ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

Об одном интегральном преобразовании

Известно [1], что решение уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

при граничном условии

$$y'(0) = \theta y(0) \quad \mathrm{Im}\,\theta = 0$$

имеющем вид

$$\Phi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x + \theta \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}}$$

является ядром для преобразования типа Фурье. Имеет место следующий результат, являющийся обобщением известной теоремы Планшереля.

1) Для любой фуркции $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ существует функция $F(\lambda)$ из класса

$$\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2}\, d\lambda < +\infty \qquad (*)$$

такая, что непрерывная функция

$$F(\lambda, \sigma) = \int_0^\sigma f(t)\,\Phi(t, \lambda)\, dt \qquad (\sigma > 0)$$

сходится к $F(\lambda)$ в метрике (*), т. е.

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \int_0^\infty |F(\lambda) - F(\lambda, \sigma)|^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2}\, d\lambda = 0.$$

2) При $\theta > 0$ имеет место формула обращения

$$f(x) = \underset{\sigma \to +\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma F(\lambda)\,\Phi(x, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2}\, d\lambda,$$

а при $\theta < 0$ формула обращения имеет вид

$$f(x) = -2\theta F(-\theta^2)e^{\theta x} +$$

$$+ \underset{\sigma \to +\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} F(\lambda)\Phi(x, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \theta^2} d\lambda.$$

В настоящей работе исследуются интегральные преобразования порожденные несамосопряженным дифференциальным уравнением

$$y'' - i2a_0\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \quad (a_0 > 0) \tag{А}$$

на полуоси $(0, +\infty)$ при граничном условии

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{Б}$$

где α — произвольное действительное число. Устанавливается, что если $\Phi(x, \lambda)$ — решение задачи (А), (Б), то, преобразуя функцию $f(x) \in L_1(0, +\infty)$ или $L_2(0, +\infty)$ при помощи ядра $e^{-i2a_0\lambda x}\Phi(x, \lambda)$, являющегося решением задачи

$$y'' + i2a_0\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \tag{А*}$$

$$y(0)(\cos\alpha + i2a_0\lambda\sin\alpha) + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{Б*}$$

можно обращение осуществить через ядро $\Phi(x, \lambda)$. Полученные таким образом результаты, которые приведены ниже, являются, повидимому, наиболее естественным обобщением классического результата, сформулированного выше.

Эти результаты можно получить путем предельного перехода, используя разложения в ряды по собственным функциям на конечном отрезке*. Однако в настоящей работе мы предпочитаем пойти другим путем, быстрее приводящим к цели.

Отметим, что впервые задача разложения по собственным функциям уравнения (А) на конечном отрезке, но при нулевых граничных условиях, была решена в статье [4] введением понятия обобщенной ортогональности для собственных функций.

§ 1. Теорема типа Дирихле для обобщенного преобразования

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - i2a_0\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \quad (a_0 > 0). \tag{1.1}$$

Если обозначим

$$\omega_1 = \sqrt{1 + a_0^2} + a_0, \quad \omega_2 = \sqrt{1 + a_0^2} - a_0, \tag{1.2}$$

* Такие разложения для несамосопряженных уравнений произвольного порядка и при гораздо общих граничных условиях были исследованы в работах Я. Д. Тамаркина [2] и М. В. Келдыша [3].

то

$$\omega_1+\omega_2=2\sqrt{1+a_0^2}\,,\qquad \omega_1-\omega_2=2a_0,$$
$$\omega_1\omega_2=1,\qquad \omega_1>\omega_2>0, \tag{1.3}$$

и общее решение (1.1) напишется в виде

$$y(x)=C_1e^{i\omega_1\lambda x}+C_2e^{-i\omega_2\lambda x}.$$

Отсюда следует, что функция

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{\omega_1e^{-i\omega_2\lambda x}+\omega_2e^{i\omega_1\lambda x}}{2}\sin\alpha-\frac{e^{i\omega_1\lambda x}-e^{-i\omega_2\lambda x}}{2i\lambda}\cos\alpha, \tag{1.4}$$

