

Г. В. Бадалян

Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора

§ 1. Об одном аналоге суммирования рядов по Чезаро

Рассмотрим последовательность чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty \quad (1)$$

и числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Введем обозначения

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{v=1}^{n-1} \gamma_v}{\prod_{v=2}^k (\gamma_v - \gamma_1)} S_{k-1},$$

$$S_n^{(\mu)} = \sum_{k=\mu}^n \frac{\prod_{v=\mu}^{n-1} (\gamma_v - \gamma_{\mu-1})}{\prod_{v=\mu+1}^k (\gamma_v - \gamma_{\mu})} S_{k-1}^{(\mu-1)}, \quad \mu = 2, 3, \dots,$$

где здесь и впредь $\prod_{v=k+1}^k (\gamma_v - \gamma_m) = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k$.

Определение 1. Условимся называть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируемым по методу (C_{γ}, μ) , если последовательность

$$\left\{ S_n^{(\mu)} : \prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_{\mu}} \right\}, \quad n = \mu + 1, \mu + 2, \dots$$

имеет конечный предел.

Замечание 1. В частном случае, когда $\gamma_v = v, v = 0, 1, 2, \dots$, метод суммирования рядов (C_{γ}, μ) становится обычным чезаровским средним μ -го порядка — (C, μ) .

Введем также обозначения

$$\begin{aligned} \dot{S}_n^{(1)} &= \prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} S_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)}}{\prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}}, \\ \dot{S}_n^{(\mu)} &= \frac{\sum_{k=\mu}^n \frac{\prod_{v=\mu}^{k-1} \gamma_v}{\prod_{v=\mu+1}^k (\gamma_v - \gamma_\mu)} S_{k-1}^{(\mu-1)}}{\prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu}}, \quad \mu = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Определение 2. Условимся считать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу (\dot{C}_γ, μ) , если последовательность чисел $\{\dot{S}_n^{(\mu)}\}$, $n = \mu+1, \mu+2, \dots$ имеет конечный предел.

Теорема 1. Процесс (\dot{C}_γ, μ) , $\mu = 1, 2, \dots$ регулярен.

Доказательство. Обозначим

$$p_k = \frac{\prod_{v=\mu+1}^{k-1} \gamma_v}{\prod_{v=\mu+1}^k (\gamma_v - \gamma_\mu)}, \quad k = \mu+1, \mu+2, \dots, \quad P_n = \prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu}$$

и рассмотрим сумму $\sum_{k=\mu+1}^n p_k$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=\mu+1}^n p_k &= \gamma_\mu \left[\frac{1}{\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu} + \frac{\gamma_{\mu+1}}{(\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu)(\gamma_{\mu+2} + \gamma_\mu)} + \dots + \frac{\prod_{v=\mu+1}^{n-1} \gamma_v}{\prod_{v=\mu+1}^n (\gamma_v - \gamma_\mu)} \right] = \\ &= \gamma_\mu \left[\prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu} - 1 \right] \frac{1}{\gamma_\mu} = \prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu} - 1. \end{aligned}$$

В силу расходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v}$ при $n \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\frac{\sum_{k=\mu}^n p_k}{P_n} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{p_k}{P_n} \rightarrow 0.$$

Это значит, что процесс (\hat{C}_γ, μ) может быть рассмотрен как процесс Вороного, а следовательно он регулярен.

Теперь будем сравнивать процессы (C_γ, μ) и (\hat{C}_γ, μ) . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{S}_n^{(1)} &= \frac{S_n^{(1)}}{\prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}}, & \dot{S}_n^{(2)} &= \frac{\sum_{k=2}^n \frac{\prod_{v=k}^{k-1} \gamma_v}{k \prod_{v=3}^k (\gamma_v - \gamma_2)} S_{k-1}^{(1)}}{\prod_{v=3}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_2}} = \\ &= \frac{\sum_{k=2}^n \frac{\prod_{v=k}^{k-1} (\gamma_v - \gamma_1)}{k \prod_{v=3}^k (\gamma_v - \gamma_2)} \cdot \prod_{v=k}^{k-1} \frac{\gamma_v}{(\gamma_v - \gamma_1)} S_{k-1}^{(1)}}{\prod_{v=3}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_2}} = \frac{S_n^{(2)}}{\prod_{v=3}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_2}}. \end{aligned}$$

С целью установления связи между $\dot{S}_n^{(\mu)}$ и $S_n^{(\mu)}$ для любого целого $\mu > 0$ допустим, что

$$\dot{S}_n^{(\mu-1)} = \frac{S_n^{(\mu-1)}}{\prod_{v=\mu}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_{\mu-1}}},$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{S}_n^{(\mu)} &= \frac{\sum_{k=\mu}^n \frac{\prod_{v=k}^{k-1} \gamma_v}{k \prod_{v=\mu+1}^k (\gamma_v - \gamma_\mu)} \dot{S}_{k-1}^{(\mu-1)}}{\prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu}} = \\ &= \frac{\sum_{k=\mu}^n \frac{\prod_{v=k}^{k-1} (\gamma_v - \gamma_{\mu-1})}{k \prod_{v=\mu+1}^k (\gamma_v - \gamma_\mu)} S_{k-1}^{(\mu-1)}}{\prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu}} = \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod_{v=\mu+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_\mu}}. \end{aligned}$$

Этим доказано, что для любого целого $\mu > 0$ справедливо равенство

$$\dot{S}_n^{(\mu)} = \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \quad (2)$$

Из последнего равенства и теоремы 1 следует:

Теорема 1'. Процесс суммирования рядов (C_γ, μ) регулярен.

Теорема 2. Для суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по (\dot{C}_γ, μ) необходимо, чтобы

$$\dot{S}_n = o(\gamma_n^\mu), \quad \dot{S}_n^{(k)} = o(\gamma_n^{\mu-k}), \quad k = 1, 2, \dots, \mu. \quad (3)$$

Доказательство.

Имеем

$$\dot{S}_n^{(\mu)} = \prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu} \sum_{k=\mu}^n \frac{\prod_{\nu=\mu}^{k-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=\mu+1}^k (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} \dot{S}_{k-1}^{(\mu-1)}$$

причем $\dot{S}_n^{(\mu)} \rightarrow S$, когда $n \rightarrow \infty$; это значит, что

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu)} - \dot{S}_n^{(\mu)} = o(1), \quad \text{когда } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

но при достаточно большом n будет

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu)} - \dot{S}_n^{(\mu)} = o\left(\frac{\prod_{\nu=\mu}^n \gamma_\nu \prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)^{-1} \dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)}}{\prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}}\right) = o\left(\frac{\dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)}}{\gamma_{n+1}}\right).$$

Из соотношения (4) и последнего равенства следует, что

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)} = o(\gamma_{n+1}).$$

Аналогичным способом далее получаем

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu-1)} - \dot{S}_n^{(\mu-1)} = o\left(\dot{S}_{n+1}^{(\mu-2)} \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right) = o(\gamma_{n+1}).$$

Следовательно

$$\dot{S}_{n+1}^{(\mu-2)} = o(\gamma_{n+1}^2).$$

Продолжая этот процесс, будем иметь

$$\dot{S}_n^{(\mu-k)} = o(\gamma_n^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \mu.$$

Эту теорему можно выразить и в терминах суммируемости (C_γ, μ) ; а именно:

Теорема 2'. Для суммируемости ряда $\sum_0^{\infty} a_n$ по (C_T, μ) необходимо, чтобы

$$S_n = o(\gamma_n^\mu), \quad \prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} S_n^{(1)} = o(\gamma_n^{\mu-1}),$$

$$\prod_{v=k+1}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_k} S_n^{(k)} = o(\gamma_n^{\mu-k}), \quad k = 1, 2, \dots, \mu.$$

Выясним теперь вопрос, как влияет быстрота роста последовательности чисел $\{\gamma_v\}$ на мощность метода $(\dot{C}_T, 1)$, и вообще (\dot{C}_T, μ) , $\mu \geq 1$.

Для этого рассмотрим $(\dot{C}_T, 1)$ и $(\dot{C}_T', 1)$, составленные соответственно посредством последовательностей чисел $\{\gamma_v\}$ и $\{\gamma'_v\}$, где

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_v} = \infty.$$

Заметим, что $(\dot{C}_T, 1)$ и $(\dot{C}_T', 1)$ суть методы суммирования (\bar{R}, p_n) и (\bar{R}, q_n) , где

$$p_n = \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma_v}{\prod_{v=2}^n (\gamma_v - \gamma_1)}, \quad q_n = \frac{\prod_{v=2}^{n-1} \gamma'_v}{\prod_{v=2}^n (\gamma'_v - \gamma_1)}$$

См. [1], стр. 79.

Значит к $(\dot{C}_T, 1)$ и $(\dot{C}_T', 1)$ применимы известные теоремы включения для (\bar{R}, P_n) , в частности теорема 14 (там же, стр. 80), из которой следует, что для $(\dot{C}_T, 1) \subset (C_T', 1)$ (в смысле мощности) достаточно, чтобы

$$a) \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_1} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_1}, \quad n = k, k+1, \dots$$

или

$$b) \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_1} > \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_1},$$

и

$$\frac{p_n}{p_n} = \gamma_n \leq H \frac{q_n}{q_n} = H \gamma'_n, \quad \text{где } p_n = \prod_{v=2}^n \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1}, \quad q_n = \prod_{v=2}^n \frac{\gamma'_v}{\gamma'_v - \gamma_1},$$

$H > 0$ — число не зависящее от n .

§ 2. Об одном аналоге суммирования рядов по Абелю

Известно, что ряд $\sum_0^{\infty} a_n$ называется суммируемым по методу Абеля (А) к сумме S , если ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $|x| < 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = S$.

В настоящем параграфе показывается, что обобщение классического ряда Тейлора ([2]), позволяет обобщить и процесс суммирования (А).

Действительно, рассмотрим функции

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}, \quad \omega_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \omega_n(x), \quad (5)$$

где $0 = \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$,

$x \in [0, 1]$, а простой контур C_n , здесь и впредь в подобных интегралах, охватывает окрестности полюсов подынтегральной функции.

В частном случае, когда $\gamma_{\nu} = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\omega_n(x) = (1-x)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В самом общем случае легко показать, что

1. $\omega_n(0) = 1$, $\omega_n(1) = 0$,
2. $\omega_n(x) > 0$, когда $x \in (0, 1)$,
3. На $[0, 1]$, $\omega_n(x)$ — монотонно убывает.

Для доказательства справедливости $\omega_n(0) = 1$ достаточно найти вычеты функции $\Phi(\zeta) = \frac{x^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}$ относительно ее полюсов с последующей подстановкой $x = 0$.

Для доказательства равенства $\omega_n(1)$ достаточно заметить, что функция

$$\Phi_1(\zeta) = \prod_0^n (\zeta + \gamma_{\nu})^{-1}$$

во внешней к C_n области не имеет особых точек.

Неравенство $\omega_n(x) > 0$, $x \in (0, 1)$ легко доказывается методом математической индукции.

Имеем

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_1(x) = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta + \gamma_1)} = 1 - x^{\gamma_1};$$

значит $\omega_1(x) > 0$, когда $x \in (0, 1)$.

Допустим теперь, что

$$\omega_m(x) = \frac{\prod_{\nu=0}^m \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^m (\zeta + \gamma_\nu)} > 0, \text{ когда } x \in (0, 1)$$

и составим

$$\gamma_{m+1} x^{\gamma_{m+1}} \int_1^x x^{-\gamma_{m+1}-1} \omega_m(x) dx = -\frac{\prod_{\nu=0}^{m+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{m+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{m+1} (\zeta + \gamma_\nu)} = -\omega_{m+1}(x).$$

Но нетрудно заметить, что при $x \in (0, 1)$ левая часть последнего равенства меньше нуля, значит (при $x \in (0, 1)$).

$$\omega_{m+1}(x) > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем теперь, что на $(0, 1)$ $\omega_n(x)$ монотонно убывает.

Имеем

$$\begin{aligned} \omega_n'(x) &= -\frac{\prod_{\nu=0}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta-1} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= -x^{\gamma_0-1} \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n'} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_0)} \end{aligned}$$

где простой контур C_n' охватывает скрестности всех нулей функции

$$\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_0).$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^{\gamma=0}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)} > 0, \quad x \in (0, 1),$$

получаем, что $\omega'_n(x) < 0$.

Определение 3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу (A_γ)

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(A_\gamma) \right)$, если ряд $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)$ сходится в $(0, 1]$ и существует конечный предел

$$S = \varphi(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x).$$

В частном случае, когда $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, процесс (A_γ) совпадает с известным процессом Абеля суммирования рядов.

В другом частном случае, когда

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 1,$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^{n+1}} \\ \omega_n(e^{-t}) &= \Omega_n(t) = \frac{e^{-t}}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{\zeta t} d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \frac{e^{-t}}{n!} \lim_{\zeta \rightarrow 0} (e^{\zeta})^{(n)} = \frac{e^{-t} t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\varphi(x) = \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \Omega_n(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{t^n}{n!}.$$

Это значит, что метод (A_γ) после подстановки $x = e^{-t}$ легко приводится к известному методу Бореля суммирования рядов.

Замечание 2. Для суммирования рядов по методу (A_γ) рассматривается последовательность $0 = \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_k}{\gamma_{n_k}} = \infty,$$

где ρ_k определяется из условия

$$\dots \leq \gamma_{n_k-1} < \gamma_{n_k} = \gamma_{n_k+1} = \gamma_{n_k+2} = \dots = \gamma_{n_k+p_k-1} < \gamma_{n_k+p_k} \leq \dots$$

Теорема 4. Метод (A_1) регулярен.

Доказательство. Покажем, что для всякого

$$x \in (0, 1), \omega_n(x) > \omega_{n+1}(x) > 0.$$

Действительно,

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \left[\frac{1}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)} - \frac{\gamma_{n+1}}{\prod_{\nu=0}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \right] \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta},$$

или

$$\begin{aligned} \omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) &= \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= x^{\gamma_1} \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)}. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) = x^{\gamma_1} \prod_{\nu=1}^n \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \omega_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

где

$$\alpha_\nu = \gamma_{\nu+1} - \gamma_1,$$

$$\omega_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha_\nu)} > 0.$$

Таким образом для всякого $x \in (0, 1)$.

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) > 0.$$

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно заметить, что $\omega_{n+1}(x) > 0$, и сослаться на известную теорему 25, [1], стр. 98, согласно которой для регулярности метода (A_1) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$0 < \omega_{n+1}(x) \leq \omega_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь перейдем к сравнению методов (C_1, μ) и (A_1) .

Определение 4. Условимся говорить, что выполняется условие сравнения методов (C_γ, μ) , где $\mu > 1$ — произвольное целое число и (A_γ) , если существует число $x > 0$ такое, что

$$\gamma_n^\mu \exp\left(-x \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\gamma_\nu}\right) = o(1), \quad (7)$$

когда $n \rightarrow \infty$.

Замечание 3. При выполнении условия сравнения, согласно теореме 2,

$$S_n^{(k)} \frac{\prod_{\nu=1}^{n+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=k+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} = o(1), \text{ когда } x \in (0, 1].$$

Теорема 5. При выполнении условия сравнения, из суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по (C_γ, μ) к конечной сумме S , следует его суммируемость, притом к той же сумме и по методу (A_γ) , здесь

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_\mu < \gamma_{\mu+1} \leq \gamma_{\mu+2} \leq \dots \rightarrow \infty.$$

Лемма 1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по (C_γ, μ) , то при выполнении условия сравнения справедливо равенство

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) = \\ &= \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \cdot \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $x \in (0, 1]$.

Рассмотрим $\varphi_{pq}(x) = \sum_{n=p}^q a_n \omega_n(x)$ и применим преобразование Абеля:

$$\sum_{n=p}^q A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) \sum_{m=p}^n A_m + B_q \sum_{m=p}^q A_m,$$

принимая $A_n = a_n$, $B_n = \omega_n(x)$.

Будем иметь

$$\varphi_{pq}(x) = \sum_{n=p}^{q-1} S_{pn} \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} + S_{pq} \omega_q(x)$$

так как

$$\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x) = \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}$$

В силу условия сравнения при $p=0$, $q \rightarrow \infty$ получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}, \quad x \in (0, 1].$$

Снова обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_{pq}(x) &= \sum_{n=p}^q S_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= \sum_{n=p+1}^{q+1} S_{n-1} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)}. \end{aligned}$$

Примем теперь

$$A_n = \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_\nu}{\prod_2^n (\gamma_\nu - \gamma_1)} S_{n-1}, \quad B_n = \frac{\prod_{\nu=2}^{n-1} (\gamma_\nu - \gamma_1)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu)}$$

и снова применим преобразование Абеля; здесь также согласно условию сравнения при $p=0$ и $q \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{v=2}^n (\gamma_v - \gamma_1)}{S_n^{(1) \nu-2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^{n+1} (\zeta + \gamma_v)} = \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{v=2}^{n-1} (\gamma_v - \gamma_1)}{S_{n-1}^{(1) \nu-2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)} = \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{v=2}^{n-1} (\gamma_v - \gamma_1)}{\prod_{v=1}^n (\gamma_v - \gamma_2)} \frac{\prod_{v=2}^n (\gamma_v - \gamma_2)}{S_{n-1}^{(1) \nu-3}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)}.
 \end{aligned}$$

С целью применения математической индукции допустим, что

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{\prod_{v=\mu}^{n-1} (\gamma_v - \gamma_{\mu-1})}{S_{n-1}^{(\mu-1) \nu-\mu}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=\mu}^n (\zeta + \gamma_v)} = \\
 &= \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{\prod_{v=\mu}^{n-1} (\gamma_v - \gamma_{\mu-1})}{\prod_{v=\mu+1}^n (\gamma_v - \gamma_{\mu})} \frac{\prod_{v=\mu}^n (\gamma_v - \gamma_{\mu})}{S_{n-1}^{(\mu-1) \nu-\mu+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=\mu}^n (\zeta + \gamma_v)}.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$A_n = \frac{\prod_{v=\mu}^{n-1} (\gamma_v - \gamma_{\mu-1})}{\prod_{v=\mu+1}^n (\gamma_v - \gamma_{\mu})} S_{n-1}^{(\mu-1)}, \quad B_n = \frac{\prod_{v=\mu+1}^n (\gamma_v - \gamma_{\mu})}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=\mu}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

тогда применение преобразования Абеля при последующем $p = \mu$ и $q \rightarrow \infty$ даст

$$\varphi(x) = \sum_{n=\mu}^{\infty} S_n^{(\mu) \nu-\mu+1} \frac{\prod_{v=\mu}^n (\gamma_v - \gamma_{\mu})}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=\mu+1}^n (\zeta + \gamma_v)} =$$

$$= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{S_{n-1}^{(\mu)}}{\prod_{\gamma=\mu+1}^{n-1} \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu}} \cdot \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^n (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Согласно равенству (2) получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} S_{n-1}^{(\mu)} \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^n (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

В силу произвольности числа μ лемма доказана.

Лемма 2. При $x \in (0, 1]$ справедливо равенство

$$1 = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^n (\zeta + \gamma_\nu)} \quad (8)$$

Действительно

$$\begin{aligned} \sigma_{0q}(x) &= \sum_{n=\mu+1}^q \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{n-1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \left[\frac{1}{\zeta + \gamma_{\mu+1}} + \frac{\gamma_{\mu+1}}{(\zeta + \gamma_{\mu+1})(\zeta + \gamma_{\mu+2})} + \dots + \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{q-1} \gamma_\nu}{\prod_{\nu=\mu+1}^q (\zeta + \gamma_\nu)} \right] x^{-\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \left[1 - \prod_{\nu=\mu+1}^q \frac{\gamma_\nu}{\zeta + \gamma_\nu} \right] \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} = \\ &= 1 - \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^q \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=\mu+1}^q (\zeta + \gamma_\nu)}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при $x \in (0, 1]$

$$\tau_q(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^q \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\mu=1}^q (\zeta + \gamma_\mu)} \rightarrow 0, \text{ когда } q \rightarrow \infty.$$

Действительно

$$\tau_q(x) \leq Cx^{-x} \prod_{\mu=1}^q \frac{\gamma_\nu}{x + \gamma_\nu} < Cx^{-x} e^{-x(x-\varepsilon) \sum_{\mu=1}^q \frac{1}{\gamma_\nu}},$$

при достаточно большом $q > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$, число сколь угодно малое. Таким образом доказано, что, при $x \in (0, 1]$,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{\mu, q}(x) = 1.$$

Доказательство теоремы 5.

Имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)};$$

с другой стороны, помножив обе стороны равенства

$$1 = \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \quad (8)$$

на S , где

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(\mu)}}{\prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}},$$

и вычтя его из предыдущего равенства, получаем

$$\varphi(x) - S = \sum_{n=\mu}^{\infty} \left(\prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu} S_n^{(\mu)} - S \right) \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \quad (9)$$

Разобьем теперь ряд правой части равенства (9) на слагаемые: I — от $\mu+1$ до N и II — от $N+1$ до $+\infty$ и обозначим их соответственно через $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$.

Имеем

$$|\sigma_1(x)| \leq A \sum_{n=\mu}^N \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)},$$

где

$$A = \sup_{\mu < n < N} \left(\prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}}{\gamma_\nu} S_n^{(\mu)} - S \right).$$

В контурном интеграле, заменив ζ через $\zeta - \gamma_{\mu+1}$, будем иметь

$$|\sigma_1(x)| \leq Ax^{\gamma_{\mu+1}} \sum_{n=\mu}^N \frac{\prod_{\mu+1}^n \gamma_\nu}{\prod_{\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} \cdot \frac{\prod_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}.$$

Нетрудно заметить, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{\prod_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} \leq 1.$$

Значит

$$|\sigma_1(x)| < Ax^{\gamma_{\mu+1}} \sum_{n=\mu+1}^N \frac{\prod_{\mu+1}^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})};$$

но

$$\begin{aligned} \sum_{n=\mu}^N \frac{\prod_{\mu+1}^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} &= \sum_{n=\mu+1}^N \frac{\prod_{\mu+1}^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} + 1 \\ &= 1 + \gamma_{\mu+1} \left(\prod_{\mu+2}^{N+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}} - 1 \right) \frac{1}{\gamma_{\mu+1}} = \prod_{\nu=\mu+2}^{N+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}}, \end{aligned}$$

здесь также как везде

$$\frac{\prod_{\nu=\mu+1}^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=\mu+2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})} = 1 \quad \text{при } n = \mu.$$

Таким образом

$$|\sigma_1(x)| < Ax^{\gamma_{\mu+1}} \prod_{\nu=\mu+2}^{N+1} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}}.$$

Возьмем $x > 0$ настолько близким к нулю, чтобы имело место неравенство:

$$|\sigma_1(x)| < A\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad (10)$$

для чего достаточно положить

$$x^{\gamma_{\mu+1}} = \frac{\varepsilon}{A} \prod_{\nu=\mu+2}^{N+1} \frac{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}}{\gamma_\nu}.$$

Оценим теперь $\sigma_2(x)$.

При достаточно большом $N(\varepsilon)$ и $n \geq N$ будем иметь

$$\left| \prod_{\nu=\mu+1}^n \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu} S_n^{(\mu)} - S \right| < \varepsilon,$$

тогда

$$|\sigma_2(x)| < \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}^{\mu+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=\mu+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

В силу равномерной сходимости последнего ряда на $(0, 1]$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\sigma_2(x)| < \varepsilon \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{N+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta}}{\prod_{\nu=\mu+1}^{N+1} (\zeta + \gamma_\nu)} \left[\frac{1}{\zeta + \gamma_{N+2}} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_{N+2}}{(\zeta + \gamma_{N+1})(\zeta + \gamma_{N+3})} + \dots \right] d\zeta = \varepsilon \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{N+1} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=\mu+1}^{N+1} (\zeta + \gamma_\nu)}, \end{aligned}$$

здесь $x > 0$ — произвольное число.

Заметив опять, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{N+1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^{N+1} (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{\prod_{\nu=1}^{N+1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_{N+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^{N+1} (\zeta + \gamma_{\nu})} \ll 1,$$

получаем

$$|\sigma_2(x)| < \varepsilon. \quad (11)$$

Объединяя оценки $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$, окончательно получаем, что при $x > 0$, достаточно близком к нулю,

$$|\varphi(x) - S| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

или

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = S.$$

Этим теорема доказана.

Определение 5. Условимся называть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируемым по методу (F_{γ}) к сумме S , если:

1. ряд

$$f(z) - a_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{\prod_{\nu=1}^n (z + \gamma_{\nu})}$$

сходится при $Re(z) > 0$. При $n=0$ $\prod_{\nu=1}^n \frac{\gamma_{\nu}}{z + \gamma_{\nu}}$ равно единице.

