ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 6, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций

1°. *Введение.* Пусть $f(t)$ и $\Phi(x)$— функции из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ и являются взаимными преобразованиями Фурье в смысле теоремы Планшереля, то есть:

$$\Phi(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{l.\,i.\,m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-itx} f(t)\,dt,$$

$$f(t) = \underset{\sigma\to+\infty}{l.\,i.\,m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itx}\Phi(x)\,dx.$$

Как впервые было отмечено Винером, „пара функций f и Φ не может быть очень малой в бесконечности". В работах Харди [1] и Моргана [2] этот принцип Винера был конкретно реализован в терминах порядков убывания функций $f(t)$ и $\Phi(x)$ при больших значениях $|t|$ и $|x|$.

Например, было доказано [2], что если

$$f(t) = O(e^{-|t|^p}),\quad (|t|\to\infty);\ \Phi(x) = O(e^{-|x|^q}),\ (|x|\to\infty),$$

где $p>0$, $q>0$ и $p^{-1}+q^{-1}<1$, то функции $f(t)$ и $\Phi(x)$ равны нулю почти всюду.

Предельный случай, когда $f(t)\equiv 0$ вне некоторого конечного интервала, был рассмотрен Ингамом [3], доказавшим, что если

$$\Phi(x) = O\,(e^{-\alpha(|x|)})\ (|x|\to+\infty),$$

где $\alpha(r)>0$ и $\int^{\infty}\alpha(r)r^{-2}dr=+\infty$, то функции $f(t)$ и $\Phi(x)$ равны нулю почти всюду.

В дальнейшем Гиршман [4] доказал теорему такого же рода, рассмотрев случай, когда $f(t)$ при $|t|\to+\infty$ стремится к нулю очень быстро, а $\Phi(x)$ при $|x|\to+\infty$ стремится к нулю достаточно медленно. Результат Гиршмана почти полностью содержит теорему Ингама, тогда как результаты Харди или Моргана в какой-либо форме там не содержатся.

Дженкинс [5] пытался установить наиболее общую теорему единственности для пары функций $f(t)$ и $\Phi(x)$, однако, из-за некорректного применения принципа расширения областей для гармонических функций (см. [5], стр. 809), указанное им условие единственности не верно.

В настоящей статье приводится ряд общих теорем о единственности пары преобразований Фурье в бесконечности, содержащих результаты Ингама и Гиршмана. Далее мы приводим достаточные условия для пустоты некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций, рассмотренных ранее при тех или иных ограничениях Гиршманом [4] и К. И. Бабенко [6]. Что касается достаточных условий для непустоты соответствующих классов бесконечно дифференцируемых функций, то при тех или иных ограничениях эти вопросы рассматривались в работах [4], [6].

2°. *Функции, двойственные по Юнгу.* Пусть функция $p(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, при этом

а) $p(0) = p'(0) = 0$;

б) $p'(t)$ монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{t\to+\infty} p'(t) = +\infty.$$

Заметив что

$$\int_0^t p'(u)\,du < tp'(t),$$

будем иметь:

$$\left\{p(t)t^{-1}\right\}' = \left\{t\,p'(t) - \int_0^t p'(u)\,du\right\} t^{-2} > 0.$$

Отсюда следует, что функция $p(t)t^{-1}$ также монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$. Но с другой стороны

$$p(t)t^{-1} > t^{-1}\int_{\frac{t}{2}}^{t} p'(u)\,du > \frac{1}{2}p'\left(\frac{t}{2}\right)$$

поэтому

$$p(t)t^{-1} \uparrow +\infty, \text{ при } t \uparrow +\infty. \tag{1}$$

Функция $y = p'(t)$ непрерывна и монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$, поэтому обратная функция $t = \varphi(y)$ также непрерывна и монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ при $0 \leqslant y < +\infty$.

Функцию

$$q(x) = \int_0^x \varphi(y)\,dy \tag{2}$$

назовем двойственной с функцией $p(x)$ по Юнгу. Очевидно, что в свою очередь $q(x)$ удовлетворяет тем же условиям а), б) и функция $p(x)$ двойственна с нею по Юнгу.

Известно, что (7) при любых $\xi>0$, $\eta>0$ справедливо неравенство

$$\xi\cdot\eta\leqslant p(\xi)+q(\eta). \tag{3}$$

На протяжении данной статьи будем считать, что функции $p(x)$ и $q(x)$ двойственны между собой по Юнгу.

3°. *Основная теорема единственности для пары функций $f(t)$ и $\Phi(x)$; некоторые следствия.*

Докажем следующую теорему о взаимной связи между порядками убывания функций $f(t)$ и $\Phi(x)$ в бесконечности.

Теорема 1. Пусть $f(t)$ и $\Phi(x)$—функции из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ и являются взаимными преобразованиями Фурье в смысле теоремы Планшереля. Пусть, кроме того

$$f(t)e^{p(|t|)}\in L_1(-\infty,+\infty),$$

тогда, если

$$\liminf_{R\to+\infty}\left\{\frac{1}{R}\int_0^\pi q(R\sin\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x\frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du\right)dx\right\}=-\infty, \tag{4}$$

то $f(t)$ и $\Phi(x)$ оба равны нулю почти всюду.

Доказательство. По условию теоремы $f(t)e^{p(|t|)}\in L_1(-\infty,+\infty)$, поэтому $f(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$ и следовательно функция

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-ixt}\,dt \tag{5}$$

непрерывна на всей оси $(-\infty,+\infty)$.

Но, более того, $\Phi(z)$—целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\Phi(x+iy)|\leqslant C(f)e^{q(|y|)}. \tag{6}$$

Действительно, из (5) имеем

$$|\Phi(x+iy)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{|t|\cdot|y|}\,|f(t)|\,dt,$$

но по неравенству Юнга

$$|t|\cdot|y|<p(|t|)+q(|y|),$$

откуда имеем:

$$|\Phi(x+iy)|\leqslant e^{q(|y|)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{p(|t|)}|f(t)|\,dt,$$

т. е. оценку (6).

Предполагая, что целая функция $\Phi(z)\not\equiv 0$, применим для нее формулу Карлемана в верхней полуплоскости:

$$\sum_{1<|\lambda_k|<R}\left(\frac{1}{|\lambda_k|}-\frac{|\lambda_k|}{R^2}\right)\sin\vartheta_k=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}\log|\Phi(Re^{i\vartheta})|\sin\vartheta d\vartheta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\log|\Phi(x)\Phi(-x)|\,dx+O(1), \tag{7}$$

где $|\lambda_k|e^{i\vartheta_k}$ — суть нули функции $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости, а член $O(1)$ остается ограниченным при $R\to+\infty$.

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\log|\Phi(x)\Phi(-x)|\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x\frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du\right)dx \tag{8}$$

а также, что в силу (6)

$$\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}\log|\Phi(Re^{i\vartheta})|\sin\vartheta d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}q(R\sin\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta+O\left(\frac{1}{R}\right). \tag{8''}$$

Из (7), (8) и (8″) следует, что выражение

$$\frac{1}{R}\int_0^{\pi}q(R\sin\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta+\frac{1}{R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x\frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du\right)dx$$

ограничено снизу при $R\to+\infty$, а это противоречит условию (4) теоремы. Поэтому $\Phi(z)\equiv 0$, т. е. $\Phi(x)$ и, следовательно, $f(t)$ равны нулю почти всюду.

Заметим наконец, что если вместо условия $f(t)e^{p(|t|)}\in L_1(-\infty, +\infty)$ полагать $f(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$ и $f(t)e^{p(t)}\in L_1(0,+\infty)$, то функция $\Phi(z)$ будет аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, и оценка (6) останется справедливой при $y \geqslant 0$. Поэтому, повторяя те же рассуждения опять получим, что при условии (4), $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Следствие 1. Если, при сохранении остальных условий теоремы 1, заменить условие (4) через

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} + \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log |\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty \quad (4')$$

то опять будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Действительно, так как $t = \varphi(y)$ — монотонно возрастающая функция, то функция

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(y)\, dy$$

также монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$. Следовательно, справедлива оценка

$$\frac{1}{R} \int_0^\pi q(R \sin\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta < \frac{q(R)}{R} \int_0^\pi \sin^2\vartheta d\vartheta = \frac{\pi q(R)}{2R}$$

из которой и из (4') вытекает, что условие единственности (4) выполняется.

Следствие 2. Если дополнительно полагать

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \text{ при } |x| \to +\infty, \quad (9')$$

или

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(x)}) \ x \to +\infty, \quad (9'')$$

где $\alpha(x)$ — любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(u)}{u^2} du = +\infty,$$

то соответственно при

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty, \quad (10')$$

или

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx \right\} = -\infty \quad (10'')$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почи всюду.

Из (9′) следует оценка

$$\int_1^x \frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du \leqslant O(1) - 2\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2}\,du,$$

а из (9″) и ввиду того, что $\Phi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, следует оценка

$$\int_1^x \frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du \leqslant O(1) - \int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2}\,du.$$

Поэтому при (9′) или (9″) соответственно будем иметь

$$\frac{2}{\pi R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x \frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{4}{\pi R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2}\,du\right)dx + O(1) \tag{11′}$$

или

$$\frac{2}{\pi R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x \frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{\pi R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2}\,du\right)dx + O(1). \tag{11″}$$

Из (11′) и (10′) или (11″) и (10″) следует условие единственности (4′).

Следствие 3. (Теорема Ингама [3]). *Если $f(t)$ равна нулю вне некоторого конечного интервала, то при условии*

$$\int_1^\infty \frac{\log|\Phi(x)\Phi(-x)|}{x^2}\,dx = -\infty, \tag{12}$$

и, следовательно, в случае

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \text{ при } |x| \to +\infty,$$

при условии

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(x)}{x^2}\,dx = +\infty, \tag{12′}$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Действительно, в данном случае для целой функции $\Phi(z)$ вместо оценки (6) будем иметь

$$|\Phi(x+iy)| \leq C(f)e^{\sigma|y|}, \tag{6'}$$

где $\sigma > 0$ — некоторая постоянная. Поэтому полагая, что при условии (12) или (12') $\Phi(z) \neq 0$, и применив формулу Карлемана (7), мы получим противоречие, если будет

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2} du \right) dx = -\infty \tag{13}$$

или, в случае

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) \quad (|x| \to +\infty),$$

если будет

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(u)}{u^2} du \right) dx = +\infty. \tag{13'}$$

Но легко видеть, что условия (13) и (13') выполняются при выполнении условий (12) и (12') соответственно. Поэтому $\Phi(z) \equiv 0$ и, следовательно, $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Следующее следствие, указанное И. Хачатряном, сформулируем в виде теоремы. Она в частном случае представляет собой, в известном смысле, аналог теоремы Гиршмана [4].

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $y = p(t)$ удовлетворяет дополнительному условию*

$$p'(t) \geqslant ap(t) \text{ при } t \geqslant t_0, \tag{14}$$

где $a > 0$ не зависит от t, и положим, что функция $t = Q(y)$ обратна к $y = p(t)$.

Пусть

$$f(t)e^{p(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty) \tag{15}$$

или

$$f(t) \in L_1(-\infty, +\infty); \; f(t)e^{p(t)} \in L_1(0, +\infty) \tag{15'}$$

при этом

$$H(r) = \frac{2}{\pi} \int_1^r \frac{\alpha(u)}{u^2} du \to +\infty \text{ при } r \to +\infty. \tag{16}$$

Если

$$\liminf_{R\to+\infty} \left\{ Q\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{2}{R^2} \int_1^R xH(x)\,dx \right\} = -\infty, \tag{17}$$

а в частном случае, когда

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant Mx \quad (x \geqslant 1), \tag{18}$$

если

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{H[ap(r)]}{r} > 1, \tag{17'}$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Из (14) следует, что

$$\varphi(y) \leqslant Q\left(\frac{y}{a}\right) \text{ при } \quad y \geqslant y_0$$

откуда имеем

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(y)\,dy \leqslant O(1) + Q\left(\frac{x}{a}\right) \text{ при } x \to +\infty. \tag{19}$$

Из следствия 2 и из оценки (19) вытекает, что при условии (17) будем иметь единственность $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Таким образом, нам остается установить, что из условий (18) и (17′) следует условие (17).

Действительно, из тождества

$$\frac{2}{R^2} \int_1^R xH(x)\,dx = H(R) - \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R \alpha(x)\,dx$$

вытекает, что при условии (18)

$$\frac{2}{R^2} \int_1^R xH(x)dx = H(R) + O(1).$$

Поэтому при (18) условие единственности (17) запишется в виде

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ Q\left(\frac{R}{a}\right) - H(R) \right\} = -\infty. \tag{20}$$

Но из (17′) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ сущестует последовательность возрастающих чисел $r_n = r_n(\varepsilon)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$H[ap(r_n)] > (1 + \varepsilon) r_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Обозначая $R_n = ap(r_n)$, получим

$$H(R_n) > (1 + \varepsilon)\, Q\left(\frac{R_n}{a}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда следует условие (17).

Следствие 4. (Теорема Моргана [2]). *Пусть.*

$$f(t)=O(e^{-A|t|^p})\ (|t|\to+\infty),$$

$$\Phi(x)=O(e^{-A'|x|^{p'}})\quad (|x|\to+\infty),$$

где $A, A'; p, p'$ — *положительные постоянные, тогда при* $p^{-1}+p'^{-1}<1$ *будем иметь* $f(t)=\Phi(x)=0$ *почти всюду.*

В данном случае $\alpha(x)=A'x^{p'}$

$$\frac{4}{\pi R^2}\int\limits_1^R x\left(\int\limits_1^x\frac{\alpha(u)}{u^2}\,du\right)dx=\frac{4A'R^{p'-1}}{\pi(p'-1)(p'+1)}+O(1),\ (R\to+\infty). \qquad (21)$$

Далее, т. к. при любом $0<\varepsilon<A$, $f(t)e^{(A-\varepsilon)|t|^p}\in L_2(-\infty,+\infty)$, то можно полагать $p(t)=(A-\varepsilon)t^p$, откуда получим

$$\frac{q(R)}{R}=\frac{p-1}{p[p(A-\varepsilon)]^{\frac{1}{p-1}}}R^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (22)$$

Но $p'-1>\dfrac{1}{p-1}$, поэтому из (21) и (22) вытекает, что выполняется условие (10′) следствия 2 при произвольных значениях постоянных A, A'.

Отметим, что при $p^{-1}+p'^{-1}=1$, когда $p>2$, в работе Моргана [2] содержится следующее условие единственности

$$A'>(p-1)\sin\frac{\pi}{2(p-1)}\,p^{-\frac{p}{p-1}}A^{-\frac{1}{p-1}}.$$

4°. Выше, на функцию $f(t)$ налагалось условие:

$f(t)e^{p(|t|)}\in L_1(-\infty,+\infty)$ или же условия $f(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$ и $f(t)e^{p(t)}\in L_1(0,+\infty)$, и были установлены признаки единственности для пары функций $f(t)$ и $\Phi(x)$.

В настоящем пункте несколько изменим вид ограничений, налагаемых на функцию $f(t)$; докажем теорему.

Теорема 3. Пусть $f(t)$ удовлетворяет одному из условий

$$f(t)=O(e^{-p(|t|)})\ (|t|\to+\infty), \qquad (24)$$

или

$$f(t)\in L_1(-\infty,+\infty);\ f(t)=O(e^{-p(t)})(t\to+\infty), \qquad (24')$$

где $p(t)$ — дважды дифференцируемая на $[1,+\infty)$ функция, обладающая свойством

$$p''(x)\geqslant\frac{C}{x},\ x\geqslant 1 \qquad (25)$$

где $C > 1$ — постоянная.

Если

$$\Phi(x) = O(e^{-\alpha(|x|)}) (|x| \to +\infty), \tag{26}$$

то при условии

$$\liminf_{R\to+\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt \right) dx \right\} = -\infty \tag{27}$$

почти всюду имеем $f(t) = \Phi(x) = 0$.

Доказательство. Из (25) следуют оценки

$$p'(x) \geqslant p'(1) + C \log x \quad (x \geqslant 1),$$

$$p(x) \geqslant p(1) + (x-1)p'(1) + C\{x(\log x - 1) + 1\} \quad (x \geqslant 1),$$

откуда заключаем, что для данного $\alpha\left(\frac{1}{2} < \alpha < \frac{C}{2}\right)$ существует $x_1 \geqslant 1$, такое, что функция

$$p_1(x) = p(x) - \alpha \log(1 + x^2) \ (x \geqslant x_1)$$

удовлетворяет условиям

$$p_1(x) > 0,\ p_1'(x) > 0,\ p_1''(x) > 0 \ (x \geqslant x_1).$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$0 < p_1(x) < p(x),\ 0 < p_1'(x) < p'(x) \ (x \geqslant x_1).$$

Определим функцию $p_1(x)$ на отрезке $[0, x_1]$ так, чтобы она была непрерывно дифференцируема на всей оси $[0, +\infty)$ и удовлетворяла условиям а) и б) пункта 2°. Обозначим через $q_1(x)$ функцию, двойственную с $p_1(x)$ по Юнгу, которая, очевидно, существует.

Из условий (24) или (24′) соответственно получим

$$f(t) e^{p_1(|t|)} = O(|t|^{-2\alpha}) \ (|t| \to \infty),$$

или

$$f(t) e^{p_1(t)} = O(t^{-2\alpha}) \ (t \to +\infty)$$

и заметив, что $2\alpha > 1$, соответственно будем иметь

$$f(t) e^{p_1(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty)$$

или

$$f(t) \in L_1(-\infty, +\infty),\ f(t) e^{p_1(t)} \in L_1(0, +\infty).$$

В обоих случаях по следствию 2 теоремы 1, при условии

$$\liminf_{R\to+\infty} \left\{ \frac{q_1(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt \right) dx \right\} = -\infty \tag{28}$$

будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ почти всюду.

Таким образом, если мы покажем, что

$$\frac{q_1(R)}{R} \leqslant \frac{q(R)}{R} + O(1) \text{ при } R \to +\infty \tag{29}$$

то из (27) и (29) будет следовать (28), т. е. доказательство теоремы.

Из (25) имеем:

$$p'(x+1) - p'(x) > C \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{C}{1+x} \quad (x > 1), \tag{30}$$

а из определения функции $p_1(x)$ имеем:

$$p_1'(x+1) = p'(x+1) - \frac{2\alpha(x+1)}{1+(x+1)^2} \quad (x > x_1). \tag{30'}$$

Из (30) и (30′) в силу того, что $2\alpha < C$, имеем

$$p_1'(x+1) > p'(x) \text{ при } x > x_1. \tag{31}$$

Пусть $x = \varphi_1(y)$ — функция, обратная к $y = p_1'(x)$. Так как $x = \varphi(y)$ — обратная к $y = p'(x)$ функция, то из (31) следует

$$\varphi_1(y) \leqslant 1 + \varphi(y),$$

откуда получим

$$\frac{q_1(R)}{R} = \frac{1}{R}\int_0^R \varphi_1(y)\,dy \leqslant O(1) + \frac{q(R)}{R}$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 1. Если при остальных условиях теоремы 3 заменить условие (27) через

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \varphi(R) - \frac{2}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt \right) dx \right\} = -\infty, \tag{27'}$$

то будем иметь $f(t) = \Phi(x) = 0$ *почти всюду.*

Действительно, так как

$$\frac{q(R)}{R} = \frac{1}{R}\int_0^R \varphi(y)\,dy < \varphi(R)$$

то из (27′) следует (27).

Следует отметить, что условие единственности (27′) было указано раньше Н. Левинсоном [8], но при значительно более жестком ограничении

$$p''(x) > C > 0.$$

Наконец отметим, что условие (25) можно заменить любым услови вида

$$p''(x) \geqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x} + \ldots + \frac{1}{x\log x \ldots \log_k x} +$$

$$+ \frac{C}{x\log x \ldots \log_{k+1} x}, \quad x \geqslant x_0, \quad C > 1 \tag{25}$$

5°. *Единственность бесконечно-дифференцируемых функций.* Приведем теперь теоремы о пустоте некоторых классов бесконечно-дифференцируемых функций.

Семейство бесконечно-дифференцируемых на всей оси $(\infty, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant m_n \omega_f(t) \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{32}$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, а функция $\omega_f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$, вообще говоря, зависит от $f(t)$, обозначим через $LC_{\{m_n\}}$. Введем функцию

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n}$$

тогда справедлива теорема:

Теорема 4. *Если функции класса $LC_{\{m_n\}}$ удовлетворяют условию*

$$f(t)\, e^{p(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty), \tag{32'}$$

то при

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2}\, du \right) dx \right\} = -\infty, \tag{33}$$

класс $LC_{\{m_n\}}$ пуст, т. е. единственная функция класса — тождественный нуль.

Доказательство. Нужно доказать, что, при выполнении условий (32′) и (33), любая функция $f(t) \in LC_{\{m_n\}}$ тождественно равна нулю. Действительно, пусть $f(t) \in LC_{\{m_n\}}$, тогда $f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$, поэтому, как и при доказательстве теоремы 1, отсюда следует, что ее преобразование Фурье

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt \tag{34}$$

не только существует и непрерывно на $(-\infty, +\infty)$, но и является целой функцией с оценкой роста

$$|\Phi(x+iy)| \leqslant C(f)\, e^{q(|y|)}.$$

Но, в силу условия (32) из (34), интегрированием по частям получим:

$$\Phi(x)=\frac{i^n}{\sqrt{2\pi}x^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t)e^{-ixt}\,dt$$

$$|\Phi(x)|\leqslant C_1(f)\,\frac{m_n}{|x|^n}\ (n=0,1,2,\ldots),$$

и поэтому

$$|\Phi(x)|\leqslant C_1(f)\,T^{-1}(|x|).$$

Это значит, что

$$\Phi(x)=O(e^{-\alpha(|x|)})\quad(|x|\to\infty),$$

где

$$\alpha(x)=-\log T(x). \tag{35}$$

Из (32′), (35) и из следствия 2 теоремы 1 вытекает, что при условии (33), $f(t)\equiv 0$.

Отнесем теперь к классу $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ бесконечно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$|f^{(n)}(t)|\,e^{p(|t|)}\leqslant m_n\,\omega_f(t)\quad(-\infty<t<+\infty)\ (n=0,1,2,\ldots), \tag{36}$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, $\omega_f(t)\in L_1(-\infty,+\infty)$ зависит от функции $f(t)$. Иначе говоря, в отличие от функций класса $LC_{\{m_n\}}$, здесь функции класса $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ убывают достаточно быстро вместе со всеми своими производными.

Теорема 5. Класс $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ *пуст, если*

$$\liminf_{R\to+\infty}\left\{\frac{q(R)}{R}-\frac{4}{\pi R}\log T(R)-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{\pi R^2}\int\limits_1^R x\left(\int\limits_1^x\frac{\log T(u)}{u^2}\,du\right)dx\right\}=-\infty, \tag{37}$$

в частности, если

$$\liminf_{R\to+\infty}\left\{\frac{q(R)}{R}-\frac{2}{\pi}\int\limits_1^R\frac{\log T(x)}{x^2}\,dx\right\}=-\infty. \tag{37'}$$

Доказательство. Пусть $f(t)\in LC_{\{m_n\}}[p(t)]$, тогда, очевидно, функция

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt$$

целая, поэтому, интегрированием по частям, будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}\, z^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t) e^{-izt}\, dt$$

или, в силу (36),

$$|\Phi(x+iy)| \leqslant \frac{m_n}{\sqrt{2\pi}\, |z|^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_f(t)\, e^{-p(|t|)+|t||y|} dt$$

Но по неравенству Юнга

$$|t||y| \leqslant p(|t|) + q(|y|),$$

поэтому

$$|\Phi(x+iy)| \leqslant \frac{m_n}{\sqrt{2\pi}\, |z|^n}\, e^{q(|y|)} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_f(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

или

$$|\Phi(x+iy)| \leqslant C_2(f)\, \frac{e^{q(|y|)}}{T(|z|)}. \tag{38}$$

Предполагая, что $\Phi(z) \not\equiv 0$, применим формулу Карлемана (7) к функции $\Phi(z)$, тогда в силу оценки (38) получим

$$\frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \{ q(R \sin\vartheta) - \log T(R) \} \sin\vartheta\, d\vartheta -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log T(x) dx + O(1) \geqslant 0 \text{ при } R \to +\infty. \tag{39}$$

Но

$$\int_0^{\pi} q(R \sin\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta < \frac{\pi q(R)}{2}$$

и

$$\int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log T(x) dx = \frac{2}{R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2}\, du \right) dx,$$

поэтому из (39) вытекает также, что

$$\frac{q(R)}{R} - \frac{4}{\pi R} \log T(R) -$$

$$- \frac{4}{\pi R^2} \int_1^R x \left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2}\, du \right) dx + O(1) \geqslant 0,$$

что противоречит условию (37) теоремы. Поэтому при условии (37) обязательно будем иметь $\Phi(z)\equiv 0$, т. е. $f(t)\equiv 0$. Таким образом, класс $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ пуст.

Далее, интегрированием по частям, имеем

$$-\frac{4}{\pi R}\log T(R)-\frac{4}{\pi R^2}\int_1^R x\left(\int_1^x \frac{\log T(u)}{u^2}\,du\right)dx=$$

$$=-\frac{4}{\pi R}\log T(R)-\frac{2}{\pi}\int_1^R \frac{\log T(u)}{u^2}\,du+\frac{2}{\pi R^2}\int_1^R \log T(u)\,du<$$

$$<-\frac{2}{\pi}\int_1^R \frac{\log T(u)}{u^2}\,du,$$

откуда заключаем, что условие (37) следует из (37′). Поэтому, при условии (37′), класс $LC_{\{m_n\}}[p(t)]$ пуст.

Рассмотрим теперь вопрос о пустоте другого класса бесконечно-дифференцируемых функций, рассмотренного ранее К. И. Бабенко (6).

Пусть $\{m_n\}$ и $\{l_k\}$ — некоторые бесконечные последовательности положительных чисел. Обозначим через $C(l_k, m_n)$ класс функций, бесконечно-дифференцируемых на всей оси $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$|t^{(k)}f^{n}(t)|\leqslant A^kB^n l_k m_n,\quad(-\infty<t<+\infty)\qquad(k;n=0,1,2,\dots)\tag{40}$$

при некоторых A и B.

В работе К. И. Бабенко [6] были даны достаточные условия как для пустоты, так и для непустоты класса $C(l_k, m_n)$, в предположении, что этот класс состоит из целых функций.

Докажем, наконец, теорему о пустоте класса $C(l_k, m_n)$, не требуя, чтобы функции класса были целыми.

Введем функцию

$$L(x)=\sup_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{l_{k+2}}\qquad(x\geqslant 1),\tag{41}$$

и положим дополнительно, что

$$p(x)=\log L(x)$$

непрерывно дифференцируемая функция на $[1,+\infty)$ удовлетворяющая условию* *б)* пункта 2°. Функцию $p(x)$ определим также на $[0,1]$

---

* или, просто, выпуклая функция.

так, чтобы она удовлетворяла условиям а) и б) п. 2°, и обозначим через $q(x)$ функцию двойственную с $p(x)$ по Юнгу.

Наконец, обозначим

$$M(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{x^n}{m_n} \tag{42}$$

тогда справедлива теорема.

Теорема 6. Класс $C(l_k, m_n)$ *пуст, если при любом* $\alpha > 0$

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \frac{q(\alpha R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log M(u)}{u^2} du \right\} = -\infty. \tag{43}$$

Доказательство. Если $f(t) \in C(l_k, m_n)$, тогда имеют место неравенства вида (40), откуда следует, что при некоторых $A > 0$ и $B > 0$

$$|f^{(n)}(t)| \leq A^2 \frac{B^n m_n}{L\left(\frac{|t|}{A}\right)} \cdot \frac{1}{|t|^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

иначе говоря, будем иметь

$$f(t) \in C_{\{B^n m_n\}} \left[p\left(\frac{t}{A}\right) \right].$$

Но легко видеть, что функцией двойственной с $p\left(\frac{A}{t}\right)$ по Юнгу будет $q(At)$, отсюда по теореме 5 следует, что класс $C(l_k, m_n)$ пуст, если

$$\liminf_{R \to +\infty} \left\{ \frac{q(AR)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{\log M\left(\frac{u}{B}\right)}{u^2} du \right\} = -\infty. \tag{43'}$$

при всевозможных значениях постоянных A и B. Но легко видеть, что из (43) следует (43′), поэтому теорема доказана.

Ереванский
Государственный Университет

Поступило 30 X 1957 г.