является решением уравнения (1.1) при граничном условии

$$\Phi(0,\lambda)\cos\alpha+\Phi_x'(0,\lambda)\sin\alpha=0. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что функция

$$\Psi(x,\lambda)=e^{-i2a_0\lambda x}\Phi(x,\lambda)=$$
$$=\frac{\omega_1e^{-i\omega_1\lambda x}+\omega_2e^{i\omega_2\lambda x}}{2}\sin\alpha-\frac{e^{i\omega_2\lambda x}-e^{-i\omega_1\lambda x}}{2i\lambda}\cos\alpha \tag{1.6}$$

есть решение уравнения

$$Z''+i2a_0\lambda Z'+\lambda^2Z=0, \tag{1.1'}$$

при граничном условии

$$Z(0)(\cos\alpha+i2a_0\lambda\sin\alpha)+Z'(0)\sin\alpha=0. \tag{1.5'}$$

Данной функции $f(x)\in L_1(0,+\infty)$ сопоставим ее преобразование при помощи ядра $\Psi(t,\lambda)$), т. е. интеграл

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,\Psi(t,\lambda)\,dt, \tag{1.7}$$

являющийся непрерывной функцией на всей оси $(-\infty,+\infty)$.

Для обращения преобразования (1.7) нам понадобится одна предварительная лемма, которую мы докажем ниже.

Но прежде всего заметим следующее. Пусть

$$J_\sigma(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(\lambda)\,\Phi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda, \tag{1.8}$$

где

$$\Omega(\lambda)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ia_0\lambda\sin2\alpha}=$$
$$=\frac{\lambda^2}{(\lambda+i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)(\lambda-i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha}. \tag{1.9}$$

Подставляя из (1.7) значение $F(\lambda)$ в (1.8) и пользуясь тем, что $f(t) \in L_1(0, +\infty)$, будем иметь

$$J_\sigma(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}} \int_0^\infty f(t) U_\sigma(x, t)\, dt, \tag{1.8'}$$

где

$$U_\sigma(x, t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(t, \lambda)\, \Phi(x, \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.10) значения функций $\Psi(t, \lambda)$, $\Phi(x, \lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ из (1.6), (1.4) и (1.9), после соответствующих вычислений, найдем:

а) При $\operatorname{ctg} \neq 0$

$$U_\sigma(x, t) = \frac{1}{2}\left\{\omega_2 \frac{\sin \omega_1\sigma(x-t)}{x-t} + \omega_1 \frac{\sin \omega_2\sigma(x-t)}{x-t}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\omega_1^2 \frac{\sin \sigma(\omega_1 t + \omega_2 x)}{\omega_1 t + \omega_2 x} + \omega_2^2 \frac{\sin \sigma(\omega_2 t + \omega_1 x)}{\omega_2 t + \omega_1 x}\right\} -$$

$$- i\,\frac{\omega_1^2}{2}\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-i\lambda(\omega_1 t + \omega_2 x)}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda -$$

$$- i\,\frac{\omega_2^2}{2}\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{i\lambda(\omega_2 t + \omega_1 x)}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda \equiv$$

$$\equiv U_\sigma^{(1)}(x, t) + U_\sigma^{(2)}(x, t) - V_\sigma^{(1)}(x, t) - V_\sigma^{(2)}(x, t). \tag{1.11}$$

б) При $\operatorname{ctg}\alpha = 0$

$$U_\sigma(x, t) = U_\sigma^{(1)}(x, t) + U_\sigma^{(2)}(x, t). \tag{1.11'}$$

Лемма 1. а) *При* $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, *для значений* $0 \leqslant t < +\infty$, $0 < x < +\infty$, *когда* $\sigma \to +\infty$

$$V_\sigma^{(1)}(x, t) = O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_1 t + \omega_2 x)}\right\}, \tag{1.12'}$$

$$V_\sigma^{(2)}(x, t) = O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_2 t + \omega_1 x)}\right\}. \tag{1.12''}$$