2. $f(z) - a_0^*$ при $z \rightarrow 0+$ обладает конечным пределом S , который называется обобщенной суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по методу (F_{γ}) и пишется

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(F_{\gamma}).$$

Пусть теперь ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega_n(t) = \psi(t) = \varphi(e^{-t}) = \varphi(x)$$

определяет на $(0, 1]$ единственную функцию $\varphi(x) \in C \left\{ \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} \right\}$,

см. [2], стр. 59.

Обозначим

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} d\psi(t) = L(\psi),$$

тогда

$$\begin{aligned} f(z) - a_0^* &= z \int_0^{\infty} e^{-zt} \psi(t) dt = \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \prod_1^n \gamma_n}{\prod_0^n (z + \gamma_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \prod_1^n \gamma_n}{\prod_1^n (z + \gamma_n)}. \end{aligned}$$

Определение 6. Условимся считать, [что $f(z) = L(\psi)$ удовлетворяет условию (L), если

$$\psi(t) = \varphi(e^{-t}) = \varphi(x) \in C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0, 1].$$

Теорема 6. Из суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по (A_γ) при выполнении условия (L) следует его суммируемость и по методу (F_γ) .

Доказательство. Достаточно использовать известную теорему, которая применительно к нашим целям формулируется так:

Если

$$f(z) - a_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \prod_1^n \frac{\gamma_n}{z + \gamma_n} \quad \text{при } \operatorname{Re}(z) > 0$$

и

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega_n(t) \rightarrow S, \quad \text{когда } t \rightarrow \infty,$$

то

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow 0+} |f(z) - a_0^* - S| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - S| \leq \lim_{x \rightarrow 0+} |\varphi(x) - S|.$$

см. [3], стр. 181. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 следует:

Теорема 5.* Из суммируемости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по методу (C_γ, μ) ,

где $\mu \geq 0$ — произвольное целое число, при выполнении условия сравнения следует его суммируемость и по методу (F_γ) .

Замечание. Последняя теорема может быть доказана и прямым путем, повторяя дословно все выкладки доказательства теоремы 5; единственное различие заключается в том, что в фигурируемых в доказательстве рядах будут только подинтегральные выражения, умноженные на z (контурные интегралы будут отсутствовать), так как

$$z \int_0^{\infty} e^{-zt} \omega_n(e^{-t}) dt = \prod_1^n \frac{\gamma_\nu}{z + \gamma_\nu}.$$

§ 2. Некоторые другие граничные свойства обобщенного ряда Тейлора

Теорема 7. Если

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \quad x \in (0, 1]$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^n (\omega + \gamma_\nu)} = A, \quad \text{где } \omega > 0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\omega \varphi(x) = A.$$

Лемма. Если

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \quad x \in (0, 1]$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^n (\omega + \gamma_\nu)} = 0, \quad \text{где } \omega > 0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\omega \varphi(x) = 0.$$

Действительно, составим

$$x^{-\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_k(x),$$

$$\omega_k(x) = \frac{\prod_1^k \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^k (\zeta + \gamma_\nu)}, \quad b_k = \frac{\prod_1^{k-1} (\omega + \gamma_\nu)}{\prod_1^k \gamma_\nu}, \quad b_0 = 1,$$

См. [4] стр. 48.

Из условия леммы следует, что при $n > n_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|a_n| < \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\omega + \gamma_\nu)}{\prod_1^k \gamma_\nu} \varepsilon;$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \omega_n(x) \right| &< \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\omega + \gamma_\nu)}{\prod_1^k \gamma_\nu} \cdot \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\prod_0^{n-1} (\omega + \gamma_\nu)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \varepsilon \frac{\prod_0^{n_0} (\omega + \gamma_\nu)}{2\pi i} \int_{C_{n_0}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta - \omega) \prod_0^{n_0} (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= \varepsilon \omega x^{-\omega} \frac{\prod_0^{n_0} (\omega + \gamma_\nu)}{2\pi i} \int_{C_{n_0}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=0}^{n_0} (\zeta + \omega + \gamma_\nu)}. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\max_{x \in [0, 1]} \frac{\prod_0^{n_0} (\omega + \gamma_\nu)}{2\pi i} \int_{C_{n_0}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=0}^{n_0} (\zeta + \omega + \gamma_\nu)} = 1;$$

значит

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \omega_n(x) \right| < \varepsilon \omega x^{-\omega}.$$

Составим теперь

$$|x^w \varphi(x)| < \left| x^w \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n \omega_n(x) \right| + \omega \varepsilon.$$

При достаточно малом $x > 0$ и фиксированном $n_0 = n_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|x^w \varphi(x)| < \varepsilon_1.$$

Это значит, что

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^w \varphi(x) = 0.$$

Доказательство теоремы. Обозначим

$$a_n = \frac{\prod_0^{n-1} (\omega + \gamma_\nu)}{\prod_1^n \gamma_\nu} A = c_n.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^n (\gamma_\nu + \omega)} = 0.$$

Составим теперь функцию

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)},$$

где

$$\psi(x) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_0^{n-1} (\omega + \gamma_\nu)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = Ax^{-\omega},$$

при $n=0$, $\prod_0^{n-1} (\omega + \gamma_\nu)$ равно 1.

С другой стороны, согласно лемме

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^w \Phi(x) = 0.$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [x^w \varphi(x) - x^w \psi(x)] = 0,$$

или

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^w \varphi(x) = A.$$

Теорема 8. Если при $x \in (0, 1]$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \gamma_n = A$, где A — некоторое число, то

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x)}{\ln \frac{1}{x}} = A.$$

Лемма. Если при $x \in (0, 1]$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \gamma_n = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x)}{\ln \frac{1}{x}} = 0.$$

Для доказательства леммы заметим, что при $x \in (0, 1]$ справедливо равенство:

$$-\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_n)} \quad (12)$$

где $x > 0$ — произвольное число.

Действительно, при $\operatorname{Re}(z) > x > 0$, где x — произвольное число, справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_n}{\prod_1^n (\zeta + \gamma_n)} &= \frac{1}{\zeta(\zeta + \gamma_1)} + \frac{\gamma_1}{\zeta(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} + \dots \\ &= \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{\zeta + \gamma_1} + \frac{\gamma_1}{(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} + \dots \right) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta^2}; \end{aligned}$$

с другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^2} = -\ln x.$$

Этим справедливость равенства (12) доказана.

Составим теперь

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n \omega_n(x) + \sum_{n_0+1}^{\infty} a_n \omega_n(x),$$

где $n_0 = n_0(\varepsilon)$ определено из условия

$$|a_n \gamma_n| < \varepsilon, \text{ когда } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &< \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n \omega_n(x) \right| + \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \omega_n(x) < \\ &< A(n_0) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_v)}, \end{aligned}$$

где $\prod_1^{n-1} \gamma_v$ при $n=0$ равно 1.

Таким образом

$$|\varphi(x)| < A(n_0) + \varepsilon \ln \frac{1}{x},$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\varphi(x)|}{\ln \frac{1}{x}} = A(n_0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\varphi(x)|}{\ln \frac{1}{x}} = 0.$$

Доказательство теоремы. Обозначим $c_n = a_n - \frac{A}{\gamma_n}$, тогда очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \gamma_n = 0$, и рассмотрим

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где

$$\psi(x) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_1^{n-1} \gamma_v}{2\pi i} \int_{\zeta_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_v)} = A \ln \frac{1}{x}.$$

Согласно доказанной выше лемме имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x)}{\ln \frac{1}{x}} = 0;$$

значит

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi(x)}{\ln \frac{1}{x}} = A.$$

Этим теорема доказана.⁴

Выясним теперь — как изменится формулировка теоремы 8, если там считать, что $\omega < 0$.

Теорема 9. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^n (\gamma_\nu - \omega)} = A$, где $\gamma_1 > \omega > 0$ — произвольное число, и

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \quad x \in (0, 1],$$

то сходится ряд $\varphi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\omega} = A.$$

Лемма. Если $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x)$, где $x \in (0, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_0^n (\gamma_\nu - \omega)} = 0, \quad \text{где } 0 < \omega < \gamma_1,$$

то сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \varphi(0)$, и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\omega} = 0.$$

Обозначим $\sigma_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$.

Согласно условию леммы, начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(\varepsilon)$ и для всех $n \geq n_0$ будем иметь:

$$|\sigma_n| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\prod_1^{k-1} (\gamma_v - \omega)}{\prod_1^k \gamma_v} = \varepsilon \prod_1^n \frac{\gamma_v - \omega}{\gamma_v} \left(\frac{1}{\gamma_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1} - \omega}{\gamma_{n+1} \gamma_{n+2}} + \dots \right) =$$

$$= \varepsilon \prod_{v=1}^n \frac{\gamma_v - \omega}{\gamma_v} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Это значит, что ряд $\varphi(0) = \sum_0^{\infty} a_n$ сходится.

Применим теперь к ряду

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x).$$

преобразование Абеля

$$\sum_{s=p}^q b_s c_s = c_p \sum_{s=p}^{\infty} b_s + \sum_{s=p+1}^q (c_s - c_{s-1}) \sum_{v=s}^{\infty} b_v - c_q \sum_{s=q+1}^{\infty} b_s.$$

Получаем

$$\sum_{n=0}^m a_n \omega_n(x) = \sigma_0^* + \sum_{n=0}^m \sigma_n [\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)] - \sigma_m \omega_m(x).$$

Заметив, что $\sigma_0^* = \varphi(0)$, переходя к пределу, когда $m \rightarrow \infty$ $x \in (0, 1)$, будем иметь

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n [\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)].$$

Заметим также, что

$$\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x) = -\frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^{n+1} (\zeta + \gamma_v)},$$

значит

$$\varphi(x) - \varphi(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \frac{\prod_1^n \gamma_v}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_1^{n+1} (\zeta + \gamma_v)}.$$

Обозначим $\zeta = \zeta' - \gamma_1$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= -x^{\tau_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=2}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)} = \\ &= -x^{\tau_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_1)} \cdot \frac{\prod_{\nu=2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_1)}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=2}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)}, \end{aligned}$$

где простой контур C_{n+1} — охватывает окрестности всех нулей знаменателя подынтегральной функции соответствующего интеграла.

Обозначим теперь

$$\sigma_n^* = \sigma_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_1)}, \quad \omega_n^*(x) = \frac{\prod_{\nu=2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_1)}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_1)}.$$

Начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(\varepsilon)$ и для всех $n \geq n_0$ будет

$$|\sigma_n^*| = \left| \sigma_n \frac{\prod_1^n \gamma_\nu}{\prod_{\nu=2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_1)} \right| < \varepsilon \frac{\prod_1^n (\gamma_\nu - \omega)}{\prod_{\nu=2}^{n+1} (\gamma_\nu - \gamma_1)} = \varepsilon \frac{\prod_1^n (\gamma_\nu^* + \omega^*)}{\prod_2^{n+1} \gamma_\nu^*},$$

где $\omega^* = \gamma_1 - \omega$, $\gamma_\nu^* = \gamma_\nu - \gamma_1$.

Если теперь обозначим

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{\tau_1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^* \omega_n^*(x),$$

то к ней применима теорема 7 с $A = 0$, это значит, что

$$\Phi(x) x^{\omega^*} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{\tau_1}} x^{\omega^*} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{\tau_1}} x^{-\omega + \gamma_1} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{\omega}} \rightarrow 0,$$

когда $x \rightarrow 0+$.

Доказательство теоремы 9. Достаточно составить

$$c_n = a_n - \frac{\prod_1^{n-1} (\gamma_\nu - \omega)}{\prod_1^n \gamma_\nu} A, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

при $n = 0$, $\prod_0^{n-1} (\gamma_\nu - \omega) = 1$, и рассмотреть функцию

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n(x).$$

Коэффициенты c_n удовлетворяют условиям леммы, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \frac{\prod_0^n \gamma_\nu}{\prod_0^{n-1} (\gamma_\nu - \omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\prod_0^n \gamma_\nu}{\prod_0^{n-1} (\gamma_\nu - \omega)} a_n - A \right) = 0.$$

Это значит, что

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Psi(x) - \Psi(0)}{x^\omega} = 0.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \varphi(x) - \psi(x), \\ \psi(x) &= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_0^{n-1} (\gamma_\nu - \omega)}{\prod_0^n \gamma_\nu} \cdot \frac{\prod_0^n \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_0^{n-1} (\gamma_\nu - \omega)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_0^n (\zeta + \gamma_\nu)} = \frac{\Gamma A}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \omega} = Ax^\omega, \end{aligned}$$

и $\psi(0) = 0$.

Таким образом

$$\frac{\psi(x) - \psi(0)}{x^\omega} = A,$$

следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Psi(x) - \Psi(0)}{x^\omega} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\omega} - A \right) = 0.$$

или

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\omega} = A.$$

(Окончание в следующем номере)

Г. А. Амбарцумян

К энтропии цепей Маркова

В математической и технической литературе встречаются различные определения энтропии цепей Маркова. В первой части настоящей работы устанавливается связь между этими определениями для сложных цепей. Во второй части—обобщается предельная теорема Хинчина [1] для простых цепей, на сложные цепи Маркова любого порядка.

1. Различные определения энтропии для сложных цепей Маркова и связь между ними

1. Рассмотрим опыты, образующие стационарную цепь Маркова порядка μ с конечным числом возможных состояний при каждом опыте:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

соответственно с вероятностями

$$p(1), p(2), \dots, p(n),$$

где

$$p(\alpha) = P(A_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

есть вероятность состояния A_α и

$$\sum_{\alpha=1}^n p(\alpha) = 1.$$

Обозначим

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(A_{\alpha_{m+1}}) = p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\alpha_{m+1})$$

вероятность состояния $A_{\alpha_{m+1}}$, при $(m+1)$ -ом опыте, если известно, что при предыдущих m опытах имели место состояния: $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_m}$.

Для цепи порядка μ будут иметь место равенства:

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}}(\alpha_{\mu+2}) = p_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{\mu+1}}(\alpha_{\mu+2})$$

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+2}}(\alpha_{\mu+3}) = p_{\alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{\mu+2}}(\alpha_{\mu+3})$$

и вообще при $m \geq \mu$:

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\alpha_{m+1}) = p_{\alpha_{m-\mu+1}, \alpha_{m-\mu+2}, \dots, \alpha_m}(\alpha_{m+1}).$$

В частности для независимых опытов:

$$p_{a_1 a_2 \dots a_m}(\alpha_{m+1}) = p(\alpha_{m+1}),$$

для простой цепи:

$$p_{a_1 a_2 \dots a_m}(\alpha_{m+1}) = p_{a_m}(\alpha_{m+1}),$$

для двусложной цепи:

$$p_{a_1 a_2 \dots a_m}(\alpha_{m+1}) = p_{a_{m-1}, a_m}(\alpha_{m+1})$$

и т. д.

Введем в рассмотрение величины:

$$H_0 = - \sum_{\alpha_1=1}^n p(\alpha_1) \cdot \lg p(\alpha_1)$$

$$H_1 = - \sum_{\alpha_1=1}^n \sum_{\alpha_2=1}^n p(\alpha_1) p_{\alpha_1}(\alpha_2) \cdot \lg p_{\alpha_1}(\alpha_2)$$

$$H_2 = - \sum_{\alpha_1=1}^n \sum_{\alpha_2=1}^n \sum_{\alpha_3=1}^n p(\alpha_1) \cdot p_{\alpha_1}(\alpha_2) \cdot p_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3) \lg p_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3)$$

и вообще

$$H_\mu = - \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_\mu} \sum_{\alpha_{\mu+1}} p(\alpha_1) p_{\alpha_1}(\alpha_2) \dots$$

$$\dots p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}) \lg p_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}). \quad (1.1)$$

Величина H_μ называется одношаговой энтропией цепи Маркова; очевидно, что для независимых опытов

$$H_\mu = H_{\mu-1} = \dots = H_0,$$

для простой цепи

$$H_\mu = H_{\mu-1} = \dots = H_1,$$

для двусложной цепи

и т. д.

$$H_\mu = H_{\mu-1} = \dots = H_2$$

2. Объединим r опытов и рассмотрим соответствующую конечную схему с состояниями:

$$A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \dots A_{\alpha_r}$$

и соответствующими вероятностями:

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

Величину энтропии этой схемы, осередненную по числу опытов

$$H_r = - \frac{1}{r} \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_r} p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \lg p(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \quad (1.2)$$

будем называть осередненной одношаговой энтропией.

Для цепи Маркова порядка μ при $r > \mu$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
H_r = & -\frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_r} p(a_1, a_2, \dots, a_r) \lg p(a_1) - \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_r} p(a_1, a_2, \dots, a_r) \lg p_{a_1}(a_2) - \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_r} p(a_1, a_2, \dots, a_r) \lg p_{a_1, a_2}(a_3) - \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_r} p(a_1, a_2, \dots, a_r) \lg p_{a_1, a_2, \dots, a_{\mu}}(a_{\mu+1}) - \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_r} p(a_1, a_2, \dots, a_r) \lg p_{a_2, a_3, \dots, a_{\mu+1}}(a_{\mu+1}) - \\
& \dots \dots \dots \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_r} p(a_1, a_2, \dots, a_r) \lg p_{a_{r-\mu}, a_{r-\mu+1}, \dots, a_{r-2}, a_{r-1}}(a_r) = \\
= & -\frac{1}{r} \sum_{a_1} p(a_1) \lg p(a_1) - \frac{1}{r} \sum_{a_1} \sum_{a_2} p(a_1) p_{a_1}(a_2) \lg p_{a_1}(a_2) - \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} p(a_1) \sum_{a_2} p_{a_1}(a_2) \sum_{a_3} p_{a_1, a_2}(a_3) \lg p_{a_1, a_2}(a_3) - \\
& \dots \dots \dots \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_1} p(a_1) \sum_{a_2} p_{a_1}(a_2) \sum_{a_3} p_{a_1, a_2}(a_3) \dots \\
& \dots \sum_{a_{\mu+1}} p_{a_1, a_2, \dots, a_{\mu}}(a_{\mu+1}) \lg p_{a_1, a_2, \dots, a_{\mu}}(a_{\mu+1}) - \\
& \quad -\frac{1}{r} \sum_{a_2} p(a_2) \sum_{a_3} p_{a_2}(a_3) \dots \\
& \dots \sum_{a_{\mu+2}} p_{a_2, a_3, \dots, a_{\mu+1}}(a_{\mu+2}) \lg p_{a_2, a_3, \dots, a_{\mu+1}}(a_{\mu+2}) - \\
& \dots \dots \dots \\
& -\frac{1}{r} \sum_{a_{r-\mu}} p(a_{r-\mu}) \sum_{a_{r-\mu+1}} p_{a_{r-\mu}}(a_{r-\mu+1}) \dots \\
& \dots \sum_{a_r} p_{a_{r-\mu}, a_{r-\mu+1}, \dots, a_{r-1}}(a_r) \lg p_{a_{r-\mu}, a_{r-\mu+1}, \dots, a_{r-1}}(a_r)
\end{aligned}$$

или окончательно

$$\bar{H}_r = \frac{1}{r} [H_0 + H_1 + H_2 + \dots + H_{r-1} + (r - \mu) H_\mu] \quad (1.3)$$

При $r \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{H}_r = H_\mu. \quad (1.4)$$

Таким образом одношаговую энтропию цепи Маркова, порядка μ можно рассматривать, как предел осередненной одношаговой энтропии, когда число опытов стремится к бесконечности.

3. Допустим, что в цепи Маркова порядка μ при первых μ опытах имели место события

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_\mu};$$

составим энтропию конечной схемы, представляющей объединение следующих за этими опытами, r опытов, т. е. величину:

$$H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}^{(r)} = - \sum_{\alpha_{\mu+1}} \sum_{\alpha_{\mu+2}} \dots \dots \sum_{\alpha_{\mu+r}} p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(\alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_{\mu+r}) \lg p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(\alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_{\mu+r});$$

тогда величина

$$H^{(r)} = \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1) \sum_{\alpha_2} p_{\alpha_1}(\alpha_2) \dots \dots \sum_{\alpha_\mu} p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu-1}}(\alpha_\mu) H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}^{(r)} \quad (1.5)$$

называется r -шаговой энтропией цепи Маркова порядка μ ; очевидно $H^{(1)} = H_\mu$.

Осередненная одношаговая энтропия $\bar{H}_r (r > \mu)$ выразится через многошаговую энтропию следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{H}_r &= - \frac{1}{r} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \sum_{\alpha_r} p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \lg p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \\ &= - \frac{1}{r} \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1) \lg p(\alpha_1) \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_r} p_{\alpha_1}(\alpha_2, \dots, \alpha_r) - \\ &- \frac{1}{r} \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1) \sum_{\alpha_2} p_{\alpha_1}(\alpha_2) \lg p_{\alpha_1}(\alpha_2) \sum_{\alpha_3} \dots \sum_{\alpha_r} p_{\alpha_1 \alpha_2}(\alpha_3, \dots, \alpha_r) - \end{aligned}$$

* Величина $H^{(r)}$ зависит от μ , но т. к. мы здесь будем рассматривать ее при одном и том же μ , то эту зависимость от μ отмечать не будем, чтобы не усложнять обозначений.

Согласно формуле (1.3), имеем с другой стороны:

$$\bar{H}_{r+\mu} = \frac{1}{r+\mu} (H_0 + H_1 + H_2 + \dots + H_{\mu-1}) + \frac{r}{r+\mu} H_{\mu}$$

следовательно

$$H^{(r)} = rH_{\mu} \quad (1.7)$$

Этот результат, другим методом при $\mu = 1$, был получен в работе [1].

II. Предельная теорема для энтропии сложной цепи Маркова порядка μ

Предельная теорема Хинчина [1] для энтропии простой цепи Маркова, легко обобщается на сложные цепи. Допустим, что сложная цепь Маркова порядка μ подчиняется закону больших чисел, т. е. при произвольных $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и достаточно большом s :

$$P \left\{ \left| \frac{m_i}{s} - p(i) \right| > \delta \right\} < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где m_1, m_2, \dots, m_n числа попаданий соответственно в состояния A_1, A_2, \dots, A_n . Всякий возможный результат s опытов может быть записан в виде «цепочки C »

$$C = A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}$$

где числа k_1, k_2, \dots, k_s числа из $1, 2, \dots, n$. Вероятность осуществления цепочки C будет:

$$P(C) = p(k_1) p_{k_1}(k_2) p_{k_1 k_2}(k_3) \dots \\ \dots p_{k_1 k_2 \dots k_{\mu}}(k_{\mu+1}) p_{k_2 \dots k_{\mu+1}}(k_{\mu+2}) \dots p_{k_s - \mu, k_s - \mu + 1, \dots, k_s - 1}(k_s),$$

которую можно записать в виде:

$$P(C) = p(k_1) p_{k_1}(k_2) \dots p_{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}}(k_{\mu}) \prod_{\alpha_1, \alpha_2} \dots \\ \dots \prod_{\alpha_{\mu+1}} [p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu}}(\alpha_{\mu+1})]^{m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}}}, \quad (2.1)$$

где числа $m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}}$ представляют число случаев, в написанном произведении для $P(C)$, при котором:

$$k_m = \alpha_1, k_{m+1} = \alpha_2, \dots, k_{m+\mu} = \alpha_{\mu+1}.$$

Теорема: при произвольных $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ и достаточно большом s , все цепочки C могут быть разбиты на две группы, обладающие свойствами:

1) вероятность $P(C)$ любой цепочки первой группы удовлетворяет неравенству:

$$\left| \frac{\lg \frac{1}{P(C)}}{s} - H_{\mu} \right| < \eta$$

или

$$a^{-s(H+\eta)} < P(C) < a^{-s(H-\eta)}$$

2) сумма вероятностей всех цепочек второй группы меньше чем ε .

