

Развитие физико-математических наук в Армении за период Советской власти

Великая Октябрьская социалистическая революция, 40-летие которой отмечает советский народ вместе со всем прогрессивным человечеством, ознаменовала собой глубочайший переворот в экономике, классовой структуре общества, в национальных отношениях и культурной жизни нашей страны.

Октябрьская социалистическая революция не только спасла армянский народ от прямого физического уничтожения, но и открыла ему широчайший простор для политического и экономического развития, утверждения его государственного суверенитета и расцвета науки и культуры.

В дореволюционной Армении, входящей в состав царской России, не было каких-либо центров научных исследований в области физико-математических наук. Не было в этой области также и отдельных исследователей.

В Ереванском государственном университете, основанном в 1921 г., с 1925 г., начал функционировать физико-математический факультет, давший первый выпуск в 1929 г. В первые двенадцать лет существования этого факультета первым поколением его работников (А. А. Акопян, А. Г. Анжур, Б. А. Багатурян, А. О. Тонян, О. А. Навакатикян, А. М. Тер-Мкртчян, В. Х. Торгомян и др.) были сделаны первые шаги: разработана современная армянская научная терминология по физико-математическим дисциплинам; переведено на армянский язык большое количество учебников для высшей и средней школы, написано много оригинальных учебников на родном языке, а также создана лабораторная база.

Были переведены в частности книги: Мрочек «Тригонометрия», К. Поссе «Дифференциальное и интегральное исчисление», В. Грэнвиль и Н. Лузин «Дифференциальное и интегральное исчисление», К. Поссе и И. Привалов «Дифференциальное и интегральное исчисление»; изданы на правах рукописи лекции по теории определителей, высшей алгебре и аналитической геометрии (О. А. Навакатикян), а также курс физики и курс теоретической механики (А. А. Акопян). Был сделан новый перевод «Начал» Эвклида (А. О. Тонян).

Из первых выпускников факультета (1929—1930 гг.) была отправлена в аспирантуру, в Ленинградский университет и различные исследовательские институты АН СССР группа молодежи, в дальнейшем это продолжало практиковаться долгие годы, вплоть до настоящего времени. С деятельностью этого поколения научных работников связано развитие нашего университета и многих учреждений АН Армении за последние два десятилетия.

В развитии физики в нашей республике решающую роль сыграла организованная в годы Отечественной войны в Ереванском университете лаборатория космических лучей. На базе этой лаборатории впоследствии (1944 г.) был основан Институт физики Академии наук Армянской ССР.

С основанием Бюраканской астрофизической обсерватории у нас в Армении начинается бурное развитие астрономии.

Математика. Переходя к краткому изложению основных достижений в области математики, отметим, что они относятся главным образом к теории приближений в комплексной области. Первые исследования в этой области выполнены А. Л. Шагиняном (1937—47 гг.) и примыкают по своему содержанию к исследованиям, которые в свое время проводились в Ленинградском университете В. И. Смирновым, а в Москве — М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем и другими.

Была исследована задача весового полиномиального приближения в круге в случае, когда весовая функция представляет модуль аналитической функции. Были указаны достаточные условия, которые надо наложить на весовую функцию для того, чтобы имела место полнота полиномов (1937 г.). Для простейшей некартезианской области, топологически эквивалентной области, ограниченной двумя соприкасающимися окружностями, было доказано, что полнота не имеет места при алгебраическом соприкосновении граничных кривых у кратной граничной точки (1939 г.).

Была исследована задача об одновременном полиномиальном приближении в среднем в двух соприкасающихся областях.

Впервые была рассмотрена задача об аппроксимации полиномами в среднем по площади в двух соприкасающихся областях. Была построена область с замыканием, заполняющим всю плоскость, в которой имеет место полнота. Для простейших неограниченных областей были указаны метрические критерии полноты и неполноты (1941—1947 гг.). В этих же работах было доказано, что неполнота полиномов на линиях и в областях связана с нормальностью в дополнительных областях полиномов, в среднем ограниченных на данных линиях, либо областях.

В последующем А. Л. Шагиняном рассматривалась также задача о наилучшем полиномиальном приближении в области, ограниченной двумя внутренне-соприкасающимися кривыми.

В 1947 г. вышеупомянутые достаточные критерии были уточнены М. М. Джрбашяном.

В 1950 г. была рассмотрена задача о приближении в среднем дробными степенями в круге с радиальным разрезом (М. М. Джрбашян).

В 1953 году М. М. Джрбашяном получена оценка производных полиномов по заданной функциональной мажоранте на кривых линиях и бесконечных областях. Это явилось весьма изящным развитием известного «неравенства Маркова и Сеге» на случай бесконечных кривых линий и областей и позволило М. М. Джрбашяну исследовать задачу о наилучшем весовом приближении в бесконечных областях и на кривых линиях и в частности для вещественной оси.

Рассмотрена целая группа задач о наилучшем приближении целыми функциями (М. М. Джрбашян).

В 1951 г. были предельно обобщены известные теоремы М. А. Лаврентьева о равномерной полиномиальной аппроксимации на нигде не плотных совокупностях и М. В. Келдыша о равномерной аппроксимации в замкнутой области. Были выведены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять совершенно произвольная связная ограниченная совокупность для того, чтобы на ней возможна была аппроксимация полиномами и рассмотрены задачи о наилучшем приближении на совершенно произвольных совокупностях; при этом выявилось влияние самой функции и геометрии заданной совокупности на порядок приближения (С. Н. Мергелян).

С. Н. Мергеляном исследованы также задачи о приближении рациональными функциями на совершенно произвольных совокупностях, разбивающих плоскость.

Исследована задача о наилучшем приближении гармоническими полиномами в пространственных областях, ограниченных поверхностями с ограниченной кривизной.

Были решены первые задачи об аппроксимации гармоническими многочленами при наличии веса в конечных и бесконечных областях, когда одновременно на границе области сходятся равномерно и полиномы и их нормальные производные к заданным функциям (С. Н. Мергелян, 1956 г.).

Второе направление исследований также принадлежит теории функций.

Были даны интегральные представления целых функций, удовлетворяющие определенным ограничениям на нескольких лучах. Эти представления дали возможность решить ряд интересных задач о единственности целых функций (М. М. Джрбашян).

Была создана теория нового типа интегральных преобразований для функций, заданных на нескольких лучах. Для этих преобразований была разработана теория, аналогичная теории Планшереля. Полученные результаты были применены М. М. Джрбашяном в 1952—1954 гг. для решения ряда интересных задач теории целых функций.

Г. В. Бадаляном был создан единый аппарат в виде рядов, содержащих дробные степени аргумента, позволяющий представить и аналитические и квази-аналитические функции. Эта интересная работа позволила наблюдать непрерывный переход от аналитических функций к квази-аналитическим.

Представляет интерес ряд тонких результатов А. А. Галаляна по общей теории ортогональных рядов.

В области теории дифференциальных уравнений следует отметить интересные результаты, посвященные задачам Дирихле для гиперболических уравнений внутри замкнутого контура (Р. А. Александриян, 1956 г.).

Исследованию несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u + Cuv$ в трехмерном пространстве посвящена работа Р. М. Мартиросяна (1957 г.).

Вопросу о дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля посвящены несколько статей И. С. Саргсяна (1956—57 гг.).

Первые работы в Армении по теории вероятностей появляются в 1946 г. (Г. А. Амбарцумян). Они касаются главным образом линейных процессов Маркова, корреляционной функции и моментов этих процессов. К теории вероятностей относятся также работы С. Х. Туманяна (1954—56 гг.), получившего важные результаты в отношении предельного распределения критерия X^2 при различных предположениях.

Наконец отметим интересные эффективные решения задач о стационарном, а также нестационарном распределении тепла для призматических и многоугольных фигур (Р. С. Минасян, 1952—56 гг.).

Найдено решение краевых задач для бигармонического уравнения в многоугольных областях, сконструированы приближенные решения и даны их оценки (Р. С. Минасян).

Механика. Первые работы по механике, выполненные в Армении, принадлежат А. Г. Анжуру, давшему в 1927 г. уравнения движения твердого тела около неподвижной точки, выраженные в зависимости от углов Эйлера, их производных первого порядка и импульсов моментов сил, заданных относительно неподвижной системы координат. Преимущество этих уравнений в том, что они дают возможность приводить к квадратурам случаи более общего характера, чем рассмотренные ранее Пуансо и Лагранжем.

В 1934 г. А. А. Акопян указал на то, что центробежный момент инерции целесообразно рассматривать как вектор, и установил ряд свойств этого вектора.

Одна из первых работ по теории кручения и изгиба призматических стержней принадлежит Н. Х. Арутюняну, который в 1947 году предложил метод введения вспомогательных функций для решения задачи о кручении стержней полигонального сечения. Задача сводилась к решению вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. В дальнейшем этот метод был широко использован для получения решения ряда задач о кручении призматических стержней полигонального профиля.

Б. Л. Абрамян и Н. О. Гулкаян в 1950—1957 годах применили метод вспомогательных функций для получения решения задачи о кручении полых прямоугольных сечений. Тем же методом были решены задачи о кручении швеллера, тавра, двутавра, креста и др. (Б. Л. Абрамян, Н. О. Гулкаян и Е. А. Александрян), а также задачи об изгибе стержней с сечениями в виде полого прямоугольника с двумя осями симметрии, креста и двутавра (Б. Л. Абрамян и М. С. Саркисян).

В 1954—1955 годах Н. Х. Арутюнян и Н. О. Гулкаян рассмотрели

задачу о центре изгиба прокатных профилей с одной осью симметрии (тавр, швеллер и др.).

В 1955 году К. С. Чобанян дал общее решение задачи о кручении призматических стержней, составленных из нескольких отдельных призматических тел, спаянных по боковым поверхностям. В отличие от Н. И. Мухелишвили, К. С. Чобанян решает задачу с помощью функции напряжений, что позволило ему обобщить теорему Бредта для составных стержней и получить решение задачи о кручении составного тавра.

В 1956 году дано также общее решение задачи об изгибе составных стержней с помощью функции напряжений (К. С. Чобанян). Некоторые конкретные задачи по кручению призматических стержней с тонким покрытием решены А. Х. Манукяном.

Применением своеобразного метода аналитического продолжения, М. М. Джрбациян в 1955 году получил решение задачи о кручении призматических стержней с поперечным сечением в виде прямоугольного треугольника и трапеции.

О. М. Сапонджян в 1949 году, применив метод дополнительных воздействий, получил ряд результатов по кручению призматических стержней прямоугольной формы с трещиной. Некоторые конкретные задачи по кручению и изгибу полых стержней решены Л. К. Капанян.

Для получения решения задачи о кручении изотропных призм полигонального профиля, а также анизотропных призм прямоугольного сечения может быть использован метод, предложенный Р. С. Минасяном в 1956 году.

В 1951 году Б. Л. Абрамян и М. М. Джрбациян предложили метод для получения решения задачи кручения валов переменного сечения. Им было получено решение задачи ступенчатого вала, скрученного произвольной нагрузкой. Этот же метод был использован Б. А. Костандяном для решения задачи вала с кольцевой выточкой и для полого ступенчатого вала.

В другой работе, Б. Л. Абрамяном исследована задача об осесимметричной деформации круглого цилиндра при произвольной нагрузке.

О задачах кручения и изгиба призматических стержней имеются также и другие работы.

Работы армянских механиков по плоской задаче теории упругости немногочисленны. К числу наиболее интересных относятся следующие работы.

Решение плоской задачи для круга с помощью метода дополнительных воздействий (О. М. Сапонджян, 1949).

Решение плоской задачи теории упругости для кругового неконцентрического кольца под действием двух равных и прямо противоположных сил (Х. Е. Машинян).

Б. Л. Абрамян решил плоскую задачу теории упругости для прямоугольника при произвольном нагружении кромок прямоугольника нормальными и тангенциальными силами. При решении задачи были ис-

пользованы бесконечные системы линейных уравнений. Решена плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда на кромках заданы перемещения (Б. Л. Абрамян и М. М. Манукян).

Р. А. Манукян рассмотрел равновесие упругой полуплоскости при действии некоторых частных видов нагрузок.

Теория расчета пластин и оболочек, как тонкостенных элементов конструкций, имеет важное значение для приложений.

Основные исследования в области теории тонких плит в Армении выполнены О. М. Сапонджяном; используя метод функции комплексного переменного, он дал общее решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты при воздействии нагрузки, распределенной по некоторой части ее поверхности.

В 1941 году им даны обобщенные контурные условия для свободно опертых и заделанных плит.

О. М. Сапонджяном решена большая серия довольно сложных конкретных задач по теории изгиба тонких плит. Некоторые конкретные задачи теории изгиба плит решены М. М. Гаспаряном, Г. П. Геонджяном и С. Г. Овакимяном.

В 1956 году О. М. Сапонджи предложил практически удобный способ разложения в ряд отображающей функции Кристоффеля-Шварца.

За последние годы в теории плит большой интерес приобрели нелинейные задачи. С. А. Амбарцумяном предложена своеобразная нелинейная теория анизотропных пластин.

Первые исследования в области теории оболочек относятся к 1946—47 годам. Большая работа принадлежит Т. Т. Хачатрянцу, применившему теорию пологих оболочек В. З. Власова к решению задачи тонких цилиндрических оболочек. Выделяя из решения цилиндрической оболочки решение соответствующей тонкой плиты, Т. Т. Хачатурян получает некоторую поправку в виде быстросходящегося ряда. В работе приводятся решения многочисленных конкретных задач, имеющих прикладное значение.

В 1946—47 годах С. А. Амбарцумяном предложена теория весьма пологих оболочек. Предполагая, что коэффициенты первой квадратичной формы поверхности оболочки при дифференцировании остаются постоянными, автор предлагает техническую теорию весьма пологих оболочек двойкой кривизны.

В 1950 году Т. Т. Хачатрян установил некоторые аналогии между задачами изгиба плит и плоско-напряженным состоянием пластинки. В те же годы им был решен ряд конкретных задач статической и динамической устойчивости цилиндрических оболочек.

В 1947 году С. А. Амбарцумяном начата разработка общей теории анизотропных слоистых оболочек, имеющих большое практическое значение для самолетостроения, судостроения и др.

Базируясь на современных взглядах и идеях общей теории оболочек, автор дает основные уравнения анизотропных слоистых оболочек и ре-

шает ряд задач теории пологих оболочек, теории цилиндрических оболочек и оболочек вращения.

В этих работах особое место занимают исследования, посвященные вопросу определения скорости затухания краевого эффекта и закона распределения температурных напряжений и деформаций в анизотропных слоистых оболочках.

Исходя из общей теории анизотропных слоистых оболочек, построен ряд приближенных теорий изотропных оболочек и установлены пределы их применимости.

В последние годы (1955—1957) С. А. Амбарцумяном разрабатывается общая теория анизотропных оболочек, которая не базируется на гипотезе недеформируемых нормалей. С. А. Амбарцумяном доказано, что, при существенной анизотропии материала оболочки, гипотеза недеформируемых нормалей может привести к значительным погрешностям.

В 1957 году Д. В. Пештмалджян, исходя из общих уравнений, предложенных С. А. Амбарцумяном, решила задачу несимметрично собранной анизотропной слоистой оболочки вращения, когда образующая оболочки — прямая.

Особое место в работах армянских механиков занимают исследования в области теории ползучести. Здесь мы имеем в виду важные исследования Н. Х. Арутюняна и его сотрудников (1947—57 гг.). Эти исследования получили признание как у нас в Советском Союзе, так и за его пределами.

Основные результаты Н. Х. Арутюняна обобщены в его монографии «Некоторые вопросы теории ползучести», изданной в 1952 г.

Основная идея этой работы заключается в том, что меру ползучести автор определяет в виде функции момента приложения нагрузки и момента наблюдения, а не их разности. Такое представление функции меры ползучести позволяет описать картину напряженного состояния упруго-ползучего тела с одновременным учетом «старения» и «наследственности» материала.

Таким образом Н. Х. Арутюнян впервые выдвинул и математически разрешил проблему учета «старения» материала в уравнениях наследственной теории упругости. Именно это обстоятельство оказывается чрезвычайно важным, так как оно позволило поставить и решить ряд важных задач по теории ползучести бетона. К таким задачам относятся, например, вопрос об определении температурных и усадочных напряжений в инженерных сооружениях; задача о затухании напряжений в предварительно напряженных конструкциях и др.

Интересна по постановке задача о расчете сооружений при осадке их основания с одновременным учетом явлений ползучести материала сооружения.

Особое место в работах Н. Х. Арутюняна занимают исследования по нелинейной теории ползучести «стареющих» материалов.

Принимая в основу исследования Н. Х. Арутюняна, М. М. Манукян

в своих работах дает способ расчета некоторых железобетонных конструкций с учетом как линейной, так и нелинейной ползучести бетона.

Н. Х. Арутюнян и Б. Л. Абрамян дали способ расчета температурных напряжений в прямоугольных блоках с учетом ползучести материала. Аналогичное исследование выполнено М. М. Манукяном для круглых блоков.

В 1956 году М. А. Задоян исследовал напряженное состояние цилиндрической трубы, находящейся в упругой среде, при воздействии температурных изменений, усадки бетона и внутреннего давления с учетом ползучести материала. Задача рассматривается в плоской постановке.

Н. Х. Арутюнян совместно с К. С. Чобаняном в 1957 году дали общее решение задачи о кручении составных стержней с учетом ползучести материала. В 1955—57 гг. Т. Т. Аракелян, Л. Б. Бунятыан и Г. С. Григоряном была использована теория ползучести Н. Х. Арутюняна для решения ряда задач строительной механики.

В 1947—57 гг. К. С. Карапетяном, С. Р. Месчяном и др. проводились многочисленные экспериментальные исследования по изучению деформации ползучести таких «стареющих» материалов, как легкий бетон, грунты и др. Ими получен ряд интересных данных в этой области.

В Армении выполнены также некоторые работы по теории пластичности.

В области приложений теории пластичности к вопросам строительной механики необходимо отметить монографию В. В. Пинаджяна «Некоторые вопросы предельного состояния сжатых элементов стальных конструкций», где автор многосторонне исследовал задачу сжато-изогнутых стержней прокатного профиля в стадии упруго-пластических деформаций.

В 1953 году К. С. Чобаняном решена задача устойчивости плоской формы чистого изгиба за пределом упругости при произвольном законе упрочнения.

В 1956—1957 годах М. А. Задояном исследовано термонапряженное состояние бетонных блоков с учетом пластических деформаций.

Наконец отметим исследование А. А. Акопяна, касающееся применения общих принципов термодинамики к равновесию идеальных упругих систем и обобщающее некоторые результаты теории упругости (1944), исследования А. Г. Назарова в области теории внутреннего трения, а также А. Т. Газарова и К. Х. Шахбазяна по теории механизмов.

В последние годы в Армении выполнены также ряд работ по гидромеханике и динамической метеорологии.

Решены задачи о построении теоретических профилей диффузорных и конфузорных каналов при заданном распределении скорости на осевой поверхности. Приближенно решена прямая задача об определении поля скоростей и давления в осесимметричном диффузоре произвольного профиля. Даны вывод энергетических уравнений пульсационного и осредненного движения двухфазной жидкости (В. Г. Саноян).

Рассмотрены вопросы безотрывного обтекания плоских затворов различного очертания, с учетом сил тяжести и др. (Г. И. Мелкоян).

Решены некоторые задачи теории свободной струи вязкой жидкости. Определено распределение скоростей и давления в пограничном слое путем решения уравнений движения, осредненных по сечению струи (Г. А. Бабаджани).

Решены задачи об определении изземных и высотных термобарических полей в стационарной циркуляции атмосферы методами гидромеханики для реальной бароклинной жидкости, нелинейной нестационарной тепловой конвекции большого масштаба на сфере и др. (А. М. Мхитарян).

Астрофизика. В 1945 г. в тридцати километрах северо-западнее столицы республики г. Ереван, вблизи села Бюракан, на южном склоне горы Арагац было начато строительство Бюраканской обсерватории. Высота обсерватории над уровнем моря около 1500 м. Параллельно со строительством, с первых же дней, велась работа по подготовке научных кадров и созданию инструментальной базы обсерватории.

Задача обсерватории состояла в изучении проблем строения нашей звездной системы — Галактики. Однако в первые два-три года, из-за отсутствия необходимых инструментов, работы, выполненные в обсерватории, носили в основном теоретический и статистический характер.

Первый наблюдательный инструмент — 5-дюймовый широкоугольный двойной астрограф — был установлен в 1946 г. На нем были поставлены наблюдения для изучения переменных звезд и межзвездного поглощения света. В последующие годы постепенно вступили в строй новые инструменты, и теоретические исследования в обсерватории стали в еще большей мере сопровождаться наблюдениями.

В 1948 г. был установлен первый 12-дюймовый рефлектор системы Шмидта, а в 1949 г. были установлены два новых инструмента отечественного производства: 10-дюймовый зеркальный телескоп-спектрограф конструкции О. А. Мельникова и Б. К. Юшнисяни для исследования ультрафиолетового излучения звезд и мощный небулярный спектрограф, специально предназначенный для изучения спектров диффузных туманностей.

Астрофизические наблюдения в Бюракане широко развернулись после установления последних трех инструментов, при помощи которых и было начато исследование открытых здесь в 1947 г. звездных систем нового типа — звездных ассоциаций.

В дальнейшем, инструментарий обсерватории обогатился еще двумя телескопами: 16-дюймовым анаберрационным рефлектором с фокусами Кассегрена и Шварцшильда (конструкция Д. Д. МаксUTOва) и 6-дюймовым астрографом с увиолевым объективом. Механическая конструкция астрографа была разработана и создана в мастерской обсерватории.

Вступление в строй этих инструментов позволило расширить круг исследований, ведущихся в обсерватории. На первом из них были начаты, при помощи электрофотометра, колориметрические и поляриметри-

ческие наблюдения звезд и туманностей, а на втором — фотографическим методом — колориметрические наблюдения переменных звезд.

Важным событием в жизни обсерватории было установление в конце 1954 г. нового 21-дюймового рефлектора системы Шмидта. Оно дало возможность начать исследование внегалактических туманностей.

С 1951 г. в Бюраканской обсерватории ведутся работы по изготовлению радиотелескопов и по освоению радиоастрономических методов наблюдения. Начало радиоастрономических исследований относится к тому же 1951 г., когда при помощи параболической антенны диаметром $m 3$ наблюдалось радиоизлучение Солнца на волне 50 см . В настоящее время в обсерватории работают три интерференционных радиотелескопа на волнах $0,5$, $1,5$ и $4,2 \text{ м}$. Все они изготовлены в мастерских обсерватории.

Деятельность обсерватории со дня ее основания, как уже было указано, была посвящена вопросам изучения строения Галактики. Работы велись в следующих основных направлениях:

- а) Структура и физические характеристики межзвездной поглощающей материи.
- б) Физическая природа звезд, туманностей и дискретных источников космического радиоизлучения.
- в) Строение, происхождение и развитие звезд и звездных систем, входящих в состав Галактики.

В состав обсерватории входят четыре лаборатории: звездной астрономии, физики звезд и туманностей, радиоастрофизики и механики. В первых трех из них разрабатываются вопросы, связанные с основными направлениями научной деятельности обсерватории, а четвертая выполняет все механические работы, вытекающие из потребностей строительства и текущей научной деятельности обсерватории.

Важнейшими достижениями обсерватории являются:

1. Теория флюктуаций. Разработана теория флюктуаций яркости в Млечном Пути, в видимом распределении звезд и внегалактических туманностей на небе, вследствие клочковатой структуры поглощающей материи в Галактике. Эта теория позволила, во-первых, уточнить общие черты распределения указанных образований и, во-вторых, что более важно, исследовать строение слоя межзвездной поглощающей материи в Галактике. Применение этой теории к наблюдательным данным позволило определить физические характеристики темных поглощающих облаков, составляющих межзвездное вещество, их средние размеры, среднюю поглощательную способность и т. д. (В. А. Амбарцумян, Б. Е. Маркарян).

Разработанная в Бюраканской обсерватории теория флюктуаций является эффективным методом изучения строения Галактики. Она имеет ряд последователей в Советском Союзе и далеко за его пределами.

2. Звездные ассоциации. Открытие существования в Галактике и в других спиральных галактиках звездных систем нового типа — звездных

ассоциаций заложило основу целого направления в звездной космогонии (В. А. Амбарцумян).

Разработанная в Бюраканской обсерватории, на основе изучения этих систем, теория звездных ассоциаций оказалась исключительно плодотворной и нашла применение в многочисленных работах советских и зарубежных астрономов по звездной космогонии и исследованию Галактики. Исследование звездных ассоциаций позволило разрешить ряд весьма важных вопросов, касающихся происхождения и развития звезд и звездных систем. Наиболее важным и имеющим большое мировоззренческое значение результатом теории звездных ассоциаций является твердо установленный вывод о продолжающемся процессе звездообразования в Галактике в настоящее время. Большое значение имеет также вывод о групповом характере процесса формирования звезд в ассоциациях в виде кратных звезд, звездных цепочек и рассеянных звездных скоплений. В частности, большое значение имело введение в науку понятия кратных звездных систем типа Тrapeции Ориона и звездных цепочек, являющихся неустойчивыми образованиями (В. А. Амбарцумян, Б. Е. Маркарян).

3. Исследование рассеянных звездных скоплений. Изучение многочисленных рассеянных (галактических) звездных скоплений позволило выявить особенности строения этих систем. Оказалось возможным установить связь между их морфологическими особенностями и физическими характеристиками. На этой основе разработана новая классификация рассеянных звездных скоплений. Эта классификация способствовала решению ряда задач, относящихся к возрасту и эволюции указанных систем (Б. Е. Маркарян).

4. Исследования по физике звездных атмосфер. Выполнены спектрофотометрические исследования горячих гигантов и сверхгигантов (входящих, в большинстве, в O-ассоциации) в фотографической и ультрафиолетовой областях спектра. Определены важные характеристики непрерывного спектра — спектрофотометрические градиенты и величина бальмеровского скачка для ряда звезд (Л. В. Мирзоян, Н. Л. Иванова).

Эти данные, в сочетании с фотоэлектрическими избытками цвета звезд, позволили исследовать закон межзвездного поглощения света и влияние избирательного межзвездного поглощения (Л. В. Мирзоян).

5. Исследования по физике туманностей. Рассмотрены некоторые вопросы динамики межзвездной материи. Показано, что в непосредственных окрестностях горячих звезд лучевое давление превышает притяжение звездой, вследствие чего исключается возможность аккреции (захвата межзвездного вещества) для звезд с температурой, превышающей 7000° (Г. А. Гурзаян).

Ценные результаты получены при изучении планетарных туманностей путем применения методов гидро-аэродинамики. Дано теоретическое объяснение происхождения двойных оболочек, наблюдаемых у ряда планетарных туманностей. Получен критерий устойчивости газовых оболочек вокруг звезд (планетарные туманности, оболочки новых звезд

и т. д.). Разработана новая классификация планетарных туманностей, учитывающая их физические особенности и строение. Рассмотрены вопросы эволюции планетарных туманностей (Г. А. Гурзадян).

6. Статистика двойных звезд. Выведены формулы для вычисления вероятности открытия двойных звезд различных типов. С их помощью определено вероятное количество двойных звезд в доступной для исследования части Галактики. Исследованы распределения двойных звезд по разным параметрам компонент (Р. А. Саакян).

Показано, что распределение в пространстве направлений радиусовекторов, соединяющих компоненты двойных звезд, является равномерным.

Статистическое исследование звезд типа Вольф-Райе показало, что они, в подавляющем большинстве случаев, двойные (Л. В. Мирзоян).

7. Межзвездное поглощение света. Выполнены колориметрические наблюдения долгопериодических цефеид фотографическим методом в двух областях спектра: фотографической и фотовизуальной. На основе этих наблюдений определены величины избирательного и общего поглощения света в различных направлениях в Галактике (Г. С. Бадалян).

8. Радиоастрофизика. Произведены измерения относительных интенсивностей некоторых дискретных источников космического радиоизлучения. Распределение энергии радиоизлучения по длинам волн у ряда ярких источников оказывается одинаковым. Отсюда можно сделать вывод об одинаковом механизме излучения у этих источников.

Успешные наблюдения выполнены во время затмения Солнца в 1954 г. Определен радиодиаметр, а также степень радиозатмения Солнца для длин волн 1,5 и 4,2 м (В. А. Санамян, Г. А. Ерикян).

Разработан метод наблюдения дискретных источников способом фазового переключения. Этот метод, совместно с методом накопления сигнала, позволил в последнее время распространить радиоастрономические наблюдения на малозлученные слабые дискретные источники космического радиоизлучения (В. А. Санамян).

9. Источники звездной энергии. Выполнено исследование о физических процессах, происходящих в атмосферах звезд, являющихся членами Т-ассоциаций, а также некоторых других нестационарных звезд. Показано, что наблюдаемые неправильные изменения количества излучаемой этими звездами энергии обусловлены процессами непосредственного освобождения внутризвездной энергии во внешних слоях этих звезд. Эти процессы коренным образом отличаются от процессов теплового излучения (В. А. Амбарцумян, Л. В. Мирзоян).

Процессы непосредственного освобождения внутризвездной энергии во внешних слоях нестационарных звезд являются новостью для физики атомного ядра. Наблюдения показывают, что они связаны с образованием новых ядер.

На основании развитой концепции дано объяснение происхождения кометообразных туманностей (В. А. Амбарцумян).

В согласии с этим объяснением обнаружена значительная поляризация излучения нерадиального характера у туманности IC 432 (Э. Е. Хачикян).

Ю. Кратные галактики. На основе анализа фактического материала о кратных галактиках установлено, что среди этих систем преобладают системы типа Тrapeции Ориона, т. е. динамически неустойчивые образования. Это свидетельствует о сравнительной молодости таких систем. Анализ лучевых скоростей галактик показал, что системы типа Тrapeции и некоторые скопления галактик обладают положительной полной энергией, иначе говоря, они являются расходящимися системами. Показана несостоятельность объяснения радиоизлучения некоторых галактик как результат столкновения двух галактик и дано новое объяснение этому явлению (В. А. Амбарцумян).

За время существования обсерватории опубликовано 23 выпуска «Сообщений Бюраканской обсерватории». В этих выпусках, а также в «Докладах» и «Известиях» Академии наук Армянской ССР и в других советских и иностранных журналах и трудах и отдельными книгами опубликовано более 150 научных работ сотрудников обсерватории.

Бюраканская обсерватория поддерживает тесную связь со многими астрономическими учреждениями Советского Союза. В частности, ведутся совместные работы в содружестве с обсерваторией Ленинградского университета и Главной астрономической обсерваторией АН СССР.

Обсерватория принимает активное участие во всех всесоюзных и во многих международных астрофизических совещаниях и конференциях. Это благоприятно отражается на деятельности обсерватории.

Большое значение для дальнейшей работы обсерватории имели организованное в Бюракане в 1951 г. Всесоюзное совещание по звездным ассоциациям и приуроченное к официальному открытию обсерватории совещание 1956 г. по нестационарным звездам с участием советских и зарубежных ученых.

Растут кадры обсерватории. За истекший со дня основания обсерватории период были защищены одна докторская и десять кандидатских диссертаций. Все сотрудники обсерватории, за редким исключением, — питомцы Ереванского университета.

Физика. В первые же годы существования Физического ин-та исследованиями на г. Арагац А. И. Алиханяном и А. И. Алихановым, совместно с сотрудниками, было показано существование в космических лучах, наряду с электронной и мезонной компонентами, III-ей компоненты космических лучей, состоящей из быстрых протонов. Согласно современным представлениям протонной или нуклонной компоненте космического излучения принадлежит существенная роль в образовании каскада космического излучения в атмосфере, поэтому открытие нуклонной компоненты явилось важнейшим этапом в развитии наших представлений о космических лучах.

Был создан магнитный масспектрометр Алиханяна-Алиханова, который в своем первоначальном варианте позволял определять массы кос-

мических частиц посредством измерения импульса частицы в магнитном поле и ее пробега в поглотителях.

В современном варианте магнитный масспектрометр является сложнейшей установкой, состоящей из огромного магнита, нескольких сот счетчиков Гейгера-Мюллера, двух камер Вильсона, многослойного пропорционального счетчика.

Магнитный масспектрометр является основным прибором, на котором ведутся исследования в Физическом ин-те.

Важнейшей работой, выполненной в Физическом институте АН АрмССР под руководством А. И. Алиханяна, является открытие тяжелых мезонов (варитронов), т. е. частиц более тяжелых, чем мезоны, и более легких, чем протоны. Одновременно с установлением существования этих частиц была также дана нижняя граница времени их жизни. Весь последующий ход развития физики элементарных частиц подтвердил как вывод о существовании частиц с массами, промежуточными между массой μ -мезона и протона, так и оценку их времени жизни.

Так, например, относительно существования впервые обнаруженных в Физическом институте частиц, обладающих массой порядка 1000 m_e и известных теперь под названием К-мезонов, долгое время высказывались сомнения. Однако работы, проведенные через некоторое время в других лабораториях, подтвердили как их существование, так и относительно большое время жизни.

Группой сотрудников под руководством Н. М. Кочаряна были измерены абсолютные интенсивности протонной и мезонной компоненты космического излучения в широком интервале энергии.

В лабораториях Н. М. Кочаряна и А. В. Хримяна были проведены детальные исследования ядерных расщеплений, вызванных космическими лучами в веществе.

В. М. Харитоновым с сотрудниками был создан многослойный пропорциональный счетчик, введение которого в схему магнитного масспектрометра позволило производить измерения масс частиц, независимо от их пробега.

