ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. С. Кочарян

Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье

В настоящей заметке приводится решение следующей задачи: для функций, заданных в двухсвязной области, и для функций, заданных только на замкнутой жордановой кривой, построить аппараты приближения, которые являлись бы обобщениями рядов Лорана и Фурье соответственно. Для этой цели мы строим системы многочленов от z, $\Phi_n(z)\,(n=0,\,1,\,2,\cdots)$ и от $\frac{1}{z}$, $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ $(n=1,\,2,\cdots)$ и, при определенных ограничениях, устанавливаем теоремы разложения по этой системе для функций, аналитических в двухсвязной области, а также для функций, заданных только на замкнутой жордановой кривой.

Пусть на плоскости z дана двухсвязная область D, ограниченная замкнутыми кривыми L_1 и L_2 (L_2 находится внутри L_1). Для простоты допустим, что нулевая точка находится внутри L_2. Область, находящуюся внутри кривой L_1, обозначим через G_1^0, ее дополнение — через G_1^∞. Введем аналогичные обозначения G_2^0 и G_2^∞ для кривой L_2.

Пусть функция $w=\Phi(z)$ конформно отображает G_1^∞ на область $|w|>\rho$ так, что $\Phi(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=1$, а $z=\psi(w)$—обратная функция. Пусть, далее, $w=F(z)$ конформно отображает G_2^0 на область $|w|>r$ так, что $F(0)=\infty$, $\lim\limits_{z\to 0} z\cdot F(z)=1$, а $z=\varphi(w)$ — обратная функция. Обозначим через C_{ρ_0} образ окружности $|w|=\rho_0>\rho$ при отображении $w=F(z)$, а через Γ_{r_0}, $r_0>r$ — образ окружности $|w|=r_0$ при отображении $w=F(z)$.

Очевидно, в окрестности бесконечно удаленной точки функция $\Phi(z)$ будет иметь разложение вида:

$$\Phi(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots,$$

а функция $F(z)$ в окрестности нулевой точки будет иметь разложение вида:

$$F(z)=\frac{1}{z}+\beta_0+\beta_1 z+\cdots$$

Обозначим через $\Phi_n(z)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ многочлен, представляющий совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановском разложении функции $[\Phi(z)]^n$, а через $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$ обозначим многочлен, представляющий совокупность членов с отрицательными степенями z в разложении $[F(z)]^n$.

Функции $\Phi_n(z)$ являются многочленами Фабера, порожденными областью G_1^0. Известны следующие интегральные представления для $\Phi_n(z)$ (см. [1]):

а) если z — любая точка внутри C_{ρ_0}, то

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_0}}\frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho_0}\frac{\psi'(w)\,w^n}{\psi(w)-z}\,dw \quad \text{и} \tag{1}$$

б) если z — любая точка вне C_{ρ_0}, то

$$\Phi_n(z)=[\Phi(z)]^n+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_0}}\frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{2}$$

Аналогично выводятся следующие интегральные представления:

в) если $z\neq 0$ — любая точка внутри C_{r_0}, то

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right)=[F(z)]^n-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_0}}\frac{[F(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,d\zeta \quad \text{и} \tag{3}$$

г) если z — любая точка вне C_{r_0}, то

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_0}}\frac{[F(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_0}\frac{\varphi'(w)\,w^n}{\varphi(w)-z}\,dw. \tag{4}$$

Теорема 1. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в двухсвязной области, заключенной между кривыми C_{ρ_0}, $\rho_0>\rho$ и Γ_r, $r_0>r$, может быть представлена в этой области в виде суммы ряда:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k(z)+\sum_{k=1}^{\infty}b_kF_k\left(\frac{1}{z}\right), \tag{5}$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_1}}\frac{f(z)\Phi'(z)}{[\Phi(z)]^{k+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho_1}\frac{f[\psi(w)]}{w^{k+1}}\,dw \quad (\rho<\rho_1<\rho_0)$$

и (6)

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(z)F'(z)}{[F(z)]^{k+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1}\frac{f[\varphi(w)]}{w^{k+1}}\,dw \quad (r<r_1<r_0).$$

Доказательство. По теореме Коши внутри двухсвязной области имеем:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_1}}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho_1}\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}f[\psi(w)]\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1}\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}f[\varphi(w)]\,dw. \qquad (7)$$

При фиксированном z внутри кривой C_{ρ_1} имеется равномерно сходящееся разложение (см. [1]):

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{w^{k+1}} \quad (|w|\geqslant\rho_1>\rho). \qquad (8)$$

По свойствам функции $F(z)$ убеждаемся, что функция $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi(\infty)=0, \qquad \lim_{w\to\infty} w\varphi(w)=1,$$

следовательно, в окрестности бесконечно удаленной точки имеется разложение Лорана

$$\varphi(w)=\frac{1}{w}+\frac{\gamma_1}{w^2}+\cdots$$

Откуда

$$\varphi'(w)=-\frac{1}{w^2}-\frac{2\gamma_1}{w^3}-\cdots$$

Эти разложения показывают, что функция $\dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}$ при фиксированном z вне кривой C_{r_1} аналитична в области $|w|>r$ и имеет в бесконечности нуль второго порядка, поэтому в окрестности бесконечно удаленной точки будем иметь разложение:

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(z)}{w^{k+1}}.$$

Отсюда, учитывая (4), получаем равномерно сходящееся в области $|w|\geqslant r_1>r$ разложение:

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k\left(\dfrac{1}{z}\right)}{w^{k+1}}. \qquad (9)$$

Подставляя в (7) выражения (8) и (9), приходим к (5).

В случае кругового кольца многочлен $\phi_k(z)$ обращается в z^k, а $F_k\left(\frac{1}{z}\right)$ в $\frac{1}{z^k}$, следовательно, в этом случае ряд (5) обращается в ряд Лорана.

Мы получили разложение в ряд функций в двухсвязной области при условии, что функция аналитична в более широкой области. Применяя метод С. Я. Альпера [2], можно получить теоремы разложения при более слабых условиях, налагаемых на функцию, но зато накладываются дополнительные условия на область.

Следуя С. Я. Альперу, будем говорить, что односвязная область G или ее граница Γ удовлетворяют условию j, если Γ представляет собой замкнутую гладкую кривую Жордана, у которой угол $\vartheta(s)$ наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги s, на Γ имеет модуль непрерывности $j(h)$, удовлетворяющий условию:

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h} |\lg h|\, dh < \infty.$$

Далее, будем говорить, что двухсвязная область D удовлетворяет условию j, если области G_1^0 и G_2^0 одновременно удовлетворяют условию j.

Теперь докажем лемму, подобную лемме 3. С. Я. Альпера.

Лемма. Пусть область D удовлетворяет условию j и функция $f(z)$, аналитическая в D, непрерывна в $\bar{D}$. Пусть функции $\theta_1(w)$, аналитическая в $|w|<\rho$, $\theta_2(w)$, аналитическая в $|w|>\rho$, определены интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau - w}\, d\tau,$$

а функции $\chi_1(w)$, аналитическая в $|w|<r$, $\chi_2(w)$, аналитическая в $|w|>r$, определены интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{f[\varphi(t)]}{t - w}\, dt.$$

Тогда функции $\theta_1(w)$ и $\theta_2(w)$ непрерывны, соответственно, в областях $|w|\leqslant\rho$ и $|w|\geqslant\rho$, а $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$ непрерывны, соответственно, в областях $|w|\leqslant r$, $|w|\geqslant r$, и справедливы неравенства:

$$\omega_1(\delta) < A_1\,\omega(\delta); \quad \omega_2(\delta) < A_2\,\omega(\delta),$$

$$\Omega_1(\delta) < A_3\,\omega(\delta); \quad \Omega_2(\delta) < A_4\,\omega(\delta),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\bar{D}$, $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ — модули непрерывностей функций $\theta_1(w)$ и $\theta_2(w)$ на $|w|=\rho$, а $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ — модули непрерывностей функций $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$ на $|w|=r$.

Доказательство. По теореме Коши, при $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \tag{10}$$

а если z находится внутри L_2 и вне L_1, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = 0. \tag{11}$$

Положим

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad I_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

$I_1(z)$ определяет две функции $I_1^{(i)}(z)$ и $I_1^{(e)}(z)$, аналитические, соответственно, внутри L_1 и вне L_1, а $I_2(z)$ определяет функции $I_2^{(i)}(z)$ и $I_2^{(e)}(z)$, аналитические, соответственно, внутри и вне L_2.

Пусть $\zeta^* \in L_1$. В равенстве (11) функция $I_2^{(e)}(\zeta^*)$ будет иметь определенное значение, следовательно, существуют угловые граничные значения для $I_1(z)$ и, по основной лемме И. И. Привалова [3],

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta^*}\, d\zeta = \frac{1}{2} f(\zeta^*) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta^*}\, d\xi. \tag{12}$$

Аналогично, при $\xi^* \in L_2$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - \xi^*}\, d\xi = -\frac{1}{2} f(\xi^*) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi^*}\, d\zeta. \tag{13}$$

После замены переменной в (12) и (13), полагая $\tau^* = \phi(\zeta^*)$ и $t^* = F(\xi^*)$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)}\, \psi'(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - \psi(\tau^*)}\, d\xi + \frac{1}{2} f[\psi(\tau^*)], \tag{12'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{f[\varphi(t)]}{\varphi(t) - \varphi(t^*)}\, \varphi'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \varphi(t^*)}\, d\zeta - \frac{1}{2} f[\varphi(t^*)]. \tag{13'}$$

Опять по лемме И. И. Привалова для предельных значений $\theta_2(\tau^*)$ имеем:

$$\theta_2(\tau^*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau - \tau^*}\, d\tau - \frac{1}{2} f[\psi(\tau^*)],$$

что вместе с (12′) дает:

$$\theta_2(\tau^*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho} \left[\frac{1}{\tau - \tau^*} - \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tau^*)}\right] \{f[\psi(\tau)] - f[\psi(\tau^*)]\}\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{\xi-\psi(\tau^*)}d\xi. \tag{14}$$

Если $|\tau_1^*|=|\tau^*|=\rho$, то имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{\xi-\psi(\tau^*)}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{\xi-\psi(\tau_1^*)}d\xi\right|=$$

$$=\left|\frac{\psi(\tau^*)-\psi(\tau_1^*)}{2\pi}\right|\cdot\left|\int\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{[\xi-\psi(\tau^*)][\xi-\psi(\tau_1^*)]}d\xi\right|<A_5|\tau^*-\tau_1^*|,$$

ибо функция $\psi(w)$ имеет ограниченную производную на $|w|=\rho$. Используя дальнейший ход доказательства леммы 3. С. Я. Альпера, приходим к доказательству сформулированной нами леммы.

Т е о р е м а 2. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в двухсвязной области D, непрерывная в $\overline{D}$ функция, удовлетворяющая в $\overline{D}$ условию Липшица с показателем $\alpha>0$. Если область D удовлетворяет условию j, то средние арифметические частных сумм ряда по полиномам Фабера дают оценку для всех $z\in\overline{D}$ и $n>1$:*

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\Phi_k(z)-\sum_{k=1}^{n}b_k\rho_k^{(n)}F_k\left(\frac{1}{z}\right)\right|<\frac{A_6}{n^\alpha}, \tag{15}$$

где $\rho_k^{(n)}=1-\dfrac{k}{n}$, a_k и b_k определяются как в (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия теоремы позволяют в формулах (1)—(4) и (6) в качестве контуров интегрирования взять, соответственно, кривые L_1, L_2, $|w|=\rho$, $|w|=r$. Далее, по лемме И. И. Привалова, в обозначениях леммы на окружности $|\tau|=\rho$ будем иметь: $f[\psi(\tau)]=\theta_1(\tau)-\theta_2(\tau)$, а на $|t|=r$, $f[\varphi(t)]=\chi_1(t)-\chi_2(t)$. Отсюда, введя обозначения $\theta_1[\Phi(\zeta)]=\lambda(\zeta)$, $\theta_2[\Phi(\zeta)]=\mu(\zeta)$, $\chi_1[F(\xi)]=\lambda^*(\xi)$, $\chi_2[F(\xi)]=\mu^*(\xi)$, где $\zeta\in L_1$, $\xi\in L_2$, будем иметь:

$$f(\zeta)=\lambda(\zeta)-\mu(\zeta);\quad f(\xi)=\lambda^*(\xi)-\mu^*(\xi). \tag{16}$$

По условиям теоремы, в силу доказанной леммы, убеждаемся, что функции $\theta_1(\tau)$ на $|\tau|=\rho$ и $\chi_1(t)$ на $|t|=r$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α. Отметим, что функция $\lambda(z)$ определена только на L_1, а $\mu(z)$ аналитична в области G_1^∞. Аналогично, функция $\lambda^*(z)$ определена только на L_2, а $\mu^*(z)$ аналитична в области G_2^0.

По теореме С. Н. Бернштейна (см. [4]) имеем:

$$\left|\theta_1(w)-\sum_{k=0}^{n}\rho_k^{(n)}a_kw^k\right|<\frac{A_7}{n^\alpha}\quad\text{при}\quad|w|\le\rho,\quad a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f[\psi(\tau)]}{\tau^{k+1}}d\tau, \tag{17}$$

и

$$\left|\chi_1(w)-\sum_{k=0}^{n}\rho_k^{(n)}b_k w^k\right|<\frac{A_8}{n^3}\quad \text{при}\quad |w|\leqslant r,\quad b_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{f[\varphi(t)]}{t^{k+1}}\,dt. \quad (18)$$

Для z, лежащих вне L_1, из (2) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\Phi_k(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(z)]^k+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Отсюда, учитывая (16), получим:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\Phi_k(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(z)]^k+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k-\lambda(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\mu(z). \quad (19)$$

Далее, для z, лежащих вне L_2, из (4) имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\rho_k^{(n)}F_k\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\rho_k^{(n)}[F(\xi)]^k}{\xi-z}\,d\xi=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\rho_k^{(n)}[F(\xi)]^k}{\xi-z}\,d\xi,$$

или, учитывая (16),

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\rho_k^{(n)}F_k\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\lambda^*(\xi)-\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\rho_k^{(n)}[F(\xi)]^k}{\xi-z}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi. \quad (20)$$

Из (19), (20) и (11) для z вне L_1 получим:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}\phi_k(z)+\sum_{k=1}^{n} b_k\rho_k^{(n)}F_k\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}[\phi(z)]^k-\mu(z)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\lambda(\zeta)-\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\lambda^*(\xi)-\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\rho_k^{(n)}[F(\xi)]^k}{\xi-z}\,d\xi.$$

Отсюда, при $z\to\zeta^*\in L_1$,

$$f(\zeta^*)-\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}\phi_k(\zeta^*)-\sum_{k=1}^{n} b_k\rho_k^{(n)}F_k\left(\frac{1}{\zeta^*}\right)=\lambda(\zeta^*)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}[\phi(\zeta^*)]^k+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tau^*)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\tau-\tau^*}\right]\left[\theta_1(t)-\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}\tau^k\right]d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\lambda^*(\xi)-\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\rho_k^{(n)}[F(\xi)]^k}{\xi-\zeta^*}\,d\xi,\quad \tau^*=\phi(\zeta^*). \tag{21}$$

Из (21), (17), (18) и леммы 2 С. Я. Альпера на L_1 будем иметь:

$$\left|f(\zeta)-\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}\phi_k(\zeta)-\sum_{k=1}^{n} b_k\rho_k^{(n)}F_k\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|<\frac{A_9}{n^\alpha}.$$

Пользуясь формулами (1) и (3), аналогичную оценку можно получить и на L_2 после чего остается применить принцип максимума.

Теорема 3. Если $f(z)$ — аналитическая функция в двухсвязной области D, удовлетворяющей условию j, непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет в $\bar{D}$ условию Липшица с показателем $\alpha>0$, то для всех $z\in\bar{D}$,

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(z)-\sum_{k=1}^{n} b_kF_k\left(\frac{1}{z}\right)\right|<\frac{A_{10}}{n^\alpha}\lg n. \tag{22}$$

Доказательство. Достаточно в доказательстве теоремы 2 вместо оценок (17) и (18) взять оценки:

$$\left| \theta_1(\tau) - \sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k \right| < A_{11} \frac{3 + \lg n}{n^\alpha}$$

и

$$\left| \chi_1(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \right| < A_{12} \frac{3 + \lg n}{n^\alpha},$$

которые, по теореме А. Лебега (см. [4]), верны для функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем $\alpha > 0$.

Следствие. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в двухсвязной области D, удовлетворяющей условию j, непрерывная и удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ в $\bar{D}$, разлагается в замкнутой области в равномерно сходящийся ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right).$$

Идеи доказательства теорем 2 и 3 можно применить к разложению функций, заданных на замкнутой линии. Пусть дана замкнутая жорданова кривая Γ, ограничивающая область G^0, которая удовлетворяет условию j и содержит точку $z = 0$ внутри себя. Дополнение к G^0 обозначим через G^∞. Сохраняя прежние обозначения, обозначим через $w = \phi(z)$ функцию, конформно отображающую G^∞ на область $|w| > \rho$, а через $w = F(z)$ — функцию, отображающую G^0 на $|w| > r$.

Теорема 4. Если непрерывная функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ на замкнутой жордановой кривой Γ, удовлетворяющей условию j, то для всех $z \in \Gamma$,

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{A_{13}}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Как и в (19) и (20), для z, лежащих вне Γ, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \phi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} [\phi(z)]^k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} [\phi(\zeta)]^k - \lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \mu(z),$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\lambda^*(\zeta) - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \rho_k^{(n)} [F(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Слагая эти равенства, для z вне Γ получим:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{n} a_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} [\Phi(z)]^k - \mu(z) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} [\Phi(\zeta)]^k - \lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\lambda^*(\zeta) - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \rho_k^{(n)} [F(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta.$$

Далее повторяются рассуждения теоремы 2. Этим же путем получается:

Т е о р е м а 5. *Если непрерывная функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ на замкнутой жордановой линии Γ, удовлетворяющей условию j, то*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{A_{14}}{n^{\alpha}} \lg n, \; z \in \Gamma.$$

С л е д с т в и е. Всякая непрерывная функция $f(z)$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ на замкнутой жордановой линии Γ, удовлетворяющей условию j, разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \Gamma.$$

В случае, когда кривая Γ совпадает с окружностью $|z| = R$, этот ряд обращается в ряд Фурье, если положить $z = Re^{i\vartheta}$ $(-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность академику АН Арм. ССР, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и за руководство.

Ереванский Государственный университет

Поступило 21 XI 1957

Հ. Մ. Քոչարյան

ԼՈՐԱՆԻ ԵՎ ՖՈՒՐՅԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում կառուցվում են $\varphi_n(z)$ $(n=0, 1, \cdots)$ *և* $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$ *բազմանդամների սիստեմներ և բերվում են ըստ այդ սիստեմների վերածման թեորեմներ՝ երկկապ տիրույթում անալիտիկ, կամ միայն ժորդանյան փակ կորի վրա տրված ֆունկցիաների համար։ Ստացված շարքերը ներկայացնում են համապատասխանաբար Լորանի և Ֆուրյեի շարքերի բնական ընդհանրացումները։ Ս. Յա. Ալպերի* [2] j *պայմանին բավարարող տիրույթների համար ստացված է այսպիսի արդյունք՝*

Թեորեմ 2. Երբ $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է j պայմանին բավարարող $\bar{D}$ երկկապ տիրույթում, անընդհատ է $\bar{D}$ փակ տիրույթում և այնտեղ բավարարում է Լիպշիցի α $(\alpha>0)$ պայմանին, ապա ըստ Ֆաբերի բազմանդամների շարքի մասնակի գումարների միջին թվաբանականները բոլոր $z \in D$-երի և $n \geqslant 1$ համար տալիս են այսպիսի գնահատական.

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \varphi_k(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k \rho_k^{(n)} F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{C_1}{n^\alpha},$$

որտեղ $\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$, իսկ a_k և b_k գործակիցները որոշվում են (6) բանաձևերով։

Թեորեմ 3. Երբ $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է j պայմանին բավարարող D երկկապ տիրույթում, անընդհատ է $\bar{D}$ փակ տիրույթում և այնտեղ բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին, ապա բոլոր $z \in \bar{D}$-երի համար՝

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{C_2}{n^\alpha} \lg n։$$

Հետևանք. j պայմանին բավարարող D երկկապ տիրույթում անալիտիկ ամեն մի $f(z)$ ֆունկցիա, որն անընդհատ է և բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին $\bar{D}$ տիրույթում, վեր է ածվում $\bar{D}$-ում հավասարաչափ զուգամետ շարքի.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right)։$$

Մասնավոր դեպքում, երբ D տիրույթը դառնում է շրջանային օղակ, վերջին շարքն էլ դառնում է Լորանի շարք։

Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 4. Եթե $f(z)$ անընդհատ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին j պայմանին բավարարող Γ ժորդանյան փակ կորի վրա, ապա բոլոր $z \in \Gamma$-երի համար՝

$$\left| f(z) - \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa \rho_\kappa^{(n)} \varphi_\kappa(z) - \sum_{\kappa=1}^{n} b_\kappa \rho_\kappa^{(n)} F_\kappa\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{C_3}{n^\alpha}\text{։}$$

Թեորեմ 5. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է և բավարարում է Լիպշիցի α պայմանին j պայմանին բավարարող Γ ժորդանյան փակ կորի վրա, ապա

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) - \sum_{k=0}^{n} b_k F_k\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{C}{n^\alpha} \lg n, \quad z \in \Gamma$$

որտեղ a_k *և* b_k *գործակիցները որոշվում են (6) բանաձևերով։*

Հետևանք. j պայմանի բավարարող Γ ժորդանյան փակ կորի վրա տրված ամեն մի անընդհատ և Լիպշիցի որևէ α $(\alpha > 0)$ պայմանին բավարարող ֆունկցիա վեր է ածվում հավասարաչափ զուգամետ շարքի՝

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa \varphi_\kappa(z) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa F_\kappa\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \Gamma\text{։}$$

Երբ Γ կորը դառնում է $|z| = R$ շրջանագիծը, ստացվում է Ֆուրյեի շարք $(z = Re^{i\vartheta},\ -\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, М., 1950.
2. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях в замкнутой области. Изв. АН СССР, серия мат., т. 19, № 6, 1955.
3. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1949.
4. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, Д. В. Пештмалджян

К нелинейной теории пологих ортотропных оболочек

1. Исходные уравнения и соотношения. Рассмотрим весьма пологие ортотропные оболочки под действием нормально приложенной нагрузки $z = z(\alpha, \beta)$. За координатную поверхность примем срединную поверхность оболочки в ортогональных координатах α, β, совпадающих с линиями главной кривизны. Пусть в каждой точке оболочки одна из плоскостей упругой симметрии материала параллельна срединной поверхности, а остальные две—перпендикулярны к координатным линиям.

Следуя работам [1, 2, 8,], задачу решаем на основании следующих предположений:

1. Нормальный к срединной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины.

2. При определении деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений, найденных в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей.

3. При определении удлинений и сдвигов срединной поверхности учитываем лишь те нелинейные члены, которые происходят от нормального перемещения $w = w(\alpha, \beta)$ [7].

В силу принятых предположений, для деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ имеем [1, 2]:

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\varphi_0, \qquad e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\psi_0, \tag{1.1}$$

где

$$\varphi_0 = -a_{55}\frac{1}{AB}\left\{B\left(B_{11}\frac{\partial \varkappa_1^0}{\partial \alpha} + B_{12}\frac{\partial \varkappa_2^0}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\left[(B_{11} - B_{12})\varkappa_1^0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (B_{12} - B_{22})\varkappa_2^0\right] + 2\frac{\partial A}{\partial \beta}B_{66}\tau^0 + AB_{66}\frac{\partial \tau^0}{\partial \beta}\right\}; \tag{1.2}$$

$$\psi_0 = -a_{44}\frac{1}{AB}\left\{A\left(B_{22}\frac{\partial \varkappa_2^0}{\partial \beta} + B_{12}\frac{\partial \varkappa_1^0}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial A}{\partial \beta}\left[(B_{22} - B_{12})\varkappa_2^0 + \right.\right.$$

$$+ (B_{12} - B_{11})\varkappa_1^0 \Big] + 2\frac{\partial B}{\partial \alpha} B_{66}\tau^0 + BB_{66}\frac{\partial \tau^0}{\partial \alpha}\Big\}. \qquad (1.3)$$

Величины с нуликами найдены в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей.

В силу (1.1) и принятых предположений, из общих уравнений теории упругости, для перемещений какой-либо точки оболочки получим:

$$u_\alpha = u - \gamma\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \gamma\left(\frac{h^2}{8} - \frac{\gamma^2}{6}\right)\varphi_0;$$

$$u_\beta = v - \gamma\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \gamma\left(\frac{h^2}{8} - \frac{\gamma^2}{6}\right)\psi_0; \qquad (1.4)$$

$$u_\gamma = w,$$

где u, v, w — компоненты перемещения соответствующей точки срединной поверхности*.