Доказательство. Разобьем все цепочки C длины s на две группы: цепочка принадлежит первой группе, если она возможна, т. е. $P(C) > 0$ и если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}$ ($1 \leq \alpha_l \leq n$) выполняются неравенства:

$$|m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} - sp(\alpha_1)p_{\alpha_1}(\alpha_2) \dots p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1})| < s\delta; \quad (2.2)$$

ко второй группе отнесем все остальные цепочки. Докажем, что это разбиение при достаточно большом s удовлетворяет условиям теоремы. Допустим сначала, что цепочка s первой группы; тогда

$$\begin{aligned} m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} &= sp(\alpha_1)p_{\alpha_1}(\alpha_2)p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}) + \\ &+ s\delta\theta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} \\ |\theta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}}| &< 1. \end{aligned}$$

Эти выражения для $m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}}$ внесем в (2.1), причем требование возможности данной цепочки, необходимо, влечет за собой $m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} = 0$ при $p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}) = 0$, вследствие чего в произведении (2.1) мы должны ограничиться множителями для которых

$$p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}) > 0,$$

что будем отмечать * при произведениях. Имеем:

$$P(C) = p(k_1)p_{k_1}(k_2) \dots p_{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}}(k_\mu).$$

$$\prod_{\alpha_1} \prod_{\alpha_2} \dots \prod_{\alpha_{\mu+1}}^* [p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1})]^{sp(\alpha_1)p_{\alpha_1}(\alpha_2) \dots p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1})} + s\delta\theta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}}$$

или

$$\begin{aligned} \lg \frac{1}{P(C)} &= -\lg p(k_1) - \lg p_{k_1}(k_2) - \dots - \lg p_{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}}(k_\mu) - \\ &- s \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_{\mu+1}}^* p(\alpha_1)p_{\alpha_1}(\alpha_2) \dots p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}) \lg p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}) - \\ &- s\delta \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_{\mu+1}}^* \theta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} \lg p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1}); \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\lg \frac{1}{P(C)}}{s} - H_p &= \frac{1}{s} \left(\lg \frac{1}{p(k_1)} + \lg \frac{1}{p_{k_1}(k_2)} + \dots + \lg \frac{1}{p_{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}}(k_\mu)} \right) + \\ &+ \delta \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_{\mu+1}}^* \theta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} \lg \frac{1}{p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}(\alpha_{\mu+1})} \end{aligned}$$

и

$$\left| \frac{\lg \frac{1}{P(C)}}{s} - H_{\mu} \right| < \frac{1}{s} \left(\lg \frac{1}{p(k_1)} + \lg \frac{1}{p_{k_1}(k_2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \lg \frac{1}{p_{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}}(k_{\mu})} \right) + \delta \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_{\mu+1}} \lg \frac{1}{p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu}}(\alpha_{\mu+1})}$$

и следовательно при достаточно больших s :

$$\left| \frac{\lg \frac{1}{P(C)}}{s} - H_{\mu} \right| < \eta.$$

Рассмотрим теперь сумму вероятностей всех цепочек второй группы; заметим, что невозможные цепочки могут не учитываться, т. к. вероятности их равны нулю; здесь нужно оценить сумму вероятностей тех цепочек, для которых хотя бы при одном наборе индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu+1}$ нарушается неравенство (2.2), а она очевидно меньше чем

$$\sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_{\mu+1}} P \{ |m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1}} - sp(\alpha_1) p_{\alpha_1}(\alpha_2) \dots p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu}}(\alpha_{\mu+1})| \geq s\delta \}$$

Зафиксируем индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu+1}$; в силу закона больших чисел — при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и достаточно большом s :

$$P \left\{ \left| m_{\alpha_1} - sp(\alpha_1) \right| < \frac{\delta}{\mu+1} s \right\} > 1 - \varepsilon; \quad (2.3)$$

если неравенство в скобках выполнено, то m_{α_1} достаточно велико и поэтому в силу закона больших чисел:

$$P \left\{ \left| \frac{m_{\alpha_1 \alpha_2}}{m_{\alpha_1}} - p_{\alpha_1}(\alpha_2) \right| < \frac{\delta}{\mu+1} \right\} > 1 - \varepsilon$$

или

$$P \left\{ \left| m_{\alpha_1 \alpha_2} - m_{\alpha_1} p_{\alpha_1}(\alpha_2) \right| < \frac{\delta}{\mu+1} m_{\alpha_1} < \frac{\delta}{\mu+1} s \right\} > 1 - \varepsilon; \quad (2.4)$$

при выполнении неравенства в скобках, имеем точно также

$$P \left\{ \left| m_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - m_{\alpha_1 \alpha_2} p_{\alpha_1 \alpha_2}(\alpha_3) \right| < \frac{\delta}{\mu+1} s \right\} > 1 - \varepsilon; \quad (2.5)$$

аналогично рассуждая получим еще, ряд неравенств:

$$P \left\{ \left| m_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} - m_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} p_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(\alpha_4) \right| < \frac{\delta}{\mu+1} s \right\} > 1 - \varepsilon \quad (2.5)$$

$$\dots \dots \dots \quad (2.6)$$

$$P \left\{ \left| m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu}} - p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu-1}}(\alpha_{\mu}) m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu-1}} \right| < \frac{\delta}{\mu+1} s \right\} > 1 - \varepsilon$$

ношаговая энтропия, а $H^{(s)}$, s —шаговая энтропия, соответствующие рассматриваемой цепи Маркова порядка μ .

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 21 I 1958

Փ. 2. Համբարձումյան

ՄԱՐԿՈՎԻ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ԷՆՏՐՈՊԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության առաջին մասում ընդհանրացվում են էնտրոպիայի տարրեր, աեսակի գաղափարները՝ Մարկովի բարդ շղթաների համար, և ստացվում են այդ տարրեր զաղափարների կապերը միմյանց հետ: Երկրորդ մասում էնտրոպիայի վերաբերյալ սահմանային թևորևմը Մարկովի պարզ շղթաների համար ընդհանրացված է՝ Մարկովի ցանկացած կարգի բարդ շղթաների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей. Усп. мат. наук, том. VIII, вып. 3, (1953).

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

Приложение способа двумерных интегральных уравнений к изучению ползучести сферической оболочки в случае зависимости физических параметров материала от температуры и времени

Способ двумерных интегральных уравнений наиболее целесообразно применять при решении задач, связанных с анизотропными и неоднородными упруго-ползучими (наследственными) телами. Впервые он был применен автором [1] при рассмотрении деформации полой сферы, обладающей анизотропией, с учетом влияния фактора времени. Этот способ состоит в приведении интегро-дифференциального уравнения для перемещения к соответствующему виду, которое затем с помощью двух последовательных подстановок приводится к двумерному интегральному уравнению специального вида, могущему, в частном случае, вырождаться в ординарное интегральное уравнение. Используя результаты решения этого уравнения, а также двух ординарных интегральных уравнений, возникающих в связи с появлением двух произвольных функций времени, устанавливается характер изменения напряжений во времени.

Эксперименты показывают, что влияние температуры на параметры, определяющие упруго-мгновенную и наследственную составляющие деформации, значительно усиливаются с повышением температуры. Так, например, для стали при повышении температуры испытания с 25 до 450° модули E и G падают на 20% [2]. Практическое значение изменения упомянутых параметров при значительных изменениях температуры весьма велико. При этом объемное расширение, происходящее в результате повышения температуры на T градусов, не пропорционально T . Поэтому учет этих особенностей при расчетах деталей машин, работающих в условиях широкого диапазона изменений температур, обязателен.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о напряжениях в симметрично нагретой сферической оболочке с учетом зависимости коэффициентов Ламе и ядер релаксации от температуры тела, при изменении последней в достаточно широком интервале.

Итак, пусть замкнутая сферическая оболочка с внешним и внутренним радиусами a и b , свободна, в начальный момент времени, от

внешних сил и начальных напряжений при равномерно-распределенной температуре.

Пусть далее, начиная с некоторого момента времени температура в сферической оболочке становится неравномерно-распределенной, причем предполагается, что температура $T = T(r, t)$ известна. Тогда в ней возникнут определенной величины напряжения и деформации.

Определим радиальное перемещение и напряжения, возникающие в упомянутом теле с учетом изменяемости упругих постоянных и характеристик релаксации от температуры и времени.

Компоненты напряжения в сферических координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_r = \lambda_1 \theta + 2\mu_1 \frac{\partial u}{\partial r} - f(T) - \\ - \int_{t_0}^t \left[\varphi_1(t, \tau; r) \theta(r, \tau) + 2\psi_1(t, \tau; r) \frac{\partial u}{\partial r} \right] d\tau; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \lambda_1 \theta + 2\mu_1 \frac{u}{r} - f(T) - \\ - \int_{t_0}^t \left[\varphi_1(t, \tau; r) \theta(r, \tau) + 2\psi_1(t, \tau; r) \frac{u(r, \tau)}{r} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + \frac{2u(r, t)}{r}$, $u(r, t)$ — перемещение.

Здесь $\lambda_1(r, t) = \lambda [T(r, t); r]$, $\mu_1(r, t) = \mu [T(r, t), t]$ — коэффициенты Ламе, $f(T) = \alpha_1(r, t) \beta_1(r, t) T(r, t) = \alpha [T(r, t), t] \beta [T(r, t), t] \cdot T(r, t)$ — объемное расширение, $\alpha_1(r, t)$ — коэффициент линейного расширения, $\beta_1 = 3\lambda_1 + 2\mu_1$, $\varphi_1(t, \tau; r) = \varphi [t, \tau; T(r, \tau)]$, $\psi_1(t, \tau; r) = \psi [t, \tau; T(r, \tau)]$ — ядра релаксации, поскольку, по предположению, температура сферической оболочки считается известной функцией радиуса-вектора r и времени t . Формулы (1) и (2) представляют собою обобщение соответствующих зависимостей Вольтерра [3].

Подставляя σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ из (1) и (2) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0,$$

получим исходное интегро-дифференциальное уравнение относительно перемещения u , которое представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] - \frac{4}{r} \frac{\partial \mu_1}{\partial r} u - \frac{\partial f_1}{\partial r} = \\ = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)] \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right\} d\tau - \end{aligned} \quad (3)$$

$$- \frac{4}{r} \int_{t_0}^t \frac{\partial \psi_1(t, \tau; r)}{\partial r} u(r, \tau) d\tau.$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] = z(r, t). \quad (4)$$

Из (4) следует

$$u(r, t) = \frac{1}{3r^2} \int_a^r (r^3 - \rho^3) z(\rho, t) d\rho + c_1(t)r + \frac{c_2(t)}{r^2} \quad (5)$$

где $f_1 = f[T(r, t)]$; $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — произвольные функции времени, которые определяются из условий на границе

$$\left\{ \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu_1 \frac{\partial u}{\partial r} - f_1 - \int_{t_0}^t \left[\varphi_1(t, \tau; r) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\psi_1(t, \tau; r) \frac{\partial u}{\partial r} \right] d\tau \right\}_{r=a}^{r=b} = 0, \quad (6)$$

после того, как будет найдено $z(r, t)$.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (3), получим после соответствующих преобразований, двумерное интегральное уравнение для определения $z(r, t)$:

$$\begin{aligned} z(r, t) + \int_a^r k_1(t; r, \rho) z(\rho, t) d\rho - \int_{t_0}^t k_2(t, \tau; r) z(r, \tau) d\tau = \\ = \int_{t_0}^t \int_a^r k_3(t, \tau; r, \rho) z(\rho, \tau) d\rho d\tau + F(r, t; c_1, c_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$k_1(t, r, \rho) = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\lambda_1 + 2\mu_1) - \frac{4}{3r^3} (r^3 - \rho^3) \frac{\partial \mu_1}{\partial r} \right],$$

$$k_2(t, \tau; r) = \frac{\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)}{\lambda_1 + 2\mu_1},$$

$$\begin{aligned} k_3(t, \tau; r, \rho) = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)] - \right. \\ \left. - \frac{4}{3r^3} (r^3 - \rho^3) \frac{\partial \psi_1(t, \tau; r)}{\partial r} \right\}, \end{aligned}$$

$$F(r, t; c_1, c_2) = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left\{ \frac{4}{r} \left(c_1 r + \frac{c_2}{r^2} \right) \frac{\partial \mu_1}{\partial r} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4}{r} \int_{t_0}^t \left[c_1(\tau) r + \frac{c_2(\tau)}{r^2} \right] \frac{\partial \psi_1(t, \tau; r)}{\partial r} d\tau - 3c_1 \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_1 + 2\mu_1) + \\
 & + 3 \int_{t_0}^t c_1(\tau) \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi_1(t, \tau; r)] d\tau \Big\}.
 \end{aligned}$$

Итак, задача свелась к решению уравнения (7), усложненного вида, благодаря наличию в нем, наряду с двумерным, двух различных ординарных интегральных членов, содержащих неизвестную функцию.

Это уравнение может быть решено либо способом Вольтерра [4], либо непосредственно, методом последовательных приближений.

Применим первый способ, поскольку, при этом, вопрос об исследовании сходимости последовательных приближений отпадает, ибо решение задачи будет связано с нахождением только резольвент соответствующих ядер.

Этот способ состоит в том, что с помощью двух специальных подстановок, интегральное уравнение типа (7) можно привести к двумерному интегральному уравнению, не содержащему ординарные интегралы.

Пользуясь им, опуская промежуточные выкладки окончательно будем иметь

$$w(r, t) = \int_{t_0}^t \int_a^r Q(t, \tau; r, \rho) w(\rho, \tau) d\tau d\rho + F(r, t; c_1, c_2), \quad (8)$$

где

$$Q(t, \tau; r, \rho) = Q_1(t, \tau; r, \rho) + \int_{\tau}^t Q_1(t, \tau_1; r, \rho) R_2(\tau_1, \tau; \rho) d\tau_1,$$

$$\begin{aligned}
 Q_1(t, \tau; r, \rho) &= k_3(t, \tau; r, \rho) - k_2(t, \tau; r) R_1(\tau; r, \rho) - \\
 & - \int_{\tau}^r k_2(t, \tau; r, \rho_1) R_1(\tau; \rho_1, \rho) d\rho_1,
 \end{aligned}$$

где $R_1(t; r, \rho)$ — резольвента ядра $k_1(t; r, \rho)$,

$R_2(t, \tau; r)$ — резольвента ядра $k_2(t, \tau; r)$.

Функции $z(r, t)$ и $w(r, t)$ связаны между собою следующим соотношением

$$\begin{aligned}
 z(r, t) &= w(r, t) + \int_{t_0}^t R_2(t, \tau; r) w(r, \tau) d\tau - \\
 & - \int_a^r R_1(t, r, \rho) w(\rho, t) d\rho -
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$- \int_a^r \int_a^t R_1(t; r, \rho) R_2(t, \tau; \rho) w(\rho, \tau) d\tau d\rho.$$

Решение полученного интегрального уравнения (8) находится обычным путем, методом резольвенты.

Будем иметь

$$w(r, t) = F(r, t; c_1, c_2) + \int_a^t \int_a^r R(t, \tau; r, \rho) F(\rho, \tau; c_1, c_2) d\tau d\rho, \quad (10)$$

где $R(t, \tau; r, \rho)$ — резольвента ядра $Q(t, \tau; r, \rho)$.

Подставляя последовательно (10) в (9) и далее в (5), получим искомое выражение для перемещения u , которое будет зависеть от двух произвольных функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Для определения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ нужно использовать следующие соотношения

$$\begin{aligned} u(a, t) &= c_1 a + \frac{c_2}{a^2}, \\ u(b, t) &= \frac{1}{3b^2} \int_a^b (b^3 - \rho^3) z(\rho, t) d\rho + c_1 b + \frac{c_2}{b^2}, \\ \frac{\partial u(a, t)}{\partial r} &= c_1 - \frac{2c_2}{a^3}, \\ \frac{\partial u(b, t)}{\partial r} &= \frac{1}{3} \int_a^b \left(1 + \frac{2\rho^3}{b^3}\right) z(\rho, t) d\rho + c_1 - \frac{2c_2}{b^3} \end{aligned} \quad (11)$$

где $z(r, t)$ определяется из соотношения (9) с учетом (10).

Подставляя (11) в (6), получим систему двух обыкновенных интегральных уравнений, из которых определяются функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Эта система имеет единственное решение.

2. Можно указать два случая, когда определение перемещения и напряжений в рассматриваемом теле сводится к решению обыкновенных интегральных уравнений.

Первый случай.

Предположим, что $\frac{\partial \mu_1}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \phi_1(t, \tau; r)}{\partial r} = 0$.

Тогда будем иметь

$$\theta(r, t) = \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} + \int_a^t \frac{\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi(t, \tau)}{\lambda_1 + 2\mu} \theta(r, \tau) d\tau, \quad (12)$$

Определяя $\theta(r, t)$ из (12), получим

$$\theta(r, t) = \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} + \int_a^t P(t, \tau; r) \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} d\tau, \quad (13)$$

где $P(t, \tau, r)$ — резольвента ядра $\frac{\varphi_1(t, \tau; r) + 2\psi(t, \tau)}{\lambda_1 + 2\mu}$.

Так как объемное расширение $b = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)$, то из (13) следует

$$u = \int_a^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} d\rho + \int_a^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 d\rho \int_{t_0}^t P(t, \tau; \rho) \frac{f_1 + c_1}{\lambda_1 + 2\mu} d\tau + \frac{c_2}{r^2}$$

Неизвестные функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ определяются из двух уравнений, получающихся в результате использования условий (6). Зная перемещение u , легко получить σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$.

Второй случай.

Предположим, что $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_0 e^{-mT}$, $\varphi_1(t, \tau; r) = \psi_1(t, \tau; r) = \varphi_0(t, \tau) e^{-mT}$, где m — постоянная для данного материала, λ_0 и $\varphi_0(t, \tau)$ — коэффициенты Ламе и ядро релаксации при $T = T_0$, где T_0 — комнатная температура. Температура T попрежнему зависит от r и t .

Уменьшение физико-механических характеристик пропорционально температурному множителю, экспоненциально убывающему с ростом температуры, экспериментально подтверждается [5].

Будем иметь

$$v(r, t) - T_1 = \int_{t_0}^t \frac{\varphi_0(t, \tau)}{\lambda_0} v(r, \tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$v = 3 \frac{\partial b}{\partial r} - 3 m \theta \frac{\partial T}{\partial r} + 4 \frac{m}{r} u \frac{\partial T}{\partial r}, \quad T_1 = 5 \left[\frac{\partial}{\partial r} (\alpha_1 T) - m \alpha_1 T \frac{\partial T}{\partial r} \right].$$

Из (14) следует

$$3 \frac{\partial b}{\partial r} - 3 m \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{4 m}{4} u \frac{\partial T}{\partial r} = \Phi(r, t). \quad (15)$$

Здесь $\Phi(r, t) = T_1 + \int_{t_0}^t P_1(t, \tau) T_1 d\tau$ есть обобщенная температура, где

$P_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $\varphi_0(t, \tau)/\lambda_0$.

Уравнение (15) по отношению к u по существу дифференциальное (ибо в нем $b = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)$), которое при отбрасывании температурного последующего слагаемого, переходит в уравнение для соответствующей задачи идеально упругого тела.

Поскольку решение этого уравнения неизвестно, то воспользоваться выведенным нами в [6] правилом перехода от известного решения задачи без последствия (ползучести) к решению ее с учетом такового, невозможно.

Поэтому продолжим решение задачи далее.

С помощью подстановки (4), уравнение (15) приводится к следующему

$$z(r, t) - \int_a^r k(t; r, \rho) z(\rho, t) d\rho = g(r, t), \quad (16)$$

где

$$k(t; r, \rho) = \frac{m}{9} \left(5 + \frac{4\rho^3}{r^3} \right) \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$g(r, t) = \frac{m}{3} \left(5c_1 - \frac{4c_2}{r^3} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \Phi(r, t).$$

Определяя $z(r, t)$ из уравнения (16), получим

$$z(r, t) = g(r, t) + \int_a^r R_3(t; r, \rho) g(\rho, t) d\rho, \quad (17)$$

где $R_3(t; r, \rho)$ — резольвента ядра $k(t; r, \rho)$.

Подставляя (17) в формулу (5), получим

$$u = \int_a^r R_4(t; r, \rho) g(\rho, t) d\rho + c_1 \left[r + \frac{5m}{3} \int_a^r R_1(t; r, \rho) \frac{\partial T}{\partial \rho} d\rho \right] +$$

$$+ c_2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{4m}{3} \int_a^r R_4(t; r, \rho) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial \rho} d\rho \right], \quad (18)$$

где

$$R_4(t; r, \rho) = \frac{1}{3r^2} \left[r^3 - \rho^3 + \int_\rho^r (r^3 - \rho_1^3) R(t; \rho_1, \rho) d\rho_1 \right]. \quad (19)$$

Функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$, фигурирующие в (18), выражаются следующими формулами

$$c_1 = \frac{a^3 B_2 S_a - b^3 S_b}{b^3 B_1 - a^2 B_2}, \quad c_2 = \frac{5a^3 b^3 (S_b - B_1 S_a)}{4(b^3 B_1 - a^2 B_2)}. \quad (20)$$

где

$$B_1 = 1 + \frac{m}{3} \int_a^b \frac{\partial T}{\partial \rho} \left[\frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{R_4(t; r, \rho)}{b} \right]_{r=b} d\rho,$$

$$B_2 = 1 + mb^3 \int_a^b \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial \rho} \left[\frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{2R_4(t; r, \rho)}{3b} \right]_{r=b} d\rho,$$

S_a и S_b — значения функции

$$S(r, t) = \alpha T + \int_{t_0}^t P(t, \tau) \alpha T d\tau$$

при $r = a$ и $r = b$ соответственно.

Формулы (20) получены в результате решения системы алгебраических уравнений, образованных путем использования граничных условий (6).

Выражения для σ_r будет

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \lambda_1 \left(A_r + 5c_1 M_r - \frac{4c_2}{r^3} N_r - 5\alpha_1 T \right) - \\ & - \int_{t_0}^t \varphi_1(t, \tau; r) \left(A_r + 5c_1 M_r - \frac{4c_2}{r^3} N_r \right) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} A_r(r, t) &= 3R_4(t; r, r)g(r, t) + 3 \int_a^r V(t; r, \rho) d\rho, \\ M_r(r, t) &= 1 + mR_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + m \int_a^r V(t; r, \rho) \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ N_r(r, t) &= 1 + mR_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + mr^3 \int_a^r V(t; r, \rho) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ V(t, r, \rho) &= \frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{2R_4(t; r, \rho)}{3r}. \end{aligned}$$

Чтобы получить формулы для $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, достаточно в (21) индекс r заменить индексом θ (или φ). При этом

$$\begin{aligned} A_\theta(r, t) &= R_4(t; r, r)g(r, t) + \int_a^r W(t, r, \rho) d\rho, \\ M_\theta(r, t) &= 1 + \frac{m}{3} R_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{m}{3} \int_a^r W(t, r, \rho) \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ N_\theta(r, t) &= \frac{3}{2} + \frac{m}{3} R_4(t; r, r) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{mr^3}{3} \int_a^r W(t, r, \rho) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial T}{\partial r} d\rho, \\ W(t, r, \rho) &= \frac{\partial R_4(t; r, \rho)}{\partial r} + \frac{4R_4(t; r, \rho)}{r}, \quad A_\theta = A_\varphi, \quad M_\theta = M_\varphi, \quad N_\theta = N_\varphi. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим стальной полый шар со следующими параметрами: $m = 0,00081^\circ \text{C}$ (по экспериментальным данным Зайкова [5]), $a = 30 \text{ см}$, $b = 33 \text{ см}$,

$$T = \frac{9900}{r} + 670, \quad T(a) = 1000^\circ \text{C}, \quad T(b) = 970^\circ \text{C}, \quad \alpha_0 = 11 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{C},$$

$$P(s) = 0,0175 \left(\frac{s}{33} \right)^{0,75} e^{-\sqrt[4]{\frac{s}{33}}}, \quad \text{где } s = t - \tau \text{ (по Бронскому [7])}.$$

Тогда приближенно получим

$$u = (0,1165 - 0,0076 e^{-\sqrt[4]{\frac{r}{33}}}) (0,9853 - 0,04097 r - \frac{17,85}{r} - \frac{525,5}{r^2} - \frac{2253}{r^3} + \frac{1898}{r^4} + \frac{46}{r^2} \ln r + \frac{3,53}{r^2} \ln r).$$

В частности, например, установившееся значение деформации на внешней поверхности будет $\varepsilon = 0,0051$.

Днепропетровский горный институт

Поступило 28 V 1957

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍՈՂՔԻ ՌԻՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿՉԱՓ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿՈՎ, ԵՐԲ ՆՅՈՒԹԻ ՏԻԶԻԿԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԸ ԿԱԽՎԱԾ ԵՆ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻՑ ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻՑ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը մեջ քննարկվում է սիմետրիկ տաքացվող գնդալին թաղանթի լարվածությունը, երբ կամեի զործակիցները և սելակասցիայի խառակտերիստիկները կախված են ջերմաստիճանից ու ժամանակից:

Լարվածության կոմպոնենտները սֆերիկ կոորդինատներով վերցված են (1) և (2) տեսքով:

Տեղադրելով հալասարակչություն հալասարման մեջ σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ արժեքները (1) և (2) անհշտիլուններից, և կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ, ստացվում է տեղափոխումների նշատամբ մի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հալասարմ (3):

Եզրային պայմանները վերցված են (6) տեսքով: (4) տեղադրման միջոցով (3) ինտեգրո-դիֆերենցիալ հալասարմը բերվում է (7) հատուկ երկչափ ինտեգրալ հալասարման, որը, Վոլաների եղանակով, բերվում է սովորական երկչափ ինտեգրալ հալասարման, և լուծվում է սեղովինար զանկու:

միջոցով: Սկզբնական (3) ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումից (7) ինտեգրալ հավասարմանը անցնելիս առաջացող երկու կամայական ֆունկցիաները որոշվում են (11) սխեմանից: Վերջինս սաաջվում է սֆերիկ թաղանթի արտաքին և ներքին մակերևույթային պայմանների օդաադործման հիման վրա: Նշված է երկու դեպք, երբ խնդիրը կարելի է վերածել առանձին ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը: Արդյունքները լուսարանված են կոնկրետ օրինակով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Розовский М. И. Доклады Академии наук СССР, т. 105, № 5, 1955.
2. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.
3. Volterra V. Atti Reale Accademia Roma, Rendiconti, т. 21, 5, 1912.
4. Volterra V. Leçons sur les equations integral et integro-differentiales, Paris, 1913.
5. Зайков М. А. Журнал технической физики, т. 18, в. 6, 1948.
6. Розовский М. И. Доклады Академии наук СССР, т. 58, № 6, 1947.
7. Бронский А. П. Прикладная математика и механика, т. 5, в. 1, 1941.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. М. Иванян

К теории ползучести вулканизата натурального каучука

Явление ползучести в твердом теле выражаемое изменением деформации во времени при постоянном напряжении (последствия—течения) или изменением напряжений во времени при постоянной деформации (релаксации) представляет большой изучный и практический интерес. Важность учета влияния ползучести на деформационно-напряженное состояние конструкции при их расчете в настоящее время общепризнана.