В последние годы группой сотрудников под руководством А. И. Алиханяна были установлены факты, указывающие на существование частиц с массой 500—600 m_e попадающих в установку не из звезд, а из воздуха и, подобно μ -мезонам, являющихся, по-видимому, продуктами распада других тяжелых частиц.

В лабораториях В. М. Харитонova и А. В. Хримяна впервые были измерены массы отдельных частиц по импульсу и ионизирующей способности.

Теоретической группой института был проведен ряд работ по различным вопросам теоретической физики. Был обнаружен очень своеобразный эффект при рассеянии и изучении быстрых частиц в среде (М. Л. Тер-Микаелян). Исследованы вопросы образования и аннигиляции протонов и антипротонов (Л. М. Африкян).

Работа, устанавливающая связь между спектрами π - и μ -мезо-

нов в атмосфере, была удостоена премии Президиума АН СССР (Г. М. Гарибян и И. И. Гольдман).

В течение всего времени своего существования Физическим институтом велись и ведутся совместные работы с ведущими научно-исследовательскими институтами Союза, а именно: с Институтом физических проблем им. Вавилова АН СССР, Физическим институтом им. Лебедева АН СССР, Тепло-технической лабораторией АН СССР и с Научно-исследовательским физическим институтом Московского Государственного университета им. Ломоносова.

Значительно расширена материально-техническая база института. Создается новая база для исследования космических лучей в Нор-Амберте (2000 м над уровнем моря). В несколько раз выросла Арагацкая высотная станция по изучению космических лучей. Построено новое лабораторное здание в г. Ереване.

Значительно увеличена материально-техническая оснащенность лабораторий института.

Ведутся работы по проектированию электронного ускорителя.

Вопросам термодинамики посвящен ряд работ А. А. Акопяна. Ниже упоминаются некоторые из них.

В 1934 г. им впервые выведены законы совместной адсорбции, часть которых была известна в качестве эмпирических правил и только отчасти была обоснована молекулярно-кинетическими соображениями.

В большой работе «Применения термодинамики к теории смесей» (1948 г.) исследуются условия равновесия систем при наличии произвольного числа полупроницаемых диафрагм и при неодинаковых на различные части системы давлениях.

Доказана теорема, устанавливающая вариантность таких систем. «Правило фаз» Гиббса является весьма частным случаем этой теоремы.

Основным результатом исследования является теорема:

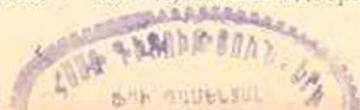
Среди разнообразия систем с неодинаковыми на их части давлениями имеется широкий класс таких, в которых зависимость между неодинаковыми давлениями вполне определяется плотностями компонентов в различных фазах.

Эта теорема является исчерпывающим обобщением «формулы Пойнтинга» и ее значение состоит в том, что вместо общих соотношений между химическими потенциалами, летучестями или коэффициентами активности — величинами неизмеримыми или непосредственно неизмеримыми — мы получаем строгие зависимости между легко измеримыми величинами.

В работе даны разнообразные применения теоремы и из общих соотношений, в качестве частных случаев, выведены важнейшие теоремы физической химии.

В следующих двух работах исследуются общие положения термодинамики.

Как известно, общеприменимость законов смещения равновесия, впервые сформулированных Лешателье в 1884 г., была подвергнута сом-



нению П. С. Эренфестом (1909 г.) и Ш. Раво (Ch. Roveau) (1909 г.). С тех пор эти законы не раз служили предметом дискуссий. В 1936 г. Де Дондер (De Donder) дал точную формулировку законов смещения равновесия в применении к системам, в которых возможны химические реакции.

А. А. Ахопян, введя понятие «термодинамическая связь», доказал теорему, выражающую в самом общем виде законы смещения равновесия для любой системы (1946 г.).

Суть работы «Об одном возможном обосновании второго начала термодинамики» такова: в ряде исследований ставился вопрос о связи второго начала термодинамики с основными положениями механики.

Эти исследования не могли привести к достаточно общему результату, так как были основаны на ограничивающих предположениях.

В указанной работе дан вывод второго начала, опирающийся на теорему живых сил и на то, что число частиц системы очень велико. При этом получается равенство, выражающее приращение энтропии во всех случаях и допускающее ее уменьшение в адиабатических процессах.

Б. М. Левитан и И. С. Саргсян

Асимптотические оценки производных собственных функций уравнения Шредингера

§ 1 Некоторые предварительные оценки

Пусть функция $q(x) = q(x_1, x_2, x_3)$ определена во всем трехмерном пространстве E_3 и снизу ограничена, т. е. существует такая константа m , что для всех x

$$q(x) > m. \quad (1.1)$$

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \{\lambda - q(x)\} u = 0. \quad (1.2)$$

Предположим, что при $|x| \rightarrow \infty$, $q(x) \rightarrow +\infty$. Как известно, в этом случае уравнение (1.2), рассматриваемое во всем пространстве E_3 , имеет чисто точечный спектр. Предположим для простоты, что спектр неотрицателен. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ собственные значения, а через $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ — соответствующие собственные функции уравнения (1.2).

Основная цель настоящей работы — доказать следующую теорему:

Теорема. Если в точке x функция $q(x)$ имеет $(\alpha - 1)$ -ю производную, то при $\mu \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\mu < \mu_n < \mu + 1} |D_x^\alpha \psi_n(x)|^2 = O(\mu^{2\alpha + 2}),$$

где $\mu_n^2 = \lambda_n$, α

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha).$$

Эта теорема играет в вопросах дифференцирования разложений по собственным функциям уравнения Шредингера весьма важную роль.

Обозначим через $G(x, y; \mu)$ функцию Грина уравнения (1.2), которая существует в силу условия (1.1) для $\mu < m$, ($\mu = -\lambda$). Далее предположим, что существуют такие постоянные c и C , что для достаточно больших $|\xi|$ выполняется неравенство

$$|q(\xi)| < C e^{c|\xi|}. \quad (1.3)$$

Для $\mu > 0$ положим

$$g(x, \xi; \mu) = \frac{e^{-r\mu}}{4\pi r}, \quad (1.4)$$

где $r = |x - \xi|$. Функция $g(x, \xi; \mu)$ есть функция Грина уравнения (1.2) при $q(x) = 0$.

При таких предположениях, как известно, справедливы тождества [1]:

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n + \mu} = \int_{E_n} g(x, \xi; \mu) \psi_n(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda_n + \mu} \int_{E_n} q(\xi) g(x, \xi; \mu) \psi_n(\xi) d\xi; \quad (A)$$

$$G(x, \eta; \mu) = g(x, \eta; \mu) - \int_{E_n} q(\xi) g(x, \xi; \mu) G(\xi, \eta; \mu) d\xi. \quad (B)$$

Дифференцируя тождество (A) по μ и по x_i (где i — одно из чисел 1, 2, 3) и применяя элементарное неравенство $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 &\leq 3 \left\{ \left[\int_{E_n} \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{E_n} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ &+ \left. \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_n} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right\} = 3(I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)}). \quad (1.5) \end{aligned}$$

Полагая в неравенстве (1.5) $n = 1, 2, 3, \dots, N$ и суммируя, получим

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 \leq 3 \sum_{n=1}^N (I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)}).$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} &\int_{E_n} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi = \\ &= \left(\int_{r < 1} + \int_{r > 1} \right) q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi, \quad r = |\xi|. \end{aligned}$$

Применяя вышеуказанное элементарное неравенство отсюда получим

$$I_2^{(n)} = \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{E_n} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{(\lambda_n + \mu)^4} \left\{ \left[\int_{r < 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_{r > 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right\}.$$

Соответственно этому сумма $\sum_{n=1}^N I_2^{(n)}$ разбивается на две:

$$\sum_{n=1}^N I_2^{(n)} \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{r < 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{r > 1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Оценим вначале σ_2 . В силу неравенства Бесселя

$$\sigma_2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{C}{(\lambda_n + \mu)^4} \int_{r > 1} q^2(\xi) \left[\frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \right]^2 d\xi \leq \\ \leq \sum_{n=1}^N \frac{C}{(\lambda_n + \mu)^4} \int_{r > 1} q^2(\zeta + x) e^{-2\sqrt{\mu}r} d\zeta, \quad \text{где } r = |\zeta|.$$

В силу условия (1.3) отсюда для достаточно больших μ получим оценку:

$$\sigma_2 = O(\mu^{-4}). \quad (1.6)$$

Оценим теперь σ_1 . Мы имеем

$$\sigma_1 \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \int_{r < 1} \int_{r_1 < 1} q(x + rx) q(x + r_1 \beta) \frac{\psi_n(x + rx) \psi_n(x + r_1 \beta)}{(\lambda_n + \mu)^2} \\ \cdot \frac{dr dr_1}{r^2 r_1^2} + O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{r} e^{-\sqrt{\mu}r}\right), \quad \text{так как } \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} = O(r^{-2}).$$

Поэтому

$$\sigma_1 \leq \frac{C}{\mu^2} \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 \left[\frac{q(x + rx)}{r^2} \cdot \frac{q(x + \beta r_1)}{r_1^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n(x + rx) \psi_n(x + \beta r_1)}{(\lambda_n + \mu)^2} \right] + O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{r} e^{-\sqrt{\mu}r}\right).$$

Далее в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n(x + \alpha r) \psi_n(x + \beta r)}{(\lambda_n + \mu)^2} \leq \\ \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(x + \alpha r)}{(\lambda_n + \mu)^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(x + \beta r)}{(\lambda_n + \mu)^2} \right)^{1/2} < C.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что при фиксированном x

$$\sigma_1 = O(\mu^{-2}). \quad (1.7)$$

Из оценок (1.6) и (1.7) следует, что при фиксированном x имеет место оценка

$$I_2^{(n)} = O(\mu^{-2}). \quad (1.8)$$

Теперь оценим $I_3^{(n)}$. В силу неравенства Бесселя получим неравенство

$$I_3^{(n)} \leq \frac{C}{\mu^2} \int_{E_1} q^2(\xi) \left[\frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_i \partial \mu} \right]^2 d\xi. \quad (1.9)$$

Тогда из определения функции $g(x, \xi; \mu)$ следует, что в (1.9) интеграл справа при фиксированном x есть $O(1)$. Поэтому для $I_3^{(n)}$ получим оценку

$$I_3^{(n)} = O(\mu^{-2}). \quad (1.10)$$

Оценим теперь $I_1^{(n)}$. Применяя неравенство Бесселя и переходя к сферическим координатам получим

$$I_1^{(n)} \leq \frac{C}{64\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty r^2 e^{-2\sqrt{\mu} r} dr = \\ = C\mu^{-3/2} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = C\mu^{-3/2}. \quad (1.11)$$

В силу произвольности числа N , из оценок (1.8), (1.10) и (1.11) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 < C\mu^{-3/2}. \quad (1.12)$$

Отсюда можно получить пока грубую оценку для первых производных собственных функций. В самом деле, положим $\lambda_n = \mu_n^2$, $\mu = \nu^2$. Тогда из оценки (1.12) получим

$$\sum_{\nu < \kappa_n < \nu+1} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{dx_l} \right]^2 < C\nu^{\delta}. \quad (1.13)$$

В дальнейшем мы увидим, что на самом деле в оценке (1.13) можно 5 заменить на 4.

§ 2. Доказательство теоремы для первых производных

Чтобы получить дальнейшее уточнение в оценке (1.13), используем фундаментальное тождество (B). Дифференцируя это тождество по μ и по x_l получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(x, \eta; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} &= \frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} - \int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} G(\xi, \eta; \mu) d\xi - \\ &- \int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \frac{\partial G(\xi, \eta; \mu)}{\partial \mu} d\xi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из тождества (2.1), определения функции $G(x, y; \mu)$ и неравенства Минковского следует

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_2} \left[\frac{\partial^2 G(x, \eta; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} \right]^2 d\eta \right)^{1/2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{E_2} \left[\frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} \right]^2 d\eta \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{E_2} \left[\int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} G(\xi, \eta; \mu) d\xi \right]^2 d\eta \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{E_2} \left[\int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l} \frac{\partial G(\xi, \eta; \mu)}{\partial \mu} d\xi \right]^2 d\eta \right)^{1/2} = i_1 + i_2 + i_3. \end{aligned}$$

В силу оценки (1.11) имеем

$$i_1 = \left(\int_{E_2} \left[\frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} \right]^2 d\eta \right)^{1/2} < C\mu^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Из определения функции $G(x, y; \mu)$ легко следуют тождества

$$i_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_2} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_l \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right)^{1/2}.$$

$$i_3 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{\xi_j}^{\xi_j} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда в силу оценок (1.10) и (1.8) для i_2 и i_3 получим оценки

$$i_2 < C\mu^{-1}, \quad i_3 < C\mu^{-1}. \quad (2.3)$$

Из оценок (2.2) и (2.3) следует оценка

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial \psi_n(x_j)}{\partial x_j} \right]^2 \right)^{1/2} \leq C\mu^{-1/2} + O(\mu^{-1}). \quad (2.4)$$

Так как в тождестве (B) функции $G(x, y; \mu)$ и $g(x, y; \mu)$ можно переставить местами, то из оценки (2.4) следует

$$C\mu^{-1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_j} \right]^2 \right)^{1/2} + O(\mu^{-1}). \quad (2.5)$$

Из оценок (2.4) и (2.5) получим важную оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_j} \right]^2 = C\mu^{-2} + O(\mu^{-2}). \quad (2.6)$$

Из этого асимптотического равенства и тауберовой теоремы Харди—Литтлвуда следует оценка

$$\sum_{\lambda_n < \mu} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_j} \right]^2 = C\mu^{-2} + O(\mu^2). \quad (2.7)$$

Откуда получим оценку, уже уточняющую (1.13), а именно:

$$\sum_{\mu < \lambda_n < \mu+1} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_j} \right]^2 = o(\mu^2).$$

Применяя теорему Г. Фрайда [2]—[4] из (2.7) получим нужную оценку:

$$\sum_{\mu < \lambda_n < \mu+1} \left[\frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x_j} \right]^2 = O(\mu^2).$$

§ 3. Предварительные оценки старших производных

Для оценки вторых производных предположим, что функция $q(x)$ дифференцируема. Тогда дифференцируя тождество (A) два раза по μ , один раз по x_j , потом учитывая, что $\frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} = \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial \xi_j}$ и дифференцируя еще раз по x_j ($j = 1, 2, 3$), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^3} \cdot \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{2} \int_{E_i} \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^3} \int_{E_i} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} [q(\xi) \psi_n(\xi)] d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{2(\lambda_n + \mu)} \int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Далее, применяя элементарное неравенство $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, потом полагая в полученном неравенстве $n = 1, 2, \dots, N$ и суммируя, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_i} \right]^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N \left[\int_{E_i} \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ & + \sum_{n=1}^N \frac{2}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ & + 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^6} \left[\int_{E_i} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} [q(\xi) \psi_n(\xi)] d\xi \right]^2 + \\ & + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_i} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Далее будем оценивать отдельные слагаемые. Проще всего оценить I_4 . Мы имеем, по определению функции $g(x, \xi; \mu)$,

$$\frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} = -\delta_{ij} \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{16\pi\sqrt{\mu}} + \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{16\pi r} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j).$$

Поэтому при фиксированном x

$$\begin{aligned} I_4 & \leq \frac{C}{\mu^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\mu}} \int_{E_i} q(\xi) e^{-\sqrt{\mu} r} \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 + \\ & + \frac{C}{\mu^2} \left[\int_{E_i} q(\xi) \psi_n(\xi) \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{r} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) d\xi \right]^2. \end{aligned}$$

Далее в силу неравенства Шварца отсюда следует оценка:

$$I_4 \leq \frac{C}{\mu^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{\mu} \int_{E_1} q^2(\xi) e^{-2\sqrt{\mu}r} d\xi + \int_{E_1} q^2(\xi) \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^2} (x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 d\xi \right] = O(\mu^{-3}). \quad (3.2)$$

Аналогично можно оценить I_2 . В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial^3 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu} = \delta_{ij} \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{8\pi r} - \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{8\pi r} - \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{8\pi r^2} \cdot \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r}.$$

Тогда, в силу неравенства Шварца, при $\mu \rightarrow \infty$ получим

$$I_2 \leq \frac{C}{\mu^4} \left[\delta_{ij} \int_{E_2} q^2(\xi) \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^2} d\xi + \mu \int_{E_2} \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r} (x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2}{r^4} q^2(\xi) d\xi + \int_{E_2} q^2(\xi) \frac{e^{-2\sqrt{\mu}r}}{r^6} (x_i - \xi_i)^2 (x_j - \xi_j)^2 d\xi \right] = \frac{C}{\mu^4} (I_2' + I_2'' + I_2'''). \quad (3.3)$$

В силу условия (1.3) нетрудно видеть, что I_2' , I_2'' и I_2''' при фиксированном x ограничены. Поэтому из (3.3) следует оценка

$$I_2 = O(\mu^{-3}). \quad (3.4)$$

Оценим теперь I_2 . В силу неравенства Бесселя дело сводится к оценке интеграла

$$\int_{E_2} \left[\frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \right]^2 d\xi. \quad (3.5)$$

Функция $g(x, \xi; \mu)$ зависит от $r = |x - \xi|$ и поэтому, так как интеграл берется по всему пространству, делая замену переменных мы увидим, что $|x - \xi|$ можно заменить на $|\xi|$, так что интеграл (3.5) не зависит от x . Итак,

$$\int_{E_2} \left[\frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_i \partial \mu^2} \right]^2 d\xi = \frac{\delta_{ij}}{256\pi^2 \mu} \int_{E_2} e^{-2\sqrt{\mu}r} d\xi -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\delta_{ij}}{128\pi^2 V \mu} \int_{E_1} \frac{e^{-2V \mu r}}{r} \xi_i \xi_j d\xi + \\ & + \frac{1}{256\pi^2} \int_{E_2} \frac{e^{-2V \mu r}}{r^2} \xi_i^2 \xi_j^2 d\xi = i_1 + i_2 + i_3. \end{aligned}$$

Переходя к сферическим координатам, находим

$$i_1 = \frac{\delta_{ij}}{256\pi} \mu^{-3/2}; \quad i_2 = -\frac{\delta_{ij}}{256\pi} \mu^{-3/2}; \quad i_3 = \frac{3}{1280\pi} \mu^{-3/2}.$$

Итак, для I_1 справедлива оценка

$$I_1 = O(\mu^{-3/2}). \quad (3.6)$$

Значительное отличие по сравнению с предыдущими получается при оценке I_3 .

Положим

$$\begin{aligned} & \int_{E_3} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi = \\ & = \left\{ \int_{r < 1} + \int_{r > 1} \right\} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу элементарного неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ отсюда получим

$$\begin{aligned} & \left[\int_{E_3} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right]^2 \leq \\ & \leq 2 \left\{ \int_{r < 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right\}^2 + \\ & + 2 \left\{ \int_{r > 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right\}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_3 & \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^{\alpha}} \left[\int_{r < 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right]^2 + \\ & + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^{\alpha}} \left[\int_{r > 1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} |q(\xi) \psi_n(\xi)| d\xi \right]^2 = I_3' + I_3'' \end{aligned}$$

Интегрируя второй интеграл последнего неравенства по частям, получим

$$-\int_{r=1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} q(\xi) \psi_n(\xi) d\xi + \int_{r>1} q(\xi) \psi_n(\xi) \frac{\partial^2 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial \xi_l} d\xi = i_1 + i_2.$$

Поэтому

$$I_3 \leq 2(i_1^2 + i_2^2).$$

Далее,

$$\begin{aligned} i_1^2 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left[\int \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} q(\xi) \psi_n(\xi) d\xi \right]^2 = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial g(x, x + \alpha r; \mu)}{\partial x_j} q(x + \alpha r) \frac{\partial g(x, x + \beta r; \mu)}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. q(x + \beta r) \frac{\psi_n(x + \alpha r) \psi_n(x + \beta r)}{(\lambda_n + \mu)^2} d\alpha d\beta \right\} = O(\mu^{-4}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Аналогично оценивается i_2^2 . Для нее получаем такую же оценку

$$i_2^2 = O(\mu^{-4}). \quad (3.8)$$

Комбинируя (3.7) и (3.8) для I_3 получим оценку

$$I_3 = O(\mu^{-4}). \quad (3.9)$$

Теперь оценим I_3 . Мы имеем

$$\begin{aligned} I_3 \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} &\left\{ \left[\int_{r=1} q(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \psi_n(\xi)}{\partial \xi_l} d\xi \right]^2 + \right. \\ &\left. + \left[\int_{r=1} \psi_n(\xi) \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_l} d\xi \right]^2 \right\} = i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Так как, по предположению, функция $q(x)$ дифференцируема, то i_1^2 оценивается так, как в параграфе 1 при получении оценки (1.7). Итак, для i_2 получим оценку

$$i_2 = O(\mu^{-4}). \quad (3.10)$$

Остается оценить i_1 . Мы имеем

$$i_1 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \left(\int_0^1 r^2 dr \int_0^1 r_1^2 dr_1 \int_{\alpha}^{\beta} q(x + r\alpha) q(x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + r_1 \beta) + \frac{\partial g(x, x + rx; \mu)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x, x + r_1 \beta; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + rx)}{\partial \xi_i} \\
& \cdot \left. \frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \xi_i} d\tilde{x} d\tilde{\beta} \right\} \leq \frac{C}{\mu^2} \int_0^1 r^2 dr \int_0^1 r_1^2 dr_1 \int_{\mu}^{\infty} \frac{\partial g(x + rx)}{\partial x_j} \\
& \cdot \frac{\partial g(x + r_1 \beta)}{\partial x_j} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \frac{\partial \psi_n(x + rx)}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \xi_i} d\tilde{x} d\tilde{\beta}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя и на основании оценки (2.4) получим

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^4} \frac{\partial \psi_n(x + rx)}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \xi_i} \right| \leq \\
& \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\left[\frac{\partial \psi_n(x + rx)}{\partial \xi_i} \right]^2}{(\lambda_n + \mu)^4} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{\left[\frac{\partial \psi_n(x + r_1 \beta)}{\partial \xi_i} \right]^2}{(\lambda_n + \mu)^4} \right)^{1/2} < C\mu^{-3}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Далее, мы имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} &= \frac{(x_j - \xi_j)}{4\pi r^3} e^{-\sqrt{\mu} r} - \frac{\sqrt{\mu} e^{-\sqrt{\mu} r} (x_j - \xi_j)}{4\pi r^2} = \\
&= O(r^{-2}) + O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{r} e^{-\sqrt{\mu} r}\right).
\end{aligned}$$

Поэтому из (3.11) в силу оценки (3.12) следует оценка

$$i_1 \leq \frac{C}{\mu^{3/2}} + \frac{C}{\mu^{3/2}} \left(\int_0^1 r e^{-\sqrt{\mu} r} dr \right)^2 = O(\mu^{-3}). \quad (3.13)$$

Из (3.10) и (3.13) для I_3 окончательно следует оценка

$$I_3 = O(\mu^{-3}). \quad (3.14)$$

Итак, для J_3 в силу оценок (3.9) и (3.14) получим оценку

$$I_3 = O(\mu^{-3}). \quad (3.15)$$

Комбинируя оценки (3.2), (3.4), (3.6) и (3.15) получим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^3} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_j} \right]^2 < C\mu^{-3}.$$

Откуда пока для вторых производных получим грубую оценку, а именно:

$$\sum_{j \neq n} \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 < C \mu^2. \quad (3.16)$$

В дальнейшем мы увидим, что на самом деле в оценке (3.16) можно 7 заменить на 6.

§ 4. Доказательство теоремы для вторых производных

Поступая с тождеством (B) так же, как с тождеством (A) в начале предыдущего параграфа, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 G(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} &= \frac{\partial^4 g(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} - \int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} G(\xi, \tau; \mu) d\xi - \\ &- 2 \int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^3 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu} \frac{\partial G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu} d\xi - \int_{E_1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[q(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu^2} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из определения функции $G(x, y; \mu)$, тождества (4.1) и неравенства Минковского следует неравенство:

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_1} \left[\frac{\partial^4 G(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} \right]^2 d\tau \right)^{1/2} &= 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{E_1} \left[\frac{\partial^4 g(x, \tau; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} \right]^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_{E_1} \left[\int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} G(\xi, \tau; \mu) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ &+ 2 \left(\int_{E_1} \left[\int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^3 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu} \frac{\partial G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu} d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{E_1} \left[\int_{E_1} \frac{\partial g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[q(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi, \tau; \mu)}{\partial \mu^2} \right] d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее будем оценивать отдельные слагаемые. В силу оценки (3.6)

$$I_1 = O(\mu^{-1}). \quad (4.3)$$

Далее, в силу определения функции $G(x, y; \mu)$, получим

$$I_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\int_{E_1} q(\xi) \frac{\partial^4 g(x, \xi; \mu)}{\partial x_j \partial x_l \partial \mu^2} \varphi_n(\xi) d\xi \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда в силу оценки (3.2), получим

$$I_2 = O(\mu^{-3}). \quad (4.4)$$

Аналогичным образом из оценок (3.4) и (3.15) получим

$$I_2 = O(\mu^{-3}); \quad I_3 = O(\mu^{-3}). \quad (4.5)$$

Окончательно из неравенства (4.2) и оценок (4.3), (4.4) и (4.5) получим оценку

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} \leq C\mu^{-3} + O(\mu^{-3}). \quad (4.6)$$

Так как в тождестве (B) функции $\bar{G}(x, y; \mu)$ и $g(x, y; \mu)$ можно переставить местами, то из оценки (4.6) получим

$$C\mu^{-3} \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 \right)^{1/2} + O(\mu^{-3}). \quad (4.7)$$

Из оценок (4.6) и (4.7) следует важная оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = C\mu^{-3} + O(\mu^{-3}), \quad \left(C = \frac{3}{1280\pi} \right). \quad (4.8)$$

Из этого асимптотического равенства и тауберовой теоремы Харди — Литльвуда следует

$$\sum_{\lambda_n < \mu} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = C\mu^{-3} + O(\mu^3). \quad (4.9)$$

Отсюда получим оценку, которая уже уточняет оценку (3.16), а именно

$$\sum_{\mu < \lambda_n < \mu+1} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = o(\mu^7), \quad (\mu_n^2 = \lambda_n).$$

Для дальнейшего уточнения, как в параграфе 2, применим теорему Г. Фрайда об оценке остаточного члена в тауберовых теоремах [2]—[4]. Тогда из оценки (4.9) получим

$$\sum_{\mu < \lambda_n < \mu+1} \left[\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x_j \partial x_l} \right]^2 = O(\mu^6),$$

что и доказывает теорему для вторых производных.

Для старших производных теорема доказывается аналогичным образом.

В том случае, когда при $|x| \rightarrow \infty$ $q(x)$ не стремится к бесконечности поступаем следующим образом: берем большую область Ω и полагаем $q_1(x) = q(x)$ для $x \in \Omega$ и $q_1(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Тогда для $q_1(x)$ спектр дискретен и если Ω стремится ко всему пространству, то дискретный спектр вырождается в непрерывный и теорема остается в силе.

Военная инженерная артиллерийская
академия им. Ф. Э. Держинского,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступило 20 VI 1957.

Բ. Մ. Լևիտան, Ի. Ս. Սարգսյան

ՇՐԵԴԻՆԳԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՅՅԱԼՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $q(x) = q(x_1, x_2, x_3)$ ֆունկցիան որովհետև է ամբողջ կոաչափ տարածության մեջ և ներքինը սահմանափակ է: Դիտարկենք հետևյալ համարումը՝

$$\Delta u + (\lambda - q(x))u = 0. \quad (1)$$

Ենթադրենք $q(x) \rightarrow +\infty$, երբ $|x| \rightarrow \infty$: Ինչպես հայտնի է, այդ գեղջում (1) համարումը, դիտարկվելով ամբողջ տարածության մեջ, ունի զուտ կետային սպեկտր: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ -ով նշանակենք (1) համարման սեփական արժեքները, իսկ $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ -ով՝ (1) համարման սեփական ֆունկցիաները:

Հողվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեման:

Թեորեմ. եթե x կետում $q(x)$ ֆունկցիան ունի $(\alpha - 1)$ -րդ կարգի ածանցյալ, ապա, երբ $\mu \rightarrow \infty$, տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը՝

$$\sum_{\mu < \mu_n < \mu + 1} |D_x^\alpha \psi_n(x)| = O(\mu^{2\alpha + 2}),$$

որանց $\mu_n^2 = \lambda_n$, իսկ $D_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$, ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. E. C. Titchmarsh — Eigenfunction expansions associated with partial differential equations (III), Proc. London Math. Soc. (3), 3 (1953).
[2]—[4]. G. Freud — Resglied eines Tauberschen Satzes, I, II, III, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2 (1951); 3(1952); 5(1954).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом

В работе дано точное решение задачи о кручении полого призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, имеющим несимметрично расположенный прямоугольный вырез. При решении задачи использован метод введения вспомогательных функций [1]. Уравнения задачи в частных производных сведены к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами, которые определяются из решения бесконечных систем линейных уравнений. Получены формулы для вычисления жесткости и напряжений. В качестве примера рассмотрен случай квадратного сечения с несимметричным квадратным вырезом. Вычислены жесткость и напряжения с оценкой погрешности. Для сравнения приведены значения жесткости и напряжений, вычисленные по формуле Бредта [3,4] для тонкостенных трубчатых стержней. Полученные количественные результаты даны в таблицах 1 и 2.

Решение задачи о кручении призматического стержня прямоугольного сечения с симметричным прямоугольным вырезом дано в работе Б. Л. Абрамяна [2].

§ 1. Постановка задачи

Задача о кручении призматических стержней с двухсвязным поперечным сечением сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad (1)$$

где $U(x, y)$ — функция напряжений, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0 \text{ на внешнем контуре сечения;} \\ U &= U_0 = \text{const на внутреннем контуре сечения.} \end{aligned} \quad (2)$$

В силу симметрии области поперечного сечения решение задачи ищем только на части сечения $ABCOA$ (фиг. 1).

Чтобы распространить решение на всю область сечения, доста-

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, 0) = \Phi_2(x, 0) = \Phi_4(x, 0) = \Phi_2(0, y) + \Psi_2(0, y) = \\ = \Phi_4(a, y) + \Psi_2(a, y) = 0; \Psi_2(x, d_2) = U_0; \Psi_1(d_1, y) = U_0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi_3(a, y) = \Phi_3(a, y) = \Phi_3(x, 0) + \Psi_3(x, 0) = \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \Psi_3(a-d_3, y) = U_0.$$

Для непрерывности и однозначности решения, функции $\Phi_i(x, y)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\dot{\Phi}_1(x, d_2) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Big|_{y=d_2} = 0; \Phi_1(d_1, y) = \Psi_2(d_1, y) - U_0;$$

$$\Phi_2(d_1, y) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big|_{x=d_1} = 0; \Phi_2(x, d_2) = \Psi_1(x, d_2) - U_0;$$

(9)

$$\Phi_4(a-d_3, y) = \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} \Big|_{x=a-d_3} = 0; \Phi_4(x, d_2) = \Psi_3(x, d_2) - U_0;$$

$$\Phi_3(x, d_2) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \Big|_{y=d_2} = 0; \Phi_3(a-d_3, y) = \Psi_2(a-d_3, y) - U_0.$$

Граничные условия для функций $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$ неоднородны. Следуя идее Гринберга [5], решения для этих функций будем искать в таком же виде, как при однородных граничных условиях, т. е.