б) *При* $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, *для значений* $0 \leqslant t < +\infty$, $0 < x < +\infty$, *когда* $\sigma \to +\infty$

$$V_\sigma^{(1)}(x, t) = -\pi\omega_1^2\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha\, e^{-(x+\omega_1^2 t)\operatorname{ctg}\alpha} +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_1 t + \omega_2 x)}\right\}, \tag{1.13'}$$

$$V_\sigma^{(2)}(x, t) = -\pi\omega_2^2\sqrt{1+a_0^2}\ \operatorname{ctg}\alpha\, e^{-(x+\omega_2^2 t)\operatorname{ctg}\alpha} +$$

$$+O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_2 t+\omega_1 x)}\right\}. \tag{1.13''}$$

Доказательство. Пусть $\sigma > \max\{\omega_1|\operatorname{ctg}\alpha|, \omega_2|\operatorname{ctg}\alpha|\}$. Обозначим через $C_\sigma^{(+)}$ и $C_\sigma^{(-)}$ соответственно верхнюю и нижнюю половины окружности $|\lambda| = \sigma$, пробегаемой в положительном направлении. Обозначим далее

$$I_\sigma^{(-)} = \int\limits_{C_\sigma^{(-)}} \frac{e^{-i\lambda(\omega_1 t+\omega_2 x)}}{\lambda + i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda, \tag{1.14'}$$

$$I_\sigma^{(+)} = \int\limits_{C_\sigma^{(+)}} \frac{e^{i\lambda(\omega_2 t+\omega_1 x)}}{\lambda - i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda. \tag{1.14''}$$

При $\sigma\to+\infty$, полагая $\lambda = \sigma e^{i\varphi}$, из (1.14′) и (1.14″) получим:

$$I_\sigma^{(-)} = O\left\{\int\limits_{-\pi}^{0} e^{\sigma(\omega_1 t+\omega_2 x)\sin\varphi}\, d\varphi\right\} = O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_1 t+\omega_2 x)}\right\}, \tag{1.15'}$$

и

$$I_\sigma^{(+)} = O\left\{\int\limits_{0}^{\pi} e^{-\sigma(\omega_2 t+\omega_1 x)\sin\varphi}\, d\varphi\right\} = O\left\{\frac{1}{\sigma(\omega_2 t+\omega_1 x)}\right\} \tag{1.15''}$$

а) Положим теперь, что $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, тогда функции

$$\frac{e^{-i\lambda(\omega_1 t+\omega_2 x)}}{\lambda + i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{e^{i\lambda(\omega_2 t+\omega_1 x)}}{\lambda - i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha} \tag{1.16}$$

голоморфны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Поэтому, интегрируя функции (1.16) соответственно по контуру нижней и верхней полуокружностей радиуса σ, в силу обозначений (1.11), (1.14′) и (1.14″) получим:

$$V_\sigma^{(1)}(x, t) - i\,\frac{\omega_1^2}{2}\sqrt{1+a_0^2}\ \operatorname{ctg}\alpha\, I_\sigma^{(-)} = 0,$$

$$V_\sigma^{(2)}(x, t) + i\,\frac{\omega_2^2}{2}\sqrt{1+a_0^2}\ \operatorname{ctg}\alpha\, I_\sigma^{(+)} = 0,$$

откуда, в силу (1.15′) и (1.15″), вытекают утверждения (1.12′) и (1.12″) леммы.

б) Если $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то функции (1.16) голоморфны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ кроме точек $\lambda = -i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha$ и $\lambda = i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha$, где они имеют простые полюсы с вычетами

$$e^{-\operatorname{ctg}\alpha(\omega_1^2 t+x)} \quad \text{и} \quad e^{-\operatorname{ctg}\alpha(\omega_2^2 t+x)}$$

соответственно. Поэтому, интегрируя функции (1.16) по тем же контурам, в этом случае получим формулы

$$V_\sigma^{(1)}(x, t)-i\frac{\omega_1^2}{2}\sqrt{1+a_0^2}\operatorname{ctg}\alpha\, I_\sigma^{(-)}=$$

$$=-\pi\omega_1^2\sqrt{1+a_0^2}\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-(x+\omega_1^2 t)\operatorname{ctg}\alpha},$$

$$V_\sigma^{(2)}(x, t)+i\frac{\omega_2^2}{2}\sqrt{1+a_0^2}\operatorname{ctg}\alpha\, I_\sigma^{(+)}=$$

$$=-\pi\omega_2^2\sqrt{1+a_0^2}\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-(x+\omega_2^2 t)\operatorname{ctg}\alpha},$$

откуда, в силу оценок (1.15′) и (1.15″), будут следовать формулы (1.13′) и (1.13″) леммы.