Подставляя значения перемещений u_α, u_β и u_γ в соответствующие выражения для $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, получим:

$$e_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 + \gamma\varkappa_1 + \gamma^3\theta_1;$$

$$e_{\beta\beta} = \varepsilon_2 + \gamma\varkappa_2 + \gamma^3\theta_2; \qquad (1.5)$$

$$e_{\alpha\beta} = \omega + \gamma\tau + \gamma^3\lambda,$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*; \qquad \varkappa_1 = \varkappa_1^* - \frac{3h^2}{4}\theta_1;$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^*; \qquad \varkappa_2 = \varkappa_2^* - \frac{3h^2}{4}\theta_2;$$

$$\omega = \omega^*; \qquad \tau = \tau^* - \frac{3h^2}{4}\lambda.$$

$$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\psi_0\right); \qquad (1.6)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{6}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\varphi_0\right);$$

$$\lambda = \frac{1}{6}\left[\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B}\psi_0\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{A}\varphi_0\right)\right].$$

Здесь $\varepsilon_1^* \cdots \tau^*$ — соответственно, деформации удлинения и сдвига, изменения кривизны и кручения обычной нелинейной теории оболочек [7].

Пользуясь обычными способами, для внутренних сил и моментов

---

* Здесь и в дальнейшем будут приняты известные обозначения [1, 2].

получим:

$$T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2; \quad T_2 = c_{22}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_1;$$
$$S = c_{66}\omega. \tag{1.7}$$

$$M_1 = -D_{11}\varkappa_1^* - D_{12}\varkappa_2^* + \frac{3h^2}{5}(D_{11}\theta_1 + D_{12}\theta_2);$$

$$M_2 = -D_{22}\varkappa_2^* - D_{12}\varkappa_1^* + \frac{3h^2}{5}(D_{22}\theta_2 + D_{12}\theta_1); \tag{1.8}$$

$$H = D_{66}\tau^* - \frac{3h^2}{5}D_{66}\lambda,$$

где $c_{ik} = hB_{ik}$, $D_{ik} = \frac{h^3}{12}B_{ik}$ — соответственно жесткости растяжения и изгиба.

Уравнения равновесия, которым должны удовлетворять внутренние силы и моменты, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1) - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS) + S\frac{\partial A}{\partial\beta} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2) - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BS) + S\frac{\partial B}{\partial\alpha} = 0;$$

$$-(k_1T_1 + k_2T_2) + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(AH) + \frac{1}{A}H\frac{\partial A}{\partial\beta} - \right. \tag{1.9}$$

$$\left. - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_1) + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2\right] + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}H - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(AM_2) + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1\right] +$$

$$+ \varkappa_1^*T_1 + \varkappa_2^*T_2 + \tau^*S + z(\alpha, \beta) = 0.$$

Первым двум уравнениям удовлетворим приближенно, вводя функцию напряжений по формулам [4]:

$$T_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial F}{\partial\alpha};$$

$$T_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial F}{\partial\beta}; \tag{1.10}$$

$$S = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial F}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right).$$

Из третьего уравнения (1.9), после подстановки значений моментов и усилий (1.7), (1.8), получим первое разрешающее уравнение смешанного метода:

ПА-3909

$$L(M_1^*, M_2^*, H^*, F) + f(\varphi_0, \psi_0) + z(\alpha, \beta) = 0, \tag{1.11}$$

где L — нелинейный дифференциальный оператор относительно w и F, а $f(\varphi_0, \psi_0)$ представляет дополнительный грузовой член, появляющийся в результате принятых предположений.

$$f(\varphi_0, \psi_0) = -\frac{3h^2}{5}\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left[D_{66}\frac{\partial}{\partial\beta}(A\lambda) + D_{66}\frac{\partial A}{\partial\beta}\lambda + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\alpha}B(D_{11}\theta_1 + D_{12}\theta_2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}(D_{22}\theta_2 + D_{12}\theta_1)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left[D_{66}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\lambda) + D_{66}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\lambda + \frac{\partial}{\partial\beta}A(D_{22}\theta_2 + D_{12}\theta_1) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial A}{\partial\beta}(D_{11}\theta_1 + D_{12}\theta_2)\right]\right\}. \tag{1.12}$$

Для получения второго уравнения используем условие неразрывности. Оно, как известно [4], представляется в виде:

$$A^2B^2(k_1\bar{\varkappa}_2 + k_2\bar{\varkappa}_1) - AB\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\alpha\partial\beta} - B\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\alpha} - A\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\beta} +$$

$$+ \left(\frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\beta} - B\frac{\partial^2 A}{\partial\alpha\partial\beta} - A\frac{\partial^2 B}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\bar{\omega} +$$

$$+ B^2\frac{\partial^2\bar{\varepsilon}_2}{\partial\alpha^2} + A^2\frac{\partial^2\bar{\varepsilon}_1}{\partial\beta^2} + \left(2B\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{B^2}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\bar{\varepsilon}_2}{\partial\alpha} +$$

$$+ A\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{\varepsilon}_2}{\partial\beta} + \left(2A\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\bar{\varepsilon}_1}{\partial\beta} - B\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\bar{\varepsilon}_1}{\partial\alpha} -$$

$$-2\left(B\frac{\partial^2 B}{\partial\alpha^2} - \frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\bar{\varepsilon}_1 - 2\left(A\frac{\partial^2 A}{\partial\beta^2} - \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\bar{\varepsilon}_2 = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2; \quad \bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1^*;$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2; \quad \bar{\varkappa}_2 = \varkappa_2^*;$$

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{1}{AB}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}; \qquad \bar{\tau} = \tau^*.$$

Если затем ε_1^*, ε_2^* и ω^* представить через усилия, то будем иметь уравнение относительно двух искомых функций w и F. Окончательные выражения уравнений (1.11) и (1.13), после подстановки в них всех величин через w и F, ввиду их громоздкости, не приводим.

Эти уравнения представляют разрешающую систему дифференциальных уравнений нелинейной теории пологих оболочек в ортогональных координатах, отличающуюся лишь грузовым членом от системы уравнений, полученных на основании гипотезы недеформируемых нормалей. Поэтому решение ее математически не представляет трудностей, если подобная задача решена с учетом гипотезы Кирхгоффа.

Исходные уравнения и формулы, использованные при расчете весьма пологих оболочек, аналогичны уравнениям для случая оболочек с большим показателем изменяемости [6]. И поэтому система уравнений (1.11) и (1.13) может быть применена к расчету более широкого класса оболочек.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

2. Сферическая оболочка. Следуя [4], будем считать, что полярные координаты r и β на плоскости являются координатами точки на срединной поверхности весьма пологой сферичечкой оболочки. Тогда будем иметь $A=1$ и $B=r$.

Полагая в общих уравнениях $k_1=k_2=k=\text{const}$, получим основные соотношения для этого случая.

Параметры деформации:

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial r}+kw+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2;$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{1}{r}u+kw+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2;$$

$$\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \beta};$$

$$\varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{h^2}{8}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r};$$

$$\varkappa_2=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{h^2}{8}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \beta}+\varphi_0\right);$$

$$\tau=-2\frac{\partial^2}{\partial r\partial \beta}\left(\frac{w}{r}\right)-\frac{h^2}{8}\left[\frac{\partial \psi_0}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta}-\psi_0\right)\right]; \tag{2.1}$$

$$\theta_1=\frac{1}{6}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r};\quad \theta_2=\frac{1}{6}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \beta}+\varphi_0\right);$$

$$\lambda=\frac{1}{6}\left[\frac{\partial \psi_0}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta}-\psi_0\right)\right].$$

Усилия и моменты:

$$T_1=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r};\quad T_2=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2};\quad S=-\frac{\partial^2}{\partial r\partial \beta}\left(\frac{F}{r}\right);$$

$$M_1 = D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_{12}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + D_{12}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta} + \varphi_0\right)\right];$$

$$M_2 = D_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} +$$

$$+\frac{h^2}{10}\left[D_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta} + \varphi_0\right) + D_{12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right]; \qquad (2.2)$$

$$H = -2D_{66}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}\left(\frac{w}{r}\right) - \frac{h^2}{10}D_{66}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta} - \psi_0\right)\right],$$

где

$$\varphi_0 = a_{55}\frac{1}{r}\left\{B_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\right) + B_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2}\right) -\right.$$

$$\left.-B_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) + 2B_{66}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\beta^2}\left(\frac{w_0}{r}\right)\right\};$$

$$(2.3)$$

$$\psi_0 = a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{B_{22}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) +\right.$$

$$\left.+B_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + 2B_{66}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_0}{r} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right)\right\}.$$

Система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right] + 4D_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}r\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}\frac{w}{r}\right) +$$

$$+\frac{2}{r^2}D_{12}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\beta^2}\right) + \frac{2}{r^3}(D_{12}+D_{22})\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + D_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\right) +$$

$$+D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - D_{22}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + D_{22}\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\beta} +$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) = rz(\alpha,\beta) - \frac{h^2}{10}\left\{(2D_{66}+D_{12})\left(\frac{\partial^3\psi_0}{\partial r^2\partial\beta} +\right.\right.$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial r\partial\beta^2} + D_{22}\frac{1}{r^3}\left[\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\beta^2} - r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi_0}{r}\right) + \frac{\partial^3\psi_0}{\partial\beta^3} - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta}(r\psi_0)\right] +$$

$$\left.+D_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right]\right\};$$

$$-(a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^3}{\partial r\partial\beta^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}(a_{66}+2a_{12}+2a_{11})\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}-$$

$$-a_{22}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}\right)-a_{22}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}+a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)-a_{11}\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}+$$

$$+k\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+k\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+$$

$$+\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial r}\right)^2=0. \tag{2.4}$$

При $k=0$ будем иметь случай круглой пластинки. Для иллюстрации хода расчета рассмотрим осесимметричный изгиб равномерно распределенной нагрузкой q свободно опертой трансверсально изотропной круглой пластинки радиуса c.

При гипотезе Кирхгоффа приближенное решение этой задачи дано в работе [5]. Используя его можно решить, в первом приближении, ту же задачу без учета гипотезы недеформируемых нормалей.

Определяя функцию напряжений формулами

$$T_1=h\frac{1}{r}\frac{dF}{dr};\qquad T_2=h\frac{d^2F}{dr^2},$$

получаем систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\frac{d^3F}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dF}{dr}=-\frac{E}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right);$$

$$D\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)-\frac{h}{r}\frac{dw}{dr}\frac{dF}{dr}=$$

$$=\frac{1}{r}\int rq\,dr-\frac{h^2}{10}D\left(\frac{d^2\varphi_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi_0}{dr}-\frac{1}{r^2}\varphi_0\right),$$

где

$$\varphi_0=\frac{B}{G'}\left(\frac{d^3w_0}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w_0}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw_0}{dr}\right);$$

G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости (α, β) и направлением γ.

Дополнительный грузовой член в уравнении равновесия в этом частном случае равен нулю и влияние G' сказывается при определении постоянных интегрирования.

Как и в [5], функцию w задаем в виде:

$$w=af\left(\frac{1}{a}-2\frac{r^2}{c^2}+b\frac{r^4}{c^4}\right),$$

где постоянные a и b определяются из граничных условий (при $r=c$

$w = M_1 = 0$) и равны

$$a = \frac{3+\mu}{5+\mu} \frac{1}{1+\Delta} + \frac{\Delta}{2(1+\Delta)}; \quad b = \frac{2(1+\mu)}{2(3+\mu)+\Delta(5+\mu)}$$

$$\text{и } \Delta = \frac{h^2}{c^2} \frac{B}{G'} \frac{1{,}6(1+\mu)}{5+\mu}.$$

Вводя обозначение $\zeta = \frac{f}{h}$ и используя метод Бубнова-Галеркина, получаем характеристическое уравнение в виде:

$$\zeta^2 + A\zeta - B = 0.$$

Окончательные результаты расчетов при $\mu = 0{,}3$ и различных значениях $k = \frac{h^2}{c^2} \frac{B}{G'}$ помещены в таблице 1.

Таблица 1

K	A	B
0	3,8191	2,6595
0,1	3,6877	2,6653
0,5	3,2667	2,7276
1	2,7596	2,9385

В первой строке помещены соответствующие значения ζ_0 при гипотезе недеформируемых нормалей.

3. Прямоугольная в плане оболочка положительной гауссовой кривизны. Отнесем пространственный прямоугольник к декартовым координатам x и y. При соответствующем выборе последних можем считать коэффициенты первой квадратичной формы равными единице [4, 6].

Функцию напряжений определим здесь формулами:

$$T_1 = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ и } S = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{3.1}$$

Направим ось γ к центру кривизны и выпишем расчетные формулы для этого случая:

параметры деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{8}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}; \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{8}\frac{\partial \psi_0}{\partial y};$$

$$\tau = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right); \tag{3.2}$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{6}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}; \quad \theta_2 = -\frac{1}{6}\frac{\partial \psi_0}{\partial y};$$

$$\lambda = -\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right).$$

Усилия и моменты

$$T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2;\quad T_2 = c_{22}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_1;$$

$$S = c_{66}\omega;$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10}\left(D_{11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right);$$

$$M_2 = -D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10}\left(D_{22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + D_{12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right); \tag{3.3}$$

$$H = 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{h^2}{10}D_{66}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right),$$

где

$$\varphi_0 = -a_{55}\left[B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right];$$

$$\psi_0 = -a_{44}\left[B_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + (B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right]. \tag{3.4}$$

Из (1.11) и (1.13) получим следующую систему уравнений:

$$h\left[a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right] +$$

$$+ k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0;$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2D_{66}+D_{12})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \tag{3.5}$$

$$+ h\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} -\right.$$

$$\left. - k_1\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] = q - \frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3} + (D_{12}+2D_{66})\left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\partial y^2} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^3\psi_0}{\partial x^2\partial y}\right) + D_{22}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3}\right].$$

Проведем расчет для некоторой частной задачи. Будем рассматривать тот же пример, что и в работе [3]. Оболочка с двумя кривизнами

$$k_1 = \frac{8f}{a^2(1+c)},\quad k_2 = \frac{8f}{a^2c(1+c)},$$

где c — отношение сторон, f — подъем оболочки, изгибается нормальной равномерно распределенной нагрузкой q_0. Предполагается, что в процессе деформации, кромки оболочки не остаются прямолинейными. Задача решается, в первом приближении, методом аппроксимирующих функций [4].

Как известно [3], связь между прогибом w^* в центре оболочки и давлением

$$q^* = q_0^* - \frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3} + (D_{12}+2D_{66})\left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^2\partial y}\right) + D_{22}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3}\right], \tag{3.6}$$

дается в виде:

$$L_3\left(\frac{w^*}{h}\right)^3 - L_2\left(\frac{w^*}{h}\right)^2\frac{f}{h} + \left[L_1\left(\frac{f}{h}\right)^2 + L_0\right]\frac{w^*}{h} = \frac{\pi^2}{4c}\,\frac{a^2}{E_2h^4}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q^*(x, y)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dxdy. \tag{3.7}$$

Для коэффициентов L_i в работе [3] приведена таблица.

Для определения q^* необходимо иметь решение задачи при гипотезе недеформируемых нормалей, т. е. решение уравнения:

$$L_3\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 - L_2\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\frac{f}{h} + \left[L_1\left(\frac{f}{h}\right)^2 + L_0\right]\left(\frac{w_0}{h}\right) = q_0^*. \tag{3.8}$$

Для простоты расчетов будем рассматривать квадратную оболочку ($c = 1$) при следующих значениях упругих постоянных:

$$E_1 = 0{,}6\times 10^5;\quad E_2 = 1{,}2\times 10^5;\quad \mu_1 = 0{,}036;\quad \mu_2 = 0{,}071.$$

Тогда, для коэффициентов зависимостей (3.7) и (3.8), будем иметь:

$$L_0 = 18{,}0781;\quad L_1 = 1{,}7409;\quad L_2 = 7{,}1449 \text{ и } L_3 = 4{,}7988.$$

Подставляя полученные решения в формулы (3.4) и (3.6), получим значения грузового члена q^* при различных относительных размерах оболочки (таблица 2). Соответствующие значения $\frac{w^*}{h}$ приводятся в таблице 3.

Таблица 2

	$G' = 0{,}07\times 10^5$			$G' = 0{,}14\times 10^5$		
q_0^* \ h/a	1/5	1/10	1/15	1/5	1/10	1/15
10	12,2599	10,5649	10,2511	11,1299	10,2824	10,1255
20	31,7637	22,9409	21,3070	25,8818	21,4704	20,6535
30	46,2990	34,0747	31,8110	38,1495	32,0373	30,9055

Таблица 3

	$G' = 0{,}07 \times 10^5$			$G = 0{,}14 \times 10^5$			
$q_0^* \diagdown \frac{h}{a}$	1/5	1/10	1/15	1/5	1/10	1/15	
10	0,5073	0,4091	0,3903	0,4348	0,3951	0,3858	0,3788
20	2,7994	2,3290	2,0960	2,5306	2,1535	2,0538	1,9718
30	3,2200	2,9009	2,8000	3,0300	2,8205	2,7700	2,7320

В последнем столбце приведены решения при гипотезе Кирхгоффа. Сравнивая полученные решения с этими значениями, получим ошибку в процентах (таблица 4).

Таблица 4

	$G' = 0{,}07 \times 10^5$			$G' = 0{,}14 \times 10^5$		
$q_0^* \diagdown \frac{h}{a}$	1/5	1/10	1/15	1/5	1/10	1/15
10	25,3	7,4	3,1	12,8	4,1	1,8
20	29,6	15,3	5,9	22,1	8,4	5,4
30	15,2	5,82	2,4	9,8	3,1	1,4

Как и следовало ожидать, эта погрешность и в нелинейной теории, для некоторых случаев анизотропии, может быть существенной.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступило 14 XI 1957

Ս. Ա. Համբարձումյան, Ջ. Վ. Փեշտմալջյան

ՓՈՔՐ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում տրվում է փոքր կորություն ունեցող օրթոտրոպ թաղանթների հաշվման ոչ գծային մի տեսություն, որը հիմնված է հետևյալ ընդունելությունների վրա։

1. Թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտները դեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունը։

2. Դեֆորմացիաները որոշելիս ընդունվում է, որ $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները չեն տարբերվում դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզի կիրառման ժամանակ ստացված, համապատասխան լարումներից։

3. Միջին մակերևույթի դեֆորմացիաները որոշելիս ինկատի ենք առնում միայն այն ոչ գծային անդամները, որոնք ծագում են թաղանթի նորմալ տեղափոխումից։

Ելնելով բերված ընդունելություններից և առաձգականության ոչ գծային տեսության ընդհանուր դրույթներից, փոքր կորություն ունեցող թաղանթների համար ստացված են ոչ գծային տեսության, որը հայտնի տեսությունից տարբերվում է միայն բեռ ներկայացնող անդամով։

Ելնելով ընդհանուր տեսությունից, բերված են սֆերիկ և ուղղանկյուն պլանով երկակի կորություն ունեցող թաղանթների հիմնական հավասարումները և հաշվային բանաձևերը։

Լուծված են կոնկրետ օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К вопросу нелинейной теории анизотропных пластинок. ДАН Армянской ССР, том XXIV, № 4, 1957.

2. *Амбарцумян С. А.* О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН Армянской ССР, серия Физ.-мат. наук, X, № 2, 1957.

3. *Бурмистров Е. Ф.* Расчет пологих ортотропных оболочек с учетом конечных деформаций. Инж. сб., т XXII, 1955.

4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, 1949.

5. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.

6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.

7. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.

8. *Амбарцумян С. А.* К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, 7, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задоян

Температурные напряжения в бесконечных бетонных плитах с учетом ползучести

Исследованием температурных напряжений в бесконечных плитах от воздействия нестационарного теплового потока при предположениях упругой работы материала занимались Г. Н. Маслов, А. В. Белов и П. Н. Васильев [1—4]. В настоящей статье приводится решение аналогичной задачи с учетом свойства ползучести и изменения во времени модуля мгновенной деформации материала. Рассматривается напряженное состояние бесконечной бетонной плиты в случаях гармонического колебания температуры наружного воздуха и остывания на поверхности плиты.

§ 1. Общие зависимости

1°. Известно, что при термонапряженном состоянии упруго ползучего тела между компонентами напряжения и деформаций в общем случае имеется зависимость [5]:

$$\varepsilon_x^*(t) = \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)}\left[(1+\nu)\,\sigma_x^*(t) - \nu S^*(t)\right] -$$

$$-\int_{\tau_0}^{t}\left[(1+\nu)\,\sigma_x^*(\tau) - \nu S^*(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta(t,\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = \frac{2(1+\nu)}{E(t)}\,\tau_{xy}^*(t) - 2(1+\nu)\int_{\tau_0}^{t}\tau_{xy}^*(\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta(t,\tau)\,d\tau,$$

$$(x,\ y,\ z)$$

где $\varepsilon_x^*(t), \ldots,\ \gamma_{xy}^*(t), \ldots\ \sigma_x^*(t), \ldots, \tau_{xy}^*(t)$, соответственно-компоненты деформаций и напряжения, зависящие как от времени t, так и координат $x,\ y,\ z$. $T(t)$ – температурная функция, менающаяся по времени и по объему тела, α_1 — коэффициент температурного расширения, ν — коэффициент Пуассона.

$$S^*(t) = \sigma_x^*(t) + \sigma_y^*(t) + \sigma_z^*(t),$$

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right],$$
$$E(\tau) = E_0\left[1 - e^{-\alpha\tau}\right], \tag{2}$$
$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau},$$

E_0—модуль упругости бетона в старом возрасте, α, γ, C_0, A_1—некоторые параметры, характеризующие деформативные свойства и условия старения бетона.

2°. Преобразованием и двухкратным дифференцированием первого уравнения (1) по t, приведем его к дифференциальному уравнению

$$\left[(1+\nu)\overset{*}{\sigma}_x(t) - \nu S^*(t)\right]'' + \left[\eta(t) - \frac{E'(t)}{E(t)}\right]\left[(1+\nu)\overset{*}{\sigma}_x(t) - \nu S^*(t)\right]' =$$
$$= E(t)\left\{\overset{*}{\varepsilon}_x{}''(t) - \alpha_1 T''(t) + \gamma\left[\overset{*}{\varepsilon}_x{}'(t) - \alpha_1 T'(t)\right]\right\}, \tag{3}$$
$$\eta(t) = \gamma\left[1 + \varphi(t) E(t)\right], \tag{4}$$

при начальных условиях

$$(1+\nu)\overset{*}{\sigma}_x(\tau_0) - \nu S^*(\tau_0) = E(\tau_0)\left[\overset{*}{\varepsilon}_x(\tau_0) - \alpha_1 T(\tau_0)\right],$$
$$(1+\nu)\overset{*}{\sigma}_x{}'(\tau_0) - \nu S^{*\prime}(\tau_0) = E(\tau_0)\left\{\overset{*}{\varepsilon}_x{}'(\tau_0) - \alpha_1 T'(\tau_0) - \right.$$
$$\left. - \gamma\varphi(\tau_0) E(\tau_0)\left[\overset{*}{\varepsilon}_x(\tau_0) - \alpha_1 T(\tau_0)\right]\right\}. \tag{5}$$

Решая дифференциальное уравнение (3) при начальных условиях (5), будем иметь

$$(1+\nu)\overset{*}{\sigma}_x(t) - \nu S^*(t) = L^*\left[\overset{*}{\varepsilon}_x(t) - \alpha_1 T(t)\right], \tag{6}$$

где через L^* обозначен следующий оператор

$$L^*\left[Q(t)\right] = E(\tau_0) Q(\tau_0) + \left[Q'(\tau_0) - \right.$$
$$\left. - \gamma\varphi(\tau_0) E(\tau_0) Q(\tau_0)\right] \int_{\tau_0}^{t} E(\tau)\, e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\, d\tau +$$
$$+ \int_{\tau_0}^{t} E(\tau)\, e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\, d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\left[Q''(\xi) + \gamma Q'(\xi)\right] d\xi. \tag{7}$$

Из (1) следует, что

$$S^*(t) = \frac{E(t)}{1-2\nu}\left[\Theta^*(t) - 3\alpha_1 T(t)\right] + E(t)\int_{\tau_0}^{t} S^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t, \tau)\, d\tau, \tag{8}$$

где

$$\Theta^*(t) = \overset{*}{\varepsilon}_x(t) + \overset{*}{\varepsilon}_y(t) + \overset{*}{\varepsilon}_z(t).$$

Решение интегрального уравнения (8) представится в виде

$$S^*(t) = \frac{1}{1-2\nu} L^* [\Theta^*(t) - 3\alpha_1 T(t)]. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получим

$$\sigma_x^*(t) = L^* [V_x^*(t)], \tag{10}$$

причем

$$V_x^*(t) = \frac{1}{1+\nu} \left[\varepsilon_x^*(t) + \frac{\nu}{1+2\nu} \Theta^*(t) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_1 T(t) \right]. \tag{11}$$

Аналогичным образом находим,

$$\tau_x^*(t) = L^* [V_{xy}^*(t)];$$

$$V_{xy}^*(t) = \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^*(t).$$

В случаях двухосного и одноосного напряженных состояний соответственно имеем:

$$V_x^*(t) = \frac{1}{1-\nu^2} [\varepsilon_x^*(t) + \nu\varepsilon_y^*(t) - (1+\nu)\alpha_1 T(t)],$$

$$V_x^*(t) = \varepsilon_x^*(t) - \alpha_1 T(t).$$

В дальнейшем под $\varepsilon_x(t), \ldots, \sigma_x(t), \ldots$ будем обозначать компоненты деформаций и напряжений без учета явления ползучести.