Резина, являясь материалом обладающим сравнительно большими упругими деформациями, обладает также свойством явно выраженной ползучести. Целью настоящей работы является установление дифференциальной связи между напряжением, деформациями и временем, описывающей как явление релаксации, так и явление последствия при одноосном напряженном состоянии (на основе произведенных автором испытаний [1, 2]).

Для семейства кривых релаксации соответствующих различным начальным относительным деформациям ε , абсолютное значение скорости падения выражаем в виде

$$\frac{d\sigma_p}{dt} = B(t)f(\varepsilon), \quad (1)$$

где σ_p —падение напряжения при релаксации (в кг/см²),

$B(t)$ —положительная монотонно убывающая функция времени, удовлетворяющая условию $B(\infty) = 0$.

Из уравнения (1) получаем:

$$\sigma_p = f(\varepsilon) \int_0^t B(t) dt = f(\varepsilon) \Omega(t). \quad (2)$$

Из семейства экспериментальных кривых релаксации, для любого фиксированного момента времени, путем подбора, выбрано следующее простое выражение функции $f(\varepsilon)$:

$$f(\varepsilon) = e^{a\varepsilon}.$$

Следовательно будем иметь

$$\sigma_p = e^{a\varepsilon} \Omega(t).$$

Нанеся последнее выражение на логарифмическую сетку для фиксированных моментов времени получаем:

$$\ln \sigma_p = \mu \varepsilon + \ln \Omega(t_p),$$

где: $\ln \Omega(t_p) = \text{const}$.

Беря значения σ_p и ε с кривых релаксации для фиксированных моментов времени, и построив график зависимости $(\ln \sigma_p, \varepsilon)$ выявлено, что все его точки располагаются вблизи прямой ($\mu = \text{const}$), образующей угол 45° с осями координат, т. е. $\mu = 1$.

Следовательно:

$$\sigma_p = e^\varepsilon \Omega(t).$$

Выражение функции $\Omega(t)$ подобрано в виде $\Omega(t) = A(1 - e^{-\gamma t})$, где: t — время в часах, A и γ — постоянные параметры.

Путем подбора, из кривых релаксации определены значения параметров $A = 0,4 \text{ кг/см}^2$; $\gamma = 5 \text{ 1/час}$.

Внеся найденное значение $\Omega(t)$ и $f(\varepsilon)$ в (2) получим

$$\sigma_p = e^\varepsilon A(1 - e^{-\gamma t}),$$

откуда:

$$\frac{d\sigma_p}{dt} = A\gamma e^\varepsilon e^{-\gamma t} \quad (3)$$

Примем, что скорость падения напряжения при релаксации, в случае медленно и плавно изменяющейся во времени относительной деформации ε , можно также выразить зависимостью (3). Тогда полная скорость изменения напряжения будет выражаться:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt} - A\gamma e^\varepsilon e^{-\gamma t} \quad (4)$$

где $\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt}$ — скорость изменения упругого напряжения.

По первоначальным мгновенным напряжениям и деформациям построена кривая мгновенного растяжения

$$\sigma_{\text{упр}} = f(\varepsilon),$$

для которой подобрано аналитическое выражение в виде

$$\sigma_{\text{упр}} = E(e^{\lambda \varepsilon} - 1) \quad (5)$$

Для используемого материала $E = 18 \text{ кг/см}^2$; $\lambda = 0,5$.

Зависимость (5) при найденных значениях с выбранными E и λ дает хорошее совпадение с кривой мгновенного растяжения, кроме точек вблизи нуля: в точке $\varepsilon = 0,36$, где расхождение составляет $36,8\%$, в точке $\varepsilon = 5,44$, соответствующей наибольшей нагрузке, где расхождение составляет 19% и в точке $\varepsilon = 3,2$, где расхождение 8% . В остальных точках расхождение не превышает 5% . Следует предполагать, что опытные данные вышеуказанных точек несут случайный характер, и их можно исключить.

Внося (5) в (4) будем иметь:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lambda E e^{\lambda \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} - A \gamma e^{\lambda \epsilon} e^{-\gamma t}. \quad (6)$$

Проверим применимость полученного основного дифференциального уравнения (6) для описания явления релаксации и последействия.

а) Релаксация

При релаксации $\epsilon = \text{const.}$ следовательно из (6) получим:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -A \gamma e^{\lambda \epsilon} e^{-\gamma t}.$$

Интегрируя в пределах от 0 до t будем иметь:

$$\sigma = \sigma_0 - A e^{\lambda \epsilon} (1 - e^{-\gamma t}), \quad (7)$$

где: σ_0 —начальное напряжение.

Теоретические значения напряжений, вычисленные по (7) и снятые с опытных кривых релаксаций, а также относительные расхождения от опыта приведены в таблицах 1, 2, из которых видно хорошее совпадение теоретических результатов с экспериментальными.

б) Последействие

Рассматривается процесс последействия протекающий под действием постоянной нагрузки (Q). В этом случае напряжение в образце медленно монотонно возрастает во времени, вследствие сужения поперечного сечения образца от деформации ползучести.

Истинное напряжение при последействии определяем из условия постоянства объема образца по формуле

$$\sigma = \frac{Q}{F(t)},$$

где:

$$F(t) = \frac{F_0}{1 + \epsilon},$$

F_0 —площадь поперечного сечения образца в напряженном состоянии. Таким образом

$$\sigma = \frac{Q(1 + \epsilon)}{F_0}; \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q}{F_0} \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Подставляя значение $\frac{d\sigma}{dt}$ в (6) и интегрируя, получим зависимость относительного удлинения от времени, при действии постоянной нагрузки Q , в виде:

$$\frac{E\lambda}{\lambda - 1} [e^{(\lambda - 1)\epsilon} - e^{(\lambda - 1)\epsilon_0}] + \frac{Q}{F_0} (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma t_0}) = A(1 - e^{-\gamma t}) \quad (8)$$

Решая (8) относительно ε получим:

$$\varepsilon = -2 \ln \frac{-18 \pm \sqrt{324 - \frac{4Q}{F_0} \left[18e^{-0.5\varepsilon_0} - \frac{Q}{F_0} e^{-\varepsilon} - 0,4(1 - e^{-t'}) \right]}}{\frac{2Q}{F_0}} \quad (9)$$

Из двух значений ε только значение квадратного корня с отрицательным знаком соответствует физическому смыслу задачи, так как при этом значения ε получаются больше начальных значений ε_0 .

Вычисленные значения ε по (9) сравнены с экспериментальными данными. Порядок расхождения почти такой же как и в случае рефлексии (см. табл. 3, 4).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 13 II 1957

Վ. Մ. Իվանյան

ԲՆԱԿԱՆ ԿԱՌՉՈՒԿԻ ՎՈՒԼԿԱՆԻԶԱՏԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս աշխատության նպատակն է գտնել լարման, ղեֆորմացիայի և ժամանակի միջև ընդհանուր դիֆերենցիալ կապ, որը նկարագրի ինչպես սեւաքաղցի, այնպես էլ հետազոտչության երևույթը:

Ռեկաքացիայի կորերի բնտանիքի համար ընտրված է լարման անկման արագության համապատասխան արտահայտություն, որն իրենից ներկայացնում է հարաբերական ղեֆորմացիայի և ժամանակի երկու ֆունկցիաների արտադրյալ:

Ռեկաքացիայի կորերից վերցնելով հարաբերական ակնթարթային ղեֆորմացիաների և նրանց համապատասխան իրական լարումների արժեքները, կառուցված է ակնթարթային ձգման կորը, որի համար ընտրված արտահայտությունը տալիս է բավականին լավ համընկնում: Ընդունելով, որ հարաբերական ղեֆորմացիայի բավականին դանդաղ և սահուն փոփոխման դեպքում լարման անկման արագությունը կարտահայտվի նույն տեսքով, ինչպես սեւաքաղցի դեպքում, կազմված է իրական լարման լրիվ արագության արտահայտությունը, որը ներկայացնում է լարման և հարաբերական ղեֆորմացիայի կապը:

Ստացված համապատասխան բանաձևերի միջոցով հաշված լարումների ու հարաբերական ղեֆորմացիաների արժեքների և փորձնական կորերից ստացված համապատասխան արժեքների համեմատումը ցույց է տալիս բավականին լավ համընկնում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванян В. М. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, X, № 6, 1957.
2. Иванян В. М. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, XI, № 1, 1958.

Таблица 1 (релаксация)

№ № п/п	σ_0 (кг/см ²)	ε	При $t = 10,5$ мин.			При $t = 21$ мин.			При $t = 60$ мин.			При $t = 120$ мин.		
			σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхо- жение от опыта (%)
			по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (7)	
1	5,643	0,36	5,3	5,3	-3,9	5,1	5,2	-1,2	5,1	5,1	0,7	4,9	5,1	-2,4
2	18,228	1,36	17,3	17,3	-0,4	16,9	16,9	-0,4	16,9	16,7	1,1	15,9	16,7	-4,7
3	35,520	2,28	33,4	33,2	0,6	32,6	32,3	0,9	32,6	31,7	2,9	31,4	31,6	-0,6
4	66,050	3,2	60,3	60,3	-0,0	59,3	57,9	2,3	58,9	56,3	4,5	57,3	56,2	1,9
5	85,1	3,6	73,2	76,9	-1,1	71,8	73,5	-2,4	70,8	71,2	-0,6	68,9	71,1	-2,9
6	114,6	4,0	93,9	101,8	-8,4	91,6	96,5	-5,4	90,4	92,9	-2,7	88,4	92,7	-4,9
7	140,0	4,4	116,8	121,8	-4,3	113,7	114,1	-0,4	112,3	108,9	2,9	108,6	108,6	0,0
8	162,9	4,6	128,0	138,7	-8,3	124,7	128,7	-3,2	121,3	121,7	-0,3	118,0	121,5	-2,9
9	212,0	5,0	160,9	176,0	-9,4	157,1	161,0	-2,5	153,7	150,3	2,2	149,3	150,3	-0,7
10	232,0	5,2	178,9	189,9	-6,1	175,1	172,2	1,6	170,2	160,1	5,9	165,4	159,6	3,6
11	255,8	5,4	194,8	206,2	-5,8	189,9	185,5	2,4	184,2	171,3	6,9	176,4	170,7	3,3
12	318,1	5,4	227,6	264,4	-16,2	219,9	241,9	10	213,3	226,6	-6,3	207,8	225,9	-8,8

№ № п/п	σ_0 (кг/см ²)	ϵ	При $t = 180$ мин.		
			σ (кг/см ²)		Расхождение от опыта (%)
			по данным опыта	по ф-ле (7)	
1	5,643	0,36	4,7	5,1	-7,6
2	18,228	1,76	15,9	16,7	-4,7
3	35,520	2,38	31,4	31,6	-0,6
4	66,050	3,2	56,6	56,2	0,6
5	85,1	3,6	68,9	71,1	-2,9
6	114,6	4,0	87,9	92,7	-5,4
7	140,0	4,4	107,8	108,7	-0,8
8	162,9	4,6	117,0	121,4	-3,7
9	212,0	5,0	148,3	150,3	-1,4
10	232,0	5,2	164,4	159,6	3,0
11	255,8	5,4	176,4	170,7	3,3
12	318,1	5,4	207,8	226,0	-8,8

Таблица 2 (релаксация)

При $t = 240$ мин.			При $t = 300$ мин.		
σ (кг/см ²)		Расхождение от опыта (%)	σ (кг/см ²)		Расхождение от опыта (%)
по данным опыта	по ф-ле (7)		по данным опыта	по ф-ле (7)	
4,5	5,0	-13,0	4,5	5,1	-13
15,5	16,7	-7,3	15,1	16,7	-10,7
31,4	31,6	-0,6	31,2	31,6	1,2
56,3	56,2	0,0	56,3	56,2	0,0
67,9	71,1	-4,6	66,9	71,1	-6,3
85,9	92,7	-7,8	85,2	92,7	-8,8
105,1	108,7	-3,4	103,4	108,7	-5,2
116,2	121,4	-4,5	111,2	121,5	-9,3
146,3	150,3	-2,7	145,4	150,3	-3,4
162,5	159,6	1,8	160,6	159,6	0,6
173,5	170,7	1,6	171,6	170,7	0,5
204,5	225,9	-11,0	201,1	225,9	-12,3

Таблица 3 (последствие)

№ № п/п	ε	При t = 10,5 мин.			При t = 21 мин.			При t = 60 мин.			При t = 120 мин.		
		ε		Расхо- жение от опыта (%)									
		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)		по дан- ным опы- та	по ф-ле (9)	
1	2,9	2,9	3,2	-11,4	2,9	3,1	-5,6	3,0	3,1	-5	3,0	3,1	-4,1
2	3,4	3,5	3,1	13,2	3,6	3,8	-6,2	3,6	3,9	-6,9	3,64	3,9	-7,3
3	3,7	3,9	3,9	0,3%	4,0	4,0	-0,9	4,1	4,1	-0,5	4,1	4,1	0
4	5,0	5,5	5,4	0,9	5,6	5,7	-1,3	5,65	5,8	-2,7	5,7	5,8	-1,6
5	5,2	5,8	5,7	2,5	5,9	6,01	-0,71	6,1	6,1	-1,2	6,1	6,1	0
6	5,2	5,9	5,7	4,2	6,1	6,0	1,3	6,2	6,2	0	6,2	6,2	0
7	5,4	6,1	5,9	2,6	6,2	6,2	0	6,3	6,4	-2,0	6,5	6,4	0,6
8	5,7	6,7	6,3	4,7	6,9	6,7	2,7	7,2	6,9	3,9	7,3	7,0	4,5
9	6,0	6,7	6,7	-0,8	6,9	7,2	-3,8	7,6	7,4	-12,5	7,9	7,5	5,5

№ № п/п	ϵ_0	При $t = 180$ мин.		Расхождение от опыта (%)
		ϵ		
		по данным опыта	по ф-ле (9)	
1	2,9	3,0	3,1	-3,0
2	3,4	3,7	3,9	-5,6
3	3,7	4,1	4,1	0,5
4	5,0	5,7	5,8	-1,0
5	5,2	6,1	6,1	-0,5
6	5,2	6,3	6,2	2,1
7	5,4	6,5	6,4	1,4
8	5,7	7,4	7,0	4,9
9	6,0	8,0	7,6	6,8

Таблица 4 (последствие)

При $t = 240$ мин.			При $t = 300$ мин.		
ϵ		Расхождение от опыта (%)	ϵ		Расхождение от опыта (%)
по данным опыта	по ф-ле (9)		по данным опыта	по ф-ле (9)	
3,03	3,1	-3,0	3,3	3,1	3,7
3,7	3,9	-5,6	3,7	4,7	-2,6
4,1	4,1	0,5	4,2	4,1	1,4
5,8	5,8	0	5,8	5,8	0
6,1	6,1	-0,5	6,1	6,1	0
6,3	6,2	2,4	6,3	6,2	2,8
6,6	6,4	1,7	6,6	6,4	1,7
7,4	7,0	5,1	7,4	7,5	-0,7
8,1	7,5	7,8	8,2	7,4	9,5

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. С. Согоян

О некоторых закономерностях ползучести древесины

В выполненных до последнего времени экспериментальных работах по исследованию ползучести древесины не было исключено влияние на древесину окружающей среды — температуры и влажности воздуха [1, 2].

Изменения этих двух факторов — температуры и влажности воздуха, несомненно приводят к некоторым колебаниям температур и влажности испытуемого образца, что в свою очередь не может не отразиться на деформацию ползучести древесины [2].

С целью проверки некоторых закономерностей деформации ползучести древесины были поставлены специальные опыты на образцах натуральных размеров, в условиях, когда влажность образца в течение всего процесса исследования оставалась постоянной, а температура окружающей среды более или менее одинаковой.

Исследовалось влияние влажности древесины на величину деформации ползучести, в результате чего получены экспериментальные кривые деформации ползучести древесины для образцов с влажностью 15, 30, 50, 95%. Для сохранения этих влажностей образцами в течение всего опыта, были применены специальные меры. В качестве образцов служили балки из древесины тополя сечением 6×12 см и длиной 3,2 м, которые были выпилены из свежесрубленного дерева, чтобы уменьшить влияние трещин на деформации.

Концы балок пропитывались парафином для уменьшения высыхания с торцов, затем образцы плотно обертывались бумагой, края которой заклеивались. Бумага не приклеивалась к древесине, так что оставался маленький зазор между бумагой и древесиной. Затем, поверх бумаги в два слоя, наносился битум растворенный в авиационном бензине, после чего производилось обертывание вторым слоем бумаги и вновь наносился раствор битума в два раза.

Указанная методика изоляции древесины имеет то преимущество, что она не влияет на деформативность образца. В помещении, в котором производились исследования не замечалось больших колебаний температуры воздуха. Температура держалась в пределах $12-15^{\circ}\text{C}$. Таким образом, исследования производились в условиях постоянного режима влажности испытуемой древесины, причем температурный режим был переменным в небольших пределах. Необходимо было, по

мере возможности, уменьшить влияние переменного режима температуры окружающей среды на деформацию ползучести. С этой целью мы приступили к исследованию образцов крупных размеров сечением 6×12 см и 8×16 см, где влияние переменного режима температуры будет сказываться меньше, чем на образцах с малым сечением (1×1 см или 2×2 см). Кроме того образцы натуральных размеров дадут нам более реальные результаты, так как деформация ползучести зависит в некоторой степени от размеров испытываемых образцов [2].

Балки (6×12 см, $l = 3,5$ м), предназначенные для исследования на ползучесть при разных влажностях (15, 30, 50, 95%), предварительно изолировались по вышеуказанной методике. Балки были подобраны с близкими друг к другу значениями предела прочности. Для образцов была взята прямослойная древесина, без сучков. Испытание производилось на чистый изгиб в тангенциальном направлении. Нагрузка прикладывалась через рычаг. Прогобы измерялись в середине пролета, а также под точками приложения нагрузки с помощью индикаторных головок и прогибомеров, с точностью 0,01 мм.

Приборы устанавливались на специальной металлической раме, прикрепленной на штырях к испытываемой балке по ее нейтральной оси в зоне чистого изгиба. Это давало возможность исключить ошибку в измерении за счет возможной осадки опор и смятия древесины в опорах. Таким образом была выбрана такая методика работы, которая сводила бы погрешности испытания к минимуму. Для измерения деформации краевых волокон, на верхнюю и нижнюю плоскости балок устанавливались индикаторы с удлиненными штифтами. База измерения деформации была равна 10 см.

Нагрузки на образцы прикладывались за возможно короткий промежуток времени, а измерение приращения мгновенной деформации производилось тотчас по приложению нагрузки и притом за весьма короткий промежуток времени. Последующие приращения деформации ползучести измерялись через каждые 24 часа в течение 1,5 месяцев.

Было загружено 7 балок при влажностях 15, 30, 50, и 95%, причем балки с влажностью с 15, 30, 95% были по две штуки, выпиленные рядом с одного кряжа, а с влажностью 50% — одна. Балки, выпиленные, с одинаковой влажностью древесины, загружались разными нагрузками с целью установить зависимость деформации ползучести при изгибе от величины постоянной нагрузки.

Напряжение в балках доводилось до $\sigma_1 = 80$ кг/см² и $\sigma_2 = 120$ кг/см².

В табл. 1 приведены значения мгновенных деформаций, полученные в опытах с балками при различной влажности древесины, при напряжениях 80 кг/см² и 120 кг/см².

Как видно из табл. 1, с увеличением влажности деформации возрастают, т. е. модуль упругости уменьшается.

Экспериментальные кривые приращения прогиба во времени при напряжениях $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 120 \text{ кг/см}^2$ и влажностях древесины $w = 15, 30, 50, \text{ и } 95\%$ полученные в наших опытах показаны на фиг. 1.

Рассматривая графики (фиг. 1, 2) мы видим, что вслед за мгновенными деформациями происходит нарастание деформации ползучести.

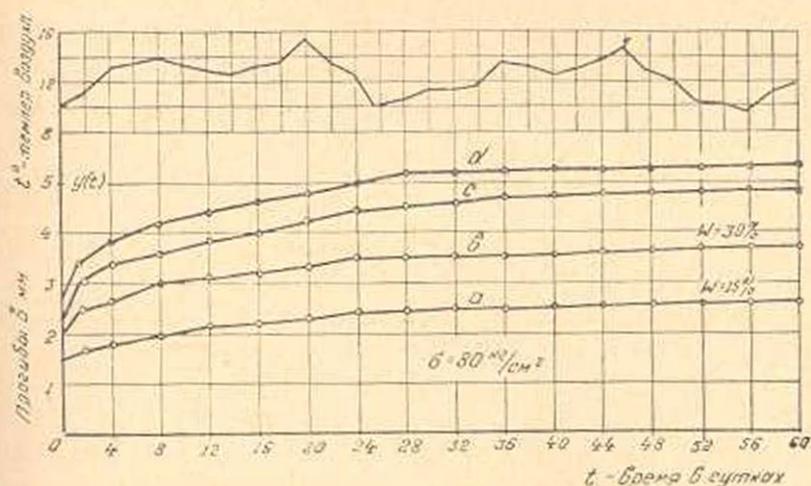
Деформации ползучести быстро нарастают в начальный момент, затем нарастание деформации замедляется и происходит постепенное затухание. Величина деформации со временем стремится к некоторой постоянной, т. е. со временем кривые *a, б, в, г*

Таблица 1

Напря- жения кг/см^2	Влажность в %	Мгновенные деформации		
		Прогибы в середине пролета балки в мм	Относитель- ные удлине- ния растяну- тых волокон	Относитель- ные укороче- ния сжа- тых волокон
80	15	1,50	0,0058	0,0062
120	15	2,22	0,009	0,0095
80	30	2,06	0,0087	0,0097
120	30	3,05	0,013	0,015
80	50	2,00	0,011	0,012
80	95	2,20	0,0115	0,013
120	95	3,30	0,017	0,0192

становятся параллельными оси абсцисс (фиг. 2).

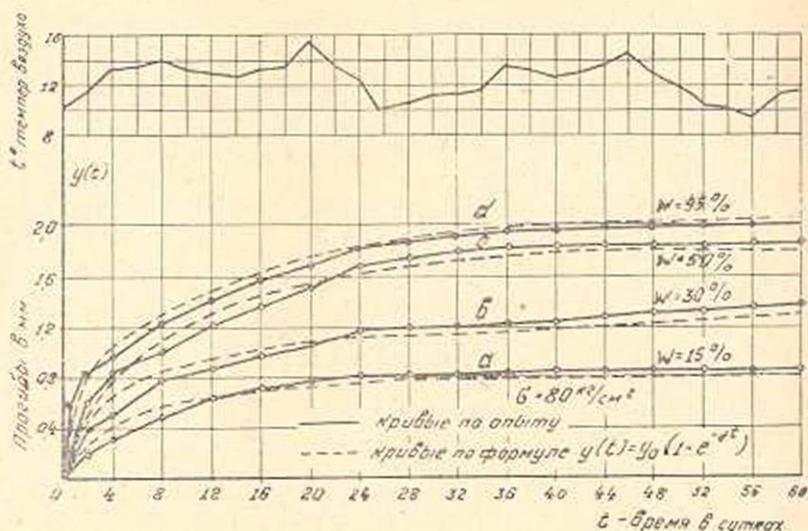
Как показали наши исследования, приращение деформации ползучести в сильной степени зависит от влажности древесины, а именно, повышение влажности вызывает увеличение скорости ползучести,



Фиг. 1.

следовательно и деформации под нагрузкой (фиг. 2).