2°. Обращение интегрального преобразования (1.7) дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на полуоси $(0, +\infty)$, принадлежит к классу $L_1(0, +\infty)$ и имеет ограниченную вариацию на любом отрезке (δ, R), $0<\delta<R$, то интегральное преобразование*

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,\Psi(t, \lambda)\,dt$$

обращается следующим образом:

а) *При* $\operatorname{ctg}\alpha\leqslant 0$, *для* $0<x<+\infty$

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}}\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{F(\lambda)\,\Phi(x, \lambda)\,\lambda^2\,d\lambda}{\lambda^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ia_0\lambda\sin 2\alpha}. \qquad (1.17)$$

б) *При* $\operatorname{ctg}\alpha>0$, *для* $0<x<+\infty$

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}}\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{F(\lambda)\,\Phi(x, \lambda)\,\lambda^2\,d\lambda}{\lambda^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ia_0\lambda\sin 2\alpha}+$$

$$+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+a_0^2}}\{\omega_1^2F(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)+\omega_2^2F(i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha)\}e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (1.18)$$

Доказательство. а) Пусть $\operatorname{ctg}\alpha\leqslant 0$. Сначала положим, что $\operatorname{ctg}\alpha=0$, тогда по (1.8) и (1.8′) и в силу (1.11′)

$$J_\sigma(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}}\int_0^\infty f(t)\,U_\sigma^{(1)}(x, t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}}\int_0^\infty f(t)\,U_\sigma^{(2)}(x,t)\,dt = J_\sigma^{(1)}(x)+J_\sigma^{(2)}(x). \tag{1.19}$$

Из определения (1.11) функций $U_\sigma^{(1)}(x,t)$ и $U_\sigma^{(2)}(x,t)$ по теореме Дирихле и по теореме Римана-Лебега для $0<x<+\infty$ будем иметь:

$$\lim_{\sigma\to+\infty} J_\sigma^{(1)}(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+a_0^2}}\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\infty f_1(t)\left\{\omega_2\frac{\sin\omega_1\sigma(x-t)}{x-t}+\right.$$

$$\left.+\omega_1\frac{\sin\omega_2\sigma(x-t)}{x-t}\right\}dt=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+a_0^2}}\pi(\omega_2+\omega_1)f(x)=f(x), \tag{1.20}$$

$$\lim_{\sigma\to+\infty} J_\sigma^{(2)}(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+a_0^2}}\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\infty f(t)\left\{\omega_1^2\frac{\sin\sigma(\omega_1 t+\omega_2 x)}{\omega_1 t+\omega_2 x}+\right.$$

$$\left.+\omega_2^2\frac{\sin\sigma(\omega_2 t+\omega_1 x)}{\omega_2 t+\omega_1 x}\right\}dt=0. \tag{1.21}$$

Из формул (1.19) и (1.20), (1.21) следует формула (1.17) теоремы при $\operatorname{ctg}\alpha=0$.

Положим теперь, что $\operatorname{ctg}\alpha<0$. Тогда, заметив, что по (1.12′) и (1.12″) при $0<x<+\infty$

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty f(t)\,V_\sigma^{(k)}(x,t)\,dt=0\quad(k=1,2). \tag{1.22}$$

Из формул (1.8′), (1.11), (1.20), (1.21) и (1.22) опять получим формулу (1.17) теоремы.