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \text{ где } f_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx;$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \text{ где } V_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Psi_2(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy;$$

$$\Psi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3},$$

$$\text{где } W_k(y) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_1}^a \Psi_3(x, y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} dx;$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \text{ где } \varphi_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx;$$

(10)

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \text{ где } U_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy;$$

$$\Phi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3}.$$

$$\text{где } G_k(y) = \frac{2}{d_3} \int_{a-d_3}^a \Phi_3(x, y) \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} dx;$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \text{ где } H_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_4(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy.$$

§ 2. Решение уравнений задачи

Умножая первое из уравнений (6) на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1}$ и интегрируя от 0 до d_1 , второе из уравнений (6) на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2}$ и интегрируя от 0 до d_2 , третье на $\frac{2}{d_3} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3}$ и интегрируя от $a-d_3$ до a , а четвертое на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2}$ и интегрируя от 0 до d_2 , на основании (10), (8) и (9), для определения $\varphi_k(y)$, $U_k(x)$, $G_k(y)$, и $H_k(x)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 \varphi_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_1^2} \Psi_2(d_1, y) - \frac{2k\pi U_0}{d_1^2} (-1)^k; \\ U_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 U_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \Psi_1(x, d_2) - \frac{2k\pi U_0}{d_2^2} (-1)^k; \\ G_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 G_k(y) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_3^2} \Psi_2(a-d_3, y) - \frac{2k\pi U_0}{d_3^2} (-1)^k; \\ H_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 H_k(x) &= \frac{2k\pi(-1)^k}{d_2^2} \Psi_3(x, d_2) - \frac{2k\pi U_0}{d_2^2} (-1)^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (9) получаем следующие граничные условия для функций

$\varphi_k(y)$, $U_k(x)$, $G_k(y)$ и $H_k(x)$:

$$\varphi_k(d_2) = \varphi_k'(d_2) = H_k(a-d_3) = H_k'(a-d_3) = 0; \quad (12)$$

$$U_k(d_1) = U_k'(d_1) = G_k(d_2) = G_k'(d_2) = 0.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} & \frac{4U_0}{k\pi} (-1)^{k+1} \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi}{2d_j} (z-d_l) + \frac{2d_l}{\pi d_j} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_j} (z-d_l) \times \\ & \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p q_p(u)}{p^2 + \left(\frac{d_l k}{d_j}\right)^2} - \frac{2(-1)^k d_l^2 k}{d_j^2 \pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q_p(u)}{p^2 + \left(\frac{kd_l}{d_j}\right)^2} \sin \frac{p\pi z}{d_l} = \\ & = P_k^{(j)}(z, q_p(u)). \end{aligned}$$

Решение уравнений (11) на основании (12) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) &= P_k^{(21)}(y, V_p(d_1)); \\ U_k(x) &= P_k^{(12)}(x, f_p(d_2)); \\ G_k(y) &= P_k^{(23)}(y, V_p(a-d_3)); \\ H_k(x) &= P_k^{(32)}(a-x, W_p(d_4)). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножая первое из уравнений (7) на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1}$ и интегрируя от 0 до d_1 , второе на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2}$ и интегрируя от 0 до d_2 , а третье на $\frac{2}{d_3} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3}$ и интегрируя от $a-d_3$ до a , для определения функций $f_k(y)$, $V_k(x)$ и $W_k(y)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 f_k(y) &= \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 \cdot A_k^{(1)}; \\ V_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 V_k(x) &= \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 \cdot A_k^{(2)}; \\ W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 W_k(y) &= \left(\frac{k\pi}{d_3}\right)^2 \cdot A_k^{(3)}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \frac{2U_p}{k\pi} (-1)^k + \frac{4d_j^2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] = A_k^{(j)}.$$

Из (8) и (10) получаем следующие граничные условия для функций $f_k(y)$, $V_k(x)$ и $W_k(y)$:

$$\begin{aligned} f_k'(b) = f_k(0) + \varphi_k(0) &= 0, \quad V_k(0) + U_k(0) = 0; \\ V_k(a) + H_k(a) = 0, \quad W_k'(b) &= W_k(0) + G_k(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решения уравнений (14) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_k(y) &= B_k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) - A_k^{(1)}; \\ V_k(x) &= N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} + M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} - A_k^{(2)}; \\ W_k(y) &= R_k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-y) - A_k^{(3)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$B_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(21)} V_p(d_1) + A_k^{(12)};$$

$$\begin{aligned}
 N_k &= \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(12)} f_p(d_2) + A_k^{(21)}; \\
 R_k &= \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(23)} V_p(a-d_2) + A_k^{(32)}; \\
 M_k &= -N_k \operatorname{cth} \frac{k\pi a}{d_2} + \Pi_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2},
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\Pi_k = \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(32)} W_p(d_2) + A_k^{(33)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \frac{4d_1^2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] + \frac{2(-1)^k}{k\pi} U_0 \operatorname{ch} \frac{k\pi d_j}{d_1} &= A_k^{(11)}; \\
 \frac{2d_1}{\pi d_j} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_1} \cdot \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\frac{kd_j}{d_1}\right)^2} &= Q_{kp}^{(1j)}.
 \end{aligned}$$

На основании (17) выражение для $V_k(x)$ из (16) можно представить в виде:

$$V_k(x) = N_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) + \Pi_k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} - A_k^{(2)}. \tag{18}$$

§ 3. Исследование бесконечных систем

Подставляя в (17) значения $f_p(d_2)$, $W_p(d_2)$, $V_p(d_1)$ и $V_p(a-d_2)$, согласно (16) и (18), и обозначая

$$\begin{aligned}
 &\frac{4d_1^2}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] + \frac{2U_0}{(k\pi)^2} (-1)^k \frac{d_1}{d_j} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_1} - \\
 &- \frac{2d_1 d_j}{(k\pi)^2} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_1} \left(1 - \frac{2d_1}{k\pi d_j} \operatorname{th} \frac{k\pi d_j}{2d_1}\right) = \tilde{D}_k^{(1j)},
 \end{aligned}$$

получим следующую совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 B_k &= \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(21)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1) N_p + \\
 &+ \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(21)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \Pi_p + D_k^{(12)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_k &= \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(23)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} N_p + \\
 &+ \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(23)} \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi(a-d_3)}{d_2} \Pi_p + D_k^{(22)}; \\
 N_k &= \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(12)} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2) B_p + D_k^{(21)}; \\
 \Pi_k &= \sum_{p=1}^{\infty} Q_{kp}^{(32)} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_3} (b-d_2) R_p + D_k^{(23)}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 B_k &= \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} F_k; \\
 R_k &= \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} H_k; \\
 N_k &= \alpha d_3^2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} L_k; \\
 \Pi_k &= \alpha \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} E_k.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь α — постоянный коэффициент, значение которого будет определено ниже.

Системы (19) примут вид:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{11} H_p + b_k^I; \\
 F_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{21} L_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{22} E_p + b_k^{II}; \\
 H_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{31} L_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{32} E_p + b_k^{III}; \\
 L_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} F_p + b_k^{IV},
 \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$a_{kp}^{11} = \frac{2d_2 k}{\alpha d_2 \pi} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_3}{d_2}\right)^2} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_3} (b-d_2) \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_3};$$

$$\begin{aligned}
 a_{kp}^{21} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_1} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_1}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi}{d_2} (a - d_1) \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2}; \\
 a_{kp}^{22} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_1} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_1}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_2}; \\
 a_{kp}^{31} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_3} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_3}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_1}{d_2}; \\
 a_{kp}^{32} &= \frac{2d_2 k z}{\pi d_3} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_2}\right)^2} \operatorname{csch} \frac{p \pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi (a - d_3)}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_2}; \\
 a_{kp}^{41} &= \frac{2d_1 k}{\pi d_2 z} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_1}{d_2}\right)^2} \operatorname{sch} \frac{p \pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p \pi}{d_1} (b - d_3) \operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_1}; \\
 b_k^I &= \frac{k}{\alpha} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k \pi d_3}{d_2} \cdot \frac{1}{d_3^2} D_k^{(33)}; \\
 b_k^{II} &= k (-1)^k \frac{1}{d_3^2} \operatorname{csch} \frac{k \pi d_2}{d_1} D_k^{(12)}; \\
 b_k^{III} &= k (-1)^k \cdot \frac{1}{d_3^2} \operatorname{csch} \frac{k \pi d_2}{d_3} D_k^{(32)}; \\
 b_k^{IV} &= \frac{k (-1)^k}{\alpha} \cdot \frac{1}{d_3^2} \operatorname{csch} \frac{k \pi d_1}{d_2} D_k^{(21)}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Совокупность четырех систем (21) можно свести к одной системе

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \tag{23}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 E_k &= Z_{4k-3}, \quad F_k = Z_{4k-2}, \quad H_k = Z_{4k-1}, \quad L_k = Z_{4k}; \\
 a_{km}^{11} &= C_{4k-3, 4m-1}; \quad C_{4k-3, 4m} = C_{4k-3, 4m-2} = C_{4k-3, 4m-3} = 0, \\
 b_k^I &= \gamma_{4k-3}, \quad a_{km}^{21} = C_{4k-2, 4m}, \quad a_{km}^{22} = C_{4k-2, 4m-3}, \\
 C_{4k-2, 4m-1} &= C_{4k-2, 4m-2} = 0, \quad b_k^{II} = \gamma_{4k-2}, \quad a_{km}^{31} = C_{4k-1, 4m}, \\
 a_{km}^{32} &= C_{4k-1, 4m-3}, \quad C_{4k-1, 4m-1} = C_{4k-1, 4m-2} = 0, \quad b_k^{III} = \gamma_{4k-1}, \\
 a_{km}^{41} &= C_{4k, 4m-2}; \quad C_{4k, 4m} = C_{4k, 4m-1} = C_{4k, 4m-3} = 0; \quad b_k^{IV} = \gamma_{4k}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Из теории вполне регулярных систем [6] известно, что если $\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| \leq 1 - \theta$ для любого ν и $\theta > 0$ и свободные члены системы ограничены $|\gamma_\nu| \leq M$, то система имеет ограниченное решение $|Z_\nu| \leq K = \frac{M}{\theta}$.

1°. Покажем, что система (23) вполне регулярна. Действительно:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k, 4p-2}| = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} = \\ &= \frac{2d_1 k}{\pi d_2 \alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \times \\ &\times \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} < \frac{d_1 k}{\pi d_2 \alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_1 k}{d_2}\right)^2} \left[1 + \right. \\ &\left. + e^{-\frac{2p\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] < \frac{1}{2\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \right. \\ &\left. - \frac{d_2}{k\pi d_1} \right) < \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}{2\alpha}; \\ \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1, 4p}| + \sum_{p=1}^{\infty} |C_{4k-1, 4p-3}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{31}| + \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{32}| \leq \\ &< \frac{4d_2 k \alpha}{\pi d_3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_3}\right)^2} \cdot \operatorname{csch} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_3}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{2d_2} (a-d_3+d_1) \times \\ &\times \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2} (a-d_3-d_1) < \frac{d_2 k \alpha}{\pi d_3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_2 k}{d_3}\right)^2} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{2d_2} \times \\ &\times \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2} (a-d_3-d_1) e^{\frac{p\pi}{2d_2}(d_1+d_2)} < \frac{d_2 k \alpha}{\pi d_3} \times \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{z^p}{(z^p - q) z^d} - \rho + 1 \right] \frac{\left(\frac{z^p}{z^p q} \right) + z^d \sum_{\infty}^{1-d} \frac{z^p z}{z^p}}{1} >$$

$$> \frac{z^p}{z^p z^d} \operatorname{sh} \cdot (z^p - q) \frac{z^p}{z^d} \operatorname{ch} \cdot \frac{z^p}{q z^d} \operatorname{sch} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{z^p}{z^p q} \right) + z^d \sum_{\infty}^{1-d} \frac{z^p z}{z^p q}}{1} = \left| \sum_{\infty}^{1-d} \frac{z^p z}{z^p q} \right| = \left| \sum_{\infty}^{1-d} \frac{z^p z}{z^p q} \right| = \left| \sum_{\infty}^{1-d} \frac{z^p z}{z^p q} \right|$$

$$\cdot \left[\frac{z^p}{(z^p - \rho z^p - v) z} - \rho + 1 \right] \frac{z}{z} \cong$$

$$\cong \left(\frac{z^p z}{z^p} - \frac{\rho z^p}{z^p z} \operatorname{ch} \right) \left[\frac{z^p}{(z^p - \rho z^p - v) z} - \rho + 1 \right] \frac{z}{z} =$$

$$= \left[\frac{z^p}{(z^p - \rho z^p - v) z^d} - \rho + 1 \right] \frac{\left(\frac{\rho z^p}{z^p q} \right) + z^d \sum_{\infty}^{1-d} \frac{\rho z^p}{z^p q}}{1} >$$

$$> \frac{z^p z}{(z^p + \rho z^p) z^d} \rho (z^p - \rho z^p - v) \frac{z^p z}{z^d} \operatorname{ch} \cdot \frac{z^p z}{v z^d} \operatorname{sch} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{\rho z^p}{z^p q} \right) + z^d \sum_{\infty}^{1-d} \frac{\rho z^p}{z^p q}}{1} > (z^p - \rho z^p - v) \frac{z^p z}{z^d} \operatorname{ch} \cdot \frac{z^p}{z^p z^d} \operatorname{sch} \times$$

$$\times (z^p + \rho z^p - v) \frac{z^p z}{z^d} \operatorname{sch} \cdot \frac{z^p}{v z^d} \operatorname{sch} \cdot \frac{\left(\frac{\rho z^p}{z^p q} \right) + z^d \sum_{\infty}^{1-d} \frac{\rho z^p}{z^p q}}{1} \cdot \frac{\rho z^p}{z^p q} =$$

$$= \sum_{\infty}^{1-d} \left| C_{z^p - \rho z^p - v} \right| = \sum_{\infty}^{1-d} \left| C_{z^p - \rho z^p - v} \right| + \sum_{\infty}^{1-d} \left| C_{z^p - \rho z^p - v} \right| = \sum_{\infty}^{1-d} \left| C_{z^p - \rho z^p - v} \right| + \sum_{\infty}^{1-d} \left| C_{z^p - \rho z^p - v} \right|$$

$$\left[\frac{z^p}{(z^p - \rho z^p - v) z} - \rho + 1 \right] \frac{z}{z} \cong \frac{z^p z}{z^p q} -$$

$$\times \left[\frac{z^p}{(z^p - \rho z^p - v) z} - \rho + 1 \right] \frac{z}{z} = \frac{\left(\frac{z^p}{z^p q} \right) + z^d \sum_{\infty}^{1-d} \frac{z^p z}{z^p q}}{1} \left[\frac{z^p}{(z^p - \rho z^p - v) z} - \rho + 1 \right] \frac{z}{z} \operatorname{ch} \frac{z^p}{z^p q}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)} \right] \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi d_2}{d_2} - \frac{d_2}{k\pi d_2} \right) < \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}}{2\alpha}.$$

Здесь были использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1}(b-d_2) < \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2p\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \quad (i=1, 3);$$

$$\operatorname{sch} \frac{p\pi a}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2}(a-d_1-d_3) < \left[e^{-\frac{p\pi}{2d_2}(d_1+d_3)} + e^{-\frac{p\pi}{2d_2}(2a-d_1-d_3)} \right];$$

$$\operatorname{ch} x - \frac{1}{x} < 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Если $d_1 > d_2$, выбираем α так, чтобы

$$\frac{\alpha}{2} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)} \right] = \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}{2\alpha}, \text{ т. е.}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)}}}$$

Тогда для любого ν

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu,p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)} \right]}.$$

Если же $d_3 > d_1$, то выбираем α

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_2-d_1)}}}$$

Тогда для любого ν

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu,p}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_2)} \right] \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_2)} \right]}.$$

В каждом конкретном случае можно указать определенное значение $\theta > 0$. Значит система (23) вполне регулярна.

2°. Для частного случая $d_1 = a - d_2$, т. е. для случая прямоугольного сечения с внутренней внецентренно расположенной трещиной, система (23) остается вполне регулярной.

3°. Для случая горизонтально расположенной центральной трещины, т. е. когда $b = d_2$, система (23) также вполне регулярна.

4°. Для случая, когда $d_1 = d_2$, т. е. для прямоугольного сечения с центрально расположенным прямоугольным вырезом вместо четырех бесконечных систем (21) получаются две системы, т. к. в этом случае $E_k = L_k$ и $H_k = F_k$. Эти системы можно представить в виде одной системы

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (23')$$

где

$$\begin{aligned} Z_{2p-1} &= L_p = E_p; \quad Z_{2p} = H_p = F_p; \quad \gamma_{2k-1} = b_k^I = b_k^{IV}; \\ \gamma_{2k} &= b_k^{II} = b_k^{III}; \quad C_{2k-1, 2p-1} = C_{2k, 2p} = 0; \\ C_{2k-1, 2p} &= a_{kp}^{II} = a_{kp}^{III}; \quad C_{2k, 2p-1} = c_{kp}. \end{aligned} \quad (24')$$

Здесь c_{kp} на основании (22) имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} c_{kp} &= a_{kp}^{21} + a_{kp}^{22} = a_{kp}^{31} + a_{kp}^{32} = \frac{2d_2 k x}{\pi d_1} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k d_2}{d_1}\right)^2} \times \\ &\times \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2d_2} (a - 2d_1). \end{aligned} \quad (22')$$

5°. Для случая, когда $a = 2b$; $d_1 = d_2 = d_3 = d$, т. е. для случая квадратного сечения с квадратным центрально расположенным вырезом вместо двух бесконечных систем (24') получаем одну бесконечную систему, т. к. вторая система становится следствием первой системы, действительно:

$$\gamma_{2k} = \alpha \gamma_{2k-1}; \quad C_{2k, 2p-1} = \alpha^2 C_{2k-1, 2p}$$

и следовательно

$$Z_{2p} = \alpha Z_{2p-1}.$$

В этом случае

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + \gamma_\nu,$$

где

$$C_{\nu p} = \frac{2\gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + \gamma^2} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d} \operatorname{ch} p\pi \left(\frac{b}{d} - 1\right) \cdot \operatorname{sh} p\pi;$$

$$\gamma_v = \frac{4}{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} v\pi} \cdot \frac{1}{v^2 \pi^2} \left[1 - (-1)^v \right] + \frac{2U_0}{\alpha v \pi^2} \cdot \frac{1}{d^2} - \\ - \frac{2}{\alpha} \frac{1}{v \pi^2} \left(1 - \frac{2}{v\pi} \operatorname{th} \frac{v\pi}{2} \right).$$

§ 4. Определение постоянной U_0

Постоянная U_0 определяется на основании теоремы Бредта (7) о циркуляции касательного напряжения при кручении. Согласно этой теореме:

$$\int_{C_0} T_s ds = 2G\tau\Omega, \quad (25)$$

где C_0 — внутренний контур сечения, Ω — площадь, ограниченная этим контуром, G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины, T_s — проекция касательного напряжения в к.-л. точке контура на направление касательной к этому контуру в той же точке

$$T_s = X_z \frac{dx}{ds} + Y_z \frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) G\tau. \quad (26)$$

Подставляя значение T_s из (26) в (25) и учитывая (5), после некоторых преобразований окончательно для вычисления U_0 получим:

$$\int_{d_2}^b \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{y=d_1} dy - \int_{d_2}^b \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=a-d_2} dy + \int_{d_1}^{a-d_2} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=d_2} dx = \\ = 2(b-d_2)(a-d_2-d_1). \quad (27)$$

Из (10), (16), (20) и (24) получаем следующее выражение для функций $\Psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$).

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{d_1} \left\{ \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \cdot \right. \\ \left. \cdot Z_{4k-2} - A_k^{(1)} \right\}.$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \left\{ \frac{(-1)^k}{k} \alpha d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \cdot \right. \\ \left. \cdot Z_{4k} + \alpha d_3^2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} Z_{4k-3} - A_k^{(2)} \right\}. \quad (28)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_2} \left(d_3^2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-y) \cdot Z_{4k-1} - A_k^{(3)} \right).$$

Непосредственно дифференцировать эти ряды нельзя, т. к. получаются расходящиеся ряды. Можно улучшить сходимость рядов (28), выделяя из них медленно сходящиеся части и суммируя их на основании известных рядов (4).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\xi}{k} = \begin{cases} \frac{\pi - \xi}{2} & \text{при } 0 < \xi < 2\pi \\ 0 & \text{при } \xi = 0, 2\pi; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-)^{k-1} \frac{\sin k\xi}{k} = \begin{cases} \frac{\xi}{2} & \text{при } -\pi < \xi < +\pi \\ 0 & \text{при } \xi = -\pi, +\pi. \end{cases}$$

В результате получим ряды, которые уже можно дифференцировать:

$$\Psi_1(x, y) = \frac{U_0 x}{d_1} + x(d_1 - x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \times \\ \times \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1} \cdot Z_{4k-2};$$

$$\Psi_2(x, y) = \frac{U_0 y}{d_2} + y(d_2 - y) + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \times \\ \times \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} \times \\ \times \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k+3}; \quad (29)$$

$$\Psi_3(x, y) = \frac{U_0}{d_3} (a-x) + (a-x)(d_2 - a + x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} d_3^2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-y) \cdot \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} \times \\ \times Z_{4k-1};$$

Подставляя (29) в (27) и производя интегрирование, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 U_0 = & \frac{d_1 d_2 d_3 [2ab - b d_2 - b d_1 - a d_2]}{(b - d_2)(d_2 d_3 + d_1 d_2) + d_1 d_3 (a - d_1 - d_3)} + \\
 & + \frac{d_1 d_2 d_3^2}{(b - d_2)(d_2 d_3 + d_1 d_2) + d_1 d_3 (a - d_3 - d_1)} \times \\
 & \times \left\{ \frac{d_1}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) + \right. \\
 & + \frac{d_2 a}{\pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} + \frac{d_2 a}{\pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \times \\
 & \times \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} + \\
 & + \frac{d_2 a}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_3) + \\
 & + \frac{d_2 a}{\pi d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{k^2} \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \\
 & + \frac{d_2}{\pi d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^2} \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b - d_2) \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_2} - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [x b_k^I + b_k^{II} + b_k^{III} + x b_k^{IV}] ,
 \end{aligned} \tag{30}$$

где, если ввести обозначение

$$\begin{aligned}
 & \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{d_j}{d_3} \right)^2 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_j}{d_1}} + \frac{1}{3} \frac{d_i d_j}{d_3^2} \left(\frac{U_0}{d_j^2} - 1 \right) + \\
 & + \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{d_j}{d_3} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_j}{2d_i} = g_k^{(ij)}, \\
 & \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^I}{k} = g_k^{(23)},
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{II}}{k} = g_k^{(12)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{III}}{k} = g_k^{(32)}, \quad \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{IV}}{k} = g_k^{(21)},$$

§ 5. Определение жесткости при кручении

Жесткость при кручении призматических стержней с двухсвязным поперечным сечением определяется по формуле:

$$C = G \left[-2U_1 \Omega_1 + 2U_0 \Omega_0 + 2 \int_{\Omega} U(x, y) dx dy \right], \quad (31)$$

где Ω_1 — полная площадь, ограниченная внешним контуром, Ω_0 — площадь, ограниченная внутренним контуром, G — модуль сдвига, Ω — область поперечного сечения стержня, U_1 — значение функции напряжений на внешнем контуре, U_0 — значение функции напряжений на внутреннем контуре.

Поскольку значение функции напряжений на внешнем контуре принято равным нулю, а также в силу симметрии области поперечного сечения, формула для вычисления жесткости (31) принимает вид:

$$C = 4G \left\{ U_0 (a - d_3 - d_1) (b - d_2) + \int_0^a \int_0^b U_1(x, y) dx dy + \right. \\ \left. + \int_{d_1}^a \int_0^{d_1} U_2(x, y) dx dy + \int_{a-d_3}^a \int_0^b U_3(x, y) dx dy \right\}. \quad (32)$$

На основании (5), (10), (13), (16), (18), (19), (20) и (24) получаются следующие значения для функций напряжений:

$$U_1(x, y) = x(d_1 - x) + \\ + d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} + \\ + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \\ + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \left| \sin \frac{k\pi y}{d_2} \right| Z_{4k-3} - \\ - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{a_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \\
 & + \frac{8a_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y-d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1} + \\
 & + \frac{8d_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} ;
 \end{aligned}$$

в области $0 \leq x \leq d_1$, $0 \leq y \leq d_2$.

$$U_2(x, y) = (a-x) [d_2 - (a-x)] +$$

$$+ d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b-d_2) \times$$

$$\times \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} Z_{4k-1} + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \times$$

$$\times \sin \frac{k\pi y}{a_2} \cdot Z_{4k} + \alpha d_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \times$$

$$\times \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-d_3) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} \times$$

$$\times Z_{4k-3} - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \sin \frac{k\pi}{d_3} (a-x) -$$

$$- \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \sin \frac{k\pi y}{d_2} +$$

$$+ \frac{8d_3^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_2) \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \sin \frac{k\pi(a-x)}{d_3} +$$

$$+ \frac{8d_2^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} ;$$

в области $a-d_3 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq d_2$.

В силу (5) функции напряжений $U_1(x, y)$ в области $0 \leq x \leq d_1$, $d_2 \leq y \leq b$, $U_2(x, y)$ в области $d_1 \leq x \leq a-d_3$, $0 \leq y \leq d_2$, $U_3(x, y)$ в области $a-d_3 \leq x \leq a$, $d_2 \leq y \leq b$ принимают соответственно значения $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$ и $\Psi_3(x, y)$ из (29).

Подставляя значения $U(x, y)$ из (29) и (33) в (32) и производя интегрирование, окончательно для вычисления жесткости C получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
 C = 4G \left\{ U_0 \left[ab - \frac{d_3 b}{2} - \frac{d_1 b}{2} - \frac{ad_2}{2} \right] + \frac{4U_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_1^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} + d_3^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + d_2^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] + \frac{1}{6} \left[d_1^3 b + d_2^3 (a - d_3 - d_1) + \right. \right. \\
 \left. \left. + d_3^3 b \right] + \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} - d_3^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_3}{2d_2} \right] - \frac{2\alpha d_2^2 d_3^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \times \right. \\
 \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d_2} (a - 2d_1) \right] Z_{4k} - \frac{2d_3^4}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (b - d_2) \right] \times \\
 \times Z_{4k-1} - \frac{2d_3^2 d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \right] \times \\
 \times Z_{4k-2} - \frac{2d_2^2 d_3^2 \alpha}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d_2} (a - 2d_3) \right] \cdot Z_{4k-3} \Big\}.
 \end{aligned}$$

В случае центрально расположенного выреза, т. е. когда $d_1 = d_2$ для всех k $Z_{4k} = Z_{4k-3}$, $Z_{4k-1} = Z_{4k-2}$ и формула для определения жесткости C принимает вид:

$$\begin{aligned}
 C = 8G \left\{ \frac{U_0}{2} \left[ab - d_1 b - \frac{ad_2}{2} \right] + \frac{4U_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[d_1^2 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} \right] + \frac{1}{6} \left[d_1^3 b + d_2^3 \left(\frac{a}{2} - d_1 \right) \right] + \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \times \right. \\
 \left. \times \left[d_2^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} - d_1^4 \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \right] - \frac{2\alpha d_2^2 d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{2d_2} \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d_2} (a - 2d_1) \right] - \frac{2d_1^4}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^3} \left[1 - \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \right] \right\}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Формула (35) для случая квадратного сечения с квадратным вырезом совпадает с формулой для определения жесткости, данной в работе [2] в несколько иной форме.

§ 5. Определения напряжений

Напряжения легко получить из (29) и (33) на основании формул: $X_z = \frac{\partial U}{\partial y} G\tau$, $Y_z = -\frac{\partial U}{\partial x} G\tau$.

$$X_z = \left\{ \frac{d_3^2 \pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1} \times \right. \\ \left. \times Z_{4k-2} \right\} G\tau.$$

$$Y_z = \left\{ \frac{\pi d_3^2}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b-y) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cos \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} - \right. \\ \left. - d_1 \left(\frac{U_0}{d_1^2} + 1 \right) + 2x \right\} G\tau \quad 0 \leq x \leq d_1, \quad d_2 \leq y \leq b.$$

$$X_z = \left\{ d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y-b) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \times \right. \\ \left. \times Z_{4k-1} \right\} G\tau.$$

$$Y_z = \left\{ d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y-b) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \right. \\ \left. + d_3 \left(\frac{U_0}{d_2^2} + 1 \right) - 2(a-x) \right\} G\tau \quad a - d_2 \leq x \leq a, \quad d_2 \leq y \leq b.$$

$$X_z = \left\{ \frac{a d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \right. \\ \left. + \frac{a d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-2} + \right. \\ \left. + d_2 \left(\frac{U_0}{d_2^2} + 1 \right) - 2y \right\} G\tau.$$

$$Y_z = \left\{ \frac{a d_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \operatorname{sn} \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k-3} \Big\} G\tau. \\
& \qquad \qquad \qquad d_1 \leq x \leq a - d_3, \quad 0 \leq y \leq d_2. \\
X_2 = & \left\{ \frac{d_3^2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} + \right. \\
& + \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \\
& + \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} - \frac{2U_0}{d_1} \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} \sin \frac{k\pi x}{d_1} - \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \times \\
& \times \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \times \cos \frac{k\pi y}{d_2} + \frac{8d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \times \\
& \times \sin \frac{k\pi x}{d_1} + \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} \Big\} G\tau. \\
Y_2 = & \left\{ 2x - d_1 - \frac{d_3^2\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b - d_2) \cos \frac{k\pi x}{d_1} Z_{4k-2} - \right. \\
& - \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (a - d_1) \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k} - \\
& - \frac{ad_3^2\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_3}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} + \\
& + \frac{2U_0}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \cos \frac{k\pi x}{d_1} + \\
& + \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} - \\
& - \frac{8d_1}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \cos \frac{k\pi x}{d_2} - \\
& - \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \Big\} G\tau. \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \leq x < d_1, \quad 0 \leq y < d_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2 = & \left(d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-d_2) \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} Z_{4k-1} + \right. \\
& + \frac{ad_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k} + \\
& + \frac{ad_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-d_3)}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} Z_{4k-3} - \\
& - \frac{2U_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_3} \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} - \\
& - \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} + \\
& + \frac{8d_3}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_2) \sin \frac{k\pi (a-x)}{d_3} + \\
& \left. + \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \cos \frac{k\pi y}{d_2} \right\} G\tau.
\end{aligned}$$

$$Y_2 = \left\{ d_3 - 2(a-x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + d_3 \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \operatorname{ch} \frac{k\pi (b-d_2)}{d_3} \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_2} Z_{4k-1} + \\
& + \frac{ad_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-x) \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k} + \\
& + \frac{ad_3^2 \pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi a}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi (a-d_3)}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \cdot Z_{4k-3} - \\
& - \frac{2U_0}{d_3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_3} \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_3} - \\
& - \frac{2U_0}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi (a-x)}{d_2} \times \\
& \times \sin \frac{k\pi y}{d_2} + \frac{8d_3}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_3} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_3} (y-d_4) \cos \frac{k\pi (a-x)}{d_3} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{8d_2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-x)}{d_2} \sin \frac{k\pi y}{d_2} \} G\tau$$

$$a - d_3 < x \leq a, \quad 0 \leq y < d_2.$$

§ 7. Пример

В качестве примера вычислена жесткость при кручении и определены напряжения для призматического стержня квадратного сечения $a = 2b$ с квадратным вырезом, т. е. при $a - (d_1 + d_3) = 2(b - d_2)$.

Ниже приведены оценки для неизвестных после применения логарифм (6).

$$\text{Если } d_1 = 2d_3, \text{ а } \frac{b}{d_2} = 1,5, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 1,13185 U_0/d_2^2 - 0,02930 &\leq Z_1 \leq 1,16483 U_0/d_2^2 + 0,00323 \\ 0,78295 U_0/d_2^2 - 0,10287 &\leq Z_2 \leq 0,80638 U_0/d_2^2 - 0,07976 \\ 0,55199 U_0/d_2^2 - 0,25649 &\leq Z_3 \leq 0,58531 U_0/d_2^2 - 0,22362 \\ 0,82238 U_0/d_2^2 - 0,57560 &\leq Z_4 \leq 0,87502 U_0/d_2^2 - 0,52368 \\ 0,75077 U_0/d_2^2 - 0,28954 &\leq Z_5 \leq 0,80623 U_0/d_2^2 - 0,23486 \\ 0,51473 U_0/d_2^2 - 0,33182 &\leq Z_6 \leq 0,55157 U_0/d_2^2 - 0,29548 \\ 0,40527 U_0/d_2^2 - 0,23969 &\leq Z_7 \leq 0,45375 U_0/d_2^2 - 0,19187 \\ 0,62837 U_0/d_2^2 - 0,53426 &\leq Z_8 \leq 0,70909 U_0/d_2^2 - 0,45466 \\ 0,63799 U_0/d_2^2 - 0,48821 &\leq Z_9 \leq 0,84709 U_0/d_2^2 - 0,28200 \quad (\nu \gg 9), \end{aligned}$$

причем

$$1,08147 \leq U_0/d_2^2 \leq 1,10335.$$

$$\text{Если } d_1 = 2d_3, \text{ а } \frac{b}{d_2} = 10, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 1,05262 U_0/d_2^2 + 0,06136 &\leq Z_1 \leq 1,32842 U_0/d_2^2 - 0,01153 \\ 0,67579 U_0/d_2^2 - 0,03172 &\leq Z_2 \leq 0,84769 U_0/d_2^2 - 0,07715 \\ 0,41166 U_0/d_2^2 - 0,16632 &\leq Z_3 \leq 0,65446 U_0/d_2^2 - 0,23048 \\ 0,62827 U_0/d_2^2 - 0,44334 &\leq Z_4 \leq 1,06117 U_0/d_2^2 - 0,55775 \\ 0 \leq Z_5 &\leq 1,22814 U_0/d_2^2 - 0,32457 \quad (\nu \gg 5) \end{aligned}$$

Здесь

$$9,13235 \leq U_0/d_2^2 \leq 9,19229$$

В таблице 1 приведены верхние \bar{C} и нижние \bar{C} оценки значения жесткости в обоих случаях. За расчетную формулу принято

$C_0 = \frac{\bar{C} + \bar{C}}{2}$. Для сравнения приведены значения жесткости C^* для случая центрально расположенного выреза из работы (2), значения жесткости C^{**} , вычисленные по формуле (3) для тонкостенных трубчатых стержней.

$$C^{**} = \frac{4F^2G}{\int \frac{ds}{\delta}}$$

(где δ — толщина стенки, s — длина осевой линии кольцевого сечения трубы, F — площадь, заключенная внутри срединной линии кольцевого сечения), а также относительная погрешность $\beta = \frac{C - C^{**}}{C}$, выраженная в процентах.

Таблица 1

b/d_2	10	1,5
\bar{C}/Gd_2	6611,9	10,9070
\bar{C}/Gd_2^4	6658,6	10,9448
C^*/Gd_2^4	6635,3	10,9259
C^*/Gd_2^4	7035	11,0515
C^{**}/Gd_2^4	6455,55	7,5294
$\beta\%$	2,7	31,09

Из приведенной таблицы видно, что жесткость стержня с центрально расположенным вырезом больше, чем жесткость стержня со сдвинутым относительно центра вырезом. Формула Бредта дает хорошие результаты для тонкостенных стержней ($b/d_2 = 10$) и не применима для вычисления жесткости толстостенных стержней ($b/d_2 = 1,5$).