Известно [6], что если тело свободно от поверхностных и объемных сил и находится только под температурным воздействием, то

$$\varepsilon_x^*(t) = \varepsilon_x(t);$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}(t).$$

В этом случае легко заметить, что

$$V_x^*(t) = V_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)};$$

$$V_{xy}^*(t) = V_{xy}(t) = \frac{\tau_{xy}(t)}{E(t)}; \tag{12}$$

$$S^*(t) = S(t) + E(t) \int_{\tau_0}^{t} S^*(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \delta(t, \tau)\, d\tau;$$

$$\sigma_x^*(t) = \sigma_x(t) + E(t) \int_{\tau_0}^{t} \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \delta(t, \tau)\, d\tau; \tag{13}$$

$$\tau_{xy}^*(t)=\tau_{xy}(t)+E(t)\int_{\tau_0}^{t}\tau_{xy}^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau.$$

Последние три формулы принадлежат Н. Х. Арутюняну [5].

Для краткости введем обозначения

$$I(t,\tau_0)=\frac{1}{E_0}\int_{\tau_0}^{t}E(\tau)\,e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\,d\tau, \tag{14}$$

$$F(t,\tau_0)=\frac{1}{E_0}\int_{\tau_0}^{t}E(\tau)\,e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\,d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}e^{-\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,[V_x^{\cdot}(\xi)+\gamma V_x^{\prime}(\xi)]\,d\xi. \tag{15}$$

Из (10), (7) и (12) можем написать

$$\sigma_x^*(t)=E(\tau_0)V_x(\tau_0)+[V_x^{\prime}(\tau_0)-\gamma\varphi(\tau_0)E(\tau_0)V_x(\tau_0)]\,E_0I(t,\tau_0)+$$
$$+E_0F(t,\tau_0). \tag{16}$$

3°. Построив кривые функции $\eta(t)$ для различных бетонов, замечаем, что в раннем возрасте материала они монотонно возрастают и, начиная от некоторого момента $t=\tau_1$, эти изменения во времени принимают несущественный характер. Значение τ_1 в зависимости от бетона колеблется в пределах 2—3 месяцев. В связи с этим ось времени будем делить на два интервала $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$ и $\tau_1\leqslant t\leqslant\infty$. В первом интервале времени для вычисления интеграла (14) $\eta(\tau)$ будем аппроксимировать линейной функцией, а именно:

$$\eta(\tau)\approx k(t)(\tau-\tau_0)+\eta(\tau_0)=\omega(\tau)\ \text{при}\ \tau_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\tau_1 \tag{17}$$

где $k(t)$ пока неизвестная функция от верхнего предела интеграла (14) t. Составляя интеграл

$$W|k(t)|=\int_{\tau_0}^{t}[\eta(\tau)-\eta(\tau_0)-k(t)(\tau-\tau_0)]^2\,d\tau\ \text{при}\ \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$$

из условия

$$\frac{\partial W}{\partial k}=0$$

определяем

$$k(t)=\frac{3}{(t-\tau_0)^3}\int_{\tau_0}^{t}[\eta(\tau)-\eta(\tau_0)]\,(\tau-\tau_0)\,d\tau. \tag{18}$$

Подставляя выражение $\eta(\tau)$ из (4) в (18) и производя интегрирование, получим

$$k(t)=\frac{3}{(t-\tau_0)^3}\Big\{[\eta(\infty)-\eta(\tau_0)]\,\frac{t^2-\tau_0^2}{2}+[\gamma A_1E_0-(\eta(\infty)-$$

$$-\eta(\tau_0))\tau_0](t-\tau_0)-\gamma A_1E_0\tau_0\ln\frac{t}{\tau_0}+\frac{\gamma C_0E_0}{\alpha}[te^{-\alpha t}-\tau_0e^{-\alpha\tau_0}]+$$

$$+\frac{\gamma E_0}{\alpha}\left[A_1+\left(\frac{1}{\alpha}-\tau_0\right)C_0\right](e^{-\alpha t}-e^{-\alpha\tau_0})+$$

$$+\gamma A_1E_0\tau_0[E_i(-\alpha t)-E_i(-\alpha\tau_0)]\Big\}\quad \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1, \qquad (19)$$

где $\eta(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\gamma[1+C_0E_0]$, а

$$-E_i(-x)=\int\limits_x^\infty\frac{e^{-\xi}}{\xi}d\xi$$

— интегральная показательная функция.

Подставляя выражения $E(\tau)$ и $\eta(\tau)$ из (2) и (17) в (14), будем иметь

$$I(t,\tau_0)=\int\limits_{\tau_0}^{t}(1-e^{-\alpha\tau})e^{-\frac{k(\tau-\tau_0)^2}{2}-\omega(\tau_0)(\tau-\tau_0)}d\tau, \qquad (20)$$

отсюда находим

$$I(t,\tau_0)=\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\,e^{\frac{\omega^2(\tau_0)}{2k}}\left\{\Phi\left[\frac{\omega(t)}{\sqrt{2k}}\right]-\Phi\left[\frac{\omega(\tau_0)}{\sqrt{2k}}\right]-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{\alpha^2+2\alpha[\omega(\tau_0)-k\tau_0]}{2k}}\left[\Phi\left[\frac{\omega(t)+\alpha}{\sqrt{2k}}\right]-\Phi\left[\frac{\omega(\tau_0)+\alpha}{\sqrt{2k}}\right]\right]\right\}, \qquad (21)$$

где

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}d\xi$$

— функция Крампа.

Для вычисления значения интеграла (15) в интервале $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$ при каждом конкретном значении t функцию $\eta(t)$ будем аппроксимировать постоянными, т. е. $\eta(\tau)\approx\beta(t)$.

Составляя интеграл

$$W[\beta(t)]=\int\limits_{\tau_0}^{t}[\eta(\tau)-\beta(t)]^2d\tau,$$

из условия минимума функции $W(\beta)$ по β определяем

$$\beta(t)=\eta(\infty)+\frac{1}{t-\tau_0}\left\{\gamma A_1E_0\ln\frac{t}{\tau_0}+\frac{\gamma C_0E_0}{\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\alpha\tau_0})-\right.$$

$$\left.-\gamma A_1E_0[E_i(-\alpha t)-E_i(-\alpha\tau_0)]\right\}. \qquad (22)$$

Тогда из (15) можем написать

$$F(t,\tau_0)=\frac{1}{E_0}\int\limits_{\tau_0}^{t}E(\tau)\,e^{-\beta(\tau-\tau_0)}\,d\tau\int\limits_{\tau_0}^{\tau}e^{\beta(\xi-\tau_0)}\left[V_x^{\cdot}(\xi)+\gamma V_x(\xi)\right]d\xi \tag{23}$$

В интервале $\tau_1\leqslant t\leqslant\infty$ в (14) и (15) функцию $\eta(\tau)$ для каждого t также будем аппроксимировать постоянным $\eta(\tau)\approx\omega_0(t)$. Значение $\omega_0(t)$ определяется аналогичной формулой (22), при замене τ_0 через τ_1.

Тогда из (14) получим

$$I(t,\tau_0)=I(\tau_1,\tau_0)+e^{-\beta_1(\tau_1-\tau_0)}\left[\frac{1-e^{-\omega_0(t-\tau_1)}}{\omega_0}-\right.$$

$$\left.-e^{-\alpha\tau_1}\frac{1-e^{-(\omega_0+\alpha)(t-\tau_1)}}{\omega_0+\alpha}\right],\ \text{при}\ \tau_1\leqslant t\leqslant\infty, \tag{24}$$

причем $\beta_1=\beta(\tau_1)$ вычисляется по (22).

Представляя (15) в виде

$$F(t,\tau_0)=F(\tau_1,\tau_0)+e^{-\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\eta(\tau)\,d\tau}\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{E(\tau)}{E_0}e^{-\int\limits_{\tau_1}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}e^{\int\limits_{\tau_0}^{\xi}\eta(\tau)\,d\tau}\left[V_x^{\cdot}(\xi)+\right.$$

$$\left.+\gamma V_x(\xi)\right]d\tau+\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{E(\tau)}{E_0}e^{\int\limits_{\tau_1}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\int\limits_{\tau_1}^{\tau}e^{\int\limits_{\tau_1}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\left[V_x^{\cdot\cdot}(\xi)+\gamma V_x^{\cdot}(\xi)\right]d\xi$$

$$\text{при}\ \tau_1\leqslant t\leqslant\infty$$

и подставляя в нем $E(\tau)=E_0[1-e^{-\alpha\tau}]$, $\eta(\tau)\approx\omega_0(t)$, будем иметь

$$F(t,\tau_0)=F(\tau_1,\tau_0)+e^{-\beta_1(\tau_1-\tau_0)}\left[\frac{1-e^{-\omega_0(t-\tau_1)}}{\omega_0}-e^{-\alpha\tau_1}\frac{1-e^{-(\omega_0+\alpha)(t-\tau_1)}}{\omega_0+\alpha}\right]\times$$

$$\times\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}e^{\beta_1(\tau-\tau_0)}\left[V_x^{\cdot}(\tau)+\gamma V_x(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{t}(1-e^{-\alpha\tau})\,e^{-\omega_0(\tau-\tau_0)}d\tau\int\limits_{\tau_0}^{\tau}e^{\omega_0(\xi-\tau_0)}\left[V_x^{\cdot\cdot}(\xi)+\gamma V_x^{\cdot}(\xi)\right]d\xi$$

$$\text{при}\ \tau_1\leqslant t\leqslant\infty. \tag{25}$$

4°. В тех случаях, когда $V_x(t)$ выражается бесконечным рядом, наличие производных функции $V_x(t)$ в (15) значительно ухудшает сходимость этих рядов. С этой целью сделаем некоторые преобразования над (15).

Интегрированием по частям можно получить

$$\int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,[V_x'(\xi)+\gamma V_x(\xi)]\,d\xi=[V_x'(\tau)+\gamma V_x(\tau)]\,e^{\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}-$$

$$-[V_x'(\tau_0)+\gamma V_x(\tau_0)]-V_x(\tau)\,\eta(\tau)\,e^{\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}+V_x(\tau_0)\,\eta(\tau_0)+$$

$$+\int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,[\eta'(\xi)+\eta^2(\xi)-\gamma\eta(\xi)]\,d\xi. \tag{26}$$

Из (17), (16), (15), и (14) следует

$$\overset{*}{\sigma}_x(t)=\sigma_x(t)-\overset{*}{\sigma}_{xn}(t), \tag{27}$$

где

$$\overset{*}{\sigma}_{xn}(t)=\int_{\tau_0}^{t}\left[\frac{E'(\tau)}{E(\tau)}+\gamma\varphi(\tau)\,E(\tau)\right]\sigma_x(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_{\tau_0}^{t}E(\tau)\,e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\,d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}e^{\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,\frac{D(\xi)}{E(\xi)}\,\sigma_x(\tau)\,d\xi; \tag{28}$$

$$D(t)=\eta'(t)+\eta(t)\,[\eta(t)-\gamma]; \tag{29}$$

$\overset{*}{\sigma}_{xn}(t)$ — та доля напряжения, которая развивается в течение времени от воздействия ползучести материала.

Решение интегрального уравнения типа (13), кроме (16), напишется и в виде

$$\overset{*}{\sigma}_x(t)=\sigma_x(t)+\int_{\tau_0}^{t}\sigma_x(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau, \tag{30}$$

где $R(t,\tau)$ — резольвента ядра

$$K(t,\tau)=E(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau).$$

Учитывая тождество

$$\int_{\tau_0}^{t}E(\tau)\,e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\,d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}e^{\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,\frac{D(\xi)}{E(\xi)}\,\sigma_x(\xi)\,d\xi=$$

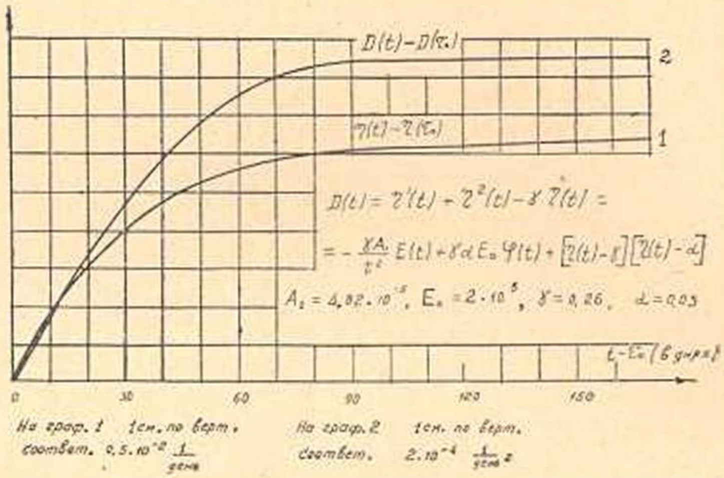
$$=\int_{\tau_0}^{t}e^{\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\tau)\,d\tau}\,\frac{D(\tau)}{E(\tau)}\,\sigma_x(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}E(\xi)\,e^{\int_{\tau_0}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,d\xi$$

и равенство (30) из (27) и (28) получим

$$R(t, \tau) = -\gamma\varphi(\tau) E(\tau) - \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} +$$

$$+ \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \int_{\tau}^{t} E(\xi) e^{-\int_{\tau}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi} d\xi. \qquad (31)$$

Закон изменения во времени функции $D(t)$ для различных бетонов имеет общий характер. В раннем возрасте бетона он достаточно близок к линейному, а при сравнителоно больших t эти изменения несуществены (фиг 1). Согласно этому полагаем



Фиг. 1.

$$D(\tau) = k_1(\tau - \tau_0) + D(\tau_0) \text{ при } \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1;$$

$$D(\tau) = \omega_0(\omega_0 - \gamma) \text{ при } \tau_1 \leqslant t \leqslant \infty, \qquad (32)$$

где $k_1 = \dfrac{D(t) - D(\tau_0)}{t - \tau_0}$, а ω_0 определяется согласно (22) при замене τ_0 через τ_1.

§ 2. Температурные напряжения в бесконечной бетонной плите при гармонических колебаниях температуры наружного воздуха

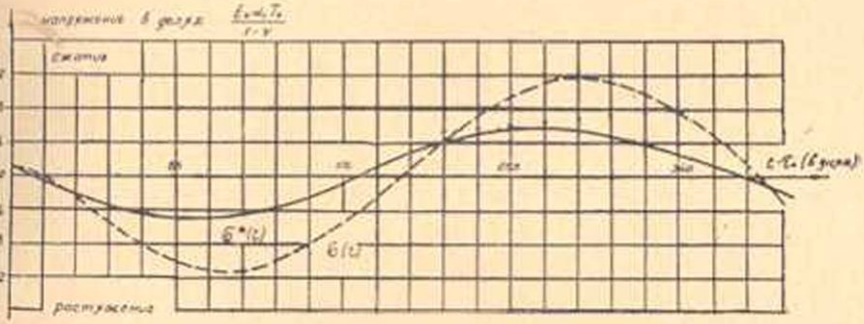
Пусть с момента $t = \tau_0$ на наружной поверхности бесконечной плиты температура воздуха меняется по периодическому закону $T = T_0 \cos \frac{2\pi}{\theta}(t - \tau_0)$, где T_0 и θ, соответственно, амплитуда и период колебания температуры. Определим напряжения, возникающие в плите, с учетом ползучести и изменения во времени модуля упругости.

Используя уравнения равновесия, гипотезу плоских сечений и температурную функцию, учитывающую теплоотдачу от поверхности плиты в воздух, А. В. Белов и П. И. Васильев [3] дают формулу напряжения, которую в нашем случае можно представить в виде (фиг. 2)

$$\sigma(x, t) = E(t)\, V(x, t),$$

$$V(x, t) = \frac{\alpha_1 T_0}{1-\nu}\left[a_0(x)\cos\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0) + b_0(x)\sin\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)\right], \qquad (33)$$

где $a_0(x)$ и $b_0(x)$—безразмерные функции x, зависящие также от теплотехнических коэффициентов и периода колебания температуры. Значения этих функций можно вычислить по формулам, приведенным в вышеупомянутой работе [3].



Фиг. 2.

Напряжение в плите с учетом ползучести и изменения модуля упругости выражается через (33) в следующем виде

$$\sigma^*(t) = \frac{E_0\alpha_1 T_0}{1-\nu}\Big\{a_0\left[1-e^{-\gamma\tau_0}\right] +$$

$$+\left[\frac{2\pi}{\theta}b_0 - \gamma\varphi(\tau_0)\, E(\tau_0)\, a_0\right] I(t, \tau_0) + F_1(t, \tau_0)\Big\}. \qquad (34)$$

Значение функции $I(t, \tau_0)$ определяется согласно (21) и (24), а

$$F_1(t, \tau_0) = \frac{1-\nu}{\alpha T_0} F(t, \tau_0), \qquad (35)$$

где $F(t, \tau_0)$ задается по (23) и (25). Подставляя (33) в (23) и (25), произведя интегрирование, находим

$$F(t, \tau_0) = -\frac{a\left[1-\cos\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)\right] + b\sin\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)}{\beta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} +$$

$$+\frac{\frac{2\pi}{\theta}b}{\beta^2+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}\left[\frac{1-e^{-\beta(t-\tau_0)}}{\beta}-e^{-\alpha\tau_0}\,\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(t-\tau_0)}}{\alpha+\beta}\right]+$$

$$+\frac{\left[\left(\alpha b+\frac{2\pi}{\theta}a\right)\cos\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)+\left(\alpha a-\frac{2\pi}{\theta}b\right)\sin\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)\right]e^{-\alpha t}-\left[\alpha b+\frac{2\pi}{\theta}a\right]e^{-\alpha\tau_0}}{\frac{\theta}{2\pi}\left[\alpha b+\frac{2\pi}{\theta}a\right]}\quad \text{при}\quad \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1 \tag{36}$$

$$F_1(t,\tau_0)=F_1(\tau_1,\tau_0)-\frac{\frac{2\pi}{\theta}}{\beta^2+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}\left[a\sin\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)+b\cos\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)-\right.$$

$$\left.-be^{-\beta_1(\tau_1-\tau_0)}\right]\times\left[\frac{1-e^{-\omega_0(t-\tau_1)}}{\omega_0}-e^{-\alpha\tau_1}\,\frac{1-e^{-(\omega_0+\alpha)(t-\tau_1)}}{(\omega_0+\alpha)}\right]+$$

$$+\frac{c\left[\sin\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)-\sin\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)\right]-d\left[\cos\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)-\cos\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)\right]}{\omega_0^2+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}+$$

$$+\frac{\left[\left(\alpha c+\frac{2\pi}{\theta}d\right)\cos\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)+\left(\alpha d-\frac{2\pi}{\theta}c\right)\sin\frac{2\pi}{\theta}(t-\tau_0)\right]e^{-\alpha t}-\left[\left(\alpha c+\frac{2\pi}{\theta}d\right)\cos\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)+\left(\alpha d-\frac{2\pi}{\theta}c\right)\sin\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)\right]e^{-\alpha\tau_1}}{\frac{\theta}{2\pi}\left[\omega_0^2+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2\right]}$$

$$-\frac{\frac{2\pi}{\theta}e^{\beta_1(\tau_1-\tau_0)}}{\beta_1^2+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}\left[c\cos\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)+d\sin\frac{2\pi}{\theta}(\tau_1-\tau_0)\right]\left[\frac{1-e^{-\omega_0(t-\tau_1)}}{\omega_0}-\right.$$

$$\left.-e^{-\alpha\tau_1}\,\frac{1-e^{-(\omega_0+\alpha)(t-\tau_1)}}{\omega_0+\alpha}\right],\quad \text{при}\ \tau_1\leqslant t\leqslant\infty \tag{37}$$

где

$$c=\left[\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2+\gamma\omega_0\right]a_0+\frac{2\pi}{\theta}(\omega_0-\gamma)\,b_0;$$

$$d=\frac{2\pi}{\theta}(\omega_0-\gamma)\,a_0-\left[\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2+\gamma\omega_0\right]b_0.$$

Из (33) следует, что при

$$t=\tau_0-\frac{\theta}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_0(x)}{b_0(x)}+\frac{\theta n}{2},\ (n=1,2,3,\ldots) \tag{38}$$

упруго-мгновенное напряжение обращается в нуль, а при

$$t=\tau_0+\frac{\theta}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_0(x)}{a_0(x)}+\frac{\theta n}{2} \tag{39}$$

имеет экстремальное значение.

Численный пример. Для сравнения с упругим решением возьмем те же параметры, использованные в работе [3].

Пусть бесконечная бетонная плита, толщиной 2,6 *м*, начиная от момента $t=\tau_0=7$ дней, находится под воздействием годовых колебаний ($\theta=8760$ *час.*) температуры воздуха у наружной стороны плиты. Температура воздуха с внутренней стороны принята постоянной и условно равной нулю. Принимаем, что коэффициенты теплоотдачи от наружной и внутренней поверхностей плиты в воздух, соответственно, имеют значения $\beta_H=12\,\frac{ккал}{м^3\ час.\ град.}$, $\beta_B=6{,}0\,\frac{ккал}{м^2\ час.\ град.}$; коэффициент теплопроводности материала плиты $\lambda_0=1{,}25\,\frac{ккал}{м^2\ час.\ град}$, коэффициент теплоемкости $c_0=0{,}24\,\frac{ккал}{кг}$; объемный вес бетона $\gamma_1=$ $=2400\,\frac{кг}{м^3}$.

Характеристики ползучести возьмем следующие [5].

$C_0=0{,}9.10^{-5}\frac{см^2}{кг}$, $A_1=4{,}82.10^{-5}\frac{см^2}{кг}$ день, $\gamma=0{,}026\,\frac{1}{день}\cdot E_0=2.10^5\,\frac{кг}{см^2}$, $\alpha=0{,}03\,\frac{1}{день}$.

Согласно формулам, приведенным в работе [5], для наружной поверхности плиты имеем $a_0=0{,}0320$, $b_0=-0{,}1114$.

Тогда из (37) и (38) следует, что при

$$t=23{,}277;\ 23{,}277+\frac{\theta}{2};\ 23{,}277+\theta;\ldots$$

угруго-мгновенное напряжение на наружной поверхности плиты обращается в нуль, а при

$$t = 114{,}5;\ 114{,}5 + \frac{\theta}{2};\ 114{,}5 + \theta; \ldots$$

по величине, оно принимает максимальное значение.

В нижеследующей таблице приведены значения $\sigma^*(t)$ и $\sigma(t)$ для некоторых значений t.

Таблица 1

Значения $\sigma^*(t)$ и $\sigma(t)$ в долях $10^{-2}\,\frac{E_0\alpha_1 T_0}{1-\nu}$

t	7	23,277	28	60	90	100	114,5	180	20 ,777	235	260	297	325	388,277
$\sigma(t)$	0,606	0	−0,538	−5,720	−9,864	−10,672	−11,217	−4,948	0	5,592	9,318	11,588	10,270	0
$\sigma^*(t)$	0,605	−0,413	−0,969	−3,360	−4,795	−4,827	−4,584	0,549	2,617	4,391	5,579	5,433	4,110	−0,736

Из фиг. 2, построенной по данным этой таблицы, приходим к заключениям.

1. Нули и экстремумы функции $\sigma^*(t)$ наступают значительно раньше, чем нули и экстремумы $\sigma(t)$.

2. Экстремальные значения $\sigma^*(t)$ почти в два раза меньше, чем экстремальные значения $\sigma(t)$.

3. В каждом полупериоде есть некоторый момент, когда $\sigma^*(t) = \sigma(t)$ и некоторый промежуток времени, в котором $|\sigma^*(t)| > |\sigma(t)|$.

§ 3. Температурные напряжения в бесконечной бетонной плите при симметричном остывании ее поверхности

Предположим, что бесконечная бетонная плита, имеет начальную постоянную температуру T_1, а с момента $t = \tau_0$ на ее поверхностях поддерживается постоянная температура T_2, причем T_2 значительно меньше T_1. Закон изменения температуры по толщине плиты и по времени, учитывающий теплоотдачу от поверхности плиты в воздух, выражается в виде [7]

$$T(x, t) = T_2 + (T_1 - T_1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \cos\mu_n \frac{x}{l}\, e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t-\tau_0)},$$

где $2l$ — толщина плиты, $a = \frac{k_0}{c_0\gamma_1}$ — коэффициент температуропроводности, c_0—коэффициент теплоемкости, γ_1—объемный вес бетона, μ_n—корни уравнения $\mu_n tg\mu_n = \frac{\beta_0}{k_0} l$, где β_0 коэффициент теплоотдачи от поверхности плиты в окружающую среду.