б) Пусть $\operatorname{ctg}\alpha>0$. В силу (1.8′) и асимптотических формул (1.13′) и (1.13″) при $\sigma\to+\infty$ будем иметь

$$J_\sigma(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1+a_0^2}}\int_0^\infty f(t)\left\{U_\sigma^{(1)}(x,t)+U_\sigma^{(2)}(x,t)\right\}dt+$$

$$+\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\left\{\omega_1^2\int_0^\infty e^{-\omega_1^2 t\operatorname{ctg}\alpha}f(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\omega_2^2\int_0^\infty e^{-\omega_2^2 t\operatorname{ctg}\alpha}f(t)\,dt\right\}+O\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{1.23}$$

Но из (1.7) и (1.6) следует

$$F(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)=\sqrt{1+a_0^2}\,\sin\alpha\int_0^\infty f(t)e^{-\omega_1^2 t\operatorname{ctg}\alpha}\,dt, \tag{1.24′}$$

$$F(i\omega_2 \operatorname{ctg} \alpha) = \sqrt{1 + a_0^2} \sin \alpha \int_0^\infty f(t) e^{-\omega_2^2 t \operatorname{ctg} \alpha} dt. \quad (1.24'')$$

Переходя к пределу в (1.23), с учетом формул (1.20), (1.21) и (1.24) получим утверждение (1.18) теоремы.

§ 2. Теорема типа順順Планшереля для обобщенного преобразования

В настоящем параграфе результат теоремы 1 распространяется на функции из класса $L_2(0, +\infty)$.

1°. Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $\Psi(x, \lambda)$, определенные выше по формулам (1.4) и (1.6) напишем в виде

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\omega_1}{2\lambda}(\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha) e^{-i\omega_1 \lambda x} +$$

$$+ \frac{\omega_2}{2\lambda}(\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha) e^{i\omega_1 \lambda x}, \quad (2.1)$$

$$\Psi(x, \lambda) = \frac{\omega_1}{2\lambda}(\lambda \sin \alpha - i\omega_2 \cos \alpha) e^{-i\omega_1 \lambda x} +$$

$$+ \frac{\omega_2}{2\lambda}(\lambda \sin \alpha + i\omega_1 \cos \alpha) e^{i\omega_1 \lambda x}. \quad (2.2)$$

Отнесем к классу $L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$ функции $F(\lambda)$, определенные на всей оси $(-\infty, +\infty)$, для которых существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 |\Omega(\lambda)| d\lambda. \quad (2.3)$$

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата этого параграфа, приведем две вспомогательные леммы, на которые мы будем существенно опираться.

Леммы 2. *Если $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, то существует функция $F(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$ такая, что интегралы*

$$F(\lambda, \sigma) = \int_0^\sigma f(t) \Psi(t, \lambda) dt \quad (\sigma > 0) \quad (2.4)$$

сходятся к $F(\lambda)$ в метрике пространства $L_2^{(2)}(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Если обозначить

$$\Phi_1(\lambda, \sigma) = \int_0^\sigma f(t) e^{i\omega_1 \lambda t} dt, \quad \Phi_2(\lambda, \sigma) = \int_0^\sigma f(t) e^{-i\omega_1 \lambda t} dt, \quad (2.5)$$

то по теореме Планшереля существуют пределы в среднем в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$

$$\Phi_1(\lambda) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, \Phi_1(\lambda, \sigma); \quad \Phi_2(\lambda) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, \Phi_2(\lambda, \sigma). \tag{2.6}$$

Из (2.2), (2.4) и (2.5) получим

$$F(\lambda, \sigma) = \frac{\omega_1}{2\lambda}(\lambda \sin\alpha - i\omega_2 \cos\alpha)\, \Phi_2(\lambda, \sigma) +$$

$$+ \frac{\omega_2}{2\lambda}(\lambda \sin\alpha + i\omega_1 \cos\alpha)\, \Phi_1(\lambda, \sigma), \tag{2.7}$$

откуда в силу (1.9) вытекает оценка

$$|F(\lambda, \sigma_1) - F(\lambda, \sigma_2)|^2 |\Omega(\lambda)| \leqslant A_1 |\Phi_2(\lambda, \sigma_2) - \Phi_2(\lambda, \sigma_1)|^2 +$$

$$+ A_2 |\Phi_1(\lambda, \sigma_2) - \Phi_1(\lambda, \sigma_1)|^2, \tag{2.8}$$

где A_1, A_2 — постоянные, не зависящие от λ, σ_1 и σ_2.