В таблице 2 даны значения максимальных напряжений с недостатком \bar{X}_z , \bar{Y}_z и с избытком \tilde{X}_z и \tilde{Y}_z , а также значения максимальных напряжений, вычисленных по формуле Бредта (4).

Формула Бредта в применении к данному сечению принимает вид:

$$\tau_{max} = \frac{C}{2d_2(2b-d_2) \left[a - \frac{d_1+d_2}{2} \right]} \times \left[1 + \frac{d_2}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 \left(2 + \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{d_2} \right)}{ab \left[a + b \left(\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{d_2} \right) \right]} \right]$$

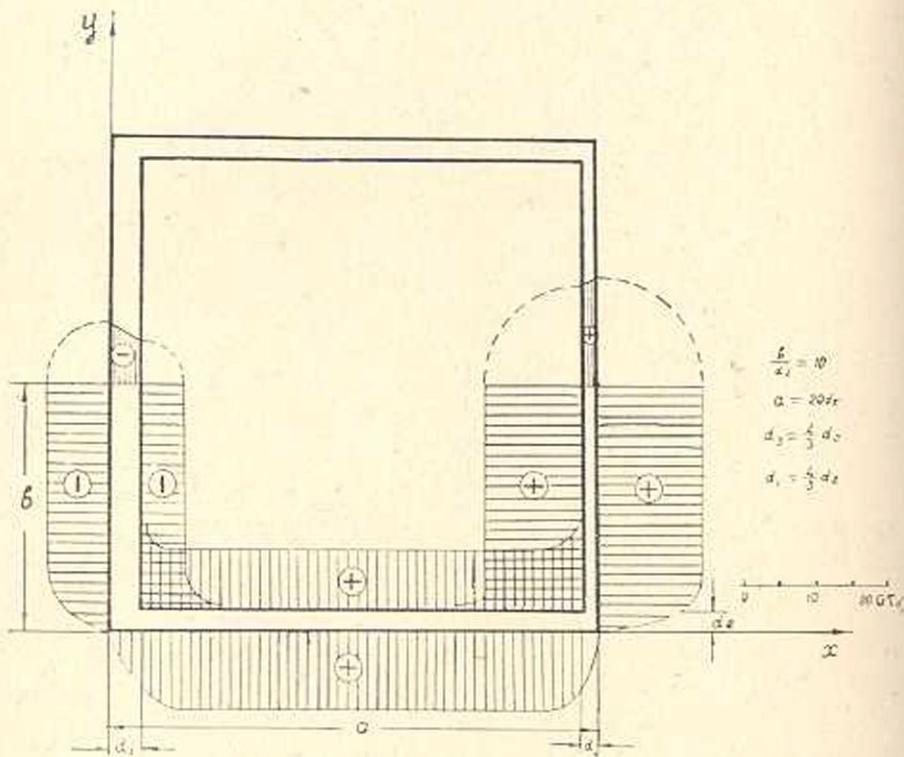
Здесь не принята во внимание концентрация напряжений по входящим углам (см. табл. 2).

$$\text{Здесь } X_z^* = \frac{\tilde{X}_z + \bar{X}_z}{2}, \quad Y_z^* = \frac{\tilde{Y}_z + \bar{Y}_z}{2}$$

$$\text{Напряжения } X_z(0, b) = X_z(a, b) = Y_z \left(\frac{5}{9} a, 0 \right) = 0$$

Таблица 2

		b/d_2	10	1,5
$x=0, y=b$	$\bar{Y}_z / G\tau d_2$		- 8,2275	- 1,9544
	$\bar{Y}_z' / G\tau d_2$		- 8,1626	- 1,8883
	$Y_z^0 / G\tau d_2$		- 8,1950	- 1,9213
	$\tau_{max}^0 / G\tau d_2$		7,2897	1,3657
$x=a, y=b$	$\bar{Y}_z / G\tau d_2$		14,3652	2,2098
	$\bar{Y}_z' / G\tau d_2$		14,4551	2,2596
	$Y_z^0 / G\tau d_2$		14,4102	2,2347
	$\tau_{max}^0 / G\tau d_2$		14,5735	2,7315
$x=0, y=0$	$\bar{X}_z / G\tau d_2$		10,1323	1,9186
	$\bar{X}_z' / G\tau d_2$		10,1923	1,9982
	$X_z^0 / G\tau d_2$		10,1623	1,9584
	$\tau_{max}^0 / G\tau d_2$		9,7197	1,8210



Фиг. 2.

На фиг. 2 и 3 даны эпюры напряжений для $\frac{b}{d_2} = 10$ и $\frac{b}{d_2} = 1,5$.

դիֆերենցիալ հալասարման լուծումը բերվում է հաստատուն գործակիցների սովորական դիֆերենցիալ հալասարումների սխեմաի լուծմանը:

Ինանդրման գործակիցները որոշվում են գծային հալասարումների անփերջ սխեմաից, որը լիովին սեպուլլար է:

Որպես թվային օրինակ դիտարկված է քառակուսի լայնական հատվածքով սնամեջ ձողի ուղղման դեպքը:

Հաշված են այդ ձողի կոշտությունը ուղղման մամանակ և լարումները հատվածքի մի շարք կետերում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Арутюнян ДАН Арм. ССР, т. IX, № 2, 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. Б. Л. Абрамян ПММ, т. XIV, н. 3, 1950.
3. А. Феттль и Л. Феттль. Сила и деформация. ОНТИ, НКТП СССР, 1936.
4. И. В. Геккелер. Статика упругого тела. ОНТИ, ГПТИ, 1934.
5. Г. А. Гринберг. Изв. АН СССР, серия физическая, 1946, т. X, вып. 2.
6. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1949.
7. Л. С. Лейбензон. Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Н. Х. Арутюнян, К. С. Чобанян

Изгиб призматических стержней составленных из различных материалов, с учетом ползучести

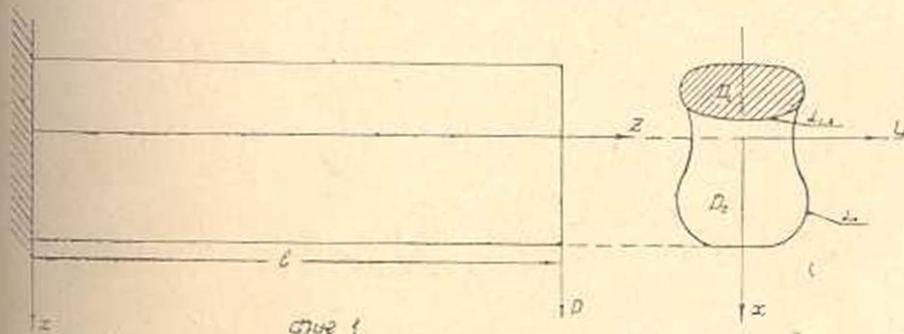
Задача об изгибе упругого составного стержня была исследована в работах [1,2].

В настоящей статье рассматривается задача об изгибе составного стержня поперечной силой с учетом ползучести материалов тел, составляющих стержень. Обобщена формула для циркуляции касательных напряжений изгиба. Получено также контурное условие задачи об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием в ее приближенной постановке.

В качестве примера рассмотрен изгиб составного стержня прямоугольного сечения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим призматический стержень, состоящий из двух призматических тел, спаянных по боковым поверхностям. Пусть попереч-



Фиг. 1.

ное сечение стержня состоит из двух областей D_1 и D_2 . Обозначим через L_0 контур области D_0 поперечного сечения изгибаемого стержня, а через $L_{1,2}$ — линию раздела областей D_1 и D_2 . Предположим, что поперечное сечение стержня обладает одной осью симметрии.

Пусть один конец стержня заделан, а к другому концу приложена сила P , направленная параллельно одной из приведенных главных осей инерции поперечного сечения стержня.

Начало координат поместим в произвольной точке оси симметрии сечения заделанного конца стержня, направляя ось z параллельно образующей цилиндрической поверхности стержня, а оси x и y — главным приведенным осям инерции его поперечного сечения.

Предположим, что коэффициенты Пуассона материалов составляющих тел одинаковы. Тогда при изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \tau_x = \sigma_y = 0 \quad (1.1)$$

Компоненты тензоров напряжения и деформации в областях D_i ($i = 1, 2$) обозначим соответственно через $\sigma_z^{(i)}$, $\tau_{xz}^{(i)}$, $\tau_{yz}^{(i)}$, $\varepsilon_z^{(i)}$, $\gamma_{xz}^{(i)}$ и $\gamma_{yz}^{(i)}$.

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений в областях D_i , как известно [3], можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{(i)} &= \frac{1}{E_i} \sigma_z^{(i)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_z^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau} C_i(t, \tau) d\tau; \\ \gamma_{xz}^{(i)} &= \frac{1}{G_i} \tau_{xz}^{(i)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{xz}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau; \\ \gamma_{yz}^{(i)} &= \frac{1}{G_i} \tau_{yz}^{(i)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{yz}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $C_i(t, \tau)$ и $\omega_i(t, \tau)$ обозначают меры ползучести материалов в соответствующих областях D_i ($i = 1, 2$) при осевой деформации и чистом сдвиге. Между C_i и ω_i , как известно, имеет место зависимость

$$\omega_i(t, \tau) = 2(1 + \nu) C_i(t, \tau). \quad (1.3)$$

Продольную деформацию ε_z и, следовательно, нормальные напряжения $\sigma_z^{(1)}$ и $\sigma_z^{(2)}$ в соответствующих областях D_1 и D_2 , при поперечном изгибе составного стержня, представим в следующей форме:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2} [A_0(t)x + B_0(t)](l - z); \quad (1.4)$$

$$\sigma_z^{(i)} = [A_i(t)x + B_i(t)](l - z), \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z = l$ и произвольным сечением $z = \text{const}$, будем иметь

$$\int \int_{D_2} \sigma_z dx dy = 0, \quad \int \int_{D_2} x \sigma_z dx dy = -M. \quad (1.6)$$

Здесь M — изгибающий момент в данном сечении $z = \text{const}$ стержня, равный

$$M = P(l - z). \quad (1.7)$$

Подставляя (1.4) в первое соотношение (1.2), получаем систему четырех интегральных уравнений относительно шести функций $A_i(t)$ и $B_i(t)$, ($i = 0, 1, 2$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_i} A_i(t) - \int_{z_1}^t A_i(\tau) \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial \tau} d\tau &= \frac{1}{E_2} A_0(t); \\ \frac{1}{E_i} B_i(t) - \int_{z_1}^t B_i(\tau) \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial \tau} d\tau &= \frac{1}{E_2} B_0(t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

Остальные два уравнения для определения функций A_i и B_i получаем из условий равновесия (1.5), используя в них (1.4).

$$\begin{aligned} S_{1y} A_1(t) + S_{1z} B_1(t) + S_{2y} A_2(t) + S_{2z} B_2(t) &= 0; \\ I_{1y} A_1(t) + S_{1y} B_1(t) + I_{2y} A_2(t) + S_{2y} B_2(t) &= -M, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $S_i = \iint_{D_i} dx dy$ — площадь области D_i , $S_{iy} = \iint_{D_i} x dx dy$ — статический момент площади D_i относительно оси y , а $I_{iy} = \iint_{D_i} x^2 dx dy$ — момент инерции площади D_i относительно той же оси.

Система уравнений (1.7) и (1.8) достаточна для определения функций A_i и B_i ($i = 0, 1, 2$), через которые определяются осевая деформация ε_z и нормальные напряжения $\sigma_z^{(1)}$ и $\sigma_z^{(2)}$ в областях D_1 и D_2 .

Перейдем теперь к определению касательных напряжений $\tau_{yz}^{(1)}$ и $\tau_{yz}^{(2)}$ ($i = 1, 2$). Обратимся к уравнениям равновесия. Используя в этих уравнениях (1.1) и (1.5), находим

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial z} = 0; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial y} - A_i(t) x - B_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10) показывают, что касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} не зависят от координаты z .

Уравнение (1.11) будет удовлетворено, если напряжения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ представить через некоторую функцию $F(x, y, t)$, не зависящую от координаты z , в следующем виде

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(i)} &= \frac{\partial F_i}{\partial y} + A_i(t) \frac{x^2}{2} + B_i(t) x + \varphi_i(y, t); \\ \tau_{yz}^{(i)} &= -\frac{\partial F_i}{\partial x} + \psi_i(x, t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

($i = 1, 2$).

Здесь через F_i обозначена функция напряжения $F(x, y, t)$ в области D_i ($i=1, 2$), а $z_i(x, t)$ и $\psi_i(x, t)$ — произвольные функции.

Условие совместности деформаций для рассматриваемой здесь задачи будет выражаться следующими соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z_i^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i^{(i)}}{\partial x} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z_i^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i^{(i)}}{\partial y} \right) = \frac{2\nu}{E_i} A_i(t) - 2\nu \int_{z_i}^t A_i(\tau) \frac{\partial C_i(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.13)$$

$(i=1, 2)$

На основании (1.2) и (1.12) из (1.13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \frac{\partial}{\partial x} \Delta F_i - \int_{z_i}^t \frac{\partial}{\partial x} \Delta F_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{G_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \int_{z_i}^t \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau = 0; \\ \frac{1}{G_i} \frac{\partial}{\partial y} \Delta F_i - \int_{z_i}^t \frac{\partial}{\partial y} \Delta F_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{G_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \int_{z_i}^t \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \\ + \frac{2\nu}{E_i} A_i(t) - 2\nu \int_{z_i}^t A_i(\tau) \frac{\partial C_i}{\partial \tau} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Принимая во внимание (1.3) и интегрируя соотношения (1.14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \Delta F_i - \int_{z_i}^t \Delta F_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - \int_{z_i}^t \left(\frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + \\ + \frac{\nu y}{G_i(1+\nu)} A_i(t) - \frac{\nu y}{1+\nu} \int_{z_i}^t A_i(\tau) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau + C_i(t) - G_i \int_{z_i}^t C_i(\tau) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$(i=1, 2)$

где $C_i(t)$ — произвольные функции интегрирования.

Соотношение (1.15) является однородным интегральным уравнением Вольтерра, которое, кроме нулевого, других решений не имеет. Следовательно, из (1.15) находим

$$\Delta F_i + \frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\nu}{1+\nu} A_i y + G_i C_i = 0, \quad (i=1, 2). \quad (1.16)$$

Таким образом функция напряжений $F_i(x, y, t)$ в областях D_i ($i=1, 2$) удовлетворяет уравнениям (1.16).

Для выяснения физического смысла функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ обратимся к понятию о среднем вращении бесконечно малого элемента поперечного сечения изгибаемого стержня в плоскости xy .

Обозначая компоненты вектора перемещений в областях D_i соответственно через u_i , v_i и w_i ($i=1,2$) имеем

$$\gamma_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y}. \quad (1.17)$$

Внося значения $\gamma_{xz}^{(i)}$ и $\gamma_{yz}^{(i)}$ из (1.3) в (1.17) и принимая во внимание (1.12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial x} &= \frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} + A_i \frac{x^2}{2} + B_i x + \varphi_i \right) - \\ &- \int_{z_1}^z \left[\frac{\partial F_i}{\partial y} + A_i \frac{x^2}{2} + B_i x + \varphi_i \right] \frac{\partial}{\partial z} \omega_i dz - \frac{\partial u_i}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial y} &= -\frac{1}{G_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} - \psi_i \right) + \int_{z_1}^z \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} - \psi_i \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz - \frac{\partial v_i}{\partial z}, \\ &(i=1,2). \end{aligned}$$

Составляя и приравнявая смешанные производные w_i , на основании (1.18) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \left(\Delta F_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - \int_{z_1}^z \left(\Delta F_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Сравнивая (1.19) с (1.15), имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \Omega_i = \frac{\nu}{(1+\nu)} \left(A_i \frac{1}{G_i} - \int_{z_1}^z A_i \frac{\partial}{\partial z} \omega_i dz \right) y + c_i - G_i \int_{z_1}^z c_i \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz. \quad (1.20)$$

Здесь введено обозначение $\Omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)$, которое является средним вращением элементов поперечного сечения стержня в плоскости xu . Как показывает соотношение (1.20), изменение Ω_i по длине изгибаемого стержня состоит из двух частей: одна часть, обусловленная произвольной функцией $c_i(t)$ и общая для всех элементов, зависит только от времени и соответствует чистому кручению, а вторая часть, линейно зависящая от координаты y , соответствует искажению поперечного сечения стержня вследствие его изгиба.

Так как на поверхности раздела $L_{1,2}$ имеет место полное сцепление, то на основании (1.7) получим

$$c_1 - G_1 \int_{z_1}^l c_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_1 d\tau = c_2 - G_2 \int_{z_1}^l c_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_2 d\tau = \vartheta(t), \quad (1.21)$$

где ϑ — степень кручения изгибаемого стержня. В случае, когда изгибающая сила проходит через центр изгиба стержня, т. е. изгиб не сопровождается кручением, будем иметь

$$\vartheta = c_1 = c_2 = 0. \quad (1.22)$$

Так как боковая поверхность изгибаемого стержня свободна от внешних сил, должно выполняться условие

$$\tau_{xz}^{(i)} l + \tau_{yz}^{(i)} m = 0 \quad \text{на } L_0. \quad (1.23)$$

где l и m — направляющие косинусы внешней нормали к контуру L_0 .

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (1.24)$$

Здесь x и y — координаты точек контура L_0 , которые зависят только от длины его дуги s , а n — нормаль к L_0 .

Внося значения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ из (1.12) в (1.23) и принимая во внимание (1.24), получаем

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = - \left[A_i \frac{x^2}{2} + B_i x + \varphi_i \right] \frac{dy}{ds} + \psi_i \frac{dx}{ds}. \quad (1.25)$$

Рассматривая равновесие элемента поверхности раздела, находим

$$\tau_{xz}^{(1)} l + \tau_{yz}^{(1)} m = \tau_{xz}^{(2)} l + \tau_{yz}^{(2)} m. \quad (1.26)$$

Здесь l и m — направляющие косинусы нормали к линии раздела $L_{1,2}$, которые через координаты ее точек выражаются формулами (1.24).

Используя (1.12) и (1.24), из (1.26) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial s} - \frac{\partial F_2}{\partial s} = & \left[(A_2 - A_1) \frac{x^2}{2} + (B_2 - B_1) x + \varphi_2 - \varphi_1 \right] \frac{dy}{ds} + \\ & + (\psi_1 - \psi_2) \frac{dx}{ds} \quad \text{на } L_{1,2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

На поверхности раздела имеем полное сцепление, поэтому перемещения u , v и w , следовательно и $\frac{dw}{ds}$, при переходе через линию раздела должны быть непрерывны.

Умножая первое соотношение (1.18) на $\frac{dx}{ds}$, а второе на $\frac{dy}{ds}$ и складывая для $i=1,2$, находим

$$\frac{\partial w_i}{\partial s} = - \frac{1}{G_i} \left[\frac{\partial F_i}{\partial n} - \left(A_i \frac{x^2}{2} + B_i x \right) \frac{dx}{ds} - \varphi_i \frac{dx}{ds} - \psi_i \frac{dy}{ds} \right] +$$

$$+ \int_{\gamma_i}^l \left[\frac{\partial F_i}{\partial n} - \left(A_i \frac{x^2}{2} + B_i x \right) \frac{dx}{ds} - \varphi_i \frac{dx}{ds} - \psi_i \frac{dy}{ds} \right] \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau -$$

$$- \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dy}{ds} \quad (1.28)$$

На основании непрерывности $\frac{\partial \omega_i}{\partial s}$ и двухчленного выражения (1.28), зависящего от производных перемещений, получаем

$$\sum_{i=1,2} (-1)^i \left[\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} - \int_{\gamma_i}^l \frac{\partial F_i}{\partial n} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau \right] =$$

$$= \sum_{i=1,2} (-1)^i \left[\frac{1}{G_i} \left(\varphi_i \frac{dx}{ds} + \psi_i \frac{dy}{ds} \right) - \int_{\gamma_i}^l \left(\varphi_i \frac{dx}{ds} + \psi_i \frac{dy}{ds} \right) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (1.29)$$

Здесь использованы соотношения (1.3) и (1.8).

Таким образом задача об изгибе составного стержня поперечной силой с учетом ползучести свелась к отысканию функции напряжений $F(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнениям (1.16) в областях D_1 и D_2 соответственно контурному условию (1.25) и условиям (1.27) и (1.29) на линии раздела $L_{1,2}$.

В случае если изгиб не сопровождается кручением, в уравнениях (1.16) на основании (1.22) можно положить $c_1 = c_2 = 0$.

Произвольные функции $\varphi_i(y, t)$ и $\psi_i(x, t)$ ($i=1,2$) должны быть подобраны так, чтобы задача определения функции $F(x, y, t)$ была разрешимой и не имела особенностей.

2. Обобщение теоремы о циркуляции касательных напряжений при изгибе с учетом ползучести

Если область поперечного сечения D_0 состоит из многосвязных областей D_1 и D_2 , при решении задачи изгиба составного стержня появляются произвольные функции, зависящие только от времени, которые должны быть определены из условия единственности решения рассматриваемой задачи. В задачах кручения и изгиба упругих стержней без учета явления ползучести это условие выражается при помощи теоремы о циркуляции касательных напряжений, являющейся следствием однозначности перемещений. Эта теорема для изгиба составных стержней обобщена в работе [2].

Эту теорему можно обобщить и для изгиба составных балок поперечной силой с учетом явления ползучести.

Вычислим циркуляцию касательных напряжений по замкнутому контуру C , целиком лежащему внутри одной из областей D_i ($i=1,2$).

На основании (1.12) и (1.24) находим:

$$I_C = \int_C z_{,xz}^{(i)} dx + z_{,yz}^{(i)} dy = - \int_C \frac{\partial F_i}{\partial n} ds + \int_C \varphi_i dx + \psi_i dy. \quad (2)$$

Из (1.2), (1.18) и (2.1) получаем

$$I_C = \int_C d\omega_i + \frac{\partial}{\partial z} \int_C \mu_i dx + \psi_i dy. \quad (2)$$

Интеграл от $d\omega_i(x, y, t)$ по любому замкнутому контуру C , лежащему внутри области поперечного сечения D_0 , должен быть равен нулю, так как перемещение w_i является однозначной и непрерывной функцией координат x и y в любой момент времени t .

Используя (1.20) и (1.21) и применяя формулу Грина-Отрогавского, из (2.1) и (2.2) находим

$$\begin{aligned} I_C - G_i \int_C I_C \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz - \frac{2\nu}{1+\nu} \left[A_i - G_i \int_C A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz \right] \iint_S y dx dy &= \\ &= 2G_i \theta S, \end{aligned} \quad (2)$$

где $S = \iint dx dy$ — площадь области, ограниченной контуром C .

Соотношение (2.3) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра, которое выражает теорему о циркуляции касательных напряжений изгиба составного стержня с учетом ползучести составляющих данный стержень материалов в случае, когда контур C , по которому вычисляется циркуляция не пересекается с линией раздела, т. е. целиком лежит в одной из областей D_i ($i = 1, 2$).

Для контуров C , пересекающих линию раздела $L_{1,2}$, соотношение (2.3) обобщается легко. Область, ограниченная контуром C и частью линии раздела $L_{1,2}$, разбивается на две части, для каждой из которых будет справедлива формула (2.3). На основании этих формул и соотношений (1.7) находим

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} ds - \int_C \int_C \frac{\partial F_i}{\partial n} \frac{\partial \omega_i}{\partial z} ds dz - \int_C \frac{1}{G_i} (\varphi_i dx + \psi_i dy) + \\ + \int_C \int_C \frac{1}{G_i} (\varphi_i dx + \psi_i dy) \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz + \frac{2\nu}{1+\nu} \iint_S \left[\frac{1}{G_i} A_i - \int_C A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial z} dz \right] y dx dy &= \\ &= -2\theta S. \end{aligned} \quad (2)$$

При решении задач об изгибе стержней многосвязного поперечного сечения с учетом ползучести материалов постоянные интегрирования должны быть определены или формулой (2.3), в случае когда внутренний контур является частью границ только одной из областей D_i , или обобщенной формулой (2.4) в противном случае.

Изгиб стержня с тонким усиливающим покрытием с учетом ползучести.

Рассмотрим задачу об изгибе призматического стержня, который имеет тонкое усиливающее покрытие постоянной толщины. Предположим, что материал покрытия ползучестью не обладает. Для краткости изложения примем еще, что произвольные функции $\varphi_i(y, t)$ и $\psi_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) равны нулю.

Область поперечного сечения, соответствующую основному материалу изгибаемого стержня, обозначим через D_1 , а область, соответствующую покрытию — через D_2 . Тогда для функции F_2 будем иметь следующие условия, вытекающие из (1.25), (1.27), (1.29)

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} = - \left[A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x \right] \frac{dy}{ds}; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} - \frac{\partial F_2}{\partial s} = \left[(A_2 - A_1) \frac{x^2}{2} + (B_2 - B_1)x \right] \frac{dy}{ds}; \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial n} - \int_{\gamma} \frac{\partial F_1}{\partial n} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{G_2} \frac{\partial F_2}{\partial n}. \quad (3.3)$$

Через δ обозначим постоянную толщину покрытия и введем местную криволинейную координатную систему s и n для области D_2 , где s — длина дуги линии раздела $L_{1,2}$, отсчитываемая от произвольно выбранной на ней точки, а n — длина нормали к $L_{1,2}$, направленной в сторону области D_2 (фиг. 2).

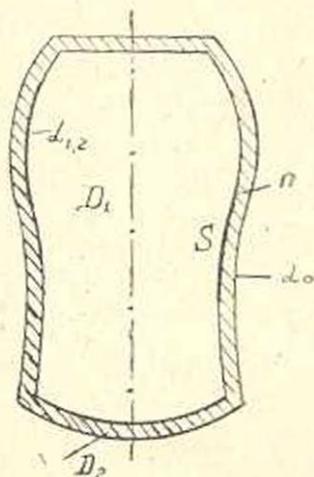
На основании условия о малости толщины покрытия δ по сравнению с размерами поперечного сечения стержня можно положить, что функция напряжений F_2 в области D_2 от координаты n зависит линейно:

$$F_2 = A(s, t)n + B(s, t). \quad (3.4)$$

Используя (3.4), из условий (3.1) — (3.3) получим:

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial A(s, t)}{\partial s} + \frac{\partial B(s, t)}{\partial s} &= \\ &= - \left[A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x \right] \frac{dy}{ds}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{\partial B(s, t)}{\partial s} + \left[(A_2 - A_1) \frac{x^2}{2} + (B_2 - B_1)x \right] \frac{dy}{ds}; \quad (3.6)$$



Фиг. 2.

$$\frac{1}{G_2} A(s_1, t) = \frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial n} - \int_{z_1}^t \frac{\partial F_1}{\partial n} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz. \quad (3.7)$$

Интегрируя условие (3.6) по длине линии раздела и используя условия (3.5) и (3.7), после исключения функций $A(s, t)$ и $B(s, t)$, получаем следующее контурное условие для функции $F_1(x, y, t)$:

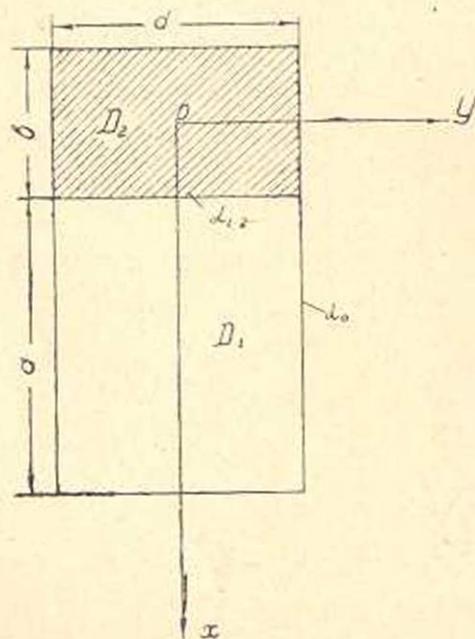
$$G_1 F_1 + G_2 \delta \frac{\partial F_1}{\partial n} - G_1 G_2 \int_{z_1}^t \frac{\partial F_1}{\partial n} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz = c(t) - \frac{1}{2} A_1 \int x^2 dy + B_1 \int x dy, \quad (3.8)$$

где $c(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Таким образом, при решении задач об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, контурное условие (1.26) можно заменить приближенным контурным условием (3.8). Функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$ должны быть определены из системы уравнений (1.8) и (1.9), а $c(t)$ — в случае многосвязного поперечного сечения изгибаемого стержня — из условия (2.3). Заметим, что функцию $c(t)$ при решении задачи изгиба можно оставить произвольной, если область поперечного сечения стержня односвязна.

4. Распределение касательных напряжений при изгибе составного прямоугольного стержня.

В качестве приложения результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим следующий пример. Пусть прямоугольный



Фиг. 3.

стержень состоит из двух прямоугольных стержней, спаянных по боковым поверхностям. Область поперечного сечения такого стержня изображена на фиг. 3. Предположим, что в области D_2 материал стержня не обладает ползучестью. Через $c(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ обозначим меры ползучести материала в области D_1 соответственно при осевой деформации и сдвиге: Функции A_1, A_2, B_1 и B_2 определяются из системы уравнений (1.8) и (1.9).

Если изгибающая сила направлена по оси ox , изгиб составной консоли не будет сопровождаться кручением и уравнения (1.16) для рассматриваемой задачи примут следующий вид:

$$\Delta F_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\nu}{1+\nu} y A_i = 0. \quad (4.1)$$

Для произвольных функций $\varphi_i(y, t)$ и $\psi_i(x, t)$ примем

$$\begin{aligned} \varphi_i(y, t) &= - \left[\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{2} \right) A_i + (a+b) B_i \right]; \\ \varphi_2(y, t) &= - \frac{b^2}{8} A_2 + \frac{b}{2} B_2(t); \\ \psi_1(x, t) &= \psi_3(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда уравнения (4.1) примут вид

$$\Delta F_i = - \frac{\nu}{1+\nu} A_i y. \quad (4.3)$$

Используя (4.2) в условиях (1.26), (1.28) и (1.30), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, & \quad \text{при } y = \pm \frac{d}{2}; \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, & \quad \text{при } x = a + \frac{b}{2}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0, \quad \text{при } x = -\frac{b}{2};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \text{при } x = \frac{b}{2}; \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz = \frac{1}{G_2} \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \text{при } x = \frac{b}{2}. \quad (4.6)$$

Функции $F_1(x, y, t)$ и $F_2(x, y, t)$, удовлетворяющие уравнениям (4.3) в соответствующих областях D_1 и D_2 и условиям (4.4) — (4.6), ищем в виде следующих тригонометрических рядов:

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right); \quad (4.7)$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right).$$

Внося (4.7) в дифференциальное уравнение (4.3), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d} \right)^2 p_k \right] \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right) = - \frac{\nu}{1+\nu} A_1 y; \quad (4.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 q_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d} \right)^2 q_k \right] \sin \frac{k\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right) = - \frac{\nu}{1+\nu} A_2 y.$$

Разлагая правые части соотношений (4.8) в ряд и приравнявая соответствующие коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для определения функций $p_k(x, t)$ и $q_k(x, t)$ ($k=1, 2, 3, \dots$):

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 p_k = \frac{\nu}{1+\nu} [1 + (-1)^k] A_1; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial x^2} - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 q_k = \frac{\nu}{1+\nu} [1 + (-1)^k] A_2.$$

Решение уравнений (4.9) имеет следующий вид:

$$p_k(x, t) = C_k(t) \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} - x\right)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{d}} - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2}\right)} \right] A_1(t); \quad (4.10)$$

$$q_k(x, t) = D_k(t) \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(x + \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}} - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \left[1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}} \right] A_2(t).$$

Здесь использованы условия (4.5).

На основании условий (4.5) и (4.6) относительно искомых функций $C_k(t)$ и $D_k(t)$ получаем уравнения

$$D_k = C_k + \frac{4\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \left\{ A_2 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a - \frac{b}{2}\right)} \right] A_1 \right\}; \quad (4.11)$$

$$C_k - \lambda_k G_1 \int_0^t C_k \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} d\tau = \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{d^2}{(k\pi)^2} \lambda_k f_k \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d}; \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_k = \frac{1}{1 + \frac{G_1}{G_2} \frac{\operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d}}{\operatorname{cth} \frac{k\pi a}{d}}};$$

$$f_k = \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} \right)} + \frac{G_1}{G_2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} \right)} \right] \right\} A_1(t) -$$

$$- \frac{G_1}{G_2} \left[2 \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{2d} \right] A_2(t) -$$

$$- \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} \left(a + \frac{b}{2} \right)} G_1 \int_0^t A_1(\tau) \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} d\tau.$$

Таким образом рассматриваемая задача свелась к решению интегрального уравнения Вольтерра (4.12).

Численный пример. В качестве примера рассмотрим изгиб железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения, армированной с одной стороны, при отношениях размеров $a = 2d = 8b$. Для меры ползучести бетона $\omega(t, \tau)$ при чистом сдвиге принимаем следующую зависимость [3]

$$\omega(t, \tau) = 2(1 + \nu) C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\tau/\tau_1}],$$

$$\left[\varphi(\tau) = \omega_0 + \frac{\omega_1}{\tau} \right].$$

Для параметров, характеризующих механические свойства железа и бетона, возьмем следующие значения: $G_k = 8 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2$; $G_0 = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$; $\omega_1 = 12,05 \cdot 10^{-5}$; $\omega_0 = 2,25 \cdot 10^{-5}$; $\gamma = 0,026$; $\tau_1 = 28$ дней.