Из рассматриваемых кривых, изображенных на фиг. 2 видно, что с увеличением влажности древесины величина деформации ползучести и продолжительность ее затухания увеличиваются. Интересно отметить, что значение кривых приращения деформации во времени при влажностях $w = 50\%$ и $w = 95\%$ получились близкие друг к другу,



Фиг. 2.

что дает нам, до некоторой степени, основание думать, что повидимому, начиная с некоторого определенного процента влажности, деформации ползучести древесины, также как и упругие характеристики ее, стабилизируются.

На графиках приращения деформации во времени, нанесены также диаграммы изменения температуры воздуха в помещении экспериментальной установки.

В поставленных опытах, параллельно с измерением прогибов, измерялись также приращения деформации во времени в сжатых и растянутых зонах. Опыт показывает, что деформации ползучести в сжатой и растянутой зонах балки, получились близкие друг к другу.

Используя теорию ползучести Н. Х. Арутюняна [3], можно уравнение полученных кривых ползучести представить в следующем виде:

$$y(t-\tau) = y_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (1)$$

где y_0 — предельное значение деформации ползучести через бесконечно большой промежуток времени ($t = \infty$);

t — время;

γ — постоянная;

τ — время, соответствующее моменту приложения нагрузки;

e — основание натуральных логарифмов.

В наших кривых начало координат совмещено с моментом приложения нагрузки, т. е. $\tau = 0$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$y(t) = y_0 [1 - e^{-\gamma t}]. \quad (2)$$

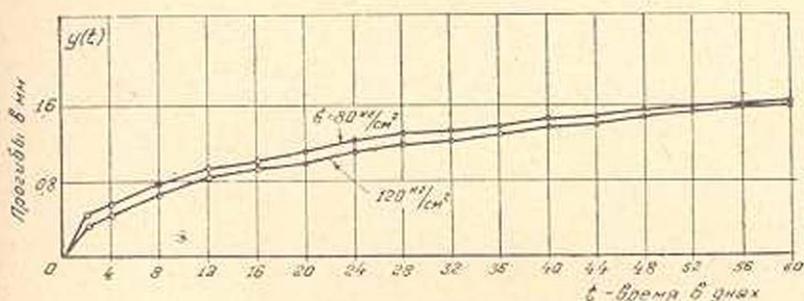
Полученные экспериментальные кривые ползучести дают хорошее совпадение с уравнением (2) (фиг. 2).

Исследование зависимости деформации ползучести от напряжения

В описанных выше опытах одновременно была исследована зависимость деформации ползучести от нагрузки при разных влажностях древесины (15, 30, 50 и 95%).

Загружались по две балки с одинаковой влажностью при различных напряжениях $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 120 \text{ кг/см}^2$.

Соответствующие кривые изменения деформации во времени при указанных напряжениях приведены на фиг. 3. Чтобы ясно представить зависимость деформации ползучести от напряжения, кривые приращения деформации представлены на одном графике, причем ординаты кривой для напряжения $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ увеличены в соотношении 120/80 (фиг. 3).



Фиг. 3.

Как видно из графиков, точки соответствующие разным напряжениям ($\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 120 \text{ кг/см}^2$), нанесенные указанным способом, ложатся близко друг к другу.

В начале кривых мы получили заметное отклонение экспериментальных точек от пропорциональной зависимости, т. е. наблюдается заметный разброс точек при ступенях напряжения $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 120 \text{ кг/см}^2$. Этот разброс экспериментальных точек или разница ординат в начале кривых составляет 4—6%, со временем точки сближаются друг к другу. В середине опыта разность ординат составляет 2—3%, а уже в конце опыта получено наложение точек друг на друга, т. е. конечные значения деформации ползучести на графиках, построенных указанным методом почти совпали.

В опытах с балками при влажностях 15 и 95% результаты исследования деформации ползучести от нагрузки показали более близкое совпадение с линейным законом нежели с балками с 30% влажностью (фиг. 3).

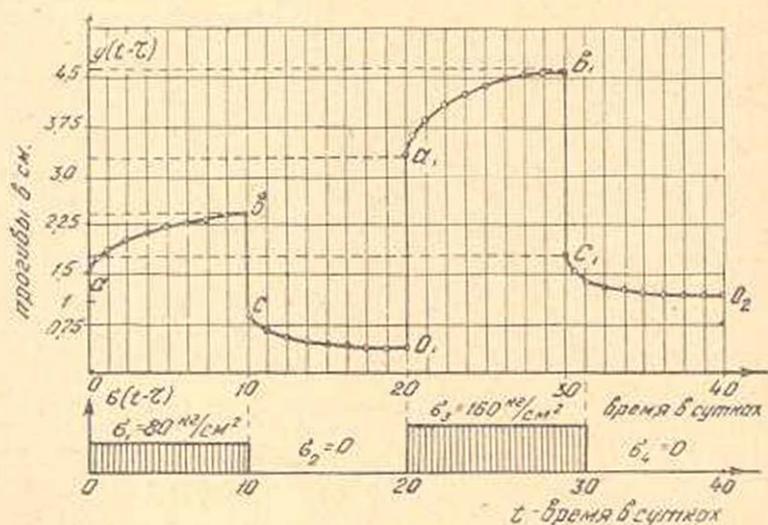
Значение деформации ползучести к концу опыта для балок с различной влажностью при напряжениях $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 120 \text{ кг/см}^2$ показаны в табл. 2.

Кроме указанных выше исследований по изучению зависимости деформации ползучести от нагрузки, нами были также поставлены опыты на изгиб над образцами из древесины тополя и сосны (сечение 8×16 см, пролет $l = 4,40$ м) под разные ступени нагрузки. В этих исследованиях, нагрузки, соответствующие напряжениям $\sigma_1 = 80$ кг/см² и $\sigma_2 = 160$ кг/см² прикладывались к одной балке. Вначале прикладывалась нагрузка, соответствующая напряжению $\sigma_1 = 80$ кг/см², под которой образец выдерживался в течение 10 суток. Затем образец разгружался и выдерживался в ненагруженном состоянии для наблюдения за возвращением деформации в течение последующих суток, после чего прикладывалась вторая ступень нагрузки: $\sigma_2 = 160$ кг/см² (фиг. 4).

Таблица 2

Влажность и %/о/о	Деформации ползучести при изгибе к концу опыта в мм	
	при $\sigma_1 = 80$ кг/см ²	при $\sigma_2 = 120$ кг/см ²
15	0,82	1,60
30	1,37	2,57
50	1,75	—
95	1,95	3,82

после чего прикладывалась вторая ступень нагрузки: $\sigma_2 = 160$ кг/см² (фиг. 4).

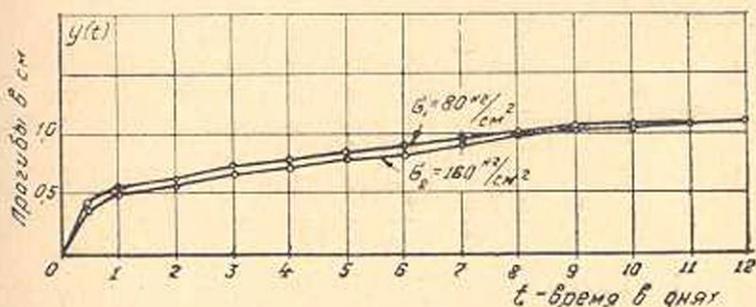


Фиг. 4.

К балкам прикладывались две сосредоточенные силы на расстоянии 1,20 м от опор, т. е. в средней части балки имели чистый изгиб. На совмещенной диаграмме деформации, показана очередность приложения нагрузки ($\sigma_1 = 80$ кг/см² и $\sigma_2 = 160$ кг/см²) и соответствующие кривые приращения деформации во времени, а также кривые изменения деформации после снятия нагрузки—возврат деформации (фиг. 4).

Деформация oa (фиг. 4) происходит при мгновенном приложении первой ступени нагрузки ($\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$). При выдерживании этой ступени происходит нарастание деформации во времени по кривой ab , после разгрузки мгновенная деформация почти полностью исчезает (bc), а часть деформации ползучести постепенно, со временем, возвращается (участок co_1).

Аналогичные виды деформации получаем при приложении второй ступени нагрузки ($\sigma_2 = 160 \text{ кг/см}^2$). Полученные кривые приращения деформации ползучести совмещены в начале координат, причем ординаты кривой для напряжения $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ увеличены в соотношении $160/80 = 2$ (фиг. 5).



Фиг. 5.

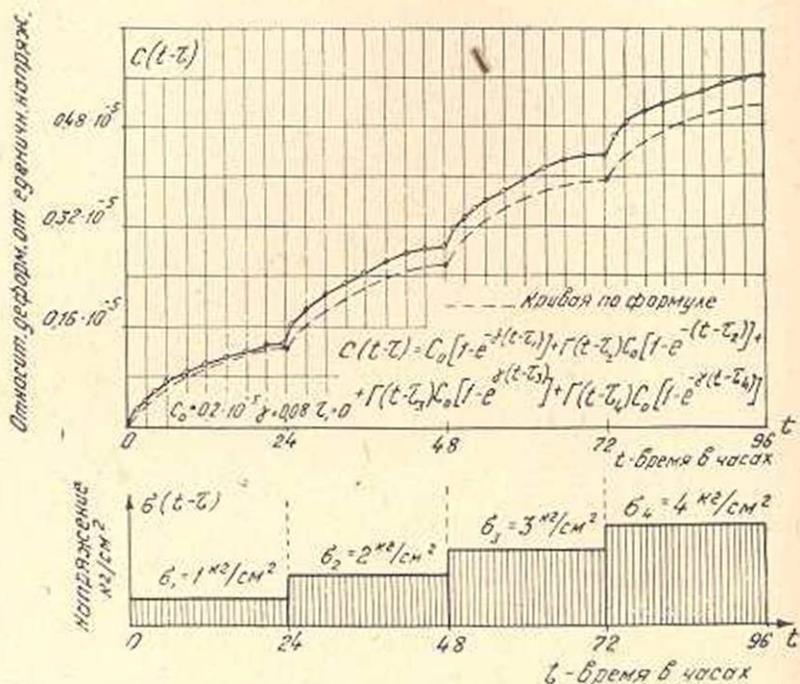
Из графика видно, что экспериментальные точки, соответствующие разным ступеням нагрузки ($\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 160 \text{ кг/см}^2$) очень близко располагаются друг к другу. В этих исследованиях мы не получили особенно заметного разброса экспериментальных точек в начале кривых. В середине опыта и в конце, ординаты кривых, соответствующие напряжениям $\sigma_1 = 80 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 160 \text{ кг/см}^2$ почти совпали (разница $1-2\%$). Таким образом из полученных результатов можно заключить, что в наших опытах, где фактически было исключено влияние окружающей среды, деформации ползучести изменялись прямо пропорционально напряжению, с незначительными отклонениями.

Деформации ползучести при ступенчатом нагружении

С целью проверки принципа наложения деформации ползучести, были поставлены специальные опыты со ступенчатым нагружением. Испытание производилось как при кратковременном, так и при длительном выдерживании образцов под ступенями нагрузки.

Опыты были поставлены по вышеуказанной схеме на чистый изгиб с тополевой и сосновой балками (сочение $8 \times 16 \text{ см}$, $l = 4,40 \text{ м}$). Балки предварительно были изолированы по прежней методике. Нагрузки прикладывались ступенями равного размера с величинами ступени 50 кг/см^2 . Всего было приложено к балкам по 4 ступени нагрузки ($50, 100, 150, 200 \text{ кг/см}^2$). Балки выдерживались под дейст-

нием каждой из этих ступеней в течение 24 часов. Принимая, что деформации ползучести изменяются прямо пропорционально напряжению, построен экспериментальный график изменения деформации ползучести при ступенчатой нагрузке с величиной ступени равной единице, для сжатой зоны при чистом изгибе балки (фиг. 6).



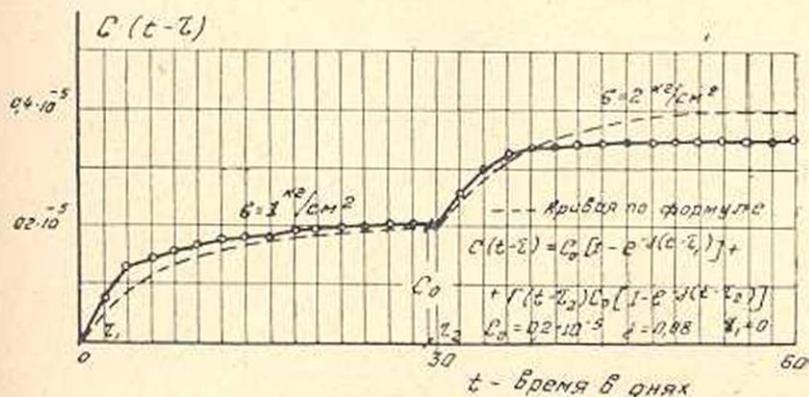
Фиг. 6.

Из графика видно, что прирост деформации ползучести под ступенями нагрузки с увеличением числа ступеней возрастает, так как при выдерживании образца под действием ступени нагрузки $\sigma = 50 \text{ кг/см}^2$ в течение 24 часов, нарастание деформации ползучести не успевает полностью прекратиться и эта незаконченная деформация накладывается на деформацию ползучести новой ступени, что приводит к постепенному увеличению величины деформации под каждой ступенью.

Чтобы, по возможности, исключить наложение неоконченной деформации ползучести от прошлых ступеней нагрузки на деформацию ползучести от новой ступени, необходимо, чтобы образец под действием каждой ступени выдерживался возможно дольше, почти до полного прекращения нарастания деформации. Поэтому были также поставлены опыты с длительным выдерживанием образца под действием двух ступеней нагрузки: $\sigma_1 = 100 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 200 \text{ кг/см}^2$. Исследование было произведено на балке (сечение $8 \times 10 \text{ см}$, $l = 4,40 \text{ м}$) из древесины сосны. Балка испытывалась, как и ранее, на чистый из-

гиб. Влажность ее была 16%. Балка была изолирована по вышеуказанному методу. Под действием каждой ступени нагрузки образец выдерживался в течение 30 суток и велось наблюдение за приращением деформации. За этот период времени нарастание деформации ползучести под данной ступенью нагрузки почти полностью прекращается.

На базе полученных данных построен график приращения деформации ползучести от единичного напряжения (фиг. 7).



Фиг. 7.

Как видно из графика приращение деформации ползучести под второй ступенью нагрузки получилось на 15—25% меньше, чем под первой ступенью нагрузки (фиг. 7).

Полученные результаты опытов дают, до некоторой степени, основание сделать вывод, что величина деформации ползучести, вызванная некоторым приращением ступени нагрузки зависит от длительности приложения нагрузки данной ступени, а также зависит от длительности действия предшествующих ступеней нагрузок.

Полученные экспериментальные кривые при ступенчатом нагружении показывают, что в данном случае деформации ползучести не растут строго пропорционально нагрузке, наблюдается некоторое отклонение от прямолинейного закона.

Если считать, что форма кривой ползучести древесины под разными ступенями нагрузки не меняется (закон наложения), тогда деформация ползучести, когда она является функцией разности аргументов $(t - \tau)$, при ступенчатой нагрузке с величиной ступени равной единице, к моменту времени t можно представить следующей суммой:

$$C(t - \tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t - \tau_1)}] + \Gamma(t - \tau_2) C_0 [1 - e^{-\gamma(t - \tau_2)}] + \Gamma(t - \tau_3) C_0 [1 - e^{-\gamma(t - \tau_3)}] + \Gamma(t - \tau_4) C_0 [1 - e^{-\gamma(t - \tau_4)}] + \dots \quad (3)$$

где C_0 — предельное значение деформации ползучести при $t = \infty$;

$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ — моменты приложения нагрузки;

$\Gamma(t - \tau)$ — функциональный прерыватель, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$\Gamma(t - \tau) \begin{cases} = 0 & t < \tau; \\ = 1 & t > \tau; \end{cases} \quad (4)$$

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$$

На фиг. 6, 7 пунктиром показаны теоретические кривые, полученные по формуле (3). Расхождение между опытными данными и данными, полученными по формуле (3) составляет 15—25%. Поэтому закон наложения для деформации ползучести древесины можно принять лишь в первом приближении.

В ы в о д ы

На основании проведенных исследований приходим к следующим выводам.

1. Деформации ползучести в сильной степени зависят от влажности древесины, а именно, повышение влажности вызывает увеличение скорости ползучести, а следовательно и увеличение деформации под нагрузкой.

2. В наших опытах, где фактически было исключено влияние окружающей среды, деформации ползучести изменялись пропорционально напряжению (с незначительным отклонением).

3. Полученные результаты опытов при ступенчатом нагружении показывают, что величина деформации ползучести, вызванная приращением нагрузки, зависит от длительности приложения данной ступени нагрузки, а также зависит от длительности действия предшествующих ступеней нагрузок.

Закон наложения для деформации ползучести древесины можно считать справедливым лишь в первом приближении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 15 XII 1957

Ս. Ս. Սողոյան

ԲՆԱՓԱՅՏԻ ՍՈՂԷԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՕՐԻՆԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սոնափոխյան ազդեցությունը սողքի ղեֆորմացիայի վրա քիչ է աստմասիրված, իրենից ներկայացնում է որոշակի հետաքրքրություն: Բնափայտի սողքի որոշ օրինաչափությունների աստմասիրությունը նպատակով դրված են հզել հատուկ փորձեր փայտի բնական չափերի նմուշների վրա: Փորձարկումները ասրվել են նմուշի մաքուր ծաման սխեմայով՝ ուժի երկարատև ազդեցության դեպքում: Փորձարկման ժամանակ չափվել են ճկվածքները և նմուշի ձգված ու սեղմված թելիկների ղեֆորմացիան: Փորձարկում-

ներից ստացված են բնափայտի սողքի զեֆորմացիայի մի շարք կորեր՝ 15, 30, 50 և 95% խոնավությունների ղեպքում, ըստ որում ամբողջ փորձարկման ընթացքում տվյալ խոնավությունը պահպանվել է հաստատուն, իսկ արտաքին շերտատիճանը մնացել է քիչ թեև շատ անփոփոխ (զծ. 1 և 2):

Ստացված կորերը լավ են համընկնում հոդվածում բերված (1) բանաձևին և ցույց են տալիս, որ բնափայտի սողքի զեֆորմացիան անմիջակաճորեն կախում ունի նրա խոնավության ատտիճանից: Խոնավորության մեծացման հետ աճում է սողքի զեֆորմացիան, ինչպես և զեֆորմացիայի արագությունը:

Միևնույն ժամանակ ուսումնասիրված է սողքի զեֆորմացիայի կախումը նմուշի լարումներից՝ տարբեր խոնավությունների ղեպքում: Լարումները նմուշում հասցված են կղև $\sigma_1 = 80$ կգ/սմ² և $\sigma_2 = 160$ կգ/սմ² բեռնավորման տարբեր կոմբինացիաների ղեպքում, ըստ որում արտաքին պայմանների ազդեցությունը նմուշի վրա չեզոքացված է կղև:

Ստացված կորերը (զծ. 3, 4 և 5) ցույց են տալիս, որ սողքի զեֆորմացիան ուղիղ համեմատական է լարվածությանը՝ աննշան շեղումներով:

Բնափայտի սողքի զեֆորմացիայի ղեպքում ուժերի անկախության օրենքի ստուգման համար դրված են կղև հասակ փորձեր: Փորձարկումները տարվել են, ինչպես կարճատև, այնպես էլ երկարատև բեռնավորման պայմաններում, նմուշի տարբեր լարվածությունների համար:

Ստացված փորձնական կորերը (զծ. 6 և 7) ցույց են տալիս, որ սողքի զեֆորմացիաները ատտիճանավոր բեռնավորման ղեպքում չեն աճում բեռնավորմանը ճիշտ ուղիղ համեմատական ձևով, այլ կախված են, ինչպես տվյալ բեռնավորման, այնպես էլ նախորդ բեռնավորման երկարատևությունից: Ուժերի անկախության օրենքը այս ղեպքում կարելի է ճիշտ համարել միայն սառչին մոտավորությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Белликин Ф. П. Длительное сопротивление дерева. М.—Л., ОНТИ, 1934.
2. Иванов Ю. М. Предел пластического течения, Стройиздат, 1948.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести, М.—Л., 1952.

Փ. Ր. Արությունյան, Մ. Ի. Դայոն և Ա. Ա. Կեր-Տապյան

Об определении массы заряженных частиц по рассеянию и остаточному пробегу в многопластинных камерах Вильсона

1. Введение

В работе [1] приводится метод определения массы заряженных частиц по рассеянию и остаточному пробегу, пригодный для практического использования в работах с многопластинными камерами Вильсона.

Настоящая работа посвящена экспериментальной проверке этого метода путем его применения к определению масс протонов и мезонов, идентифицированных заранее другим независимым методом.

Авторы работы [1] рассматривают величину $\eta = \varphi \cdot R^2$, где R — остаточный пробег частицы φ — проекция угла рассеяния на плоскость, проходящую через первоначальную траекторию, α — постоянная, определяемая соотношением

$$\frac{R}{mc^2} = A_z \left(\frac{p^2 c}{mc^2} \right)^{1/2}$$

имеющем место для всех элементов в широком интервале значений величин $\frac{p^2 c}{mc^2} \left(0.05 < \frac{p^2 c}{mc^2} < 2 \right)$. Здесь p — импульс и m — масса частицы; $\alpha = 0,55$ для всех элементов, а величина A_z является постоянной для данного рассеивателя ($A_{Pb} = 0,32 \text{ г/см}^2 \text{ МэВ}^{-1}$, $A_{Al} = 0,20 \text{ г/см}^2 \text{ МэВ}^{-1}$).

Оказывается, что функция распределения величин η практически не зависит от импульса частицы (или ее остаточного пробега). Среднее значение η — $\langle \eta \rangle$ и среднеквадратичное — $\langle \eta^2 \rangle^{1/2}$, вычисленные на основании полученной функции распределения величин η , зависят, практически, только от свойств рассеивающего вещества.

$$\langle \eta \rangle = K_1 \cdot t^{1/2} (A_z \cdot m_e c^2)^\alpha \cdot \left(\frac{m_e}{m} \right)^{1-\alpha} \quad (1)$$

$$\langle \eta^2 \rangle^{1/2} = K_2 \cdot t^{1/2} (A_z \cdot m_e c^2)^\alpha \cdot \left(\frac{m_e}{m} \right)^{1-\alpha} \quad (2)$$

где t — толщина рассеивателя в г/см^2 , m_e — масса электрона, а K_1 и K_2 определяются формулами:

$$K_1 = (8r_e^2 NZ^2 A^{-1} G)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2G} \left(0,9817 + \frac{1}{2x_0^2} - \frac{\pi^{1/2}}{x_0} \right) \right], \quad (3)$$

$$K_2 = \left[4\pi r_e^2 NZ A^{-1} \left\{ \ln \left(2 \frac{\varphi_0}{\varphi_m} \right) - 1 \right\} \right]^{1/2} = \\ = (4\pi r_e^2 NZ^2 A^{-1} G)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2G} (\ln(8x_0^2) - 1,0365) \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где, в свою очередь,

r_e — классический радиус электрона,

N — число Авогадро,

Z и A — атомный номер и атомный вес вещества рассеивателя,

φ_m — угол, учитывающий экранирующий эффект атомных электронов [2],

φ_0 — максимальный угол однократного рассеяния обусловленный конечными размерами ядра [3].

По Ольберту [3], угол φ_0 определяется соотношением:

$$\varphi_0 = \varphi_m \cdot a \cdot R_n^{-1}, \quad (5)$$

где $a = 1,67 \times 10^4 r_e \cdot Z^{-1/2}$ — радиус атома, $R_n = 0,49 \cdot r_e A^{1/2}$ — радиус ядра. Параметр x_0 равен $x_0 = \varphi_0 (2GQ)^{-1/2}$, где $Q = 4\pi \frac{Nt}{A} \left(\frac{Ze^2}{p\beta c} \right)^2$.

Величина G определяется приближенной формулой:

$$G \simeq 5,66 + 1,24 \log_{10} \left[\frac{Z^{1/2} \cdot A^{-1} \cdot t}{1,133^2 + 3,76 \left(\frac{Z}{137} \right)^2} \right] \quad (6)$$

Анализ показывает, что K_1 и K_2 весьма слабо зависят от β в широком интервале изменения значений β , и в основном определяются свойствами рассеивающего вещества.

Если в формулах (3) и (4) пренебречь членами порядка $\frac{1}{2G}$, то получим значения K_1 и K_2 в „нормальном приближении“.

Заметим, что метод определения массы одиночной частицы по рассеянию и остаточному пробегу широко применяется в фотоэмульсиях. Однако в этом случае имеется возможность разбить траекторию на много участков, и получив большое число значений углов рассеяния, обеспечить достаточно хорошую статистическую точность в определении массы.