Из существования пределов в среднем (2.6) и из (2.8) вытекает, что

$$\lim_{\sigma_1, \sigma_2 \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda, \sigma_1) - F(\lambda, \sigma_2)|^2 |\Omega(\lambda)|\, d\lambda = 0,$$

откуда, очевидно, следует существование функции $F(\lambda) \in L_2^{(\Omega)}(-\infty, +\infty)$ такой, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - F(\lambda, \sigma)|^2 |\Omega(\lambda)|\, d\lambda = 0,$$

т. е. утверждение леммы.

Наконец, отметим, что из (2.6) и (2.7) следует

$$F(\lambda) = \frac{\omega_1}{2\lambda}(\lambda \sin\alpha - i\omega_2 \cos\lambda)\, \Phi_2(\lambda) +$$

$$+ \frac{\omega_2}{2\lambda}(\lambda \sin\alpha + i\omega_1 \cos\alpha)\, \Phi_1(\lambda), \tag{2.9}$$

где

$$\Phi_1(\lambda) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^{\sigma} f(t)\, e^{i\omega_2\lambda t}\, dt,$$

$$\Phi_2(\lambda) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^{\sigma} f(t)\, e^{-i\omega_1\lambda t}\, dt. \tag{2.10}$$

Из формул (2.10) легко заключаем, что функция $\Phi_1(\lambda)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1(\mu+i\nu)|^2 d\mu \leqslant M_1 < +\infty, \quad (\nu > 0),$$

где M_1 не зависит от ν (все такие функции отнесем к классу $H_2^{(+)}$), а функция $\Phi_2(\lambda)$ голоморфна при $\mathrm{Im}\lambda < 0$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_2(\mu+i\nu)|^2 d\mu \leqslant M_2 < +\infty, \quad (\nu < 0)$$

где M_2 не зависит от ν (все такие функции отнесем к классу $H_2^{(-)}$).

Обозначим теперь

$$\Phi_1^*(\lambda) = \frac{\lambda \sin\alpha + i\omega_1 \cos\alpha}{\lambda \sin\alpha - i\omega_2 \cos\alpha} \Phi_1(\lambda)$$
$$\Phi_2^*(\lambda) = \frac{\lambda \sin\alpha - i\omega_2 \cos\alpha}{\lambda \sin\alpha + i\omega_1 \cos\alpha} \Phi_2(\lambda) \quad (2.11)$$

и заметим, что $\Phi_k^*(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $(k = 1, 2)$

Лемма 3. а) *При* $\mathrm{ctg}\,\alpha \leqslant 0$ *на полуоси* $(0, +\infty)$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1^*(\lambda) e^{i\omega_1 x\lambda} d\lambda = 0, \quad (2.12')$$

$$\mathrm{l.i.m.} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1^*(\lambda) e^{-i\omega_2 x\lambda} d\lambda = 0. \quad (2.12'')$$

б) *При* $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$, *на полуоси* $(0, +\infty)$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1^*(\lambda) e^{i\omega_1 x\lambda} d\lambda = -4\pi \sqrt{1+a_0^2}\, \mathrm{ctg}\,\alpha\, e^{-x\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \Phi_1(i\omega_2 \mathrm{ctg}\,\alpha), \quad (2.13')$$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2^*(\lambda) e^{-i\omega_2 x\lambda} d\lambda = -\sqrt{1+a_0^2}\, \mathrm{ctg}\,\alpha\, e^{-x\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \Phi_2(-i\omega_1 \mathrm{ctg}\,\alpha). \quad (2.13'')$$

Доказательство. Для доказательства мы будем опираться на следующую известную теорему Палей и Винера, [5] утверждающую, что класс функций $H_2^{(+)}$ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$\Psi(\lambda) = \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{0} \varphi(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \mathrm{Im} > 0$$