Функции $A_k(t) B_k(t)$ определяются из системы уравнений (1.8) и (1.9). Далее, определяя из (4.11) и (4.12) $C_k(t) D_k(t)$, на основании соотношений (1.12), (4.7) и (4.10) получаем значения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

В таблице 1 приведены значения τ_{xz} в нескольких точках поперечного сечения изгибаемого стержня для различных моментов времени.

Анализ полученных формул, а также результаты рассматриваемого выше примера позволяют сделать следующие выводы.

В случае составных стержней, если наибольшая ширина b поперечного сечения мала по сравнению с высотой h , то элементарная теория изгиба балок дает очень точные результаты при определении

Таблица 1

Значения $\frac{a^2}{\rho} \tau_{xz}(x, y, t) \cdot 10^2$

t \ x, y	0,0	$\frac{b}{2}, 0$	$\frac{b}{2} + \frac{a}{4}, 0$	$\frac{b}{2} + \frac{a}{2}, 0$	$\frac{b}{2} + \frac{3}{4}a, 0$
28 дней	1,3104	2,3750	2,5012	2,1422	1,3036
45 "	1,4693	2,5657	2,5176	2,0688	1,2258
60 "	1,5078	2,6039	2,5197	2,0502	1,2066
90 "	1,6727	2,6249	2,5107	2,0384	1,1959
180 "	1,6021	2,6218	2,5137	2,0358	1,1944
	1,6031	2,6244	2,5156	2,0371	1,1950

значения касательных напряжений. Заметим, что деформация ползучести материала в этом случае также мало влияет на изменение величин этих напряжений во времени.

Если же ширина балки велика по сравнению с ее высотой $b > h$ то элементарные формулы сопротивления материалов оказываются неудовлетворительными, и величина касательных напряжений, найденная по этим формулам, получается гораздо меньше их истинного значения.

Институт математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 5 VII 1957

Կ. Ս. Հարությունյան, Կ. Ս. Չոբանյան

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածում քննարկվում է բաղադրյալ ձողի լայնական ուժով ծաման խնդիրը՝ ձողը կազմող մարմինների նյութերի սողքի հաշվառումով: Ընդհանրացված է ծաման շոշափող լարումների ցիրկուլյացիայի բանաձևը: Ստացված է նաև ուժեղացնող բնրակ ծածկույթով ձողի ծաման խնդիր կարտի ն պայմանը՝ մասամբ դրվածքով:

Որպես օրինակ գիտարկված է ուղղանկյուն հասվածքով բաղադրյալ ձողի ծամումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов. Изв. АН СССР, № 7, 1932 г.
2. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН Арм ССР, т. XXIII, № 3, 1956 г.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952 г.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задоян

Термонапряженное состояние бетонных блоков
с учетом ползучести материала

В настоящей работе рассматривается термонапряженное состояние бетонных блоков, имеющих форму длинной полосы прямоугольного поперечного сечения и цилиндра, лежащих на сплошном упругом основании. Задача рассматривается как в предположении упругой работы материала, так и с учетом ползучести. При этом принимается гипотеза, обобщающая гипотезу плоских сечений. Касательные напряжения, возникающие в контакте блока и основания, принимаются пропорциональными соответствующим перемещениям. Для простоты рассмотрен тот случай, когда температура изменяется произвольным образом только по толщине блока и зависит от времени.

Обзор литературы о температурных напряжениях в бетонных блоках можно найти в работе [1].

§ 1. Термо-упругое напряженное состояние прямоугольного
бетонного блока (полосы)

1°. Рассмотрим упругое напряженное состояние бетонного прямоугольного блока высотой $2h$, длиной $2a$, шириной $2b$, лежащего на сплошном упругом основании (фиг. 1), вызванное температурным воздействием, меняющимся по высоте и по времени. При этом принимается, что $\frac{h}{b}$ и $\frac{b}{a}$ меньше $\frac{1}{4}$. Вследствие разности механических свойств материалов блока (бетон) и основания (старый бетон, скала, грунт и т. д.) в продольном и поперечном направлениях контакта возникают касательные напряжения. Эти напряжения обозначим через $\tau_x(x, y)$, $\tau_y(x, y)$, а перемещения в соответствующих направлениях — через $u(x, y)$, $v(x, y)$.

При решении задачи будем полагать [1, 2, 3], что

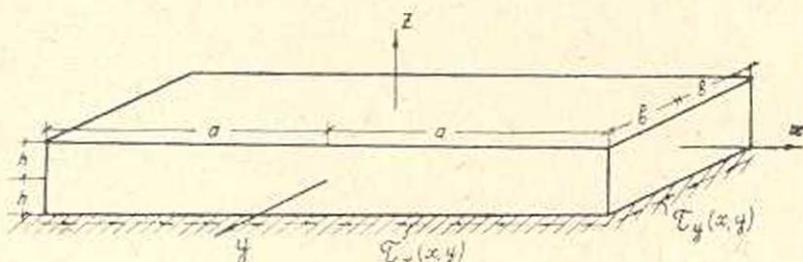
$$\begin{aligned}\tau_x(x, y) &= \beta u(x, y), \\ \tau_y(x, y) &= \beta v(x, y),\end{aligned}\quad (1)$$

где β — коэффициент пропорциональности, определяемый из опыта и имеющий размерность $кг/см^2$.

Обозначая перемещения произвольной точки блока по x и y соответственно через $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ и пренебрегая $\varepsilon_z(x, y, z)$, для компонентов нормальных напряжений имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + \nu \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu}, \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} + \nu \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu}\end{aligned}\quad (2),$$

где E — модуль упругости бетона, ν — коэффициент Пуассона, α_1 — коэффициент температурного расширения, а $T(z)$ — температурная функция.



Фиг. 1.

Принимаем:

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = A(x, y) + B(x, y)z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = C(x, y) + D(x, y)z,$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и $D(x, y)$ — неизвестные функции переменных x и y .

Написав условия равновесия части блока ($x \leq \xi \leq a$, $y \leq \zeta \leq b$, $-h \leq z \leq h$), сделав ряд преобразований и пренебрегая компонентами $\sigma_x(x, y, z)$ и $\sigma_{xy}(x, y, z)$ получим:

$$\begin{aligned}\int_{-h}^h \sigma_x(x, y, z) dz + \int_x^a \tau_x(x, y) dx &= 0, \\ \int_{-h}^h \sigma_y(x, y, z) dz + \int_y^b \tau_y(x, y) dy &= 0, \\ \int_{-h}^h \sigma_x(x, y, z) z dz - h \int_x^a \tau_x(x, y) dx &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

$$\int_{-h}^h \sigma_y(x, y, z) z dz - h \int_y^b \tau_y(x, y) dy = \Delta$$

$$\int_{-h}^h \tau_{xz}(x, y, z) dz = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{yz}(x, y, z) dz = 0.$$

2°. Из соотношений (2), (3), (4) следует

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \frac{1}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \int_x^a \tau_x(x, y) dx - \nu \int_y^b \tau_y(x, y) dy \right\},$$
(5)

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \frac{1}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \int_y^b \tau_y(x, y) dy - \nu \int_x^a \tau_x(x, y) dx \right\}.$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{2h} \int_{-h}^h T(z) dz, \quad \varepsilon_2 = \frac{3\alpha_1}{2h^2} \int_{-h}^h T(z) z dz.$$
(6)

Подставляя значения $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ из (1) в (5) и принимая $z = -h$, получим

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \varepsilon - \lambda^2 \int_x^a u(x, y) dy + \nu \lambda^2 \int_y^b v(x, y) dy,$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \varepsilon - \lambda^2 \int_y^b v(x, y) dy + \nu \lambda^2 \int_x^a u(x, y) dx.$$
(7)

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{Eh}}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha_1}{2h} \int_{-h}^h T(z) \left(1 - \frac{3z}{h}\right) dz.$$
(8)

Систему интегро-дифференциальных соотношений (7) можно привести к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \lambda^2 (1 - \nu^2) u,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda^2 (1 - \nu^2) v,$$
(9)

со следующими граничными условиями

$$u = \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \quad \text{при } y = b$$
(10)

$$v = \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \quad \text{при } x = a \quad (11)$$

$$u = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (12)$$

$$v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \quad \text{при } x = a \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right) \right] \quad \text{при } y = b \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (17)$$

Причем (12) и (13) написаны из условия симметрии.

Система дифференциальных уравнений (9) разбивается на два самостоятельных уравнения вида:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda^4 (1 - \nu^2) u = 0. \quad (18)$$

Итак, окончательно, поставленная задача формулируется так: определить функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ в прямоугольной области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (18) и крайевым условиям (10)–(17).

3°. По методу Г. А. Гринберга [4] решение уравнения (18) ищем в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \Phi_n(x), \quad (19)$$

где $\Phi_n(x)$ — решения дифференциального уравнения

$$\Phi''(x) + \alpha^2 \Phi(x) = 0,$$

удовлетворяющие крайевым условиям

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(a) = 0.$$

Они имеют вид:

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \alpha_n x, \quad (20)$$

где

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (21)$$

Умножая (18) на $\Phi_n(x)$, интегрируя по x от нуля до a , учитывая преобразование

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Phi_n(x) dx = \varepsilon \Phi_n(a) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] - \alpha_n^2 \int_0^a u(x, y) \Phi_n(x) dx$$

и значение

$$u_n(y) = \int_0^a u(x, y) \Phi_n(x) dx, \quad (22)$$

вытекающее из разложения (19), получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции:

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \gamma_n^2 u_n = - \frac{(1+\nu) \varepsilon \lambda^2 \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2}, \quad (23)$$

где

$$\gamma_n^2 = \frac{\alpha_n^2 + (1-\nu^2) \lambda^2}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \lambda^2. \quad (24)$$

Граничные условия полученного уравнения следуют из (22), (16) и (10)

$$u_n(y) = \frac{\varepsilon \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \quad \text{при } y = b \quad (25)$$

$$\frac{du_n}{dy} = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

Решая дифференциальное уравнение (23) при краевых условиях (25), получим:

$$u_n(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\varepsilon (-1)^{n+1}}{(\alpha_n^2 + \lambda^2) \gamma_n^2} \left\{ (1+\nu) \lambda^2 + \left[\gamma_n^2 - (1+\nu) \lambda^2 \right] \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right\} \quad (26)$$

и, наконец, из (19), (20) и (26) будем иметь

$$u(x, y) = \frac{2\varepsilon}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha_n^2 + \lambda^2) \gamma_n^2} \left\{ (1+\nu) \lambda^2 + \left[\gamma_n^2 - (1+\nu) \lambda^2 \right] \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right\} \sin \alpha_n x. \quad (27)$$

Из (24) следует

$$\lambda \sqrt{1-\nu^2} \leq \gamma_n \leq \lambda \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Принимая $\gamma_n = \lambda$, из (27) получим

$$u(x, y) = \frac{2\varepsilon}{a} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \sin \alpha_n x. \quad (28)$$

Разлагая функцию $\operatorname{sh} \lambda x$ в ряд Фурье по системе функции $\{\sin \alpha_n x\}$, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \sin \alpha_n x = \frac{a \operatorname{sh} \lambda x}{2\lambda \operatorname{ch} \lambda a}. \quad (29)$$

Итак,

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}. \quad (30)$$

Принимая $\tau_{in} = \lambda \sqrt{1 - \nu^2}$ получим

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon}{(1 - \nu)\lambda} \left[1 - \nu \frac{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{1 - \nu^2} y}{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{1 - \nu^2} b} \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}. \quad (31)$$

Легко убедиться, что расхождения между полученными верхними и нижними оценками $u(x, y)$ весьма незначительны.

Из (1), (2), (5), (30) и аналогичных выражений, получаемых для $v(x, y)$, имеем:

$$\begin{aligned} \tau_x(x, y) &= \frac{3\varepsilon}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}, \\ \tau_y(x, y) &= \frac{3\varepsilon}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \frac{E}{1 - \nu} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \varepsilon_1 T(z) \right] - \\ &- \frac{E\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y, z) &= \frac{E}{1 - \nu} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \varepsilon_2 T(z) \right] - \\ &- \frac{E\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right) \right] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right). \end{aligned}$$

Написав условия равновесия бесконечно малого элемента блока и пренебрегая $\tau_{xy}(x, y, z)$, находим

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, z) &= \int_z^h \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dz, \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= \int_z^h \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} dz. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (33) в (34), получим значения касательных напряжений в произвольной точке блока

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(1 + \frac{3z}{h} \right) \tau_x(x, y), \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(1 + \frac{3z}{h} \right) \tau_y(x, y). \end{aligned} \quad (35)$$

Интегрируя первое уравнение (5) от нуля до x и используя условие $U(0, y, z) = 0$, будем иметь

$$U(x, y, z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) x -$$

$$- \frac{1}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \int_0^x \left\{ \int_x^a \tau_x(x, y) dx + \nu \int_y^b \tau_y(x, y) dy \right\} dx.$$

Подставляя здесь значения $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ из (32), получим

$$U(x, y, z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) x -$$

$$- \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(x - \frac{\text{sh}\lambda x}{\lambda \text{ch}\lambda a}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] - \nu x \right\}. \quad (36)$$

Аналогично, из второго уравнения (5) имеем

$$V(x, y, z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) y -$$

$$- \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(y - \frac{\text{sh}\lambda y}{\lambda \text{ch}\lambda b}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] - \nu y \right\}; \quad (37)$$

4°. При равномерном распределении температуры в блоке из (32) (33), (36) и (37) следует

$$\begin{aligned} \tau_x(x, y) &= \frac{\beta z_1 T_0}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] \frac{\text{sh}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}, \\ \tau_y(x, y) &= \frac{\beta z_1 T_0}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] \frac{\text{sh}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, z) &= -\frac{1}{4} E z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right), \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= -\frac{1}{4} E z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right). \end{aligned} \quad (39)$$

$$U(x, y, z) = z_1 T_0 x -$$

$$- \frac{1}{4} E z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(x - \frac{\text{sh}\lambda x}{\lambda \text{ch}\lambda a}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] - \nu x \right\};$$

$$V(x, y, z) = z_1 T_0 y -$$

$$- \frac{1}{4} z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(y - \frac{\text{sh}\lambda y}{\lambda \text{ch}\lambda b}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] - \nu y \right\}. \quad (40)$$

Из выражения нормальных напряжений (39) вытекает, что

$$z_0 = \frac{1}{3} h$$

является уравнением нейтральной плоскости блока.

При данных значениях x и y нормальные напряжения по величине в нижнем крае блока в два раза больше, чем на верхнем. Наибольших значений эти напряжения в горизонтальных направлениях достигают при $x = 0$, $y = 0$. Наибольшие напряжения $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ достигаются соответственно при $x = a$ и $y = b$.

Горизонтальные перемещения точки нейтральной плоскости суть

$$U\left(x, y, \frac{1}{3}h\right) = \alpha_1 T_0 x, \quad V\left(x, y, \frac{1}{3}h\right) = \alpha_1 T_0 y.$$

§ 2. Термонапряженное состояние прямоугольного бетонного блока (полосы) с учетом ползучести

1°. В постановке задачи, аналогичной предыдущему параграфу, исследуем напряженное состояние прямоугольного блока с учетом ползучести бетона. Принимаем следующее условие на контакте

$$\begin{aligned} \tau_x^*(x, y, t) &= \beta u^*(x, y, t), \\ \tau_y^*(x, y, t) &= \beta v^*(x, y, t). \end{aligned} \quad (41)$$

Связь между деформациями и напряжениями имеет следующий вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(t)}{\partial x} &= \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_x^*(t) - \nu \sigma_y^*(t)] - \\ &\quad - \int_{\tau_0}^t [\sigma_x^*(\tau) - \nu \sigma_y^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \\ \frac{\partial V^*(t)}{\partial y} &= \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_y^*(t) - \nu \sigma_x^*(t)] - \\ &\quad - \int_{\tau_0}^t [\sigma_y^*(\tau) - \nu \sigma_x^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (42)^*$$

где

$$\begin{aligned} \delta(t, \tau) &= \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \\ E(\tau) &= E_0 [1 - e^{-\alpha \tau}], \quad \varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0, \end{aligned}$$

E — модуль мгновенной деформации бетона при $t \rightarrow \infty$, α , C_0 , A_1 и γ — параметры, характеризующие свойства и условия старения данного бетона.

Взамен (3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(x, y, z, t)}{\partial x} &= A^*(x, y, t) + B^*(x, y, t)z, \\ \frac{\partial V^*(x, y, z, t)}{\partial y} &= C^*(x, y, t) + D^*(x, y, t)z. \end{aligned} \quad (43)$$

* Здесь компоненты напряжений и перемещений являются функциями также от x, y, z , а температурная функция — от z , но для краткости записи эти аргументы опущены.

Выпишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tau_x^*(t) dz + \int_x^a \tau_x^*(t) dx &= 0, \\ \int_{-h}^h \tau_y^*(t) dz + \int_y^b \tau_y^*(t) dy &= 0, \\ \int_{-h}^h \sigma_x^*(t) z dz - h \int_x^a \tau_x^*(t) dx &= 0, \\ \int_{-h}^h \sigma_y^*(t) z dz - h \int_y^b \tau_y^*(t) dy &= 0, \\ \int_{-h}^h \tau_{xz}^*(t) dz = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{yz}^*(t) dz &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

После некоторых преобразований из (44), используя (42) и (43), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(t)}{\partial x} &= \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left\{ \int_x^a \left[\frac{\tau_x^*(t)}{E(t)} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \int_y^b \tau_x^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right] dx + \nu \int_y^b \left[\frac{\tau_y^*(t)}{E(t)} - \int_x^a \tau_y^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right] dy \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*(t)}{\partial y} &= \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left\{ \int_y^b \left[\frac{\tau_y^*(t)}{E(t)} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \int_x^a \tau_y^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right] dy + \nu \int_x^a \left[\frac{\tau_x^*(t)}{E(t)} - \int_y^b \tau_x^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right] dx \right\}. \end{aligned}$$

Принимая в (45) $z = -h$ и учитывая (41), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*(t)}{\partial x} &= \varepsilon(t) - \lambda^2(t) \int_x^a \left[u^*(t) - \int_y^b u^*(z) E(t) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right] dx + \\ &+ \nu \lambda^2(t) \int_y^b \left[v^*(t) - \int_x^a v^*(z) E(t) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right] dy, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\frac{\partial v^*(t)}{\partial y} = \varepsilon(t) - \lambda^2(t) \int_y^b \left[v^*(t) - \int_{\tau_0}^t v^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dy + \\ + \lambda^2(t) \int_x^a \left[u^*(t) - \int_{\tau_0}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dx.$$

Система (46) приводится к системе двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 v^*(t)}{\partial x \partial y} = (1 - \gamma^2) \lambda^2(t) \left[u^*(t) - \int_{\tau_0}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 v^*(t)}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial x \partial y} = (1 - \gamma^2) \lambda^2(t) \left[v^*(t) - \int_{\tau_0}^t v^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right].$$

Полученную систему уравнений будем решать приближенно. Принимая в (47) $\gamma = 0$, получим два самостоятельных уравнения для $u^*(t)$ и $v^*(t)$ (выписываем только одно из них):

$$\frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial x^2} = \lambda^2(t) \left[u^*(t) - \int_{\tau_0}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right]. \quad (48)$$

2°. Двукратным дифференцированием уравнения (48) по t , после некоторых преобразований, приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 u^*(t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \gamma \frac{\partial^3 u^*(t)}{\partial x^2 \partial t} - \lambda^2(t) \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial t^2} - \lambda^2(t) m(t) \frac{\partial u^*(t)}{\partial t} = 0, \quad (49)$$

где

$$m(t) = \gamma [1 + \varepsilon(t) E(t)] - \frac{E'(t)}{E(t)}. \quad (50)$$

Из условия симметрии имеем

$$u^*(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (51)$$

В первом уравнении (46), принимая $x = a$ и $\gamma = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial x} = \varepsilon(t) \quad \text{при } x = a. \quad (52)$$

Принимая в первом уравнении (48) $t = \tau_0$, получим

$$\frac{\partial^2 u^*(\tau_0)}{\partial x^2} - \lambda^2(\tau_0) u^*(\tau_0) = 0.$$

Решение последнего уравнения при граничных условиях

$$u^*(x, \tau_0) = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$\frac{\partial u^*(x, \tau_0)}{\partial x} = \varepsilon(\tau_0) \quad \text{при } x = a$$

имеет вид

$$u^*(x, \tau_0) = \frac{\varepsilon(\tau_0)}{\lambda(\tau_0)} \frac{\operatorname{sh} \lambda(\tau_0) x}{\operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a} \quad (53)$$

Подставляя $t = \tau_0$ в выражение, полученное из дифференцирования по t уравнения (48), получим

$$\left. \frac{\partial^2 u^*(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right|_{t=\tau_0} - \lambda^2(\tau_0) \left. \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial t} \right|_{t=\tau_0} - \lambda^2(\tau_0) \gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) u^*(x, \tau_0) = 0.$$

Решая это неоднородное дифференциальное уравнение при граничных условиях

$$\left. \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial x} \right|_{t=\tau_0} = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u^*(x, t)}{\partial x \partial t} \right|_{t=\tau_0} = \varepsilon'(\tau_0) \quad \text{при } x = a,$$

получим

$$\left. \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial t} \right|_{t=\tau_0} = \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \varepsilon(\tau_0) \lambda(\tau_0) x \operatorname{ch} \lambda(\tau_0) x}{(\lambda^2 \tau_0) \operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a} - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \varepsilon(\tau_0) [1 + \lambda(\tau_0) a \operatorname{th} \lambda(\tau_0) a] \operatorname{sh} \lambda(\tau_0) x - 2\varepsilon'(\tau_0) \operatorname{sh} \lambda(\tau_0) a}{2\lambda(\tau_0) \operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a} \quad (54)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения (49) при краевых (51), (52) и начальных условиях (53), (54).

Решая уравнения (49) по методу Г. А. Гринберга [4] при краевых и начальных условиях (51)–(54), будем иметь

$$u^*(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t)}{a_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \sin a_n x, \quad (55)$$

где

$$u_n^*(t) = \varepsilon(\tau_0) + \left[\varepsilon'(\tau_0) - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \varepsilon(\tau_0) \lambda^2(\tau_0)}{a_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \right] \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\tau) d\tau} d\tau + \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\tau) d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\xi} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma_n(\xi) d\xi} \frac{a_n^2 + \lambda^2(\tau_0)}{a_n^2 + \lambda^2(\xi)} [\varepsilon''(\xi) + \gamma \varepsilon'(\xi)] d\xi, \quad (56)$$

$$a_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (57)$$

$$\gamma_n(t) = \frac{\gamma \alpha_n^2 + m(t)\lambda^2(t)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)}. \quad (58)$$

3°. Подставляя (55) в (41), находим

$$\tau_x^*(x, t) = \frac{2\beta}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \sin \alpha_n x. \quad (59)$$

Принимая в первом уравнении (45) $\nu = 0$, подставляя выражение $\frac{\partial U^*}{\partial x}$ в первое уравнение (42), и преобразуя, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(t)} \left\{ \varepsilon_x^*(t) + \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_x^a \tau_x^*(t) dx \right\} = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \alpha_1 T(t) + \\ + \int_{\tau_0}^t \left\{ \varepsilon_x^*(\tau) + \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_x^a \tau_x^*(\tau) dx \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Решая полученное интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра, находим

$$\begin{aligned} \tau_x^*(x, z, t) = L^* \{ \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \alpha_1 T(t) \} - \\ - \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_x^a \tau_x^*(x, t) dx, \end{aligned} \quad (60)$$

где L^* —следующий оператор:

$$\begin{aligned} L^*[Q(t)] = E(\tau_0) Q(\tau_0) + [Q'(\tau_0) - \gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) Q(\tau_0)] \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau + \\ + \int_{\tau_0}^t E(\tau) e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi} [Q''(\xi) + \gamma Q'(\xi)] d\xi, \\ \gamma(t) = \gamma [1 + \varphi(t) E(t)]. \end{aligned}$$

Подстановка (59) в (60) дает

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(x, z, t) = L^* \{ \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \alpha_1 T(z, t) \} - \\ - \frac{\beta}{ah} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t) \cos \alpha_n x}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \alpha_n. \end{aligned} \quad (61)$$

По формуле

$$\tau_{xz}^*(t) = \int_z^h \frac{\partial \sigma_x^*(t)}{\partial x} dz$$

и (61) определяем компоненты касательных напряжений

$$\tau_{xz}^*(x, z, t) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{3z}{h}\right) \tau_{xz}^*(x, t). \quad (62)$$

Используя разложения (29), легко показать, что при $t = \tau_0$ упруго-мгновенные решения и решения с учетом ползучести совпадают.

4°. В частном случае, когда $T(z, t) = T_0 = \text{const}$, формула (61) принимает следующий вид

$$\tau_{xz}^*(x, z, t) = -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t) \cos z_n x}{z_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \frac{z_n}{x}, \quad (63)$$

где

$$u_n^*(t) = z_n T_0 \left[1 - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0) (1 - e^{-\gamma_n(t-\tau_0)})}{z_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \frac{1}{\gamma_n} \right] \quad (64)$$

Причем в выражении γ_n принято

$$E(t) \approx \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t E(\tau) d\tau = E_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha_0(t-\tau_0)} - e^{-\alpha t}}{\alpha(t-\tau_0)} \right],$$

$$\varphi(t) \approx \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t \varphi(\tau) d\tau = C_0 + A_1 \frac{\ln \frac{t}{\tau_0}}{t - \tau_0}. \quad (65)$$

Вид формул (59) и (62) остается неизменным, но под $u_n^*(t)$ понимается выражение (64). Из (62)–(64) следует, что компоненты напряжения в блоке по величине монотонно убывают, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к своим минимальным значениям.

5°. Здесь рассмотрен тот случай, когда распределение температуры в блоке меняется лишь по высоте. Однако вышесказанным путем легко можно получить решение и в том случае, когда имеем симметричное, относительно горизонтальных осей, распределение температуры. В таком случае к правым частям уравнений (9) и (47) соответственно прибавляются члены

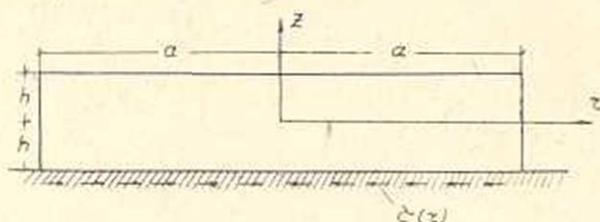
$$(1 + \nu) \frac{\partial z(x, y, t)}{\partial x}, \quad (1 + \nu) \frac{\partial \varepsilon(x, y, t)}{\partial y}.$$

Общий ход решения этой более общей задачи остается неизменным.

§ 3. Термо-упругое напряженное состояние круглого бетонного блока

1°. В этом параграфе рассматриваем напряженное состояние круглого бетонного блока (фиг. 2) высотой $2h$, радиусом $r = a$, лежащего на сплошном упругом основании, вызванное температурным воздействием $T = T(z, t)$, меняющимся по высоте и по времени. При таком законе распределения температуры возникающие в блоке тем-

пературные деформации будут осесимметричны, и, следовательно, компоненты напряжения и деформации не зависят от полярного угла.



Фиг. 2.

В основании блока возникают радиальные тангенциальные напряжения $\tau(r)$, которые будут препятствовать свободным температурным деформациям. Полагаем

$$\tau(r) = \beta u(r), \quad (66)$$

где $u(r)$ — радиальные перемещения точки основания блока.

Пренебрегая компонентом $\sigma_z(r, z)$, для остальных нормальных компонентов напряжения будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U(r, z)}{\partial r} + \nu \frac{U(r, z)}{r} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu} \\ \sigma_z(r, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{U(r, z)}{r} + \nu \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu} \end{aligned} \quad (67)$$

Для поставленной осесимметричной задачи вводим гипотезу: коаксиальные круговые цилиндрические поверхности до деформации превращаются в коаксиальные круговые конические поверхности в течение деформации, т. е.

$$\frac{\partial U(r, z)}{\partial r} = A(r) + B(r)z, \quad (68)$$

где $A(r)$ и $B(r)$ — неизвестные пока функции от r .

Написав условия равновесия части блока ($r < \xi < a$, $-\varphi < \theta < \varphi$, $-h < z < h$) и сделав некоторые упрощения, получим уравнения равновесия блока в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_r^a \int_{-h}^h \sigma_\varphi(r, z) r dr dz + r \int_{-h}^h \sigma_r(r, z) dz + \int_r^a \tau(r) r dr &= 0, \\ \int_r^a \int_{-h}^h \sigma_z(r, z) z dr dz + r \int_{-h}^h \sigma_r(r, z) z dz - h \int_r^a \tau(r) r dr &= 0, \\ \int_{-h}^h \tau_r(r, z) dz &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Из условия равновесия элемента блока $zrdrd\phi$ находим

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_z^h \left[\frac{\partial \sigma_r(r, z)}{\partial r} + \frac{\sigma_r(r, z) - \sigma_\phi(r, z)}{r} \right] dz. \quad (70)$$

2°. Интегрируя (68) при краевом условии

$$U(0, z) = 0, \quad (71)$$

получим

$$U(r, z) = \int_0^r [A(r) + B(r)z] dr. \quad (72)$$

Из (67), (68) и (69) следует уравнение

$$\int_r^a \left\{ \nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} - (1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) \right\} dr + r \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + \nu \frac{U}{r} - (1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) \right\} + \frac{1-\nu^2}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_r^a \tau(r) r dr = 0. \quad (73)$$

Дифференцируя полученное уравнение по r , приходим к неоднородному дифференциальному уравнению Эйлера

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} - U = \frac{1-\nu^2}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) r^2 \tau(r). \quad (74)$$

выражающему зависимость между радиальными перемещениями произвольной точки блока $U(r, z)$ и касательными напряжениями $\tau(r)$, действующими в контакте.

Принимая в (73) $r = a$, наряду с (71), получим второе краевое условие

$$\left(r \frac{\partial U}{\partial r} + \nu U \right)_{r=a} = (1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) a. \quad (75)$$

Принимая в (74) $z = -h$ и учитывая допущение (66), приходим к уравнению Бесселя

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} - (1 + \lambda^2 r^2) u = 0, \quad (76)$$

причем

$$\lambda = \sqrt{\frac{2(1+\nu)\beta}{Eh}}.$$

Решение дифференциального уравнения (76) при краевых условиях

$$u(0) = 0,$$

$$\left(r \frac{\partial u}{\partial r} + \nu u \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon a,$$

вытекающее из (71) и (75) при $z = -h$, имеет вид

$$u(r) = \frac{(1 + \nu) a \varepsilon I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)}, \quad (77)$$

где $I_1(x)$ — бesselевы функции первого порядка от мнимого аргумента.

Согласно принятой гипотезе (68) $U(r, z)$ является линейной функцией от z . Следовательно, наряду с $U(r, -h) = u(r)$ наличие второго значения $U(r, z_0) = u_0(r)$ полностью определяет функцию $U(r, z)$. Принимая в (74) $z = \frac{1}{3} h$, получим однородное уравнение Эйлера

$$r^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_0}{\partial r} - u_0 = 0.$$

Решая полученное уравнение при крайних условиях

$$u_0(0) = 0,$$

$$\left(r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu u_0 \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon_0 a,$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1}{2h} \int_{-h}^h T(z) \left(1 + \frac{z}{h} \right) dz,$$

находим

$$u_0(r) = \varepsilon_0 r. \quad (78)$$

Тогда решение исходного уравнения (74) будет

$$U(r, z) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) r + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \frac{(1 + \nu) a \varepsilon I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)}. \quad (79)$$

3°. Подставляя выражение перемещения $U(r, z)$ из (79) в (67), получим компоненты нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & \frac{E}{1 - \nu} \left[\frac{3}{4} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) - \alpha_1 T(z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \frac{\lambda r I_0(\lambda r) - (1 - \nu) I_1(\lambda r) a}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right], \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & \frac{E}{1 - \nu} \left[\frac{3}{4} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) - \alpha_1 T(z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \frac{\nu \lambda r I_0(\lambda r) + (1 - \nu) I_1(\lambda r) a}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right]. \end{aligned}$$

Из (66) и (77) следует

$$\tau(r) = \frac{(1+\nu) \beta a z I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \quad (81)$$

Используя полученные формулы (80) или (67), из (70) получим

$$\tau_{rz}(r, z) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{3z}{h}\right) \tau(r) \quad (82)$$

Заметим, что при $r \rightarrow 0$ из (80) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) = \sigma_r(0, z) = \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{3}{4} z_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) - \right. \\ \left. - \alpha_1 T(z) + \frac{1}{8} z \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \frac{(1+\nu) \lambda a z}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \right], \quad (83) \end{aligned}$$

причем при раскрытии встречающихся неопределенностей использованы правила Лопиталья.