Используя уравнение равновесия, гипотезу плоских сечений, А. В. Белов [4] получил формулу для упруго-мгновенного напряжения, которая в нашем случае напишется в виде

$$\sigma(x, t) = E(t)\, V(x, t)$$

$$V(x, t) = \frac{\alpha_1(T_1 - T_2)}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - \right.$$

$$\left. - \cos\mu_n \frac{x}{l} \right) e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t - \tau_0)}. \qquad (40)$$

Из (27), (28), и (39) будем иметь

$$\sigma(x, t) = \frac{E_0 \alpha_1 (T_1 - T_2)}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - \right.$$

$$\left. - \cos\mu_n \frac{x}{l} \right) (1 - e^{-\alpha\tau_0}) e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t - \tau_0)}, \qquad (41)$$

$$\sigma_n^*(x, t) = \frac{E_0 \alpha_1 (T_1 - T_2)}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - \right.$$

$$\left. - \cos\mu_n \frac{x}{l} \right) [I_n(t, \tau_0) - F_n(t, \tau_0)], \qquad (42)$$

где введены обозначения

$$I_n(t, \tau_0) = \frac{1}{E_0} \int_{\tau_0}^{t} [E'(\tau) + \gamma\varphi(\tau) E^2(\tau)]\, e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(\tau - \tau_0)} d\tau. \qquad (43)$$

$$F_n(t, \tau_0) = \frac{1}{E_0} \int_{\tau_0}^{t} E(\tau)\, e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \eta(\tau)\, d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \eta(\xi) d\xi - \frac{\mu_n^2 a}{l^2}(\xi - \tau_0)} D(\xi)\, d\xi. \qquad (44)$$

Подставляя выражения $\varphi(\tau)$ и $E(\tau)$ из (2) в (43) и интегрируя, получим

$$I_n(t,\tau_0)=\gamma C_0E_0\frac{1-e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}}-(2\gamma E_0C_0-$$

$$-\alpha)\frac{1-e^{-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)(t-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha}+\gamma E_0C_0e^{-2\alpha\tau_0}\frac{1-e^{-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+2\alpha\right)(t-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+2\alpha}+$$

$$+\gamma E_0A_1e^{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}\tau_0}\left\{E_i\left(-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}t\right)-E_i\left(-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}\tau_0\right)-\right.$$

$$-2\left[E_i\left[-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)t\right]-E_i\left[-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)\tau_0\right]\right]+$$

$$\left.+E_i\left[-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+2\alpha\right)t\right]-E_i\left[-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+2\alpha\right)\right]\tau_0\right\}. \tag{45}$$

В интервале $\tau_0<\tau\leqslant t\leqslant\tau_1$, заменяя $\eta(\tau)$ через $\beta(t)$ по (22) и $D(\xi)$ через линейные функции (32), интегрируя, окончательно будем иметь

$$F_n(t,\tau_0)=\frac{1}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}-\beta}\left\{\left[\frac{k_1}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}-\beta}+D(\tau_0)\right]\left[\frac{1-e^{-\beta(t-\tau_0)}}{\beta}-\right.\right.$$

$$-e^{-\alpha\tau_0}\frac{1-e^{-(\beta+\alpha)(t-\tau_0)}}{\beta+\alpha}-\frac{1-e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}}+$$

$$\left.+e^{-\alpha\tau_0}\frac{1-e^{-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)(t-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha}-\right]-\frac{k_1}{\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}\right)^2}\left[1-\left[1+\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t-\tau_0)\right]\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t-\tau_0)}\right]+\frac{k_1}{\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)^2}\left[1-\left[1+\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\alpha\right)(t-\tau_0)\right]e^{-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)(t-\tau_0)}\right]\right\} \tag{46}$$

при $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$.

Значения функции $F_n(t, \tau_0)$ при $\tau_1 \leqslant t \leqslant \infty$ определяются формулой

$$F_n(t, \tau_0) = F_n(\tau_1, \tau_0) + \frac{e^{-\beta_1(\tau_1-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2} - \beta_1}\left[\frac{1-e^{-\omega_0(t-\tau_0)}}{\omega_0} - \right.$$

$$\left. - e^{-\alpha\tau_1}\frac{1-e^{-(\omega_0+\alpha)(t-\tau_1)}}{\omega_0+\alpha}\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{k_1}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}-\beta_1} + D(\tau_0) - e^{-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}-\beta_1\right)(\tau_1-\tau_0)}\left[\frac{k_1}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}} + D(\tau_1)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\omega_0(\omega_0-\gamma)e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(\tau_1-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}-\omega_0}\left\{\frac{1-e^{-\omega_0(t-\tau_1)}}{\omega_0} - \right.$$

$$- e^{-\alpha\tau_1}\frac{1-e^{-(\omega_0+\alpha)(t-\tau_1)}}{\omega_0+\alpha} - \frac{1-e^{-\frac{\mu_n^2 a}{l^2}(t-\tau_1)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}} +$$

$$\left. + e^{-\alpha\tau_1}\frac{1-e^{-\left(\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha\right)(t-\tau_1)}}{\frac{\mu_n^2 a}{l^2}+\alpha}\right\}. \qquad (47)$$

Разлагая единицу в ряд по собственным функциям $\left\{\cos\mu_n\frac{x}{l}\right\}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n}\cos\mu_n\frac{x}{l} = 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Интегрируя последнее равенство от нуля до l, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^2\mu_n}{\mu_n(\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n)} = 1.$$

Тогда легко заменить, что

$$\sigma^*(x, \tau_0) = \sigma(x, \tau_0) = 0.$$

При $t \to \infty$ имеем

$$\sigma(x, \infty) = 0,$$
$$\sigma^*(x, \infty) = -\overset{*}{\sigma}_n(x, \infty).$$

где
$$\sigma_n^*(x,\infty)=\frac{E_0\alpha_1(T_1-T_2)}{1-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n}\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}-\right.$$
$$\left.-\cos\mu_n\frac{x}{l}\right)[I_n(\infty,\tau_0)-F_n(\infty,\tau_0)],$$
$$I_n(\infty,\tau_0)=\frac{\gamma E_0C_0}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}}-\frac{(2\gamma E_0C_0-\alpha)e^{-\alpha\tau_0}}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}+\alpha}+\frac{\gamma E_0C_0e^{-2\alpha\tau_0}}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}+2\alpha}+$$
$$+\gamma A_1E_0e^{\frac{\mu_n^2a}{l^2}\tau_0}\left\{-E_i\left(-\frac{\mu_n^2a}{l^2}\tau_0\right)+\right.$$
$$\left.+2E_i\left[-\left(\frac{\mu_n^2a}{l^2}+\alpha\right)\tau_0\right]-E_i\left[-\left(\frac{\mu_n^2a}{l^2}+2\alpha\right)\tau_0\right]\right\},$$
$$F_n(\infty,\tau_0)=F_n(\tau_1,\tau_0)+\frac{e^{-\beta_1(\tau_1-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}-\beta_1}\left[\frac{1}{\omega_0}-\frac{e^{-\alpha\tau_1}}{\omega_0+\alpha}\right]\left\{\frac{k_1}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}-\beta_1}+D(\tau_0)-\right.$$
$$\left.-e^{-\left(\frac{\mu_n^2a}{l^2}-\beta_1\right)(\tau_1-\tau_0)}\left[\frac{k_1}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}-\beta_1}+D(\tau_1)\right]\right\}+$$
$$+\frac{\omega_0(\omega_0-\gamma)e^{-\frac{\mu_n^2a}{l^2}(\tau_1-\tau_0)}}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}-\omega_0}\left[\frac{1}{\omega_0}-\frac{e^{-\alpha\tau_1}}{\omega_0+\alpha}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}}+\frac{e^{-\alpha\tau_1}}{\frac{\mu_n^2a}{l^2}+\alpha}\right].$$

Из последних формул заключаем, что после полного остывания плита остается в напряженном состоянии. Эти остаточные напряжения возникают вследствие ползучести материала.

Численный пример. Пусть бесконечная бетонная плита, толщиной $2l=2{,}0$ *м*, подвергается симметричному остыванию в возрасте $t=\tau_0=7$ *дн*. Значения теплотехнических коэффициентов возьмем следующие.

$$\beta_0=6{,}0\,\frac{ккал}{м^2\,час.\,град.},\ c_0=0{,}20\,\frac{ккал}{кг},\ k_0=1{,}50\,\frac{ккал}{м^2\,час.\,град.},$$

$\gamma_1=2500\,\dfrac{кг}{см^3}$. Параметры ползучести возьмем те же, которые использованы в численном примере предыдущего параграфа.

Результаты численного расчета приведены в нижеследующей таблице.

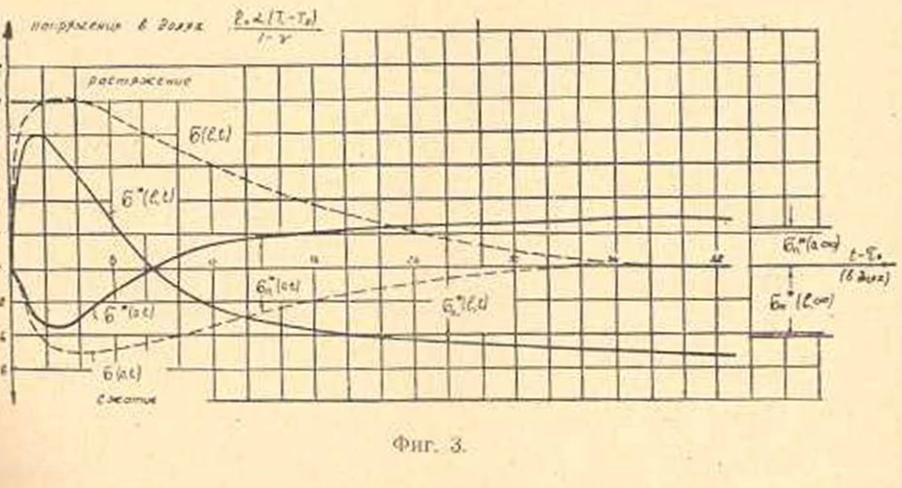
Таблица 2

Значения $\sigma^*(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ в долях $10^{-2}\frac{E_0\alpha_1(T_1-T_2)}{1-\nu}$

t	7	7,5	8,0	14	28	60	90	380	∞
				$x=\pm l$ (на поверхности)					
$\sigma(x, t)$	0,000	7,079	9,320	8,516	2,815	0,104	0,000	0,000	0,000
$\sigma^*(x, t)$	0,000	6,590	7,960	1,303	−4,147	−5,308	−4,467	−4,351	−4,351
				$x=0$ (в середине)					
$\sigma(x, t)$	0,000	−0,879	−2,994	−4,625	−1,533	−0,056	0,000	0,000	0,000
$\sigma^*(x, t)$	0,000	−0,834	−2,723	−0,704	2,254	2,886	2,428	2,365	2,365

Исходя из фиг. 3 и 4, выражающих закон изменения $\sigma(x, t)$ и $\sigma^*(x, t)$ во времени и по толщине плиты, приходим к заключению.

1. В начальном этапе остывания $\sigma(x, t)$ возрастает сравнительно быстрее. Достигнув своего максимального значения, она, монотонно убывая, стремится к нулю при $t \to \infty$.

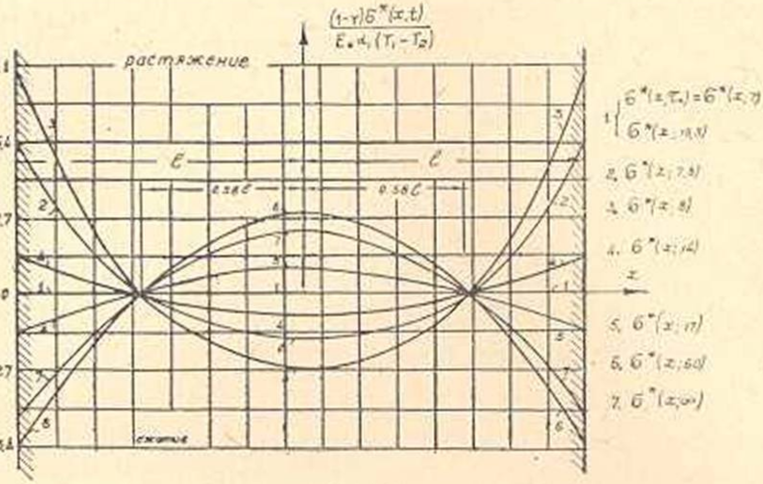


Фиг. 3.

2. Благодаря учету ползучести материала максимум $\sigma^*(x, t)$ во времени наступает раньше, чем $\sigma(x, t)$.

3. Меняя знак, $\sigma^*(x, t)$ по величине монотонно возрастает и через 3—4 недели от начала остывания достигает своего максимального значения. После этого, она, медленно убывая, при $t \to \infty$ принимает асимптотический характер. Это уменьшение $\sigma^*(x, t)$ составляет лишь 20—25%.

4. Остаточные напряжения, возникающие вследствие ползучести бетона, заслуживают внимания, поскольку они значительны по величине и, кроме того, в середине толщины плиты, противоположно упругому решению, являются растягивающими.



Фиг. 4.

5. После начала остывания (в нашем примере через 8,5 дней) некоторые моменты вся плита находится в совершенно не напряженном состоянии.

Таким образом, при остывании изменение напряжения в плите во времени носит в действительности не только количественный, но и качественный характер.

Մ. Ա. Զադոյան

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԲԵՏՈՆԵ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԵՐՈՒՄ, ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սողքի տեսության [5—6] հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրվում է լարումների փոփոխությունը բետոնե անվերջ սալերում արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանի ներդաշնակ տատանման և աստիճանական սառեցման դեպքում:

Ընդհանուր մասում (§ 1) լարումը ներկայացված է երկու ֆունկցիաների տարբերության տեսքով, որից առաջինը «առաձգական» լուծումն է, իսկ երկրորդը լարման այն մասն է, որն առաջանում է ժամանակի ընթացքում սողքի հետևանքով: Արտածված է սողքի տեսության հիմնական ինտեգրալ հավասարման կորիզի ռեզոլվենտան:

Երկրորդ պարագրաֆում ուսումնասիրված են ջերմային լարումները բետոնե անվերջ սալերում արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանի ներդաշնակ տատանման դեպքում: Օգտագործելով հարթ հատվածքների հիպոթեզը, հավասարակշռության հավասարումները (ինտեգրալ իմաստով) և ջերմահաղորդականության խնդրի լուծումը, Գ. Ն. Մասլովը [1] ստացել է լարումների փոփոխման օրենքը առաձգական սալում:

Հետագայում Ա. Վ. Բելովի և Գ. Ի. Վասիլևի [4] կողմից այն զարգացվել է՝ հաշվի առնելով նաև սալի մակերևույթի և արտաքին միջավայրի միջև տեղի ունեցող ջերմափոխանակությունը:

Օգտագործելով § 1-ում արտածված բանաձևերը և վերոհիշյալ աշխատությունների արդյունքները որոշված են սալի ջերմային լարումները սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխման անտեսումով: Բերված թվային օրինակներից և գրաֆ. 2-ից եզրակացնում ենք.

1) $\sigma^*(t)$ (լարումը սողքի հաշվառումով) ֆունկցիայի զրոները և էքստրեմումները ժամանակի ընթացքում վրա են հասնում ավելի վաղ, քան $\sigma(t)$-ինը (լարումը առանց սողքի հաշվառման),

2) $\sigma^*(t)$-ի էքստրեմալ արժեքները մոտ 2 անգամ փոքր են քան $\sigma(t)$-ի էքստրեմալ արժեքները,

3) Յուրաքանչյուր կիսապարբերությունում կա մի մոմենտ, երբ $\sigma^*(t)= =\sigma(t)$ և որոշ ժամանակամիջոց, որում $|\sigma^*(t)|>|\sigma(t)|$:

Երրորդ պարագրաֆում քննարկված է այն դեպքը, երբ հաստատուն ջերմաստիճան ունեցող սալը իր մակերևույթներով պահվում է ցածր ջերմաստիճանի տակ (սառեցվում է): Այս խնդրի առաձգական-ակնթարթային լուծումը տրվել է Գ. Ն. Մասլովի [2] կողմից, որն այնուհետև Ա. Վ. Բելովը զարգացրել է ջերմափոխանակության հաշվառումով [4]: Ներկա հոդվածում ուսումնասիրելով այդ խնդիրը սողքի տեսության հիման վրա հանգում ենք հետևյալ եզրակացություններին:

1) Սառեցման սկզբնական էտապում $\sigma(x, t)$ աճում է համեմատաբար արագ և հասնելով իր մաքսիմալ արժեքին, մոնոտոն նվազում է, ձգտելով զրոյի, երբ $t \to \infty$:

2) Շնորհիվ նյութի սողքի $\sigma^*(x, t)$ մաքսիմումը ժամանակի ընթացքում հասնում է ավելի շուտ, քան $\sigma(x, t)$-ինը

3) Փոխելով նշանը $\sigma^*(x, t)$-ը ըստ մեծության մոնոտոն աճում է և սառեցումը սկսելուց 3—4 շաբաթ հետո հասնում է իր մաքսիմալ արժեքին: Այնուհետև դանդաղ նվազելով (երբ $t \to \infty$) ընդունում է ասիմպտոտիկ բնույթ:

4) Մնացորդային լարումները, որոնք առաջանում են բետոնի սողքի հետևանքով, ուշադրության արժանի են, քանի որ նրանք ըստ մեծության զգալի են, և բացի դրանից, սալի հաստության միջին մասում, հակառակ առաձգական լուծման, ձգող են:

5) Սառեցումը սկսելուց հետո որոշ մոմենտում ամբողջ սալը գտնվում է չլարված վիճակում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов Г. Н.* Задача теории упругости о термоупругом равновесии. Известия НИИГ, т. 23, 1938.
2. *Маслов Г. Н.* Температурные напряжения и деформации бетонных массивов на основах теории упругости. Известия НИИГ, т. 13, 1934.
3. *Белов А. В.* и *Васильев П. И.* Практический способ определения температурных напряжений в бетонных стенках. Гидротехническое строительство, № 12, 1947.
4. *Белов А. В.* Температурные напряжения в бетонной стенке при постепенном остывании ее поверхностей. Известия НИИГ, т. 39, 1949.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести, 1952.
6. *Маслов Г. Н.* Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Известия НИИГ, т. 28, 1940.
7. *Лыков А. В.* Теория теплоподности. 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. Мхитарян

Количественный анализ разрывного решения задачи об определении характеристик установившегося поезда волн на быстротоке

Введение

Катящимися будем называть волны, распространяющиеся в виде прогрессивных волн по наклонному каналу с постоянной скоростью, без искажения формы и таким образом, что мгновенные действительные скорости частиц воды в теле волны везде меньше скорости распространения самой волны. Такой ряд следующих друг за другом волн будем называть поездом волн. Канал рассматривается плоскодонным, широкого прямоугольного сечения, большого уклона и однородным по шероховатости дна и стенок вдоль его длины.

Из рассмотрения совершенно исключаются как вопросы, связанные с аэрацией потока, так и вопросы о возникновении и развитии волн, что означает исключение начального участка быстротока, где происходит установление поезда волн, быстроток же считается практически бесконечной длины.

Явление образования и продвижения волн на быстротоке управляется уравнениями гидродинамики реальной несжимаемой жидкости, специально упрощенными и уточненными применительно к движению весомой жидкости в открытых каналах конечной глубины.

В этой работе мы будем пользоваться методом, предложенным Дресслером [1]. Исходим из уравнений теории мелководья с учетом сопротивления в виде эмпирического члена (формула Шези). Здесь же отметим, что Фридрихом [2] доказан приближенный характер этих уравнений, поскольку они являются только довольно грубым приближением более точных уравнений. Пользуясь методом Фридриха, Келлер [3] нашел последующие приближения без учета трения и пришел к кноидальным волнам, найденным еще в прошлом веке Кортевегом и Вриэом [4]. С другой стороны доказано (см. напр. [1]), что обычные приближенные уравнения мелководья непрерывных периодических по расстоянию решений не содержат.

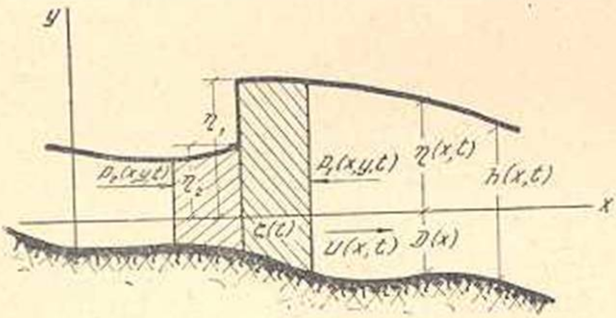
Поэтому Дресслер [1] рассматривает катящиеся волны как распространение разрывов, соединенных непрерывными кривыми, тогда обычные уравнения теории мелководья будут удовлетворены во всех точках непрерывности профиля волны в поезде, а в точках разрыва будут удовлетворены условия разрыва.

Действительно, наблюдения показывают, что волны на быстротоке имеют разрывной характер, особенно в голове волны, остальная часть волны позволяет делать все допущения теории мелководья, а потому хорошо описывается ею, как это показано Томасом [5].

Итак, катящиеся волны рассматриваются как движение разрывов постоянной высоты, на постоянном расстоянии друг от друга и с постоянной скоростью, причем для определения профиля волны будем пользоваться обычными уравнениями теории мелководья, а в разрывах—условиями разрыва.

§ 1. Условия разрыва

Эти условия выводятся почти во всех учебниках, их вывод приводится также в [1].



Фиг. 1. Схема движения разрыва по наклонному каналу.

Картина движения схематически представлена на фиг. 1.

Здесь $\xi(t)$ — абсцисса разрыва, p — давление воды,

$\eta(x, t)$ — высота свободной поверхности над осью x,

$D = D(x)$ — уравнение дна канала.

Указанные условия разрыва имеют вид:

$$\bar\rho_1 v_1 = \bar\rho_2 v_2 = M, \qquad \text{(для масс)} \tag{1.1}$$

$$M(v_1 - v_2) = \bar p_2 - \bar p_1, \qquad \text{(для количества движения)} \tag{1.2}$$

$$\lim \frac{dE}{dt} = \frac{Mg}{\rho}\,\frac{(\bar\rho_2 - \bar\rho_1)^3}{4\bar\rho_1\,\bar\rho_2} \qquad \text{(для энергии).} \tag{1.3}$$

Здесь обозначено:

$$\bar\rho_1 = \rho(\eta_1 + D), \qquad \bar\rho_2 = \rho(\eta_2 + D),$$

$$v_1 = u_1 - \frac{d\xi}{dt}, \qquad v_2 = u_2 - \frac{d\xi}{dt},$$

$$\bar p_1 = \frac{1}{2} g\rho(\eta_1 + D)^2, \qquad \bar p_2 = \frac{1}{2} g\rho(\eta_2 + D)^2. \tag{1.4}$$

Отметим одно замечательное обстоятельство. Эти условия, выведенные для канала с произвольным очертанием дна и с учетом сопротивления, совершенно тождественны с таковыми для случая движения идеальной жидкости по каналу с горизонтальным дном.

Так как частица при пересечении разрыва может только терять энергию, но не приобрести ее, то должно быть

$$\frac{dE}{dt} < 0. \tag{1.5}$$

Условиями разрыва (1.1), (1.2) и (1.5) мы и будем в дальнейшем пользоваться для построения разрывного решения задачи о катящихся волнах.

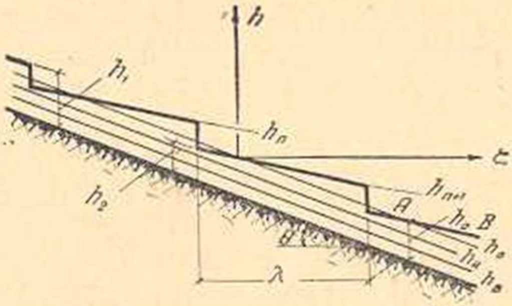
§ 2. Основные уравнения задачи

Рассмотрим канал широкого прямоугольного сечения, с плоским дном и с углом наклона к горизонту, равным θ (см. фиг. 2).

Согласно теории мелководья вертикальное ускорение частицы мало по сравнению с гравитационным ускорением и поэтому давление распределяется по гидростатическому закону

$$p = g\rho\,(\eta - y). \tag{2.1}$$

Кроме того, скорость частицы по оси x не зависит от y. Тогда, беря уравнение движения по оси x и уравнение неразрывности, учитывая сопротивление по Шези, будем иметь:



Фиг. 2. Схема движения поезда волн по быстротоку.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = gi - \frac{k^2 u^2}{4h}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0, \tag{2.3}$$

где $h(x, t) = \eta(x, t) + D(x)$, k — коэффициент сопротивления, причем $k^2 = \frac{4g}{C^2}$, где C — коэффициент Шези, g — ускорение силы тяжести, i — уклон дна.

Два уравнения (2.2) и (2.3), служат для определения двух неизвестных функций—скорости — $u(x, t)$ и глубины свободной поверхности над дном канала — $h(x, t)$.

Обозначим:

$$c = \frac{d\xi}{dt} \text{ — скорость распространения волны,} \tag{2.4}$$

λ — длина волны,

q — погонный расход воды.