где

$$\varphi(x) \in L_2(-\infty, 0).$$

а) Из определения (2.11) функции $\Phi_1^*(\lambda)$ видно, что если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$, то $\Phi_1^*(\lambda) = \Phi_1(\lambda) \in H_2^{(+)}$, и если $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$, то функция $\Phi_1^*(\lambda)$ голоморфна в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и $|\Phi_1^*(\lambda)| \leqslant L_1 |\Phi_1(\lambda)|$, $(\mathrm{Im}\lambda > 0)$, где L_1 — постоянная, не зависящая от λ. Поэтому и при $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$, $\Phi_1^*(\lambda) \in H_2^{(+)}$. Отсюда по указанной выше теореме Палей и Винера будем иметь

$$\underset{\sigma \to +\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1^*(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0 \qquad \text{при} \qquad x > 0,$$

что эквивалентно формуле (2.12′).

Аналогично при $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$, $\Phi_2^*(\lambda) = \Phi_2(\lambda) \in H_2^{(-)}$, а если $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$, то функция $\Phi_2^*(\lambda)$ голоморфна в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda < 0$ и $|\Phi_2^*(\lambda)| \leqslant L_2 |\Phi_2(\lambda)|$, $(\mathrm{Im}\lambda < 0)$, где L_2 постоянная, не зависящая от λ. Поэтому и при $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$, $\Phi_2^*(\lambda) \in H_2^{(-)}$ и по той же теореме Палей и Винера получим

$$\underset{\sigma \to +\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2^*(\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda = 0, \qquad x > 0,$$

что эквивалентно формуле (2.12″).

б) Пусть $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$, тогда функция $\Phi_1^*(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$ кроме точки $\lambda = i\omega_2 \mathrm{ctg}\,\alpha$, где она имеет простой полюс с главной частью

$$\frac{2i\sqrt{1 + a_0^2}\ \mathrm{ctg}\,\alpha \Phi_1(i\omega_2 \mathrm{ctg}\,\alpha)}{\lambda - i\omega_2 \mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Составим функцию

$$\Psi_1(\lambda) = \Phi_1^*(\lambda) - \frac{2i\sqrt{1 + a_0^2}\ \mathrm{ctg}\,\alpha \Phi_1(i\omega_2 \mathrm{ctg}\,\alpha)}{\lambda - i\omega_2 \mathrm{ctg}\,\alpha} \qquad (2.14)$$

которая голоморфна при $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и, как нетрудно убедиться, принадлежит классу $H_2^{(+)}$. Поэтому по теореме Палей и Винера

$$\underset{\sigma \to +\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Psi_1(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda = 0, \qquad x > 0, \qquad (2.15)$$

т. е.

$$\underset{\sigma \to +\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Psi_1(\lambda) e^{i\omega_2 x\lambda}\, d\lambda = 0, \qquad x > 0. \qquad (2.15')$$

Но $\Phi_1^*(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, следовательно по (2.14) и (2.15'), при $x>0$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1^*(\lambda)\, e^{i\omega_1 x\lambda}\, d\lambda =$$

$$= 2i\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha \Phi_1(i\omega_2 \operatorname{ctg}\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_1 x\lambda}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda. \tag{2.15''}$$

Заметив теперь, что при $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_1 x\lambda}}{\lambda - i\omega_2 \operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda = 2\pi i e^{-x \operatorname{ctg}\alpha}, \quad x>0,$$

из (2.15'') получим формулу (2.13').

Аналогично, при $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, функция $\Phi_2^*(\lambda)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\lambda < 0$, кроме точки $\lambda = -i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha$, где она имеет простой полюс с главной частью

$$\frac{-2i\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha\, \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha)}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Обозначая

$$\Psi_2(\lambda) = \Phi_2^*(\lambda) + \frac{2i\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha\, \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha)}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha},$$

получим функцию $\Psi_2(\lambda) \in H_2^{(-)}$. Следовательно по теореме Палей и Винера

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Psi_2(\lambda)\, e^{-i\omega_2 x\lambda}\, d\lambda = 0, \quad x>0. \tag{2.16}$$

Заметив, что $\Phi_2^*(\lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, из (2.16) получим, при $x>0$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2^*(\lambda)\, e^{-i\omega_2 x\lambda}\, d\lambda =$$

$$= -2i\sqrt{1+a_0^2}\, \operatorname{ctg}\alpha\, \Phi_2(-i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_2 x\lambda}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda. \tag{2.17}$$

Но при $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_2 x\lambda}}{\lambda + i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha}\, d\lambda = -2\pi i e^{-x \operatorname{ctg}\alpha},$$

поэтому из (2.17) следует формула (2.13'').

