугольных импульсов на выходе дискриминатора (схемы Шмидта), строго пропорциональна логарифму амплитуды измеряемого импульса.

В дальнейшем осуществляется измерение ширины этого импульса. Работа ламп J_{21} и J_{22} ничем не отличается от работы ламп J_3 и J_4 .

На выходе амплитудного анализатора выделяются положительные половинки синусоид, число которых и определяет величину измеряемого импульса.

По данным авторов [1] неустойчивость порога срабатывания дискриминатора составляет $\pm 0,1-0,2$ вольт. Такая неустойчивость дает изменение ширины выходного импульса на $\pm 0,3-0,6$ мксек, что и наблюдалось нашей схемой.

Пересчетная схема

На лампах $J_1 + J_4$ (фиг. 6) импульсы формируются и поступают на пересчетную часть схемы.

Первые два каскада пересчетной схемы имеют пропускную способность 200 кГц., а остальные 50 кГц [1].

Во время эксплуатации выяснилось, что первые каскады пересчетной схемы работают без пропусков при частоте 100 кГц, поэтому частота работы генератора в хронизаторе ограничивается 100 кГц. Если первые два каскада первой декады пересчетной схемы, построены на лампах 6Н8С, а последующие два на лампах 6Н9С, то при поступлении каждого десятого импульса декада работает не правильно. Для устранения этой неполадки пришлось между четвертым и вторым каскадами добавить катодный повторитель. Положительный результат можно получить, собрав все четыре каскада на лампах 6Н8С.

Гашение пересчетной схемы осуществляется импульсом от блока управления общей системы, который отключает все первые сетки пересчетных ламп от земли. При этом схема приходит в исходное состояние.

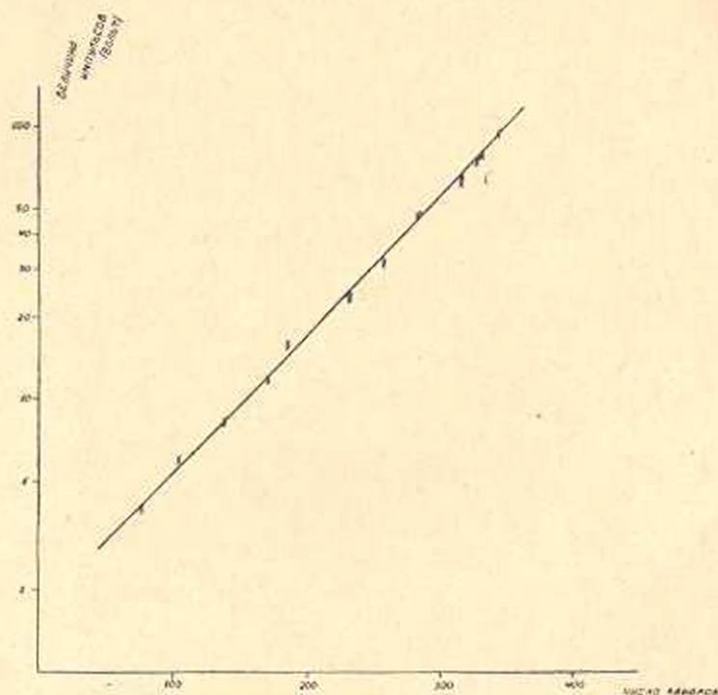
Калибровка и контроль

Калибровка схемы производилась с помощью генератора импульсов. Величина импульса, подаваемая на вход анализатора, определялась опорным напряжением, величина которого контролировалась с точностью лучше чем 0,2% и строились кривые $N=f(u)$ где N —число импульсов сосчитанное пересчетной схемой (см. фиг. 7).

Постоянный контроль над всей системой осуществлялся путем регистрации жестких частиц (с пробегом ≥ 17 см pb), так как за ко-

роткий срок работы установки их можно набрать в достаточном количестве.