Введем следующие величины

$$x=\bar{x}\frac{c^2}{g},\quad \zeta=\bar{\zeta}\frac{c^2}{g},\quad h=\bar{h}\frac{c^2}{g},\quad \lambda=\bar{\lambda}\frac{c^2}{g},$$

$$t=\bar{t}\frac{c}{g},\quad q=\bar{q}\frac{c^3}{g},\quad v_i=\bar{v}_i c,\quad u=\bar{u}c, \tag{2.5}$$

$$M=\bar{M}\rho\frac{c^3}{g},\quad E=\bar{E}\rho\frac{c^6}{g^2},$$

где черточками сверху обозначены соответствующие величины в безразмерном виде.

Введя эти величины в условия разрыва (1.1) — (1.3) и в основные уравнения (2.2) — (2.3) и отбрасывая, для простоты, черточки, получим для условий разрыва

$$q=h_1v_1=h_2v_2$$

$$q(v_2-v_1)=\frac{h_2^2-h_1^2}{2}, \tag{1.1'}$$

или согласно (1.4)

$$q(u_1-u_2)=\frac{h_1^2-h_2^2}{2}, \tag{1.2'}$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{q(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}. \tag{1.3'}$$

Основные уравнения примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=i\left(1-\frac{k^2u^2}{4ih}\right), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)=0. \tag{2.7}$$

Сообщим координатной системе постоянную скорость, равную скорости распространения волн в поезде в положительном направлении оси x, т. е. сделаем преобразование координат

$$\zeta=x-t,\quad t=t, \tag{2.8}$$

причем все величины безразмерные по (2.5).

Следовательно, система (2.6) — (2.7) примет следующий вид:

$$\frac{du}{d\zeta}=\frac{i(u-1)\left(1-\frac{\xi^2u^2}{4h}\right)}{(u-1)^2-h}, \tag{2.9}$$

$$\frac{dh}{d\zeta}=-\frac{ih\left(1-\frac{\xi^2u^2}{4h}\right)}{(u-1)^2-h}. \tag{2.10}$$

Здесь и далее введена безразмерная величина

$$\xi = \frac{k}{\sqrt{i}}. \qquad (2.11)$$

Задача свелась к установившейся; наши неизвестные функции (u и h) зависят теперь только от одной переменной ζ.

Прежде чем перейти к исследованию вида свободной поверхности, найдем связь между скоростью частиц воды и глубиной свободной поверхности над дном в подвижной системе координат. Для этой цели исключим $d\zeta$ из (2.9) и (2.10), получим простое дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dh} = -\frac{u-1}{h} = \frac{1-u}{h},$$

которое легко интегрируется и дает

$$(1-u)\,h = q = \text{const}, \qquad (2.12)$$

где q—погонный расход, наблюдаемый из подвижной системы координат (прогрессивный погонный расход [1]).
Подставляя u из (2.12) в (2.10), получим уравнение свободной поверхности в дифференциальной форме

$$\frac{dh}{d\zeta} = -\frac{ih\left[1 - \frac{\xi^2 (h-q)^2}{4h^3}\right]}{\frac{q^2}{h^2} - h}. \qquad (2.13)$$

Уравнение (2.13) в несколько иной форме изучалось Томасом [5], Дресслером [1] и другими, причем протабулированы важнейшие черты всех возможных профилей свободной поверхности, которые даются этим уравнением.

Для нас здесь важно отметить, что во всех этих решениях нет, периодических по расстоянию, непрерывных решений, могущих быть использованными для получения катящихся волн на быстротоке. Но еще Томас [5] обратил внимание на то, что два из полученных им профилей свободной поверхности, а именно профили 5 и 6, имеют одинаковую кривизну, при подходе к некоторой постоянной глубине. Используя это, Дресслер [1] выдвинул идею построить, периодическое по расстоянию, разрывное решение для получения установившегося поезда катящихся волн на быстротоке.

Идея эта такова. По быстротоку двигаются на определенном одинаковом расстоянии одинаковой высоты разрывы непрерывности свободной поверхности с постоянной скоростью поезда волн.

Эти разрывы соединены между собой непрерывными кривыми типа 5 и 6, полученными из уравнения (2.13).

Эта картина схематически представлена на фиг. 2.

Здесь h_0 — глубина специального решения.

Непрерывное решение должно обладать таким свойством, чтобы в части A — поток был сверхкритическим, а в B — докритическим, если движение его наблюдается из подвижной системы координат, т. е. действительные скорости частицы должны быть больше в области больших глубин. На профиле в какой-то точке мы должны иметь глубину h_0, отделяющую указанные области движения.

Эти части должны быть расположены именно так, как это показано на фиг. 2, чтобы частица в теле волны, имеющая скорость меньшую, чем скорость самой волны, пересекала разрыв из области малых глубин в область больших.

В этом случае, очевидно, неравенство (1.5) будет удовлетворено автоматически.

Итак, мы должны построить такой профиль, в точках непрерывности которого удовлетворится уравнение (2.13), а в точках разрыва непрерывности—условия (1.1)—(1.2), поскольку неравенство энергии (1.5) удовлетворено.

§ 3. Условия образования поезда катящихся волн

Назовем специальным решением то решение, при котором обращаются в нуль одновременно числитель и знаменатель в уравнении (2.10).

Глубина h_0, соответствующая этому решению найдется из условия равенства нулю знаменателя в (2.10), т. е.

$$(u_0 - 1)^2 - h_0 = 0. \tag{3.1}$$

(Здесь и в дальнейшем индексом „нуль“ отмечаются соответствующие величины, относящиеся к специальному решению).

Но в [1] и [5] показано, что из этого случая катящиеся волны получены быть не могут, т. е. из наблюдений и теоретических рассуждений известно, что в окрестности указанной точки h_0 производная $\frac{\partial h}{\partial \zeta}$ остается ограниченной, а не бесконечна, как это следует из (2.10). Для этого необходимо и достаточно, чтобы числитель в (2.10) тоже обращался бы в нуль в точке h_0, т. е. мы приходим к специальному решению.

Из сказанного следует, что только из этого специального случая подходящим соединением движущихся разрывов могут быть получены катящиеся волны на быстротоке.

Итак, мы приходим к выводу, что числитель и знаменатель правой части уравнения (2.10) имеют один общий корень h_0. Полагая в (2.10) числитель равным нулю при $h = h_0$, $u = u_0$, получим:

$$1 - \frac{\xi^2 u_0^2}{4h_0} = 0. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) легко найдем

$$u_0 = \left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{-1}, \tag{3.3}$$

$$h_0 = \left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^{-2}. \tag{3.4}$$

Поскольку $\xi > 0$, то $u_0 < 1$ по (3.3), что подтверждается наблюдениями, согласно которым скорость частиц в теле волны меньше скорости самой волны.

При $\xi = 0$ (сопротивление отсутствует) имеем $u_0 = 1$, т. е. частица движется со скоростью волны, что противоречит указанному выше факту. Следовательно, для образования катящихся волн необходимо (но недостаточно), чтобы

$$\xi > 0. \tag{3.5}$$

Этим подтверждается факт, что катящиеся волны не образуются, если трение отсутствует.

Используя (3.1) в (2.12), найдем

$$q_0 = \left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^{-3}. \tag{3.6}$$

Используя (3.3), (3.4) и (3.6) в (2.10) и сокращая числитель и знаменатель на $(h - h_0)$, получим

$$\frac{dh}{d\zeta} = i\,\frac{h^2 + h\left(h_0 - \frac{\xi^2}{4}\right) + h_0^2\,\frac{\xi^2}{4}}{h^2 + hh_0 + h_0^2}. \tag{3.7}$$

Чтобы получить действительный профиль для катящихся волн, согласно соображениям, приведенным выше, мы должны иметь:

$$\left.\frac{dh}{d\zeta}\right|_{h=h_0} > 0.$$

Из (3.7) видно, что для этого необходимо, чтобы

$$\xi < i. \tag{3.8}$$

Возвращаясь к параметрам водовода, получаем следующее важное соотношение между ними

$$k^2 < 1. \tag{3.9}$$

Этот результат найден Джеффрисом [6], а позднее, Томасом [5] несколько другим способом. Условие (3.9) совпадает с результатом Дресслера [1], только написано в несколько иной форме.

Объединяя (3.5) и (3.8), получаем следующий основной критерий образования установившегося поезда волн на быстротоке

$$0 < \xi < 1. \tag{3.10}$$

При $\xi = 0$ и $\xi \geqslant 1$ волны не образуются.

§ 4. Построение разрывного решения для катящихся волн

Обратимся теперь к основному уравнению (3.7), представим его в следующем виде:

$$\frac{dh}{d\zeta} = i\,\frac{(h-h_A)(h-h_B)}{h^2+hh_0+h_0^2}. \tag{4.1}$$

Здесь h_A и h_B — корни числителя (3.7), имеющие выражения

$$h_A = F_A h_0 = h_0\left[\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{\xi}}\right)\right], \tag{4.2}$$

$$h_B = F_B h_0 = h_0\left[\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{8}\left(1-\sqrt{1+\frac{8}{\xi}}\right)\right]. \tag{4.3}$$

Простое исследование показывает, что имеет место следующее условие между этими величинами

$$O < h_B < h_A < h_0. \tag{4.4}$$

в чем легко убедиться, пользуясь основным критерием (3.10). Функции F_A и F_B представлены на фиг. 3.

Уравнение (4.1) легко интегрируется и дает

$$i\zeta = (h-h_0) + \frac{h_A^2+h_A h_0+h_0^2}{h_A-h_B}\ln\frac{h-h_A}{h_0-h_A} -$$

$$-\frac{h_B^2\, h_B h_0 + h_0^2}{h_A-h_B}\ln\frac{h-h_B}{h_0-h_B}. \tag{4.5}$$

Начало координат выбрано так, чтобы иметь условие $\zeta = 0$ при $h = h_0$ и из этого условия определена постоянная интегрирования.

Пользуясь этой формулой, легко построить профиль для первой волны, т. е. кривую $h = h(\zeta)$; следующая волна получается из первой, перемещением всех точек по оси ζ на расстояние, равное безразмерной длине волны λ, причем для получения размерной длины согласно (2.5) следует λ умножать на $\dfrac{c^2}{g}$.

На фиг. 2 схематически показаны кривые $h_n = h_n(\zeta)$, которые даются формулой (4.5) указанным выше способом, причем непрерывные кривые соединены разрывами неизвестной высоты.

Здесь h_1 — максимальная высота волны,

h_2 — минимальная высота волны,

λ — длина волны.

$$H = h_1 - h_2. \tag{4.6}$$

H — называется высотой разрыва.

Для определения неизвестных высот h_1 и h_2 обратимся к условиям разрыва. Из них условие энергии, как показано выше, удовлетворяется.

Условие для масс (1.1′) дает

$$(1-u_1)\,h_1=(1-u_2)\,h_2=q_0, \tag{4.7}$$

т. е. условие для масс также выполняется, если мы параметр q—прогрессивный погонный расход воды, ограничиваем его значением q_0, которое дается формулой (3.6).

Остается условие (1.2′) для количества движения.

Из уравнения (4.7) имеем

$$u_1=1-\frac{q_0}{h_1}, \quad u_2=1-\frac{q_0}{h_2}.$$

Подставляя это в (1.2), получим

$$2q_0^2\frac{h_1-h_2}{h_1h_2}=h_1^2-h_2^2.$$

или, сокращая на $h_1-h_2\neq 0$,

$$2q_0^2\frac{1}{h_1h_2}=h_1+h_2. \tag{4.8}$$

Мы получили одно соотношение между двумя неизвестными, другое соотношение между ними найдется из геометрических соображений, используя тот факт, что разрыв, который встречается в некоторой точке ζ, принадлежит одновременно двум кривым, т. е. $\zeta=h_n(h_1)=$ $=h_{n+1}(h_2)$.

Отсюда получим:

$$(h_1-h_0)+\frac{h_A^2+h_Ah_0+h_0^2}{h_A-h_B}\ln\frac{h_1-h_A}{h_0-h_A}-\frac{h_B^2+h_Bh_0+h_0^2}{h_A-h_B}\ln\frac{h_1-h_B}{h_0-h_B}=$$

$$=(h_2-h_0)+\frac{h_A^2+h_Ah_0+h_0^2}{h_A-h_B}\ln\frac{h_2-h_A}{h_0-h_A}-$$

$$-\frac{h_B^2+h_Bh_0+h_0^2}{h_A-h_B}\ln\frac{h_2-h_B}{h_0-h_B}+D. \tag{4.9}$$

Из двух соотношений (4.8) и (4.9) можно найти h_1 и h_2.

Пользуясь тем, что $h_1>h_2$, легко найдем

$$h_2=\frac{1}{2}\left[\sqrt{h_1^2-\frac{a_3}{h_1}}-h_1\right], \tag{4.10}$$

$$D=\frac{3}{2}h_1-\frac{1}{2}F(h_1)+a_4\left\{a_1\lg\frac{h_1-h_A}{\frac{1}{2}[F(h_1)-h_1]-h_A}-\right.$$

$$\left.-a_2\lg\frac{h_1-h_B}{\frac{1}{2}[F(h_1)-h_1]-h_B}\right\}. \tag{4.11}$$

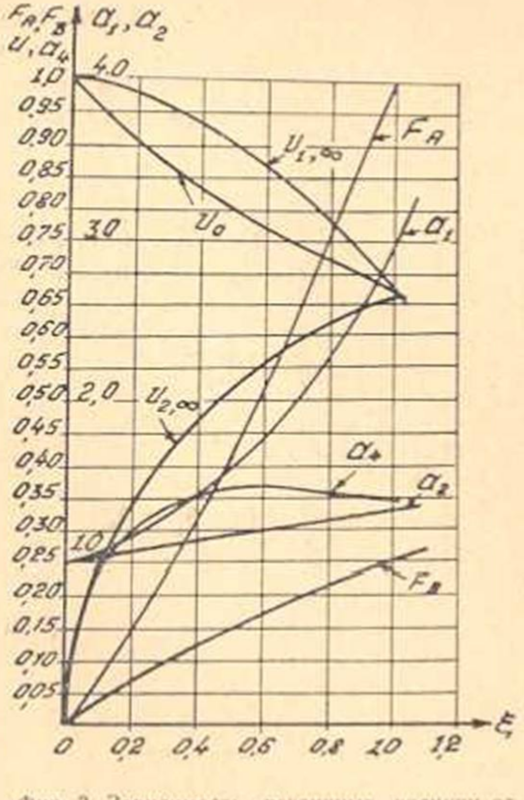
$$H = h_1 - h_2 = \frac{3}{2} h_1 - \frac{1}{2} F(h_1), \quad F(h_1) = \sqrt{h_1^2 + \frac{a_3}{h_1}}, \qquad (4.12)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = F_A^2 + F_A + 1, && a_2 = F_B^2 + F_B + 1, \\
&h_A = \frac{F_A}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2}, && h_B = \frac{F_B}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2}, \\
&a_3 = \frac{8}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^6}, && a_4 = \frac{2{,}303}{\frac{\xi^2}{4}\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{8}{\xi}}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

F_A и F_B берутся по (4.2).

§ 5. Исследование полученного решения

Все величины: F_A, F_B, h_A, h_B, a_1, a_2, a_3, a_4 являются только функциями безразмерной характеристики быстротока — ξ, сами являясь тоже безразмерными. Пользуясь основным критерием (3.10) и соотношениями (4.3) и (4.13), мы рассчитали все эти коэффициенты и представили на фиг. 3 и 4.



Фиг. 3. Зависимость различных величин от характеристик быстротока.

На этих же рисунках представлены u_0, h_0, q_0 в зависимости от ξ, рассчитанные по формулам (3.3), (3.4) и (3.6).

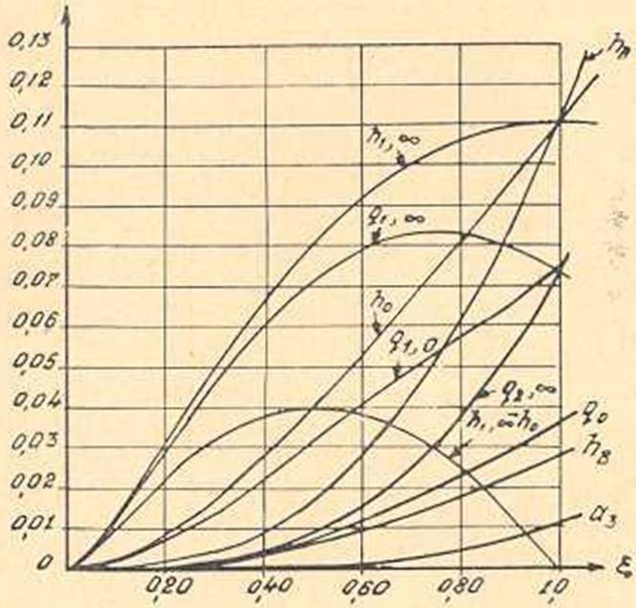
Графики на фиг. 3 и 4 носят вспомогательный характер, в дальнейшем будет показано как ими пользоваться.

Обратимся теперь к соотношениям (4.10), (4.11) и (4.12). Из них видно, что безразмерные максимальная и минимальная высоты волны, а также высота разрыва являются функциями безразмерной характеристики быстротока — ξ и величины $i\lambda$, где i — уклон дна, λ — безразмерная длина волны в поезде.

Рассмотрим сперва волны нулевой длины при различных значениях ξ, определяемых (3.10). Соотношение (4.11) показывает, что при $\lambda \to 0$ $(i > 0)$ имеем

$$h_{1,0} = h_0, \tag{5.1}$$

где $h_{1,0}$ — максимальная высота волны при $\lambda = 0$. (Здесь и далее вторыми индексами снабжаются соответствующие величины, отвечающие той или иной длине волны).



Фиг. 4. Зависимость различных величин от характеристик быстротока.

Пользуясь (4.10) и (4.12), легко найдем при $\lambda = 0$.

$$h_{1,0} = h_{2,0} = h_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)^2}, \tag{5.2}$$

$$H_0 = h_{1,0} - h_{2,0} = 0. \tag{5.3}$$

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда $\lambda \to \infty$. В этом случае имеем

$$\frac{1}{2}\left[F(h_1) - h_1\right] - h_A = 0.$$

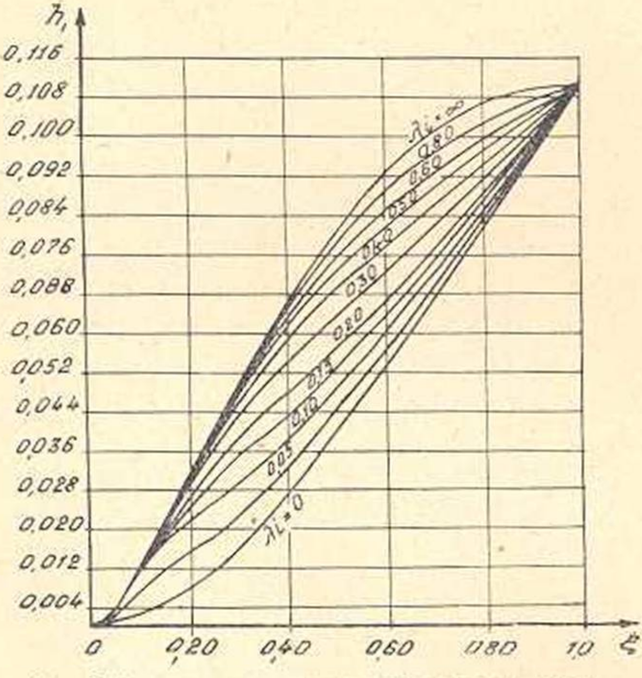
Откуда

$$\left.\begin{aligned} h_{1,\infty} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{h_A^2 + \frac{a_3}{h_A}} - h_A\right], \\ H_\infty &= \frac{3}{2} h_{1,\infty} - \frac{1}{2}\sqrt{h_{1,\infty}^2 + \frac{a_3}{h_{1,\infty}}}, \\ h_{2,\infty} &= h_{1,\infty} - H_\infty . \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Графики $h_{1,\infty}$ — максимальной высоты волны при бесконечной ее длине и $h_{1,0}=h_0$, зависящих от ξ, представлены на той же фиг. 4. При $\xi=0$ имеем $h_{1,0}=h_{2,0}=0$, $H_0=0$ (как и при любой длине волны),

$$h_{1,\infty}=h_{2,\infty}=0, \quad H_\infty=0.$$

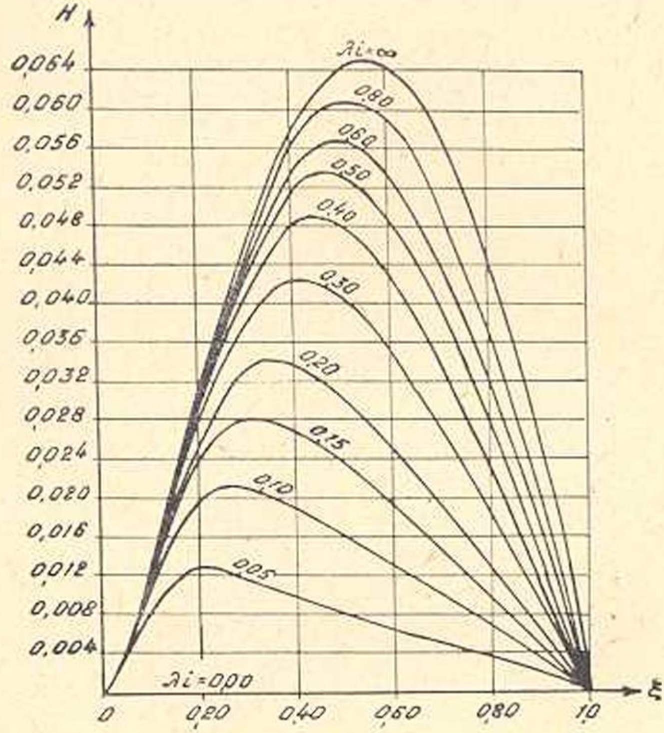
При $\xi=1$ имеем $h_{1,\infty}=h_{1,0}=h_{2,0}=0{,}1111$, $H_0=H_\infty=0$. Разность $h_{1,\infty}-h_{1,0}$, при любом значении ξ, показанная на той же фиг. 4, представляет собой изменение максимальной высоты волны при изменении длины волны от бесконечности до нуля; она достигает величины порядка 0,04 при $\xi=0{,}50-0{,}52$ и является одним из основных и важных результатов, показывающим в каком именно направлении нужно вести экспериментальные исследования.



Фиг. 5. Зависимость максимальной высоты волны от характеристик быстротока и длины волны $h_1=h_1(\xi, i\lambda)$.

Задавая ξ — различные постоянные значения в интервале (3.10) и h_1 — различные значения в пределах $h_{1,0}-h_{1,\infty}$ для данного значения ξ, мы по (4.11) рассчитывали $i\lambda$, а по (4.12)—H. Результаты представили на рисунках, которые за недостатком места мы здесь не приводим. Желая в дальнейшем в качестве параметра принимать λ, пользуясь этими графиками, мы при заданном постоянном значении λ определяли h_1 и H в зависимотти от ξ и результаты представили на фиг. 5 и 6, причем для построения крайних кривых, соответствующих $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, мы воспользовались соотношениями (5.2) и (5.4).

Обращают на себя внимание графики на фиг. 6. Для всех $i\lambda$ имеем $H=0$ как при $\xi=0$, так и при $\xi=1$. Кроме того, для любого значения $i\lambda$ имеется определенное значение ξ, при котором высота разрыва становится максимальной, причем эти значения параметра ξ, назовем их ξ_{max}, увеличиваются с увеличением уклона, при постоянной длине волны, или с увеличением длины волны при $i=\text{const}$. Эту закономерность, напоминавшую известный из физики закон смещения, аналитическим путем мы не находили из-за громоздких вычислений, но фиг. 6 показывает, что эти максимумы располагаются на некоторой кривой, очень близкой к прямой.



Фиг. 6. Зависимость высоты разрыва от характеристик быстротока и длины волны, $H = H(\xi, l\lambda)$.

Согласно (4.7) имеем

$$u_1 = 1 - \frac{q_0}{h_1}, \quad u_2 = 1 - \frac{q_0}{h_2}. \tag{5.5}$$

В случае, когда $\lambda \to 0$ имеем $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$ т. е.

$$u_{1,0} = u_{2,0} = u_0 = \frac{1}{1 + \frac{\xi}{2}}, \tag{5.6}$$

что легко получить, пользуясь формулами (3.4) и (3.6).

В случае, когда $\lambda \to \infty$ имеем

$$h_1 = h_{1,\infty}, \quad h_2 = h_{2,\infty} = h_{1,\infty} - H_\infty,$$

$$u_{1,\infty} = 1 - \frac{q_0}{h_{1,\infty}} \text{ и } u_{2,\infty} = 1 - \frac{q_0}{h_{2,\infty}} \tag{5.7}$$

Величины $u_{1,\infty}$ и $u_{2,\infty}$, зависящие только от ξ представлены на фиг. 3.