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՖՈՒՐՅԵԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ենթադրենք, որ $f(t)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են Ֆուրյեի փոխադարձ ձևափոխություններ: Ինչպես առաջին անգամ նշել է Ն. Վիները՝ «f և Φ ֆունկցիաների զույգը չի կարող շատ փոքր լինել անվերջության մեջ»:

Այս ընդհանուր սկզբունքը, f և Φ ֆունկցիաների զույգի նվազման կարգերի տերմիններով, կոնկրետ իրականացում է գտել մի շարք աշխատություններում [1]—[4], սակայն նվազման կարգերի վրա դրվող այս կամ այն էական սահմանափակումների դեպքում:

Աշխատության մեջ ապացուցված ընդհանուր արդյունքը (թեորեմ 1) f և Φ ֆունկցիաների զույգի միակության մասին, զանազան մասնավոր դեպքերում պարունակում է այս ուղղությամբ մինչև այժմ հայտնի գրեթե բոլոր հիմնական արդյունքները:

Այնուհետև դիտարկվում են անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր դասեր, որոնց համար նշվում են միակության բավարար պայմաններ (թեորեմներ 4 և 5):

Մասնավորապես 5-րդ թեորեմը ներկայացնում է քվազի-անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության մեջ հայտնի Կառլեման-Օստրովսկու թեորեմի էական ընդհանրացումը:

Այստեղ բերենք 1-ին թեորեմի ձևակերպումը:

Ենթադրենք, որ $p(t)$ ֆունկցիան սահմանված և անընդհատ դիֆերենցելի է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա, ընդ որում

ա) $p(0) = p'(0) = 0$,

բ) $p'(t)$ մոնոտոն աճող է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա և $\lim\limits_{t\to+\infty} p'(t) = +\infty$:

Եթե $y = p'(t)$ ֆունկցիայի հակադարձ $t = \varphi(y)$-ի միջոցով կազմենք $q(x) = \int\limits_0^x \varphi(y)\,dy$ ֆունկցիան, ապա տեղի ունի

Թեորեմ 1. Ենթադրենք, որ $f(t)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները $L_2(-\infty, +\infty)$ դասից են և հանդիսանում են Ֆուրյեի փոխադարձ ձևափոխություններ Պլանշերելի թեորեմի իմաստով: Եթե $f(t)e^{p(|t|)} \in L_1(-\infty, +\infty)$, ապա

$$\liminf_{R\to+\infty}\left\{\frac{1}{R}\int\limits_1^{\pi} q(R\sin\theta)\sin\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R^2}\int\limits_1^R x\left(\int\limits_1^x \frac{\log|\Phi(u)\Phi(-u)|}{u^2}\,du\right)dx\right\} = -\infty$$

պայմանի դեպքում, $f(t)\Phi(x) = 0$ համարյա ամենուրեք:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hardy G. H.*, A theorem concerning Fourier transforms, Journal of the London Math. Soc., Vol. 8 (1933), pp. 227—231.
2. *Morgan G. W.*, A note on Fourier transforms, Journal of the London Math. Soc., Vol. 9 (1934), pp. 187—192.
3. *Ingham A. E.*, A note on Fourier transforms, Journal of the London Math. Soc., Vol. 9 (1934), pp. 29—32

4. *Hirschman J. J.*, Jr., On the behavior of Fourier transforms at infinity and on quasi-analytic classes of functions, Amer. Journal of Math., Vol. 72 (1950), pp. 200—213.
5. *Jenkins J. A.*, Generalization of a theorem of Mandelbrojt, Amer. Journal of Math., Vol. 73 (1951), pp. 807—811.
6. *Бабенко К. И.*, Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций, Труды Московского мат.о-ва, т. 5, (1956), стр. 523—542.
7. *Харди,-Литтльвуд, Полиа;* Неравенства; Москва, (1948).
8. *Levinson N.*, Restrictions imposed by certain functions on their Fourier transforms, Duke Math. Journal, Vol. 6 (1940), pp. 722—731.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 6, 1957 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

М. С. Похсрарян, В. Г. Саноян

Гидродинамический расчет плоского потока с боковым отводом

В практике встречается свободное деление потока без забрала, а часто и без порога. Отделяемый расход зависит, главным образом, от скорости потока в основном русле, от ширины отверстия и от угла наклона струи. Из-за сложности явления, решение практических задач деления потока является, пока, делом экспериментальных исследований.

Первую попытку теоретического решения этого вопроса сделал А. Я. Милович [1], а затем В. А. Шаумян [2]. Рассматриваемый ими случай характерен тем, что основное русло имеет сравнительно бо́льшую ширину, чем ширина отверстия бокового отвода. Иными словами, они не учитывали влияние противоположного берега на структуру потока, которое усиливается при уменьшении ширины основного русла.

Решением задачи истечения жидкости из бокового отверстия в ограниченном потоке занимались В. М. Маккавеев [3], И. М. Коновалов [4], В. Н. Талиев [5] и С. Н. Нумеров [6]. При этом определялся коэффициент сжатия и угол наклона боковой струи.

В предлагаемой статье определяется очертание раздельной линии тока, что представляет большой практический интерес при свободном делении потока.

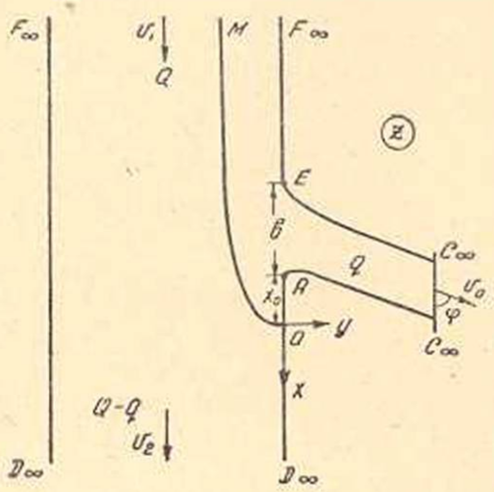
Далее, учитывая влияние противоположного берега на структуру потока, излагается расчет плоского потока с боковым отводом, пренебрегая влиянием дна.

Постановка задачи. Прямоугольный плоский канал, площадью поперечного сечения B имеет сбоку прямоугольное отверстие шириной b Общий расход Q, со средней скоростью v_1 вблизи отверстия, делится на две части; отделяемый расход q, который вытекает через отверстие, и транзитный расход $Q-q$, который продолжает двигаться по каналу со средней скоростью v_2. Даны общий расход Q, ширина отверстия бокового отвода b и угол наклона струи φ. Требуется определить q, v_0, v_2, x_0 и построить линию раздела OM (фиг. 1).

Точное решение этой задачи возможно получить используя методы теории функций комплексного переменного. Решение проведем для плоского течения при помощи конформного отображения области течения на вспомогательную полуплоскость, используя переменные Жуковского-Митчеля.

Принимаем: на линии тока FEC $\psi = -q$,
на линиях токов MOD и OAC $\psi = 0$,
на линии тока FD $\psi = Q - q$.

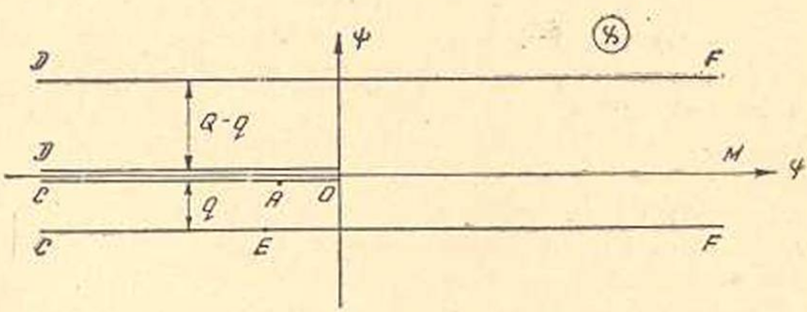
Потенциал скорости φ меняется как на линии FD, так и на линиях MOD, $MOAC$ и FEC от $-\infty$ до $+\infty$. Принимаем также, что в точке O $\varphi = 0$. Тогда, в плоскости комплексного потенциала $\chi = \varphi + i\psi$, области течения будет соответствовать полоса шириной Q, с горизонтальным вырезом (фиг. 2).



Фиг. 1.

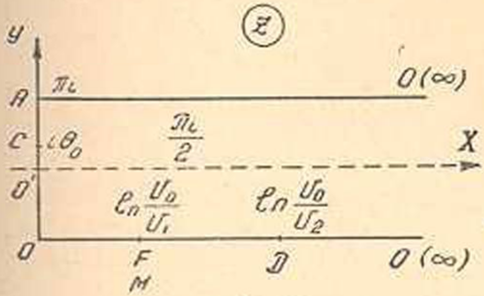
Области течения на плоскости Жуковского $Z = \ln \frac{v_0}{v} = X + iY \left(X = \ln \frac{v_0}{|v|};\ Y = \theta \right)$ соответствует полуполоса, расположенная справа от оси OY, так как $v_0 > |v|$, (v_0 — скорость в сжатом сечении, v — сопряженная скорость в любой точке течения).

Чтобы получить конформное отображение этой полуполосы на полосу с вырезом на плоскости χ, введем еще одну вспомогательную плоскость $u = \xi + i\eta$ и примем, что области течения соответствует на

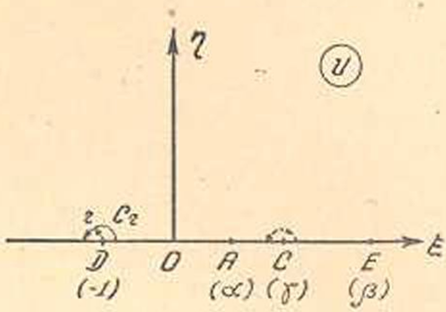


Фиг. 2.

этой плоскости верхняя полуплоскость. Произведем конформное отображение полуплоскости u на область χ, для этого заметим, что полоса с горизонтальным вырезом на плоскости χ представляет собой четырехугольник, три вершины которого C, D и F находятся в бесконечности. Как известно, такое конформное отображение полностью определяется, если заданы три контурные точки.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для конформного отображения верхней полуплоскости u на внутренность n — угольника служит формула Шварца-Кристоффеля, имеющая вид:

$$\chi = C_1 \int (u - a_1)^{\frac{\sigma_1}{\pi} - 1} \cdot (u - a_2)^{\frac{\sigma_2}{\pi} - 1} \cdots (u - a_n)^{\frac{\sigma_n}{\pi} - 1} du + C_2, \qquad (1)$$

где σ_1, $\sigma_2 \cdots \sigma_n$ — внутренние углы многоугольника, a_1, $a_2 \cdots a_n$ — вершины n — угольника на вещественной оси полуплоскости. C_1 и C_2 — вообще комплексные постоянные. В нашем случае в вершинах четырехугольника имеем углы

$$\sigma_C = \sigma_D = \sigma_F = 0; \; \sigma_0 = 2\pi. \qquad (2)$$

Соответственно для вершин D, O и F примем в плоскости u точки

$$a_D = -1, \; a_0 = 0, \; a_F = \infty, \; a_C = \gamma. \qquad (3)$$

Но в случае когда $a_n = \infty$, формула Шварца-Кристоффеля принимает вид:

$$\chi = C_1 \int (u - a_1)^{\frac{\sigma_1}{\pi} - 1} \cdot (u - a_2)^{\frac{\sigma_2}{\pi} - 1} \cdots (u - a_{n-1})^{\frac{\sigma_{n-1}}{\pi} - 1} du + C_2. \qquad (1')$$

Применяя ее к нашему случаю и замечая, что $\chi = 0$ при $u = 0$, получим $C_2 = 0$;

$$\chi = C_1 \int (u+1)^{-1} (u - \gamma)^{-1} u du = C_1 \int_0^u \frac{u du}{(u+1)(u-\gamma)};$$

$$\chi = C_1 [\ln(u+1) + \gamma \ln(u - \gamma)]. \qquad (5)$$

Для определения C_1 и γ воспользуемся следующим соображением: когда u обходит точку $D = -1$ по полуокружности C_r достаточно малого радиуса r (т. е. когда вектор $u + 1 = re^{i\varphi}$ поворачивается, изменяя свой аргумент от 0 до π), то соответствующая точка χ должна перейти с луча DF на OD и приращение χ должно мало отличаться от $-(Q - q)\,i$, следовательно

$$\Delta\chi = -(Q-q)\,i + O(r),$$

где $O(r)$ бесконечно малая при $r \to 0$.

Это соображение оправдывается тем, что образ полуокружности C_r при малых r мало отличается от отрезка прямой соединяющей лучи OD и DF и перпендикулярен им.

С другой стороны, при таком приращении Δu, приращение второго слагаемого из квадратной скобки формулы (5) также будет малым, ибо это слагаемое непрерывно в точке $u=-1$. Приращение первого слагаемого $\ln(u+1)=\ln(r)+\varphi i$ равно πi, следовательно,

$$\Delta\chi = C_1 i\pi + O(r).$$

Приравнивая выражения, полученные для $\Delta\chi$ и переходя к пределу при $r\to 0$, находим

$$C_1 = -\frac{Q-q}{\pi}. \tag{6}$$

Аналогично, когда u обходит точку $C=\gamma$ по окружности $u-$ $-\gamma = re^{i\varphi}$, (φ - меняется от 0 до π), приращение $\Delta\chi = C\gamma\pi i + O(r)$ должно мало отличаться от $-iq$, тогда

$$\gamma = -\frac{q}{\pi C_1} = \frac{q}{Q-q}.$$

Окончательная функция, реализирующая конформное отображение полуплоскости $Imu>0$ на полосу с вырезом, имеет вид:

$$\chi = -\frac{Q-q}{\pi}\ln(u+1) - \frac{q}{\pi}\left(u - \frac{q}{Q-q}\right). \tag{8}$$

Для отображения полуплоскости $Imu>0$ на полосу Z представляющую треугольник одна из вершин которого удалена в бесконечность (фиг. 3), воспользуемся интегралом Шварца-Кристоффеля [1]. В данном случае в вершинах треугольника AOE имеем углы

$$\sigma_A = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_E = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_0 = 0, \tag{9}$$

причем вершинам A, O, E соответствуют в плоскости u точки:

$$a_A = \alpha, \quad a_E = \beta, \quad a_0 = 0. \tag{10}$$

Переместив начало координат на плоскости Z в точку $O'\left(0, \frac{\pi i}{2}\right)$, по формуле (1') будем иметь:

$$Z_1 = Z - \frac{\pi i}{2} = C_3\int\frac{du}{u\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}} + C_4 =$$

$$= \frac{C_3}{i\sqrt{\alpha\beta}}\arcsin\frac{-(\alpha+\beta)+\dfrac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha} + C_4. \tag{11}$$

Для определения произвольных постоянных C_3 и C_4 воспользуемся тем, что в точках A и E при $Z_1=\frac{\pi i}{2}$ и $Z_1=-\frac{\pi i}{2}$ соответственно $u=\alpha$ и $u=\beta$.

Подставляя эти значения в (11) получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi i}{2} &= \frac{C_3}{i\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\frac{\pi}{2}+C_4, \\ -\frac{\pi i}{2} &= \frac{-C_3}{i\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\frac{\pi}{2}+C_4. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Отсюда

$$C_3=-\sqrt{\alpha\beta};\quad C_4=0. \tag{13}$$

Подставляя в (11) получим:

$$Z_1=i\arcsin\frac{-(\alpha+\beta)+\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha},$$

или

$$Z=i\left(\arcsin\frac{-(\alpha+\beta)+\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, после некоторых преобразований, получим окончательно следующее уравнение:

$$\cos\left(i\ln\frac{|v|}{v_0}+\theta\right)=\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}. \tag{14}$$

Для установления связи между неизвестными величинами v_0, v_2, α и β, напишем последнее выражение для точек C, D и F, тогда получим:

$$\alpha+\beta+2\alpha\beta=(\beta-\alpha)\operatorname{ch}\ln\frac{v_2}{v_0}, \tag{15'}$$

$$\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{\gamma}=(\beta-\alpha)\cos\varphi, \tag{15''}$$

$$\alpha+\beta=(\beta-\alpha)\operatorname{ch}\ln\frac{v_1}{v_0}. \tag{15'''}$$

Чтобы замкнуть последнюю систему не хватает еще одного условия. Имея в виду зависимости (8) и (14), и помня, что:

$$\bar{v}=\frac{dx}{dz}=\frac{d\chi}{du}\cdot\frac{du}{dz},$$

$$\overline{v}=v_0 e^{-z}=v_0 e^{-i\arccos\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}}$$

будем иметь

$$z=\int\frac{1}{v}\frac{dx}{du}du+C=$$

$$=-\frac{1}{v_0}\int e^{i\arccos\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}}\left(\frac{Q-q}{\pi}\cdot\frac{1}{1+u}+\frac{q}{\pi}\frac{1}{u-\gamma}\right)du+C. \qquad (16)$$

Подинтегральная показательная функция в выражении (16) преобразуется так:

$$e^{i\arccos\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}}=\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}+i\sin\arccos\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}\mp\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\sqrt{u^2-(\alpha+\beta)u+\alpha\beta}}{u}.$$

Согласно последнему преобразованию выражение (16) примет вид:

$$z=-\frac{1}{v_0}\left\{\frac{Q-q}{\pi}\int\left(\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}\mp\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\sqrt{u^2-(\alpha+\beta)u-\alpha\beta}}{u}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{du}{u+1}+\frac{q}{\pi}\int\left(\frac{\alpha+\beta-\frac{2\alpha\beta}{u}}{\beta-\alpha}\mp\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\sqrt{u^2-(\alpha+\beta)-\alpha\beta}}{u}\right)\frac{du}{u-\gamma}+$$

$$+C=-\frac{1}{v_0}\left\{\frac{Q-q}{\pi}\left[\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\int\frac{du}{u+1}-\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\int\frac{du}{(u+1)u}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\int\frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}\,du}{u(u+1)}\right]+\frac{q}{\pi}\left[\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\int\frac{du}{u-\gamma}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\int\frac{du}{u(u-\gamma)}-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\int\frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}\,du}{u(u-\gamma)}\right]\right\}+C. \qquad (17)$$

Точка $u=\gamma$ лежащая на вещественной оси, является особой точкой для интегралов входящих в (17). Для этого рассмотрим отдельные области.

Для первой области $0<u<\gamma$ выражение (17), после интегрирования и некоторых преобразований, примет вид:

$$z=-\frac{Q-q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(u+1)-\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\gamma-u}{u+1}-\right.$$

$$-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\left[\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}\ln\frac{t-\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}}}{t+\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}}}-\right.$$

$$\left.\left.-\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\right\}-\frac{q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(\gamma-u)+\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\left[-\frac{i}{\gamma}\sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\ln\frac{t-i\sqrt{\dfrac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}}{t+i\sqrt{\dfrac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}}+\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\right\}+C \tag{18}$$

где $t=\sqrt{\dfrac{\beta-u}{\alpha-u}}$.

Определим C — из условий, что раздельная линия тока MO проходит через начало координатной системы. Т. е. при $z=0$ должны иметь $u=0$ или $t=\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$. Получим:

$$C=\frac{Q-q}{\pi v_0}\left\{-\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\gamma-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\left[\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}\ln\frac{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\dfrac{\beta+1}{\alpha+1}}}{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\dfrac{\beta+1}{\alpha+1}}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\frac{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-1}{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}+1}\right]\right\}+\frac{q}{\pi v_0}\left\{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\gamma+\right.$$

$$+\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\left[-\frac{i}{\gamma}\sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\ln\frac{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-i\sqrt{\dfrac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}}{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}+i\sqrt{\dfrac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}}+\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-1}{\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}+1}\right]\right\}. \tag{19}$$

Последнее выражение не меняется при переходе от первой области ко второй. Во второй области, когда $\gamma < u \leqslant \infty$, функция конформного отображения будет:

$$z = -\frac{Q-q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(u+1) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{u-\gamma}{u+1} -\right.$$

$$-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\left[\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}-t}{\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}+t} -\right.$$

$$\left.\left.-\ln\frac{1-t}{1+t}\right]\right\} - \frac{q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(u-\gamma) -\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\left[\frac{i}{\gamma}\sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\ln\frac{i\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}-t}{i\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}+t} - \ln\frac{1-t}{1+t}\right]\right\} + C, \tag{20}$$

где C определяется по (19). Кроме того определению подлежит и местонахождение нижнего или верхнего ребра отвода. Так, например, при $u=\alpha$, или $t=\infty$ должны иметь $z=-x_0$. Так как $0 < x_0 < \gamma$, согласно условию из (18) получим:

$$x_0 = +\frac{Q-q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta+\alpha}\ln(\alpha+1) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\gamma-\alpha}{\alpha+1}\right\} +$$

$$+\frac{q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(\gamma-\alpha)\right\} + C. \tag{21}$$

Имеем также условие: при $u=\beta$, или $t=0$; $z=-x_0-b$. Из (20) получим:

$$x_0 + b = \frac{Q-q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(1+\beta) - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta-\alpha}{1+\beta}\right\} +$$

$$+\frac{q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln(\beta-\gamma)\right\} + C. \tag{22}$$

Из условий (21) и (22), считая ширину отверстия бокового отвода заданной, легко можно найти еще одну связь между неизвестными α, β, v_0, v_2.

$$b = -\frac{Q-q}{\pi v_0}\left\{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\alpha+1}{\beta+1} - \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{(\gamma-\alpha)(\beta+1)}{(\beta-\gamma)(\alpha+1)}\right\} -$$

$$-\frac{q}{\pi v_0}\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Далее, учитывая зависимости (7) (15′) и (15″) можно написать последнее выражение в более удобной форме т. е.:

$$\bar{b} = -\frac{\bar{v}_2}{\pi}\left\{\operatorname{ch}\bar{v}_2 \ln\frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\bar{v}_2}\cos\varphi \ln\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}\right\}, \tag{23}$$

где $\bar{b}$ — отношение ширины отверстия к ширине канала.
$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ — безразмерные скорости относительно v_0.

Таким образом, задаваясь общим расходом $Q = v_1 B$, шириной отверстия бокового отвода b и углом отвода φ приводим поставленную нами задачу к решению системы уравнений (15′), (15″), (15‴) и (23), где неизвестными являются α, β, v_0, v_2. Далее с помощью функции (8) можем построить раздельную линию тока на плоскости u (фиг. 4). Конформно отображающие функции (18) и (20) дают нам возможность перевести раздельную линию тока от плоскости u на основную плоскость течения. Таким образом будем иметь положение раздельной линии тока с учетом влияния берега, против которого расположено отверстие.

Покажем на одном примере применение изложенного метода. Предположим общий расход $Q = 0{,}026$ *м³/сек* $\bar{b} = 0{,}5$ и угол отвода $\varphi = 45°$. При таких данных система уравнения (15′), (15″), (15‴) и (23) примет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} + \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha} = \operatorname{ch}\ln\bar{v}_2 \\ &\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma(\beta-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} = \operatorname{ch}\ln\bar{v}_1 \\ &(\bar{v}_2^2+1)\ln\frac{\alpha+1}{\beta+1} + 2(1-\sqrt{2}\bar{v}_2)\ln\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma} + \pi = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

где, согласно (7),

$$\gamma = \frac{Q-(Q-q)}{Q-q} = \frac{v_1 - v_2}{v_2} = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\bar{v}_2}.$$

Решение системы (24) дает следующие значения для неизвестных:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 0{,}810 \\ \bar{v}_2 &= 0{,}604 \\ \alpha &= 0{,}05 \\ \beta &= 4{,}83 \end{aligned} \tag{25}$$

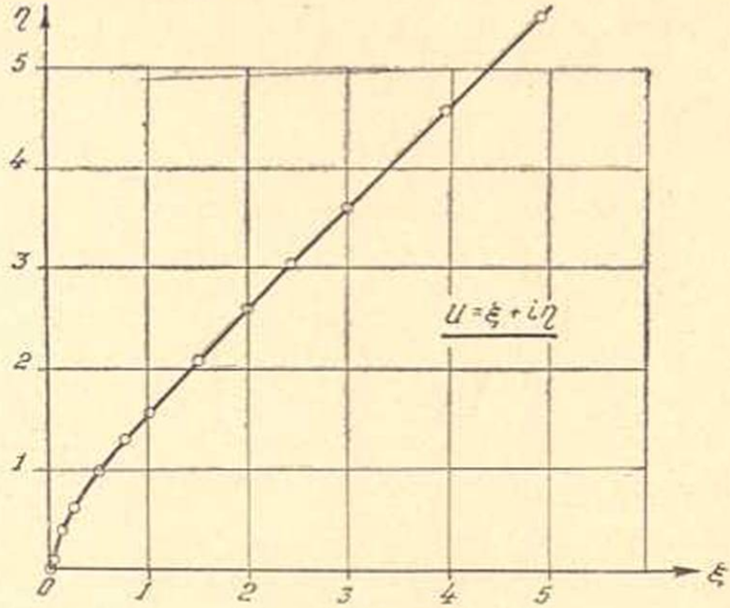
При этом получается $\gamma = 0{,}34$. Таким образом функция раздельной линии тока на плоскости $u = \xi + i\eta$ по формуле (8) определяется уравнением:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi+1}+\gamma\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}=0 \tag{26}$$

(при всех значениях $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, α, β). Для нашего случая ($\gamma=0{,}34$) функцию (26) можно заменить приближенно следующей функцией.

$$\eta=\sqrt{\frac{3\xi(1+\xi)^2}{3\xi+2}}. \tag{27}$$

Значение η при разных значениях $\xi>0$ приводится в таблице 1. График раздельной линии тока на плоскости u приведен на фиг. 5. Точки соответствующие раздельной линии тока с помощью конформно-отображающей функции (18) переводим на первоначальную плоскость. Отделив вещественные и мнимые части $z=x+iy$, получим x и y как функции от ξ и η. После ряда преобразований и обозначений получается:



Фиг. 5.

$$\frac{\pi v_0}{Q-q}x=-\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\ln\sqrt{\delta}+\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\gamma\delta}-$$

$$-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}(1+\gamma)\ln\left\{\frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-1}\cdot\frac{|\alpha+\beta-2(\xi+X_0)|}{\beta-\alpha}\sqrt{1+\frac{\eta^2}{X_0^2}}\right\}+$$

$$+\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}\ln\sqrt{X_2^2+Y_2^2}-\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\gamma\ln\frac{\sqrt{(\gamma-\xi)^2+\eta^2}}{\gamma}-$$

$$-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\operatorname{arc\,tg}\frac{Y_1}{X_1}, \tag{28}$$

$$\frac{\pi v_0}{Q-q}y=-\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{1+\xi}+\frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{m}{l}\right)-$$

$$-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}(1+\gamma)\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{X_0}+\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}\operatorname{arc\,tg}\frac{Y_2}{X_2}-$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\gamma\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}+\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\sqrt{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\ln\sqrt{X_1^2+Y_1^2}$$

Эти формулы являются общими для всех значений α, β, v_0, v_2. Здесь введен ряд новых обозначений:

$$\delta=(\xi+1)^2+\eta^2$$

$$l=(\xi+1)(\gamma-\xi)-\eta^2$$

$$m=(1+\gamma)\eta$$

$$n_1=0{,}5\,[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\xi+\xi^2-\eta^2]$$

$$n_2=\eta\,[\xi-0{,}5(\alpha+\beta)]$$

$$X_0=\sqrt{n_1+\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\qquad Y_0=\frac{n_2}{X_0}$$

$$k_1=\left[\beta+\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\alpha-\xi\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}+1\right)\right]$$

$$k_2=\left[\beta+\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}+1\right)\xi-\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\alpha+2\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}Y_0\right]\cdot\left[1-\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right]-$$

$$-2\left[\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}+1\right)\eta-2X_0\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}\right]\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$k_3=\eta\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}+1\right)$$

$$k_4=2\left[\beta+\left(\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}+1\right)\xi-\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\alpha+2\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}\cdot Y_0\right]+$$

$$+\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\left[\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}+1\right)\eta-2X_0\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}}\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right]$$

$$k_5=(k_1^2+k_3^2)\left(1+\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$X_1 = \frac{k_1k_2 - k_3k_4}{k_5}; \quad Y_1 = \frac{k_1k_4 + k_2k_3}{k_5}$$

$$\omega_1 = 2\alpha\beta + \alpha + \beta - (2 + \alpha + \beta)\xi - 2X_0\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

$$\omega_2 = (2 + \alpha + \beta)\eta - 2\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

$$X_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right)[(1+\xi)\omega_1 - \eta\omega_2]}{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right)\cdot\delta\cdot(\beta-\alpha)};$$

$$Y_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right)[-\omega_1\eta - \omega_2(1+\xi)]}{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\right)\cdot\delta\cdot(\beta-\alpha)}$$

Для нашего примера решение системы (24) дает следующие значения для неизвестных: $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 4{,}83$, $\bar{v}_1 = 0{,}81$, $\bar{v}_2 = 0{,}601$. При таких данных будем иметь

$$\frac{x}{B} = 0{,}194\left\{-1{,}02\ln\sqrt{\delta} + 0{,}101\ln\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{0{,}34\,\delta} - \right.$$

$$-0{,}296\ln 0{,}512(2{,}44 - \xi - X_0)\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{X_0^2}} +$$

$$\left. + 0{,}512\ln\sqrt{X_2^2 + Y_2^2} - 0{,}347\ln\frac{\sqrt{(0{,}34-\xi)^2+\eta^2}}{0{,}34} - 0{,}236\,\mathrm{arc\,tg}\frac{Y_1}{X_1}\right\}$$

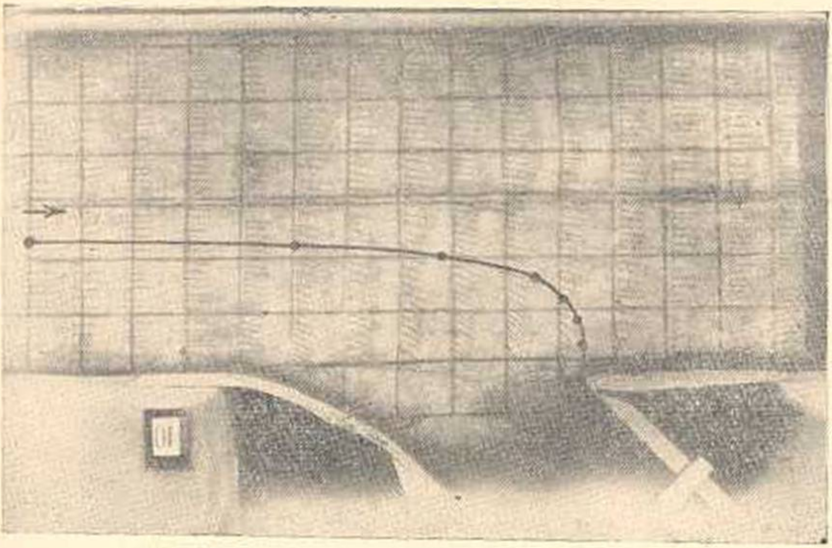
$$\frac{y}{B} = 0{,}194\left\{-1{,}02\,\mathrm{arctg}\frac{\eta}{\xi+1} + 0{,}101\,\mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{m}{l}\right) - 0{,}296\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\eta}{X_0} + \right.$$

$$\left. + 0{,}512\,\mathrm{arctg}\frac{Y_2}{X_2} - 0{,}347\,\mathrm{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma} + 0{,}236\ln\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\right\}$$

Где δ, l, m, X_0, Y_0, X_1, Y_1, X_2, Y_2 определяются по вышеприведенным обозначениям, подставляя в них числовые значения α и β. В таблице 1 одновременно приведены x и y при различных ξ и η. Последние формулы характеризуют раздельную линию тока для нашего случая.