На фиг. 8 приведены гистограмма и кривая распределения значений ионизации, для 30,000 жестких частиц. Для построения этих



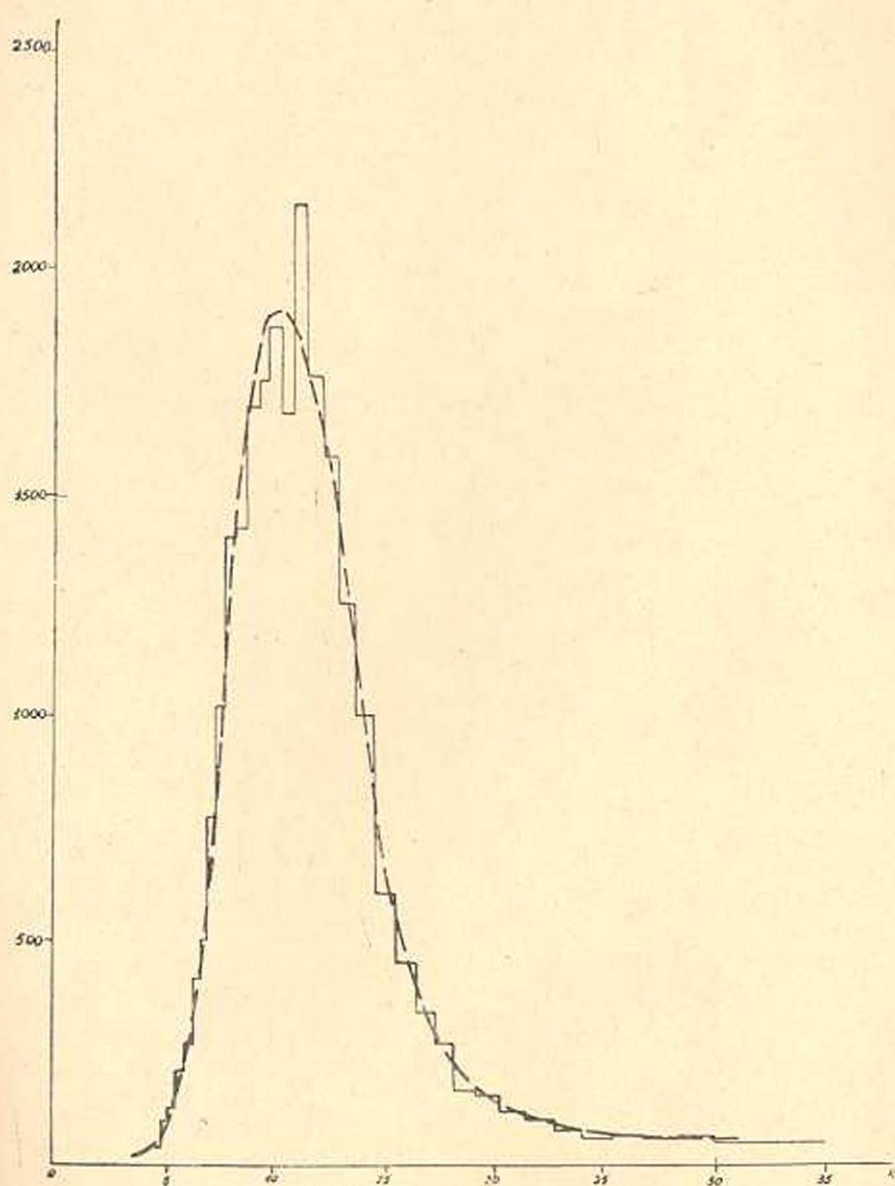
Фиг. 7. Калибровочная кривая. Крестиками показаны экспериментальные точки, снятые во время одной из калибровок.

кривых выбрали жесткие частицы с минимальной ионизирующей способностью отношение p/μ , для которых лежит в интервале $\sim 3 \div 5$. Ширина этой кривой на половине высоты $= \pm 32,5\%$.