Действительный волновой расход определяется формулой

$$q(\zeta) = uh = h - q_0. \tag{5.8}$$

Волновые расходы в голове волны — q_1 и в хвосте волны — q_2 определяются соотношениями

$$q_1 = h_1 - q_0, \quad q_2 = h_2 - q_0. \tag{5.9}$$

В случае, когда $\lambda \to 0$ имеем $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$ и, как легко убедиться, получаем

$$q_{1,0} = q_{2,0} = h_0 - q_0 = u_0 h_0. \tag{5.10}$$

В случае, когда $\lambda \to \infty$, имеем

$$\begin{gathered} q_{1,\infty} = u_{1,\infty} h_{1,\infty} = h_{1,\infty} - q_0, \\ q_{2,\infty} = u_{2,\infty} h_{2,\infty} = h_{2,\infty} - q_0 = h_{1,\infty} - H_\infty - q_0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Величины $q_{1,0}$, $q_{1,\infty}$ и $q_{2,\infty}$ также зависят только от ξ.

Графики этих функций представлены на фиг. 4. Кривые $q_{1,\infty}$ и $q_{2,\infty}$ пересекаются в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1{,}0$ точно также, как и кривые h_0, $h_{1,\infty}$ и $h_{2,\infty}$.

Представляет определенный интерес подсчитать диссипацию энергии при разрыве.

Для этого пользуемся формулой (4.3). Очень важно подсчитать потери энергии при разрыве на единицу длины волны.

Обозначим

$$e = -\frac{dE}{dt}\,\frac{1}{i\lambda q_0}. \tag{5.12}$$

Тогда получим

$$e = \frac{H^3}{4h_1(h_1 - H)i\lambda}. \tag{5.13}$$

Задавая ξ постоянные значения, $i\lambda$ — различные значения и пользуясь произведенными расчетами для h_1 и H, легко подсчитать e. Результаты этих вычислений представлены на фиг. 7.

Прежде чем переходить к расчетам, определим скорость распространения поезда волн. Для этого воспользуемся выражением (5.8) для волнового расхода. Это выражение мы напишем в размерных величинах

$$q_b(\zeta) = uh = ch - q_0, \tag{5.14}$$

где q_0 — $м^2/сек$ — прогрессивный погонный расход;

q_b — волновой расход, являющийся периодической переменной величиной, имеющей ту же размерность, что и q_0;

h — глубина свободной поверхности над дном в метрах;

c — скорость распространения волны по (2.4); $\zeta = x - ct$.

Осредним величину q_b, чтобы найти средний по времени погонный расход, проходящий через данное фиксированное сечение, равный, очевидно, расходу подаваемому в голове быстротока. Обозначим этот расход через q.

Имеем

$$q = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{c}} q_0(\zeta)\, dt = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} h(\xi, i\zeta)\, d\zeta - q_0. \tag{5.15}$$

Переходя в правой части к тем же безразмерным величинам (2.5), и вводя новую переменную

$$i\zeta = \zeta_1, \tag{5.16}$$

получим вместо (5.15)

$$q = \frac{c^3}{g}\left[\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1} h(\xi, \zeta_1)\, d\zeta_1 - q_0,\right.$$

где $\lambda_1 = i\lambda$. Черточки над буквами в квадратных скобках снова опущены.

Отсюда

$$c = (gq)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1} h\, d\zeta - q_0\right]^{-\frac{1}{3}}. \tag{5.17}$$

$q_0(\zeta)$ определяется по (3.6), q обычно задается, поэтому (5.17) может быть использовано для определения скорости c, если известно λ. Представим эту формулу в следующем виде [1]:

$$c = \alpha g^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}, \tag{5.18}$$

причем для безразмерного коэффициента α, назовем его коэффициентом быстроты волны, имеем

$$\alpha = \alpha(\xi, i\lambda) = \left(\frac{1}{i\lambda}\int_0^{i\lambda} h\, d\zeta_1 - q_0\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{5.19}$$

Пользуясь (5.19), для α можно получить следующие асимптотические выражения.

Когда $\lambda \to 0$, $h \to h_0$ и мы получаем

$$\alpha_0 = \alpha_0(\xi) = (h_0 - q_0)^{-\frac{1}{3}}. \tag{5.20}$$

Или, согласно (3.4) и (3.6),

$$\alpha_0 = \left(1 + \frac{\xi}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}. \tag{5.20'}$$

В случае, когда $\lambda \to \infty$, $h \to h_{1.\infty}$ справа, причем $h_{1.\infty}$ ограничена сверху, $h \to h_A$ слева. Площадь, ограниченная волной стремится к $h_A \cdot \lambda$, а интеграл—к h_A.

Поэтому

$$\alpha_\infty = \alpha_\infty(\xi) = (h_0 F_A - q_0)^{-\frac{1}{3}}, \tag{5.21}$$

или, согласно (3.4) и (3.6),

$$\alpha_\infty = \left(1 + \frac{2}{\xi}\right)\left[\left(1 + \frac{2}{\xi}\right)F_A - 1\right]^{-\frac{1}{3}}. \tag{5.21'}$$

В общем случае α определяется по (5.19). Для этого предварительно нужно вычислить значение интеграла

$$I = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_0^{i\lambda} h(\xi, i\zeta)\, d\zeta_1.$$

Воспользуемся теми расчетами, которые уже были произведены выше. Задаем ξ постоянные значения в пределах (3.10), а $i\lambda$—различные значения; пользуясь графиками на фиг. 5 и 6 определяем h_1 и H, а также $h_2 = h_1 - H$; q_0 и h_0 берем по фиг. 4. Далее, задаем h различные значения в пределах от h_2 до h_1, причем берем значения h как больше, так и меньше h_0. По формуле

$$i\xi = (h - h_0) + a_4\left[a_1 \lg\frac{h - h_A}{h_0 - h_A} - a_2 \lg\frac{h - h_B}{h_0 - h_B}\right] \tag{5.22}$$

определяем $i\zeta$ т. е. по существу строим профиль волны, а значение интеграла I определяем, беря площадь, ограниченную дном, профилем волны и глубинами h_1 и h_2, причем пользуемся методом трапеций.

Пользуясь этим расчетом, строим кривые α в функции от $i\lambda$ при различных постоянных значениях параметра ξ. Пользуясь же последними кривыми, мы строим графики α в функции от ξ при различных постоянных значениях параметра $i\lambda$. Кривые, соответствующие α при $\lambda = 0$ (α_0) и $\lambda = \infty$ (α_∞) строим, пользуясь асимптотическими выражениями (5.20) и (5.21) или (5.20') и (5.21').

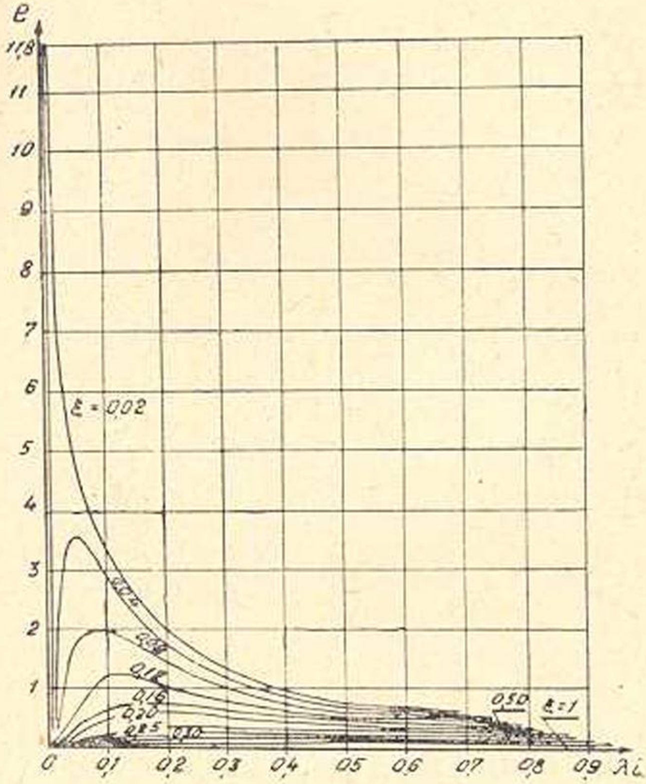
Результаты вычислений представлены на фиг. 8. Эти функции исследованы нами для всех положительных значений ξ; получено следующее:

1) при $\xi \to 0$, $\alpha \to \infty$ для всех длин волн; 2) при $\xi = 1$ $\alpha = 2{,}381$, в этой последней точке все кривые пересекаются; первое означает, что в канале без сопротивления поезд волн должен обладать бесконечно большой скоростью, т. е. физически невозможно существование волн в случае отсутствия сопротивления; второе же означает, что поезд любой длины волн имеет одну и ту же скорость для канала данного уклона и такого сопротивления, что $\xi = 1$, что возможно в том единственном случае, когда волны отсутствуют, т. е. при достаточно большом сопротивлении волны снова исчезают.

Кривые на фиг. 8 показывают, что в пределах, часто встречающихся на практике (ξ=0,6–0,8) α_0 и α_∞ достаточно близки. Чем меньше сопротивление и больше уклон, тем больше отличаются пределы коэффициента α, и наоборот. Графики также показывают, что при одном и том же ξ, с увеличением $i\lambda$ коэффициент α растет. Анализ позволяет утверждать, что скорость волны монотонно растет с увеличением длины волны, а по фиг. 5 растет и высота волны. Наблюдения подтверждают этот вывод; известно, что волны большой высоты распространяются с большими скоростями.

Весь расчет проводится следующим образом.

По заданному погонному расходу—q и характеристикам канала уклону и сопротивлению, т. е. параметру ξ определяется скорость распространения волн по формуле (8.18), причем для определения коэффициента быстроты волны по фиг. 8, кроме ξ должна быть также длина волны.



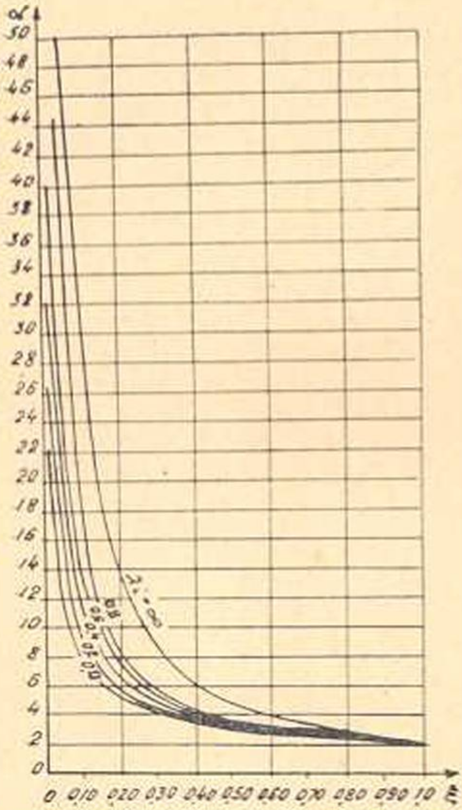
Фиг. 7. Зависимость отношения диссипации энергии при разрыве к длине волны от характеристик быстротока и длины волны, $e = e(\xi, i\lambda)$.

Имея длину волны и скорость, определяем безразмерную длину волны (2.5).

По фигурам 5, 6, 7 для данных значений $i\lambda$ и ξ определяем безразмерные характеристики поезда волн—максимальную и минимальную высоты, высоту разрыва и потери энергии при разрыве. По формулам (5.5) и (5.9) определяем скорости частиц воды в голове и хвосте волны, а также волновые расходы. Чтобы перейти к размерным величинам, пользуемся (2.5). Профиль волны строим по формуле (5.22).

§ 6. Заключение

Специальное решение уравнения (2.10), из которого построено периодическое по расстоянию разрывное решение для установившегося поезда катящихся волн на быстротоке, ставит ограничение на прогрессивный погонный расход q, введенный в (2.12). При удовлетворении одного из условий разрыва, а именно условия масс (1.1), мы видели, что достаточно ограничить значение прогрессивного расхода q его значением q_0, определяемым (3.6), чтобы указанное условие было удовлетворено. Этот вывод находится в полном согласии с наблюдениями, по которым катящиеся волны образуются только при определенных значениях этого расхода при прочих одинаковых условиях.



Фиг. 8. Зависимость коэффициента быстроты волны от характеристик быстротока и длины волны, $\alpha=\alpha(\xi, i)$.

Фиг. 5 показывает, что, как для малых, так и для больших длин волн максимальная волновая высота увеличивается с увеличением сопротивления и уменьшением уклона, а при одном и том же уклоне и сопротивлении, эта высота монотонно растет до некоторого предела с увеличением длины волны. При различных значениях уклона и сопротивления, подобранных так, чтобы иметь $\xi =$ const, максимальная высота будет больше при большем уклоне.

Действительно, как показывают наблюдения, для образования катящихся волн необходимо иметь большие глубины при малых уклонах и, наоборот, малые глубины при больших уклонах. Этот результат проливает некоторый свет на вопрос о дальнейшем экспериментальном исследовании вопроса об образовании самих волн.

Фиг. 6, показывающая, что высота разрыва $H=0$ при отсутствии сопротивления ($\xi=0$) и при достаточно большом сопротивлении ($\xi>1$) для всех длин волн и уклонов, является прекрасным подтверждением основного замечения Джеффриса в книге Корниша [7] о том, что катящиеся волны, повидимому, формируются сопротивлением.

Фиг. 8 показывает, что коэффициент α монотонно растет как с увеличением длины волны, так и с уменьшением сопротивления и с увеличением уклона, причем уклон влияет в одном и том же направлении как через ξ, так и непосредственно через i_0. Следовательно, при увеличении параметра ξ, скорость распространения волны, при том же погонном расходе, уменьшается и наоборот, чем меньше сопротивление и больше уклон, тем больше эта скорость.

При значительных сопротивлениях и малых уклонах, т. е. при больших значениях параметра ξ ($\xi = 0{,}50 - 0{,}85$) длина волны меньше влияет на скорость ее распространения и, наоборот, при малых сопротивлениях и больших уклонах волны различных длин распространяются со скоростями, значительно зависящими от их длин, причем совершенно очевидно, что эта скорость монотонно растет с увеличением длины волны, а по фиг. 5 увеличение длины волны сопровождается увеличением ее максимальной высоты. Этим подтверждается известный из наблюдений факт, согласно которому волны большей глубины распространяются с большей скоростью.

Более того, кривые на фиг. 8 показывают, что если взять канал с малым уклоном и малым сопротивлением с тем, чтобы иметь $\xi = 0{,}5 - 0{,}95$ и другой канал большего уклона и, соответственно, большего сопротивления, но с тем же значением ξ, то при одном и том же погонном расходе в голове канала, волны на этих двух каналах будут двигаться с почти одинаковыми скоростями. Если же при тех же условиях $\xi < 0{,}5$, то скорость будет больше в канале большего уклона.

Этот важный результат следует проверить экспериментальным путем.

Водно-энергетический
институт АН Армянской ССР

Поступило 10 II 1957

Ս. Մ. Մխիթարյան

ԱՐԱԳԱՀՈՍՆԵՐԻ ՎՐԱ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ԳՆԱՑՔԻ ԽՆԴՐԻ ԽԶՎՈՂ ԼՈՒԾՄԱՆ ՔԱՆԱԿԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է i թեքությունն ու k դիմադրության գործակիցն ունեցող, բավականաչափ լայն, համասեռ խորդուբորդություններով անվերջ երկար արագահոսի վրա առաջացող ալիքների հաստատված գնացքի խնդրի լուծումը: Օգտվելով Դրեսլերի [1] մեթոդից, ընդունվում է, որ այդ լուծումը խզվող է, ընդ որում ալիքի պրոֆիլի բոլոր կետերում բավարարվում են ջրի փոքր խորությունների հոսանքի սովորական հավասարումները (2.2)—(2.3) տեսքով, բացի այն կետերից, որտեղ ազատ մակերևույթի կորը խզվում է, իսկ այդ խզման կետերում բավարարվում են (1.1)—(1.3) խզման պայմանները: Հոսանքի կտրվածքում ճնշումը ըստ խորության բաշխված է հիդրոստատիկ օրենքով: (2.5) արտահայտությունների միջոցով անցնում ենք չափազուրկ մեծությունների և կատարելով կոորդինատների (2.8) ձևափոխումը, ստանում ենք (2.9)—(2.10) տեսքը, որտեղից կապ է ստացվում արագության և խորության միջև:

Այնուհետև ցույց է տրվում, որ (2.10) հավասարման հայտարարն ու համարիչն ունեն մի ընդհանուր արմատ, h_0, որը կոչվում է հատուկ լուծմանը համապատասխանող խորություն:

Քանի որ ջրի մասնիկները շարժվում են ավելի փոքր արագությամբ, քան ալիքի ձևը, իսկ ազատ մակերևույթի կորը h_0 խորության շրջակայքում անընդհատ է, ուստի ալիքի առաջացման համար ստացվում է (3.10) հայտանիշը ընդ որում մտցված է հատուկ չափազուրկ պարամետր (2.11) տեսքով:

Օգտվելով (4.1) հավասարման (4.5) ինտեգրալից և խզման պայմաններից ստացված (4.8) հավասարումից, ալիքի ամենամեծ (h_1) և ամենափոքր (h_2) խորությունների ու խզման (H) բարձրության համար ստացվում են (4.10)—(4.12) արտահայտությունները: Այնուհետև համառոտակի հետազոտվում են ստացված արդյունքները:

Այն դեպքում, երբ $\lambda \to 0$, որտեղ λ ալիքի երկարությունն է, ստացվում է մի հաստատուն խորություն, որը հավասար է հատուկ լուծման խորությանը (5.2), ըստ որի $H=0$: Այն դեպքում, երբ $\lambda \to \infty$, ստացվում են (5.4) արտահայտությունները: Դիտարկված են նույն դեպքերը արագահոսը բնութագրող ξ պարամետրի սահմանային արժեքների համար: Ամենամեծ խորությունների և խզման բարձրության համար բերվում են գրաֆիկները 5-ում և 6-ում: Նույն այդ սահմանային արժեքների համար հաշված են նաև ջրի ելքերը և մասնիկի արագությունները, որոնք բերված են գրաֆիկներ 3-ի և 4-ի վրա: Էներգիայի կորուստները ներկայացված են գրաֆիկ 7-ի վրա:

Ջրի իրական ալիքային ելքը որոշվում է 5.8 հավասարումից, ընդ որում այդ ելքը պարբերական ֆունկցիա է: Այնուհետև ստացվում են (5.18) արտահայտությունը ալիքի տարածման արագության համար, իսկ α գործակցի համար՝ (5.19)-ը: Վերջինիս համար ստացված են նաև (5.20) և (5.21) ասիմպտոտիկ արտահայտությունները՝ շատ կարճ և շատ երկար ալիքների դեպքում:

Կառուցելով ալիքի պրոֆիլը և հաշվելով նրա մակերեսը, հաշվվում է α-ն կամայական λ-ի համար: Արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկ 8-ի վրա:

Վերջում համառոտ կերպով շարադրված են աշխատության հիմնական արդյունքները և ցույց է տրված, թե ինչ ուղղությամբ պետք է շարունակվեն հետագա տեսական և փորձնական հետազոտությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dressler R.* Mathematical solution of the problem of Roll—Waves in inclined open channels. Comm. of pure and appl. math., v. 2, 1949.
2. *Fridrichs.* On ther derivation of shollow-water Theory. Comm. of pure and appl. math. v. 1, 1948.
3. *Keller.* The solitary wave and Periobic Waves on Schallow—Water. Comm. of puer and appl. math., v. 1, 1948.
4. *Korteweg* and *Vries.* On the change of Long: Waves. Phil. mag., ser. 5. v. 1, 1895.
5. *Thomas H.* Propagation of waves in steep chanels. Proc. Hydr. Conf., Jowa, 1940.
6. *Jeffreys H.* Phil. mag., ser. 6, v. 49, 1925.
7. *Cornish B.* Ocean Waves. Cambridge, 1934.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

ФИЗИКА

З. А. Киракосян, Р. Б. Бегжанов, Э. Г. Шароян, А. Г. Малоян и Р. М. Арутюнян

Исследование частиц, генерированных нейтронами и протонами в меди

В работах [1, 2, 3] приводились данные о спектрах π-мезонов и протонов в легком веществе-графите и тяжелом веществе-свинце. Работы эти проводились с помощью спектрометров Алиханяна-Алиханова. Цель настоящей работы заключалась в исследовании, тем же методом, спектров π-мезонов и протонов генерированных в меди, т. е. веществе имеющем атомный вес близкий к среднему атомному весу вещества фотоэмульсии, и сравнении полученных результатов как с данными работ проведенных с помощью фотоэмульсии [4] так и с другими измерениями.

Описание установки, с помощью которой проводились измерения спектров генерации приведено в работе [5].

С помощью этой установки определялись значения импульсов частиц 1, 2, 5, 10 и 16 $\frac{Бэв}{c}$ с точностью 2, 4, 10, 20 и 32% соответственно.

Траектории всех исследуемых частиц подвергались тщательному анализу при помощи трафаретов, на которых, в масштабе, была изображена схема установки в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Схема используемой установки приведена в работе [5].

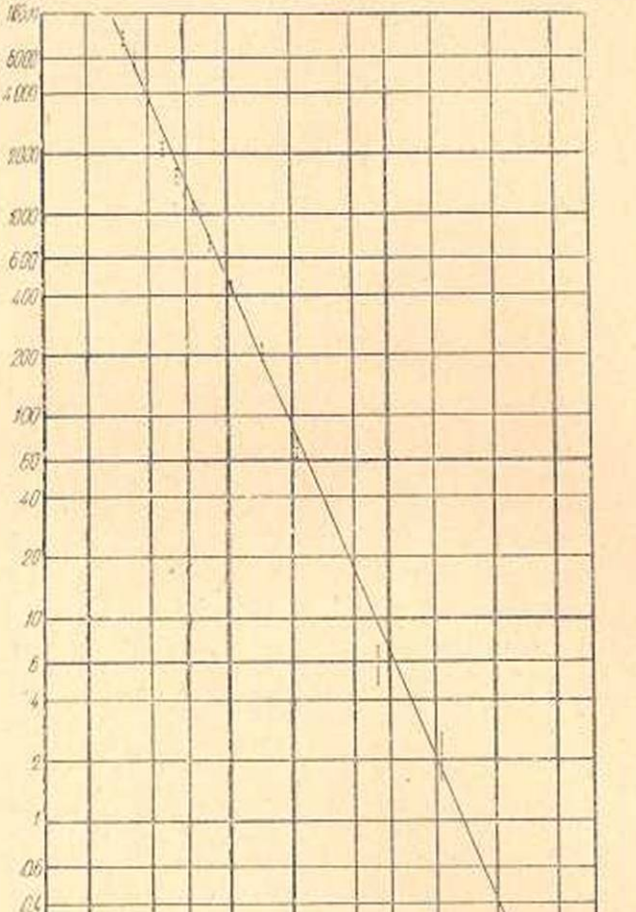
§ 1. Спектры π^--мезонов и протонов генерированных нейтронами в меди

Спектр отрицательных π-мезонов

За все время измерений было зарегистрировано 1379 годных для обработки частиц отрицательного знака с импульсами 0,3 *Бэв/с* генерированных в медном поглотителе толщиной 94,8 *г/см²*.

Следует отметить, что в рассматриваемых измерениях, регистрировались все заряженные частицы генерированные нейтронами в медном генераторе, расположенном над магнитным зазором, независимо от того останавливались ли эти частицы в системе поглотителей находящихся под магнитным зазором, или нет.

В работах [3, 6] показано, что в звездах основную долю мезонов составляют π-мезоны. Поэтому все отрицательные частицы образованные в нейтронных звездах, являются π-мезонами. Экспериментальные данные приведены в таблице 1. Светосила установки вычислена на основании работ [7, 8, 9]. Спектр π^--мезонов в области энергий $0{,}89 \leqslant E \leqslant 31{,}8$ *Бэв* выражается показательной функцией



Фиг. 1. Дифференциальный энергетический спектр отрицательных π-мезонов генерированных нейтронами в медном поглотителе толщиной 94,8 *г/см²*. По оси абсцисс отложена величина полной энергии в единицах *Бэв*.

$$N(E)\,dE = \frac{a}{E^{\gamma}}\,dE \tag{1}$$

где $\gamma = 2{,}3 \pm 0{,}1$. Этот спектр приведен на фиг. 1.

Таблица 1

Энергетическое распределение отрицательных π-мезонов, генерированных нейтронами в медном поглотителе толщиной 94,8 $г/см^2$

Полная средняя энергия в *Бэв*	Число наблюденных π-мезонов	Светосила	Ординаты дифференциального энергетического спектра π-мезонов в произвольных единицах
1	2	3	4
0,31	132	0,58	7600 ± 663
0,345	151	0,64	5950 ± 485
0,4	205	0,74	3840 ± 269
0,475	132	0,84	2110 ± 184
0,55	123	0,9	$1545 \pm 139,5$
0,66	133	0,96	1070 ± 93
0,81	112	1	$715 \pm 67,6$
1,04	139	1	$426 \pm 36,2$
1,45	103	1	$205 \pm 19,7$
2,13	96	1	$68,0 \pm 6,95$
5,3	21	1	$5,94 \pm 1,29$
10,6	15	1	$2,13 \pm 0,55$
31,8	12	1	$0,188 \pm 0,055$

Полученный спектр находится в хорошем согласии с данными работы [1], относительно спектра рождения отрицательных π-мезонов в тонком слое легкого вещества (графита).