4°. В частном случае, когда $T(z) = T_0 = \text{const}$, формулы (79), (80), (81) напишутся в виде

$$U(r, z) = \alpha_1 T_0 \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) r + \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \frac{(1+\nu) a I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \right] \quad (84)$$

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{1}{4} \frac{E \alpha_1 T_0}{1-\nu} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 - \frac{\lambda r I_0(\lambda r) - (1-\nu) I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right],$$

$$\sigma_z(r, z) = -\frac{1}{4} \frac{E \alpha_1 T_0}{1-\nu} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 - \frac{\lambda r I_0(\lambda r) + (1-\nu) I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right], \quad (85)$$

$$\tau(r) = \frac{(1+\nu) \beta a \alpha_1 T_0 I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \quad (86)$$

При $r \rightarrow 0$ из (83) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) = \sigma_r(0, z) = \\ = -\frac{1}{4} \frac{E \alpha_1 T_0}{1-\nu} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(1+\nu) \lambda a}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \right]. \quad (87) \end{aligned}$$

Из (85) следует, что в рассматриваемом случае нейтральная плоскость блока определяется уравнением

$$z_0 = \frac{1}{3} h.$$

Анализируя формулы (84)–(87) заключаем, что $\sigma_z(r, z)$ отлична от нуля везде в блоке, кроме нейтральной плоскости, а $\sigma_r(r, z)$ обращается в нуль как в указанной плоскости, так и в торцах блока $r=a$. По радиусу максимальные нормальные напряжения по величине достигаются при $r=0$. От центра валов до торцов эти напряжения монотонно уменьшаются. По высоте блока величины обеих компонент напряжения в два раза больше на основании, чем на верхнем крае. Как следует из (82) и (86), касательное напряжение по высоте достигает своего наибольшего значения при $z = -h$, а по радиусу — при

$r = a$. На нейтральной плоскости радиальные перемещения определяются формулой

$$U\left(r, \frac{1}{3} h\right) = \alpha_1 T_0 r.$$

Ниже приведены некоторые числовые значения касательных и нормальных компонент напряжения для основания блока при $h = \frac{1}{4} a = 1$ м, $\beta = 100$ кг/см³, $E = 1,1366$ кг/см², $\nu = \frac{1}{6}$.

Таблица 1

Значение $\tau(r)$, $\sigma_r(r, -h)$ и $\sigma_\varphi(r, -h)$, вычисленное по (85)–(87).

r/a	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$\frac{\tau(r)}{E\alpha_1 T_0}$	0,0000	0,0425	0,0905	0,1503	0,2301
$\frac{(1-\nu)\sigma_r(r, -h)}{E\alpha_1 T_0}$	0,5273	0,4995	0,4124	0,2534	0,0000
$\frac{(1-\nu)\sigma_\varphi(r, -h)}{E\alpha_1 T_0}$	0,5273	0,5143	0,4735	0,4009	0,2884

§ 4. Термонапряженное состояние круглого бетонного блока с учетом ползучести

1°. Задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, решим теперь с учетом свойства ползучести материала. Подобно предыдущим предположениям, в контакте блока и его основании будем полагать

$$\tau^*(r, t) = \beta u^*(r, t). \quad (88)$$

Зависимость между компонентами напряжения и деформации в произвольной точке блока $[\sigma_z^*(r, z, t) \approx 0]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(t)}{\partial r} &= \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_r^*(t) - \nu\sigma_\varphi^*(t)] - \\ &- \int_0^t [\sigma_r^*(\tau) - \nu\sigma_\varphi^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \\ \frac{U^*(t)}{r} &= \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_\varphi^*(t) - \nu\sigma_r^*(t)] - \\ &- \int_0^t [\sigma_\varphi^*(\tau) - \nu\sigma_r^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (89)$$

Аналогично гипотезе о деформируемости круглых блоков, введенной в предыдущем параграфе, примем

$$\frac{\partial U^*(r, z, t)}{\partial r} = A^*(r, t) + B^*(r, t)z, \quad (90)$$

где $A^*(r, t)$ и $B^*(r, t)$ — неизвестные функции от r и t .

Уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\int_r^a \int_{-h}^h \varepsilon_r^*(t) dr dz + r \int_{-h}^h \varepsilon_r^*(t) dz + \int_r^a \tau_{rz}^*(t) r dr = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{rz}^*(t) dz = 0.$$

$$\int_r^a \int_{-h}^h \sigma_r^*(t) z dr dz + r \int_{-h}^h \sigma_r^*(t) z dz - h \int_r^a \tau_{rz}^*(t) r dr = 0. \quad (91)$$

Для касательного напряжения, аналогичным образом, получим формулу

$$\tau_{rz}^*(t) = \int_z^h \left[\frac{\partial \sigma_r^*(t)}{\partial r} + \frac{\sigma_r^*(t) - \sigma_z^*(t)}{r} \right] dz, \quad (92)$$

Интегрируя (90) при условии

$$U^*(0, z, t) = 0, \quad (93)$$

будем иметь

$$U^*(r, z, t) = \int_0^r [A^*(r, t) + B^*(r, t)z] dr. \quad (94)$$

Из (89), (90), (91) и (94) следует

$$\int_r^a \left\{ \nu \frac{\partial U^*(t)}{\partial r} + \frac{U^*(t)}{r} - (1 + \nu) [\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z] \right\} dr + r \left\{ \frac{\partial U^*(t)}{\partial r} + \nu \frac{U^*(t)}{r} - (1 + \nu) [\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z] \right\} +$$

$$+ \frac{1 - \nu^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_r^a \left\{ \frac{\tau_{rz}^*(t)}{E(t)} - \int_{-h}^z \tau_{rz}^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right\} r dr = 0. \quad (95)$$

После дифференцирования по r приводим его к виду

$$r^2 \frac{\partial^2 U^*(r, z, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial U^*(r, z, t)}{\partial r} - U^*(r, z, t) =$$

$$= \frac{1 - \nu^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) r^2 \left\{ \frac{\tau_{rz}^*(r, t)}{E(t)} - \int_{-h}^z \tau_{rz}^*(r, z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right\}. \quad (96)$$

Наряду с (93) из (95), принимая $r = a$, получим второе краевое условие

$$\left(r \frac{\partial U^*}{\partial r} + \nu U^* \right)_{r=a} = (1 + \nu) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) a. \quad (97)$$

Для основания блока уравнение (96) принимает вид

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 u^*(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial u^*(r, t)}{\partial r} - u^*(r, t) = \\ = i^2(t) r \left[u^*(r, t) - \int_0^t u^*(r, \tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(t, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (98)$$

Краевые условия для полученного интегро-дифференциального уравнения следуют из (93) и (97)

$$u^*(0, t) = 0$$

$$\left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} + \nu u^* \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon a. \quad (99)$$

2. Можно получить решение уравнения (98), приводя его к дифференциальным уравнениям четвертого порядка в частных производных, как это делалось в § 2 для соответствующего уравнения прямоугольного блока. Но здесь проведем решение несколько иным, и как нам кажется, более эффективным путем.

Подставляя в уравнение (98)

$$u^*(r, t) = \Phi(r) \Psi(t)$$

и разделяя переменные, находим

$$\begin{aligned} \frac{r^2 \Phi''(r) + r \Phi'(r) - \Phi(r)}{r^2 \Phi(r)} = \\ = \frac{i^2(t) \left[\Psi(t) - \int_0^t \Psi(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(t, \tau) d\tau \right]}{\Psi(t)} = -\alpha^2, \end{aligned}$$

где α^2 — неопределенная, пока, положительная постоянная.

Решение уравнения

$$r^2 \Phi''(r) + r \Phi'(r) + [\alpha^2 r^2 - 1] \Phi(r) = 0 \quad (100)$$

при краевых условиях

$$\Phi(0) = 0,$$

$$a \Phi'(a) + \nu \Phi(a) = 0, \quad (101)$$

имеет вид

$$\Phi_n(r) = C_n J_1 \left(\frac{\rho_n}{a} r \right), \quad (102)$$

где $\rho_n = \alpha_n a$ — положительные корни уравнения

$$\rho J_1(\rho) + \nu J_1(\rho) = 0, \quad (103)$$

Для удобства C_n выберем так, чтобы система собственных функций $\{\Phi_n(r)\}$ была нормированной, т. е.

$$C_n^2 = \frac{2 \left(\frac{\rho_n}{a} \right)^2}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) J_1^2(\rho_n)} \quad (104)$$

Решение (98) будем искать в виде ряда Дини [6]

$$u^*(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Phi_n(r), \quad (105)$$

где

$$u_n(t) = \int_0^a r u^*(r, t) \Phi_n(r) dr. \quad (106)$$

Видоизменяя уравнение (98), умножая члены обеих частей на $\Phi_n(r)$, интегрируя по r от нуля до a , сделав преобразование и используя (99), (100), (101), (106), приходим к следующему интегральному уравнению второго рода типа Вольтерра

$$u_n(t) = \frac{(1 + \nu)a\Phi_n(a)\varepsilon(t)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)} + \int_{\tau_0}^t u_n(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_n(t, \tau) d\tau, \quad (107)$$

где

$$\Omega_n(t, \tau) = \frac{E(t)\lambda^2(t)\delta(t, \tau)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)}.$$

Уравнение (107) преобразованием и двукратным дифференцированием приводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + \gamma_n(t) \frac{du_n(t)}{dt} = \frac{(1 + \nu)a\Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)} [\varepsilon'(t) + \gamma_n'(t)], \quad (108)$$

где

$$\gamma_n(t) = \frac{\gamma \alpha_n^2 + m(t)\lambda^2(t)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)}$$

с начальными условиями

$$u_n(\tau_0) = \frac{(1 + \nu)a\Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \varepsilon(\tau_0),$$

$$u_n'(\tau_0) = \frac{(1 + \nu)a\Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \left[\varepsilon'(\tau_0) - \frac{\gamma \alpha_n^2 E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \varepsilon(\tau_0) \right]. \quad (109)$$

Решая уравнение (108) при условиях (109) и подставляя найденное значение $u_n(t)$ в (105), будем иметь

$$u^*(r, t) = 2(1 + \nu)\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2 u_n^*(t)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1(\rho_n)}. \quad (110)$$

где

$$u_n^*(t) = \varepsilon(\tau_0) + \left[\varepsilon'(\tau_0) - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0) a^2}{\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2} \right] \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\xi) d\xi} d\tau + \\ + \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\xi) d\xi} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma_n(\xi) d\xi} \frac{\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2}{\rho_n^2 + \lambda^2(\xi) a^2} [\varepsilon''(\xi) + \gamma \varepsilon'(\xi)] d\xi. \quad (111)$$

Для определения радиального перемещения в произвольной точке $U^*(r, z, t)$ поступим так, как это сделали в предыдущем параграфе при определении $U(r, z)$. Принимая в (96), (93), (97) $z = -h$ и обозначая $U^*(r, \frac{1}{3}h, t) = u_0^*(r, t)$, получим однородное уравнение Эйлера

$$r^2 \frac{\partial^2 u_0^*(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_0^*(r, t)}{\partial r} - u_0^*(r, t) = 0,$$

при краевых условиях

$$u_0^*(0, t) = 0,$$

$$\left(r \frac{\partial u_0^*}{\partial r} + \nu u_0^* \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon_0 a,$$

решение которого имеет вид

$$u_0^*(r, t) = \varepsilon_0(t) r. \quad (112)$$

Тогда

$$U^*(r, z, t) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \varepsilon_0(t) r + \\ + \frac{(1 + \nu) a}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2 u_n^*(t)}{[\rho_n^2 - 1 + \nu^2] [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} \frac{J_1 \left(\frac{\rho_n}{a} r \right)}{J_1 \left(\frac{\rho_n}{a} \right)}. \quad (113)$$

3°. Для определения нормальных компонент напряжений над исходить из соотношений (89). Непосредственная подстановка $U^*(r, z, t)$ из (113) в (89) приводит к более сложным выражениям. Поэтому при помощи уравнения (107) формуле (113) дадим следующий вид

$$U^*(r, z, t) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \varepsilon_0(t) r + \frac{(1 + \nu) \varepsilon(t) a}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(a) \Phi_n(r)}{z_n^2} - \\ - \frac{\beta(1 - \nu^2)}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(r)}{a_n^2} \left[\frac{u_n(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t u_n(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right]. \quad (114)$$

Разлагая r в ряд Дини по системе функций $\{\Phi_n(r)\}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(a) \Phi_n(r)}{z_n^2} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{r}{a} \quad (115)$$

Подставляя значения ряда (115) в (114), а последнего в первое уравнение (42) и делая некоторые перестановки, получим интегральное уравнение Вольтерра

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, z, t) + \frac{\beta}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n'(r) + \frac{\nu}{r} \Phi_n(r)}{z_n^2} u_n(t) = \\ = \frac{E(t)}{1-\nu} \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha_1 T(z, t) \right] + \\ + E(t) \int_0^t \left[\sigma_r^*(r, z, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n'(r) + \frac{\nu}{r} \Phi_n(r)}{z_n^2} u_n(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

решение которого окончательно можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, z, t) = \frac{1}{1-\nu} L^* \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha_1 T(z, t) \right] - \\ - \frac{\beta a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) - \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n(t). \quad (116) \end{aligned}$$

Из второго уравнения (42) и (114)–(115) аналогичным путем получим

$$\begin{aligned} \sigma_z^*(r, z, t) = \frac{1}{1-\nu} L^* \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha_1 T(z, t) \right] - \\ - \frac{\beta a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \rho_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) + \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n(t). \quad (117) \end{aligned}$$

Остается определить $\sigma_r^*(r, z, t)$. Из соотношений (42) и (96) следует

$$\frac{\partial \sigma_r^*(t)}{\partial r} + \frac{\sigma_n^*(t) - \sigma_v^*(t)}{r} = \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \tau^*(t), \quad (118)$$

где

$$\tau^*(r, t) = 2\beta a(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2 u_n^*(t)}{(\rho_n^2 + 1 - \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1(\rho_n)} \quad (119)$$

Подставляя (118) в (92), находим

$$\tau_{z^*}^*(r, z, t) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{3z}{h}\right) \tau^*(r, t).$$

Отметим, что последняя формула получается также из (116), (117) в (92).

При $r \rightarrow 0$ из (116) и (117) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(0, z, t) = \sigma_z^*(0, z, t) = & \frac{1}{1-\nu} L^* \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha, T(z, t) \right] - \\ & - \frac{3a^2(1+\nu)^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t). \end{aligned}$$

Разлагая $I_1(\lambda r)$ в ряд Дини по собственным функциям $\left\{ J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) \right\}$ и определяя значения интеграла

$$\int_0^r r I_1(\lambda r) J_1(\alpha_n r) dr = \frac{\lambda r I_0(\lambda r) J_1(\alpha_n r) - \alpha_n r J_0(\alpha_n r) I_1(\lambda r)}{\alpha_n^2 + \lambda^2},$$

по методу определения интегралов Ломелля, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho_n^2}{(\rho_n^2 + \lambda^2 a^2) (\rho_n^2 - 1 + \nu^2)} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1(\rho_n)} = \frac{I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \quad (120)$$

Используя разложение (120), из (114), (116) и (117) заключаем, что при $t = \tau_0$ упруго-мгновенное решение (§ 3) и решение с учетом ползучести (§ 4) совпадают.

4°. В частном случае, когда $T(z, t) = T_0 = \text{const.}$ из (116), (117) и (111) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, z, t) = \\ = -\frac{3a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) - \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t), \end{aligned}$$

$$\sigma_n^*(r, z, t) =$$

$$-\frac{\beta a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) + \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t); \quad (121)$$

$$u_n^*(t) = \alpha_1 T_0 \left[1 - \frac{\gamma_0^2(\tau_0) E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0) a^2}{\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2} \frac{1 - e^{-\gamma_n(t-\tau_0)}}{\gamma_n} \right]. \quad (122)$$

Причем при получении последней формулы использованы приближенные формулы (65).

Вид формулы (119) остается неизменным, но под $u_n^*(t)$ следует понимать (122).

При $r \rightarrow 0$ имеем

$$\sigma_r^*(0, z, t) = \tau_r^*(0, z, t) =$$

$$-\frac{\beta a^2(1+\nu)^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t).$$

Приведем результаты численных примеров для тех же значений параметров, использованных в § 3. Постоянные ползучести возьмем следующие: $\alpha = 0,03 \frac{1}{\text{день}}$, $\gamma = 0,026 \frac{1}{\text{день}}$, $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$, $A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5} \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$, день, $\tau_0 = 28$ день.

Таблица 2

Величины затухания напряжения по формулам (119), (121) и (122)

r/t	$\frac{\tau_r^*(r, t)}{\tau_r^*(r, 28)}$			$\frac{\tau_r^*(r, -h, t)}{\tau_r^*(r, -h, 28)}$			$\frac{\tau_z^*(r, -h, t)}{\tau_z^*(r, -h, 28)}$		
	0	90	∞	60	90	∞	60	90	∞
0	—	—	—	0,7442	0,6873	0,6562	0,7442	0,6873	0,6562
a	0,7442	0,7048	0,6750	—	—	—	0,7477	0,6842	0,6528

5°. Здесь рассматривался случай, когда температура изменяется только по высоте блока и по времени. Аналогичным путем можно решить задачу и в тех случаях, когда температура меняется симметрично относительно оси блока. В таком случае в правых частях уравнений (76) и (98) прибавляется член

$$(1 + \nu) r^2 \frac{\partial z(r, z, t)}{\partial r},$$

а в остальном ход решения остается неизменным.

Некоторые задачи о термонапряженном состоянии бетонных блоков за пределом упругости рассмотрены в работах [7, 8].

Институт математики и
механики АН АрмССР

Поступило 20 IV 1957

Մ. Ա. Զաժոյանի

ԲԵՏՈՆԵ ԲԼՈԿՆԵՐԻ ԶԵՐՄԱՆԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԷՃԱԿԸ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաշվածում ասումնատիրություն է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի և գրանի ձև սենկոդ քետոնե բլոկների լարվածային վիճակը, երբ ջերմաստիճանը փոփոխվում է կամադականորեն՝ ըստ բարձրության և ժամանակի: Նուշափող լարումները, որոնք առաջանում են բլոկի և նրա հիմքի միացման մակերեսում, քնդունված են (1—3) համեմատական հարիզոնական տեղափոխումներին:

Օգտագործելով հարթ հատվածքների ընդհանրացած հիպոթեզը, արված են համասարակչություն համասարամեծերը ինտեգրալ իմաստով, ինչպես դուտ առածգտնան, այնպես էլ սողքի հաշվառման գեպքերում:

Մասնավորապես գրանածե բլոկի դեպքում, սողքի հաշվառմամբ, խնդիրը բերվում է II կարգի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման (98), որի լուծումը արվում է Դինիի շարքերի միջոցով (105):

Բերված են թվային օրինակներ հաստատուն ջերմաստիճանի գեպքի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольных блоках. Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, т. 8, № 4, 1955.
2. Маслов Г. Н. Элементарные статические расчеты сооружений на температурные изменения. Известия НИИГ, т. 26, 1940.
3. Иллинский А. Ю. и Думанский А. В. О закономерностях растрескивания коры деревьев. ДАН СССР, т. 84, 1952.
4. Гримберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. 1948.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. 1952.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1 и 2, 1949.
7. Задоян М. А. Упруго-пластическое состояние прямоугольных бетонных блоков при равномерном распределении температуры. ДАН АрмССР, т. 23, № 5, 1956.
8. Задоян М. А. Об одной задаче предельного состояния бетонных блоков. ДАН АрмССР, т. 24, № 5, 1957.

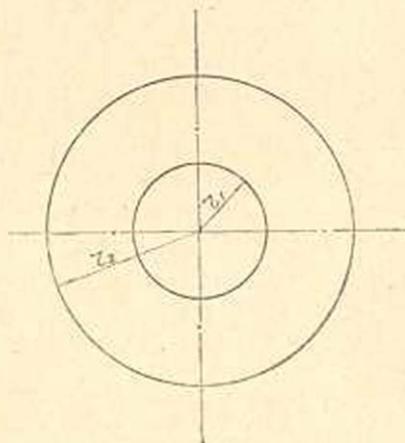
А. М. Резикий

Газоразрядный стабилизатор сильных постоянных токов

В в е д е н и е

Целью настоящей статьи является теоретическое обоснование стабилизатора сильных постоянных токов, основанного на принципе использования тлеющего разряда находящегося в магнитном поле.

Для разъяснения механизма стабилизации, представим себе два коаксиальных цилиндра, объем между которыми заполнен газом низкого давления фиг. 1. При определенной разности потенциалов приложенных к электродам трубки, и при наличии магнитного поля, силовые линии которого направлены параллельно оси трубки, в возникающем тлеющем разряде заряды движутся от одного электрода к другому по спирали. Таким образом заряды будут иметь тангенциальную составляющую скорости. Образовавшийся при этом момент вращения зарядов передается газу и газ приводится во вращение. Некоторая часть момента зарядов передается электродам, однако в расчетах этим мы пренебрегаем, т. к. при давлениях газа в несколько миллиметров ртутного столба, скорости зарядов падающих на электроды малы.



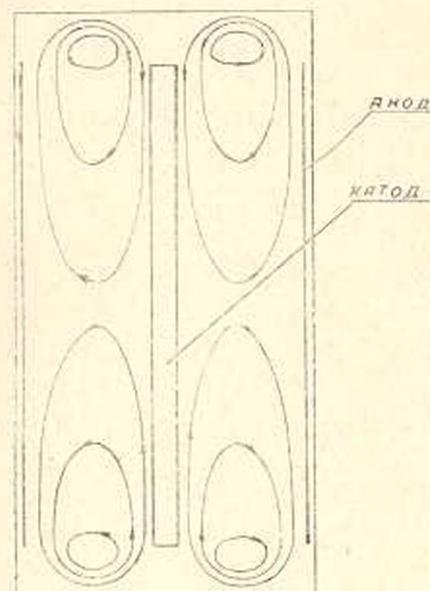
Фиг. 1.

По мере увеличения плотности разрядного тока и напряженности магнитного поля, газ достигает больших скоростей вращения, вследствие чего появляется большая центробежная сила препятствующая образованию турбулентных движений.

Скорость вращения газа уменьшается у концов разрядной трубки из-за трения его об изолирующие пластины соединяющие цилиндрические электроды, поэтому перепад давления газа между осью и периферией у концов трубки меньше, чем в середине. Это приводит к образованию осевых газовых потоков, которые уменьшаются при уда-

лении от концов (фиг. 2). Если условия у обоих концов трубки одинаковы, то эти потоки взаимно ослабляются. На не очень больших расстояниях от концов трубки, как осевыми потоками так и изменением скорости вращения газа можно пренебречь.

С увеличением напряженности магнитного поля происходит более сильное закручивание зарядов вокруг силовых линий, что приводит к увеличению внутреннего сопротивления трубки и к уменьшению разрядного тока.



Фиг. 2.

Это явление можно использовать для стабилизации сильных постоянных токов. Действительно, пусть соленоид в котором находится разрядная трубка питается током разряда, т. е. газоразрядный промежуток и соленоид соединены последовательно. В такой системе изменение напряжений на концах ее не приводит к заметному изменению силы тока, т. к. при увеличении питающего напряжения, из-за роста силы тока, повышается напряженность магнитного поля, что в свою очередь увеличивает внутреннее сопротивление трубки и этим препятствует дальнейшему росту

силы тока. При уменьшении же питающего напряжения явления будут протекать в обратном направлении.

Стабилизаторы, построенные на этом принципе, могут иметь различную мощность в зависимости от длины разрядной трубки.

§ 1. Электромагнитное вращение газа

Пусть имеем установившееся вращение газа, для расчета скорости которого рассмотрим идеальный случай, когда цилиндры имеют бесконечную длину.

При токе на единицу длины цилиндра i и магнитном поле B , вследствие симметрии задачи, скорость газа v зависит от r . Полагая, что импульс зарядов полностью передается газу и обозначая динамическую вязкость газа через η , мы можем определить момент передаваемый зарядами массе газа отстоящей от центра на расстоянии r так:

$$J = -2\pi\eta r^2 \frac{dv}{dr}.$$

Так как электроды закреплены, то скорость газа на поверхности электродов равна нулю, т. е. $v_{r=r_1} = 0$ и $v_{r=r_2} = 0$. Заменяя линейную скорость на угловую ω из соотношения $v = \omega r$ и имея в виду, что придав-

лении, имеющем место в приборе, скольжение газа отсутствует, можно написать момент J в другом виде:

$$J = -2\pi\eta r^2 \frac{d\omega}{dr}$$

Поэтому приращение момента будет иметь вид:

$$dJ = -2\pi\eta d\left(r^2 \frac{d\omega}{dr}\right), \quad (1.1)$$

Оно вызвано электромагнитным моментом действующим на длине dr , поэтому имеем:

$$dJ = iBrd r. \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) получаем дифференциальное уравнение характеризующее движение газа в простом виде:

$$\frac{iB}{4\pi\eta} d(r^2) + d\left(r^2 \frac{d\omega}{dr}\right) = 0, \quad (1.3)$$

граничные условия которого будут:

$$\omega_{r=r_1} = 0 \quad \omega_{r=r_2} = 0.$$

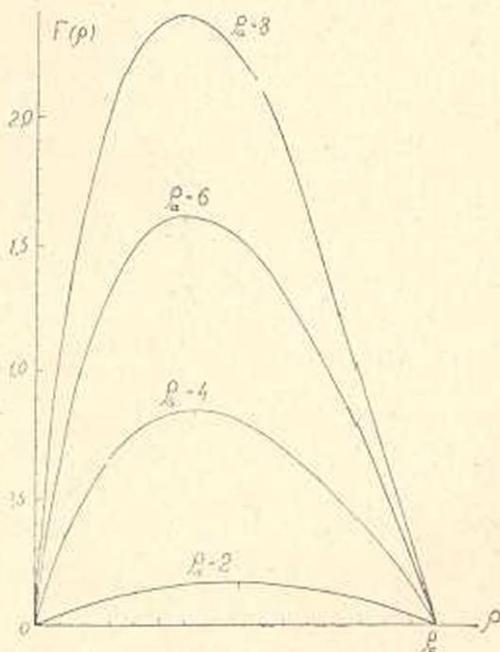
Решение уравнения (1.3) имеет следующий вид:

$$v = \frac{iB}{4\pi\eta} r_1 F(\rho),$$

$$\text{где} \quad F(\rho) = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1} \ln \rho_0 - \rho \ln \rho \quad (1.4)$$

$$\rho = \frac{r}{r_1}, \quad \rho_0 = \frac{r_2}{r_1}.$$

Функция $F(\rho)$ характеризует относительное изменение скорости газа. Эта функция приведена на фиг. 3, для различных значений ρ_0 . На кривых, черточками показаны те значения ρ , для которых $F(\rho)$, т. е. скорость газа, имеет максимальное значение. Как видно из кривых, при возрастании ρ_0 , место максимальной скорости приближается к внутреннему электроду, т. к. внутренний электрод, вследствие своей малой поверхности, создает меньшее трение газу, чем внешний электрод.



Фиг. 3.

§ 2. Теория разряда в магнитном поле

Рассмотрим движение зарядов в разряде при наличии магнитного поля. Введем следующие обозначения: v_r^- и v_r^+ — средние радиальная и тангенциальная скорости для электронов, соответственно v_r^+ и v_r^- для ионов¹, b_1 и b_2 — подвижности электронов и ионов. E — напряженность электрического поля.

Радиально направленная сила, действующая на ион, будет:

$$e(E - v_r^+ B) = \frac{e}{b_2} v_r^+, \quad (2.1)$$

а на электрон:

$$e(E - v_r^- B) = \frac{e}{b_1} v_r^-. \quad (2.2)$$

Тангенциально направленная сила, действующая на ион, будет:

$$e v_r^+ B = \frac{e}{b_2} (v_r^+ - v), \quad (2.3)$$

а на электрон:

$$e v_r^- B = \frac{e}{b_1} (v_r^- - v), \quad (2.4)$$

где сила выражается через разность скоростей заряда и движущего газа, причем скорость зарядов превышает скорость газа.

В рассматриваемом разряде количества электронов и ионов принимаются равными и плотности их обозначаются через Λ^2 . Тогда уравнение плотности тока можно написать в следующем виде:

$$j = Ne(v_r^- + v_r^+), \quad (2.5)$$

где плотность тока j выражается через ток i отнесенный на единицу длины цилиндра следующим образом:

$$2\pi r j = i. \quad (2.6)$$

Решая совместно уравнения (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4) получаем интересные нас величины:

$$v_r^+ = \frac{E - vB}{1 + b_2^2 B^2} b_2, \quad (2.7)$$

$$v_r^- = \frac{E - vB}{1 + b_1^2 B^2} b_1. \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.5), (2.7) и (2.8) получим выражение для напряженности электрического поля:

¹ Наличие отрицательных ионов пренебрегаем.

² Слишком большие напряженности магнитного поля недопустимы, т. к. этим можно нарушить основное свойство плазмы — ее нейтральность, для которого наши выводы имеют силу.

$$E = vB + \frac{j}{Ne(b_1 + b_2)} \left[1 + \frac{b_1^2 b_2^2 B^4 + (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) B^2}{1 + b_1 b_2 B^2} \right]. \quad (2.9)$$

При отсутствии магнитного поля движение газа отсутствует, и уравнение (2.9) дает нам необходимую напряженность E_0 для случая разряда без магнитного поля:

$$E = \frac{j}{Ne(b_1 + b_2)} = E_0. \quad (2.10)$$

Из выражений (2.9) и (2.10) видно, что при наличии магнитного поля напряженность электрического поля возрастает.

Используя соотношение (2.10) приведем уравнение (2.9) к следующему виду

$$E = vB + E_0 \left[1 + \frac{b_1^2 b_2^2 B^4 + (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) B^2}{1 + b_1 b_2 B^2} \right]. \quad (2.11)$$

Первый член в правой части уравнения (2.11) обусловлен наличием трения при вращении газа, второй член, в скобке, возникает за счет трения между носителями заряда и нейтральным газом. В приведенном расчете не учтено трение между носителями заряда, которое мало вследствие их малой концентрации.

Подставляя в уравнение (2.11) значение v из уравнения (1.4) и интегрируя от r_1 до r_2 , т. е. от 1 до ρ_a , получим величину напряжения V приложенного к электродам разрядной трубки в следующем виде:

$$V = \frac{iB^2 r_1^2}{4\pi\gamma} \left(\frac{\rho_a^2 - 1}{4} - \frac{\rho_a^2}{\rho_a^2 - 1} \ln^2 \rho_a \right) + V_0 \left[1 + \frac{b_1^2 b_2^2 B^4 + (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) B^2}{1 + b_1 b_2 B^2} \right]. \quad (2.12)$$

При интегрировании мы обозначили:

$$r_1 \int_1^{\rho_a} E_0(\rho) d\rho = V_0,$$

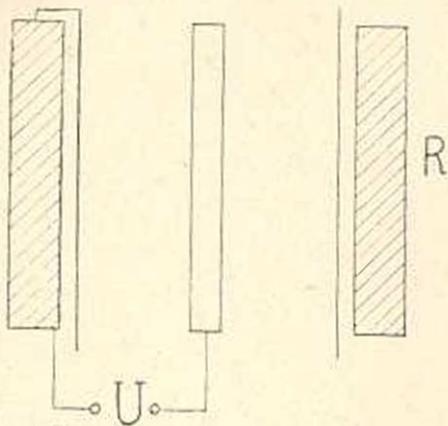
где V_0 — напряжение приложенное к электродам трубки при отсутствии магнитного поля.

Известно, что V_0 есть функция от γ , представляющем отношение электронного и ионного токов на поверхности катода.

Величина γ уменьшается с увеличением напряженности магнитного поля, вследствие увеличения угла падения ионов на поверхность катода, последнее приводит к значительному снижению выхода электронов, т. е. уменьшению общего разрядного тока.

§ 3. Стабилизация тока

Представим теперь, что магнитная катушка, в которой находится разрядная трубка, питается разрядным током, т. е. газоразрядный промежуток и магнитная катушка соединены последовательно (фиг. 4). Полное напряжение при этом будет:



Фиг. 4.

$$U = Ai + V, \quad (3.1)$$

где i есть ток на единицу длины разрядной трубки, а в A входят активное сопротивление магнитной катушки и внешней нагрузки, если она также соединена последовательно с цепью. А также в A входит множитель характеризующий длину разрядной трубки.

Уравнения (2.12) и (3.1) дают:

$$U = Ai + \frac{iB^2 r_j^2}{4\pi\eta} \left(\frac{\rho_a^2 - 1}{4} - \frac{\rho_a^2}{\rho_a^2 - 1} \ln^2 \rho_a \right) + V_0 \left[1 + \frac{b_1^2 b_2^2 B^4 + (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) B^2}{1 + b_1 b_2 B^2} \right]. \quad (3.2)$$

Для упрощения расчетов мы будем пренебрегать изменением η и полагать, что V_0 не зависит от B . А в случае сильных токов можно пренебречь первым членом и так же единицей по сравнению с $b_1 b_2 B^2$.