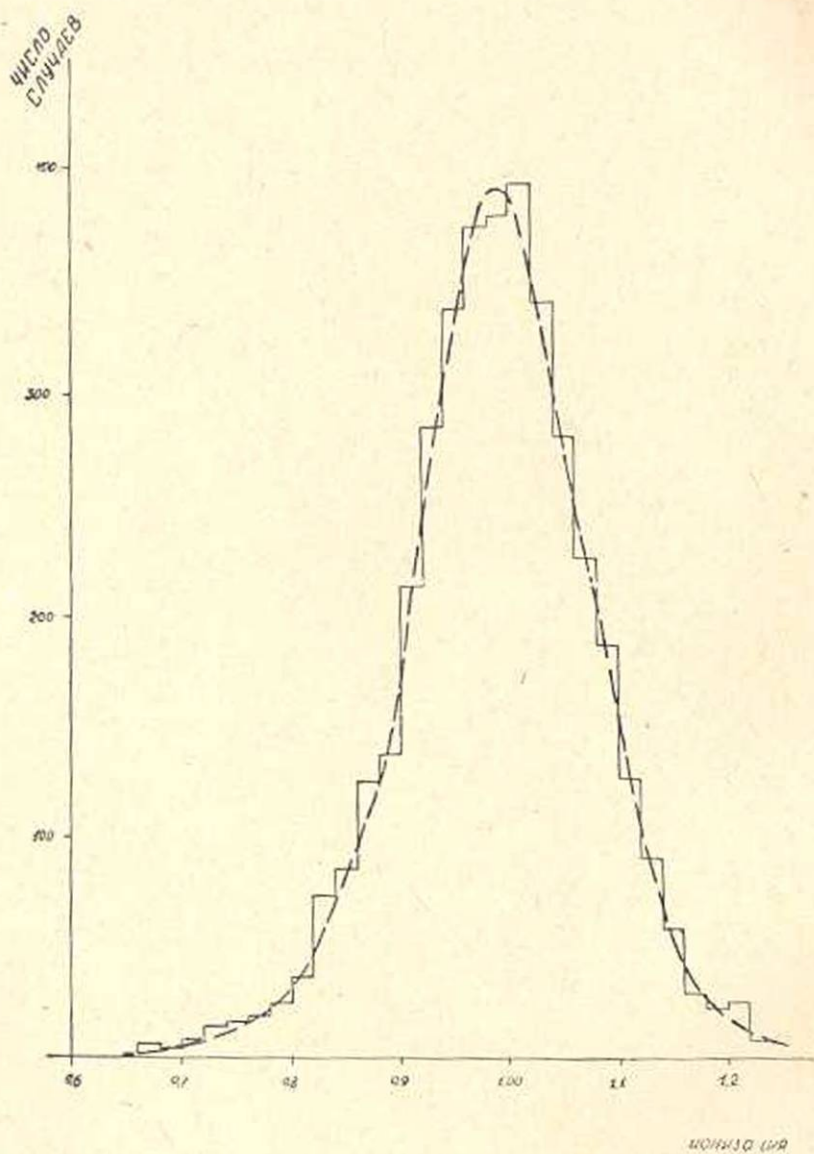
Для этих же частиц, методом максимума правдоподобия, подсчитывались наиболее вероятные значения из пяти значений пятислойного пропорционального счетчика. Полученная кривая распределения приведена на фиг. 9. Ширина на половине высоты $= \pm 16,5\%$.

Подробное описание методов обработки и полученные результаты будут опубликованы в ближайшее время.

Схема с пятислойным пропорциональным счетчиком работает непрерывно, начиная с конца 1955 г.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Լ. Ս. Բաղդասարյան, Վ. Մ. Խաթիսյան և Գ. Ս. Մարիկյան

ԻՄՊՈՒԼՏՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱԿԱՆԱԼ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԱՅԻՆ ԱՆԱԼԻԶԱՏՈՐ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Իմպուլսների ամպլիտուդային անալիզատորը նախատեսված է կոմպիլիկան ճառագայթների լիցքափորժած մասնիկների ինտիգացիոն հատկությունները որոշելու համար:

Անալիզատորում օգտագործված է իմպուլսի ամպլիտուդան երկարաժամանակյա սկզբում: Այս ձևափոխումը կատարվում է լոգարիթմական կոնտեյնի, որի շնորհիվ չափումները բոլոր կանալներում կատարվում են միևնույն հարաբերական ճշտությամբ:

Ծնորձիվ նրա, որ չափումները կատարվում են հինգ շերտանոց հարաբերական հաշվիչի միջոցով, բաշխման կորի լայնությունը կոշտ մասնիկների համար միջին բարձրության վրա ստացվում է $\pm 16,5\%$ աֆն դեպքում, երբ մեկ շերտանոց համեմատական հաշվիչի համար կորի լայնությունն ստացվում է $\pm 32,5\%$:

Որպես կոշտ մասնիկներ ընտրված են ալնպիսի մասնիկները, որոնք անցնում են 17 սմ հաստության ունեցող կապարի շերտի միջով և որոնց համար ρ/β հարաբերությունն ընկած է 3—5 սահմաններում:

Հոգվածում քերված են ամբողջ սխեմայի սպիտակինիկական սխեման և նրա նկարագրությունը:

Քերված են նաև սխեմայի աշխատանքը լուսարանող մի քանի կորեր:

Նկարագրված սխեմայի, կցված Ալիսանոյ-Ալիսանյանի մադնիական մաս-սպեկտրոմետրի հետ, անընդմեջ աշխատում է սկսած 1955 թվականից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Эльмор В. и Сандс М. „Электроника в ядерной физике“, М., 1951.