Результат согласуется также с данными, полученными для спектра π-мезонов, генерированных в свинце [3].

Спектр генерированных протонов

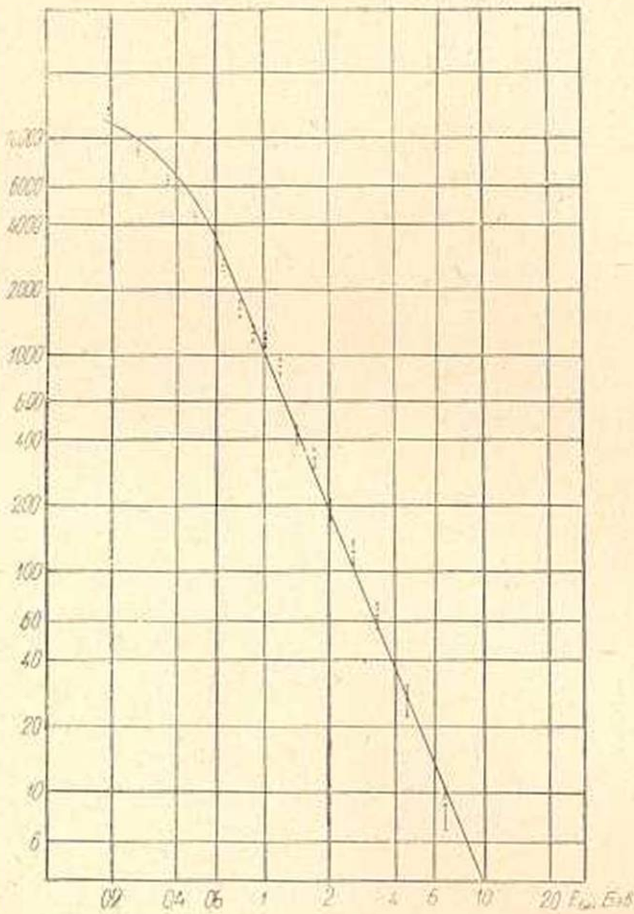
Одновременно с π-мезонами было наблюдено 3605 протонов с импульсами $p \geqslant 0{,}53$ *Бэв/с*, генерированных нейтронами в том же слое меди.

Положительные частицы генерированные нейтронами могли быть протонами и π^+-мезонами.

Система поглотителей, расположенных под магнитным зазором позволяла произвести прямое отделение потока протонов от потока π^+-мезонов для частиц с импульсами $p \lesssim 1$ *Бэв/с*.

Для отношения чисел положительных и отрицательных π-мезонов с импульсами $p \lesssim 1$ *Бэв/с* было получено значение $1{,}08 \pm 0{,}06$, причем с уменьшением импульса это отношение увеличивается. Было сделано предположение, что это отношение равно единице и при импульсах $p > 1$ *Бэв/с*. Поэтому для получения числа протонов с $p > 1$

Бэв/с мы из общего числа генерированных положительных частиц вычитывали число отрицательных π-мезонов. В таблице 2 приведено полученное таким образом энергетическое распределение протонов. Это распределение графически представлено на фиг. 2. Как видно из фиг. 2, начиная с энергии $E \approx 0{,}4$ *Бэв* спектр протонов хорошо описывается степенной функцией вида (1) с $\gamma = 2{,}40 \pm 0{,}14$.



Фиг. 2. Дифференциальный энергетический спектр протонов генерированных нейтронами в медном поглотителе толщиной 94,8 *г/см²*

При энергиях $E < 0{,}4$ *Бэв* наблюдается уменьшение наклона кривой — γ. Это уменьшение частично объясняется ионизационным торможением протонов в самом генераторе.

Полученный нами спектр протонов в пределах точности эксперимента находится в согласии со спектрами протонов генерированных нейтронами в слое свинца толщиной 102 *г/см²* [10], 11,3 *г/см²* (2), 192 *г/см²* [11] и с истинным спектром рождения протонов [1] в легком веществе-графите.

Таблица 2

Энергетическое распределение протонов генерированных нейтронами в медном поглотителе толщиной 94,8 $г/см^2$

Средняя энергия в *Бэв*	Число наблюденных протонов	Светосила	Ординаты дифференциального энергетического спектра протонов в произвольных единицах
1	2	3	4
0,16	700	0,93	13600±515
0,22	61[illegible]	0,98	8700±352
0,30	528	1	6400±278
0,40	491	1	4390±198
0,53	323	1	2590±145
0,64	134	1	1630±141
0,73	127	1	1280±114
0,84	146	1	1190±99
0,98	139	1	905±77
1,15	84	1	427±46,5
1,38	87	1	336±36
1,67	69	1	194±23,4
2,10	61	1	125±16
2,72	49	1	64,3±9,2
3,69	34	1	26,7±4,57
5,49	22	1	8,7±1,86

§ 2. Спектры π^--мезонов и протонов генерированных протонами в меди

В этом параграфе нами рассматриваются спектры π^-—мезонов и протонов рожденных в протонных звездах в меди.

Здесь необходимо оговорить, что условия регистрации таких случаев несколько отличаются от условий регистрации нейтронных звезд, так как нашей установкой, из общего потока заряженных частиц, регистрировались только те заряженные частицы, которые останавливались в системе поглотителей, расположенных под магнитным зазором.

Таким образом, при построении спектров мы могли пользоваться только данными по числу звезд, вызванных в медном генераторе протонами, вторичные продукты которых останавливались в системе нижних поглотителей. Поэтому нужно было вводить поправку на число частиц прошедших через эти поглотители.

Эта поправка учитывалась введением величины вероятности остановки, представляющей собой отношение числа остановившихся частиц к общему их числу, и вычислялась из данных по нейтронным звездам. Как уже отмечалось, в случае последних, установкой регистрировались как остановившиеся, так и прошедшие частицы.

Вероятность остановки, определенная для π-мезонов, оказалась по всему спектру примерно постоянной величиной и поэтому не вводит в спектр каких-либо изменений в исследуемой нами области энергий. Для протонов же она несколько изменяется. Значения вероятности остановки протонов приведены в четвертом столбце таблицы 4.

Для исследования протонных звезд нами отбирались случаи, когда заряженная частица, проходя через генератор, вызывала загорание трех и более счетчиков в первом координатном ряде, расположенном непосредственно под генерирующим слоем. При этом не рассматривались случаи загорания соседних счетчиков. Таким образом мы исключали ложные случаи „звезд" от δ-электронов.

За все время измерений было зарегистрировано 136 случаев отрицательных π-мезонов с полной энергией $E > 0{,}42$ *Бэв*, удовлетворяющих условиям отбора приведенным выше.

Распределение этих мезонов приводится в таблице 3. Спектр π-мезонов можно выразить показательной функцией вида

$$N_{\pi}(E)\,dE = \frac{a}{E^{\gamma}}\,dE$$

с $\gamma = 2{,}05 \pm 0{,}2$ в области энергий $E > 0{,}42$ *Бэв*.

Таблица 3

Энергетическое распределение отрицательных π-мезонов генерированных протонами в медном поглотителе толщиной 94,8 $г/см^2$

Полная средняя энергия в *Бэв*	Число наблюденных π-мезонов	Светосила	Ординаты дифференциального энергетического спектра π-мезонов в произвольных единицах
1	2	3	4
0,45	27	0,8	563 ± 103
0,54	26	0,89	$225 \pm 44{,}2$
0,71	21	0,97	$103 \pm 23{,}6$
1,01	24	1	$58{,}5 \pm 11{,}9$
1,6	19	1	$24{,}5 \pm 5{,}62$
2,99	12	1	$6{,}0 \pm 1{,}73$

Положительными частицами в протонных звездах могли быть π^+—мезоны и протоны. Здесь так же как и в случае нейтронных звезд принималось значение отношения $\frac{N_{\pi^+}}{N_{\pi^-}} \approx 1$ для области импульсов $p \geq 1$ *Бэв/с*. Для получения потока протонов из потока положительных частиц вычитался поток отрицательных π-мезонов. Полученное распределение протонов по их энергиям приведено в таблице 4.

Таблица 4

Энергетическое распределение протонов генерированных протонами в медном поглотителе толщиной 94,8 *г/см²*

Средняя энергия в *Бэв*	Число наблюденных протонов	Светосила	Вероятность остановки	Ординаты дифференциального энергетического спектра протонов в произвольных единицах
1	2	3	4	5
0,31	64	1	1	800 ± 100
0,39	53	1	1	661 ± 91
0,48	43	1	1	$430 \pm 65,6$
0,61	50	1	0,93	$336 \pm 47,5$
0,8	37	1	0,83	203 ± 33
1,08	33	1	0,76	$124 \pm 21,6$
1,39	15	1	0,72	$80,2 \pm 20,8$
1,69	11	1	0,69	$45,4 \pm 13,7$
2,51	15	1	0,68	$17,2 \pm 4,45$
5,11	7	1	0,68	$2,6 + 0,98$

Из таблицы 4 следует, что спектр этих протонов также может быть выражен степенным законом

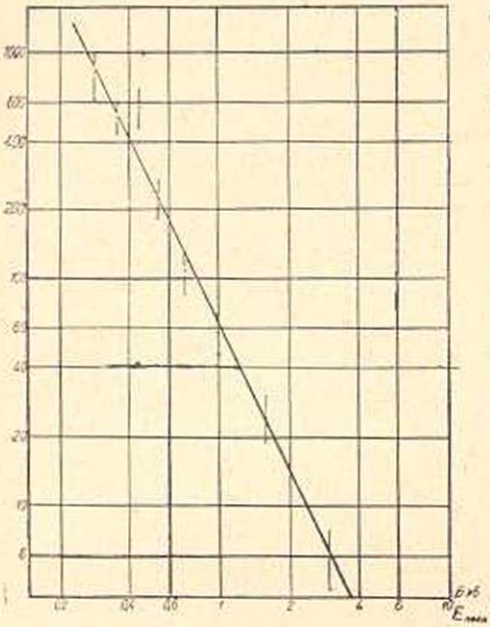
$$N_p(E)\,dE = \frac{a}{E^{\gamma}}\,dE \qquad \text{с} \quad \gamma = 2{,}54 \pm 0{,}32.$$

На фигурах 3 и 4 приводятся, соответственно, энергетические спектры π^- — мезонов и протонов, генерированных протонами в медном поглотителе.

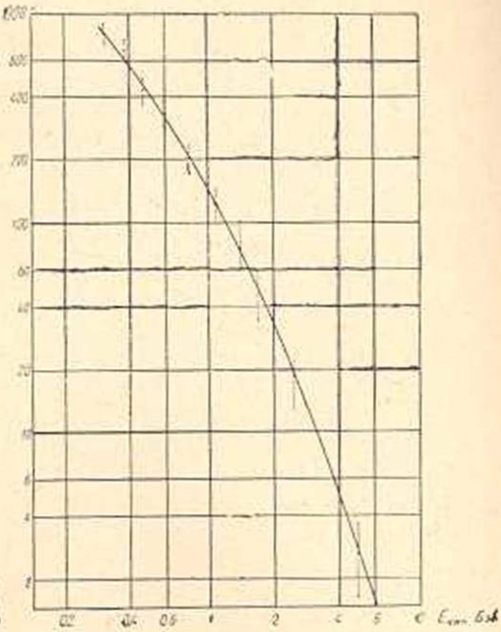
Сопоставляя полученные данные с данными работы [4], проведенной с помощью фотоэмульсии, можно придти к заключению, что в области больших энергий, в пределах ошибок измерений, спектры протонов и π^- — мезонов, генерированных в толстом слое меди, совпадают со спектрами рождения в эмульсии. Из работ [2, 10, 11] следует также независимость вида спектров генерированных частиц от толщины генератора.

В работе [12], для области больших энергий, установлена зависимость между спектрами рождения — $\nu(R, s)$ и спектрами генерированных частиц — $N(x, s)$, наблюдаемых под толстым слоем вещества. Это соотношение дается выражением

$$\nu(R, s) = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L}\right) N(R, s)$$



Фиг. 3. Дифференциальный энергетический спектр отрицательных π-мезонов генерированных протонами в медном поглотителе толщиной 94,8 $г/см^2$.



Фиг. 4. Дифференциальный энергетический спектр протонов генерированных протонами в медном поглотителе толщиной 94,8 $г/см^2$.

где R — пробег частицы заданной энергии E,

x — толщина генерирующего слоя вещества,

λ — пробег взаимодействия и

L — пробег поглощения для данного сорта частиц.

Из подобия видов спектров $\nu(R, s)$ и $N(x, s)$ следует, что величина $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L}$ не должна зависеть от энергии. Это может иметь место, или при постоянстве значений λ и L, или при одинаковом характере их изменений.

Сравнительно недавно вышла из печати работа [13], посвященная изучению с помощью магнитного спектрометра, аналогичного нашему, спектру генерации отрицательных π-мезонов в свинце от заряженной компоненты космического излучения (г. Алагез, 3250 м. над уровнем моря). Авторы этой работы для π-мезонов в интервале импульсов от 0,45 до 4,8 Бэв/с получили показатель степени $\gamma = 1{,}46 \pm \pm 0{,}20$, что сильно отличается от наших данных. Это, повидимому, объясняется тем, что авторы [13] изучали π-мезоны, генерированные в больших звездах и отбирали случай звезд с не менее двумя проникающими частицами.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность Кочаряну Н. М. за ценное обсуждение результатов настоящей работы.

Институт физики
АН Армянской ССР

Поступило 6 IX 1957

Զ. Ա. Կիրակոսյան, Ռ. Ռ. Բեգժանով, Է. Գ. Շարոյան,
Ա. Հ. Մալոյան և Ռ. Մ. Հարությունյան

ՆԵՅՏՐՈՆՆԵՐԻ ԵՎ ՊՐՈՏՈՆՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ ՊՂՆՁՈՒՄ ԳԵՆԵՐԱՑՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ հետազոտված են պղնձի միջուկներում պրոտոնների ու նեյտրոնների կողմից գեներացված π-մեզոնների և պրոտոնների սպեկտրները: Չափումները կատարվել են մագնիսական սպեկտրոմետրի միջոցով, որը 1, 2, 5, 10 և 16 Бэв/c մեծության իմպուլսները չափում է համապատասխանաբար 2, 4, 10, 26 և 32% սխալով: Օգտագործված սարքավորման սխեման նկարագրված է [2] աշխատանքում: Գեներացնող պղնձի շերտի հաստությունը հավասար էր 94,8 գ/սմ²: Գեներացված բացասական մասնիկները ներկայացնում են π^--մեզոններ: 0,3 և 31,8 Бэв/c իմպուլսների ինտերվալում գրանցվել է 1379 π^--մեզոն: Կառուցվել է էներգետիկ սպեկտր $0{,}89 \leqslant E$ 31,8 Бэв/c էներգիայի տիրույթի համար և ցույց է տրվել, որ սպեկտրը կարելի է արտահայտել ցուցիչային ֆունկցիայով, որը ունի հետևյալ տեսքը

$$N(E)\,dE = \frac{a}{E^{\gamma}}dE,$$

որտեղ $\gamma = 2{,}3 \pm 0{,}1$: Մանրամասն տվյալներ այդ սպեկտրի մասին բերված են 1 աղյուսակում:

Նեյտրոնների կողմից պղնձում գեներացված պրոտոնների սպեկտրը ուսումնասիրված է սկսած $p > 0{,}53$ Бэв/c իմպուլսից: Գեներացված դրական մասնիկները կարող էին լինել ինչպես պրոտոններ, այնպես էլ π^+-մեզոններ: Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ մեծ իմպուլսների տիրույթում դրական և բացասական π^--մեզոնների թվերը իրար հավասար են: Այստեղից պրոտոնների թիվը ստացվում է հանելով դրական ընդհանուր մասնիկների թվից բացասական մասնիկների թիվը: Գրանցված պրոտոնների թիվը այսպիսով եղել է 3605: Նրանց բաշխումը ըստ էներգիայի բերված է 2 աղյուսակում: Սկսած $E \approx 0{,}4$ Бэв էներգիայից սպեկտրը նույնպես արտահայտվում է ցուցիչային ֆունկցիայով, որի $\gamma = 2{,}40 \pm 0{,}14$:

Առանձին հետազոտության են ենթարկվել այն պրոտոնները և π^--մեզոնները, որոնք գեներացվել են նույն պղնձի շերտում պրոտոնների կողմից:

Չափման ընթացքում գրանցվել է 136 բացասական π^--մեզոն, որոնք ծնվել են պղնձի շերտում պրոտոնների աստղերի մեջ և ունեցել են լրիվ էներգիա $E > 0{,}42$ Бэв: Էներգետիկ սպեկտրին վերաբերվող տվյալները բերված են 3 աղյուսակում: Ըստ այդ տվյալների պրոտոններով գեներացված բացասական π^--մեզոնների սպեկտրը ունի ցուցիչային ֆունկցիայի տեսք, որի $\gamma = 2{,}05 \pm 0{,}20$: Պրոտոնների սպեկտրի համար $\gamma = 2{,}54 \pm 0{,}32$ ինչպես այդ հետևում է 4 աղյուսակից:

Ստացված սպեկտրները համեմատվել են այլ նյութերում [1, 2, 3] առաջացած սպեկտրների հետ: Տարբեր ատոմական կշիռ ունեցող նյութերի

մեջ, և տարբեր հաստության շերտերի տակ, սպեկտրների միատեսակ լինելը մեզ բերում է այն եզրակացության, որ միջուկային փոխազդեցության l *ազատ վազքի և* L *կլանման վազքի միջև պետք է գոյություն ունենա* $\frac{1}{2} - \frac{1}{L} = \text{const}$ *առնչությունը։ Այստեղից հետևում է, որ* l *և* L *մեծությունները, էներգիայի մեծացմանը զուգընթաց, կամ պետք է մնան հաստատուն, կամ պիտի փոխվեն միևնույն ուղղությամբ։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочарян Н., Саакян Г.* и др. Изв. АН СССР, сер. физ. наук, 19, 5, 1955 г.
2. *Кочарян Н.* ЖЭТФ 28, 160, 1955 г.
3. *Камалян В., Алиханян А.* ДАН СССР, 97, 425, 1954 г.
4. *Камерини У., Фаулер П.* и др. Phil mag. 41, 413, 1950 г.
5. *Кочарян Н., Бегжанов Р., Пачаджян Х.* ДАН Армянской ССР, 24, 4, 1956 г.
6. *Даниел Р.* и др. Phil mag. 43, 753, 1952 г.
7. *Кочарян Н.* и *Кайтмазов С.* Изв. АН Армянской ССР, 7, 43, 1954 г.
8. *Саакян Г.* Изв. АН Армянской ССР, 7, 54, 1954 г.
9. *Бегжанов Р.* Изв. АН Узб. ССР (в печати).
10. *Дадаян А.* и *Мерзон Г.* Изв. АН СССР, сер. физ. наук, 17, 1, 1953 г.
11. *Киракосян З.* Кандидатская диссертация, 1957 г.
12. *Кочарян Н.* и *Саакян Г.* Изв. АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, VIII, 1, 1955 г.
13. *Асатиани Т.* и *Хримян Г.*, ЖЭТФ, 33, 561, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

НАУЧНАЯ ЗАМЕТКА

М. М. Джрбашян

О взвешенно-наилучшем приближении функции $|x|$ на всей вещественной оси

Пусть функция $y = p_0(x)$ определена, непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-p_0(x)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отнесем к классу $C[p_0(|x|)]$ функции $f(x)$, непрерывные на всей оси $(-\infty, +\infty)$, для которых

$$\lim_{|x| \to \infty} e^{-p_0(x)} f(x) = 0.$$

Очевидно, что любой полином принадлежит к классу $C[p_0(|x|)]$ обозначим для $f(x) \in C[p_0(|x|)]$

$$E_n(f(x); p_0(|x|)) = \inf_{\{Q_n\}} \left\{ \max e^{-p_0(|x|)} |f(x) - Q_n(x)| \right\},$$

где $\{Q_n(x)\}$ — семейство всевозможных полиномов степени n. Скажем, что функция $p_0(x)$ принадлежит к классу A, если при $x \geqslant 1$ она представима в виде

$$p_0(x) = p_0(1) + \int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt,$$

где функция $\omega(t) \geqslant 0$, не убывает и $\lim_{t \to +\infty} \omega(t) = +\infty$.

Известно [1, 2, 3], что если $p_0(x) \in A$, то условие

$$\int_1^\infty \frac{p_0(x)}{x^2} dx = +\infty$$

необходимо и достаточно для выполнения равенства

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f(x); p_0(|x|)) = 0,$$

для произвольной функции $f(x) \in C[p_0(|x|)]$.

Проблема о выявлении зависимости между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и порядком убывания ее наилучших приближений $E_n(f(x); p_0(|x|))$ впервые была поставлена и в основном решена в работах [2, 4, 5]. Было установлено, что зависимость между порядком убывания чисел $E_n(f; p_0)$ и дифференциальными свойствами $f(x)$ характеризуется не шкалой n^{-k} $(k=1, 2, \ldots)$, как это имеет место в теоремах Джексона-Бернштейна, а шкалой

$$\left(\int_1^{cn} \frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-k}, \; (k=1, 2, \ldots) \; (\text{где } c>0 \text{ любое}),$$

где $x=q_0(y)$ функция, обратная к $y=p_0(x)$.

В обратных теоремах наилучшего приближения этот факт был установлен, когда $y=p_0(x)$ произвольная монотонно возрастающая функция; что касается прямых теорем, то здесь тот же факт был установлен при ограничении

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{xp_0'(x)}{p_0(x)} \geqslant a > 1,$$

не необходимой для полноты.

В настоящей заметке приводится оценка взвешенно-наилучшего приближения функции $|x|$, т. е. оценка порядка убывания чисел $E_n(|x|, p_0(|x|))$ в случае, когда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xp_0'(x)}{p_0(x)} = \rho, \qquad \text{где } \rho \geqslant 1 - \text{целое}.$$

Из приводимой ниже теоремы видно, что и в предельном для полноты случае, когда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xp_0'(x)}{p_0(x)} = 1, \qquad \int^{\infty} p_0(x)\, x^{-2} dx = +\infty \qquad (*)$$

для специальной, но имеющей принципиальное значение функции $|x|$ справедлива оценка вида

$$E_n(|x|, p_0(|x|)) = O\left\{\left(\int_1^{\pi n} \frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-1}\right\}, \; n\to\infty.$$

Иначе говоря, и в случае, (*) который не был охвачен нами в прямой теореме [2], шкалой наилучшего приближения должны служить числа $\left(\int_1^{\pi n} \frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-k}$, $(k=1, 2, \ldots)$.

Прежде чем сформулировать и доказать этот результат, докажем лемму.

Лемма. Пусть функция $y=p(x)$ непрерывно-дифференцируема на полуоси $[1, +\infty]$ и удовлетворяет условиям

а) $p'(x)>0$ *при* $1\leqslant x<+\infty$, $p(1)=1$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xp'(x)}{p(x)}=\rho$, *где* $\rho>1$ *целое число. Существует четная целая функция* $G(z)$ *с неотрицательными коэффициентами, для которой*

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\log G(x)}{p(|x|)}=\pi. \tag{1}$$

Доказательство. Из условия а) следует, что для любого $\varepsilon\,(0<\varepsilon<\rho)$ существует такое $x_0=x_0(\varepsilon)>0$, что

$$\rho-\varepsilon<\frac{xp'(x)}{p(x)}<\rho+\varepsilon \qquad \text{при } x>x_0,$$

откуда интегрированием по промежутку $[x_0, x]$ получим

$$\frac{p(x_0)}{x_0^{\rho-\varepsilon}}x^{\rho-\varepsilon}<p(x)<\frac{p(x_0)}{x_0^{\rho+\varepsilon}}x^{\rho+\varepsilon} \qquad \text{при } x>x_0. \tag{2}$$

Из (2) и условия а) следует, что при $1\leqslant x<+\infty$ функция $y=p(x)$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$. Поэтому обратная функция $x=q(y)$ существует и монотонно возрастает при $1\leqslant y<+\infty$ от 1 до $+\infty$.

Из оценки следует также

$$\int_1^\infty\frac{p(x)}{x^{1+2\rho}}dx<+\infty$$

откуда заключаем, что сходится интеграл

$$\int_1^\infty[q(y)]^{-2\rho}dy,$$

следовательно и ряд

$$\sum_{k=1}^\infty[q(k)]^{-2\rho}<+\infty. \tag{4}$$

Составим функцию

$$G(z)=\prod_{k=1}^\infty\left(1+\frac{z^{2\rho}}{[q(k)]^{2\rho}}\right), \tag{5}$$

которая в силу (4) будет целой функцией с неотрицательными коэффициентами.