На фиг. 6 приведена раздельная линия тока, полученная по изложенному методу и по эксперименту. По формуле (21) нами рассчитано значение x_0, которое равно $\frac{x_0}{B} = 0{,}0015$. Как видно из фиг. 6 начало координатной системы расположено на верхнем ребре отвода, так как оно было относительно мало для нашего частного случая.

Приравнивая правую часть уравнения (26) постоянной величине получим семейство линий токов на плоскости u. После чего с помощью отображающей функции (28) перейдем на основную плоскость, получая уже все линии тока в области течения.



Фиг. 6.

Кроме того, по полученным формулам легко определяется отделяемый расход q, который равен $v_1 \cdot y_0$, где v_1 — средняя скорость в основном русле, y_0 — расстояние раздельной линии от берега, но выше отверстия, где его действие еще не обнаруживалось. При этом из (28) получается

$$y_0 = \lim_{\substack{\xi \to \infty \\ \eta \to \infty}} y = -\frac{Q-q}{\pi v_0} \frac{(\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta})(1+\gamma)}{\beta - \alpha} \operatorname{arc\,tg} 1 \tag{29}$$

Переходим к сопоставлению $\frac{v_1}{v_0}$, $\frac{v_2}{v_0}$ и q, полученных теоретическим и экспериментальным путем. Как было сказано выше, общий расход в основном русле при эксперименте был 0,026 $м^3/сек$, ширина русла 0,66 $м.$, глубина наполнения потока в основном русле 0,105 $м$ при таких данных средняя скорость потока в основном русле будет $v_1 = 0{,}375$ $м/сек$. При эксперименте нами был измерен транзитный расход $Q - q = 0{,}0157$ $м^3/сек$, следовательно $v_2 = 0{,}265$ $м/сек$. Таким образом отношение $\frac{v_2}{v_1}$ при эксперименте было 0,708, а по расчету 0,745, как видно расхождение не превышает 6%.

Чтобы получить среднюю скорость в сжатом сечении при эксперименте пользуемся диаграммой для коэффициента сжатия при раз-

Таблица 1

№№ п.п.	ξ	η	$\frac{x}{B}$	$\frac{y}{B}$
1	0	0	0	0
2	0,05	0,075	−0,007	−0,029
3	0,10	0,398	−0,014	−0,088
4	0,25	0,653	−0,046	−0,125
5	0,50	0,983	−0,108	−0,162
6	0,75	1,295	−0,171	−0,179
7	1,00	1,[illegible]5	−0,230	−0,180
8	1,50	2,03	−0,309	−0,206
9	2,00	2,[illegible]0	−0,373	−0,217
10	2,4[illegible]	3,01	−0,4[illegible]3	−0,221
11	3,00	3,56	−0,465	−0,227
12	4,00	4,63	−0,[illegible]51	−0,231
13	5,00	5,62	−0,600	−0,238
14	100	101	−1,37	−0,250
15	∞	∞	$-\infty$	0,252

ных отношениях скоростей $\frac{v_2}{v_1}$ и при различных $\frac{b}{B}$, приведенных в работе [6]. Для нашего случая получается $\varepsilon = 0{,}38$, последний при умножении на ширину отверстия даст величину сжатого сечения. При этом средняя скорость в сжатом сечении в условиях эксперимента будет: $v_0 = 0{,}435$.

Расхождение между экспериментальной $\frac{v_1}{v_0} = 0{,}862$ и ее теоретическим значением (0,81) составляет около 6,5%. С другой стороны расхождение между измеренным расходом (0,0107 *м³/сек*) и расчетным (0,0114) не превышает 7%. Полученное расхождение считаем допустимым при практическом применении.

Заключение

Решена задача по определению скоростей (v_2, v_0) (следовательно и расходов) в отводном и транзитном каналах при заданных значениях расхода в основном канале (Q), отношения ширин отводного и основного каналов $\left(\frac{b}{B}\right)$ и угла наклона отводного канала к основному (φ).

Решение задачи приводит к системе (24) четырех уравнений с четырьмя неизвестными (α, β, v_0, v_2).

Получено уравнение раздельной линии тока в параметрическом виде (26), (28).

Сравнение теоретических результатов с экспериментом для одного конкретного случая дало практически удовлетворительное совпадение (расхождение между теоретически-рассчитанных и замеренных скоростей и расходов не превышает 7 %).

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР
Поступило 5 VI.1955

Մ. Ս. Փախարյան, Վ. Գ. Սանոյան

ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔՈՎ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿ ՀԱՇՎԱՐԿՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հիդրոտեխնիկական կառուցվածքների, ոռոգման սիստեմի և ջրամատակարարման նպատակների համար խողովակների նախագծման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտ է լինում հաշվել արտահոսող հեղուկի արագությունը և ելքը կողմնային անցքով, ինչպես նաև հեղուկը երկու մասի բաժանող սահմանային հոսքի գիծը մագիստրալ ջրատարում:

Հոդվածում դիտարկվում է ուղղանկյուն ջրատար, որի կողմնային ուղղանկյուն անցքով տեղի է ունենում արտահոսում: Տրված են ջրատարի ընդհանուր ելքը, անցքի լայնությունը և անցքով անցնող շիթի կազմած անկյունը հոսանքի ուղղության հետ: Պահանջվում է գտնել անցքով անցնող հեղուկի արագությունը և այն արագությունը, որը կստացվի ջրատարում՝ անցքից ներքև, ընդունելով, որ ջրատարի սկզբում արագությունը տրված է, և կառուցել հոսքի գծերը անցքի շրջակայքում, մասնավորապես սահմանային հոսքի գիծը, որով հեղուկը բաժանվում է երկու մասի:

Խնդիրը լուծվում է կոմպլեքս փոփոխականների ֆունկցիաների տեսության օգնությամբ՝ արտապատկերելով հոսանքի տիրույթը օժանդակ կիսահարթության վրա: Ստացված է հոսքի գծերի և մասնավորապես սահմանային հոսքի գծի (26) հավասարումը օժանդակ հարթության վրա: Այնուհետև արտածված են կոնֆորմ արտապատկերող (28) ֆունկցիաները ֆիզիկական հարթությանն անցնելու համար, իսկ արագությունների (հետևապես և ելքերի) որոշումը բերվում է (15′), (15″), (15‴) և (23) հավասարումների համատեղ լուծմանը:

Ստացված է սահմանային հոսքի գծի և պատի հատման կետը, որի հեռավորությունը անցքի վերին կամ ներքևի ծայրերից որոշվում է (21) կամ (22) արտահայտություններով: Ստացված է նաև սահմանային հոսքի գծի ափից ունեցած հեռավորության համար ընդհանուր (29) արտահայտությունը: Վերջինը վերաբերվում է անցքից վերև ընկած կտրվածքներին, որտեղ անցքի ազդեցությունը մագիստրալ ջրատարի հոսանքի վրա բոլորովին բացակայում է:

Որպես օրինակ կատարված է մի մասնավոր դեպքի հաշվարկում: Այդ նույն դեպքի համար Հայկական ՍՍՌ ԳԱ Ջրա-էներգետիկ ինստիտուտի հիդրավլիկական լաբորատորիայում կառուցված մոդելի վրա Մ. Ս. Փախարյանի կողմից կատարված են էքսպերիմենտալ ուսումնասիրություններ: Չափված են արագությունները ու ելքերը տարբեր հատվածներում և նկարա-

հանված են հոսքի գծերը հիմնական ջրատարի, ինչպես ազատ մակերևույթի ու հատակի, այնպես էլ միջանկյալ մի քանի խորությունների վրա։ Նկ. 6-ում բերված է փորձից ստացված հոսքի գծերի և տեսականորեն հաշվարկված սահմանային հոսքի գծի համեմատությունը։ Արագությունների որոշումը տվյալ դեպքի համար բերվում է (24) հավասարումների սիստեմի լուծմանը, որը տալիս է (25) արժեքները։

Հաշվարկված արագությունները և Ն,ք-ը համեմատված են փորձից ստացված արժեքների հետ։ Համեմատությունը տալիս է միանգամայն բավարար արդյունքներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милович А. Я.* Теория деления и соединения потока. М—Л., 1947.
2. *Шаумян В. А.* Научные основы орошения и оросительных сооружений. М., 1948. Сельхозгиз.
3. *Маккавеев В. М.* О теоретическом определении коэффициента местных гидравлических сопротивлений. Труды ЛИИВТ-а, вып. 1, 1931.
4. *Коновалов И. М.* Определение коэффициента и линии сжатия при истечении жидкости из бокового отверстия в канале. Труды ЛИИВТ-а, XV, 1949.
5. *Талиев Б. Н.* Попутное течение жидкости из канала постоянного сечения. ДАН СССР, 94, № 4 (1954).
6. *Нумеров С. Н.* и *Першин С. Б.* Теоретическое определение угла наклона и коэффициента сжатия боковой струи. „Известия ВНИИГ", т. 50, 1953.
7. *Лаврентьев М. А.* и *Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М—Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 6, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян

Ползучесть составных цилиндрических труб

В настоящей работе рассматривается задача о равновесии составной цилиндрической трубы, находящейся под воздействием внутреннего и внешнего равномерного давления с учетом ползучести и изменения модуля мгновенной деформации материала. Такие трубы (как железобетонные, составные металлические или деревянные и др.) часто применяются как важные конструктивные элементы в технике. Решение будем проводить в рамках плоской задачи на примере двухслойной цилиндрической трубы, рассматривая ее как тело, состоящее из двух отдельных полых цилиндров с различными материалами, при условии полного слипа их соприкасающихся поверхностей.

Общее решение этой задачи в линейной постановке было дано в работе [1].

Ниже мы приводим решение рассматриваемой задачи, основываясь на нелинейной теории ползучести, развитой в вышеуказанной работе [1].

М. И. Розовским [2] дано решение задачи о равновесии однородной цилиндрической оболочки, находящейся под воздействием внешнего давления с учетом только ползучести материала. При этом решение задачи получено способом последовательных приближений. Этот же метод применяется и в настоящей работе.

§ I. Постановка задачи

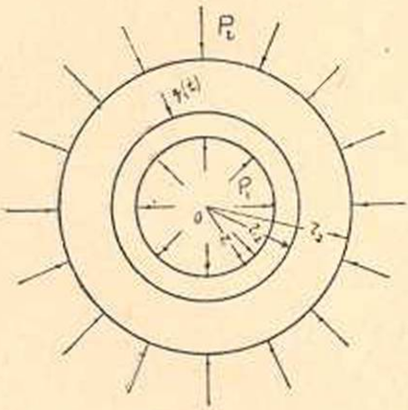
Рассмотрим круглую цилиндрическую трубу, состоящую из двух отдельных полых цилиндров с различными материалами, спаянных по поверхности их соприкосновения. Пусть по внутренней и внешней поверхностям трубы приложены равномерные радиальные давления с интенсивностью p_1 и p_2.

Обозначим радиусы двухслойной цилиндрической трубы через r_1, r_{12} и r_2, причем $r_1 < r_{12} < r_2$ (фиг. 1).

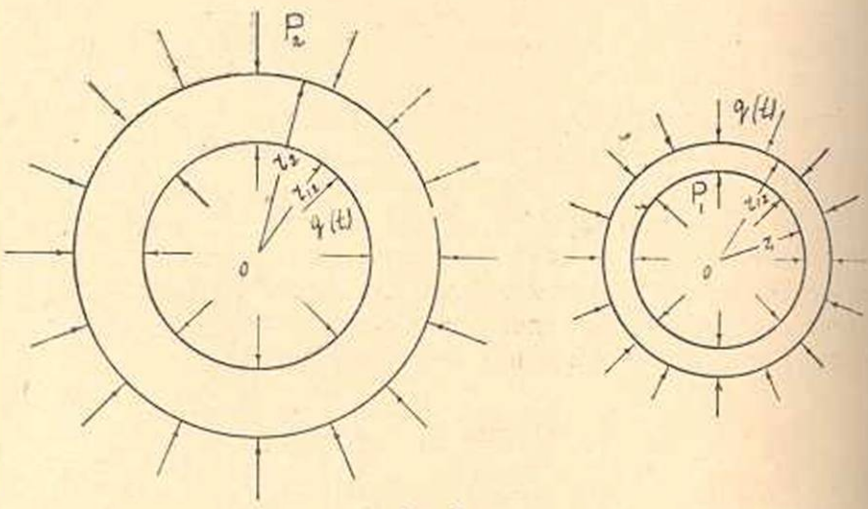
В условиях совместной работы двух цилиндрических тел между ними возникнут радиальные силы взаимодействия интенсивностью $q(t)$, (фиг. 2). При этом, в силу симметрии, касательные напряжения будут равны нулю.

Рассмотрим равновесие каждого слоя в отдельности. На внутренний слой трубы действуют силы p_1 и $q(t)$, а на внешний — $q(t)$ и p_2.

Не нарушая общности, можно допустить, что ползучесть материала одного из слоев трубы, как, например, внутреннего, по сравнению с ползучестью материала другого слоя незначительна и можно ею пренебречь. Такое положение имеет место, например, в случае железобетонных труб или деревянных с металлической рубашкой и др.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 2. Определение напряжений и перемещений во внутреннем слое трубы

Рассмотрим вначале равновесие внутреннего слоя трубы, принимая его как полый цилиндр, находящийся под воздействием силы P_1 с внутренней стороны и силы $q(t)$ — с внешней стороны.

Пусть $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_\varphi^{(1)}$ — радиальное и поперечное напряжения во внутреннем слое трубы, а $\varepsilon_r^{(1)} = \dfrac{du^{(1)}}{dr}$, $\varepsilon_\varphi^{(1)} = \dfrac{u^{(1)}}{r}$ — соответствующие деформации, выраженные через радиальное перемещение $u^{(1)}$. Осевой деформацией трубы пренебрегаем.

Тогда для определения напряжений во внутреннем слое и его радиальных перемещений согласно формулам Ляме получим следующие выражения

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{p_1 - q(t)\,\delta^2}{\delta^2 - 1} - \frac{p_1 - q(t)}{\delta^2 - 1} \cdot \frac{r_{12}^2}{r^2}, \tag{2.1}$$

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \frac{p_1 - q(t)\,\delta^2}{\delta^2 - 1} + \frac{p_1 - q(t)}{\delta^2 - 1} \cdot \frac{r_{12}^2}{r}, \tag{2.2}$$

$$u^{(1)} = \frac{1 - \nu^{(1)}}{E^{(1)}} \frac{p_1 - q(t)\,\delta^2}{\delta^2 - 1} r + \frac{1 + \nu^{(1)}}{E^{(1)}} \frac{[p_1 - q(t)]\, r_{12}}{\delta^2 - 1} \frac{r_{12}}{r}. \tag{2.3}$$

Здесь $q(t)$ — пока неизвестная функция времени t,

$E^{(1)}$ — модуль деформации материала внутреннего слоя,

$\nu^{(1)}$ — коэффициент Пуассона материала внутреннего слоя,

$\delta = \dfrac{r_{12}}{r_1} \geqslant 1$.

§ 3. Основные уравнения нелинейной теории ползучести

Рассмотрим вначале основные уравнения нелинейной теории ползучести, а затем перейдем к определению напряженного состояния внешнего слоя трубы.

Как известно [1, 3], основные уравнения нелинейной теории ползучести, в случае пространственного напряженного состояния, можно получить, если принять за основу теорию малых упруго-пластических деформаций.

Зависимость между напряжениями и деформациями в теории малых упруго-пластических деформаций, когда сжимаемостью материала можно пренебречь, выражается формулами [4]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_y, \quad \tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xz}, \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_z, \quad \tau_{4z} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{4z}, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где $\sigma = \dfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, а σ_i, ε_i — интенсивности тензора напряжений и тензора деформации, соответственно равные

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{4z}^2 + \tau_{xz}^2)}, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}. \quad (3.3)$$

Примем, что интенсивности тензора напряжения σ_i и тензора деформации ε_i при объемном напряженном состоянии связаны между собой той же зависимостью, что и напряжения и деформации в одномерной задаче, а именно [1]:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{3G(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G(\tau)}\right]d\tau -$$

$$-\int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_i(\tau)]\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \quad (3.4)$$

где $C(t,\tau)$ — мера ползучести материала,

t — координата времени,

τ_1 — время приложения нагрузки,

$G(t)$ — мгновенный модуль сдвига материала,

$f[\sigma_i(t)]$ — некоторая функция от $\sigma_i(t)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, получаемая из опыта.

Функция $f[\sigma_i(t)]$ должна удовлетворять условию $f(1)=1$. В соотношении (3.4) принято также, что материал внешнего слоя трубы несжимаем.

Предположим, что мгновенный модуль сдвига постоянен и равен G_0, тогда соотношение (3.4) примет следующий вид:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{3G_0} - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_i(\tau)]\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau. \quad (3.5)$$

§ 4. Определение напряжений и деформаций во внешнем слое

Рассмотрим внешний слой трубы как полый цилиндр, по внутренней и внешней поверхностям которого действуют соответственно усилия $q(t)$ и P_2. Примем, что мгновенный модуль сдвига постоянен и равен G_0.

Пусть $\sigma_r^{(2)}(t,r)$ и $\sigma_\varphi^{(2)}(r,t)$— радиальное и поперечное напряжения во внешнем слое, $\varepsilon_r^{(2)}(r,t) = \dfrac{du^{(2)}}{dr}$, $\varepsilon_\varphi^{(2)}(r,t) = \dfrac{u^{(2)}}{r}$ —соответствующие деформации, выраженные через радиальное перемещение $u^{(2)}$. Осевой деформацией пренебрегаем.

Принимая, что материал внешнего слоя трубы несжимаем, получим

$$\frac{du^{(2)}}{dr}+\frac{u^{(2)}}{r}=0. \tag{4.1}$$

Из соотношения (4.1) следует

$$\varepsilon_r^{(2)}(r,t) = -\varepsilon_\varphi^{(2)}(r,t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t), \tag{4.2}$$

где $\alpha(t)$ — пока неизвестная функция только времени t.

Из соотношений (3.3) и (4.2) находим

$$\varepsilon_i^{(2)}(t)=\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t), \tag{4.3}$$

где $\varepsilon_i^{(2)}(t)$ — интенсивность тензора деформации материала внешнего слоя трубы.

Неизвестную функцию $\alpha(t)$ можно определить, пользуясь граничными условиями задачи:

$$\sigma_r^{(2)}(r_{12},t) = q(t),\ \sigma_r^{(2)}(r_2,t)=p_2. \tag{4.4}$$

Из уравнений (3.1) получим

$$\sigma_r^{(2)}(r,t) - \sigma_\varphi^{(2)}(r,t) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i^{(2)}(t), \tag{4.5}$$

где $\sigma_i^{(2)}(t)$ — интенсивность тензора напряжений материала внешнего слоя трубы.

Внося (4.5) в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r^{(2)}}{dr}+\frac{\sigma_r^{(2)}-\sigma_\varphi^{(2)}}{r}=0, \tag{4.6}$$

и интегрируя ее в пределах от r_{12} до r, получим

$$\sigma_r^{(2)}(r,t)= q(t)-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{r_{12}}^{r}\frac{\sigma_i^{(2)}(x,t)}{x}dx. \tag{4.7}$$

Полагая в (4.7) $r=r_2$ и принимая во внимание (4.4), находим

$$q(t)=P_2+\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{r_{12}}^{r_2}\frac{\sigma_i^{(2)}(x,t)}{x}dx. \tag{4.8}$$

Подставляя значение $\varepsilon_i^{(2)}(t)$ из (4.3) в (3.5), получим для $\sigma_i^{(2)}(t)$ следующее выражение:

$$\sigma_i^{(2)}(t)-3G^{(2)}\int_{\tau_1}^{t} f\left[\sigma_i^{(2)}(\tau)\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=3G^{(2)}\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t), \tag{4.9}$$

где $G^{(2)}=\mathrm{const}$ — модуль сдвига материала внешнего слоя трубы.

Таким образом, задача определения напряжений и деформаций двухслойной цилиндрической трубы, находящейся под воздействием внутреннего и внешнего равномерных давлений, с учетом нелинейной ползучести внешнего слоя материала сводится к определению трех неизвестных функций: $\sigma_i^{(2)}(t)$, $\alpha(t)$ и $q(t)$.

Функцию $\sigma_i^{(2)}$ можно определить, интегрируя нелинейное интегральное уравнение (4.9), а $\alpha(t)$ и $q(t)$ — пользуясь соотношением (4.8) и условиями совместной работы двух слоев цилиндрической трубы.

Точное решение нелинейного интегрального уравнения (4.9) связано с непреодолимой трудностью, поэтому это уравнение будем решать способом последовательных приближений. Решение будем искать в форме

$$\sigma_i^{(2)}(t) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{i,n}^{(2)}(t), \tag{4.10}$$

где

$$\sigma_{i,0}^{(2)}(t) = 3G^{(2)} \frac{r_{12}^2}{r^2} \alpha(t), \tag{4.11}$$

$$\sigma_{i,1}^{(2)}(t) = 3G^{(2)} \frac{r_{12}^2}{r^2} \alpha(t) + 3G^{(12)} \int_{\tau_1}^{t} f\left[\sigma_{i,0}^{(2)}(\tau)\right] \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{4.12}$$

$$\sigma_{i,n}^{(2)}(t) = 3G^{(2)} \frac{r_{12}^2}{r^2} \alpha(t) + 3G^{(2)} \int_{\tau_1}^{t} f\left[\sigma_{i,n-1}^{(2)}(\tau)\right] \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{4.13}$$

Пользуясь классическими методами теории интегральных уравнений, можно при довольно общих ограничениях для функций $f[\sigma_i^{(2)}]$ доказать, что эти последовательные приближения равномерно сходятся к $\sigma_i^{(2)}(t)$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{i,n}^{(2)}(t) = \sigma_i^{(2)}(t)$ представляет собою решение уравнения (4.9).

Отметим, что в общем случае отыскание этим методом последовательных приближений связано с большими трудностями. Поэтому при решении практических задач можно ограничиваться двумя первыми приближениями, так как они дают достаточно хорошие результаты.

Полагаем, что $f[\sigma^{(2)}]$ является степенной функцией вида

$$f[\sigma^{(2)}] = k_1\sigma^{(2)} + k_2[\sigma^{(2)}]^m, \tag{4.14}$$

Здесь $\sigma^{(2)}$ — напряжение материала внешнего слоя трубы,
k_1, k_2, m — некоторые постоянные параметры, определяемые из опыта, при этом

$$f(1) = k_1 + k_2 = 1.$$

Такой вид функции $f[\sigma^{(2)}]$ характерен тем, что он обладает достаточной общностью и хорошо описывает экспериментальные кривые ползучести при высоких напряжениях $\left(\sigma^{(2)} > \frac{R}{2}\right)$ для ряда материалов, как, например, бетон [5] и др.

Заметим, что если в зависимости (4.14) параметр k_2 мал, то функция $f[\sigma^{(2)}]$ будет характеризовать кривые ползучести материала, обладающего слабой нелинейностью.

В рассмотренном случае имеем

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma^{(2)}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \\ &\varepsilon_1 = \varepsilon^{(2)}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{(2)}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

где $\varepsilon^{(2)}$ — линейная деформация материала внешнего слоя трубы.

Пользуясь соотношениями (4.15) и (3.2) выражения (4.14) можно записать в виде

$$f[\sigma_i^{(2)}] = k_1\sigma_i^{(2)} + k_2[\sigma_i^{(2)}]^m. \tag{4.16}$$

Тогда первое приближение уравнения (4.9) примет вид

$$\sigma_{i,1}^{(2)}(t) = 3G^{(2)}\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t) +$$

$$+ 3G^{(2)}\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}k_1\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(\tau) + k_2\left[3G^{(2)}\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(\tau)\right]^m\right\}\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{4.17}$$

Из (4.8) и (4.10) следует

$$q(t) = P_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{r_{12}}^{r}\lim_{n\to\infty}\sigma_{i,n}^{(2)}(x,t)\frac{dx}{x}. \tag{4.18}$$

Подставляя (4.17) в (4.18) и принимая $n = 1$, получим для определения $\alpha(t)$ следующее интегральное уравнение

$$\alpha(t) = a_1[q(t) - P_2] -$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}k_1\alpha(\tau) + b_1[\alpha(\tau)]^m\right\}\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{4.19}$$

где

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3G^{(2)}}\frac{\beta^2}{\beta^2-1},$$

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = \frac{[3G^{(2)}]^m}{m}\frac{\beta^2}{\beta^2-1}\frac{\beta^{2m}-1}{\beta^{2m}}k_2, \\ &\beta = \frac{r_2}{r_{12}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Из уравнения (4.19) нужно исключить неизвестную функцию $q(t)$. Для этого достаточно воспользоваться условиями совместной работы двух слоев трубы.

Условия совместности радиальных перемещений в соприкасающихся поверхностях двух слоев цилиндрической трубы будут

$$u^{(2)}\Big|_{r=r_{12}} = u^{(1)}\Big|_{r=r_{12}}. \tag{4.21}$$

В силу соотношений (2.3) и (4.2) из (4.21) получим

$$q(t) = a_2 + b_2\alpha(t), \tag{4.22}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{2P_1}{[1-\nu^{(1)}]\,\delta^2 + 1 + \nu^{(1)}}, \\ b_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}E^{(1)}\frac{\delta^2-1}{[1-\nu^{(1)}]\,\delta^2 + 1 + \nu^{(1)}}, \\ \delta &= \frac{r_{12}}{r_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Подставляя значение $q(t)$ из (4.22) в (4.19), находим

$$\alpha(t) = A - \\ - B\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}k_1\alpha(\tau) + b_1[\alpha(\tau)]^m\right\}\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau. \tag{4.24}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a_1(a_2-P_2)}{1-a_1b_2}, \\ B &= \frac{1}{1-a_1b_2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Уравнение (4.24) опять будем решать способом последовательных приближений. Решение будет

$$\alpha(t) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n(t), \tag{4.26}$$

где

$$\alpha_0 = A, \tag{4.27}$$

$$\alpha_1(t) = A - B\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}k_1\alpha_0 + b_1[\alpha_0]^m\right\}\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \tag{4.28}$$

$$\alpha_n(t) = A - \\ - B\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}k_1\alpha_{n-1}(\tau) + b_1[\alpha_{n-1}(\tau)]^m\right\}\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,dt. \tag{4.29}$$

Здесь можно построить формулу, дающую приближенное значение для $\alpha(t)$, непосредственно через меру ползучести $C(t,\tau)$ при любом n.

Однако, при определении $\alpha(t)$, мы также ограничимся первым приближением, так как для $\sigma_i^{(2)}(t)$ было взято только первое приближение.

Первому приближению уравнения (4.24) можно придать следующий вид

$$\alpha_1(t) = A\{1 + B[3G^{(2)}k_1 + b_1A^{m-1}]\,C(t,\tau_1)\}. \tag{4.30}$$

Подставляя значение $\alpha_1(t)$ из (4.30) в (4.17), получим

$$\sigma_{i,1}^{(2)}(t) = 3G^2\frac{r_{12}^2}{r^2}\psi_1(t) + \\ + \sqrt{3}\,\frac{r_{12}^2}{r^2}\,\psi_2(t) + \sqrt{3}\,m\left(\frac{r_{12}}{r}\right)^{2m}\psi_3(t), \tag{4.31}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(t) &= A\{1 + B[3G^{(2)}k_1 + b_1A^{m-1}]\,C(t,\tau_1)\},\\ \psi_2(t) &= \frac{k_1}{\sqrt{3}}[3G^{(2)}]\int_{\tau_1}^{t}\psi_1(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau,\\ \psi_3(t) &= \frac{k_2}{\sqrt{3}\,m}[3G^{(2)}]^{m+1}\int_{\tau_1}^{t}[\psi_1(\tau)]^m\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Подставляя (4.31) в формулу (4.7) и пользуясь соотношениями (4.22) и (4.30), получим следующее выражение для радиального напряжения $\sigma_r^{(2)}$ во внешнем слое трубы:

$$\sigma_r^{(2)}(r,t) = a_2 + \left[b_2 - \frac{3G^{(2)}}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\right]\psi\ (t) - \\ -\left(1 - \frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\psi_2(t) - \left[1 - \left(\frac{r_{12}}{r}\right)^{2m}\right]\psi_3(t). \tag{4.33}$$

Пользуясь формулами (4.5), (4.31) и (4.33), для поперечного напряжения $\sigma_\varphi^{(2)}$ во внешнем слое трубы находим

$$\sigma_\varphi^{(2)}(r,t) = a_2 + \left[b_2 - \frac{3G^{(2)}}{\sqrt{3}}\left(1 - 3\frac{r_{12}^2}{r_2}\right)\right]\psi_1(t) - \\ -\left(1 - 3\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\psi_2(t) - \left[1 - (1+2m)\left(\frac{r_{12}}{r}\right)^{2m}\right]\psi_3(t). \tag{4.34}$$

Исходя из (4.2) и учитывая (4.30) получим для деформации внешнего слоя трубы следующие выражения:

$$\varepsilon_r^{(2)}(r,t) = -\varepsilon_\varphi^{(2)}(r,t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r_{12}^2}{r^2}\psi_1(t). \tag{4.35}$$

Из (4.33) и (4.34) следует, что значения напряжений $\sigma_r^{(2)}(r,t)$ и $\sigma_\varphi^{(2)}(r,t)$ в первом приближении характеризуются тремя временными параметрами, которые определяются с помощью заданной меры ползучести материала внешнего слоя трубы $C(t,\tau)$. А из (4.35) следует, что изменения деформаций $\varepsilon_r^{(2)}(r,t)$ и $\varepsilon_\varphi^{(2)}(r,t)$ во времени характеризуются лишь одним временным параметром.