В многопластинных камерах Вильсона число пластин (и следовательно число углов рассеяния для одиночной траектории) обычно не превышает 10—15 и, следовательно, статистическая точность в измерении массы отдельной частицы невелика. Однако, иногда имеется возможность сгруппировать частицы по какому-либо признаку (например, по типу распада, как это было сделано для S -частиц в работе [4]), и определить среднее значение их массы с большей статистической точностью.

II. Экспериментальная часть

Для проверки формул (1) и (2) мы использовали текущие экспериментальные данные, полученные на магнитном спектрометре Алиханяна—Алиханова, сочлененном с большой многопластинной камерой Вильсона (лаборатория космических лучей на горе Арагац, высота 3250 м над уровнем моря). Подробное описание прибора приведено в работе [5].

В зазоре электромагнита помещается годоскопическая система счетчиков Гейгера—Мюллера малого диаметра, позволяющая с хорошей точностью измерить кривизну траектории частицы в магнитном поле и тем самым определить ее импульс.

Под зазором магнита расположена камера Вильсона прямоугольной формы объемом $620 \times 280 \times 180$ мм³, управляемая годоскопической системой.

В данной серии измерений камера управлялась таким образом, что система регистрировала частицы остановившиеся в пластинах камеры Вильсона. Внутри камеры было расположено семь медных пластин: две пластины толщиной 0,5 см и пять пластин толщиной 0,2 см каждая.

В тех случаях, когда при остановке частицы в пластинах наблюдался градиент ионизации вдоль следа, то-есть торможение частицы было обусловлено ионизационными потерями энергии,—по пробегу и импульсу, измеренному в телескопе, могла быть определена ее масса.

Было отобрано 145 протонов, 153 μ -мезонов и 114 π -мезонов остановившихся в пластинах в освещенном объеме камеры.

До момента остановки в пластине эти частицы испытали рассеяние во всех вышележащих пластинах.

Измеряя по фотографии проекции углов рассеяния и соответствующие остаточные пробеги мы, независимо, определили их массу по описываемому методу, подставляя в левую часть формул (1) и (2) соответственно экспериментальные значения $\langle \eta \rangle_{\text{экс}}$ и $\langle \eta^2 \rangle_{\text{экс}}^{1/2}$.

Углы рассеяния в пластинах измерялись по фотографиям независимо двумя наблюдателями при помощи угломера и бралось среднее значение из большого числа измерений.

Среднеквадратичная ошибка в измерении угла составляет 0,6°.

Отметим, что учитывались только углы рассеяния, соответствующие остаточным пробегам, равным двум или большему числу пластин, то-есть если пластине, в которой остановилась частица, приписать номер $K=0$ и нумеровать пластины по порядку от этой пластины вверх, то учитывались углы рассеяния в пластинах с номерами $K > 2$. Углы рассеяния в пластинах $K=1$ не учитывались, так как при этом большая неопределенность в пробеге значительно снижает точность определения массы частицы [1].

Остаточные пробеги частицы вычислялись с учетом углов входа траектории в каждую пластину.

III Экспериментальные результаты и их обсуждение

Вычисление масс мезонов и протонов по формулам (1) и (2) производилось отдельно для случаев рассеяния частиц в пластинах толщиной 0,5 см и случаев рассеяния в пластинах толщиной 0,2 см. При этом K_2 вычислялось по формулам (4) и (5), а K_1 —на основании приближенной формулы (3):

$$K_1 \approx (8r_e^2 NZ^2 A^{-1} G)^{1/2} \left(1 + \frac{0,4}{2G} \right).$$

Полученные значения масс протонов и мезонов сведены в таблицу 1.

Ошибки в определении массы, приведенные в таблице 1, являются статистическими ошибками, вычисленными на основании соответствующих формул работы [1].

$$\frac{(\Delta m)^+}{m} = \frac{1}{1-\alpha} \left[1 + \left(\frac{2}{n} \right)^{1/2} + \frac{2}{3n} + \frac{3}{4} \left(\frac{2}{n} \right)^{3/2} + \dots \right]^{1/2} - 1 \quad (7a)$$

$$\frac{(\Delta m)^-}{m} = \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{2}{n} \right)^{1/2} + \frac{2}{3n} - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{n} \right)^{3/2} + \dots \right]^{1/2} - 1. \quad (7b)$$

где n —число значений величин η .

При вычислении масс на основании экспериментальных данных следует учесть следующие факторы:

1. Измеряемая на фотографии проекция угла рассеяния не равна проекции угла рассеяния на плоскость, проходящую через первоначальную траекторию. Реально, в каждом случае рассеяния частицы в пластине, плоскость фотографирования находится под различным углом к отрезку траектории до рассеяния; следовательно, в разных случаях условия проектирования траекторий на плоскость фотографирования различны.

Поэтому следует иметь ввиду, что только в некоторых условиях опыта, например, когда невелик угол между осью фотообъектива и направлением от объектива на объект съемки, и траектория до рассеяния идет под небольшим углом к плоскости фотографирования—для приближенного расчета массы можно непосредственно использовать углы, полученные на фотографии.

В нашем случае фотоаппарат расположен относительно близко к камере (на расстоянии 65 см от переднего стекла камеры) и для мезонных траекторий, которые из-за большой кривизны в магнитном поле попадают в боковые части камеры, и кроме того, рассеиваются в пластинах на сравнительно большие углы—имеет место указанное выше несоответствие углов.

* В формуле (3) поправочный член при $\frac{1}{2G}$ зависит от β . Для наших фильтров среднее значение этого поправочного члена для протонов и мезонов равно 0,4.

Значения масс мезонов, приведенные в таблице 1, исправлены на вышеуказанный эффект.

Масса μ -мезонов, вычисленная для рассеивателя толщиной 0,2 см занижена, что является следствием того, что экспериментальное распределение углов рассеяния на больших углах идет выше, чем соответствующая теоретическая кривая кулоновского рассеяния.

2. Протоны, регистрируемые нашей установкой, из-за малой кривизны траекторий в магнитном поле, попадают, в основном, в центральную часть камеры и идут под небольшим углом к плоскости фотографирования. Поэтому, при расчете массы, с достаточно хорошим

Таблица 1

Тип частиц	Метод	Используемая теория ²	0,5 см Си		0,2 см Си	
			число случаев рассеяния	масса в m_e	число случаев рассеяния	масса в m_e
Протоны	$\langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$	1	290	1500 ± 140	290	1710 ± 158
		2	290	1400 ± 131	290	1510 ± 140
	$\langle \eta \rangle$	1	290	1745	290	1920
		2	290	1680	290	1800
μ -мезоны	$\langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$	1	348	156 ± 14	344	202 ± 18
		2	348	146 ± 13	344	179 ± 16
	$\langle \eta \rangle$	1	348	158	344	205
		2	348	152	344	193
π -мезоны	$\langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$	1	257	264 ± 26	271	269 ± 26
		2	257	246 ± 24	271	238 ± 23
	$\langle \eta \rangle$	1	257	317	271	288
		2	257	305	271	271

1—по теории Ольберта для конечных размеров ядра.

2—в „нормальном“ приближении.

приближением могут быть непосредственно использованы углы измеренные на фотографии. Полученное в этом случае заниженное значение массы обусловлено наличием аномально больших углов рассеяния, возникающих при ядерном взаимодействии протонов с веществом пластин. Как видно из (1) и (2), даже небольшое число аномально больших углов рассеяния может привести к значительному уменьшению вычисленной массы.

Значение массы протонов, полученное при исключении из рассмотрения значений $\eta > 3 \langle \gamma^2 \rangle_{\text{эксп}}^{1/2}$ для толщины рассеивателя 0,5 см равно $(1875 \pm 175) m_e$, вместо $(1500 \pm 140) m_e$, которое получается по всем данным.

Подобный же эффект имеет место и для π -мезонов. Однако, значение масс π -мезонов по всем данным равно $(264 \pm 26) m_e$ и при

исключении из рассмотрения значений $\eta > 3 \langle \eta^2 \rangle_{\text{экст.}}^{1/2} = (287 \pm 29) m_e$ в пределах статистических ошибок одинаково хорошо согласуются с истинной π -мезонной массой.

Работы по рассеянию частиц, выполненные в последнее время, показывают, что рассеяние частиц лучше описывается функцией распределения Мольер [2] для точечного ядра, чем функцией распределения для протяженного ядра. Если в основу вычисления $\langle \eta \rangle$ и $\langle \eta^2 \rangle^{1/2}$ положить функцию распределения рассеяния для точечного ядра, то коэффициенты K_1 и K_2 (формул (1) и (2)) увеличатся, в соответствии с чем увеличатся и значения масс.

Подробная работа по этому поводу будет публиковаться.

Авторы выражают благодарность Алиханяну А. И. и Тер-Микаеляну М. Л. за интерес к работе и участие в обсуждении полученных результатов.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 29 X 1957

Յ. Ռ. Զարուբյուհյան, Մ. Ի. Դայոն, Ա. Ա. Թեր-Սահակյան

ԼԻՑԲԱՎՈՐՄԱՆ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՄԱԱՍՍՅԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԸՍՏ ՆՐԱՆՑ ՑՐՄԱՆ ՈՒ ՄՆԱՑՈՐԴԱՅԻՆ ՎԱԶՔԻՒՆ ԿԵԼՍՈՆԻ ԲԱԶՄԱԹԻԹԵՂԱՅԻՆ ԿԱՍԵՐԱՅՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատությունը նայատանկ է $|J|$ -ում առաջարկված լիցբավորված մասնիկների մասսայի որոշման մեթոդի (ըստ նրանց ցրման ու մնացորդային վազքի՝ Վ.Լ.Թոմի բազմաթիվեղային կամերաներում) էքսպերիմենտալ ստուգումը՝ Պրոտոնների և մեզոնների համար, որոնք նախապես բացահայտվել են որիշ, անկախ մեթոդով, մասսաները որոշվել են ըստ ցրման և մնացորդային վազքի 0,5 և 0,2 սմ հաստություն ունեցող արույրե թիթեղներում:

Էքսպերիմենտալ ավյալները համեմատվել են վերջավոր չափեր ունեցող միջուկի համար Օլբերտի ցրման տեսության հետ [3]:

Պրոտոնների մասսայի մեծությունն ստացվել է պակասորդով, որը պայմանավորված է այն անոմալ մեծ ցրման անկյունների առկայությամբ, որոնք առաջանում են թիթեղների նյութի հետ պրոտոնների՝ միջուկային փոխազդեցություններից:

Եթե հաշվի չառնենք բոլոր $\eta > 3 \langle \eta^2 \rangle^{1/2}$ էքսպ. արժեքները, որտեղ $\eta = \varphi \cdot R^2$, φ — ցրման անկյունն է, R — մնացորդային վազքը $q/\alpha d^2$ -ով, $\alpha = 0,55$ հաստատուն է բոլոր էլեմենտների համար, ապա պրոտոնի էքսպերիմենտալ մասսայի մեծությունը լավ համընկնում է պրոտոնի ճշգրիտ մասսայի հետ:

π մեզոնի մասսայի մեծությունը, ինչպես բոլոր զրանցված անկյունների լրիվ դիտարկման ղեկքում, այնպես էլ $\eta > 3 \langle \eta^2 \rangle^{1/2}$ էքսպ. արժեքների բացաման ղեկքում, ստատիստիկ սխալների առանձնանում, միատեսակ լավ համընկնում է π մեզոնի մասսայի ճշգրիտ մեծություն հետ:

ը մեզոնների մասսայի մեծությունը, հաշված 0,5 սմ հաստութիւն թիթեղի դեպքում, ստացվում է պահտորդով, որը հետեանք է այն բանի, որ ցրման անկյունների էքսպերիմենտալ բաշխումը մեծ անկյունների դեպքում գնում է վերջավոր չափեր անկող միջուկի համար կուլոնյան ցրման տեսական կորից բարձր (պատճառն առավել պարզ չէ):

ЛИТЕРАТУРА

1. Annis, M. Bridge, H. S. and Olbert, S. Phys. rev. 89, 1216 (1953).
2. Moliere, G. Z. Naturforsch. 3A, 78 (1948).
3. Olbert, S. Phys. rev. 87, 319 (1952).
4. Bridge, H. S. Peyrou, C. Rossl, B. and R. Safford. phys. rev. 90, 921 (1953).
5. Дайон М. И., Федоров В. М., Мерзон Г. И., Шостакович Н. В., ПТЭ, 1, 1957.

НАУЧНАЯ ЗАМЕТКА

М. М. Джрбашян

Об обратной задаче наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$

Обозначим через W_σ совокупность всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$, для которых

$$F(x) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Целью настоящей заметки является доказательство обратной теоремы наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$, когда аппроксимация производится функциями из класса W_σ .*

Пусть функция $\psi(\sigma) > 0$ определена на полуоси $[0, +\infty)$, абсолютно непрерывна, не возрастает и

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \psi(\sigma) = 0, \quad (1)$$

тогда справедлива.

Теорема. Для заданной функции $\psi(\sigma)$ существует четная вещественная функция $f_0(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, для которой

$$\min_{F \in W_\sigma} \|f_0 - F\| =$$

$$= \min_{F \in W_\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x) - F(x)|^2 dx = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < \infty. \quad (2)$$

Почти всюду на $(-\infty, +\infty)$

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \psi'(u) \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin xu}{u} du, \quad (3)$$

при этом для данного $\sigma > 0$ равенство (2) реализует функция

$$F_{0,\sigma}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma} \left\{ -\frac{1}{2} \psi'(u) \right\}^{\frac{1}{2}} \cos z u du. \quad (4)$$

* В случае равномерного приближения полиномами на конечном отрезке, аналогичный результат впервые был установлен С. Н. Бернштейном [1].

Доказательство. Очевидно, что функция $\left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}}$ почти всюду определена на полуоси $[0, +\infty)$ и принадлежит к классу $L_2(0, +\infty)$. Отсюда по теореме Планшереля [2] функция $f_0(x)$, определяемая по формуле (3), принадлежит к классу $L_2(-\infty, +\infty)$ и четная.

Из (3) и (4) по формуле Парсеваля получим:

$$\mu(f_0 - F_{0,\sigma}) = 2 \int_0^{\infty} \left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\} du = \psi(\sigma). \quad (5)$$

Пусть $F(z)$ —произвольная функция из класса W_σ , тогда по теореме Палей и Винера имеет место представление вида

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iaz} \varphi(u) du, \quad (6)$$

где $\varphi(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ —определенная функция.

Из обобщенной формулы Парсеваля для преобразований Фурье и из формул (3), (4), (6) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{f_0(x) - F_{0,\sigma}(x)\right\} \overline{\{F(x) - F_{0,\sigma}(x)\}} dx = 0, \quad (7)$$

откуда следует формула

$$\mu(f_0 - F) = \mu(f_0 - F_{0,\sigma}) + \mu(F - F_{0,\sigma}). \quad (8)$$

Но

$$\mu(F - F_{0,\sigma}) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}} - \varphi(u) \right|^2 du, \quad (9)$$

поэтому из (8), (9) и (5) имеем

$$\min_{F \in W_\sigma} \mu(f_0 - F) = \mu(f_0 - F_{0,\sigma}) = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < \infty, \quad (10)$$

при этом равенство достигается лишь при $\varphi(u) = \left\{-\frac{1}{2}\psi'(u)\right\}^{\frac{1}{2}}$ на $(-\sigma, \sigma)$, т. е. лишь при

$$F(z) = F_{0,\sigma}(z),$$

чем завершается доказательство теоремы.

Дополнительно получим теперь интегральное представление всех четных вещественных функций из $L_2(-\infty, +\infty)$, обладающих свойством (10).

Пусть вещественная функция $f_0^*(x)$, четная, из класса $L_2(-\infty, +\infty)$

и

$$\min_{F \in W_\sigma} \mu(f_0^* - F) = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < +\infty. \quad (11)$$

Обозначим

$$g_0(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{du} \int_0^\infty f_0^*(x) \frac{\sin xu}{x} dx \in L_2(-\infty, +\infty)$$

и

$$F_{0,\sigma}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-izu} g_0(u) du \in W_\sigma,$$

тогда по равенству Парсеваля

$$\mu(f_0^* - F_{0,\sigma}) = \int_{|u| > \sigma} |g_0(u)|^2 du = 2 \int_\sigma^\infty |g_0(u)|^2 du, \quad (12)$$

так как $g_0(u)$ также вещественная четная функция.Как и выше, легко убеждаемся, что если $F \in W_\sigma$ произвольная, то

$$\mu(f_0^* - F) = \mu(f_0^* - F_{0,\sigma}) + \mu(F - F_{0,\sigma}),$$

откуда и из формул (11) и (12) получим

$$\begin{aligned} \min \mu(f_0^* - F) &= \mu(f_0^* - F_{0,\sigma}) = \\ &= 2 \int_\sigma^\infty |g_0(u)|^2 du = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < +\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что почти всюду на $(0, +\infty)$

$$g_0(u) = \varepsilon(u) \left\{ -\frac{1}{2} \psi'(u) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\varepsilon(u)$ произвольная измеримая на $[0, +\infty)$ функция, принимающая лишь значения ± 1 .

Но тогда из определения функции будет следовать, что

$$f_0^*(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \varepsilon(u) \left\{ -\frac{1}{2} \psi'(u) \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin xu}{u} du. \quad (14)$$

Таким образом, четные вещественные функции из $L_2(-\infty, +\infty)$ обладающие свойством (10) представляются в виде (14).

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ՝
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ $L_2(-\infty, +\infty)$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.

Եթե $\psi(\sigma) > 0$ բացարձակ անընդհատ, չանող ֆունկցիա է $[0, +\infty)$ կիսառանցքի վրա և $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \psi(\sigma) = 0$, ապա գոյություն ունի $L_2(-\infty, +\infty)$ դասին պատկանող իրական, զույգ $f_0(x)$ ֆունկցիան, որի համար

$$\min_{E \in W_\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x) - F(x)|^2 dx = \psi(\sigma),$$

որտեղ, որպես բույլատրելի ֆունկցիաների W_σ դաս, վերցված են էքսպոնենցիալ ախի σ -ից ոչ բարձր աստիճան ունեցող ամբողջ ֆունկցիաները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций, гл. V.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье (1948), гл. III, V.

А. А. Талалян и И. О. Хачатрян

К обратной задаче теории наилучших приближений

Как известно, С. Н. Бернштейном установлена следующая *Теорема*. Каковы бы ни были числа

$$A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$$

существует такая непрерывная, 2π -периодическая функция $f(x)$, для которой именно эти числа являются наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами.

Далее, в работе М. М. Джрбашяна, посвященной обратной задаче теории наилучших приближений (и опубликованной в настоящем номере, стр.), установлен аналогичный результат в случае приближения функций класса $L_2(-\infty, \infty)$ целыми функциями экспоненциального типа по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$.

В связи с указанным результатом Джрбашяна возникла аналогичная задача при равномерном приближении на оси. Решению этой задачи и посвящена настоящая заметка.

Именно, утверждается следующее.

Теорема. Какова бы не была невозрастающая функция $\psi(\sigma)$, определенная на $[0, +\infty)$ и стремящаяся к нулю при $\sigma \rightarrow +\infty$, существует равномерно непрерывная и ограниченная на всей оси функция $f(x)$, для которой наилучшее приближение функциями класса B_σ^* равно $\psi(\sigma)$.

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma) \quad (0 \leq \sigma < +\infty).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы С. Н. Бернштейна [1].

Доказательства следующих лемм не отличаются от доказательств соответствующих лемм для случая конечного промежутка.

Лемма 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции из B_σ^* , то величина

$$\varphi(\lambda) = E_\sigma(f + \lambda g)$$

есть непрерывная функция аргумента λ .

* Через B_σ обозначается совокупность всех целых трансцендентных функций экспоненциального типа с показателем $< \sigma$, для которых

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty.$$

** Через B мы обозначаем класс функций, равномерно непрерывных и ограниченных на всей оси.

Лемма 2. Если в условиях леммы 1 функция $g(x)$ не входит в B_ε , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = +\infty.$$

Лемма 3. Если $T(x)$ — функция из класса B_ε , то для всякой $f(x) \in B$ имеет место

$$E_\varepsilon(f+T) = E_\varepsilon(f).$$

Имеет место также следующая

Лемма 4. Если $f(x)$ есть функция из класса B , то для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon' > \varepsilon$ можно найти функцию $T(x)$ из B_ε такую, что

$$E_\varepsilon(f+T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

В самом деле, пусть $T(x) \in B_\varepsilon$ такая, что

$$|f(x) - T(x)| \leq E_{\varepsilon'}(f).$$

Очевидно,

$$E_\varepsilon(f-T) \leq E_{\varepsilon'}(f).$$

С другой стороны,

$$E_\varepsilon(f-T) > E_{\varepsilon'}(f-T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

Следовательно

$$E_\varepsilon(f-T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

Лемма 5. Пусть $f(x)$ есть функция класса B и $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > \varepsilon$. Если

$$A > E_{\varepsilon'}(f)$$

то существует $T(x) \in B_\varepsilon$ такая, что

$$E_\varepsilon(f+T) = A.$$

В самом деле. Случай $A = E_{\varepsilon'}(f)$ сводится к лемме 4. Пусть $A > E_{\varepsilon'}(f)$. Возьмем функцию $T(x) \in B_\varepsilon$ такую, что

$$E_\varepsilon(f+T) = E_{\varepsilon'}(f).$$

Это можно сделать в силу предыдущей леммы.

После этого возьмем какую-нибудь функцию $T_0(x) \in B_\varepsilon$ с показателем, большим чем ε , и рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = E_\varepsilon(f+T+\lambda T_0)$$

Так как

$$\varphi(0) = E_{\varepsilon'}(f) < A,$$

то в силу леммы 1 и леммы 2 существует λ_0 такое, что

$$\varphi(\lambda_0) = E_\varepsilon(f+T+\lambda_0 T_0) = A.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть имеем $A_0 > A_1 > A_2 > \dots > A_n > 0$ и

$$0 \leq \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma.$$

Существует функция $T(x) \in B_\varepsilon$ такая, что

$$E_{\sigma_k}(T) = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

и

$$|T(x)| \leq A_0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Эта лемма доказывается путем многократного применения леммы 5, аналогично случаю конечного промежутка.

Употребляя эту лемму, можно доказать, что для любых последовательностей $A_0 > A_1 > \dots > A_n$ и $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$, где $A_n \rightarrow 0$ и $\tau_n \rightarrow +\infty$, существует $f(x) \in B$, такая, что имеем

$$E_{\tau_k}(f) = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

Доказательство этого факта тоже аналогично случаю конечного промежутка.

Для доказательства теоремы поступаем следующим образом.

Пусть $\psi(\sigma)$ невозрастающая функция, определенная на $[0, +\infty)$ и стремящаяся к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$.

Перенумеруем все ее точки разрыва:

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

Рассмотрим систему последовательностей $\{\sigma_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) точек $(0, +\infty)$, обладающую следующими свойствами:

1) Для любого n

$$0 \leq \sigma_0^{(n)} < \sigma_1^{(n)} < \sigma_2^{(n)} < \dots < \sigma_k^{(n)} < \dots; \sigma_k^{(n)} \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow +\infty$$

и точки последовательности $\{\sigma_k^{(n)}\}$ принадлежат последовательности $\{\sigma_k^{(n+1)}\}$.

2) Совокупность точек $\{\sigma_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) всюду плотна на $[0, +\infty)$ и содержит в себе все точки разрыва функции $\psi(\sigma)$, т. е. точки τ_n ($n = 1, 2, \dots$) и точку $\sigma = 0$.

Для каждого фиксированного n существует функция $f_n(x)$, такая, что

$$E_{\sigma_k^{(n)}}(f_n) = \psi(\sigma_k^{(n)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$|f_n(x)| \leq \psi(0); \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Из полученной последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

В самом деле. Заметим, что все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ обладают тем свойством, что

$$E_{\sigma_k^{(1)}}(f_n) = \psi(\sigma_k^{(1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$0 \leq \sigma_0^{(1)} < \sigma_1^{(1)} < \dots < \sigma_n^{(1)} < \dots; \sigma_n^{(1)} \rightarrow +\infty$$

и

$$\psi(\sigma_0^{(1)}) \geq \psi(\sigma_1^{(1)}) \geq \dots \geq \psi(\sigma_n^{(1)}) \geq \dots; \psi(\sigma_n^{(1)}) \rightarrow 0; \sigma_n^{(1)} \rightarrow +\infty.$$

Поэтому выделение равномерно сходящейся подпоследовательности $\{f_{n_k}(x)\}$ делается аналогично случаю конечного промежутка.

Пусть $f(x)$ есть предел последовательности $\{f_{n_k}\}$. Покажем, что $f(x)$ есть искомая функция, т. е.