После переноса постоянного слагающего в левую сторону, уравнение (3.2) упрощается и принимает следующий вид:

$$U^2 = a_1 i B^2 + a_2 B^2, \quad (3.3)$$

где

$$a_1 = \frac{r_j^2}{4\pi\eta} \left(\frac{\rho_a^2 - 1}{4} - \frac{\rho_a^2}{\rho_a^2 - 1} \ln^2 \rho_a \right) \\ a_2 = b_1 b_2 V_0.$$

Для удобства, введем коэффициент K — обратный коэффициенту стабилизации:

$$K = \frac{i}{V^2} \frac{dV^2}{di}. \quad (3.4)$$

Используя уравнение (3.3) мы получим¹:

¹ Зависимость B от i , которая появляется вследствие ограниченной длины катушки, пренебрегаем.

$$K = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_2} \frac{1}{i}} + 2 \frac{i}{B} \frac{dB}{di} \quad (3.5)$$

Вследствие пропорциональности i к H мы можем написать выражение (3.5) в следующем виде:

$$K = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_2} \frac{1}{H}} + 2 \frac{H}{B} \frac{dB}{dH} \quad (3.6)$$

В выражение (3.6), как видно, входят статическая и динамическая магнитные проницаемости, поэтому его можно представить в другом виде:

$$K = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_2} \frac{1}{H}} + 2 \frac{\mu_{\text{дин}}}{\mu_{\text{стат}}} \quad (3.7)$$

В случае $\frac{a_2}{a_2} \frac{1}{H} \ll 1$ мы получим:

$$K_1 = 1 + 2 \frac{\mu_{\text{дин}}}{\mu_{\text{стат}}} \quad (3.8)$$

Этот случай сильно увеличивает диаметр разрядной трубки. В случае $\frac{a_2}{a_2} \frac{1}{H} \ll 1$ имеем:

$$K_2 = 2 \frac{\mu_{\text{дин}}}{\mu_{\text{стат}}} \quad (3.9)$$

При отсутствии сердечника в магнитной катушке выражения (3.8) и (3.9) дают $K_1 = 3$, $K_2 = 2$.

Таким образом для коэффициента стабилизации получаем упрощенное соотношение:

$$K^1 = \frac{\mu_{\text{стат}}}{2\mu_{\text{дин}}} \quad (3.10)$$

В приведенной задаче, ради простоты расчетов, не учтен ряд обстоятельств, которые могли бы улучшить коэффициент стабилизации K^1 . Так например, не учтены реактивное сопротивление системы и изменение γ в зависимости от магнитного поля.

В заключении приношу благодарность доктору физ. мат. наук В. М. Харитонову за обсуждение настоящей работы, а также Э. О. Агасяну за помощь в работе.

Ե. Մ. Ռեզիկյան

ՌԻԺԵՂ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ԳԱԶԱՊԱՐՊՈՒՄԱՅԻՆ
ՍՏԱԲԻԼԻԶԱՏՈՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունն մեջ բերված է հոսանքի ստարիլիզատորի նոր տեսակի տեսական հիմնավորումը: Ստարիլիզատորը իրենից ներկայացնում է ցածր ճնշման գազային խողովակ, որի մեջ տեղադրված են երկու համառանցք մետաղյա զլանային էլեկտրոդներ: Էլեկտրոդների միջև անցնող հոսանքը ստաշացնում է մաքմանը էլեկտրական պարպում: Նրա գազային խողովակը տեղադրված է աջակտի մագնիսական կոճի դաշտում, որի ուժազմերը դադանու են զլանների ստանցքին, լիցքերի տեղափոխումը մեկ էլեկտրոդից մյուսին կատարվում է սպիրտային գծերով: Մագնիսական դաշտի լարվածությունը մեծացնելու դեպքում, այդ լիցքերը տեղափոխվում են սվայի կորացած գծերով, որի հետևանքով գազային խողովակի ներքին դիմադրությունը մեծանում է, իսկ գազապարպման հոսանքը՝ փոքրանում: Այս երևույթը օգտագործված է հաստատուն հոսանքը ստարիլիզացիայի ենթարկելու համար:

Տվյալ ստարիլիզատորի ստարիլիզացիոց հոսանքի ուժի մեծությունը համեմատական է գազապարպման խողովակի երկարությանը:

Ասանց միջուկի մագնիսական կոճի դեպքի համար ստարիլիզացիայի գործակիցը $K^1 = 0,3 - 0,5$:

Միջուկ պարունակող մագնիսական կոճով ստարիլիզատորի ստարիլիզացիայի գործակցի համար ստացված է հետևյալ պարզ արտահայտությունը

$$K^1 = \frac{\mu_{\text{տ.}}}{2\mu_{\text{դ.}}},$$

որտեղ $\mu_{\text{տ.}}$ և $\mu_{\text{դ.}}$ իրենցից ներկայացնում են մագնիսական կոճի միջուկի նյութի ստատիկ և դինամիկ մագնիսական թափանցելիությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Beeck O. Ann. Physik, 6, 1001, 1930.
2. Beeck O. Physik, Z., 35, 36, 1934.
3. Varney R. Phys. Rev., 50, 159, 1936.
4. Канюс Н. А. Электрические явления в газах и вакууме. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. Зиндель А. и Штенбек М. Физика и техника электрического разряда в газах, I, ОНТИ, М.—Л., 1936.
6. Alfven H. Cosmical electrodynamics, Oxford, 1950.

Э. Е. Хачикян

Измерение степени поляризации и цвета Туманностей *NGC 2023* и *NGC 7023*

Вопросу поляризации излучения газо-пылевых туманностей посвящено значительное число исследований. Однако до 1951 г. работы по поляриметрии туманностей носили односторонний характер: согласно гипотезе Слайфера [1], априори предполагалось, что излучение туманностей должно быть радиально поляризовано. Поэтому цель этих работ сводилась лишь к определению степени поляризации излучения туманностей. В. А. Амбарцумян, однако, привел факты свидетельствующие в пользу того, что гипотеза отражения не в состоянии полностью объяснить непрерывный спектр некоторых туманностей [2]. Нерадиальный характер поляризации излучения туманностей *NGC 1952* и *IC 432* был действительно установлен в [3, 4, 5].

В настоящей работе приведены результаты измерения поляризации и цвета двух туманностей: *NGC 2023* и *NGC 7023*. При поляриметрических измерениях в качестве анализатора был использован поливиниловый поляроид. Методика наблюдений была та же, что и в предыдущих работах [4, 5]. Определение цвета туманностей производилось обычным способом, фотографированием их в двух участках спектра через синий (СС5) и желтый (ЖС16) фильтры.

Сведения о поляриметрических снимках даны в таблицах 1 и 2, а колориметрических—в таблице 3, где φ —позиционный угол плоскости пропускания поляроида, отсчитанный от некоторого определенного направления. Колориметрические снимки получены на 21" камере Шмидта.

а) туманность *NGC 2023*.

NGC 2023 находится в богатой туманностями области ζ Ориона. Ядром ее является звезда *BD—2°1345* фотографической величины $7^m.8$ и спектрального класса *B1.5V*, показатель цвета ядра *B—V* равен $-0^m.09$, а избыток цвета $0^m.34$ [6]. Излучение ядра по нашим измерениям не обнаруживает заметной поляризации. Спектр туманности непрерывный с линиями поглощения водорода и гелия [7, 8, 9]. Присутствие в спектре туманности эмиссионной линии отмечалось Вольфом [10], однако, Хаббл [7] считает, что эта эмиссионная линия принадлежит *IC434* и Вольф, повидимому, ошибочно ее отнес к туман-

Таблица 1

NGC 2023
Поляриметрические снимки

Дата	Длительность экспозиции	φ	Сорт пластины	Телескоп
21.1.1955	1 ч. 40 мин	0°	Истмэн 103а—Е	8" Шмидт
"	"	60	"	"
"	"	120	"	"
27.1.1955	2 ч. 00	0	"	"
"	"	60	"	"
28.1.1955	"	120	"	"
14.10.1955	3 ч. 00	60	Кодак	21" Шмидт
15.10.1955	"	120	"	"
16.10.1955	2 ч. 51	0	"	"

Таблица 2

NGC 7023
Поляриметрические снимки

Дата	Длительность экспозиции	φ	Сорт пластины	Телескоп
16.9.1955	3 ч. 45 мин	0°	Кодак	8" Шмидт
17.9.1955	"	60	"	"
18.9.1955	"	120	"	"
13.10.1955	"	0	"	21" Шмидт
14.10.1955	"	60	"	"
15.10.1955	"	120	"	"

Таблица 3

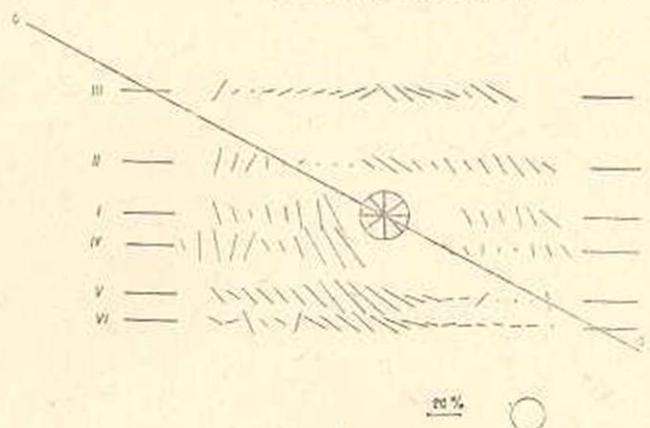
Колориметрические снимки

Дата	Фильтр	Длительность экспозиции	Сорт пластины	Туманность
16.10.1955	ЖС16	3 ч. 00 мин	Истмэн 103а—Е	NGC 7023
19.10.1955	"	"	"	NGC 2023
22.10.1955	СС5	1 ч. 30	Кодак	NGC 7023
"	"	1 ч. 00	"	NGC 2023

ности NGC 2023. В [11] туманность считается частично эмиссионной. Туманность симметрична и не богата деталями.

Единственное измерение показателя цвета туманности было произведено Коллинсом [8]. По его измерениям показатель цвета туманности оказался равным $-0^m.10$. Поляриметрическое исследование туманности до сих пор не производилось.

Поляриметрическое исследование туманности произведено нами по трем сериям снимков (каждая серия состоит из трех снимков туманности, снятых при трех различных положениях поляроида). Было измерено около 100 областей в туманности на пластинках первой и второй серий и около 250-третьей. Результаты измерений степени поляризации p и плоскости преимущественных колебаний θ_0 схематически нанесены на фиг. 1, 2, 3. Величина и направление плоскости поляризации показаны на фигурах в виде черточек, проведенных через центры измеряемых областей. Масштаб степени поляризации показан в правом нижнем углу фиг. Величина кружка показывает размер каждой измеряемой области. В случае 8" камеры он был равен 330 кв. сек. дуги, а в случае 21" камеры—100 кв. сек. дуги. Заштрихованный кружок в центре представляет ядро туманности. Измерение туманности производилось вдоль определенных сечений, нумерация которых показана на фигурах.



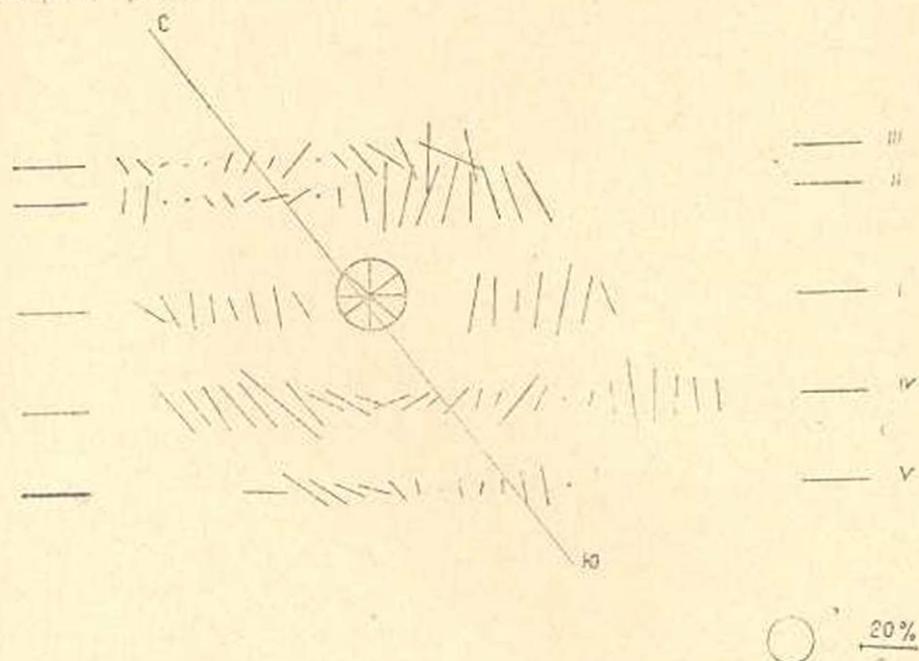
Фиг. 1.

Результаты колориметрических измерений помещены в табл. 4. В первом столбце приведены порядковые номера сечений вдоль которых производились измерения. Сечения, совпадающие как при поляриметрических, так и при колориметрических измерениях на фиг. 3 и табл. 4, обозначены одним и тем же номером. Во втором столбце помещены порядковые номера измеряемых областей, в третьем и четвертом—поверхностные яркости областей в синих и желтых лучах, выраженные в звездных величинах с кв. сек. дуги, в пятом—показатель цвета.

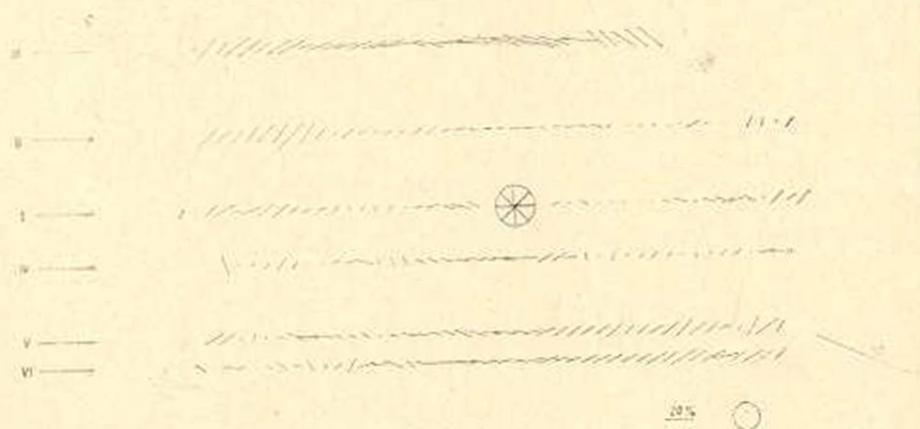
Как видно из фиг. 1, 2, 3 излучение туманности радиально поляризовано относительно ядра. Среднее значение величины $p\Delta\theta_0$, где $\Delta\theta_0$ отклонение θ_0 от радиального направления поляризации—порядка 250. Для сравнения приводим табл. 5, где для различных значений степени поляризации, данных в первом столбце, приводятся, во втором и третьем столбцах—средние арифметические значения средних квадратичных ошибок: степени поляризации \overline{p}^{cp} и плоскости преимущественных колебаний $\overline{\theta_0}^{cp}$, по трем сериям наших снимков Крабовидной туманности, а в последнем—число областей, где степень поляризации попадает в данный интервал.

Средняя степень поляризации по всей туманности составляет 13%. Это указывает на то, что рэлеевское рассеяние в туманности не иг-

рует существенной роли. В противном случае процент поляризации должен был бы быть значительно больше. К такому же выводу приводят наши колориметрические измерения. Фиг. 4 показывает зависимость показателя цвета туманности от расстояния до ядра. Как видно из фиг., туманность в основном имеет синий цвет.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Средний показатель для всей туманности равен $-0^{\circ}37$. Туманность голубее ядра в среднем на $0^{\circ}46$. Для других туманностей эта величина оценивается в $0^{\circ}30$. Релеевскому же рассеянию соответствует

Таблица 4

Номер сечения	Номер обл.	m_c	m_m	C	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5					
I	1	22.80	22.71	+0.09		20	20.09	20.11	-0.02
	2	22.79	22.51	+0.28		21	19.80	20.04	-0.24
	3	22.64	22.34	+0.30		22	19.84	19.89	-0.05
	4	22.64	22.71	-0.07		23	19.83	19.62	+0.21
	5	22.52	22.73	-0.21		24	19.69	19.22	+0.47
	6	22.68	22.73	-0.05		25	19.27	18.16	+1.11
	7	22.32	22.51	-0.19		26	19.41	17.73	+1.68
	8	22.24	22.11	+0.13		27	19.97	18.53	+1.44
	9	22.02	21.87	+0.15		28	20.49	19.82	+0.67
	10	21.90	21.77	+0.13		29	20.82	20.63	+0.19
	11	21.92	21.70	+0.22		30	21.03	21.22	-0.19
	12	21.58	21.36	+0.22		31	21.14	21.31	-0.17
	13	21.38	21.26	+0.12		32	21.08	21.30	-0.22
	14	21.15	20.99	+0.16		33	21.23	21.41	-0.18
	15	21.04	20.91	+0.13		34	21.30	21.30	0.00
	16	20.84	20.85	-0.01		35	21.38	21.47	-0.09
	17	20.69	20.58	+0.11		36	21.71	21.97	-0.26
	18	20.43	20.66	+0.43		37	21.81	22.31	-0.50
	19	20.03	19.60	+0.48		38	22.23	22.29	-0.04
	20	19.56	18.64	+0.92		39	22.66	22.77	-0.11
	21	18.64	16.99	+1.65	V	1	22.86	22.81	+0.05
	22	19.37	18.22	+1.15		2	22.76	23.11	-0.35
	23	19.98	19.25	+0.73		3	22.48	22.47	+0.01
	24	20.41	20.51	-0.10		4	22.27	22.05	+0.22
	25	20.60	20.80	-0.20		5	21.91	22.11	-0.20
	26	20.38	19.79	+0.59		6	21.80	21.79	+0.01
	27	20.55	20.00	+0.55		7	21.62	21.71	-0.09
	28	20.70	20.11	+0.59		8	21.47	21.79	-0.32
	29	20.93	20.46	+0.47		9	21.68	22.35	-0.67
	30	21.40	21.26	+0.14		10	21.91	22.51	-0.60
	31	21.42	21.49	-0.07		11	21.97	22.53	-0.56
	32	21.42	21.55	-0.13		12	21.76	22.95	-1.19
	33	21.46	21.49	-0.03		13	21.72	22.51	-0.79
	34	21.55	21.51	+0.04		14	21.67	22.35	-0.74
	35	21.66	21.81	-0.15		15	21.61	22.21	-0.60
	36	21.60	21.83	-0.23		16	21.49	21.75	-0.26
	37	21.66	21.75	-0.09		17	21.28	22.25	-0.87
	38	22.10	22.11	-0.01		18	21.10	21.83	-0.73
	39	22.15	21.87	+0.28		19	20.87	21.17	-0.30
40	22.47	21.75	+0.72		20	20.92	21.49	-0.57	
41	22.74	22.43	+0.31		21	21.04	21.70	-0.66	
III	1	22.85	22.55	+0.30		22	21.10	21.19	-0.09
	2	22.30	22.61	-0.31		23	21.08	21.37	-0.29
	3	22.20	22.47	-0.27		24	21.26	21.75	-0.49
	4	22.20	22.63	-0.43		25	21.35	21.89	-0.54
	5	22.10	22.06	+0.04		26	21.07	21.61	-0.54
	6	21.81	21.91	-0.10		27	20.98	21.13	-0.15
	7	21.72	21.88	-0.16		28	21.04	21.23	-0.19
	8	21.86	21.91	-0.05		29	20.92	20.92	0.00
	9	21.56	21.91	-0.35		30	21.01	20.99	+0.02
	10	21.74	21.86	-0.12		31	21.24	21.26	-0.02
	11	21.50	21.91	-0.41		32	21.59	21.14	+0.45
	12	21.38	21.91	-0.53		33	22.07	22.47	-0.40
	13	21.27	21.67	-0.40		34	22.26	22.23	-0.07
	14	21.17	21.49	-0.32		35	22.44	22.89	-0.45
	15	20.89	21.09	-0.20	VII	1	22.39	22.59	-0.20
	16	20.98	21.26	-0.28		2	22.38	22.39	-0.01
	17	20.73	21.01	-0.28		3	22.40	22.91	-0.51
	18	20.74	21.05	-0.31		4	22.40	22.59	-0.19
	19	20.65	20.95	-0.30		5	22.21	22.57	-0.36
					6	22.34	22.75	-0.41	

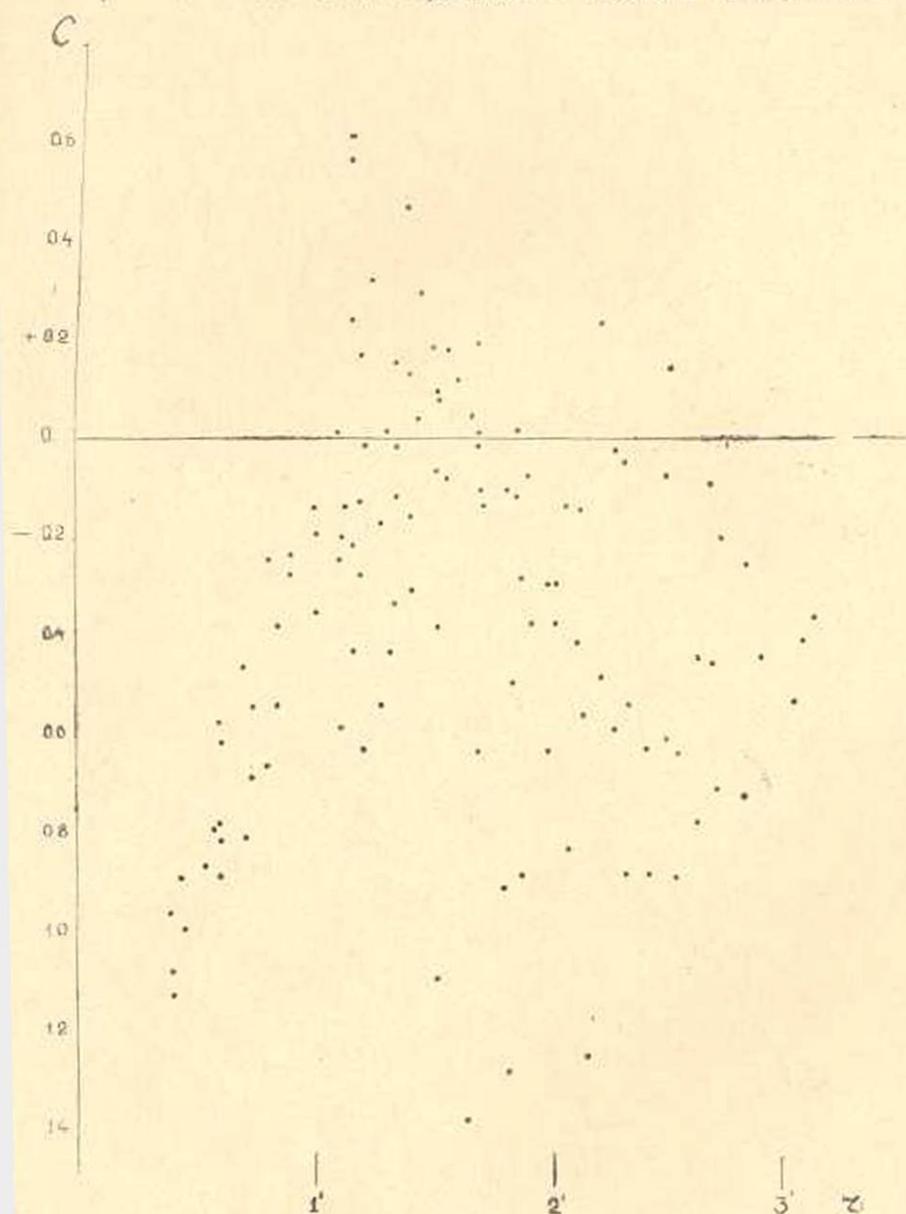
Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	7	21.82	22.05	-0.24		2	22.31	22.47	-0.13
	8	21.60	21.58	+0.02		3	22.36	22.61	-0.25
	9	21.36	21.83	-0.47		4	22.92	22.47	+0.45
	10	21.58	21.87	-0.29		5	22.15	22.47	-0.32
	11	21.80	22.07	-0.27		6	22.10	22.71	-0.61
	12	21.71	22.07	-0.36		7	21.92	22.47	-0.55
	13	21.58	21.83	-0.25		8	21.78	21.97	-0.19
	14	21.55	22.15	-0.59		9	21.60	22.03	-0.43
	15	21.63	21.97	-0.34		10	21.55	21.96	-0.41
	16	21.56	21.95	-0.39		11	21.60	21.81	-0.21
	17	21.51	21.88	-0.37		12	21.71	21.87	-0.16
	18	21.59	22.01	-0.42		13	22.05	22.07	-0.02
	19	21.64	22.07	-0.43		14	21.92	22.07	-0.15
	20	21.60	22.08	-0.48		15	21.67	21.67	0.00
	21	21.28	21.67	-0.39		16	21.39	21.29	+0.10
	22	21.48	21.91	-0.43		17	21.13	21.01	+0.12
	23	21.53	22.11	-0.58		18	21.04	20.90	+0.14
	24	21.59	21.91	-0.32		19	21.18	21.10	+0.08
	25	21.30	21.75	-0.45		20	21.30	21.41	-0.11
	26	21.40	21.71	-0.31		21	21.34	21.30	+0.04
	27	21.49	21.67	-0.18		22	21.46	21.57	-0.11
	28	22.32	22.91	-0.59		23	21.84	22.16	-0.32
						24	21.93	22.29	-0.36
XI	1	22.50	22.91	-0.11		25	21.96	22.29	-0.33
	2	22.44	22.51	-0.07		26	21.06	22.39	-0.33
	3	22.72	22.76	-0.04		27	21.91	22.53	-0.62
	4	22.98	23.21	-0.23		28	22.15	22.21	-0.06
	5	22.45	22.91	-0.45		29	21.78	21.78	0.00
	6	22.10	22.46	-0.36		30	21.85	21.53	+0.32
	7	22.21	22.61	-0.40		31	22.16	21.97	+0.19
	8	21.99	22.76	-0.77		32	22.62	22.23	+0.39
	9	22.05	22.91	-0.86		33	22.88	22.25	+0.63
	10	22.06	22.91	-0.85		34	22.19	21.97	+0.22
	11	21.68	22.30	-0.62	XV				
	12	21.58	21.90	-0.32		1	22.40	22.45	-0.05
	13	20.91	20.69	+0.22		2	21.98	22.29	-0.31
	14	20.58	20.34	+0.24		3	21.73	21.95	-0.22
	15	20.13	19.08	+1.05		4	21.53	21.61	-0.08
	16	19.78	18.04	+1.74		5	21.52	21.63	-0.11
	17	19.88	17.91	+1.97		6	21.66	21.91	-0.25
	18	19.56	18.01	+1.55		7	21.67	22.47	-0.80
	19	19.59	17.81	+1.78		8	21.84	22.91	-1.07
	20	20.00	18.76	+1.24		9	21.65	22.81	-1.16
	21	20.23	19.89	+0.41		10	21.73	22.71	-0.98
	22	20.53	20.40	+0.13		11	21.66	22.27	-0.61
	23	20.75	20.89	-0.14		12	21.62	22.29	-0.67
	24	20.82	21.17	-0.35		13	21.40	22.32	-0.92
	25	20.84	20.95	-0.11		14	21.26	21.91	-0.65
	26	21.22	21.26	-0.04		15	21.02	21.40	-0.38
	27	21.51	22.01	-0.50		16	21.01	21.43	-0.42
	28	21.62	22.27	-0.65		17	20.95	21.67	-0.72
	29	21.99	22.81	-0.82		18	21.10	21.61	-0.51
	30	21.88	22.73	-0.85		19	21.41	22.21	-0.80
	31	21.99	22.86	-0.87		20	21.58	22.35	-0.77
	32	22.10	23.11	-1.01		21	21.36	22.36	-1.00
	33	21.88	23.01	-1.13		22	21.47	22.41	-0.94
	34	21.92	22.46	-0.54		23	21.26	21.91	-0.65
	35	21.92	21.75	-0.17		24	21.01	21.62	-0.58
	36	22.35	21.63	+0.72		25	20.97	21.23	-0.26
	37	22.25	21.79	+0.46		26	20.96	21.07	-0.11
	38	22.30	21.63	+0.63		27	21.12	21.14	-0.02
						28	21.29	21.09	+0.20
XIII	1	22.68	22.91	-0.23		29	21.72	21.89	-0.17
						30	22.48	22.91	-0.43

разность цветов порядка 1^m0 . Так как релеевское рассеяние в туманности отсутствует, то размеры частиц, составляющих туманность, должны превышать 10^{-6} см.

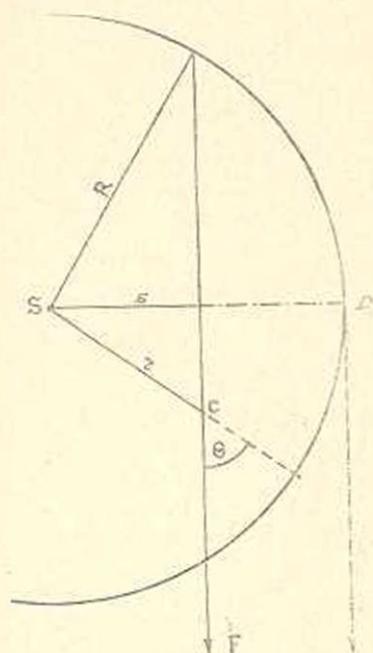
Рассмотрим вопрос о возможности определения размеров частиц туманности из данных поляриметрии и колориметрии.

Примем, что туманность имеет сферическую форму с ядром в центре. Для такой модели имеется некоторое основание: туманность симметрична, избыток цвета ядра намного больше, чем у звезд того



Фиг. 4.

же спектрального класса, находящихся в той же области неба. Последнее обстоятельство указывает на то, что дополнительное погло-



наблюдателя

Фиг. 5.

Таблица 5

$\rho^0/\%$	\pm_{ρ}^{CP}	$\pm_{\theta_0}^{CP}$	π
0-9	$\pm 1.6^0/\%$	$\pm 12.0^0$	11
10-19	± 3.1	± 13.5	42
20-29	± 3.7	± 7.5	30
30-39	± 3.6	± 5.7	24
40-60	± 5.4	± 7.2	12

щение света ядра происходит в самой туманности, т. е., ядро находится внутри туманности. Принимая распределение материи в туманности равномерным, для интенсивности пучка света ядра, отраженного в точке C в направлении наблюдателя F вдоль луча зрения на расстоянии r от ядра и под углом θ , можем написать (см. фиг. 5):

$$dI_s = I_0 \cdot k_s \cdot e^{-\alpha_\lambda r} \cdot e^{-\alpha_\lambda (\sqrt{R^2 - s^2} - \sqrt{r^2 - s^2})} \cdot \psi(\theta) d\sqrt{r^2 - s^2}$$

где R—радиус туманности, s—расстояние в проекции от ядра до точки отражения C, $\psi(\theta)$ —фазовая функция, I_0 —интенсивность ядра, α_λ —коэффициент поглощения, k_s —коэффициент рассеяния. Полная интенсивность туманности по всему лучу зрения будет равна:

$$I_s = I_0 \int_s^R \left[e^{-\alpha_\lambda (r + \sqrt{R^2 - s^2} - \sqrt{r^2 - s^2})} + e^{-\alpha_\lambda (r + \sqrt{R^2 - s^2} + \sqrt{r^2 - s^2})} \right] k_s \psi(\theta) \frac{r \cdot dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

или, обозначая $\frac{r}{s} = x$, $\frac{R}{s} = b$ имеем:

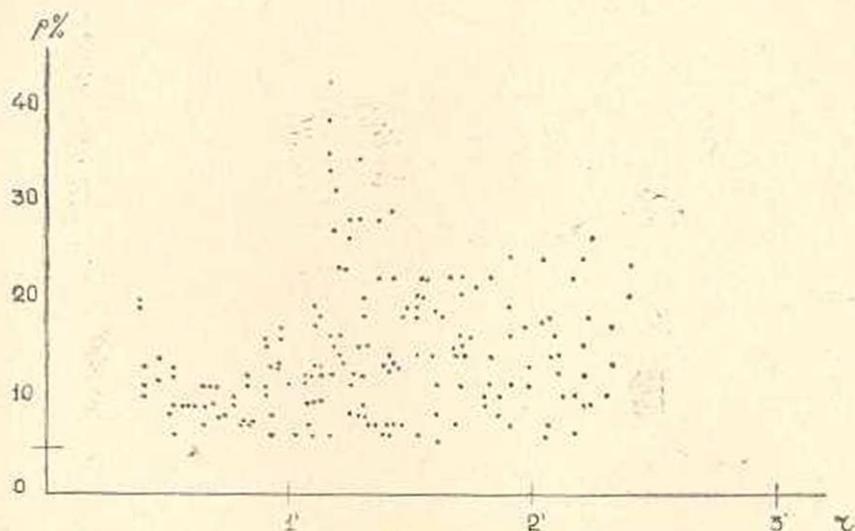
$$I_s = I_0 \cdot s \int_1^b \left[e^{-\alpha_\lambda s(x + \sqrt{b^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1})} + e^{-\alpha_\lambda \cdot s(x + \sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \right] k_s \psi(x) \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (1)$$

Показатель цвета туманности находим из (1)

$$C_s = -2,5 [\log I_s^{(1)} - \log I_s^{(2)}], \quad (2)$$

где $I_s^{(1)}$ и $I_s^{(2)}$ получены из I_s , подстановкой значений α_λ и k_λ , соответствующих $\lambda = \lambda_c$ (для синих лучей) и $\lambda = \lambda_{ж}$ (для желтых лучей).