Подставляя значение $q(t)$ из (4.22) в соотношения (2.1), (2.2) и (2.3), найдем следующие выражения для напряжений и радиальных перемещений в материале внешнего слоя трубы

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r,t) &= \frac{1}{\delta^2-1}\left[\left(1-\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)P_1-\left(\delta^2-\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)(a_2+b_2\psi_1(t))\right], \\ \sigma_\varphi^{(1)}(r,t) &= \frac{1}{\delta^2-1}\left[\left(1+\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)P_1-\left(\delta^2+\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)(a_2+b_2\psi_1(t))\right], \\ u^{(1)}(r,t) &= \frac{r}{\delta^2-1}\left[\frac{1-\nu^{(1)}}{E^{(1)}}+\frac{1+\nu^{(1)}}{E^{(1)}}\left(\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\right][P_1-a_2-b_2\psi_1(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

§ 5. Определение напряжений и деформаций во внешнем слое с учетом нелинейной ползучести и изменяемости мгновенного модуля сдвига материала

Рассмотрим общий случай, когда мгновенный модуль сдвига зависит от времени t, т. е.

$$G^{(2)} = G^{(2)}(t). \tag{5.1}$$

Подставляя значение $\varepsilon_i^{(2)}(t)$ из (4.3) в (3.4), получим

$$\sigma_i^{(2)}(t) - 3G^{(2)}(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{\sigma_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right]+\right.$$

$$\left.+f\left[\sigma_i^{(2)}(\tau)\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau = 3G^{(2)}(t)\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t). \tag{5.2}$$

Пользуясь соотношением (4.16), можно этому уравнению придать следующий вид:

$$\sigma_i^{(2)}(t)-3G^{(2)}(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{\sigma_i^{(2)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[k_1\sigma_i^{(2)}(\tau)+k_2\left(\sigma_i^{(2)}(\tau)\right)^m\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau =$$

$$= 3G^{(2)}(t)\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t). \tag{5.3}$$

Первое приближение этого уравнения будет

$$\sigma_{i,1}^{(1)}(t) = 3G^{(2)}(t)\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(t) +$$

$$+ 3G^{(2)}(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}(\tau)\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right] +\right.$$

$$+\left[3G^{(2)}(\tau)\,k_1\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(\tau) +\right.$$

$$\left.\left.+ k_2\left(3G^{(2)}(\tau)\frac{r_{12}^2}{r^2}\alpha(\tau)\right)^m\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau. \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (4.18) и принимая $n=1$, получим для определения $\alpha(t)$ следующее интегральное уравнение

$$\alpha(t) = a_1(t)\,[q(t) - P_2] -$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}(\tau)\,\alpha(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right] +\right.$$

$$+ 3G^{(2)}(\tau)\,k_1\alpha(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} +$$

$$\left.+ b_1\left[3G^{(2)}(\tau)\,\alpha(\tau)\right]^m\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau, \tag{5.5}$$

где

$$a_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{3G^{(2)}(t)}\cdot\frac{\beta^2}{\beta^2-1},$$

$$b_1 = \frac{1}{m}\,\frac{\beta}{\beta^2-1}\,\frac{\beta^{2m}-1}{\beta^{2m}}\,k_2, \tag{5.6}$$

$$\beta = \frac{r_2}{r_{12}}.$$

Подставляя значение $q(t)$ из (4.22) в (5.5), находим

$$\alpha(t) = A(t) - B(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}(\tau)\,\alpha(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right] +\right.$$

$$\left.+ 3G^{(2)}(\tau)\,k_1\alpha(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} + b_1\left[3G^{(2)}(\tau)\,\alpha(\tau)\right]^m\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau, \tag{5.7}$$

где

$$A(t) = \frac{a_1(t)\,(a_2 - P_2)}{1 - a_1(t)\,b_2},$$

$$B(t) = \frac{1}{1 - a_1(t)\,b_2}. \tag{5.8}$$

a_2, b_2 — определяются соотношениями (4.23).

Первому приближению уравнения (5.7) можно придать следующий вид

$$\alpha_1(t) = A(t) - B(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}(\tau)A(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right]+\right.$$

$$\left.+3G^{(2)}(\tau)k_1A(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}+b_1\left[3G^{(2)}(\tau)A(\tau)\right]^m\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau. \tag{5.9}$$

Подставляя значение $\alpha_1(t)$ из (5.9) в (5.4), получим

$$\sigma_{i,1}^{(2)}(t) = 3G^{(2)}(t)\frac{r_{12}^2}{r^2}\chi_1(t)+\sqrt{3}\,\frac{r_{12}^2}{r^2}\chi_2(t)+\sqrt{3}\,m\left(\frac{r_{12}}{r}\right)^{2m}\chi_3(t), \tag{5.10}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1(t) &= A(t) - B(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{3G^{(2)}(\tau)A(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}\right]+\right.\\
&\left.+3G^{(2)}(\tau)A(\tau)k_1\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}+b_1[3G^{2}(\tau)A(\tau)]^m\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau,\\
\chi_2(t) &= \frac{G^{(2)}(t)}{\sqrt{3}}\int_{\tau_1}^{t}\chi_1(\tau)\left\{3G^{(2)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{3G^{(2)}(\tau)}+k_1C(t,\tau)\right]\right\}d\tau,\\
\chi_3(t) &= \frac{k_2G^{(2)}(t)}{\sqrt{3}\,m}\int_{\tau_1}^{t}[\chi_1(\tau)]^m[3G^{(2)}(\tau)]^m\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Подставляя (5.10) в формулу (4.7) и пользуясь соотношениями (4.22) и (5.9) получим следующее выражение для радиального напряжения $\sigma_r^{(2)}(r,t)$ во внешнем слое трубы:

$$\sigma_r^{(2)}(r,t) = a_2+\left[b_2-\frac{3G^{(2)}(t)}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\right]\chi_1(t)-$$

$$-\left(1-\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\chi_2(t)-\left[1-\left(\frac{r_{12}}{r}\right)^{2m}\right]\chi_3(t). \tag{5.12}$$

Пользуясь формулами (4.5), (5.10) и (5.12), для поперечного напряжения $\sigma_\tau^{(2)}(r,t)$ материала во внешнем слое трубы находим

$$\sigma_\tau^{(2)}(r,t) = a_2+\left[b_2-\frac{3G^{(2)}(t)}{\sqrt{3}}\left(1-3\,\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\right]\chi_1(t)-$$

$$-\left(1-3\,\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)\chi_2(t)-\left[1-(1+m)\left(\frac{r_{12}}{r}\right)^{2m}\right]\chi_3(t). \tag{5.13}$$

Исходя из (4.2) и учитывая (6.9), получим для деформации внешнего слоя трубы следующие выражения

$$\varepsilon_r^{(2)}(r, t) = -\varepsilon_\varphi^{(2)}(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r_{12}^2}{r^2}\chi_1(t). \tag{5.14}$$

Подставляя значение $q(t)$ из (4.22) в соотношения (2.1), (2.2) и (2.3), найдем следующие выражения для напряжений и радиальных перемещений в материале внешнего слоя трубы

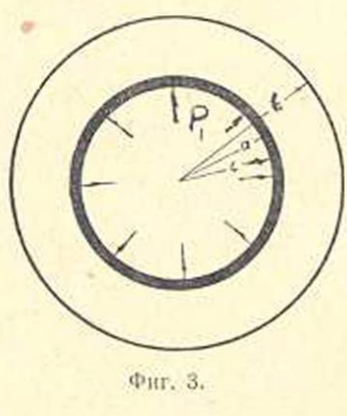
$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r, t) &= \frac{1}{\delta^2-1}\left[\left(1-\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)P_1 - \left(\delta^2-\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)(a_2+b_2\chi_1(t))\right],\\
\sigma_\varphi^{(1)}(r, t) &= \frac{1}{\delta^2-1}\left[\left(1+\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)P_1 - \left(\delta^2+\frac{r_{12}^2}{r^2}\right)(a_2+b_2\chi_1(t))\right],\\
u^{(1)}(r, t) &= \frac{r}{\delta^2-1}\left[\frac{1-\nu^{(1)}}{E^{(1)}} + \frac{1+\nu^{(1)}}{E^{(1)}}\left(\frac{r_{12}}{r}\right)^2\right][P_1-a_2-b_2\chi_1(t)].
\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

В частном случае, когда $G^{(2)}(t) = G^{(2)} = \text{const}$, формулы (5.10)—(5.15) тождественно совпадают с формулами (4.31)—(4.36).

§ 6. Железобетонная труба

В качестве приложения вышеизложенной теории, рассмотрим железобетонную трубу, находящуюся под воздействием внутреннего равномерного давления с учетом нелинейной ползучести бетона. Железобетонную трубу будем рассматривать состоящей из двух слоев: из арматуры и бетона. При решении этой задачи будем для общности считать эти цилиндры толстостенными, хотя обычно для облегчения расчетов арматуру считают тонкостенной.

Обозначим наружный и внутренний радиусы арматуры через a и c, бетона—b и a, причем $c < a < b$ (фиг. 3), радиальное и поперечное напряжения в арматуре — σ_{ar} и $\sigma_{a\varphi}$, соответствующие деформации — ε_{ar} и $\varepsilon_{a\varphi}$, радиальное перемещение — u_a. Аналогично, для бетона соответственно обозначим $\sigma_{бr}$, $\sigma_{б\varphi}$, $\varepsilon_{бr}$, $\varepsilon_{б\varphi}$, и $u_б$.



Фиг. 3.

Рассмотрим следующий численный пример.

Пусть характеристики меры ползучести бетона будут [1]

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4{,}82}{\tau} + 0{,}9\right)\left[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau)}\right]10^{-5}\,\frac{см^2}{кг}, \tag{6.1}$$

причем

$G_\tau = 0{,}7{,}10^5$ $кг/см^2$; $E_a = 2\cdot 10^6$ $кг/см^2$; $\nu_a; = 0{,}3$; $\tau_1 = 28$ дням; $\beta = \dfrac{b}{a} = 1{,}5$; $\delta = \dfrac{c}{a} = 1{,}003$, где

$G_б$ — модуль сдвига бетона,

E_a — модуль деформации арматуры,

ν_a — коэффициент Пуассона арматуры.

Для функции $f[\sigma_б]$ примем следующие выражения:

$$f[\sigma_б] = 0{,}99\ \sigma_б + 0{,}01\ \sigma^2, \tag{6.2}$$

где $\sigma_б$— напряжение бетона.

Деформации бетона в точках $r = a$ и $r = b$ согласно (4.35) будут выражаться следующими формулами:

$$\varepsilon_{бr}(a,\ t) = -\varepsilon_{б\varphi}(a,\ t) = 1{,}3885\cdot 10^{-5}\ P_1\{1 +$$

$$+ (2{,}4148 + 0{,}0594\ P_1([1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}]\}, \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{бr}(b,\ t) &= 0{,}4444\ \varepsilon_{б\varphi}(a,\ t), \\ \varepsilon_{б\varphi}(b,\ t) &= 0{,}4444\ \varepsilon_{б\varphi}(a,\ t). \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Из соотношений (6.3) получим

$$\frac{\varepsilon_{бr}(a,\ t)}{\varepsilon_{бr}(a,\ \tau_1)} = \frac{\varepsilon_{б\varphi}(a,\ t)}{\varepsilon_{б\varphi}(a,\ \tau_1)} =$$

$$= 1 + (2{,}4148 + 0{,}0594\ P_1)\,[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}], \tag{6.5}$$

где $\varepsilon_{бr}(a,\ \tau_1)$ и $\varepsilon_{б\varphi}(a,\ \tau_1)$ — радиальное и поперечное деформации бетона в начальный момент времени $t = \tau_1$.

Отсюда следует, что начальные деформации в бетоне $\varepsilon_{бr}(a,\ \tau_1)$ и $\varepsilon_{б\varphi}(a,\ \tau_1)$ с течением времени под влиянием ползучести возрастают, причем при $t = \infty$ получают свои предельные значения

$$\frac{\varepsilon_{бr}(a,\ \infty)}{\varepsilon_{бr}(a,\ \tau_1)} = \frac{\varepsilon_{б\varphi}(a,\ \infty)}{\varepsilon_{б\varphi}(a,\ \tau_1)} = 1 + (2{,}4148 + 0{,}0594\ P_1). \tag{6.6}$$

Радиальное перемещение арматуры в точках $r = a$ согласно (4.38) будет

$$u_a(a,\ t) = -aP_1\{13{,}2233 + (33{,}5796 + 0{,}8093\ P_1)\,[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}]. \tag{6.7}$$

Отсюда найдем

$$\frac{u_a(a,\ t)}{u_a(a,\tau_1)} = 1 + \frac{33{,}5796 + 0{,}8093\ P_1}{13{,}2233}\,[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}], \tag{6.8}$$

где $u_a(a,\ \tau_1)$ — радиальное перемещение арматуры в начальный момент времени.

Из (6.8) следует, что начальное радиальное перемещение в арматуре $u_a(a,\ \tau_1)$ с течением времени возрастает.

Для радиальных напряжений бетона и арматуры при $r = a$ получим

$$\sigma_{бr}(a,\ t) = q(t) = 1{,}0812\,P_1 + (0{,}20\ 3 + 0{,}0049\,P_1)\,[1 - e^{-0{,}026(t-\tau_1)}], \tag{6.9}$$

$$\sigma_{ar}(a,\ t) = -q(t). \tag{6.10}$$

Отсюда непосредственно следует

$$\frac{\sigma_{бr}(a, t)}{\sigma_{бr}(a, \tau_1)} = \frac{\sigma_{ar}(a, t)}{\sigma_{ar}(a, \tau_1)} =$$

$$= 1 + \frac{0{,}2013 + 0{,}0049\, P_1}{1{,}0812}\left[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}\right], \tag{6.11}$$

где $\sigma_{бr}(a, \tau_1)$ и $\sigma_{ar}(a, \tau_1)$ — радиальные напряжения бетона и арматуры в начальный момент времени $t = \tau_1$.

Отсюда следует, что начальные радиальные напряжения в бетоне $\sigma_{бr}(a, \tau_1)$ и в арматуре $\sigma_{ar}(a, \tau_1)$ с течением времени под влиянием ползучести возрастают, причем при $t = \infty$. получают свои предельные значения:

$$\frac{\sigma_{бr}(a, \infty)}{\sigma_{бr}(a, \tau_1)} = \frac{\sigma_{ar}(a, \infty)}{\sigma_{ar}(a, \tau_1)} = 1 + \frac{0{,}2013 + 0{,}0049\, P_1}{1{,}0812}. \tag{6.12}$$

Аналогично для поперечных напряжений арматуры и бетона при $r = a$ получим

$$\sigma_{a\varphi}(a, t) = 332{,}834 - 360{,}958\, P_1 -$$

$$-(67{,}201 + 0{,}1431\, P_1)\left[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}\right] P_1, \tag{6.13}$$

$$\sigma_{б\varphi}(a, t) = 4{,}9728\, P_1 + (3{,}8763 + 0{,}0953\, P_1)\left[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}\right] P_1 +$$

$$+ 8{,}1018\cdot 10^5 P_1 \int_{\tau_1}^{t} \left\{1 + (2{,}4148 + 0{,}0594\, P_1\left[1 - e^{-0{,}026\,(\tau-\tau_1)}\right]\right\} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau +$$

$$+ 0{,}2759\cdot 10^5 P_1^2 \int_{\tau_1}^{t} \left\{1 + (2{,}4148 +\right.$$

$$\left. + 0{,}0594\, P_4)\left[1 - e^{-0{,}026\,(\tau-\tau_1)}\right]\right\}^2 \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau. \tag{6.14}$$

Значения интегралов, входящих в формулу (6.14), можно определить, пользуясь численным интегрированием. Для простоты примем, что бетон старый, тогда можно написать

$$C(t, \tau) = 0{,}9\left[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau)}\right] 10^{-5}. \tag{6.15}$$

Подставляя значение $C(t, \tau)$ из (6.15) в (6.14) и интегрируя, получим

$$\sigma_{б\varphi}(a, t) = 4{,}9728\, P_1 - (12{,}4475 + 2{,}2629\, P_1 +$$

$$+ 0{,}0748\, P_1^2 + 0{,}0006\, P_1^3)\left[1 - e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)}\right] P_1 +$$

$$+ (0{,}3839 + 0{,}0585\, P_1 + 0{,}0019\, P_1^2 + 0{,}00016\, P_1^3 (t - \tau_1)\, e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)} -$$

$$-(1{,}0193 + 0{,}0501\, P_1 + 0{,}0006\, P_1^2)\, P_1^2\left[e^{-0{,}026\,(t-\tau_1)} - e^{-0{,}052\,(t-\tau_1)}\right]. \tag{6.16}$$

Для предельного случая, когда $t=\infty$ имеем

$$\frac{\sigma_{a\varphi}(a,\infty)}{\sigma_{a\varphi}(a,\tau_1)}=1+\frac{67{,}201+0{,}1431\,P_1}{360{,}958\,P_1-332{,}834}P_1, \tag{6.17}$$

$$\frac{\sigma_{б\varphi}(a,\infty)}{\sigma_{б\varphi}(a,\tau_1)}=1-\frac{12{,}4475+2{,}2629\,P_1+0{,}0748\,P_1^2+0{,}0006\,P_1^3}{4{,}9728}, \tag{6.18}$$

где $\sigma_{a\varphi}(a,\tau_1)$ и $\sigma_{б\varphi}(a,\tau_1)$ — поперечные напряжения арматуры и бетона в начальный момент времени $t=\tau_1$.

Отсюда следует, что начальные поперечные напряжения в арматуре $\sigma_{a\varphi}(a,\tau_1)$ с течением времени под влиянием ползучести возрастают, а в бетоне $\sigma_{б\varphi}(a,\tau_1)$ — затухают, причем эти возрастания и затухания зависят от значения внутреннего давления P_1.

Подставляя значения $\sigma_{ar}(a,t)$ и $\sigma_{a\varphi}(a,t)$ из (5.10) и (5.13) в (4.5), получим

$$\sigma_a(a,t)=288{,}241-311{,}663\,P_1-(58{,}022+0{,}1243\,P_1)\left[1-e^{-0{,}026(t-\tau_1)}\right]. \tag{6.19}$$

Отсюда непосредственно получим

$$\frac{\sigma_a(a,\infty)}{\sigma_a(a,\tau_1)}=1+\frac{58{,}022+0{,}1243\,P_1}{311{,}663\,P_1-288{,}241}. \tag{6.20}$$

Подставляя значения $\sigma_{бr}(a,t)$ и $\sigma_{б\varphi}(a,t)$ из (6.9) и (6.16) в (4.5), аналогично найдем

$$\begin{aligned}\sigma_б(a,t)&=3{,}3701\,P_1-(10{,}954+1{,}9601\,P_1+\\&+0{,}0648\,P_1^2+0{,}00053\,P_1^3)\left[1-e^{-0{,}026(t-\tau_1)}\right]P_1+\\&+(0{,}3324+0{,}0506\,P_1+0{,}0017\,P_1^2+\\&+0{,}00014\,P_1^3)\,P_1(t-\tau_1)\,e^{-0{,}026(t-\tau_1)}-\\&-(0{,}8827+0{,}0434\,P_1+0{,}00053\,P_1^2)\,P_1^2\cdot\\&\cdot\left[e^{-0{,}026(t-\tau_1)}-e^{-0{,}052(t-\tau_1)}\right].\end{aligned} \tag{6.21}$$

Отсюда

$$\frac{\sigma_б(a,\infty)}{\sigma_б(a,\tau_1)}=1-\frac{10{,}954+1{,}9601\,P_1+0{,}0648\,P_1^2+0{,}00053\,P_1^3}{3{,}3701}. \tag{5.22}$$

Таким образом получаем, что начальные напряжения в бетоне $\sigma_б(a,\tau_1)$ с течением времени уменьшаются, а в арматуре $\sigma_a(a,\tau_1)$ — возрастают, причем эти уменьшения и возрастания зависят от внутреннего давления P_1.

Аналогично можно получить значения напряжений бетона в точках $r=b$ и арматуры в точках $r=c$.

В заключение отметим, что этим методом можно решать ряд других задач нелинейной теории ползучести, которые явятся содержанием наших следующих сообщений.

Институт математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 10 XI 1957

Ն. Խ. Հարությունյան, Մ. Մ. Մանուկյան

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՍՈՂՔԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է տարբեր նյութերից կազմված գլանային խողովակի հավասարակշռությունը՝ նյութի սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխության հաշվառումով, երբ խողովակը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված ներքին և արտաքին ճնշման ազդեցության տակ։ Այսպիսի խողովակները լայն կիրառում ունեն տեխնիկայում որպես կարևոր կոնստրուկտիվ էլեմենտներ։ Խնդրի լուծման ժամանակ գլանային խողովակը դիտարկվում է որպես տարբեր նյութերից կազմված երկու գլաններ, որոնք իրենց մակերևույթների հպման կետերում լրիվին կպչում են իրար։ Ենթադրվում է, որ խողովակի գլաններից մեկի նյութի սողքը, համեմատած մյուս գլանի նյութի սողքի հետ, աննշան է և կարելի է այն արհամարհել։

Այս խնդրի ընդհանուր լուծումը նյութի գծային սողքի հաշվառումով տրված է [1]-ում։ Այս աշխատության մեջ բերվում է խնդրի լուծումը նյութի ոչ գծային սողքի հաշվառումով, ընդ որում օգտագործվում է [1]-ի մեջ շարադրված ոչ գծային սողքի տեսությունը։

Համասեռ գլանային թաղանթի հավասարակշռության խնդրի լուծումը, նյութի ոչ գծային սողքի հաշվառումով, երբ թաղանթը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին ճնշման ազդեցության տակ, տրված է Մ. Ի. Ռոզովսկու կողմից [2] հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով։ Այդ նույն մեթոդը կիրառվում է նաև մեր մոտ՝ վերը նշված խնդիրը լուծելու համար։

Սողքի ոչ գծային տեսության հիմնական հավասարումները, տարածական լարվածային վիճակի դեպքում, ստանալու համար օգտագործված է փոքր առաձգական պլաստիկ դեֆորմացիաների տեսությունը։ Ընդունվում է, որ լարվածության տենզորի և դեֆորմացիայի տենզորի ինտենսիվությունների միջև, ծավալային լարվածային վիճակի դեպքում, գոյություն ունի նույն առնչությունը, ինչ որ՝ լարվածության և դեֆորմացիայի միջև միաչափ խնդրի դեպքում։

$f(\sigma)$ *ֆունկցիան, որը բնորոշում է սողքի դեպքում տվյալ նյութի լարվածության և դեֆորմացիայի միջև եղած ոչ գծային առնչությունը, վերցված է ամենաընդհանուր տեսքով*

$$f(\sigma) = k_1\sigma + k_2\sigma^m,$$

որտեղ k_1, k_2, m — *հաստատուն պարամետրներ են, որոնք որոշվում են փորձից և բավարարում են* $k_1 + k_2 = 1$ *պայմանին։*

Որպես առաջադրված տեսության կիրառություն քննարկվում է երկաթբետոնե խողովակի հավասարակշռությունը, երբ խողովակը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված ներքին ճնշման ազդեցության տակ բետոնի ոչ գծային սողքի հաշվառումով։ Երկաթբետոնե խողովակը դիտարկվում է կազմված երկու շերտերից՝ արմատուրայից և բետոնից։

Վերջում քննարկվում է մի թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат. М., 1952.
2. *Розовский М. И.* О нелинейных интегральных уравнениях ползучести бетонной цилиндрической оболочки, находящейся под внешним давлением. Известия ОТН АН СССР (находится в печати) 1957.
3. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
5. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия ВНИИГ, том 49, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 6, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Карапетян

Влияние анизотропии на деформации ползучести бетона

За последние годы анизотропия материала все больше стала обращать внимание исследователей. Дело в том, что подавляющее большинство реальных материалов анизотропны. Бетон, как материал, также является анизотропным, однако этот вопрос, насколько известно автору, пока что никем не изучался.

Автором в течение последних трех лет проводились исследования влияния анизотропии на прочностные и деформативные свойства бетона. Часть этих исследований, касающаяся влияния анизотропии на кубиковую и призменную прочности бетона, опубликована [2]. В данной работе, в основном, приводятся результаты исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона, а также влияния этого фактора на деформативность бетона при кратковременном загружении, и его усадку.

Как известно, в Советском Союзе марку бетона (R) принято определять на стандартных кубиках размерами $20\times20\times20$ *см*, а призменную прочность $(R_{пр})$ и деформативность — на призматических образцах такого же сечения, но высотой не менее 60 *см*.

К. И. Безухов пишет: «При установке на пресс опытных бетонных балок и кубов их следует располагать так, чтобы направление штыкования и направление силы соответствовали бы реальным условиям укладки бетона и его работы в конструкции» [1]. Необходимо отметить, что до сих пор этому вопросу не уделяли должного внимания.

По стандарту, за марку бетона принимается наименьшая прочность кубиков, которая соответствует случаю приложения сжимающей силы, параллельно слоям укладки бетонной смеси в форму. Что же касается призменной прочности и упругих характеристик бетона, то для их определения пока что единая методика соответствующими стандартами не предусмотрена. По этой причине каждому исследователю приходится по-своему решать этот вопрос.

Возможны два метода изготовления и испытания призм, которые отличаются с точки зрения положения форм при укладке и уплотнении бетона, а также направления сжимающей силы к слоям бетона при испытании образцов. Одни исследователи изготавливают призмы, укладывая и уплотняя бетон при вертикальном положении форм, а другие — при горизонтальном положении форм. Что касается испытания, то в обоих случаях призмы испытываются в вертикальном положении, т. е. в первом случае сжимающая сила направлена перпендикулярно слоям бетона, а во втором случае — параллельно. Но, ввиду отсутствия соответствующих исследований, до сих пор ставился знак равенства между призменными прочностями и другими характеристиками бетона при обоих этих видах испытания.

Между тем, проведенные нами специальные исследования показывают, что если в части кубиковых прочностей влиянием направления укладки бетона и действующей силы при испытании можно пренебречь, то этого нельзя делать в отношении призменных прочностей и характеристик деформативности бетона. Оказывается, что анизотропия бетона имеет существенное влияние как на призменную прочность, так и на деформативность бетона как при кратковременном, так и длительном загружениях.

Исследования влияния анизотропии бетона на его прочность и деформативность были поставлены над двумя составами туфобетона. Составы бетонов приведены в табл. 1.

Составы бетона *Таблица 1*

№№ составов	Порода заполнителя		Осадка по конусу в *см*	В/Ц	Расход материалов на $м^3$ бетона в *кг*				Объемный вес бетона в возрасте 28 дней в $т/м^3$
	песок	щебень			цемент	песок	щебень	вода	
1	туф	туф	4—5	1,43	261	469	716	374	1,82
2	туф	туф	2	1,29	265	542	730	343	1,88

В качестве вяжущего для состава № 1 был применен пуццолановый портланд-цемент, а для состава № 2— шлако-портланд-цемент. Опыты были поставлены над призматическими образцами сечениями 10×10 *см* и $12{,}5 \times 12{,}5$ *см* разной высоты и кубиками, размерами ребер 10 и 20 *см*.

Из бетона состава № 1 были изготовлены три серии образцов, а из бетона состава № 2—одна серия. Каждая серия образцов изготавливалась из одного замеса бетона. При этом каждая серия включала в себя образцы двух, а иногда и трех разновидностей. Эти разновидности следующие:

1. Форму призмы заполняют бетоном и вибрируют при вертикальном положении. Сжимающая сила направлена перпендикулярно слоям бетона.

2. Форму призмы заполняют бетоном и вибрируют при наклонном положении (под углом 45°). Сжимающая сила направлена под углом 45° к слоям бетона.

3. Форму призмы заполняют бетоном и вибрируют в горизонтальном положении. Сжимающая сила направлена параллельно слоям бетона.

Вместе с призматическим образцом были соответственно изготовлены и испытаны кубики.

Все образцы с момента освобождения от форм, которое производилось на третий день, хранились в помещении при температуре $t^{\circ} = 21 \pm \pm 6^{\circ}$ и влажности $p = 70 \pm 10\%$.

Результаты испытания кубиков и призм в различных возрастах приведены в табл. 2. Данные этой таблицы показывают, что показатели прочности образцов из бетона состава № 1, приготовленных из трех различных замесов, весьма близки, что очень важно для правильного обобщения результатов опытов.

Первое, что необходимо отметить по данным табл. 2, это то, что прочности кубиков при испытании их как перпендикулярно, так и параллельно слоям бетона весьма близки. Поэтому их можно считать практически одинаковыми, тем более, что нет определенной закономерности, чтобы во всех случаях прочность при одном виде испытания была бы больше или меньше другой.

Однако в части призменных прочностей имеет место определенная закономерность, которая подтверждается всеми испытаниями.

Из табл. 2 видно, что призменная прочность при испытании призм параллельно слоям бетона всегда больше, чем при испытании перпендикулярно слоям бетона. При этом разница в призменных прочностях настолько значительна, что уже не может вызвать сомнения в существовании такой закономерности.