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < +\infty.$$

В самом деле, если σ есть число, входящее в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$), то, очевидно, для достаточно большого числа i_0 при $k \geq i_0$ для всех функций $f_{n_k}(x)$ будет

$$E_\sigma(f_{n_k}) = \psi(\sigma).$$

Отсюда легко следует, что для функции $f(x)$ тоже

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma).$$

Пусть теперь σ — любое число из $[0, +\infty)$, не входящее в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$.

σ будет точкой непрерывности функции $\psi(\sigma)$, так как все ее точки разрыва $\{\tau_n\}$ входят в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$, ($n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$); $\sigma > 0$ так как точка $\sigma = 0$ входит в множество $\{\sigma_k^{(n)}\}$. Если теперь σ' и σ'' принадлежат множеству $\{\sigma_k^{(n)}\}$ и $0 \leq \sigma' < \sigma < \sigma''$, то будет

$$E_{\sigma'}(f) \leq E_\sigma(f) < E_{\sigma''}(f),$$

где

$$E_{\sigma'}(f) = \psi(\sigma'); \quad E_{\sigma''}(f) = \psi(\sigma'').$$

Но в силу плотности множества $\{\sigma_k^{(n)}\}$, σ' и σ'' можно выбрать сколь угодно близкими к σ , а следовательно, в силу непрерывности функции $\psi(\sigma)$ в точке σ , будем иметь.

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma).$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 II 1958

Ս. Ս. Թալալյան և Ի. Օ. Խաչատրյան

ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ս. Ն. Բերնշտեյնի կողմից ապացուցված էր հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. Նախօրոք տրված ցանկացած A_0, A_1, A_2, \dots թվերի համար, որանդ

$$A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0,$$

գոյություն ունի այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա 2π պարբերությամբ, որի համար հենց այդ թվերը հանդիսանում են լավագույն մոսավորությունների հոանկյունաչափական բազմանդամներով:

Այնուհետև U, U' : Ջրբաշյանի, լավագույն մոտավորությունների տեսության հակադարձ խնդրին նվիրված աշխատության մեջ (որը հրատարակված է ներկա համարում) ապացուցված է նման թեորեմ $L_2(-\infty, \infty)$ դասի ֆունկցիաները այդ տարածության մեարիկալով էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաներով մոտարկելու դեպքում:

U, U' . Ջրբաշյանի նշված արդյունքների կապակցությամբ նման հարց առաջանում է առանցքի վրա հավասարաչափ մոտարկումների դեպքում:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. $(0, +\infty)$ -ի վրա որոշված ցանկացած չափող և զրոյի ձգտող $\psi(\sigma)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի ամբողջ առանցքի վրա սահմանափակ և հավասարաչափ անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիա, որի համար B_σ դասի ֆունկցիաներով լավագույն մոտավորությունը հավասար է $\psi(\sigma)$

$$E_\sigma(f) = \psi(\sigma) \quad (0 < \sigma < +\infty):$$

Թեորեմի ապացույցը կատարվում է մի քանի լեմմաների օգնությամբ, որոնք հանդիսանում են վերջավոր ինտերվալի համար հայանի լեմմաների տնայողները:

Լեմմա 1. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ պատկանում են B դասին, ապա

$$\varphi(\lambda) = E_\sigma(f + \lambda g)$$

մեծությունը անընդհատ ֆունկցիա է λ -ից:

Լեմմա 2. Եթե լեմմա 1-ի մեջ $g(x)$ -ը չի պատկանում B_σ -ին, ապա

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty:$$

Լեմմա 3. Եթե $T(x)$ -ը պատկանում է B_σ -ին, ապա ցանկացած $f(x) \in B$ ֆունկցիայի համար

$$E_\sigma(f + T) = E_\sigma(f):$$

Լեմմա 4. Եթե $f(x) \in B$, ապա ցանկացած $\sigma \geq 0$ և $\sigma' > \sigma$ թվերի համար կարելի է գտնել $T(x) \in B_{\sigma'}$ ֆունկցիա, այնպես որ

$$E_\sigma(f + T) = E_{\sigma'}(f):$$

Լեմմա 5. Ենթադրենք ունենք $A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_n \geq 0$ և $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma$:

Գոյություն ունի $T(x) \in B_\sigma$ այնպես, որ

$$E_{\sigma_k}(T) = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n:$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Н. Бернштейн. «Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций», Собрание сочинений, том II, стр. 292.

* B_σ -ով նշանակվում է բոլոր էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց ցուցիչը $< \sigma$ և որոնց համար

$$\sup_{-\infty < x < \infty} (f)(x) < \infty;$$

А. А. Баблоян

Кручение призматических стержней коробчатого поперечного сечения с трещиной

Решение получено в виде рядов по тригонометрическим функциям, где коэффициенты интегрирования определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Работа выполнена под руководством Б. Л. Абрамяна.

Определение функции напряжений при кручении сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

при условии, $U(x, y)$ обращается в нуль на контуре сечения.

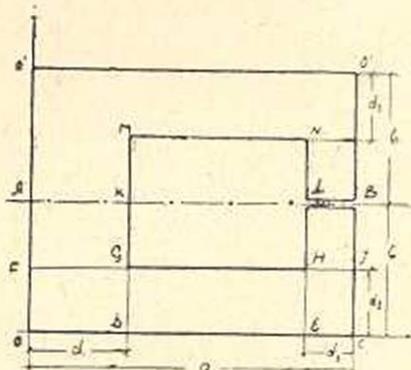
В силу симметрии поперечного сечения функцию $U(x, y)$, для коробчатого профиля с трещиной, ищем только на части $ABCOA$ (фиг. 1) области сечения стержня.

Чтобы распространить решение на всю область сечения, достаточно потребовать, чтобы нормальная производная функции напряжений на оси симметрии области сечения обращалась в нуль, т. е.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (0 \leq x \leq d_1). \quad (2)$$

Пользуясь методом введения вспомогательных функций, как это сделано в работах [1, 2], для функции напряжений получаем следующие выражения:

$$U(x, y) = x(d_1 - x) + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-2} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(y-b)}{d_1}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_1}} \sin \frac{k\pi x}{d_1} \quad (3)$$



Фиг. 1.

в области $\left(\begin{matrix} 0 \leq x \leq d_1 \\ d_2 \leq y \leq b \end{matrix} \right)$;

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & y(d_2 - y) + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k} \times \\
 & \times \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
 & + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

в области $\left(\begin{matrix} d_1 \leq x \leq a-d_3 \\ 0 \leq y \leq d_2 \end{matrix} \right)$;

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & (a-x)(d_3 - a + x) + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-1} \times \\
 & \times \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_3}} \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} + \\
 & + 8d_3^2 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_3}} \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} \quad (5)
 \end{aligned}$$

в области $\left(\begin{matrix} a-d_3 \leq x \leq a \\ d_2 \leq y \leq b \end{matrix} \right)$;

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & x(d_1 - x) + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-2} \times \\
 & \times \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi (b-d_2)}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_1}} \sin \frac{k\pi x}{d_1} + \\
 & + \frac{8d_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}} \sin \frac{k\pi x}{d_1} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-d_1)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_2^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad (6)
\end{aligned}$$

в области $\begin{pmatrix} 0 \leq x \leq d_1 \\ 0 \leq y \leq d_2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= (a-x)(d_3-a+x) + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-1} \times \\
& \times \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_3}} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} + \\
& + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_2^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z_{4k-3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-d_3)}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d_2}} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_3^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_3}} \right] \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} \quad (7)
\end{aligned}$$

в области $\begin{pmatrix} a-d_3 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq d_2 \end{pmatrix}$,

где
$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_2)}}}$$
 при $d_1 \geq d_3$, (8)

или
$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_2)}}}$$
 при $d_3 > d_1$. (9)

Неизвестные коэффициенты Z_m , входящие в выражения (3)–(7), определяются из совокупности 4-х бесконечных систем линейных уравнений [3]. Эту совокупность можно записать в виде одной системы

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} Z_n + B_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где

$$A_{4k,4p} = A_{4k,4p-1} = A_{4k,4p-3} = 0;$$

$$A_{4k-2,4p-1} = A_{4k-2,4p-2} = A_{4k-1,4p-1} = A_{4k-1,4p-2} = 0; \quad (11)$$

$$A_{4k-3,4p} = A_{4k-3,4p-2} = A_{4k-3,4p-3} = 0;$$

$$A_{4k-3,4p-1} = \frac{2d_3 k}{\alpha d_2 \pi} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2}\right)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi(b-d_2)}{d_3} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_3}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_3}};$$

$$A_{4k-2,4p} = \frac{2d_2 k \alpha}{\pi d_1} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi(a-d_1)}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi a}{d_2}};$$

$$A_{4k-2,4p-2} = \frac{2d_2 k \alpha}{\pi d_1} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi a}{d_2}};$$

$$A_{4k-1,4p} = \frac{2d_2 k \alpha}{\pi d_3} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi a}{d_2}}; \quad (12)$$

$$A_{4k-1, 4p-3} = \frac{2d_2 k \alpha}{\pi d_3} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_3}\right)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi(a-d_3)}{d_3} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi a}{d_2}};$$

$$A_{4k, 4p-2} = \frac{2d_1 k}{\pi d_2} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_1}{d_2}\right)^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi(b-d_2)}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}};$$

$$B_{4k-3} = \frac{4}{k^2 \pi^3} \frac{d_2}{d_3} \frac{1 - (-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2}} - \frac{2}{k\pi^3} \frac{d_2}{d_3} \left(1 - \frac{2d_2}{k\pi d_3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2}\right) +$$

$$+ \frac{16k}{\pi^4} \frac{d_3}{d_2} \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{p^2 \left[p^2 + \left(\frac{k d_3}{d_2}\right)^2\right]} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_3}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_3}};$$

$$B_{4k-2} = \frac{4}{k^2 \pi^3} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \frac{1 - (-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}} - \frac{2}{k\pi^2} \frac{d_1 d_2}{d_3^2} \left(1 - \frac{2d_1}{k\pi d_2} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1}\right);$$

$$B_{4k-1} = \frac{4}{k^2 \pi^3} \frac{1 - (-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}} - \frac{2}{k\pi^2} \frac{d_2}{d_3} \left(1 - \frac{2d_3}{k\pi d_2} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_2}\right);$$

$$B_{4k} = \frac{4}{k^2 \pi^3} \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 \frac{1 - (-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}} - \frac{2d_1 d_2}{k\pi^2 d_3^2} \left(1 - \frac{2d_2}{k\pi d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2}\right).$$

(13)

Система (10) вполне регулярна. Сумма модулей этой системы оценивается неравенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_2)}\right]} \quad (14)$$

при $d_1 > d_2$;

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_3}(b-d_2)}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_2)}\right]} \quad (15)$$

при $d_2 > d_1$.

Эту оценку можно получить таким же путем, как это сделано в работе [2]. Свободные члены системы (10) ограничены сверху и стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Для частного случая, когда $d_1 = a - d_3$, т. е. когда мы имеем прямоугольное сечение с T-образной трещиной, система (10) остается вполне регулярной.

Жесткость при кручении призматического стержня коробчатого профиля с трещиной определяется формулой

$$C = 2G \iint U(x, y) dx dy = 4G \left[\int_0^a \int_0^b U(x, y) dx dy + \int_{d_1}^{a-d_1} \int_0^{d_2} U(x, y) dx dy + \int_{a-d_1}^a \int_0^b U(x, y) dx dy \right]. \quad (16)$$

Подставляя значения $U(y, x)$ из (3)–(7) в (16) и произведя интегрирование, для жесткости C получим следующую формулу:

$$C = 4G \left[\frac{d_1^3 b}{6} + \frac{d_3^3 b}{6} + \frac{d_2^3 (a - d_1 - d_3)}{6} + \frac{16}{\pi^5} \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{\pi^5} \left[d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + d_2^4 \left(\operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} + \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right) - d_3^4 \left(\operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d_3} \right) \right] + \frac{2d_3^2 d_1^2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{z_{4\kappa-2}}{k^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi (b - d_2)}{d_1}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_1}} \right) - \frac{2d_2^2 d_3^2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{z_{4\kappa}}{k^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi (a - 2d_1)}{2d_2}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2d_2}} \right) - \frac{2d_2^2 d_3^2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{z_{4\kappa-3}}{k^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi (a - 2d_3)}{2d_2}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2d_2}} \right) - \frac{2d_3^4}{\pi^2} \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{z_{4\kappa-1}}{k^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi (b - 2d_2)}{2d_3}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2d_3}} \right) \right]. \quad (17)$$

В качестве примера вычислена жесткость при кручении для призматического стержня квадратного сечения ($a = 2b$) с несимметричным квадратным вырезом [$a - (d_1 + d_3) = 2(b - d_2)$], при наличии трещины вдоль линии LB .

В таблице 1 приведены значения жесткостей для данного профиля с избытком (C^+) и с недостатком (C^-), вычисленные по формуле (17), а также расчетные значения жесткости для двух отношений $\frac{b}{d_2}$ размеров сечения.

В этой же таблице, для сравнения, приведены значения средних жесткостей при кручении призматического стержня квадратного профиля с несимметричным квадратным отверстием [2] без трещины. Сравнение показывает, что жесткость стержня квадратного профиля, благодаря трещине данного вида, уменьшается; для толсто-стенных профилей $\left(\frac{b}{d_2}=1,5\right)$ приблизительно в четыре раза, а для тонкостенных профилей $\left(\frac{b}{d_2}=10\right)$ в 200 раз.

Таблица 1

$\frac{b}{d_2}$	1,5	10
$\frac{C^-}{Gd_2^3}$	2,6106	30,7544
$\frac{C^+}{Gd_2^3}$	2,6117	30,7678
$C = \frac{C^+ + C^-}{2} b G d_2^3$	2,6111	30,7611
$\frac{C^*}{Gd_2^3}$	10,9259	6635,3
$\frac{C_0}{Gd_2^3}$	2,1250	29,7778
$\beta = \frac{C - C_0}{C} 100\%$	18,6%	3,2%
$\frac{C^*}{C}$	4,2	215,7

Следует заметить, что первые слагаемые в формуле (17)

$$C_0 = \frac{2}{3} G [d_1^3 b + d_2^3 b + d_2^3 (a - d_1 - d_3)] \quad (18)$$

представляют собою сумму жесткостей очень тонких прямоугольников, составляющих коробчатый профиль с трещиной. При расчетах C_0 составляет главную часть величины жесткости, остальные слагаемые в виде сумм исправляют полученный результат. Это исправление незначительное для тонкостенных стержней, а для толстостенных составляет -19% .

В таблице 1, для сравнения, приводятся также значения главной части жесткости C_0 для указанных профилей.

В качестве примера жесткость вычислена также и для призматического стержня квадратного сечения с центрально расположенным квадратным вырезом ($d_1 = d_2 = d_3 = d$) при наличии трещины вдоль линии LB .

В таблице 2 приведены значения жесткостей для этого случая с избытком и с недостатком, а также расчетные значения $C = \frac{C^+ + C^-}{2}$ жесткости для данного случая.

В этой же таблице, для сравнения, приведены некоторые значения жесткостей для квадратного сечения с центральным отверстием без трещины [4].

Таблица 2

$\frac{b}{d}$	$\frac{C^-}{Gd^4}$	$\frac{C^+}{Gd^4}$	$\frac{C}{Gd^4}$	$\frac{C^*}{Gd^4}$	$\frac{C_0}{Gd^4}$	$\frac{C-C_0}{C} 100\%$	$\frac{C^*}{C}$
1,5	2,9635	2,9657	2,9646	11,052	2,6667	10%	3,73
3	6,6898	6,6922	6,6910	139,514	6,6667	0,36%	20,85
4	9,3565	9,3588	9,3576	369,706	9,3333	0,26%	39,51
5	12,0232	12,0255	12,0244	771,526	12,0	0,20%	64,16
6	14,6898	14,6922	14,6910	—	14,6667	0,17%	—
7	17,3565	17,3588	17,3576	—	17,3333	0,14%	—
8	20,0232	20,0255	20,0244	—	20,0	0,12%	—
9	22,6898	22,6922	22,6910	—	22,6667	0,11%	—
10	25,3565	25,3588	25,3576	7034,984	25,3333	0,10%	277,43

Сравнение показывает, что наличие трещины оказывает огромное влияние на жесткость стержня. Для тонкостенного стержня при $\frac{b}{d} = 10$, жесткость стержня из-за трещины может уменьшаться почти в 280 раз. На такое явление обратили внимание А. Н. Динник [5], А. Ш. Локшин [6] и В. Н. Лысков [7], при рассмотрении задачи о кручении круглых трубчатых стержней с трещиной.

Следует отметить, что для тонкостенных стержней (при $\frac{b}{d} \geq 3$) жесткость трубчатого стержня с трещиной может быть определена одной только главной частью C_0 формулы (17).

Для квадратного стержня с центральным отверстием с трещиной эта главная часть определяется формулой:

$$C_0 = \frac{4}{3} Gd^4 \left(2 \frac{b}{d} - 1 \right). \quad (19)$$

В таблице 2 приведены некоторые значения C_0 , вычисленные по формуле (19). Сравнение показывает, что для тонкостенных стержней главная часть C_0 почти совпадает с точным значением жесткости. При $\frac{b}{d} \geq 3$ расхождение формулы (19) от точной не превышает 0,5%.

Ս. 2. Բաբլոյան

ՃԵՂՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՐԿՂԱԶԵՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ
ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈՒՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում տրվում է ճեղք ունեցող արկղաձև լայնական հատվածքով պրիզմատիկ ձողերի ուղորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը:

Լուծման ժամանակ կիրառվել է Ն. Ս. Հարությունյանի մշակած՝ օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման մեթոդը: Խնդրի լուծումը բերված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը, իսկ ինտեգրման գործակիցները որոշելու համար ստացված են գծային անվերջ հավասարումների սխեմաներ: Ապացուցված է, որ ստացված անվերջ սխեմաները լիովին սեղանավոր են, իսկ ազատ անդամների նվազման կարգը $\frac{1}{m}$ -ից ցածր չէ:

Ուղորման կոշտությունը որոշելու համար ստացված է հաշվային բանաձև: Բերված են թվային օրինակներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, том XIII, вып. 5, 1949, стр. 551—556.
2. Гулкаян Н. О. О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Известия АН АрмССР, серия ф.-м. наук, том X, № 6, 1957.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М., 1949.
4. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, том XIV, вып. 3, 1950.
5. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. изд. АН СССР, М., 1955, стр. 324.
6. Локшин А. Ш. Кручение вала секторного сечения. Изв. Днепропетровского горного института, 1928.
7. Лысков В. Н. Кручение пала секторного сечения. Изв. Донского политехнического института, том XIV, 1930.

М. М. Манукян

Температурные напряжения от экзотермии цемента в блоках типа плиты, с учетом ползучести бетона

В работе П. И. Васильева и М. А. Зубрицкой [1] рассматриваются температурные напряжения в плитах, толщина которых значительно меньше двух других размеров. Такими плитами являются некоторые элементы гидротехнических сооружений. Обычно, температурное поле таких элементов практически считается линейным.

В указанной работе дан графо-аналитический способ определения температурных напряжений, возникающих в бетонных плитах от экзотермии цемента. Авторы в общем случае предполагают, что между величинами тепловыделения, прочности, модуля деформации и температурой существует следующая зависимость:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t) &= \int_{\tau_1}^t F_1 [T(\tau); \mathcal{Q}(\tau)] d\tau, \\ R(t) &= \int_{\tau_1}^t F_2 [T(\tau); R(\tau)] d\tau, \\ E(t) &= \int_{\tau_1}^t F_3 [T(\tau); E(\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathcal{Q} —тепловыделение при экзотермическом процессе,

R —прочность,

E —модуль деформации,

T —температура,

t —координата времени,

F_1, F_2, F_3 —функции, вид которых определяется из опытов.

Температурная функция T определится из решения следующих уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta^2 T + \frac{1}{c\rho} F_1 [T, \mathcal{Q}], \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}(t, x, y, z) = \int_{\tau_1}^t F_1 [T(\tau, x, y, z); \mathcal{Q}(\tau, x, y, z)] d\tau,$$

где k —коэффициент теплопроводности,
 c —теплоемкость,
 ρ —плотность.

В случае одномерной задачи уравнения (2) можно решать численно или графоаналитическим методом Шмидта.

После определения температуры, величина температурных напряжений в блоке, заделанном по основанию (при значительной длине последнего), и в блоке типа свободной плиты или стенки, значительной протяженности (при симметричном остывании), определяется, соответственно, следующими соотношениями [1]:

$$\sigma_x(t, z) = \frac{\alpha}{1-\nu} \int_{\tau_1}^t E(\tau, z) \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(t, z) = & -\frac{\alpha}{1-\nu} \int_{\tau_1}^t E(\tau, z) \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E(\tau, z) \frac{\partial T}{\partial \tau} dz}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E(\tau, z) dz} d\tau + \\ & + \frac{\alpha}{1-\nu} \int_{\tau_1}^t E(\tau, z) \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

где E —модуль деформации, определяемый из уравнения:

$$E(t, z) = \int_{\tau_1}^t F_3[T(\tau, z); E(\tau, z)] d\tau, \quad (5)$$

α —коэффициент температурного расширения,
 ν —коэффициент Пуассона,
 l —толщина блока.

В настоящей работе дается решение этой же задачи с учетом ползучести бетона. При решении задачи будем пользоваться теорией ползучести, предложенной Н. Х. Арутюняном [2].

Температурное напряжение в блоке с учетом ползучести бетона, согласно [2], будет выражаться следующим интегральным уравнением:

$$\sigma_x^*(t, z) = \sigma_x(t, z) + E(t, z) \int_{\tau_1}^t \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (6)$$

где σ_x^* —напряжение с учетом ползучести бетона в момент времени t ,
 σ_x —напряжение без учета ползучести бетона,
 $C(t, \tau)$ —мера ползучести бетона.

Как известно [2], интегральное уравнение (6) можно заменить линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами с известной правой частью, решение которого может быть выражено в квадратурах.

Однако вычисление этих квадратур весьма затруднительно, поэтому возникает необходимость отыскания достаточно простого способа решения данной задачи. По нашему мнению, наиболее простым способом решения поставленной выше задачи является метод Н. М. Крылова и Н. И. Боголюбова [3], который дает хорошие результаты.

Применим этот метод к интегральному уравнению (6).

Придавая в (6) верхнему пределу t последовательно возрастающие значения t_1, t_2, \dots, t_n , получим:

$$\sigma_x^*(t_1, z) = \sigma_x(t_1, z) + E(t_1, z) \int_{\tau_1}^{t_1} \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_2, z) = \sigma_x(t_2, z) + E(t_2, z) \left[\int_{\tau_1}^{t_2} \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_n, z) = \sigma_x(t_n, z) + E(t_n, z) \left[\int_{\tau_1}^{t_n} \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right. \\ \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_x^*(\tau, z) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Если интегрировать уравнение (7) по частям и иметь в виду, что $C(t_1, t_1) = 0$, то получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_1, z) = \sigma_x(t_1, z) - \sigma_x(\tau_1, z) E(t_1, z) C(t_1, \tau_1) - \\ - E(t_1, z) \int_{\tau_1}^{t_1} C(t_1, \tau) \frac{\partial \sigma_x^*(\tau, z)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя к интегралу полученного уравнения теорему о среднем получим:

$$\sigma_x^*(t_1, z) = \frac{\sigma_x(t_1, z) - \sigma_x(\tau_1, z) E(t_1, z) [C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi)] \Big|_{\tau_1}^{t_1}}{1 + E(t_1, z) C(t_1, \xi) \Big|_{\tau_1}^{t_1}} \quad (11)$$

Аналогичным образом для моментов времени $t = t_2$ и $t = t_n$ из уравнений (8) и (9) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_2, z) = & \frac{1}{1 + E(t_2, z) C(t_2, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2}} \left\{ \sigma_x(t_2, z) - \right. \\ & - E(t_2, z) [\sigma_x(\tau_1, z) (C(t_2, \tau_1) - C(t_2, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2}) + \\ & \left. + \sigma_x^*(t_1, z) (C(t_2, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} - C(t_2, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2}) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_n, z) = & \frac{1}{1 + E(t_n, z) C(t_n, \xi) \Big|_{t_{n-1}}^{t_n}} \left\{ \sigma_x(t_n, z) - \right. \\ & - E(t_n, z) [\sigma_x(\tau_1, z) (C(t_n, \tau_1) - C(t_n, \xi) \Big|_{t_1}^{t_n}) + \\ & + \sigma_x^*(t_1, z) (C(t_n, \xi) \Big|_{t_1}^{t_n} - C(t_n, \xi) \Big|_{t_1}^{t_n}) + \dots \\ & \left. + \sigma_x^*(t_{n-1}, z) (C(t_n, \xi) \Big|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} - C(t_n, \xi) \Big|_{t_{n-1}}^{t_n}) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Символом $C(t_m, \xi) \Big|_{t_{l-1}}^{t_l}$ здесь обозначено среднее значение функции $C(t_m, \tau)$ в интервале изменения переменной τ , равном $(t_l - t_{l-1})$.