Обозначая через $n(t)$ числовую функцию последовательности $\lambda_k=q(k)$ $(k=1, 2, \ldots)$, отметим сначала, что

$$\begin{gathered} n(t)\leqslant p(t)<n(t)+1,\\ n(t)=0,\quad 0\leqslant t<\lambda_1=1. \end{gathered} \tag{6}$$

Далее, имеем:

$$\log G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\log\left\{1+\frac{x^{2\rho}}{[q(k)]^{2\rho}}\right\}=$$

$$=\int_0^{\infty}\log\left\{1+\frac{x^{2\rho}}{t^{2\rho}}\right\}dn(t)=2\rho x^{2\rho}\int_1^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t(x^{2\rho}+t^{2\rho})}, \tag{7}$$

причем проинтегрированный член исчезает в силу того, что $n(t)\equiv 0$ при $0\leqslant t<1$, а при $t\to+\infty$

$$n(t)\leqslant p(t)<At^{\rho+1}.$$

Из неравенств (6) и формулы (7) получим оценку

$$I_1(x)-I_2(x)\leqslant\log G(x)\leqslant I_1(x), \tag{7'}$$

где

$$I_1(x)=2\rho x^{2\rho}\int_1^{\infty}\frac{p(t)\,dt}{t(x^{2\rho}+t^{2\rho})};$$

$$I_2(x)=2\rho x^{2\rho}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t(x^{2\rho}+t^{2\rho})}. \tag{8}$$

Из очевидной оценки

$$I_2(x)<2\rho\left\{\log x+\int_1^{\infty}\frac{du}{1+u^{2\rho}}\right\}$$

и по (2) получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{I_2(x)}{p(x)}=0. \tag{9}$$

Нам остается доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{I_1(x)}{p(x)}=\pi, \tag{10}$$

тогда из (7'), (9) и (8) получим утверждение (1) теоремы.

Обозначим

$$p(x)=x^{\rho}p_1(x),$$

тогда ввиду условия б) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xp_1'(x)}{p_1(x)}=0, \tag{11}$$

т. е. $p_1(x)$ — медленно растущая функция. Из (11) легко вытекает, что справедливо равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p_1(ax)}{p_1(x)}=1, \tag{11'}$$

при этом равномерно относительно $a\geqslant\delta>0$.

Выберем значение $A_0 > 1$ так, чтобы имели

$$|xp_1'(x)| < \frac{\rho}{2} p_1(x), \qquad x \geqslant A_0, \tag{11''}$$

что возможно в силу (11).

Обозначая

$$I_1(x, A_0) = 2\rho x^{2\rho} \int_{A_0}^{\infty} \frac{p(t)\,dt}{t(t^{2\rho} + x^{2\rho})} \tag{12}$$

и замечая, что

$$I_1(x) = O(1) + I_1(x, A_0), \quad x \to +\infty$$

заключаем, что достаточно доказать равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{I_1(x, A_0)}{p(x)} = \pi. \tag{10'}$$

После замены переменной из (12) получим

$$\frac{I_1(x, A_0)}{p(x)} = 2\rho \int_{\frac{A_0}{x}}^{\infty} \frac{p_1(xu)}{p_1(x)} \frac{u^{\rho-1}\,du}{1+u^{2\rho}} =$$

$$= 2\rho \int_{\frac{A_0}{x}}^{\delta} \frac{p_1(xu)}{p_1(x)} \frac{u^{\rho-1}\,du}{1+u^{2\rho}} + 2\rho \int_{\delta}^{\infty} \frac{p_1(xu)}{p_1(x)} \frac{u^{\rho-1}\,du}{1+u^{2\rho}} \equiv$$

$$\equiv U_1(x) + U_2(x), \text{ где } 0 < \delta < 1. \tag{12'}$$

Из (11') и определения $U_2(x)$ следует

$$\lim_{x \to +\infty} U_2(x) = 2\rho \int_{\delta}^{\infty} \frac{u^{\rho-1}\,du}{1+u^{2\rho}} = \pi - 2\operatorname{arctg}\delta^{\rho}. \tag{13}$$

Далее, имея в виду (11''), получим

$$U_1(x) < \frac{2\rho}{p_1(x)} \int_{A_0}^{\delta} p_1(xu)\, u^{\rho-1}\,du = \frac{2\rho}{p(x)} \int_{A_0}^{\delta x} p_1(t)\, t^{\rho-1}\,dt <$$

$$< 2\frac{p(\delta x)}{p(x)} + \frac{\rho}{p(x)} \int_{A_0}^{\delta x} p_1(t)\, t^{\rho-1}\,dt,$$

поэтому

$$\frac{\rho}{p(x)} \int_{A_0}^{\delta x} p_1(t)\, t^{\rho-1}\,dt < 2\frac{p(\delta x)}{p(x)} = 2\delta^{\rho}\, \frac{p_1(\delta x)}{p_1(x)}$$

и

$$U_1(x) < 4\delta^{\rho}\frac{p_1(\delta x)}{p_1(x)}. \tag{13'}$$

Из (12'), (13), (13') и (11') ввиду произвольности $\delta > 0$ получим формулу (10'), т. е. доказательство леммы.

Теорема. Пусть $y = p_0(x)$ непрерывно-дифференцируема на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

а) $p_1'(x) > 0$ *при* $0 \leq x < +\infty$, $p_0(0) > 0$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xp_0'(x)}{p_0(x)} = \rho$, *где* $\rho \geqslant 1$ *целое*;

в) *в случае* $\rho = 1$, $\int\limits_1^{\infty} p_0(x)x^{-2}dx = +\infty$.

Если $y = q_0(y)$ функция, обратная к $y = p_0(x)$, то

$$F_n(|x|, p_0(|x|)) = O\left\{\left(\int\limits_1^{\frac{\pi n}{\rho}}\frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-1}\right\}, \text{ при } n \to \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим $p(x) = \frac{p_0(x)}{\pi}$ и пусть $x = q(y)$ функция, обратная к $y = p(x)$; очевидно, что $q(y) = q_0(\pi y)$.

Согласно лемме существует целая функция

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left\{1 + \frac{z^{2\rho}}{[q(k)]^{2\rho}}\right\}$$

с неотрицательными коэффициентами такая, что

$$\lim_{|x| \to \infty}\frac{\log G(x)}{p_0(|x|)} = 1.$$

Поэтому существует постоянная $A_0 > 0$ такая, что

$$\{G(x)\}^{-\frac{1}{2}} \geqslant e^{-p_0(|x|)} \quad \text{при } |x| \geqslant A_0.$$

Обозначая далее

$$\max_{|x| < A_0}\sqrt{G(x)}\,e^{-p_0(|x|)} = B_0$$

и

$$\max\{1, B_0\} = C_0,$$

очевидно, будем иметь

$$e^{-p_0(|x|)} \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{G(x)}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{15}$$

С другой стороны, пользуясь известным результатом С. Н. Бернштейна [5], можно утверждать, что существует полином $P_{n\rho}(x)$ степени $n\rho\,(n = 1, 2, \ldots)$ такой, что при $-\infty < x < +\infty$,

$$\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^{2\rho}}{[q(k)]^{2\rho}}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\left||x|-P_{n\rho}^{*}(x)\right|<$$

$$< O\left\{\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{q(k)}\right)^{-1}\right\}=O\left\{\left(\int_{1}^{n}\frac{dy}{q(y)}\right)^{-1}\right\}=$$

$$=O\left\{\left(\int_{1}^{n\pi}\frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-1}\right\}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что

$$E_{n\rho}\left(|x|,\, p_0(|x|)\right)<O\left\{\left(\int_{1}^{n\pi}\frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-1}\right\}, \tag{17}$$

откуда легко вытекает оценка (14) теоремы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 XI 1957

Մ. Մ. Ջրբաշյան

$|X|$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԿՇՌՅԱԼ-ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԱՄԲՈՂՋ ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս հոդվածում բերվում է $|x|$ ֆունկցիայի կշռյալ-լավագույն մոտավորության գնահատականը այն դեպքում, երբ կշիռը $e^{-p_0(|x|)}$ բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

ա) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{xp_0'(x)}{p_0(x)}=\rho\geqslant 1 \quad \textit{ամբողջ է,}$$

բ) $\rho = 1$ *դեպքում,* $$\int_{1}^{\infty}p_0(x)\,x^{-2}\,dx=+\infty:$$

Ապացուցվում է, որ այս պայմանների դեպքում

$$E_n(|x|; p_0(|x|)) = O\left\{\left(\int_1^{\frac{\pi n}{\rho}} \frac{dy}{q_0(y)}\right)^{-1}\right\}, \qquad \text{երբ} \quad n \to \infty,$$

որտեղ $x = q_0(y)$, $y = p_0(x)$ ֆունկցիայի հակադարձն է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* О метрических признаках полноты системы полиномов в неограниченных областях. ДАН Арм. ССР, т. VII, № 1 (1947).
2. *Джрбашян М. М.* Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сборник, т. 36 (78): 3 (1955).
3. S. Jsumi, T. Kawata, Quasianalytic class and closure $\{t^n\}$ in the interval $(-\infty, +\infty)$ Tôhoku Mathem. journ., 43 (1937), 267—273.
4. *Джрбашян М. М.* О росте производных полиномов. ДАН СССР, т. 84, № 1 (1952).
5. *Джрбашян М. М.* О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси. ДАН СССР, т. 84, № 6 (1952).
6. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений, т. 1 (1952).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XI, № 1, 1958 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

В. М. Иванян

Испытание мягкого вулканизата натурального каучука на релаксацию и последействие при растяжении

Испытанию подверглись плоские стандартные образцы мягкого вулканизата натурального каучука размерами по ГОСТ—271—41 производства Ереванского завода им. Кирова. Испытания производились при температуре 20—25°С на „ползографе“, описание конструкции и принцип действия которого, приведено в нашей статье [1].

Эксперименты производились в лаборатории сопротивления материалов Ереванского политехнического института им. К. Маркса.

Испытание на релаксацию

Испытанию на релаксацию подвергались 84 образца в том числе: I серия —72 образца в возрасте 6 месяцев, II серия —12 образцов в возрасте 1,5 года. Для образцов первой серии кривые релаксации получены для различных значений начальных нагрузок в интервале от 0,25 *кг* до 6 *кг* через каждые 0,25 *кг*.

При каждом значении начальной нагрузки испытывались по 3 образца. Для образцов второй серии начальная нагрузка изменялась от 0,5 *кг* до 6 *кг* через каждый 0,5 *кг*.

Для всех 84 образцов на „ползографе“ получены кривые релаксации $Q=f(t)$. Испытание каждого образца длилось 5 часов, после чего нагрузка практически стабилизировалась.

Перед закладыванием образца в зажимы „ползографа“ на его рабочей части наносились две метки на расстоянии 25 *мм* друг от друга по длине образца, затем измерялись размеры его поперечного сечения между метками, оптическим микроскопом с точностью 0,005 *мм*.

Кривые $Q=f(t)$ вычерчивались в масштабах:

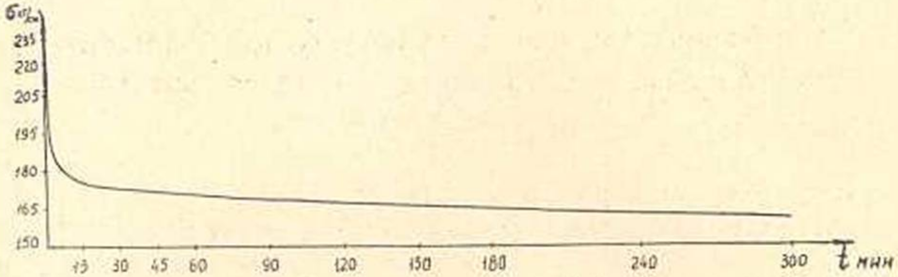
для нагрузки 1 *см*—208 *г*,
для времени 1 *см*—3,5 *мин*.

При испытании на релаксацию всех образцов в течении всего процесса релаксации проверялось постоянство расстояния между метками на образцах. Изменение последнего для наибольшей нагрузки $Q=6$ *кг* не превышало 0,5 *мм* на 1,4%.

Исследование производилось на кривых релаксации образцов второй серии. Численные значения координат точек кривых релаксации $Q=f(t)$ снятых с кривых приводятся в таблице 1.

При вычислении площади поперечного сечения образца принимаем, что объем образца при его деформации остается постоянным.

На основании полученных результатов вычислены значения истинных напряжений во времени (таблица 2) и построены кривые релаксации истинных напряжений, одна из которых приводится ниже.



Черт. 1.

Кривые релаксации показывают, что напряжение в начале довольно быстро и плавно падает, затем абсолютное значение скорости убывания напряжения уменьшается, ассимптотически стремясь к нулю, а напряжение (нагрузка) стабилизируется.

В семействе кривых релаксации имеет место подобие, т. е. для одного и того же момента времени отношение значений текущих напряжений на двух кривых практически остается постоянным. С увеличением начального напряжения обсолютное значение тангенса угла наклона касательной к кривой увеличивается.

Последействие

Испытанию на последействие подвергались 11 образцов в возрасте 1,5 года, для которых на приборе вычерчивались соответствующие кривые последействия в масштабах:

для деформации 2 : 1,

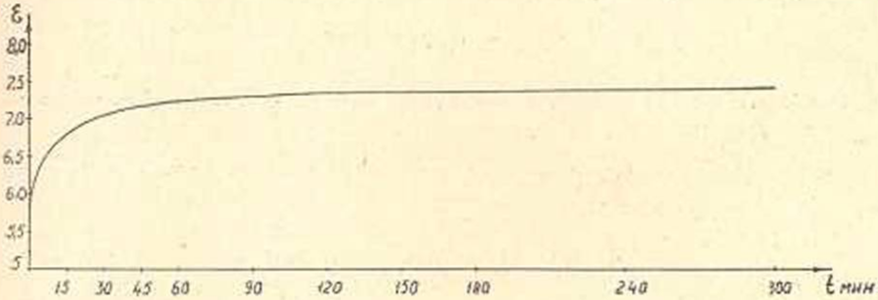
для времени 1 *см* 3,5 *мин*.

Начальным параметром для последействия принята начальная нагрузка, которая оставалась постоянной в течении всего процесса. Начальная нагрузка изменялась по 0,5 *кг* от 1,5 до 5,5 *кг*.

Образец закладывался в зажимы непосредственно у меток.

При экспериментах на последействие погрешность изменения деформации на графике, из-за частичного выползания образца из зажима при его деформации, не превышало 3,6% при максимальной деформации соответствующей наибольшей нагрузке —5,5 *кг*.

Численные значения координат точек кривых последействия снятых с кривых опыта, одна из которых приведена на фиг. 2, приводятся в таблице 3.



Фиг. 2.

Изменение истинного напряжения вследствие сужения поперечного сечения образца при увеличении его длины, в зависимости от времени и начальной нагрузки, определяется формулой

$$\sigma = \frac{Q}{F(t)}, \qquad \text{где} \qquad F(t) = \frac{F_0}{1+\varepsilon},$$

F_0 — площадь поперечного образца в его ненапряженном состоянии.

Увеличение истинного напряжения в конце процесса последействия при наименьшей начальной нагрузке составляет 2,2%, а при наибольшей нагрузке составляет 37,3%.

Кривые последействия показывают, что относительная деформация, плавно и монотонно возрастая, ассимптотически стремится к определенному пределу

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right|_{t=\infty} = 0.$$

Процесс последействия длится 5 часов, после чего относительное удлинение практически остается постоянным.

На сетке кривых последействия видно, что с увеличением начальной деформации вызванным увеличением начальной нагрузки, относительная деформация в конце процесса увеличивается на 6% при начальной деформации $\varepsilon = 2{,}86$ и на 36% — при начальной деформации $\varepsilon = 6$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 13 II 1957

Վ. Մ. Իվանյան

ԲՆԱԿԱՆ ԿԱՈՒՉՈՒԿԻ ՓԱՓՈՒԿ ՎՈՒԼԿԱՆԻԶԱՏԻ ՌԵԼԱՔՍԱՑԻԱՅԻ ԵՎ ՀԵՏԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՓՈՐՁԱՐԿՈՒՄԸ ՁԳՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փորձարկված են բնական կաուչուկի փափուկ վուլկանիզատի ստանդարտ նմուշներ (ГОСТ 271—41)։

Փորձարկումները կատարվել են ջերմության 20—25°-ում։ Մեր կողմից առաջարկված սողքագրի վրա։

Ռելաքսացիայի փորձարկում

Կատարված է երկու սերիայի փորձարկում։ Առաջին սերիայում փորձարկված են վեց ամսական հասակ ունեցող 72 նմուշ։

Ռելաքսացիայի կորերն ստացված են նախնական բեռնվածության յուրաքանչյուր 0,25 կգ-ից մինչև 6 կգ։

Երկրորդ սերիայում փորձարկված են 1,5 տարեկան հասակի 12 նմուշ 0,5 կգ-ից մինչև 6 կգ նախնական բեռնվածության յուրաքանչյուր 0,5 կգ աճի համար։

Նմուշի վրա, նախքան սողքագրի բռնիչների մեջ այն ամրացնելը, նրա երկարությամբ արված են երկու նիշեր՝ միմյանցից 25 մմ հեռավորությամբ, ապա չափելով նիշերի միջնակետում նմուշի լայնական հատվածքի կողմերը (0,005 մմ ճշտությամբ ունեցող օպտիկական չափիչով), հաշված է հատվածքի մակերեսը։ Բոլոր նմուշների փորձարկումների ժամանակ ռելաքսացիայի պրոցեսի ընթացքում մերթ ընդ մերթ չափված են նիշերի հեռավորությունները, որոնց սկզբնական ամենամեծ բեռի դեպքում, շեղումները 1,4$^0/_0$-ից չեն գերազանցել։

Ելնելով սողքագրի վրա ավտոմատիկորեն ստացված $Q=f(t)$ ռելաքսացիայի կորերից և ընդունելով, որ դեֆորմացիայի ընթացքում նմուշի ծավալը մնում է անփոփոխ, հաշված են երկրորդ սերիայի նմուշների իրական լարումները և կառուցված են նրանց ռելաքսացիայի կորերը։

Հետազդեցության փորձարկում

Փորձարկված է 1,5 տարեկան հասակի 11 նմուշ, որոնց համար սողքագրի վրա ստացված էին համապատասխան հետազդեցության կորեր՝ տարբեր սկզբնական բեռների դեպքում (1,5-ից—5,5 կգ), որոնք պրոցեսի ընթացքում մնացել են հաստատուն։

Նմուշը սողքագրի բռնիչների մեջ ամրացված է, նրա վրա նախօրոք գծված, իրարից 25 մմ հեռավորության ունեցող նիշերում։

Սողքագրի վրա ստացվող դեֆորմացիաներում թույլ տրված սխալը, բռնիչներից նմուշի դուրս սողալու հետևանքով, ամենամեծ բեռնվածության դեպքում 3,6$^0/_0$-ից չի գերազանցում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванян В. М.* Изв. АН Армянской ССР (серия физ.-мат. наук), том X, № 6, 1957.

Таблица 1

№№ п/п	ε_0	F_0 *мм*^{2}	$F_0' = \frac{F}{1+\varepsilon}$	Время в минутах														
				t=0	1,0	3,5	7,0	10,5	14	18	21	45	60	90	120	180	240	300
				Qкг	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*	*Q*
1	0,36	12,053	8,863	0,5	0,479	0,467	0,458	0,452	0,452	0,452	0,452	0,452	0,452	0,438	0,438	0,417	0,396	0,396
2	1,36	12,946	5,486	1,0	0,979	0,958	0,952	0,948	0,938	0,927	0,927	0,927	0,927	0,917	0,875	0,875	0,854	0,827
3	2,28	13,883	4,233	1,5	1,473	1,435	1,429	1,417	1,396	1,381	1,381	1,381	1,381	1,352	1,332	1,332	1,332	1,323
4	3,2	12,719	3.028	2,0	1,938	1,875	1,844	1,823	1,813	1,808	1,792	1,782	1,782	1,771	1,730	1,710	1,700	1,700
5	3,56	13,394	2,937	2,5	2,313	2,230	2,178	2,146	2,126	2,126	2,105	2,084	2,074	2,063	2,022	2,022	1,980	1,950
6	4,0	13,093	2,619	3,0	2,688	2,542	2,480	2,459	2,418	2,407	2,397	2,376	2,366	2,355	2,314	2,303	2,251	2,230
7	4,36	12,410	2,315	3,5	3,001	2,834	2,772	2,710	2,678	2,668	2,637	2,666	2,605	2,585	2,522	2,502	2,439	2,398
8	4,64	13,850	2,456	4,0	3,480	3,230	3,168	3,147	3,176	3,085	3,064	3,022	2,981	2,939	2,898	2,877	2,856	2,731
9	5,04	12,814	2,122	4,5	3,668	3,543	3,460	3,418	3,377	3,356	3,335	3,244	3,263	3,231	3,169	3,148	3,106	3,086
10	5,2	13,354	2,154	5,0	4,334	4,002	3,918	3,856	3,814	3,773	3,773	3,710	3,669	3,627	3,565	3,544	3,502	3,461
11	5,36	13,671	2,150	5,5	4,647	4,398	4,252	4,190	4,127	4,106	4,086	3,982	3,961	3.898	3,794	3,794	3,732	3,690
12	5,44	12,148	1,896	6,0	4,794	4,523	4,357	4,295	4,232	4,180	4,149	4,066	4,024	3,982	3,920	3,920	3,858	3,795

Таблица 2

№№ п/п	ε_0	F_0 мм²	$F_0' = \frac{F_0}{1+\varepsilon}$	Время в минутах															Q кг
				0	1,0	3,5	7	10,5	14	18	12	45	60	90	120	180	240	300	
				σ кг/см²	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	
1	0,36	12,053	8,863	5,643	5,413	5,277	5,175	5,108	5,108	5,108	5,108	5,108	5,108	4,949	4,949	4,712	4,475	4,475	0,5
2	1,36	12,946	5,486	18,228	17,818	17,436	17,326	17,254	17,072	16,871	16,871	16,871	16,871	16,871	15,925	15,925	15,543	15,051	1,0
3	2,28	13,883	4,233	35,520	34,763	33,866	33,724	33,441	39,946	32,592	32,592	32,592	32,592	31,907	31,435	31,435	31,435	31,223	1,5
4	3,2	12,719	3,028	66,050	64,108	62,029	61,006	60,313	59,983	59,818	59,290	52,960	58,960	58,597	57,299	56,584	56,254	56,254	2,0
5	3,56	13,394	2,937	85,121	78,887	76,065	74,297	73,209	72,529	72,529	71,815	71,101	70,761	70,387	68,993	68,993	67,905	66,851	2,5
6	4,0	13,093	2,619	114,547	102,682	97,104	94,736	93,934	92,368	91,947	91,565	90,763	90,381	89,961	88,395	87,975	85,988	85,186	3,0
7	4,36	12,410	2,315	151,188	129,343	122,145	119,473	116,801	115,422	114,991	113,655	112,750	112,276	111,414	108,698	107,836	105,121	103,854	3,5
8	4,64	13,850	2,456	162,581	141,636	131,461	128,938	128,883	127,635	125,560	124,705	122,495	121,327	119,617	117,949	117,094	116,939	111,152	4,0
9	5,04	12,814	2,122	212,664	172,769	166,876	162,966	160,988	159,057	158,068	157,079	155,147	153,687	152,180	149,260	148,271	146,293	145,351	4,5
10	5,2	13,354	2,154	232,131	201,098	185,693	181,725	178,918	176,969	175,067	175,067	172,144	170,242	168,293	165,416	164,442	162,493	160,590	5,0
11	5,36	13,671	2,150	255,814	216,086	204,507	197,718	194,835	192,906	190,929	189,499	185,163	184,187	181,257	176,421	176,421	173,538	171,585	5,5
12	5,44	12,148	1,886	318,134	254,082	239,719	230,921	227,635	224,296	221,540	219,897	215,498	213,472	211,046	207,760	207,760	204,474	201,135	6,0

Таблица 3 (последействие)

№№ п/п	Q кг	F_0 мм²	l_0 мм	Время в минутах													
				0	7,0	3,5	7	10,5	14	18	21	45	60	120	180	240	300
				ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
1	1,5	13,144	135	2,86	2,87	2,89	2,90	2,9	2,9	2,93	2,93	2,98	2,99	3,00	3,00	3,03	3,03
2	2,0	12,922	155	3,43	3,47	3,51	3,53	3,54	3,54	3,60	3,60	3,63	3,64	3,64	3,64	3,70	3,70
3	2,5	13,951	163	3,66	3,75	3,85	3,88	3,93	3,95	3,97	4,00	4,03	4,09	4,11	4,12	4,13	4,13
4	3,0	13,021	210	5,00	5,207	5,35	5,43	5,486	5,514	5,54	5,59	5,64	5,65	5,69	5,71	5,74	5,77
5	3,5	13,173	218	5,23	5,53	5,70	5,79	5,84	5,87	5,90	5,91	5,97	6,00	6,03	6,06	6,09	6,09
6	4,6	12,986	220	5,21	5,54	5,83	5,91	5,98	6,09	6,06	6,07	6,16	6,20	6,24	6,26	6,29	6,31
7	4,5	13,092	225	5,40	5,62	5,89	6,01	6,07	6,12	6,15	6,17	6,26	6,31	6,33	6,48	6,53	6,55
8	5,0	12,919	235	5,72	6,06	6,29	6,49	6,65	6,75	6,83	6,89	7,14	7,23	7,33	7,35	7,83	7,40
9	5,5	13,197	245	6,0	6,20	6,38	6,54	6,66	6,76	6,82	6,89	7,37	7,57	7,74	7,89	8,00	8,09