Поскольку кубиковые прочности при упомянутых двух способах испытания практически одинаковы, относительные призменные прочности $\left(\frac{R_{пр}}{R}\right)$ также значительно отличаются.

Более подробно результаты исследования влияния анизотропии на призменную прочность бетона приведены в нашей статье [2].

Для исследования влияния анизотропии на деформативность бетона при кратковременном загружении были испытаны призмы размерами $12{,}5\times12{,}5\times60$ *см* и $10\times10\times40$ *см*.

Испытания призматических образцов производились по следующей методике: загружение образцов производилось ступенями по $0{,}1\ R_{пр}$ до нагрузки соответствующей 0,8—0,9 от призменной прочности. Под каждой ступенью погрузки образец выдерживался в течение одной минуты. После выдержки под нагрузкой $0{,}8-0{,}9\ R_{пр}$ приборы, измеряющие деформации, снимались, и образец доводился до разрушения.

Кривые деформаций для различных возрастов бетона состава № 1 приведены на фиг. 1, 2, 3 и 4.

Из фиг. 1, 2, 3 и 4 видно, что во всех случаях кривые деформаций призм, испытанных параллельно слоям бетона, располагались выше, чем кривые деформаций призм, испытанных перпендикулярно слоям бетона. Что же касается кривой деформаций призм, испытанных под углом 45° к слоям бетона, то она занимает промежуточное положение.

Таким образом, деформации туфобетона при испытании призм перпендикулярно слоям бетона значительно больше, чем при испытании призм параллельно слоям бетона. Так например, при $\sigma=50$ *кг/см*^{2} отношение деформаций туфобетона при испытании призм перпендикулярно слоям бетона к деформациям призм, испытанных параллельно слоям

Таблица 2

Влияние анизотропии на кубиковую и призменную прочности бетона. (кубики размерами 20×20×20 *см*, призмы размерами 12,5×12,5×60 *см*)

№№ составов бетона	Направление сжимающей силы при испытании по отношению к слоям бетона	Серия образцов	Кубиковая и призменная прочности бетона в возрасте											
			28 дней			3 месяца			19 месяцев			3 года		
			R	$R_{пр}$	$\frac{R_{пр}}{R}$	R	$R_{пр}$	$\frac{R_{пр}}{R}$	R	$R_{пр}$	$\frac{R_{пр}}{R}$	R	$R_{пр}$	$\frac{R_{пр}}{R}$
	Перпендикулярно		137	75	0,55	—	135	—	—	—	—	—	—	—
	Под углом 45°	I—54	—	85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Параллельно		127	115	0,91	—	160	—	—	—	—	—	—	—
	Перпендикулярно		—	—	—	—	—	—	—	130*)	—	250**)	169**)	0,68
1	Под углом 45°	II—54	—	—	—	—	—	—	—	127*)	—	—	—	—
	Параллельно		125	—	—	200	—	—	—	190*)	—	225**)	208**)	0,92
	Перпендикулярно		125	—	—	186	—	—	—	—	—	—	—	—
	Под углом 45°	III—54	111	—	—	184	—	—	—	—	—	—	—	—
	Параллельно		115	—	—	195	—	—	—	—	—	—	—	—
2	Перпендикулярно	I—55	116	77	0,66	—	—	—	224	137**)	0,61	—	—	—
	Параллельно		104	103	0,99	—	—	—	236	195**)	0,83	—	—	—

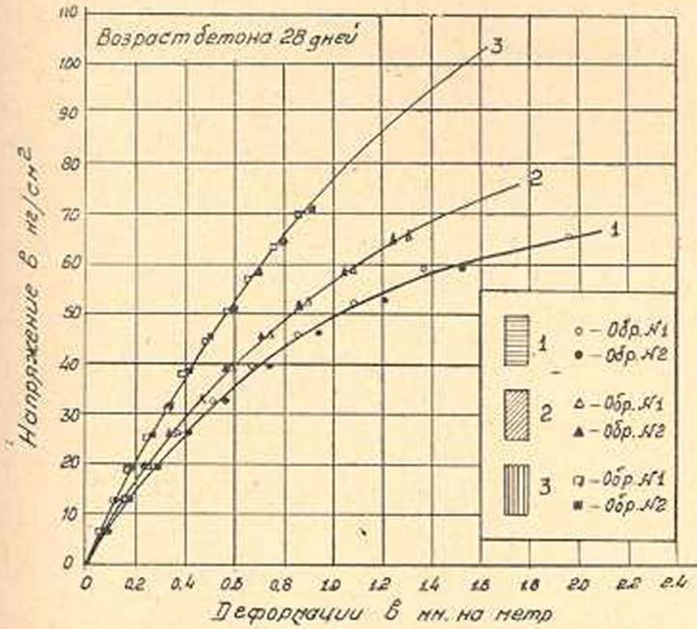
*) Испытание произведено в возрасте 16 месяцев.

**) Кубики размерами 10×10×10 *см*, призмы размерами 10×10×40 *см*.

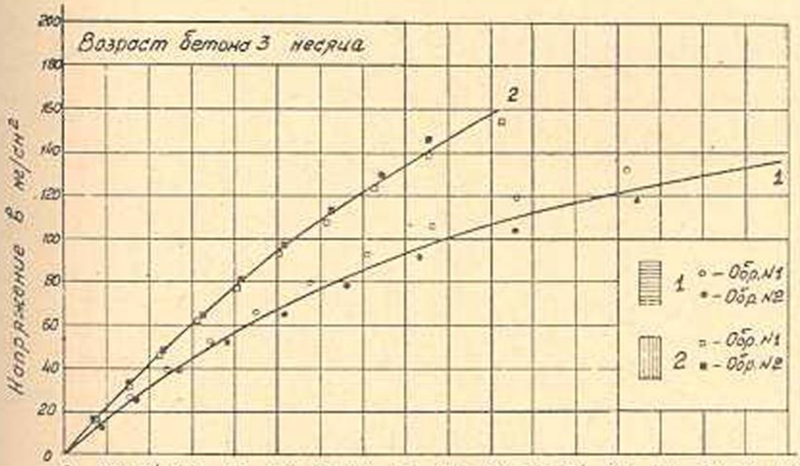
Таблица 3

Влияние анизотропии на модуль деформации бетона

№№ составов бетона	Направление сжимающей силы при испытании по отношению к слоям бетона	Модуль деформации в $m/см^2$ в возрасте											
		28 дней			3 месяца			16 месяцев			3 года		
		$\sigma = 0$	$\sigma = 0,5\ R_{пр}$		$\sigma = 0$	$\sigma = 0,5\ R_{пр}$		$\sigma = 0$	$\sigma = 0,5\ R_{пр}$		$\sigma = 0$	$\sigma = 0,5\ R_{пр}$	
			по хорде	по касат.		по хорде	по касат.		по хорде	по касат.		по хорде	по касат.
	Перпендикулярно	81	59	41	87	67	51	84	70	54	80	70	55
1	Под углом 45°	85	65	48	—	—	—	84	67	54	—	—	—
	Параллельно	108	85	66	114	96	82	105	91	79	93	82	76
2	Перпендикулярно	105	78	55	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Параллельно	126	93	66	—	—	—	—	—	—	—	—	—



Фиг. 1.

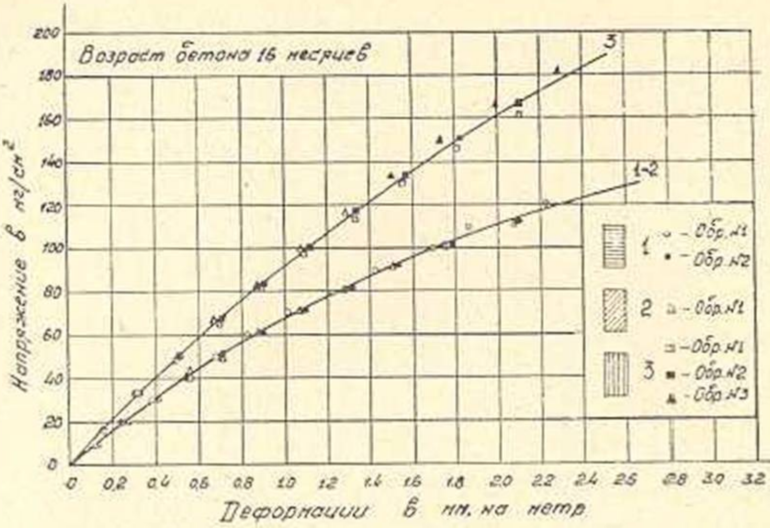


Фиг. 2.

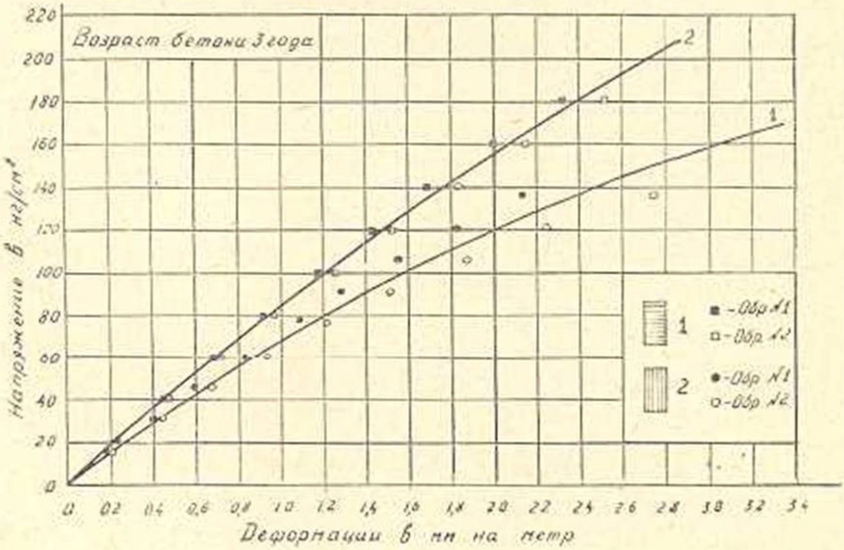
бетона, для возраста бетона 28 дней составляет 1,8, для возрастов 3 и 16 месяцев — 1,4 и, наконец, для возраста бетона 3 года — 1,25.

Аналогичная закономерность деформаций наблюдалась также при испытании образцов из туфобетона состава № 2. Результаты этих опытов приведены на фиг. 5.

В табл. 3 приведены значения модулей деформаций для указанных выше случаев испытания туфобетона (составов № 1 и № 2). По данным этой таблицы модуль деформации туфобетона при испытании призм параллельно слоям бетона, как и следовало ожидать, значительно больше,



Фиг. 3.

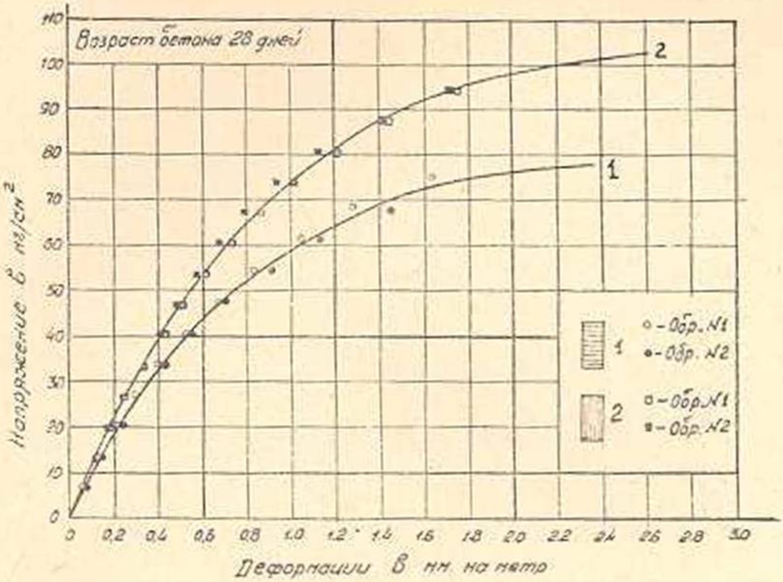


Фиг. 4.

чем модуль деформации бетона при испытании призм перпендикулярно слоям бетона.

Таким образом анизотропия бетона оказывает существенное влияние также на деформативность бетона при кратковременном загружении.

На основании табл. 3 получается, что модуль упругости бетона в большой мере зависит от направления сжимающей силы к слоям бетона. С этой точки зрения возникает необходимость уточнения нормативных значений модулей упругости. Очевидно в нормах по проектированию бетонных и железобетонных конструкций для каждой марки бетона необходимо предусмотреть не одно значение модуля упругости, а два значе-

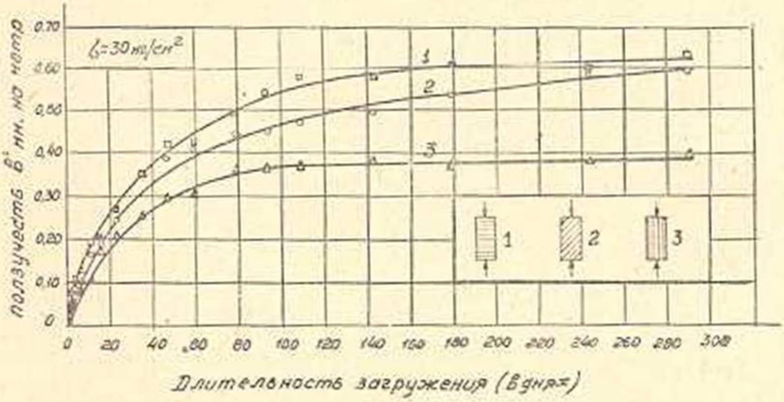


Фиг. 5.

ния, соответственно испытанию призм перпендикулярно и параллельно слоям бетона.

Для исследования влияния анизотропии на ползучесть туфобетона первая серия опытов была поставлена над бетоном состава № 1.

Под длительную нагрузку были поставлены призматические образцы размерами 12,5×12,5×60 *см* перпендикулярно, параллельно и под углом 45° к слоям бетона. Из каждой разновидности загружались по 2 образца. Возраст бетона к моменту загружения составлял 28 дней. Образцы были загружены при напряжении 30 *кг/см*².



Фиг. 6.

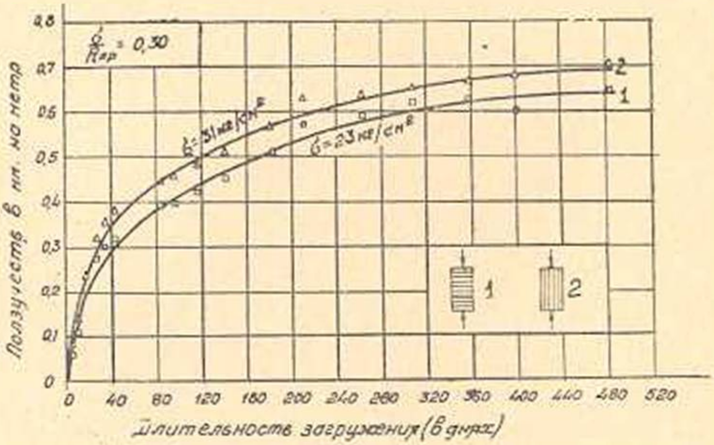
Измерение деформаций загруженных образцов сопровождалось одновременным определением объемных деформаций на незагруженных образцах-близнецах.

На фиг. 6 приведены опытные кривые ползучести туфобетона. И, как мы видим, кривые по отношению друг к другу расположились по той же закономерности, как и кривые деформации бетона при кратковременном загружении (фиг. 1, 2, 3, 4 и 5).

На основании фиг. 6 ползучесть бетона в призмах, загруженных перпендикулярно слоям бетона, на 63% больше, чем ползучесть бетона в призмах, загруженных параллельно слоям бетона. Кривая же ползучести призм, загруженных под углом 45° к слоям бетона занимает промежуточное положение.

Вторая серия опытов по исследованию влияния анизотропии на ползучесть бетона была поставлена над туфобетоном состава № 2. Опыты были поставлены по аналогичной методике лишь с той разницей, что в этом случае образцы были загружены только параллельно и перпендикулярно слоям бетона.

Кроме этого, в этих опытах образцы загружались не численно одинаковым напряжением, а одинаковым относительным напряжением $\left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}}\right) = 0{,}30$. Полученные по данным этих опытов кривые ползучести нанесены на фиг. 7. Согласно фиг. 7, при одинаковом относительном напряжении, деформации ползучести образцов, загруженных как параллельно, так и перпендикулярно слоям бетона, практически одинаковы.



Фиг. 7.

Как известно, до напряжений 0,5 от предела прочности бетона между деформациями ползучести и напряжениями существует линейная зависимость [3, 7]. Учитывая это не трудно придти к выводу, что и данные опыты над бетоном состава № 2 подтверждают, что, при одинаковом напряжении, деформации ползучести образцов, загруженных перпендикулярно слоям бетона, значительно больше деформаций ползучести образцов, загруженных параллельно слоям бетона.

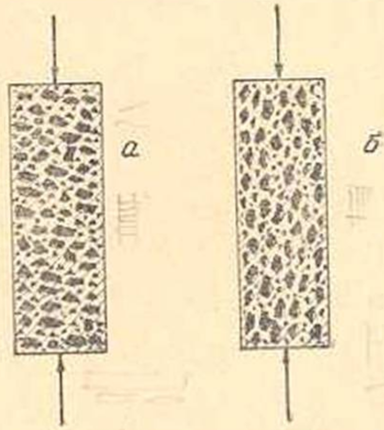
Таким образом, анизотропия бетона оказывает существенное влияние как на призменную прочность бетона, так и на его деформационные свойства как при кратковременном, так и длительном загружениях.

Известно, что при укладке бетонной смеси и его уплотнении в нем происходит внутреннее расслаивание [6]. В результате этого часть излишней воды отжимается наверх, а часть скопляется непосредственно под частицами заполнителя, образуя множество водяных прослоек. В дальнейшем, в процессе твердения бетона вода из указанных мест постепенно испаряется, в результате чего под частицами заполнителя остаются воздушные поры. Эти места именно и являются слабым местом бетона и естественно должны оказать отрицательное влияние как на прочность, так и на деформативность бетона.

Отрицательное действие явления внутреннего расслаивания бетона на его прочность при разрыве весьма убедительно доказано опытами Н. Л. Мощанского [6]. В этих опытах, при испытании бетонного цилиндра на разрыв, последний происходил по нижнему контакту заполнителя с цементным камнем и подавляющее большинство зерен гравия оставалось на верхней половине цилиндра.

Анизотропия бетона обусловлена внутренним расслаиванием бетона. К такому выводу приводят результаты наших опытов. Рассмотрим структуру бетона в призмах при двух случаях их загружения.

На фиг. 8а показана структура бетона в призмах, которые были испытаны перпендикулярно слоям бетона, а на фиг. 8б — параллельно В обоих случаях указаны образовавшиеся в результате внутреннего расслаивания бетона под частицами заполнителя водяные прослойки, которые после испарения воды превращаются в воздушные поры.



Фиг. 8.

На фиг. 8 необходимо обратить внимание на положение воздушных пор по отношению к направлению сжимающей силы. Дело в том, что образовавшиеся в результате внутреннего расслаивания бетона, под частицами заполнителя, водяные прослойки, и в дальнейшем на их месте воздушные поры, в случае призм, испытываемых перпендикулярно слоям бетона, больше ослабляют их сечение, чем в случае призм, испытываемых параллельно слоям бетона. По этой причине, при одинаковой нагрузке во всех случаях, фактическое напряжение (усилие на единицу площади сечения призмы с вычетом площади воздушных пор) в сечениях призм с воздушными порами будет больше в призмах, испытываемых перпендикулярно слоям бетона. Это обстоятельство и приводит к тому, что в этом случае призменная прочность бетона значительно меньше, а деформации, наоборот, больше. Это подтверждается и тем, что, когда в наших опытах призмы, соответствующие упомянутым выше двум случаям испытания, при кратковременном загружении, были загружены длительной нагрузкой при одинаковом относительном напряжении (фиг. 7), деформации ползучести практически оказались одинаковыми. Правда, на фиг. 7 кривая ползучести призм, загруженных параллельно слоям бетона, расположилась несколько выше кривой ползучести призм, загруженных перпендикулярно слоям бетона. При этом разница в деформациях настолько незначительна, что она не дает основания для вывода, что кривые ползучести в данном случае должны были именно расположиться по отношению друг к другу так, как получились в этих опытах. Однако, вообще говоря, не исключена возможность существования такой закономерности. При этом мы исходим из физической природы ползучести бетона.

Проведенные нами ранее исследования показали, что ползучесть бетона при сжатии до напряжений 0,55 — 0,6 от предела прочности бетона является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня, так и капиллярных явлений [3, 4]. В данном случае, при одинаковом относительном напряжении, ползучесть за счет вязкости геля в призмах, загруженных перпендикулярно и параллельно слоям бетона, будет одинаковой. А что касается ползучести за счет капиллярных явлений, которая зависит от интенсивности испарения воды из бетона, то она будет больше в случае призм, загруженных параллельно слоям бетона. Объясняется это тем, что в этом случае водяные прослойки под частицами заполнителя, которые образуются благодаря внутреннему расслаиванию бетона, можно сказать, почти параллельны наружной поверхности призм, что ускоряет процесс испарения, а следовательно и ползучесть бетона. Такое объяснение вытекает и из исследований влияния анизотропии на усадку бетона, результаты которых будут приведены ниже.

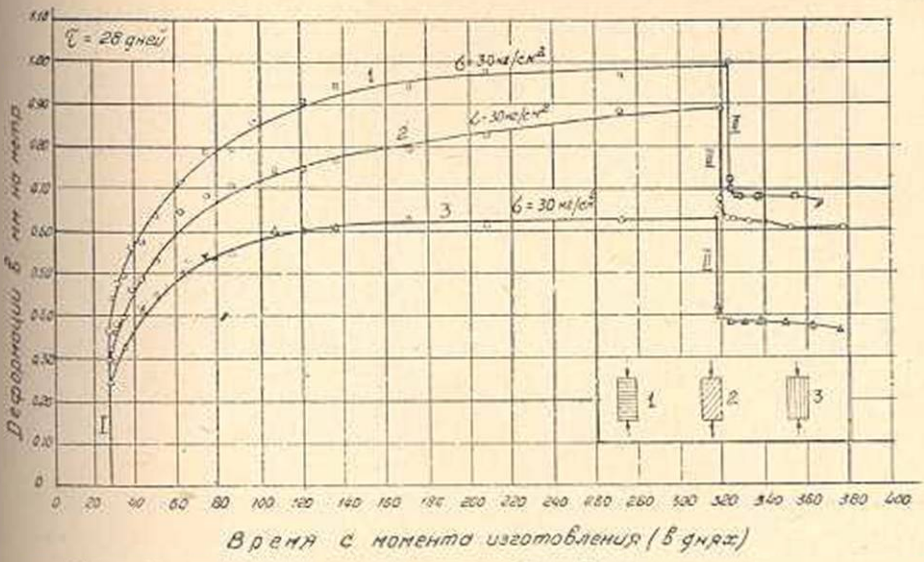
Объяснение анизотропии бетона внутренним расслаиванием бетона подтверждается также нашими опытами, при которых велись наблюдения за восстановлением как упругой деформации, так и деформаций ползучести после разгрузки бетона.

Образцы серии 1-54 после нахождения под длительной нагрузкой (290 дней) были разгружены. При этом наблюдалось общеизвестное явление частичного мгновенного восстановления упругой деформации и далее затухающее частичное восстановление деформаций ползучести. Результаты этих опытов приведены на фиг. 9. Одновременно соответствующие данные сведены в табл. 4.

На основании данных табл. 4, как и следовало ожидать, как упругая деформация, так и деформация ползучести после разгрузки, при образцах, загруженных параллельно слоям бетона, относительно больше восстанавливаются, чем при образцах, загруженных перпендикулярно слоям бетона.

Как известно, при напряжениях, не превышающих половину предела прочности бетона, заполнитель последнего деформируется лишь упруго [7]. Поэтому при разгрузке бетона упруго деформированный заполнитель стремится восстановить свою первоначальную форму, однако этому препятствует затвердевший во времени цементный камень. По этой причине имеет место не полное, а частичное восстановление деформаций.

При рассмотрении фиг. 8 нетрудно прийти к выводу, что деформации



I- мгновенные деформации при нагружении II- мгновенные деформации при разгрузке

Фиг. 9.

восстановления после разгрузки бетона будут больше именно в призмах, загруженных параллельно слоям бетона.

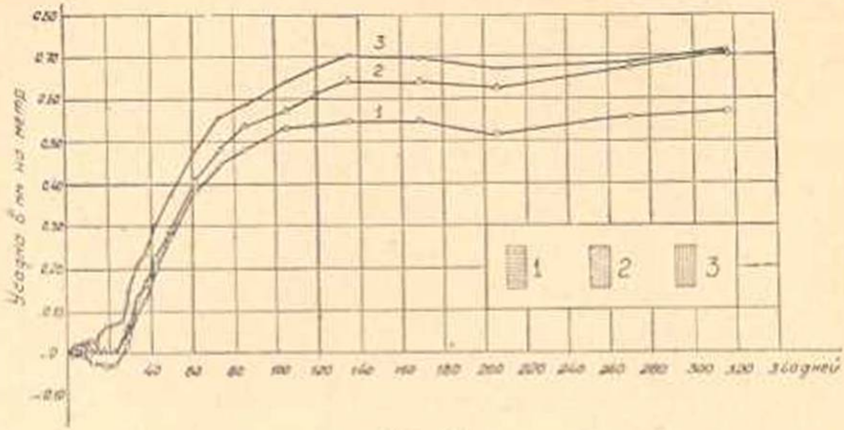
Как уже отмечалось, параллельно с изучением ползучести бетона велись исследования влияния анизотропии на усадку бетона.

Таблица 4

Направлен. сжимающей силы по отношению к слоям бетона при испытании	Упругая деформация при загружении в *мм* на *метр*	Ползучесть в *мм* на *метр* при длительности загружения 290 дней	Абсолютное значение восстанавл. части упругой деформации в *мм* на *метр*	Абсолютное значение восстанавл. части деформации ползучести в *мм* на *метр*	Восстановление деформации в % от деформаций в процессе загружения	
					упругая	ползуч.
Перпендикулярно	0,365	0,635	0,28	0,045	77	7
Под углом 45°	0,295	0,595	0,215	0,065	73	10,9
Параллельно	0,245	0,38	0,205	0,045	83,5	11,8

Измерение усадочных деформаций было начато с суточного возраста бетона. На фиг. 10 приведены три кривые усадки бетона состава № 1. Кривая 1 соответствует тем призмам, которые изготавливались при вертикальном положении форм на виброплощадке. В этом случае, как и в проведенных нами ранее исследованиях, при аналогичном случае заполнения форм бетоном и вибрации, в начальный период имеет место набухание бетона, а затем усадка [5]. Период набухания в данном случае составляет 26 дней, после чего начинается интенсивная усадка.

Совсем иначе протекают объемные изменения тех призм, которые



Фиг. 10.

изготавливались при горизонтальном и под углом 45° положениях форм на виброплощадке. В этих случаях набухание бетона отсутствует и с первого же дня наблюдается усадка. Однако, в начальный период интенсивность усадки незначительна, но заметно возрастает на 22 и 26 день.

Характерным на фиг. 10 является также то, что кривая усадки призм, испытанных параллельно слоям бетона, расположилась выше, чем кривая усадки призм, испытанных перпендикулярно слоям бетона. А что касается кривой усадки призм, испытанных под углом 45° к слоям бетона, то она заняла промежуточное положение.

Такое расположение кривых, с нашей точки зрения, весьма закономерно и исходит из физической природы усадки бетона. При этом оно согласуется и с нашими опытными данными ползучести бетона, где аналогичное расположение кривых ползучести наблюдалось в том случае, когда образцы были загружены длительной нагрузкой не при численно одинаковом напряжении, а при одинаковом относительном напряжении (фиг. 7).

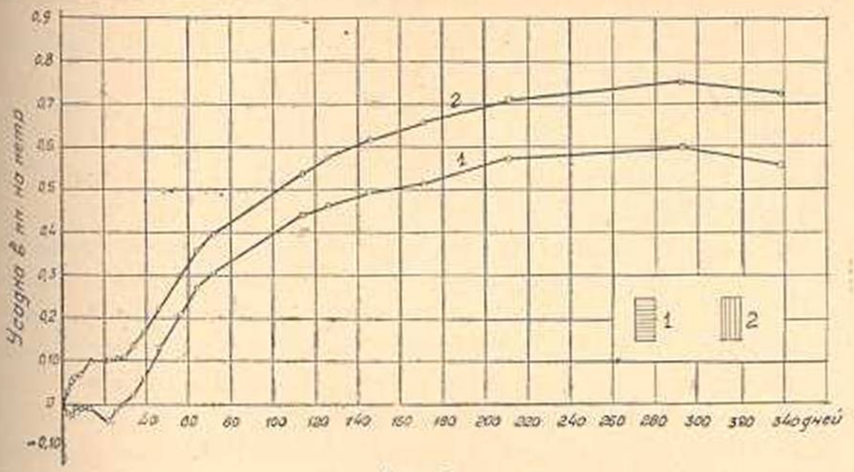
В части ползучести бетона мы уже дали соответствующее объяснение причин отмеченной закономерности. Что же касается усадки, то, согласно общеизвестной гипотезе, усадка бетона является следствием как физико-химических процессов, сопровождающих схватывание и твердение бетона, так и капиллярных явлений. Поэтому усадка, обусловленная капиллярными явлениями, как и ползучесть, будет больше в образцах, которые изготовлялись при горизонтальном положении форм, так как испарение воды из водяных прослоек под зернами заполнителя в этом случае протекает гораздо интенсивнее.