Формулы (11), (12) и (13) в общем виде являются точным решением интегрального уравнения (6). Для определения численных значений искомых напряжений $\sigma_x^*(t_n, z)$ необходимо применить приближенный метод определения средних величин $C(t_k, \xi) \Big|_{t_{l-1}}^{t_l}$. В практических расчетах эту величину с достаточной точностью можно определить с помощью следующего равенства:

$$C(t_k, \xi) \Big|_{t_{l-1}}^{t_l} = C\left(t_k, \frac{t_{l-1} + t_l}{2}\right). \quad (14)$$

Подставляя это выражение в (11), (12) и (13), получим решение интегрального уравнения (6) в следующем виде:

$$\sigma_x^*(t_1, z) = \frac{\sigma_x(t_1, z) - \sigma_x(\tau_1, z) E(t_1, z) \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right]}{1 + E(t_1, z) C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_2, z) = & \frac{1}{1 + E(t_2, z) C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ \sigma_x(t_2, z) - \right. \\ & - E(t_2, z) \left[\sigma_x(\tau_1, z) \left(C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sigma_x^*(t_1, z) \left(C(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) - C(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}) \right) \Bigg] \Bigg\}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t_n, z) = & \frac{1}{1 + E(t_n, z) C(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2})} \left\{ \sigma_x(t_n, z) - \right. \\ & - E(t_n, z) \left[\sigma_x(\tau_1, z) \left(C(t_n, \tau_1) - C(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) \right) + \right. \\ & + \sigma_x^*(t_1, z) \left(C(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) - C(t_n, \frac{t_1 + t_2}{2}) \right) + \dots \\ & \left. \left. + \sigma_x^*(t_{n-1}, z) \left(C(t_n, \frac{t_{n-2} + t_{n-1}}{2}) - C(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}) \right) \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Уменьшая расчетные интервалы времени, мы можем получить решение с любой степенью точности. Как показано в [3], применение этого метода к задачам теории ползучести оказывается весьма эффективным, так как большая точность получается и при выборе сравнительно небольшого числа интервалов.

Подставляя выражения $\sigma_x(t_1, z)$, $\sigma_x(t_2, z)$, ..., $\sigma_x(t_n, z)$ из соотношения (3) в (15), (16) и (17), получим значения температурных напряжений в блоке, заделанном по основанию (при значительной длине последнего) с учетом ползучести бетона. Аналогично, подставляя выражения $\sigma_x(t_1, z)$, $\sigma_x(t_2, z)$, ..., $\sigma_x(t_n, z)$ из (4) в (15), (16) и (17), получим значения температурных напряжений в блоке типа свободной плиты или стенки значительной протяженности с учетом ползучести бетона.

Полученные результаты представлены в виде графиков температурных напряжений на фиг. 1, 2, 3, 4, и 5.

Мера ползучести бетона принята в виде [2]

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) [1 - e^{-0,026(t-\tau)}] 10^{-5}.$$

Остальные данные те же, что и в работе [1].

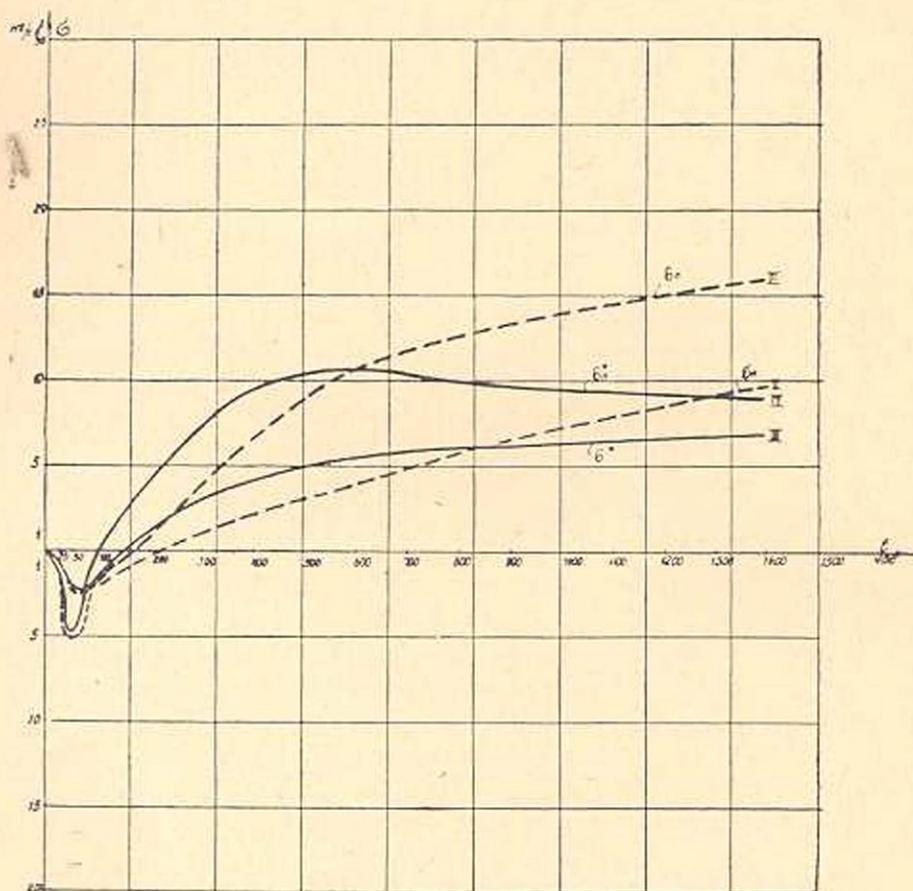
Для сравнения параллельно приведены графики без учета ползучести и с учетом ползучести бетона. Графики с учетом влияния температуры бетона на рост модуля деформации и тепловыделение без учета ползучести взяты из работы [1], а графики с учетом ползучести бетона построены по формулам (15), (16) и (17) и графикам П. И. Васильева и М. А. Зубрицкой [1]. В этих формулах принято $\tau_1 = 1$ дню.

Ниже приведены графики изменения температурных напряжений: σ_n — на поверхности (фиг. 1), σ_k — на контакте (фиг. 2) и σ_u — в центре (фиг. 3) блока высотой 5,0 м, лежащего на жестком основании: $T_{\text{экз.}} = 30^\circ\text{C}$, коэффициент теплопередачи

$$\beta = 4,6 \frac{\text{к кал}}{\text{м}^2 \text{ час. град.}}$$

Приняты следующие условные обозначения кривых:

I—с учетом влияния температуры бетона на рост модуля деформации и тепловыделение, при этом начальная температура бетона принята равной температуре окружающей среды, равной $+5^{\circ}\text{C}$. Ползучесть бетона не учтена.



Фиг. 1.

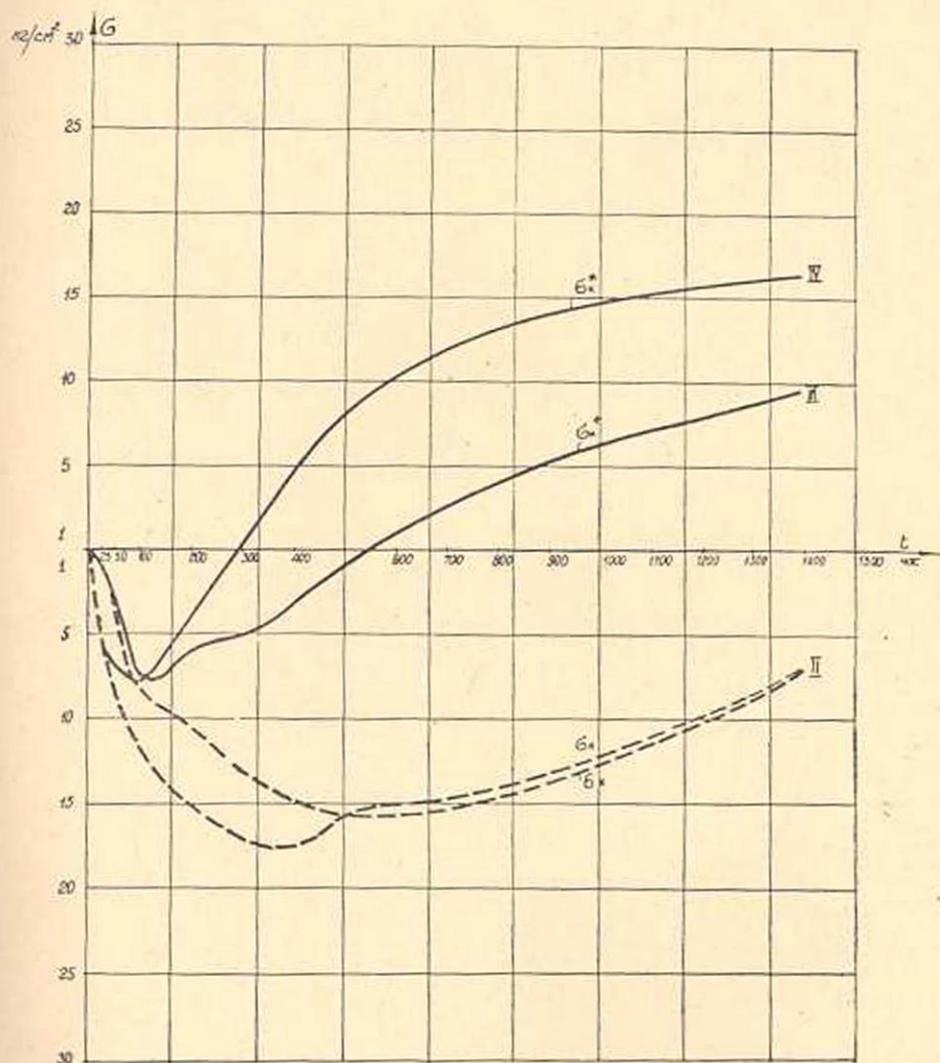
II—с учетом влияния температуры бетона на рост модуля деформации и тепловыделение, при этом начальная температура бетона принята равной температуре окружающей среды, равной $+20^{\circ}\text{C}$. Ползучесть бетона не учтена.

III—то же самое, что и в первом случае, но с учетом ползучести бетона.

IV—то же самое, что и во втором случае, но с учетом ползучести бетона.

Далее приведены графики изменения температурных напряжений σ_n —на поверхности (фиг. 4) и σ_v —в центре (фиг. 5) свободной стенки толщиной 5,0 м. $T_{\text{экз.}} = 30^{\circ}\text{C}$, $\beta = 4,6 \frac{\text{к кал}}{\text{м}^2 \text{ час. град.}}$. Кривые I, II, III, IV имеют указанный выше смысл.

Из этих графиков видно, насколько значительно отличаются температурные напряжения в бетонных плитах при учете присущего бетону свойства ползучести от значений соответствующих напряжений, определяемых по упругому расчету. Особенно сильно оказывается влияние ползучести бетона на температурные напряжения в средней части заделанной плиты.

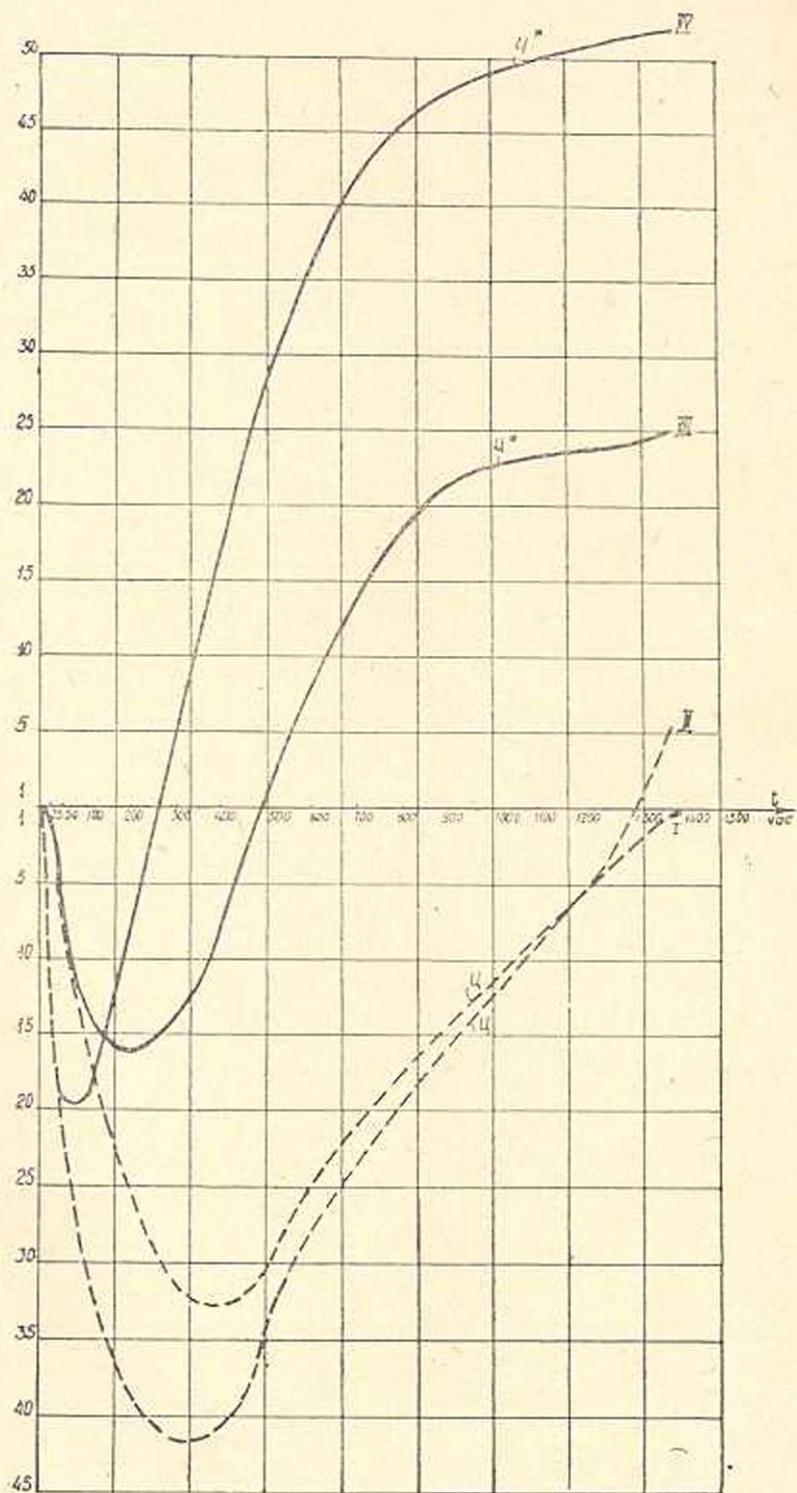


Фиг. 2.

В заделанной плите вначале возникают сжимающие напряжения, которые под влиянием ползучести бетона быстро переходят в растягивающие и достигают больших значений в средней части по высоте блока,

В свободной стенке сперва возникают растягивающие напряжения у поверхности стенки, которые в дальнейшем начинают убывать и переходят в сжимающие, а в центральной части блока, наоборот, сперва

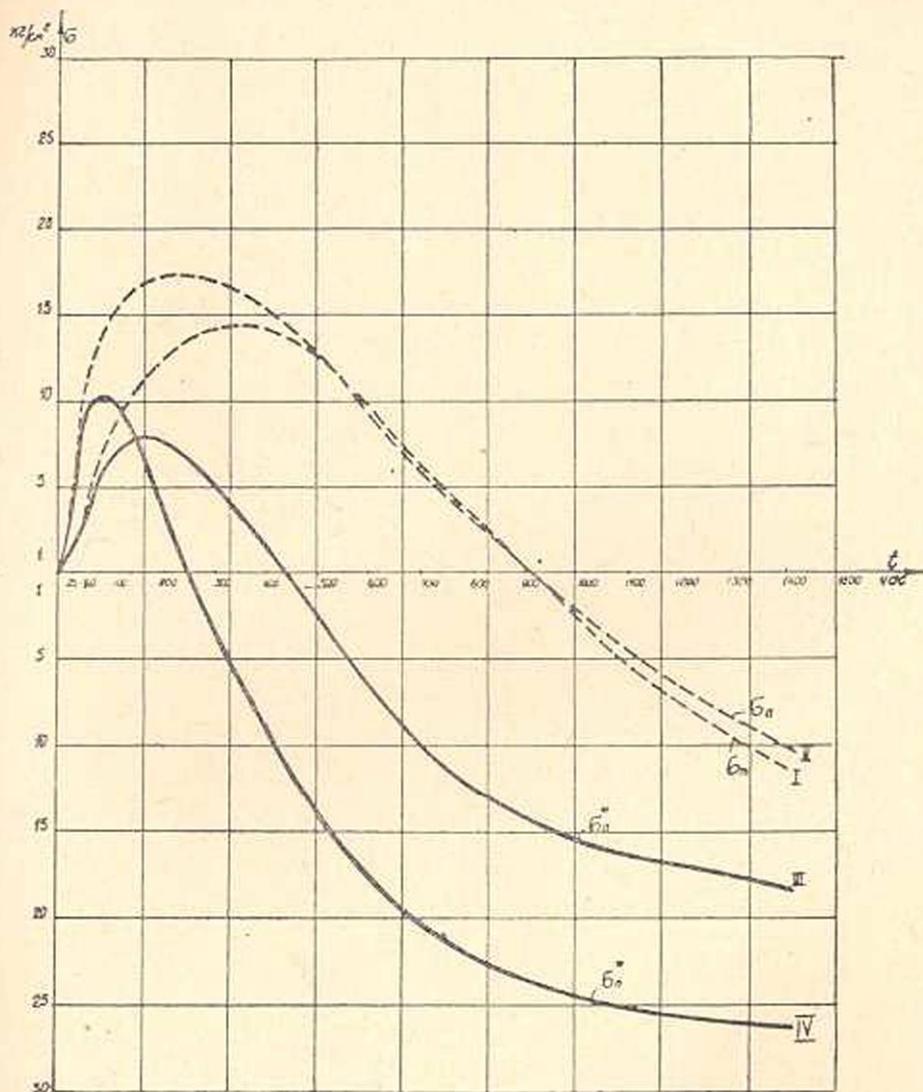
рис. 6



Фиг. 3.

возникают сжимающие напряжения, которые затем переходят в растягивающие. Нужно отметить, что на поверхности стенки этот процесс происходит быстрее, чем в центре стенки.

Как показывают опыты, изменения температурных напряжений бетона происходят вообще в течение первых шести месяцев, поэтому



Фиг. 4.

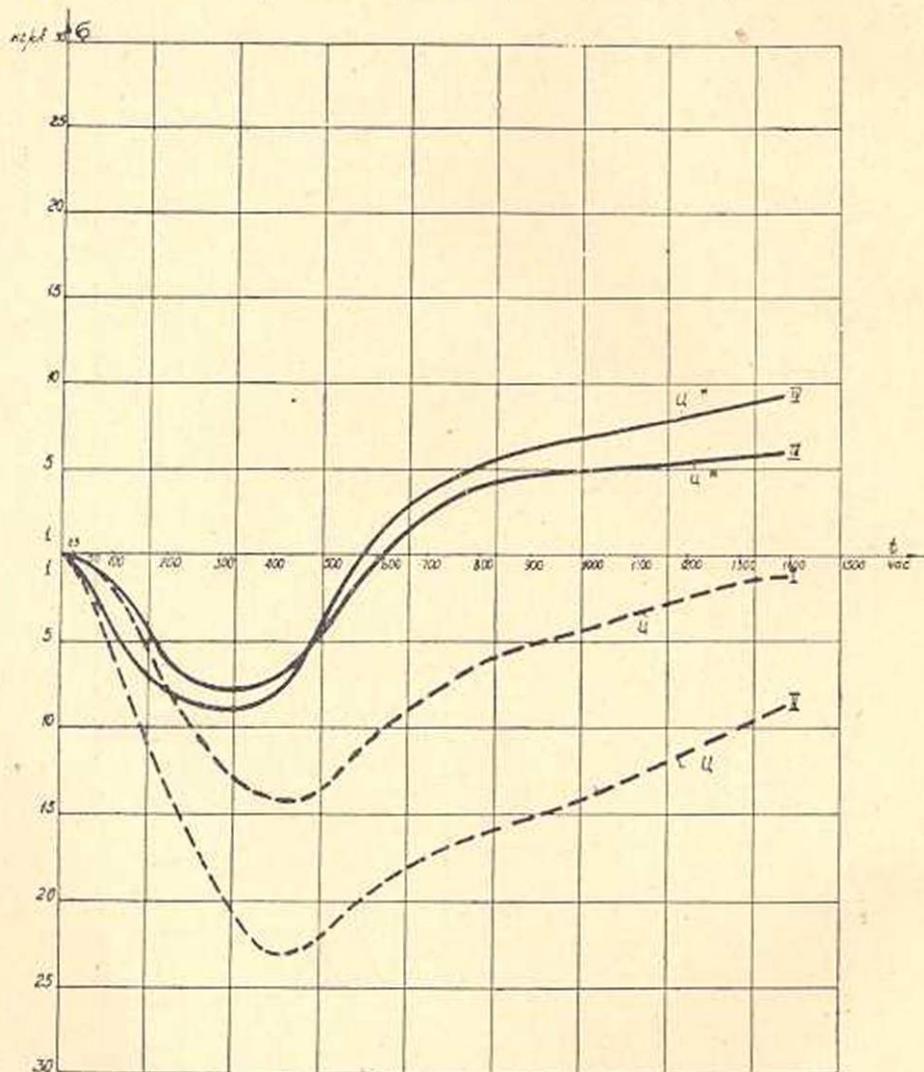
можно принять $t_{\infty} \approx 6$ месяцев. Ниже приводятся численные значения температурных напряжений в бетонных блоках с учетом и без учета ползучести бетона (см. таблицы 1 и 2).

Из таблиц видно, что в этом случае затухание температурных напряжений в середине высоты блока, лежащем на жестком основании, достигает до 32,5%, а в середине высоты свободной стены — до 29,5%.

Таблица 1

Значения температурных напряжений при $t = t_{\infty}$ для блока, лежащего на жестком основании

Начальная температура бетона	$\sigma_k(t_{\infty})$	$\sigma_k^*(t_{\infty})$	$\sigma_n(t_{\infty})$	$\sigma_n^*(t_{\infty})$	$\sigma_{II}(t_{\infty})$	$\sigma_{II}^*(t_{\infty})$
5° С	36,2	31,48	23,5	21,13	56,2	39,2



Фиг. 5.

Таблица 2

Значения температурных напряжений при $t = t_{\infty}$ для свободной стенки

Начальная температура бетона	$\sigma_n(t_{\infty})$	$\sigma_n^*(t_{\infty})$	$\sigma_{II}(t_{\infty})$	$\sigma_{II}^*(t_{\infty})$
5° С	-32,7	-29,32	12,0	8,45

Մ. Մ. Մանուկյան

ՑԵՄԵՆՏԻ ԷԿԶՈԹԵՐՄԻԱՅԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՍԱԼԻ
ԲԼՈԿՆԵՐՈՒՄ, ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Պ. Ի. Վասիլևի և Մ. Ա. Չուբրիցկայայի հոգովածում [1] քննարկվում են բետոնի սալերում ցեմենտի էկզոթերմիայի շնորհիվ առաջացած ջերմային լարումները: Ընդունվում է, որ անշաղկապ ջերմաէլեկտրական, բետոնի ամրության, դեֆորմացիայի մոդուլի մեծությունների և ջերմաստիճանի միջև գոյություն ունի (1) աննշալկունը: Ջերմային ֆունկցիան որոշվում է (2) հավասարումների սխեմայի լուծումից, իսկ ջերմային լարումները, հիմքով ամրացած բլոկում և ազատ պատում՝ համապատասխանաբար (3) և (4) աննշալկուններով:

Հոգովածում տրվում է վերը նշված խնդրի լուծումը բետոնի սողքի հաշվառումով: Խնդրի լուծման ժամանակ օգտագործվում է Ն. Ս. Հարությունյանի առաջարկած սողքի տեսությունը [2]:

Ջերմային լարումները բետոնի բլոկում, սողքի հաշվառումով, որոշվում են (6) ինտեգրալ հավասարումով: Ինտեգրալ հավասարման նկատմամբ կիրառվում է Ն. Մ. Կոխլովի և Ն. Ի. Բոգոլյուբովի մեթոդը:

Ստացված են ջերմային լարումները հիմքով ամրացած բլոկում և ազատ պատում, բետոնի սողքի հաշվառումով:

Բերված են ջերմային լարումների գրաֆիկները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Васильев П. И. и Чубрицкая М. А. Температурные напряжения от экзотермии цемента в блоках типа плиты. Известия ВНИИГ, том 56, 1956.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
3. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том VII, № 6, 1956.