Поляризация света при отражении является результатом различия коэффициентов отражения для составляющих электрического вектора, направленных параллельно и перпендикулярно к плоскости падения. При отражении туманностью света ядра в точке C в направлении F степень поляризации излучения элемента объема будет равна



Фиг. 6.

$$p_c = \frac{k_\perp(\theta) - k_\parallel(\theta)}{k_\perp(\theta) + k_\parallel(\theta)}$$

где k_\perp и k_\parallel — коэффициенты отражения для составляющих электрического вектора, соответственно, перпендикулярной и параллельной плоскости падения. Степень поляризации луча, выходящего из данной точки туманности вдоль направления F будет:

$$p_s = \frac{\int k_\perp(\theta) d\theta - \int k_\parallel(\theta) d\theta}{\int k_\perp(\theta) d\theta + \int k_\parallel(\theta) d\theta} \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) можно рассматривать, как уравнения для определения неизвестных размеров частиц. Левые части этих уравнений известны из наблюдений, а в правых — находятся функции, содержащие в качестве параметра размеры частиц и зависящие от плотности туманности. Однако, их решение сопряжено с большими трудностями и требует специального исследования. Задача упрощается при $b = 1$, т. е., в точке D на границе туманности. В этом случае можно написать:

$$m_c = -2,5 \log I_0 \cdot e^{-\alpha_c R} k_c,$$

$$m_{ж} = -2,5 \log I_0 \cdot e^{-\alpha_{ж} R} k_{ж}.$$

Отсюда, для показателя цвета туманности получаем выражение:

$$C_T = -2,5 \log \frac{k_c}{k_k} \cdot e^{-R(\alpha_c - \alpha_k)} \quad (4)$$

Таким же образом, для показателя цвета ядра имеем:

$$C_A = -2,5 \log \cdot e^{-R(\alpha_c - \alpha_k)} \quad (5)$$

Из (4) и (5) находим:

$$C_T - C_A = \Delta C = -2,5 \log \frac{k_c}{k_k}$$

или, так как

$$k_\lambda \sim \lambda^n$$

$$\Delta C = -2,5n \cdot \log \frac{\lambda_c}{\lambda_k}$$

Отсюда, учитывая значение $\frac{\lambda_c}{\lambda_k} = 0,8$, окончательно получим

$$n = 4\Delta C \quad (6)$$

Для степени поляризации в точке D имеем:

$$p_R = \frac{k_\perp(90) - k_\parallel(90)}{k_\perp(90) + k_\parallel(90)} \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) определяют размеры отражающих частиц на границе туманности.

Для туманности *NGC 2023* показатель n оказался равным—1,3, т. е.

$$k_\lambda \sim \lambda^{-1,3},$$

что близко к закону межзвездного рассеяния λ^{-1} [12].

Таким образом, на границе туманности диаметр частиц должен быть порядка $5 \cdot 10^{-5}$ см. К тому же выводу приводят результаты поляриметрических наблюдений. Степень поляризации излучения туманности заметно не меняется с расстоянием от ядра (см. фиг. 6). Следовательно, во всех частях туманности размеры частиц в среднем равны. Непосредственно у ядра показатель цвета туманности, как будто, уменьшается. Вероятно, здесь размеры частиц меньше, и отражение света ядра производится по закону, приближающемуся к релеевскому.

Таким образом, результаты нашего исследования *NGC 2023* показывают:

1. Свечение туманности радиально поляризовано относительно ядра, т. е. оно обусловлено отражением излучения ядра.

2. Туманность в основном пылевая. Релеевское рассеяние в ней отсутствует. Диаметр частиц оценивается в $5 \cdot 10^{-5}$ см.

б) Туманность *NGC 7023*

Туманность *NGC 7023* находится в созвездии Цефея. Ядром ее является звезда *BD +67°1283* фотографической величины 7.^m2, спектраль-

ного класса В5е. Показатель цвета ядра равен в интернациональной системе $+0^m10$, а избыток цвета 0^m36 [13]. Поляризация излучения ядра по нашим измерениям не превышает 1%. Спектр туманности непрерывный [7, 9]. В каталогах туманность отмечается индексом „С“. Расстояние до нее порядка 250 парсек.

Пожалуй, ни одна пылевая туманность не исследована столь хорошо, как NGC 7023. Поляриметрическое исследование этой туманности проведено рядом авторов, однако, все они основывались на гипотезе отражения. Проверка справедливости этой гипотезы не была до сих пор проведена для этой туманности.

По определениям Хеня [14] степень поляризации туманности доходит до 12%. По Глизе и Вальтеру [15] она сильно меняется по туманности и доходит до 55%. Однако, этот результат в дальнейшем при проверке Вестоном [16] не подтвердился. Во многих местах по измерениям последнего поляризация оказалась в 2.5 раза меньше, чем в [15] и нигде не превышала 30%. Измерения Маргель [17] дают для степени поляризации этой туманности значение от 5% до 30%.

Фотометрическое исследование туманности проведено Кинаном [18] и Коллинсом [8]. По определениям Кинана туманность в среднем краснее ядра на 0^m09 , а в одной области в $40''$ к северо-востоку от ядра избыток красного излучения доходит до 0^m55 . Кинан предполагает, что в этой области имеется или сильное селективное поглощение, или локальное красное излучение в линиях.

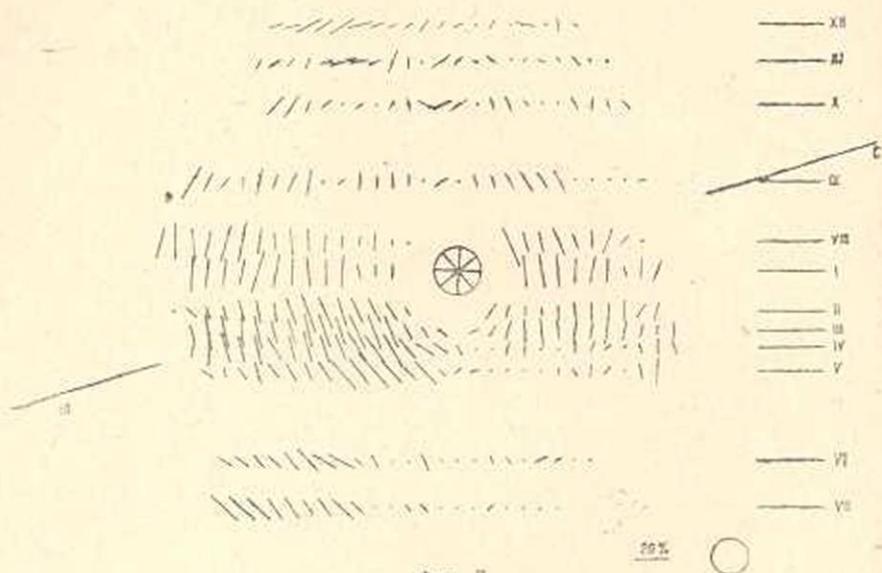
По Коллинсу, наоборот, туманность голубее ядра в среднем на 0^m30 . Так как ими исследованы различные области туманности, повидимому, такое различие могло быть обусловлено тем, что в разных частях туманность имеет различный цвет.

Противоречивые данные относительно степени поляризации излучения туманности требовали проверки справедливости гипотезы отражения, лежащей в основе всех указанных работ.

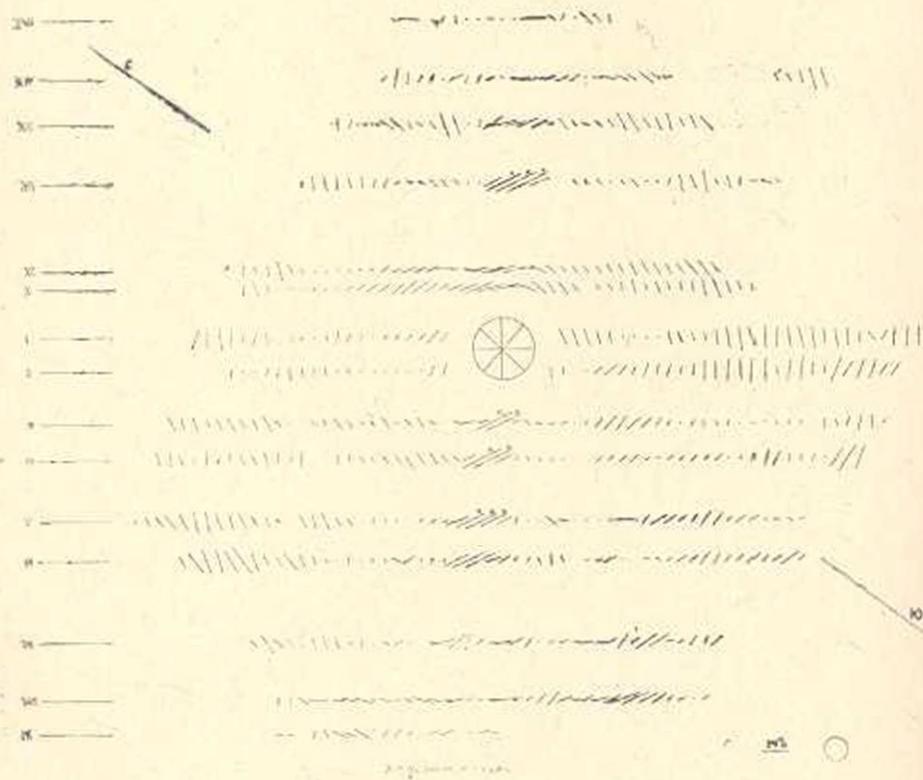
Поляриметрическое исследование туманности произведено по двум сериям снимков. Было измерено около 280 областей в туманности на пластинках I серии и около 640—по II серии. Результаты измерений схематически нанесены на фиг. 7 и 8. Обозначения те же, что и для предыдущей туманности.

Результаты колориметрических измерений помещены в табл. 6. Обозначения те же, что и в табл. 4. Сечения фиг. 8, совпадающие с таковыми табл. 6, обозначены одним номером.

Как видно из фиг. 7 и 8, излучение туманности действительно радиально поляризовано относительно ядра. Среднее значение $p \cdot \Delta\theta$ порядка 180, что находится в пределах ошибок (см. табл. 5). Средняя степень поляризации излучения туманности равна 13% и не превосходит 30%, что находится в хорошем согласии с данными Вестона и Маргель. Туманность голубее ядра в среднем на 0^m22 . Это близко к значению, даваемому Коллинсом. На фиг. 9 приведена зависимость



Фиг. 7



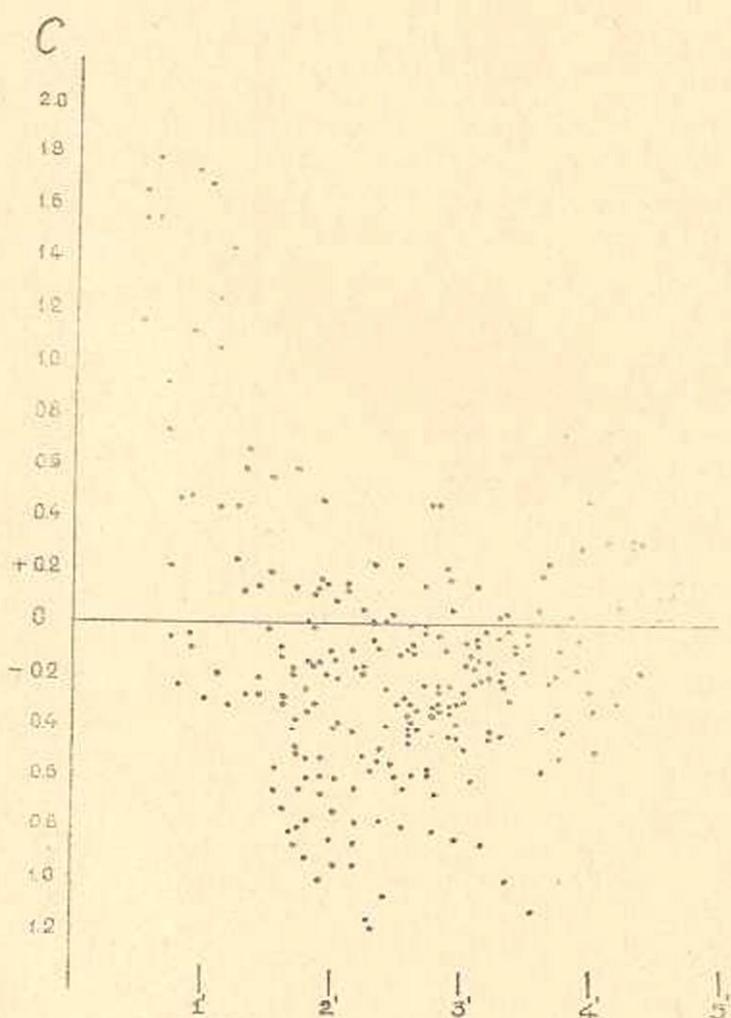
Фиг. 8.

Таблица 6

Номер сечения	Номер обл.	m_c	m_k	C	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5					
I	1	22,34	22,88	-0,54	IV	6	21,15	21,00	+0,15
	2	22,05	22,78	-0,73		7	21,10	21,10	0,00
	3	22,10	22,88	-0,78		8	21,06	20,82	+0,24
	4	21,43	22,32	-0,89		9	21,15	20,54	+0,61
	5	21,39	21,88	-0,49		10	21,36	20,80	+0,56
	6	21,11	21,88	-0,77		11	21,54	21,22	+0,32
	7	20,90	21,82	-0,92		12	21,45	21,47	-0,02
	8	20,70	21,48	-0,78		13	21,26	21,22	+0,04
	9	20,29	20,60	-0,31		14	21,26	21,34	-0,08
	10	19,95	20,60	-0,64		15	21,81	21,62	+0,19
	11	19,79	20,36	-0,57		16	22,31	22,30	+0,01
	12	19,49	20,16	-0,67		1	22,42	22,88	-0,46
	13	19,09	19,99	-0,90		2	22,41	22,28	+0,13
	14	18,51	19,60	-1,09		3	21,54	22,13	-0,59
	15	18,36	19,49	-1,13		4	21,38	22,22	-0,84
	16	19,30	19,97	-0,58		5	21,09	21,96	-0,89
	17	19,79	20,04	-0,25		6	20,80	21,45	-0,65
	18	20,02	20,17	-0,15		7	21,11	21,18	-0,07
	19	20,34	20,17	+0,17		8	20,93	21,37	-0,44
	20	20,55	20,08	+0,47		9	20,23	20,82	-0,59
	21	20,83	20,72	+0,11		10	19,95	20,23	-0,28
	22	21,11	21,22	-0,11		11	19,34	20,07	-0,68
	23	21,38	21,68	-0,30		12	19,09	19,88	-0,79
	24	21,45	21,22	+0,23		13	18,71	19,71	-1,00
	25	21,81	22,48	-0,67		14	18,69	19,66	-0,97
	26	22,03	22,48	-0,45		15	18,71	19,60	-0,89
	27	22,51	22,78	-0,27		16	18,84	19,66	-0,82
	28	22,49	22,68	-0,19		17	19,45	20,00	-0,55
II	1	22,41	22,78	-0,37	18	19,96	20,20	-0,24	
	2	22,47	22,54	-0,07	19	20,19	20,18	+0,01	
	3	22,11	22,32	-0,21	20	20,33	20,32	+0,01	
	4	21,47	22,08	-0,61	21	20,50	20,32	+0,18	
	5	21,06	21,94	-0,88	22	20,86	20,88	-0,02	
	6	20,86	21,28	-0,42	23	21,12	21,41	-0,29	
	7	20,58	20,66	-0,08	24	21,79	21,94	-0,15	
	8	20,52	20,66	-0,14	25	22,17	22,20	-0,03	
	9	20,28	20,66	-0,38	26	22,22	22,30	-0,08	
	10	20,02	20,36	-0,34	27	22,28	22,38	-0,10	
	11	19,74	20,17	-0,43	1	22,41	22,82	-0,41	
	12	19,82	20,18	-0,36	2	22,03	22,48	-0,45	
	13	19,60	20,15	-0,55	3	21,76	22,48	-0,72	
	14	19,19	20,00	-0,81	4	21,48	22,38	-0,90	
	15	19,04	19,82	-0,78	5	21,28	22,48	-1,20	
	16	18,99	19,86	-0,87	6	21,28	22,54	-1,26	
	17	19,26	19,88	-0,62	7	21,14	21,44	-0,30	
	18	19,55	20,02	-0,47	8	21,11	22,39	-1,28	
	19	19,68	20,07	-0,39	9	21,00	22,39	-1,39	
	20	19,86	20,05	-0,29	10	20,58	21,68	-1,10	
	21	19,89	20,11	-0,22	11	20,49	20,66	-0,17	
	22	20,04	20,16	-0,12	12	20,34	20,88	-0,54	
	23	20,48	20,39	+0,09	13	20,15	20,44	-0,29	
	24	20,97	21,08	-0,11	14	20,11	20,32	-0,21	
	25	21,50	21,88	-0,38	15	20,11	20,35	-0,25	
	26	21,79	21,94	-0,15	16	20,02	20,16	-0,14	
	27	22,03	22,08	-0,05	17	20,07	20,20	-0,13	
III	1	20,72	21,10	-0,38	18	20,14	20,32	-0,18	
	2	20,69	20,82	-0,13	19	20,44	20,31	+0,13	
	3	20,48	20,48	0,00	20	20,43	20,35	+0,08	
	4	20,65	20,47	+0,18	21	20,58	20,53	+0,05	
	5	20,82	20,53	+0,29	22	20,89	21,40	-0,51	
				23	21,24	21,88	-0,64		
				24	21,55	22,12	-0,57		
				25	21,68	22,22	-0,54		
				26	21,93	22,58	-0,65		

показателя цвета туманности от расстояния до ядра. Как видно из этой фигуры средний показатель цвета туманности отрицателен. Однако, в наиболее ярких местах около ядра туманность показывает избыток красного излучения, на что ранее указывал Киан.

По степени поляризации и показателю цвета туманности можно заключить об отсутствии релеевского рассеяния в ней. Для этой туманности значение n получается равным -0.9 , т. е. порядка -1 . Отсюда можно сделать заключение, что размеры частиц на границе ту-

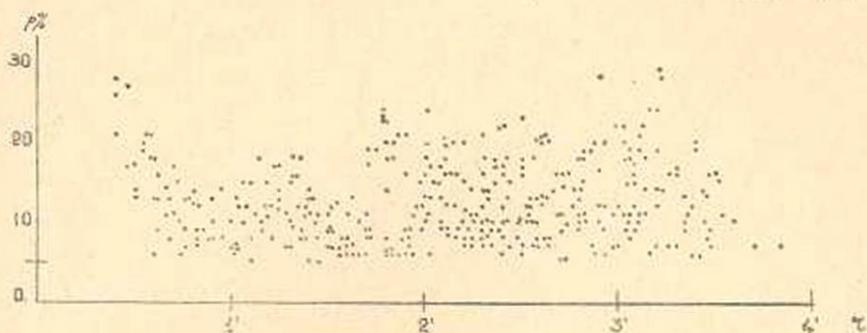


Фиг. 9.

манности того же порядка, что и размеры межзвездной пыли—порядка $5 \cdot 10^{-5}$ см.

К тому же результату приводят и поляриметрические данные. Относительно размеров частиц для внутренних областей туманности можно заключить, что они по порядку не должны сильно отличаться

от граничных. Это заключение можно сделать из приведенного на фиг. 10 графика зависимости степени поляризации от расстояния до ядра. Заметной зависимости между этими величинами не наблюдается. Избыток красного излучения вблизи от ядра можно объяснить погло-



Фиг. 10.

щением в самой туманности, которое должно быть значительно больше у ядра, чем на границе туманности.

Эти данные приводят к выводам:

1. Излучение туманности NGC 7023 радиально поляризовано относительно ядра, что подтверждает справедливость гипотезы отражения для нее.

2. Туманность в основном пылевая. Релеевское рассеяние в ней отсутствует. Диаметр частиц пыли порядка $5 \cdot 10^{-5}$ см.

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну и доценту В. А. Домбровскому за советы при выполнении настоящей работы.

Է. Ե. Խաչիկյան

NGC 2023 ԵՎ NGC 7023 ՄԻԳԱՄԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԵՎԵՈՒՑՄԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԵՎ ԳՈՒՅՆԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քերված են NGC 2023 և NGC 7023 միգամածությունների բևեռացման և գույնի չափումների արդյունքները: Բևեռացման չափումների արդյունքները սխեմատիկորեն քերված են 1, 2, 3 (NGC 2023-ի համար) և 7, 8 (NGC 7023-ի համար) գծադրերում: Գույնային չափումների արդյունքները քերված են 4 (NGC 2023) և 6 (NGC 7023) աղյուսակներում: Ճաստագրյալման միջին բևեռացման աստիճանը կրկու միգամածությունների համար միևնույնն է և հավասար 13% -ի: Միջին գույնի ցուցիչը հավասար է $0^m 37$ -ի NGC 2023-ի համար և $0^m 11$ -ի՝ NGC 7023-ի համար: Միգամածության գնդաձև մոդելի հիման վրա ստացված

են (2) և (3) բանաձևերը, որոնք բևեռաչափական և գունաչափական ավյալների միջոցով որոշում են մասնիկների անհայտ չափերը: Մասնափորագես, միզամածության եզրային մասերի համար ստացվել են (6) և (7) բանաձևերը: Այս բանաձևերից կարելի է գնահատել մասնիկների չափերը:

Ստացված արդյունքներից երևում է՝

1. Միզամածությունների ճառագայթումը ջրային է ապիս սագիալ բևեռացում՝ միջուկի նկատմամբ:

2. Միզամածությունները հիմնականում փոշային են: Ռեյլյան ջրումը նրանց մեջ իրացարկյալ է: Մասնիկների արտադիմը գնահատվում է $5 \cdot 10^{-5}$ սմ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Stipher W. Lowell. Obser. bull. № 555, 1912.
2. Амбарцумян В. А. Сообщения Бюраканской обсерв., вып. 13, 1954.
2. Домбровский В. А. ДАН СССР, 94, 1021, 1954.
4. Խաչիկյան Յ. Է. ДАН Арм. ССР, 21 № 2, 63, 1955.
5. Խաչիկյան Յ. Է. ДАН Арм. ССР, 23, № 2, 49, 1956.
6. Sharpless C. Ap. J. 116, 251, 1952.
7. Hubble E. Ap. J. 56, 162 and 400, 1922.
8. Collins O. Ap. J. 86, 529, 1937.
9. Greenstein J. and Henyey L. Ap. J. 89, 653, 1939.
10. Wolf A. N. 180, 152, 1908.
11. Шайн Г. А. и Газе В. Ф. Известия КРАО, 9, 52, 1952.
12. Struve O. Ann. d. Ap. 1, 143, 1938.
13. Stebbins J., Huffer C., Whitford A. Ap. J. 91, 20, 1940.
14. Henyey L. Ap. J. 84, 609, 1935.
15. Glise O. and Walter, Zs. f. Ap. 29, 94, 1951.
16. Weston E. Ap. J. 57, 28, 1952.
17. Martet M. C. R. 232, 2183, 1951.
18. Keenan P. Ap. J. 84, 600, 1935.

ԳՆԵՐՆԵՑՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԵՆՇԼԻՈՂԸՍՑԻՍ.

1. Վ. Միրզոյան

ՄԻ ՉՉԱԶՈՂՎԱԾ ԹԱՐԳՍԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հայպետհրատի հրատարակությունը լույս է տեսել ֆիզիկո-մաթեմատիկական գիտությունների թիկնածու Ա. Գ. Մասեիչի «Արեգակի պատմությունը» գիտա-հանրամատչելի գրքույկի հայերեն թարգմանությունը^{*}:

Գրքույկի նպատակն է ընթերցողների լայն շրջաններին ծանոթացնել աստղերի, մասնավորապես Արեգակի մասին ներկայումս հայտնի գիտողական ավելիներին և նրանց գիտական մեկնաբանությունը: Հատուկ ուշադրություն է նվիրված աստղերի առաջացման և զարգացման, նրանց ճառագայթման աղբյուրների վերաբերյալ ժամանակակից պատկերացումների շարադրանքին:

Հետաքրքիր և մտաշնչի նկարագրության շնորհիվ հեղինակին, հիմնականում, հաջողվել է հասնել իր նպատակին: Մի քանի ոչ էական սխալները և անհաջող կառուցված նախադասությունները, որոնց վրա կանգ չենք տանի, չեն կարող թուլացնել ընդհանուր դրական ապավորությունը:

Մեր խնդիրն է կանգ առնել թարգմանության մեջ տեղ գտած սխալների վրա, որոնք խիստ անգրագարձել են գրքույկի որակի վրա և որոնք հատկապես անթույլատրելի են գիտա-հանրամատչելի գրքույկում:

Նշենք այն սխալներից միայն մի քանիսը, որոնք գրքույկում տեղ են գտել այն պատճառով, որ թարգմանիչը և թարգմանության խմբագիրը չեն ջանացել հասկանալ թարգմանվող տեքստը:

Հայերեն թարգմանության մեջ կարգում ենք (էջ 42)՝ «Արեգակի ակտիվության ավելացումը չորս անգամ կտախեր ծովերին և օվկիանոսներին (խոսքը Երկրագնդի վրաչի ծովերի և օվկիանոսների մասին է—Լ. Մ.) ավելի եռալ» (բոլոր ընդգծումները մերն են—Լ. Մ.) առնվազն տարրերնակ արտահայտությունը: Տարվորությունն անպատիվ է, որ այլ ծովերն և օվկիանոսները ներկայումս եռում են, իսկ Արեգակի ակտիվության նման աճը կտախեր նրանց ավելի եռալ: Պարզվում է, որ առանձին «закипеть» բառն է, որ թարգմանվել է «ավելի եռալ»:

Սուտերեն տեքստում էլիկարոնի զանգվածի մասին պատկերացում տալու նպատակով նշվում է « 10^{27} электронов весят один грамм»: Թարգմանության մեջ բացակայում է 10^{27} թիվը, որի հետևանքով ստացվել է «էլիկարոնները կշռում են մեկ գրամ» անխմատ նախադասությունը (էջ 52):

* Ա. Գ. Մասեիչ, Արեգակի պատմությունը (Թարգմ. Գ. Նազարյան, Թարգմ. խմբագիր Մ. Հաջրիյան), 212 էջ, Հայպետհրատ, 1956 թ., տիրած 4000 օրինակ:

«Энергия одного килограмма массы» արտահայտությունը (մեկ կիրոգրամ դանդաղածի էներգիան— և, Մ.) թարգմանության մեջ դարձել է ամասայի մեկ կիրոգրամ էներգիա» (էջ 65):

Սպիկարոնեչիոգրաֆի (բնագրամ սխաշմամբ ան անմանված է սպիկարոնեչիոսկոպ) կառուցվածքի նկարագրության մեջ ասված է՝ «на фотографическую пластинку, находящуюся за этой щелью, падает только свет, испускаемый раскаленными парами одного какого-либо вещества солнечной атмосферы, например, водорода». Այդ միաբը թարգմանված է հետևյալ կերպ՝ «Այդ ձեղքի հետևում գտնվող լուսանկարչական թիթեղիկի վրա այդ ժամանակ և միայն լույս քնկնուժ, որ արձակուժ են Արեգակի մթնոլորտի որևէ նյութի, օրինակ ջրածնի, շիկացած գոլորշիները» (էջ 112): Պարզ է, որ ոչ թե «այդ ժամանակ և միայն լույս քնկնուժ», այլ «այդ ժամանակ քնկնուժ է միայն այն լույսը»:

Ռուսերեն տեքստում բերված խոտթյան սահմանումը՝ «плотность — это масса, деленная на объем», որքան էլ այդ զարմանալի հնչի, թարգմանված է «խուտրյունը՝ գա ծավալի և մասայի հարաբերությունն է» (էջ 161) ձիշտ հակասակ իմաստ ունեցող նախադասությամբ:

«Полностью опровергается... учением о продолжающемся и сейчас процессе возникновения звезд» արտահայտությունը հայերենում ստացել է «շրտվին հերքվում է... սասղկի առաջացումով այժմ ևս շարունակվող պրոցեսի ուսմունքով» (էջ 189) տեսքը, մինչդեռ միանգամայն պարզ է, որ ընդգծված առևերեն լատերը պետք է թարգմանել «սասղկի առաջացման ներկայումս շարունակվող պրոցեսի մասին սամունքով»:

Բախարալիներ այսքանով և անցնենք լեզվական կարգի սխալներին: Արանց մի մասը նույնպես պարմանախորված է վերևում նշված պատճառով:

Блеск ртуте աստղագիտության մեջ օդաագործվում է պարմասության իմաստով, աստի սխալ է ան, որպես փայլ թարգմանելը: Սխալ է նաև светить ртуте փայլի թարգմանելը: Նրա իմաստն ավելի ձիշտ են արտահայտում լուսարձակել, հառազայրիլ րայերը: Հենց այդ տեսակետից էլ անընդունելի է свечение-ն, որպես լուսավորում թարգմանելը (էջ 28): Звездная астрономия-ն հենց աստղաբաշխությունն է և ոչ թե աստղային աստղաբաշխությունը (էջ 168):

Система ртуте Արեգակնայինի կամ մոլորակայինի (որ նախ իմաստն է արտահայտում) վերաբերմամբ կիրառվելիս թարգմանվում է որպես համակարգություն, սակայն, չգիտես ինչա, թարգմանչի մաս Արեգակնայինը համակարգության է, իսկ մոլորակայինը՝ սխալում (էջ 206):

Մի շարք բառեր օգտագործված են երկու ձևով՝ теория — տեսություն, թեորիա, փոտոսֆера — լուս ոլորտ, ֆասասֆերա, температура — ջերմաստիճան, ջերմություն, светимость — լուսատվություն, լուսավորություն: Եթե առաջին երկու դեպքում դուրս ձևերն էլ կարող են օգտագործվել (թեև նման երկակիությունը ցանկալի չէ), ապա վերջին դեպքերում այդ բանը միանգամայն սխալ է, որովհետև ֆիզիկորում ջերմությունը тепло-ն է, իսկ լուսավորությունը՝ освещение-ն: Геофизик, академик բառերը հայերենում օգտագործվում են միայն գետնիգիկոս, տեղեկմիկոս ձևերով, մինչդեռ գրքուկում բերված են նրանց գետնիգիկ, տեղեկմիկ ձևերը:

Масса բարե հախրեմում թարգմանում է զանգված և հասկանալի չէ, թե ինչա թարգմանիչը բոլոր տեղերում օգտագործում է մասսա բառը:

Արեևաստականորեն ևն հնչում ինդիվիդուալություն (էջ 60), առդեցիա (էջ 181) և թարգմանչի կողմից օգտագործված նման այլ բառեր:

Թարգմանության մեջ տեղ ևն գույն նաև մի շարք գույն լեզվական սխալ թարգմանության օրինակներ՝ Давление излучения — ցառազայրանման ճրնչում (էջ 125), во Вселенной—մեր Տիեզերքում (էջ 29), открытие радиоактивности—աղիսականիլ հայտնագործումը (էջ 143), исключительность — րացառություն (էջ 162), компактный—ակնառու (էջ 20), по вертикали—ուղղագծով (էջ 20), понятие—հասկացություն (էջ 131), чрезвычайно тесно—արտասովոր բնդույլ (էջ 59) և այլն:

Գրքույլում հանդիպում են թարգմանության այսպիսի նմուշներ՝

Звезды с любимыми значениями массы, радиуса и светимости—ամեն տեսակ մասսա, շառափղ և լուսատվության աստղեր (էջ 19), железо, раскаленное докрасна, холоднее того же железа, накаливаемого до бела—չիկացած երկաթը մինչև կարմրելը ավելի սառն է մինչև նույն չիկացած երկաթի սպիտակելը (էջ 32), разложить на световые лучи разных цветов—գանազան գույների լույսի ցառազայրները արարյուծել (էջ 89), каждая звезда в Галактике (в том числе и Солнце)—Գալակտիկայում (այդ թվում նաև Արեգակը) շարահանչուր աստղ (էջ 178), преобладание в нем водорода и гелия—նրա մեջ գերակշռող ջրածնի և հելիումի գերակշռությունը (էջ 95), разделение на последовательности—հաջորդականության բաժանելը (էջ 23), каковы признаки такого шара—որքան են այդպիսի գնդի հատկանիշները (էջ 117) և այլն:

Բոլոր խմբերի բերված օրինակները կարելի է բաղձաբառակել, սակայն այսքանն էլ բավական է թարգմանության որակի մասին գաղափար կազմելու համար:

Պեսք է նշել նաև, որ գրքույլը լի է վրիպակներով:

${}_2\text{H}^+$ փոխանակ ${}_2\text{He}^4$ (էջ 55), e^- (էջ 56) ${}_{92}\text{U}^{238}$ — ${}_{92}\text{U}^{235}$ (էջ 57), տարրերություն—պարրերություն (էջ 13), հատված—հարված (էջ 134), 80^{10} — 80^{13} (էջ 150) և այլն:

Մնում է դարմանալ, որ նման թարգմանությունը լույս է տեսել սևապուրվիկալի ամենախառնը հրատարակչության՝ Հայպետհրատի հրատարակչությանը:

Հայկական ՍՍԻ ԳԱ

Բյուրականի Աստղագիտարան

Առաջված է 18 | 1957

Л. В. Мирзоян

Об одном неудавшемся переводе

Р е з ю м е

Рассматривается перевод на армянский язык книги А. Г. Масевич „История Солнца“ (перевод П. Назаряна, под редакцией М. Айрияна, 212 стр., Армянское государственное издательство, Ереван, 1956 г.,

тираж 4000 экз.). Приводится ряд примеров неправильного перевода, являющихся, по мнению автора, следствием того, что переводчик и редактор перевода не потрудились понять переводимый текст. Большое количество грубых ошибок в переводе в значительной мере понизило качество армянского издания книги.