Отмеченные закономерности усадки в опытах над бетоном состава № 1 полностью подтвердились и опытами над бетоном состава № 2 (фиг. 11).

Таким образом, анизотропия бетона оказывает некоторое влияние и на усадку бетона.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Бетон является анизотропным материалом. Анизотропия бетона



Фиг 11.

вызвана внутренним расслаиванием, которое имеет место при укладке и уплотнении бетона.

2. Анизотропия бетона оказывает существенное влияние на призменную прочность бетона, благодаря чему призменная прочность при испытании призм параллельно слоям бетона значительно больше (до 50%), чем призменная прочность при испытании призм перпендикулярно слоям бетона.

3. Необходимо установить единую методику для определения призменной прочности бетона. Ввиду отсутствия таковой до сих пор каждый исследователь по-своему решал этот вопрос, не придавая значения направлению сжимающей силы к слоям бетона при испытании. Этим обстоятельством в основном, по-видимому, и следует объяснить то, что известные экспериментальные данные относительных призменных прочностей колеблются в довольно широких пределах.

4. Существующие эмпирические формулы для определения призменной прочности должны быть уточнены. Эти формулы построены на основании известных до сих пор экспериментальных данных, которые были выполнены по разной методике. При этом не исключена возможность что одни исследователи испытывали призмы перпендикулярно слоям бетона, а другие — параллельно.

5. Применение сборных колонн с точки зрения сопротивляемости нагрузкам более целесообразно, чем монолитных, так как сборные колонны бетонируются в горизонтальном положении и загружаются параллельно слоям бетона.

6. В существующих нормах по проектированию бетонных и железобетонных конструкций для каждой марки бетона предусмотрено одно значение призменной прочности, которое, по всей вероятности, в первую очередь было предусмотрено для монолитных колонн, однако в последующем в связи с развитием сборного железобетона распространено и на сборные колонны. Таким образом, на основании наших опытов можем утверждать, что до сих пор сборные колонны проектировались и изготавливались с большим запасом.

Необходимо в нормах для каждой марки бетона предусмотреть не одно, а два значения призменных прочностей:

а) для расчета монолитных колонн, с учетом их работы перпендикулярно слоям бетона,

б) для расчета сборных колонн, с учетом их работы параллельно слоям бетона.

7. Анизотропия бетона оказывает существенное влияние на деформативные свойства бетона при кратковременном загружении, благодаря чему модуль деформации бетона, при испытании призм параллельно слоям, значительно больше (до 44%), чем модуль деформации при испытании призм перпендикулярно слоям бетона. Это явление также должно найти соответствующее отражение в нормах.

8. Анизотропия бетона оказывает существенное влияние на деформации ползучести бетона. При одинаковых напряжениях ползучесть бетона в призмах, загруженных перпендикулярно слоям, до 63% больше ползучести в призмах, загруженных параллельно слоям бетона.

9. После разгрузки бетона, продолжительное время находившегося под нагрузкой, как упругая деформация, так и деформация ползучести при призмах, загружненных параллельно слоям, относительно больше восстанавливаются, чем при призмах, загруженных перпендикулярно слоям бетона.

10. Бóльшая призменная прочность бетона при испытании призм параллельно слоям, чем при испытании призм перпендикулярно слоям бетона, дает основание полагать, что и прочность бетона на растяжение в первом случае будет значительно больше.

11. Влияние анизотропии на усадку бетона незначительно.

12. Теории прочности, деформативности и ползучести бетона должны быть построены с учетом его анизотропии.

В заключение следует отметить, что, поскольку анизотропия оказывает существенное влияние на прочность, упругость и ползучесть бетона, необходимо в этом направлении провести широкие исследования. Эти исследования дадут возможность более рационально проектировать бетонные и железобетонные конструкции, об одной конкретной возможности которой, в части колонн, нами указывалось выше.

Исследования влияния анизотропии бетона на его прочность и деформативность были нами выполнены над легким бетоном, в частности туфебетоном. Надо полагать, что влияние анизотропии бетона, обусловленное внутренним расслаиванием бетона на прочность и деформативность тяжелого бетона будет еще больше. Этот вопрос, однако, требует специального исследования.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну и С. А. Амбарцумяну за советы в процессе проведения данных исследований.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 10 VIII 1957.

Կ. Ս. Կարապետյան

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածը նվիրված է անիզոտրոպիայի ազդեցությանը բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա, ինչպես կարճատև, այնպես էլ երկարատև բեռնվածության դեպքում։

Հոդվածում, հիմնականում, բերվում է հետազոտությունների այն մասը, որը վերաբերում է անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բետոնի դեֆորմատիվ հատկությունների վրա, ինչ վերաբերում է այդ գործոնի ազդեցությունը բետոնի ամրության վրա, ապա այն բերված էր [2]*—ում։*

Հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ բետոնի անիզոտրոպիան խոշոր ազդեցություն ունի ինչպես նրա սողքի դեֆորմացիաների, այնպես էլ նրա մյուս դեֆորմատիվ հատկությունների վրա։ Այսպես, օրինակ, այն դեպքում, երբ պրիզմայական նմուշները փորձարկվում են բետոնի շերտերին ուղղահայաց ուղղությամբ, ապա շնորհիվ անիզոտրոպիայի ազդեցության, սողքի դեֆորմացիաները $63^{0}/_{0}$*-ով մեծ են, քան այն դեպքում, երբ նրանք փորձարկվում են բետոնի շերտերին զուգահեռ ուղղությամբ։ Ինչ վերաբերվում է բետոնի ամրությանը, ապա այդ դեպքում տեղի ունի հակառակ պատկերը* [2]*։*

Հեղինակը բետոնի անիզոտրոպիան բացատրում է նրա կազմությամբ, որը տեղի ունի բետոնային շաղախի տեղադրման և խտացման ժամանակ։

Բանն նրանումն է, որ բետոնի տեղադրման և խտացման ժամանակ ավելցուկ ջրի մի մասը սեղմվում է վերև, իսկ մի մասն էլ հավաքվում բետոնի խճի հատիկների տակ բարակ թաղանթի ձևով։ Բետոնի ամրանալու պրոցեսում, այդ ջրային շերտերից ջուրը հետզհետե գոլորշիանում է, առաջացնելով օդային ծակոտիներ։ Օդային ծակոտիները ներկայացնում են բետոնի թույլ տեղը և բնական է, որ բացասական ազդեցություն են ունենում բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա։

Օդային ծակոտիների բացասական ազդեցությունը ավելի մեծ է պրիզմայական նմուշները շերտերին ուղղահայաց փորձարկելիս, այդ պատճառով էլ բետոնի ամրությունը ստացվում է ավելի փոքր, իսկ դեֆորմացիաները՝ մեծ։

Կատարված աշխատանքը թույլ է տալիս անելու մի շարք ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական եզրակացություններ, որոնցից հիմնականն այն է, որ բետոնի ամրության, սողքի և դեֆորմատիվ հատկությունների տեսությունները պետք է կառուցել, հաշվի առնելով նրա անիզոտրոպիան։

Անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բետոնի ամրության և նրա դեֆորմատիվ հատկությունների վրա, փորձարկված է թեթև բետոնի վրա, տվյալ դեպքում տուֆաբետոնի վրա։ Պետք է ենթադրել, որ անիզոտրոպիայի ազդեցությունը, որը կախված է բետոնի ներքին կազմությունից, բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա, ավելի մեծ կլինի ծանր բետոնի դեպքում։ Բայց այդ հարցը պահանջում է հատուկ ուսումնասիրություն։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Безухов К. С.* Испытание строительных конструкций и сооружений. Госиздат. лит. по стр-ву и арх-ре, 1954.
2. *Карапетян К. С.* Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. Доклады АН Армянской ССР, том XXIV, № 4, 1957.
3. *Карапетян К. С.* Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том VI, № 2, 1953.
4. *Карапетян К. С.* Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том IX, № 1, 1956.
5. *Карапетян К. С.* Экспериментальное исследование усадки туфобетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том III, № 1, 1950.
6. *Мощанский Н. А.* Плотность и стойкость бетонов. Госстройиздат, 1951.
7. *Улицкий И. И.* Ползучесть бетона. Гостехиздат Украинской ССР, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 6, 1957 Физико-математические науки

ФИЗИКА

Г. В. Бадалян

Вероятность регистрации заряженных частиц в системе магнитного масс-спектрометра с двумя камерами Вильсона

При изучении космических лучей методом магнитного анализа существенное значение имеет „светосила" прибора, т. е. вероятность регистрации частиц. Вероятность регистрации частиц W есть некоторая функция, вид которой определяется как физическими параметрами частиц (направление и величина импульса), так и геометрическими и физическими свойствами регистрирующей установки. Неучет этого фактора может, подчас, привести к большим ошибкам при физической интерпретации результатов эксперимента.

Ряд методов расчета „светосилы" для различных конструкций магнитных масс-спектрометров рассмотрен в работах [1], [2], [3], [4].

В 1952 г. в одной из лабораторий Арагацской Высотной станции было осуществлено совмещение магнитного масс-спектрометра с большой прямоугольной камерой Вильсона, заменяющей систему улавливающих фильтров [5], а с 1954 г. над магнитом была поставлена вторая аналогичная камера [6].

Нижняя камера дает возможность наблюдать характер остановок заряженных частиц, прошедших через магнитный масс-спектрометр (телескоп), а верхняя камера регистрирует поведение частицы до входа в телескоп. Несмотря на то, что рабочие объемы камер охватывают телесный угол установки полностью (фиг. 1), освещенные области камер, в силу выбранной системы освещения „на просвет", составляют лишь половину рабочего объема. Следовательно, снижается вероятность наблюдения следа заряженной частицы одновременно и в телескопе, и в камерах (особенно для траекторий с малым радиусом кривизны). Нас именно интересует расчет вероятности регистрации таких полноценных траекторий в нашем приборе. Для этой цели методы, приведенные в работах [1], [2], [3], [4], или непригодны, или неудобны. В работе [5] описывается оригинальный метод расчета для телескопа в совмещении с одной только нижней камерой, с некоторыми упрощениями (не учтены факторы щельности, углового распределения и т. д.). Настоящая работа является обобщением работы [5] на верхнюю камеру и дает полный графо-аналитический метод расчета „светосилы" для нашего нового прибора с учетом всех факторов*. Заранее отметим, что будем пренебрегать рассеянием частиц в установке.

1. Вывод общего выражения вероятности регистрации для телескопа

Рассмотрим в первую очередь задачу собственно для телескопа, а последовательно учтем все ограничивающие факторы.

Пусть a, b, l — геометрические размеры годоскопической системы счетчиков (фиг. 1). Частица может быть зарегистрирована, если ее траектория укладывается в параллелепипед, образованный крайними рядами счетчиков. В качестве параметров, однозначно определяющих положение траектории данного радиуса ρ в магнитном поле, мы выбираем x, y, φ, ψ, где x, y — линейные координаты точки выхода траектории из магнитного поля, φ — угол выхода из поля в плоскости магнитного отклонения, ψ — угол выхода в плоскости параллельной полю (фиг. 1).

Такой выбор параметров станет ясным из дальнейшего. Условимся углы считать положительными, если они отсчитываются по часовой стрелке.

Будем различать *дифференциальную* вероятность $w(\rho, \varphi, \psi)$, т. е. вероятность регистрации частицы с заданным радиусом траектории в магнитном поле ρ, и летящей в заданном направлении (φ, ψ), а также *полную* вероятность $W_n(\rho)$, т. е. суммарную вероятность регистрации частицы по всем дозволенным направлениям внутри телесного угла установки. И, так как по определению „светосила" есть не что иное, как произведение вероятности регистрации на площадь координатного рядя счетчиков: $s=a \cdot b \cdot w$, то соответственно будем иметь дифференциальную и полную „светосилы".

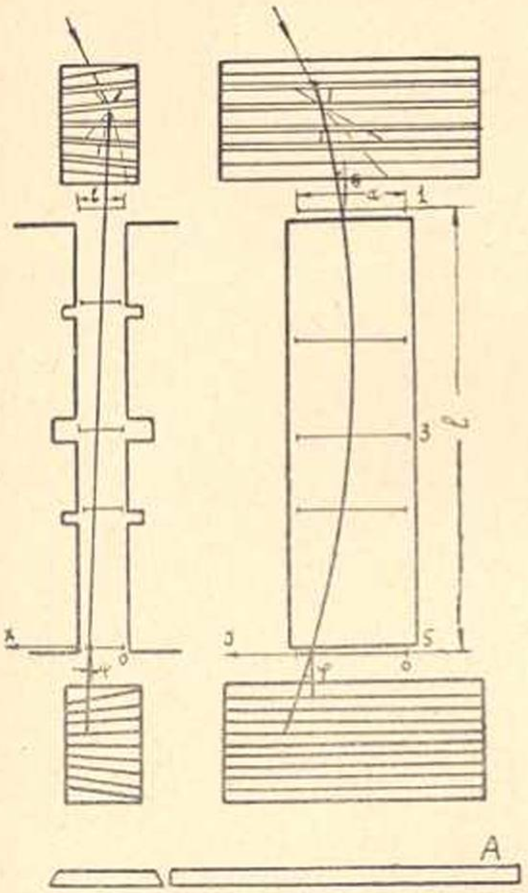
Нахождение вероятности регистрации сводится к вычислению вероятности события одновременного прохождения частицы через управляющие 1—3—5 ряды координатных счетчиков. Здесь мы имеем дело с двумя независимыми событиями [3]. Первое из них состоит в незадевании частицей полюсов магнита. Функцию вероятности этого события обозначим $w_1(\psi)$. Второе событие состоит в том, чтобы частица при ее движении от ряда 1 к ряду 5 в плоскости магнитного отклонения, не выходила из геометрии телескопа. Функцию вероятности этого события обозначим $w_2(\rho, \varphi)$. Следовательно

$$w=w_1 \cdot w_2. \tag{1}$$

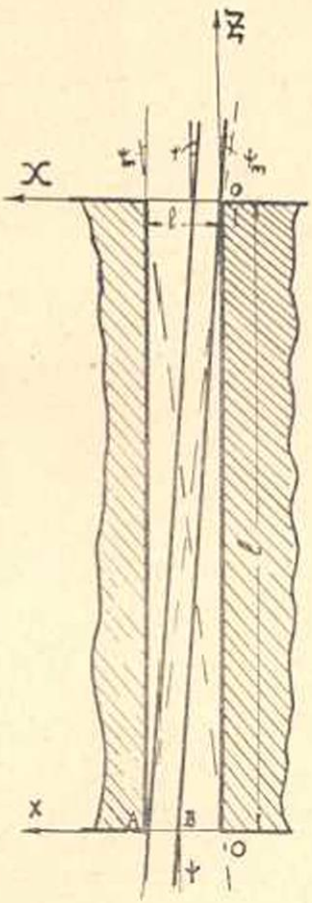
Рассмотрим функцую $w_1(\psi)$. Из фиг. 2 видно, что из пучка частиц, падающих на телескоп под углом ψ (или выходящих из него — задача симметричная), регистрируются (не задевают полюс) только

---

* Отметим, что этот метод пригоден для любых условий опыта: изменение рабочего объема камеры, смещение камеры относительно оси симметрии телескопа, а также для любой конструкции годоскопического устройства.



Фиг. 1. Общий вид установки $a = 26$ *см.* $b = 11{,}5$ *см* $l = 102{,}5$ *см.*



Фиг. 2. К выводу функции $w_1(\psi)$

те, которые попали на эффективный участок 5-го ряда AB. Следовательно функция вероятности будет пропорциональна AB:

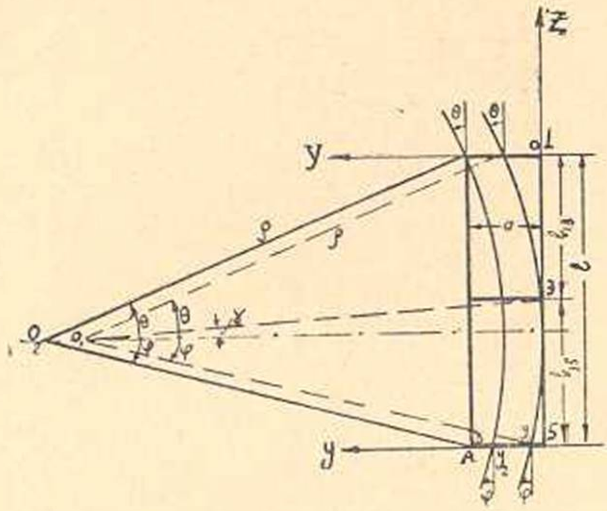
$$w_1 = \frac{AB}{AO} = \frac{AO - BO}{AO} = 1 - \frac{BO}{AO};$$

и т. к. $BO = l \operatorname{tg} \psi$; $AO = b$;

$$w_1(\psi) = 1 - \frac{l}{b} \operatorname{tg} \psi \tag{2}$$

где $$-\frac{b}{l} \leqslant \psi \leqslant \frac{b}{l}$$

Разберем функцию $w_2(\rho, \varphi)$. Из фиг. 3 видно, что из потока частиц с одинаковыми радиусами траекторий ρ, падающих под углом ϑ на телескоп (или, что то же самое, выходящих из него под углом φ), регистрируются только те, которые попали на участок $BC = y_2 - y_1$, следовательно функция вероятности будет пропорциональна этому эффективному участку $(y_2 - y_1)$:



Фиг. 3 К выводу функции $w_2(\rho, \varphi)$.

$$w_2(\rho,\varphi) = \frac{BC}{AO} = \frac{y_2 - y_1}{a}. \tag{3}$$

Все траектории с определенным радиусом и знаком кривизны имеют всего 4 возможных вида ориентации в магнитном поле. На фиг. 4 приведены все эти случаи а, б, в, г, причем каждый из них характеризуется определенным интервалом изменений φ. Ниже приведены соответствующие формулы для вычисления разности $y_2 - y_1$, которые получаются из простых геометрических соображений.

Случай а)

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \arcsin \frac{l_{35}}{\rho};$$

$$y_1 = \rho \cos\gamma - \rho\cos\varphi; \; y_2 = a - \rho(\cos\varphi - \cos\vartheta),$$

$$y_2 - y_1 = a - \rho(\cos\gamma - \cos\vartheta), \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \arcsin\left(\sin\varphi - \frac{l_{35}}{\rho}\right); \\ \vartheta &= \arcsin\left(\sin\varphi - \frac{l}{\rho}\right). \end{aligned}\right| \tag{4^1}$$

Случай б)

$$\arcsin \frac{l_{35}}{\rho} \leqslant \varphi \leqslant \arcsin \frac{l}{\rho};$$

$$y_1 = \rho\cos\gamma - \rho\cos\varphi; \; y_2 = a,$$

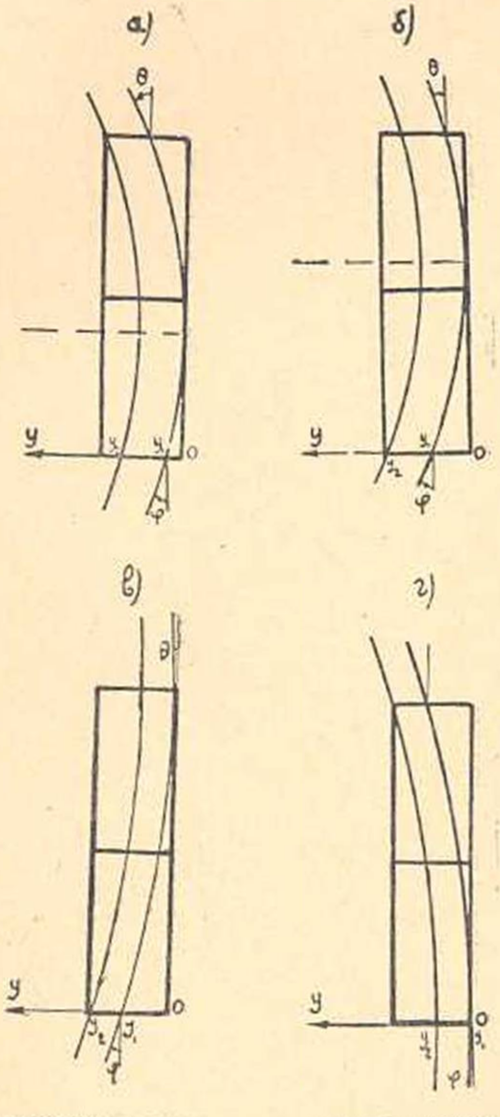
$$y_2 - y_1 = a - \rho(\cos\gamma - \cos\varphi), \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \arcsin\left(\sin\vartheta + \frac{l_{13}}{\rho}\right); \\ \vartheta &= \arcsin\left(\sin\varphi - \frac{l}{\rho}\right). \end{aligned}\right| \qquad (5^1)$$

Случай в)

$$\varphi_{\text{в}} \geqslant \varphi \geqslant \arcsin\frac{l}{\rho};^{*}$$



Фиг. 4. Возможные ориентации траекторий в магнитном поле.

---

* Предельное значение угла $\varphi_{\text{в})}$ определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} \rho \sin \varphi_{\text{в})} - \rho \sin \vartheta_{\text{в})} = l \\ \rho \cos \vartheta_{\text{в})} - \rho \cos \varphi_{\text{в})} = a \end{cases}$$ исключая $\vartheta_{\text{в})}$, получим $\varphi_{\text{в})} = \operatorname{arctg}\frac{a}{l} + \arcsin\frac{\sqrt{a^2+l^2}}{2\rho}$.

$$y_1 = \rho\cos\vartheta - \rho\cos\varphi; \; y_2 = a;$$

$$y_2 - y_1 = a - \rho(\cos\vartheta - \cos\varphi), \tag{6}$$

где
$$\vartheta = \arc\sin\left(\sin\varphi - \frac{l}{\rho}\right). \tag{6¹}$$

Случай г)

$$\varphi_{\text{г})} \leqslant \varphi \leqslant 0;*$$

$$y_1 = 0; \; y_2 = a + \rho(\cos\vartheta - \cos\varphi);$$

$$y_2 - y_1 = a - \rho(\cos\varphi - \cos\vartheta), \tag{7}$$

где
$$\vartheta = \arc\sin\left(\sin\varphi - \frac{l}{\rho}\right). \tag{7¹}$$

Таким образом, зная (2) и (3), мы можем определить по (1) дифференциальную вероятность регистрации. Магнитный масс-спектрометр, благодаря узкому телесному углу, обычно регистрирует вертикальную интенсивность, в связи с этим представляет интерес не дифференциальная, а полная вероятность регистрации частиц с заданным радиусом кривизны траектории. При пренебрежении всеми ограничивающими факторами будем иметь для телескопа:

$$W_n = \int\limits_{\Omega} w_1 w_2 \cos\beta \, d\omega, \tag{8}$$

где Ω — полный телесный угол, вырезаемый телескопом, β — зенитный угол выхода траектории из телескопа. При этом, $\cos\beta$ введен по тем соображениям, что дифференциальную интенсивность принято относить к единице площади, перпендикулярной траектории, а не к горизонтальной площадке.

Вычислим элемент телесного угла $d\omega$ на входе в телескоп (фиг. 5). Для общности задачи будем рассматривать зенитные углы входа и выхода частицы из поля α и β функциями своих ортогональных проекций. Взяв на горизонтальной плоскости произвольной высоты Z_0 элемент dS, имеем

$$d\omega = \frac{dS \,.\, \cos\alpha}{r^2} = \frac{dX \,.\, dY \cos\alpha}{r^2}. \tag{9}$$

Из простых геометрических соображений

$$r = \frac{Z_0}{\cos\alpha}; \; X = Z_0 \operatorname{tg}\psi; \; Y = Z_0 \operatorname{tg}\vartheta;$$

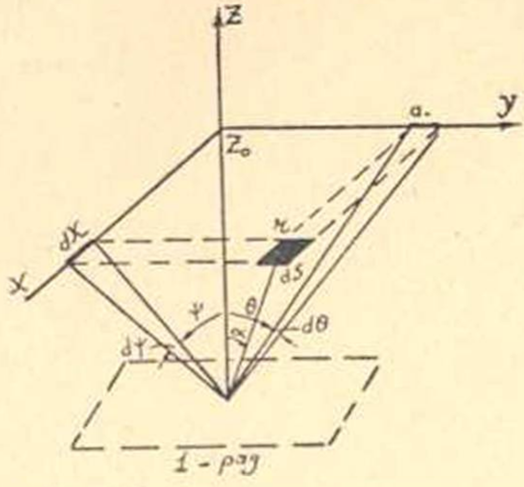
$$dX = Z_0 \sec^2\psi \, d\psi; \; dY = Z_0 \sec^2\vartheta \, d\vartheta.$$

Для удобства дальнейших вычислений выразим $d\vartheta$ через $d\varphi$:

---

* Предельный угол $\varphi_{\text{г})}$ из-за симметрии равен с обратным знаком углу $\vartheta_{\text{в}}$

$$\varphi_{\text{г})} = -\vartheta_{\text{в})} = -\arccos\left(\frac{a}{\rho} + \cos\varphi_{\text{в})}\right);$$



Фиг. 5. К выводу элемента телесного угла.

Из формулы $\sin\theta = \sin\varphi - l/\rho$ получим

$$d\theta = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\, d\varphi.$$

Далее, легко показать, что

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\psi + \operatorname{tg}^2\theta,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi+\operatorname{tg}^2\theta}}. \qquad (10)$$

Аналогичным образом на выходе телескопа

$$\operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}^2\psi + \operatorname{tg}^2\varphi,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi+\operatorname{tg}^2\theta}}. \qquad (11)$$

Так как для нашей установки $|\psi| < \frac{b}{l} \sim 6^0$, то $\operatorname{tg}^2\psi \leqslant 0{,}01$ мала по сравнению с $\operatorname{tg}^2\theta$ или $\operatorname{tg}^2\varphi$ и поэтому приближенно вместо (10) и (11) имеем:

$$\cos\alpha \approx \cos\theta \cos\psi \quad \text{и} \quad \cos\beta \approx \cos\varphi \,.\, \cos\psi. \qquad (12)$$

Окончательно:

$$d\omega = \cos\varphi \,.\, \cos\psi\, d\varphi \,.\, d\psi. \qquad (13)$$

2. Щельность

В нашем приборе, в координатных рядах между счетчиками, имеются узкие щели и попадание частицы в щель по крайней мере одного из управляющих рядов уже достаточно, чтобы она не регистрировалась [2]. Как видно из фиг. 6. эффективность координатного ряда равна

$$Q_i = \frac{d}{D\cos t_i} = \frac{q}{\cos t_i},$$

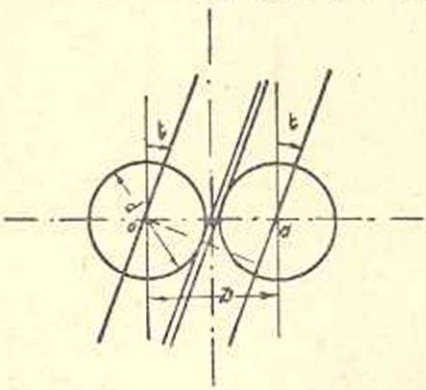
где $q = \frac{d}{D}$ — коэффициент щельности. Ясно, что при $\cos t \leqslant q$, $Q = 1$.

Соответствующие углы для 3-х управляющих рядов будут $t_1 = \vartheta$, $t_2 \approx 0$ (частицы всегда почти перпендикулярно пересекают 3-й ряд), $t_3 = \varphi$.

Тогда вероятность того, чтобы частица нигде не попала в щель

$$w_{щ} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 = \frac{q^3}{\cos\vartheta \cdot \cos\varphi}. \tag{14}$$

Это будет первым ограничивающим фактором в выражении (8). Отметим, что формула (14) действительна лишь для углов меньше $t_{макс}$, определяемого из условия $\cos t_{макс} = q$, что при $q = 0{,}87$ дает $t_{макс} = 30^0$.



Фиг. 6. К выводу фактора щельности.

Однако в нашем приборе углы больше 30^0 встречаются сравнительно редко (особенно для тяжелых частиц), а также, как увидим ниже, при учете ограничивающего фактора, обусловленного камерами, большие значения углов „обрезаются". Поэтому формула (14) справедлива для всех ϑ и φ при интегрировании выражения (8).

3. Угловое распределение

Второе обстоятельство, которое нужно учесть при вычислении интеграла (8) то, что излучение, падающее на наш прибор, вообще не изотропно: его интенсивность заметно падает с увеличением зенитного угла. Из специфики работы магнитного масс-спектрометра следует, что траектории малых радиусов регистрируются в среднем под большими углами, поэтому фактически получается заниженное значение интенсивности частиц малых импульсов [2], [3]. Таким образом во избежание искажений, необходимо в выражение вероятности регистрации частиц внести функцию углового распределения $J(\alpha)\cdot Jd\omega$—есть вероятность движения частицы с данным импульсом внутри элемента телесного угла $d\omega$. Для частиц разных сортов угловое распределение различно, например, для высоты 3200 *м* для μ-мезонов оно примерно описывается функцией $\sim \cos^3\alpha$ [7], а для протонов с $P \geqslant 0{,}9\,\frac{Бэв}{c}$ — функцией $\sim \cos^6\alpha$ [7], [8].

Приведенные в конце настоящей работы кривые вероятности регистрации построены в допущении как первого так и второго угловых распределений. Эти кривые незаметно отличаются друг от друга, что обусловлено достаточно узким телесным углом установки.

4. Эффективность координатных счетчиков

Обычные счетчики Гейгера — Мюллера эффективны не на 100%. Например, в нашем приборе эффективность координатных счетчиков $w = 0{,}98$; поэтому аналогично п. 2, вероятность управляющим рядам не „прозевать" частицы, будет

$$w_{\text{счетчик}} = w^3 \tag{15}$$

(для нашего прибора $w_{\text{счетчик}} = 0{,}94$).

Подставляя в формулу (8) все вычисленные величины и учитывая факторы рассмотренные в пп. 2, 3, 4, получим

$$W_n = \int\limits_{-\psi_m}^{+\psi_m} \left(1 - \frac{l}{b}\ \operatorname{tg}\psi\right) \cos^2\psi \, d\psi \, . \int\limits_{\varphi} \left(\frac{y_2 - y_1}{a}\right) q^3 J(\alpha) \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta} w^3 \, d\varphi. \tag{16}$$

Учитывая (12) и выполняя отдельно интегрирование по ψ, окончательно получим:

для углового распределения $\cos^3\alpha$

$$W_n = \frac{2b \, . \, q^3}{l \cdot a} w^3 \, . \int\limits_{\varphi} (y_2 - y_1) \cos^3\vartheta \cos\varphi \, d\varphi, \tag{17}$$

для углового распределения $\cos^6\alpha$

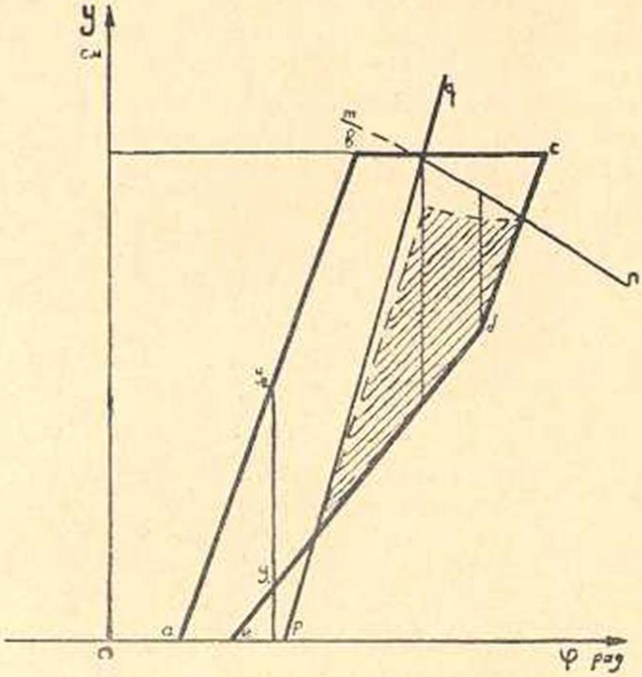
$$W_n = \frac{2b \ q^3}{l \ a} w^3 \, . \int\limits_{\varphi} (y_2 - y_1) \cos^5\vartheta \cos\varphi \, d\varphi. \tag{18}$$

Таким образом, мы получили общее выражение полной вероятности регистрации, с учетом всех факторов кроме камер. Интегралы в (17) и (18) удобно взять графически, тем более, что, как увидим ниже, при этом очень просто учитываются освещенные области камер.

Построим для конкретных значений радиусов $\rho_1; \rho_2; \rho_3; \ldots \rho_n$; графики зависимостей предельных значений y_1; y_2 от φ, воспользуясь формулами (4), (4[1]), (5), (5[1]), (6), (6[1]), (7), (7[1]) [5]. Из фиг. 7 легко видеть, что площадь образованной фигуры *abcde* равна $\int\limits_{\varphi}(y_2 - y_1)\, d\varphi$,

поэтому, если мы помножим ординатные разности $(y_2 - y_1)$ на соответствующие подинтегральные множители в формулах (17) или (18) и затем графически вычислим площадь полученной новой фигуры, то получим ненормированную полную вероятность регистрации частиц с заданным радиусом траектории собственно для телескопа.

Очевидно, что присутствие камер вызовет обрезание некоторой части эффективной площади рассмотренной выше фигуры. Покажем как это конкретно осуществляется сначала отдельно для нижней, а затем верхней камер Вильсона.



Фиг. 7. К графическому вычислению интеграла вероятности $W_п$.

5. Нижняя камера

В силу упомянутой системы освещения „на просвет", освещенный объем камеры имеет форму большой усеченной пирамиды (фиг. 8). Вероятность эффективных остановок частиц в различных частях этой пирамиды неодинакова, поэтому целесообразно разделить освещаемый объем на области и рассмотреть задачу „светосилы" для каждой области отдельно.

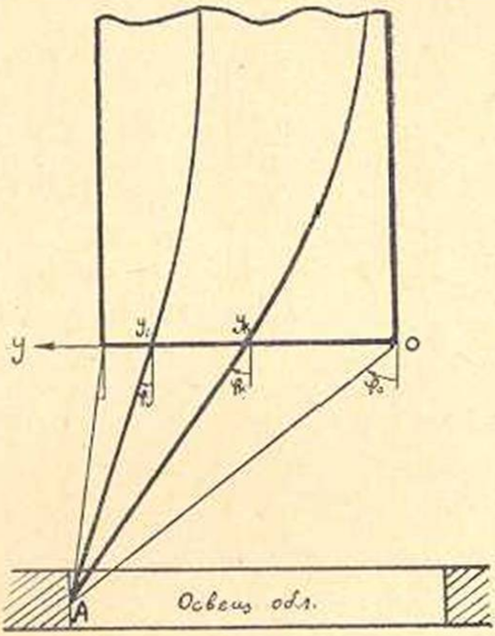
На фиг. 8 весь объем разбит на 3 зоны (I, II, III) по глубине, и на 3 пояса (1, 2, 3) по высоте. При этом каждый пояс включает пару пластин. Тогда каждая область освещаемого объема будет характеризоваться своим номером зоны и пояса. Рассмотрим одну такую область (фиг. 9). Ясно, что следы частиц, дающих остановку левее точки А, не будут видны, а — правее, будут. Следовательно, если графически построить зависимость значений предельных углов выхода φ_A от координаты точки выхода телескопа y, а затем наложить эту кривую $\varphi_A = f(y)$ в том же масштабе на фигуру *abcde* (фиг. 7), то легко убедиться, что только участок площа-

Фиг. 8. Освещенный объем нижней камеры

ди, лежащий ниже предельной кривой *mn*, будет эффективным, т. е. будет соответствовать следам, заведомо кончающимся в выбранной освещенной области нижней камеры [5].

6. Верхняя камера

Действуя описанным в п. 5 методом, можно графически легко получить вероятности регистрации частиц с эффективной остановкой в освещенных областях нижней камеры, независимо от их судьбы до входа в телескоп. При добавлении над магнитом второй аналогичной камеры, число эффективных (видимых как в верхней, так и в нижней камерах) случаев регистрации еще уменьшится.



Фиг. 9. К построению предельной кривой $\varphi_A = f(y)$.

Важно отметить, что в отличие от нижней камеры, в верхней камере необходимо проследить трек от крышки до дна камеры с целью, чтобы можно было судить о природе его появления. Поэтому, разделив аналогично п. 5, освещенный объем камеры по глубине на 3 зоны (I, II, III) мы, рассмотрение задачи „светосилы“, проведем только для „потолочного“ пояса № 1 камеры.

Аналогично нижней камере, построим для освещенных зон предельные кривые $\vartheta_{\text{пред.}} = f(Y)$, где Y — координата точки входа частицы в телескоп. Для того, чтобы непосредственно оценить ограничение, вносимое верхней камерой на фигуре *abcde* (фиг. 7), нужно предельные кривые верхней камеры „отображать“ на выход телескопа, т. е. „перейти“ от переменных ϑ и Y к переменным φ и y. Можно легко показать, что соответствующие формулы перехода будут таковы*.

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{l}{\rho} + \sin\vartheta\right), \tag{19}$$

$$y = Y - \rho(\cos\varphi - \cos\vartheta). \tag{20}$$

После наложения отображенной предельной кривой *pq* на фиг. *abcde* (фиг. 7) можно убедиться, что часть площади фигуры, лежащая выше кривой *pq*, неэффективна. Таким образом из полной пло-

* При $\rho = \infty$ вместо (19) и (20) нужно применить
$$\varphi = \vartheta;\ y = Y + l\,\mathrm{tg}\,\vartheta.$$

щади фигуры останется только часть, лежащая ниже предельных кривых 2-х камер. После учета подинтегральных множителей (17), (18) и графического вычисления площади S_ρ получим W_n для частиц данного радиуса кривизны ρ. Выполнив такие же расчеты для других значений радиусов, можно построить кривую полной вероятности регистрации частиц для заданных освещенных областей камер в функции от радиуса (или импульса частицы, если магнитное поле задано: $P = 300\, H\rho \dfrac{\text{эв}}{\text{c}}$).

Магнитные масс-спектрометры, благодаря узкому телесному углу, практически, регистрируют вертикальный поток частиц. Тогда очевидно, что траектории с бесконечными радиусами будут регистрироваться гораздо эффективнее, чем траектории с конечными радиусами. На основании этого вводим понятие „относительной полной вероятности регистрации" частиц, определяя ее как отношение полной вероятности при данном конечном радиусе к полной вероятности при $\rho = \infty$:

$$W = \frac{W_n(\rho)}{W_n(\infty)}. \tag{21}$$

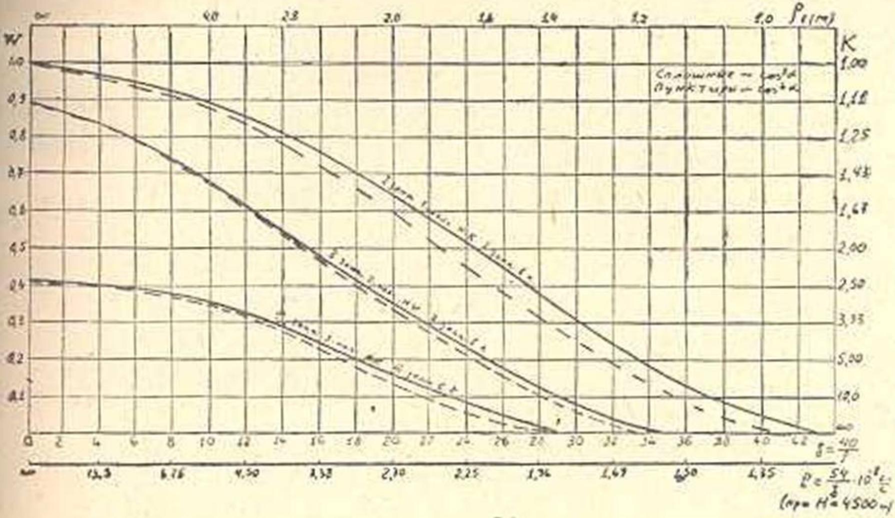
Под $W_n(\infty)$ будем подразумевать полную вероятность регистрации при $\rho = \infty$ для телескопа без камер. Можно считать, что в этом случае весь вертикальный поток практически полностью регистрируется (конечно, при отсутствии щельности и неэффективности счетчиков) и можем нормировать $W_n(\infty)_{\text{макс}} = 1$. Отметим, что при построении импульсных энергетических и т. п. спектров частиц, часто важны именно относительные вероятности регистрации*. Так как согласно (21) $W < 1$, то соответствующие поправки на вероятность регистрации будут:

$$K = \frac{1}{W} > 1 \tag{22}$$

и, при построении спектров, необходимо каждую регистрированную частицу внести в спектр обязательно со своей поправкой. При приближенных оценках можно пользоваться кривыми вероятности регистрации, построенными для некоторых средних освещенных областей нижней и верхней камер. На фиг. 10 для иллюстрации приведены кривые для наилучшего случая (I зона 1 пояс нижн. кам., I зона верх. кам.), для среднего случая (II з. 2 п. н. к., II з. в. к.) и для наихудшего случая (III з. 3 п. н. к., III з. в. к.), построенные соответственно для 2-х угловых распределений ($\cos^3\alpha$ — сплошные линии, $\cos^6\alpha$ — пунктиры). Из кривых видно, как сильно зависит W от положения освещенных областей и как слабо — от углового распределения.

В заключение выражаю благодарность А. Т. Дадаяну за советы,

* При построении абсолютных спектров нужно пользоваться не величиной W, а $W^* = W \cdot q^3 w^3$.



Фиг. 10. Кривые относительной вероятности регистрации частиц, построенные для 3-х различных освещенных нижней и верхней камер при 2-х разных угловых распределениях ($\cos\alpha^3$ — сплошные линии $\cos^6\alpha$ — пунктиры).

Н. М. Кочаряну и Г. С. Саакяну за обсуждение работы, а также К. Г. Тер-Мкртчян за помощь при вычислении кривых и приготовлении рисунков.

Институт физики
АН Армянской ССР

Поступило 11 II 1957 г

Հ. Վ. Բադալյան

ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԳՐԱՆՑՄԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄԱՍՍ-ՍՊԵԿՏՐՈՄԵՏՐԻ ԵՎ ՎԻԼՍՈՆԻ ԵՐԿՈՒ ԿԱՄԵՐԱՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում նկարագրված է լիցքավորված մասնիկների գրանցման հավանականության հաշվման լրիվ գրաֆո-անալիտիկ մեթոդ, մագնիսական մասս-սպեկտրոմետրը միացված Վիլսոնի երկու մեծ ուղղանկյուն կամերաների հետ սիստեմում:

Այս նոր սարքավորման աշխատանքը անջատ մագնիսական սպեկտրոմետրի աշխատանքից տարբերվում է նրանով, որ հնարավոր է, բացի մասնիկի հետագիծը մագնիսական դաշտում գրանցելուց, դիտել նրա վարքը Վիլսոնի կամերաներում մինչև դաշտ մտնելը և դաշտից դուրս գալուց հետո: Բայց քանի որ մասնիկները միշտ չէ, որ անցնում են կամերաների լուսավորված մասերով, ապա արդյունքների ֆիզիկական մշակման համար շատ կարևոր է որոշել լիարժեք հետագծերի գրանցման հավանականությունը որպես ֆունկցիա հետագծի շառավղից (մասնիկի իմպուլսից): Աշխատությունը ներկայացնում է (5)-ում նկարագրված մեթոդի ընդհանրացումը, հաշվի առնելով 2-րդ՝ վերևի, կամերայի առկայությունը, ճեղքերի առկայությունը կոորդինա-

տալին հաշվիչների միջև, հաշվիչների էֆեկտիվությունը և մասնիկների անկյունային բաշխումը։

Վերջում բերված են գրանցման հավանականության հաշվման կորեր՝ կառուցված կամերաների լուսավորված ծավալների տարբեր մասերի համար և երկու տարբեր անկյունային բաշխումների դեպքում։ Կորերից պարզ երևում է, որ գրանցման հավանականությունը մեծ չափով կախված է կամերաների դիտարկված լուսավորված մասերի դիրքից և փոքր չափով՝ մասնիկների անկյունային բաշխումից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиханян А. И., Алиханов А. И.* и *Вайсенберг А. О.* ЖЭТФ 18, 301, 1948 г.
2. *Кочарян Н. М.* и *Кайтмазов С. Д.* Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук) т. VII, № 2, 1954 г.
3. *Саакян Г. С.* Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук) т. VII, № 4, 1954 г
4. *Козодаев М. С., Филиппов А. И.* и *Осипенков В. Т.* П и ТЕ № 2 1956 г.
5. *Дайон М. И., Федоров В. М.* и *Мерзон Г. И.* П и ТЭ № 1 1957 г.
6. *Алиханян А. И., Шостакович Н. В., Дадаян А. Т., Федоров В. М.* и *Дерягин Б. Н.* ЖЕТФ, 31, 955, 1956 г.
7. *Кочарян Н. М.* Докторская диссертация 1954 г.
8. *Саакян Г. С.* Изв. АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук) т. IX, № 7, 1956 г.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 6, 19 7 Физико-математические науки

ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ

В. М. Иванян

Приборы для экспериментального исследования механических свойств материалов типа резины

Вопрос экспериментального исследования механических свойств материалов типа резины имеет большое практическое значение.

Основными характеристиками механических свойств материалов являются: кривая растяжения-сжатия (дающая связь между напряжением и деформацией), кривая релаксации (показывающая изменение напряжения во времени при постоянной деформации) и кривая последействия (изображающая изменение деформации во времени при постоянном напряжении).

Для материалов, обладающих свойством ползучести, вид кривой растяжения — сжатия зависит от скорости деформирования. Взаимная однозначность деформации и напряжения на кривой растяжения-сжатия является мгновенной, тогда как, во времени, эта однозначность не имеет места т. е. одному и тому же напряжению (деформации) во времени соответствует ряд асимптотически возрастающих (убывающих) непрерывных значений деформаций (напряжений).

На основании анализа недостатков существующих приборов, предназначенных для получения кривых растяжения-сжатия, релаксации и последействия, нами предложены и сконструированы: «Прибор для испытания материалов типа резины на растяжение» в двух вариантах (фиг. 1 и 2)*, «Ползограф»* (фиг. 6 и 7) и «Механический релаксограф». На все вышеуказанные приборы получены авторские свидетельства.

Ниже приводятся описания и принципы работ упомянутых приборов.

I. Прибор для испытания на растяжение материалов типа резины

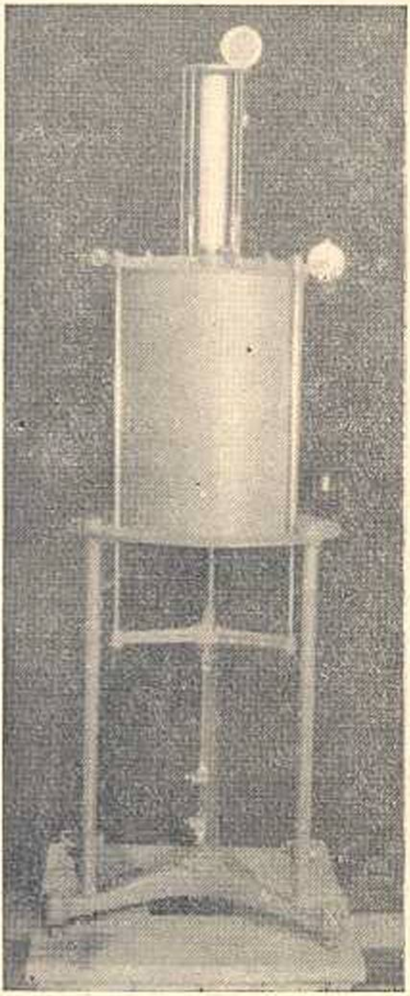
Существующие приборы (динамометры) для испытания резины на растяжение сложны по конструкции и предназначены для испытания при относительно больших скоростях деформирования (500 *мм/мин*). В силу

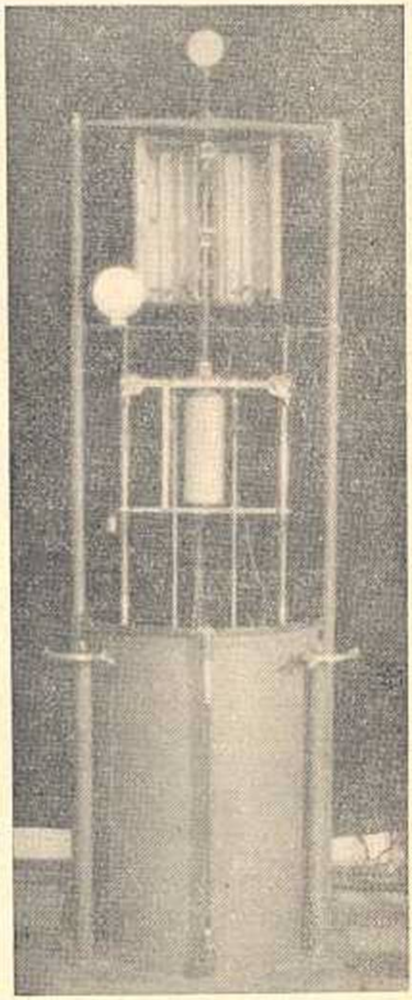
---

* Изготовлены в мастерских Ереванского политехнического института имени Карла Маркса и используются для научно-исследовательских работ на кафедре теоретической механики института.

чего, для получения равновесных характеристик испытуемого материала, они не пригодны.

Предлагаемый нами прибор (фиг. 1 и 2), имея более простую конструкцию и плавное регулирование скорости деформирования, позволяет проведение испытаний, при сколь угодно малых скоростях деформирования, с автоматическим вычерчиванием кривой растяжения (сжатия), что дает возможность получать равновесные характеристики испытуемого материала.


Фиг. 1.


Фиг. 2.

Назначение прибора. Прибор предназначается для испытания на растяжение (сжатие) резины и других материалов, близких по своим механическим свойствам к резине, при разных температурах, с автоматическим вычерчиванием кривой растяжения (сжатия).

Техническая характеристика. 1. Форма образцов: при растяжении-плоская, при сжатии — цилиндрическая.

2. Максимальная растягивающая (сжимающая) сила —30 *кг*.

3. Максимальный ход подвижного зажима — 200 *мм*.

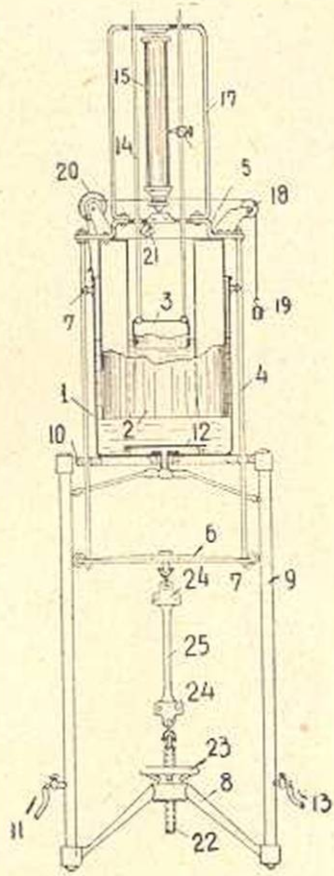
4. Масштаб записи на диаграмме «Напряжение-деформация»:

а) для силы — 1 *мм* соответствует 70 *г*,

б) для деформации 1 : 1 или 2 : 1.

Описание прибора. Прибор состоит из следующих 3-х основных частей (фиг. 3).

Первая—неподвижная часть, состоящая из станины — тройника (8) на котором закреплены три стояка (9). Верхние концы стояков соединены круглым основанием (10) на котором покоится цилиндрический резервуар (1). На станине насажен винт (22) со своим маховичком — гайкой (23) для регулирования расстояния между зажимами (24) куда закладывается образец (25). На одном из стояков закреплен кран (11) для впуска воды через стояк и патрубок в резервуар (1), на другом стояке — кран (13) для выпуска воды из резервуара. Оба крана имеют шкалы для регулирования скорости наполнения и опорожнения резервуара. Краны, посредством резиновых шлангов, соединены с водопроводом и канализацией.



Фиг. 3.

Над донным отверстием резервуара (1) имеется зонтик (12) для смягчения неравномерности распределения вертикальных составляющих скоростей воды в начале пуска.

Вторая, подвижная, часть прибора состоит из большого цилиндрического поплавка (2). Тремя растягивающими стержнями (4) тройник верхнего зажима (6) соединяется с тройником (5), последний в свою очередь соединен с верхним основанием большого поплавка.

На большом резервуаре и на тройнике верхнего зажима закреплены направляющие ролики (7). Третья основная часть прибора служит для вычерчивания диаграммы растяжения (сжатия). Она состоит из свободно вращающегося барабана (15), закрепленного вместе со своей рамкой (17) на тройнике (5), и малого поплавка (3), свободно перемещающегося в концентрическом сквозном отверстии большего поплавка.

Два стержня (14) малого поплавка могут свободно скользить в отверстии рамки барабана.

На одном из стержней (14) закреплен держатель карандаша (16). На рамке (17) барабана закреплена шкала со стрелкой так, чтобы колесико, неподвижно надетое на ось стрелки соприкасалось со стержнем малого поплавка. При движении последнего происходит вращение стрелки показывающей величину натяжения образца. На верхнем основании большего поплавка имеются два ролика (18). Барабан приводится во вращение нитью обвивающей его блок, концы нити перекинуты через ролики (18), причем один конец ее прикреплен к резервуару, а к другому концу подвешен грузик.

Принцип работы. В основу работы прибора положено воздействие гидростатического давления.

Через впускной кран (11) пропускается в резервуар вода до тех пор, пока тройник (5) большого поплавка не отделится от верхнего края резервуара.

Затем закрывается впускной кран и в зажимы (24) закладывается образец (25). После закрепления образца вновь открывается впускной кран и, по мере поступления воды в резервуар, большой поплавок, постоянно подымаясь, вызывает деформацию образца и вращение барабана. При этом угол вращения барабана пропорционален деформации образца. Перемещение малого поплавка по отношению к большому фиксируется на барабане посредством карандаша. Оно пропорционально усилию в образце. На оси ролика, через который перекинута нить, насажена стрелка, показывающая на шкале (20) численное значение деформации.

Для испытания образцов при различных температурах, к прибору приспосабливается электропечь, или камера холода.

На вышеописанном принципе и для той же цели сконструирован и изготовлен второй прибор (фиг. 2).

Последний отличается от первого величиной растягивающего (сжимающего) максимального усилия (50 *кг*). Он более удобен в эксплуатации. На приборе можно осуществить также испытание металлических стержней на разрыв в пределах указанной величины максимального растягивающего (сжимающего) усилия на длительное воздействие силы при различных температурах.

II Ползограф

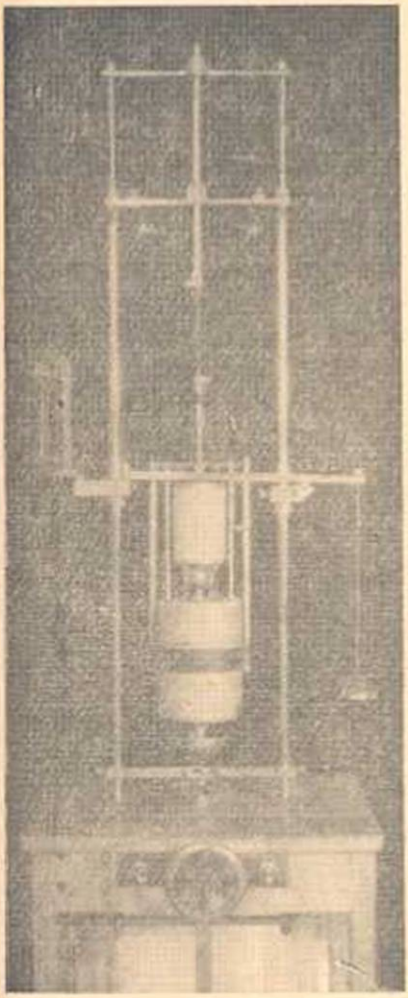
Предлагаемый прибор (фиг. 6 и 7) является техническим усовершенствованием прибора предложенного нами ранее под названием «Релаксограф»*.

---

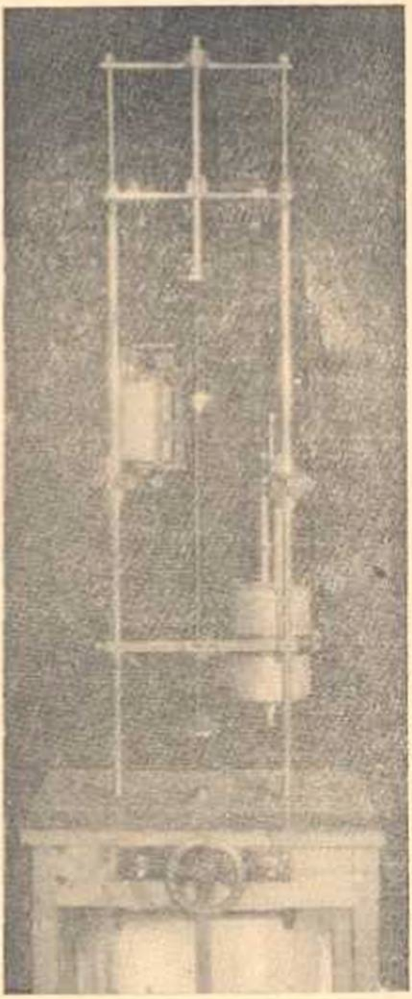
* Авторское свидетельство № 102967.

Кроме испытания на релаксацию ползограф дает возможность проведения испытания материалов, так же на последействие, что необходимо для получения полной характеристики ползучести материалов.

Необходимо отметить одно важное качество прибора, по сравнению с существующими конструкциями, заключающееся в том, что падение напряжения на графике фиксируется с самого начала, без опоздания.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Назначение прибора. Прибор предназначается для определения падения напряжения при постоянстве деформации, и нарастания деформации при постоянстве нагрузки во времени, в резиновых образцах при разных температурах.

Техническая характеристика. 1. Виды испытания:

а) определение релаксации резиновых образцов при растяжении и сжатии во времени при разных температурах;

б) определение деформации растяжения и сжатия во времени при постоянной нагрузке при разных температурах;

2. количество одновременно испытываемых образцов — 1 шт;

3. форма образцов: при растяжении — плоская,

при сжатии — цилиндрическая;

4. нагрузка на образец: максимальная — 20 *кг*,
минимальная — 0,1 *кг*;

5. объем сосуда для воды 3,5 *л*;

6. расстояние между зажимами: максимальная — 350 *мм*,
минимальная — 20 *мм*;

7. запись релаксации и последействия производится на барабане часового механизма типа гидрографа;

8. точность записи кривой релаксации — 10 *г*;

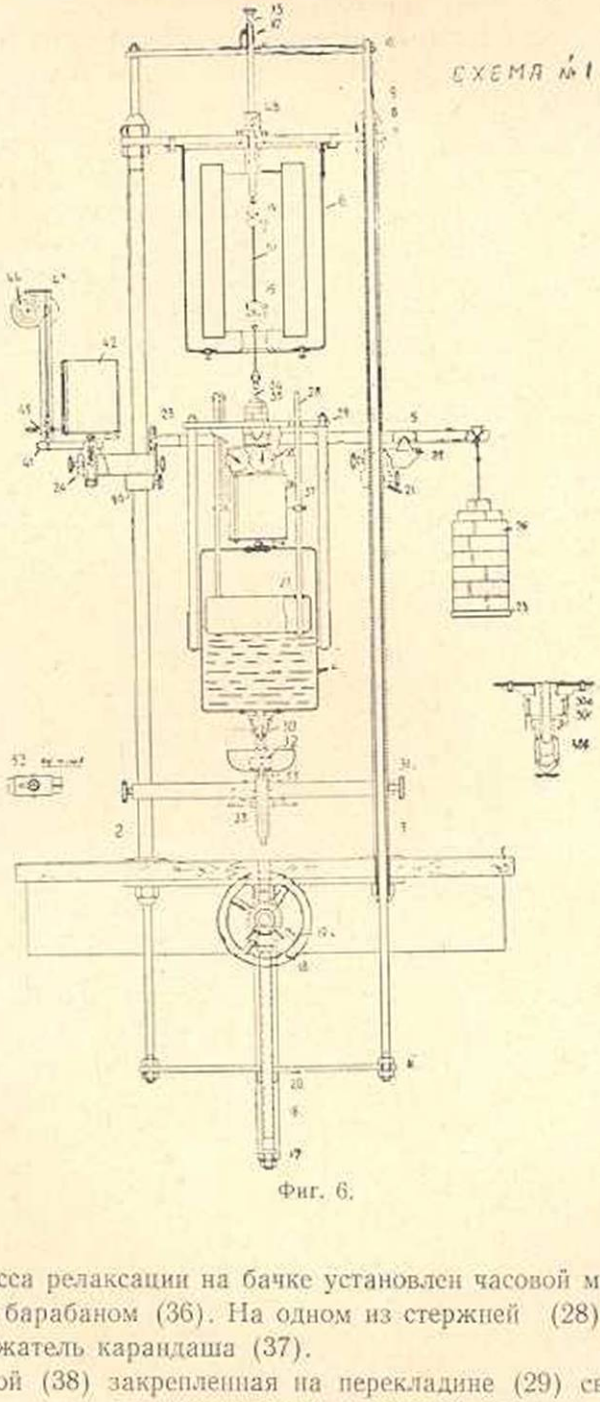
9. точность замера падения усилия на шкале — 1 *г*;

10. последействие имеет четыре масштаба записи — 1 : 1; 2 : 1; 3 : 1; 4 : 1;

11. точность на шкале при масштабе 1 : 1—0,01 *мм*.

Описание работы прибора. На столе (1) закрепленные сверху 2 стойки (2) и (3) соединяются между собой перекладиной (7), на которой снизу прикрепляется либо термокамера (6), либо камера холода для термостатирования образца. В стойках (2) и (3) (фиг. №6) по направляющим гайкам (8) свободно могут скользить два стержня (9), соответствующие концы которых жестко соединяются между собой перекладинами (10 и (11).

В цилиндре (12) закрепленном в середине на верхней перекладине (10) свободно может перемещаться, или фиксироваться с помощью стопорного винта, градуированный стержень (13). На своем верхнем конце стержень (13) имеет упорную головку, а к нижнему концу его присоединен верхний зажим (14) испытуемого образца. Винт (16) находящийся в рамке (17), закрепленной на столе (1) снизу, приводится во вращение относительно своей оси с помощью маховичка с рукояткой (18) через пару конических зубчатых колес (19) (фиг. 2). При вращении винта (16) перекладина (11) либо поднимается, либо опускается, благодаря гайке (20) жестко прикрепленной к ней. На муфте (21) зафиксированной на стойке (3) надет кронштейн с ножевой опорой (22), который может свободно поворачиваться вокруг стойки (3) и закрепляться с помощью стопорного винта. На опоре (22) опирается весовой рычаг (5), левый конец которого входит в гнездо-ограничитель (23) закрепленный на кронштейне (24). Подвеска для грузов опирается на его другом конце (25) и (26). Цилиндрический бачок (4) опирается на рычаг (5) между стойками (2) и (3). В бачке имеется свободно перемещающийся поплавок (27). Стержни поплавка (28) выступают через отверстия перекладины (29). На дне бачка (4) имеется клапан-регулятор (30) для выпуска воды. Регулятор состоит из цилиндрика (30а) с осевым несквозным отверстием, который прикреплен ко дну бачка (4) своим буртиком, и наконечника с буртиком (30в) свободно скользящего по цилиндрику. Специальная гайка (30с) навинченная на утолщенную часть цилиндрика ограничивает перемещение наконечника по нему. На обеих частях клапана - регулятора сделаны радиальные отверстия при совпадении которых вода выпускается из бачка. На передвижной перекладине (31), непосредственно под клапаном, имеется упор с тарелочкой (32) для упирания наконечника клапана и удаления вытекшей воды через резиновую трубочку надетую на нижний конец упорного винта; последний перемещается с помощью гайки (33). На стержень (34) закрепленный на перекладине (29) накладываются добавочные грузы (35), а к верхнему концу его присоединяется нижний зажим образца (15).



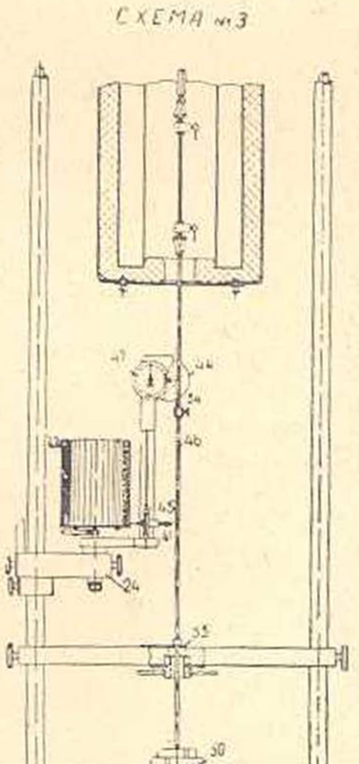
Фиг. 6.

Для записи процесса релаксации на бачке установлен часовой механизм с вращающимся барабаном (36). На одном из стержней (28) поплавка закреплен держатель карандаша (37).

Шкала со стрелкой (38) закрепленная на перекладине (29) своим зубчатым механизмом находится в зацеплении с другим стержнем поплавка (28). Вращение стрелки соответствует вертикальному перемещению последнего.

На стойке (2), на фиксированной муфте (39) надет кронштейн (24). На его длинном конце шарнирно присоединено основание (41) устройства записывающего последействие. Обе части могут поворачиваться и закрепляться в горизонтальной плоскости стопорными винтами. На основании (41) устанавливается часовой механизм с вращающимся барабаном (42). На другом конце основания под прямым углом прикреплены две стойки (43), между ними, вокруг горизонтальной оси, свободно может вращаться ступенчатый ролик (44). Вращение его вызывает перемещение грузика с карандашом (45) по направляющим, вдоль образующей барабана (42), благодаря нити прикрепленной одним концом к ролику, а другим концом к грузику. Ролик вращается вследствие деформации образца, посредством нити закрепленной одним концом к ролику (к одной из его ступеней, в зависимости от масштаба записи), а другим концом — к подвесному стержню (46). Шкала (47) прикрепленная на стойке (43) служит для получения численного значения деформации последействия. На подвеске (49), присоединенной к стержню (46), накладывается грузик (50), в соответствии с первоначальным усилием испытуемого образца при последействии.

П р и н ц и п р а б о т ы п р и б о р а. а) При релаксации. Опускают упор (32) с помощью гайки (33), до его отделения от наконечника (30в); последний опускаясь опирается на гайку (30с) вследствие чего клапан (30) закрывается. Бачок (4) наливается водой через верхнее отверстие, при этом поплавок (27) займет свое верхнее положение. С накладыванием груза (26) на подвеску (25) уравновешивается рычаг (5), затем часть из этих грузов снимается с расчетом, чтобы перевес левой части рычага равнялся первоначальному усилию испытуемого образца. При этом левый конец рычага (5) упирается в гнездо (23). При значениях первоначальных усилий превышающих величину максимального перевеса рычага (5), на стержень (34) накладываются добавочные грузы (35). С вращением маховичка (18) верхняя перекладина (10) опускается до отказа. После установления необходимой температуры в термокамере (6), в зажимы закладывается образец (51), затем, с помощью стопорного винта цилиндрика (12), стержень (13) закрепляется в положении, соответствующем нулевому усилию образца. Далее, вращением маховичка (18), начинается нагружение. Когда усилие в образце достигает предварительно выбранного значения, рычаг (5) принимает равновесное положение. Подведением упора (32) к клапану (30) наконечник (30в) поднимается до появления капелек воды с его радиальных отверстий. Начинается процесс релаксации и его запись. После ничтожного перемещения бачка, клапан раскрывается настолько, что, в течение всего времени испытания, вес вытекшей воды будет равен падению усилия в образце. Реакция упора на бачок с водой практически равна нулю, так как наконечник опирается на упоре; трением между цилиндриком и наконечником клапана безусловно можно пренебречь (тем более, что вода играет роль смазки). А влияние веса столбика воды в бачке на наконечник равно нулю, благодаря наличию радиальных отверстий в клапане. Следовательно, в течение всего процесса релаксации, на бачок действуют силы натяжения образца и веса подвешенной части с водой, которые, уменьшаясь во времени, остаются равными друг другу. Под действием указанных двух сил бачок сохраняет положение устойчивого равновесия, так как, при положении бачка ниже этого, степень открытия отверстий клапана увеличивается; в связи с этим уменьшение количества воды протекает быстрее, чем уменьшение натяжения в образце, а в положении выше этого происходит обратное явление. Как в положениях ниже, так и выше, чем указанное, равновесие бачка невозможно. Следовательно, можно считать, что в течение всего процесса релаксации, деформация образца остается постоянной. Испарение от поверхности воды в бачке компенсируется автоматическим уменьшением степени открытия отверстий клапана и не играет никакой роли.



Фиг. 7.

б) При последействии. Приподнимают рычаг (5), вынимая левый конец из гнезда (23) и поворачивая его в сторону вместе с бачком, опирают рычаг на опорную стойку прикрепленную на столе (1). Упор с тарелкой (32) снимается с перекладины (31), а перекладина поднимается в верх по стойкам и фиксируется с помощью стопорных винтов на необходимом расстоянии от плоскости стола. Нижний конец подвесного стержня (46) проводится через отверстие перекладины (31) до упирания его буртика в подвижной упор (53). На подвеске присоединенной к концу подвесного стержня (46) накладывается грузик (50) соответствующий первоначальному усилию испытуемого образца. После закрепления образца в зажимах, поворотом кронштейна (24) вокруг стойки (2), а основание (41) — вокруг своего шарнира, записывающее устройство фиксируется в таком положении, чтобы подвесной стержень (46) почти соприкасался с одной из ступеней (в зависимости от масштаба записи) ступенчатого ролика (44). Один конец нити (другой конец которой прикреплен к ролику) присоединяется к цилиндрику (54), затем спуская по стержню (46) закрепляют на нем стопором.

Нагружение испытываемого образца начинается вращением маховичка. Когда усилие в образце достигает до величины предварительно выбранной нагрузки, буртик стержня (46) отделяется от упора. Упор (53) оттягивается в сторону. Начинается процесс последействия и его запись. По мере увеличения деформации образца во времени под действием постоянной силы, происходит вращение ролика (44), следовательно и движение карандаша (45) по образующей, равномерно вращающегося барабана (42), в результате чего получается кривая деформации в функции от времени, при постоянной нагрузке.

III. Механический релаксограф

Для испытания резины на релаксацию создан и применяется ряд приборов, как например: прибор типа Поляньи, машина Силы-Новицкого, Палкина, Борисова, приборы сконструированные в Московском Менделеевском обществе, в НИИК-е (Израелит), в НИИРП-е (Вольш, Рантер), на заводе Металлист (Зиновьев) и другие.

Существующие приборы, предназначенные для испытания материалов на релаксацию имеют ряд недостатков: у одних нет термостатирования и автоматической записи, другие предназначены только для растяжения или только для сжатия, третьи чрезвычайно мало чувствительны. Перечисленные приборы не позволяют получать график растяжения перед процессом релаксации и чередовать процессы нагружения, разгрузки и релаксации одного и того-же образца.

Назначение прибора. Прибор предназначается для определения падения напряжения во времени в резиновых образцах при разных температурах с сохранением постоянства деформации и предварительным вычерчиванием кривой растяжения (сжатия).

Прибор позволяет производить следующие испытания при разных температурах:

1. растяжение (сжатие) с вычерчиванием кривой растяжения (сжатия);

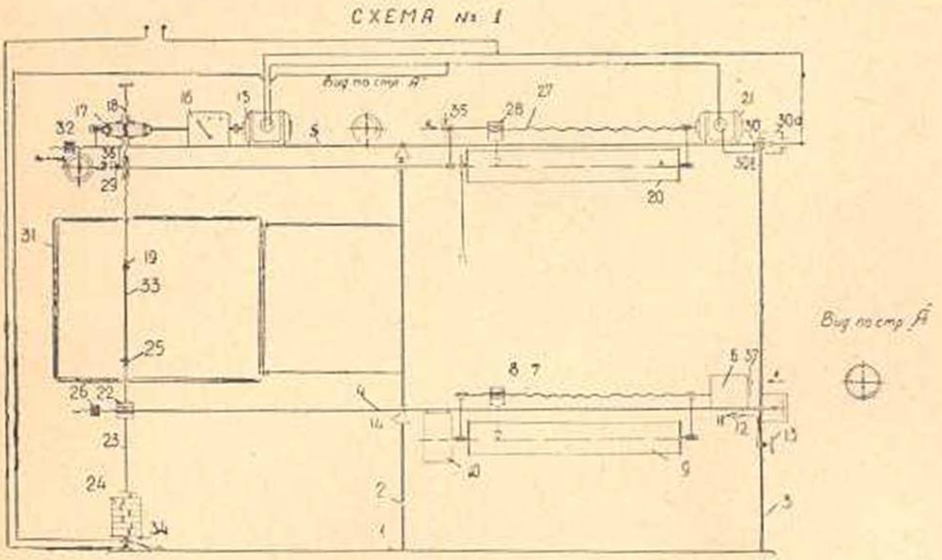
2. многократное нагружение и разгрузку образца с вычерчиванием петель гистерезиса;

3. получение кривой релаксации;

4. получение кривой релаксации с предварительным вычерчиванием кривой растяжения одного и того-же образца;

5. чередование нагружения разгрузки и процесса релаксации.

Описание прибора. На стойках (2) и (3), закрепленных на основании (1), смонтирован весь прибор (фиг. 8). Основными узлами прибора являются: релаксационный рычаг (4), на котором автоматически записывается процесс релаксации, и растягивающий рычаг (5), на котором получаются кривая растяжения и петли гистерезиса. Оба рычага опираются на стойке (2). Для термостатирования процесса релаксации на стойке (2) установлена термокамера (31), внутри которой находятся верхний и нижний зажимы (19) и (25), куда закладывается испытуемый образец (33). Верхний зажим (19) шарнирно присоединен к концу подъемного винта (18). Нижний зажим (25) закреплен на подвеске (23), имеющей ножевую опору (22) на конце рычага (4). На подвеску (23) ставится груз (24), равный первоначальному усилию образца (фиг. 8). Рычаг (4) имеет ножевую опору (14), закрепленную на стойке



Фиг. 8.

(2). На рычаге (4) снизу закреплен часовой механизм (10) с равномерно вращающимся барабаном (9), ось которого параллельна рычагу (4). На правом конце рычага (4), сверху, закреплен зубчатый механизм (6) со спиральной пружиной, продолжением оси одного из колесика которого является винт (7), расположенный параллельно рычагу (4) и может свободно вращаться в подшипниках закрепленных на том же рычаге. Каретка (8) опираясь роликами на рычаг (4), приводится в движение по нему, вращением винта (7) посредством гайки каретки (8). Таким образом, при работе зубчатого механизма (6) каретка (8) перемещается вдоль образующей барабана (9). К каретке (8) шарнирно присоединен держатель карандаша.

Зубчатый механизм (6) приводится в действие благодаря спиральной пружине. Вращение от зубчатого барабана спиральной пружины к гладкому колесику (11) передается через зубчатые колесики с большим передаточным числом, так что ничтожная сила трения на ободе гладкого колесика (11) может остановить его вращение, а следовательно, и перемещение каретки (8). Зубчатый механизм (6) имеет стопор, которым, при необходимости, останавливается работа механизма. В процессе релаксации колесико (11), вращаясь, все время слегка прижато к упору (12), шарнирно закрепленному на стойке (3). Упор (12) может быть опущен или поднят с помощью регулирующего винта (13).

На верхний конец стойки (2) свободно опирается растягивающий рычаг (5), на котором с левой стороны опоры смонтирован моторчик (15) с коробкой скоростей (16), служащий для перемещения винта (18) через червячную пару (17). Барабан (20), прикрепленный снизу на рычаге (5), приводится во вращение подъемным винтом (18) через зубчатое колесико (29) надетое на ось барабана (20). Прикрепленный на правой части рычага (5) моторчик с редуктором (21) через винт (27) приводит в движение каретку с грузами (28), вдоль образующей барабана (20).

Правый конец рычага (5), на котором находится контакт (30) моторчика (21), свободно входит в отверстие на стойке (3) и имеет возможность небольшого вертикального перемещения. В отверстии, сверху и снизу, имеются контакты (30а) и (30в). При нагружении образца, ток может поступить к моторчику (21) только через контакт (30а), а контакт (30в) при этом выключен из сети. При разгружении, ток к моторчику (21) поступает только через контакт (30в), а контакт (30а) выключен из сети.

Прибор снабжен также шкалами, показывающими, с достаточной точностью, численные значения измеряемых величин при растяжении и релаксации (сила — шкала 35, деформация — шкала 36, падение усилия — шкала 37).

Принцип работы прибора. Каретка (8) свободным вращением винта (7) переводится в левое крайнее положение и на нее накладываются дополнительные грузы, в зависимости от образца, т. е. с расчетом, чтобы каретка с грузом вблизи правого крайнего положения смогла уравновешивать полное падение напряжения образца. Затем заводится зубчатый механизм (6). Прикрепленный на каретке (8) карандаш приводится в соприкосновение с барабаном (9) и часовой механизм (10) пускается в ход для предотвращения влияния люфтов на кривую релаксации в начале процесса.

Соответственные грузы накладываются на подвеску (23) для грубого уравновешивания рычага (4), затем при помощи грузика (26) производится точное уравновешивание. Затем, вращением винта (13), упор (12) подводится к колесику (11) до соприкосновения с ним. На подвеску (23) накладывается груз (24), равный первоначальному усилию испытуемого образца, чем и нарушается равновесие рычага (4), вследствие чего его правый конец поднимаясь вверх, упирается в соответствующий упор.

Очевидно, если при таком положении рычага (4) освободить зубчатый механизм (6) от стопора, то, под действием напряженной спиральной пружины, каретка (8) начнет плавно перемещаться вправо.

Разумеется, что между скоростью движения каретки (8) и угловой скоростью колесика (11) зубчатого механизма (6) есть определенное соответствие. Ясно, что перемещение каретки (8) вправо продолжится до восстановления равновесия рычага (4), после чего каретка (8) остановится, так как при этом колесико (11) прижмется к упору (12).

Включение тока в прибор. Предварительно выключая моторчик (21) приводится в действие моторчик (15), вследствие чего перемещением подъемного винта (18) устанавливается необходимое расстояние между зажимами для закладывания образца (33), после чего ток выключается. Аналогичным образом, как в случае уравновешивания рычага (4), каретка (28) предварительно переводится с соответствующими грузами, уравновешивающими максимальное усилие образца в пределах ее хода, в левое крайнее положение. Затем, с помощью груза (32), уравновешивается рычаг (5).

После уравновешивания двух рычагов (4) и (5), в зажимы (19) и (25) закладывается образец (33).

По установлении необходимой температуры в термокамере (31), включается контакт (30а), с включением контакта (30в). Подается ток в прибор и начинается нагружение образца. С самого начала растяжения ничтожное усилие в образце нарушает равновесие рычага (5), вследствие чего правый конец его прижимаясь к контакту (30а), включает моторчик (21). Последний плавно перемещает каретку (28) вправо. В силу соответствия между возрастанием усилия образца и перемещением каретки (28), в процессе растяжения, рычаг (5) все время сохраняет свое равновесие. В противном случае, при перемещении каретки (28) больше чем требуется в данный момент для уравновешивания усилия в образце, выключился бы моторчик (21) с опусканием правого конца рычага (5), вследствие чего каретка (28) остановилась бы.

В процессе растяжения каждое положение каретки (28) соответствует определенному усилию образца и фиксируется при помощи карандаша, прикрепленного к каретке (28) на барабане (20), который вращается в соответствии с деформацией образца. В результате вычерчивается кривая растяжения (сжатия).

В момент, когда усилие в образце достигает величины равной весу груза (24), релаксационный рычаг (4), будучи отклонен, возвращается в свое первоначальное равновесное положение, вследствие чего с помощью контакта (34), находящегося под подвеской (23) на основании прибора, автоматически выключаются оба моторчика, затем освобождается зубчатый механизм (6) от стопора.

Таким образом, с окончанием процесса нагружения, непосредственно начинаются процесс релаксации и его запись.

В процессе релаксации падение напряжения имеет тенденцию нарушать равновесие рычага (4), стремясь поднять его правый конец вверх, в результате чего колесико (11) частично освобождается от упора (12), так как уменьшается его тормозное действие на колесико (11), и колесико приводится во вращение с угловой скоростью соответственно скорости падения напряжения в образце.

Соответствие между падением напряжения образца и угловой скоростью колесика (11) очевидно, так как падение усилия в образце все время, в течение процесса релаксации, уравновешивается кареткой (28), перемещающейся вправо со скоростью соответствующей скорости падения напряжения в образце. Как указывалось выше, между скоростью перемещения каретки (8) и угловой скоростью колесика (11) существует определенное соответствие.

Каретка (8), плавно двигаясь вправо, все время сохраняет равновесие рычага (4), чем и обеспечивается сохранение постоянства деформации испытуемого образца.

В течение всего процесса релаксации, каждое положение каретки (8) соответствует падению усилия в образце и регистрируется на барабане (9), равномерно вращающемся во времени, т. е. вычерчивается кривая релаксации.

Численное значение падения усилия в образце, которое берется по шкале (37), имеет большую точность, так как незначительному перемещению каретки (8) соответствует большое число оборотов колесика (11), на оси которого насажена стрелка шкалы (37).

Процесс многократного нагружения разгрузки образца с вычерчиванием петли гистерезиса, можно осуществлять следующим образом: нагружение или разгружение образца производится при совместной работе двух моторчиков (15) и (21). Процесс нагружения производится так, как это было описано выше. При переходе от нагружения к разгружению, необходимо менять направления движения подъемного винта (18) и вращения винта (27). Для осуществления этого, в случае моторчиков постоянного тока, необходимо менять направление тока. В случае моторчиков переменного тока изменения направлений движения подъемного винта (18) и вращения винта (27) осуществляются переключателем направления вращения. При нагружении включен контакт (30а), и выключен контакт (30в), а при разгрузке — наоборот.

Нагружение и разгружение образца чередуются следующим образом. При моторчиках постоянного тока после того, как каретка (28), нагружая образец, доходит до предварительно установленного правого крайнего положения соответствующего наибольшему выбранному усилию образца (по шкале 35), меняется направление тока к моторчикам одновременно с включением контакта (30в), что приводит к разгружению образца. Когда каретка (28), двигаясь влево, доходит до левого крайнего положения соответствующего наименьшему выбранному усилию (по шкале 35), снова меняется направление тока к моторчикам с одновременным выключением контакта (30в) и включением контакта (30а) и т. д. В случае моторчиков переменного тока, переход от нагружения к разгрузке (и наоборот) осуществляется, изменением направления вращения винтов (18 и 27), переключателем.

При необходимости, процесс многократного нагружения или разгружения, можно автоматизировать, что не представляет особой сложности.

Нами разработана на том же принципе, другая конструкция релаксационного рычага, с записывающим устройством предназначенного для испытания материалов на релаксацию при сравнительно больших начальных усилиях.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 13 II 1957

Վ. Մ. Խվանյան

ՍԱՐՔԵՐ ՌԵՏԻՆԻ ՏԻՊԻ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ռետինի տիպի նյութերի հիմնական մեխանիկական հատկությունների՝ ձգման, սեղմման, սողքի և ռելաքսացիայի փորձնական հետազոտությունների համար գոյություն ունեցող սարքերն ունեն մի շարք թերություններ։ Հոդվածում բերվում են այդ թերությունների սեղմ վերլուծումը և հեղինակի կողմից առաջարկված հետևյալ սարքերի նկարագրությունն ու նրանց աշխատանքի սկզբունքները։

1. Սարք ռետինի տիպի նյութերի ձգման փորձարկման համար (*երկու վարիանտով*).—*Փորձարկման գոյություն ունեցող սարքերը՝ դինամոմետրերը բարդ են իրենց կառուցվածքով և նախատեսված են դեֆորմացիայի համեմատաբար մեծ արագությունների համար (*500 մմ/րոպե*), որի պատճառով հնարավորություն չեն տալիս ստանալ փորձարկվող նյութի ստատիկ բնութագիրը։*

Առաջարկված սարքը հիմնված է հիդրոստատիկ ճնշման սկզբունքի վրա և ունենալով ավելի պարզ կառուցվածք ու դեֆորմացիայի արագության սահուն կարգավորում, հնարավորություն է տալիս ձգման (սեղմման) փորձարկումը կատարել ցանկացած փոքր արագությամբ և ավտոմատիկորեն ստանալ ձգման (սեղմման) կորը՝ փորձարկվող նյութի ստատիկ բնութագիրը։

Սարքն ունի դեֆորմացիայի ցուցիչ, որը պտտվում է անշարժ նիշի նկատմամբ, լոդանի ազդեցության տակ և լարումների ցուցիչ սլաքի ձևով, որը պտտվում է երկրորդ լոդանի միջոցով։ Դիագրամային թմբուկի վրա հատուկ հարմարանքը գծում է նմուշի ձգման կորը։ Սարքի նշված կոնստրուկցիան ապահովում է նմուշի դեֆորմացիայի սահուն կարգավորումը։ Աշխատության մեջ բերված են արդեն օգտագործվող սարքի լուսանկարները (երկու վարիանտով) և կոնստրուկցիայի սխեմատիկ գծագիրը։

2. Սողքագիր (պոլզոգրաֆ).—*Այս սարքը, հանդիսանալով առաջարկված ռելաքսոգրի հետագա կատարելագործումը, հնարավորություն է տալիս ավտոմատորեն ստանալ, ինչպես ռելաքսացիայի, այնպես էլ սողքի կորերը, կատարելով գրանցումը հիշյալ պրոցեսների հենց սկզբից, որը հնարավոր չէ իրագործել գոյություն ունեցող սարքերում։*

Այս նպատակի համար հայտնի սարքերը ունեն պատվանդան, որի վրա ամրացվում է նմուշը և նմուշից կախված փականավոր ջրամբար։ Վերջինիս կշռի ազդեցության տակ նմուշը ձգտում է երկարել, բայց որպես ամենափոքր երկարացման հետևանքով ջրամբարը իջնում է, ջուրը սկսում է արտահոսել, քանի որ բացվում է փականը։ Այսպիսով նմուշը չի երկարում, նրա դեֆորմացիան մնում է հաստատուն և տեղի է ունենում ռելաքսացիա։

Առաջարկվող սարքում, ավելորդ ջրի արտահոսումը գլանային փականի օգնությամբ, որի սնամեջ ձողը ամրացված է շարժական ջրամբարի հատակին, իսկ փականը հենվում է սարքի պատվանդանին։

Փորձի հենց սկզբից բեռի փոփոխման գրանցման համար օգտագործվում է լողացող ջրանցիչ, որի գրանցող մասը անմիջականորեն ամրացված

է բռնող ջրամբարի վրա։ Բերված է արդեն օգտագործվող սարքի լուսանկարը և սխեմատիկ գծագիրը։

3. Մեխանիկական ռելաքսագիր.—Նյութերի ռելաքսացիայի փորձարկման դյուրություն ունեցող սարքերը նախատեսված են միայն ձգման կամ միայն սեղմման համար, կամ թույլ չեն տալիս փորձարկումը կատարել ցանկացած ջերմաստիճանում, երբեմն էլ քիչ են զգայուն, նրանց վրա չի կարելի ստանալ միևնույն նմուշի ձգման կորը ռելաքսացիայի պրոցեսից առաջ, կամ հաջորդաբար կատարել միևնույն նմուշի բեռնումը, բեռնաթափումը և ռելաքսացիան։ Նկարագրվող մեխանիկական ռելաքսագիրը նախատեսված լինելով նյութերի ռելաքսացիայի և ձգման փորձարկման համար, իրագործված է հավասարաբազուկ հորիզոնական լծակով, որն իր վրա ունի շարժական սայլակ իր մատիտով և հավասարաչափ պտտվող դիագրամային թմբուկ։ Թմբուկի վրա, ռելաքսացիայի պրոցեսի սահուն գրանցման համար, սայլակի շարժումն իրագործվում է լծակի հետ շփման արգելակի միջոցով փոխազդեցության մեջ գտնվող, զսպանակաատամնանիվ մեխանիզմին միացված, պտտակի օգնությամբ։

Վերոհիշյալ սարքերից առաջին երկուսը, հեղինակի նախագծով, պատրաստված են Երևանի Կ. Մարքսի անվան պոլիտեխնիկական ինստիտուտի արհեստանոցում և օգտագործվում են։ Սարքերի համար ստացված են համապատասխան հեղինակային վկայագրեր։