2°. Докажем теперь вторую основную теорему этой работы, представляющую собой перенесение результата теоремы 1 на пространство функций $L_2(0, +\infty)$.

Теорема 2. Если $f(x)$—произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$, то существует функция $F(\lambda) \in L_2^{(\Omega)}(-\infty, +\infty)$ такая, что интегралы

$$F(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} f(t)\,\Psi(t, \lambda)\,dt \tag{2.18}$$

сходятся к $F(\lambda)$ в смысле

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - F(\lambda, \sigma)|^2 |\Omega(\lambda)|\,d\lambda = 0. \tag{2.19}$$

а) *При* $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 + a_0^2}} \operatorname*{l.i.m.}_{\sigma \to +\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(\lambda)\,\Phi(x, \lambda)\,\lambda^2\,d\lambda}{\lambda^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + ia_0\lambda \sin 2\alpha}.$$

б) *При* $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 + a_0^2}} \operatorname*{l.i.m.}_{\sigma \to +\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(\lambda)\,\Phi(x, \lambda)\,\lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + ia_0\lambda \sin 2\alpha} -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + a_0^2}} \left\{\omega_1^2 F(-i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha) + \omega_2^2 F(i\omega_2 \operatorname{ctg}\alpha)\right\} e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{2.20'}$$

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы была доказана выше (лемма 2). Дальше мы будем опираться на следующие формулы, которые следуют из (2.5) и (2.6) согласно теореме Планшереля.

$$f(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\sigma \to +\infty} \frac{\omega_2}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1(\lambda)\,e^{-i\omega_2 x\lambda}\,d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty), \tag{2.21'}$$

$$f(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\sigma \to +\infty} \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2(\lambda)\,e^{i\omega_1 x\lambda}\,d\lambda, \quad \text{на } (0, +\infty). \tag{2.21''}$$

а) Пусть $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$, тогда из (2.11), (3.12′) и (2.12″) имеем:

$$\operatorname*{l.i.m.}_{\sigma \to +\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1(\lambda)\,\frac{\lambda \sin\alpha + i\omega_1 \cos\alpha}{\lambda \sin\alpha - i\omega_2 \cos\alpha}\,e^{i\omega_1 x\lambda}\,d\lambda = 0, \quad \text{на } (0, +\infty), \tag{2.22'}$$

$$\operatorname*{l.i.m.}_{\sigma \to +\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2(\lambda)\,\frac{\lambda \sin\alpha - i\omega_2 \cos\alpha}{\lambda \sin\alpha + i\omega_1 \cos\alpha}\,e^{-i\omega_2 x\lambda}\,d\lambda = 0, \quad \text{на } (0, +\infty). \tag{2.22''}$$

Умножим (2.21′) на $\pi\omega_1^2$, а (2.12′) на $\frac{\omega_2}{2}$ и результаты сложим. Тогда по (2.1) будем иметь

$$\pi\omega_1^2 f(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda\Phi(x,\lambda)}{\lambda\sin\alpha - i\omega_2\cos\alpha} d\lambda, \quad \text{на} \quad (0, +\infty). \qquad (2.23')$$

Аналогично умножая (2.21″) на $\pi\omega_2^2$, а (2.12″) на $\frac{\omega_1}{2}$, в силу (2.1) получим

$$\pi\omega_2^2 f(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda\Phi(x,\lambda)}{\lambda\sin\alpha + i\omega_1\cos\alpha} d\lambda, \quad \text{на} \quad (0, +\infty). \qquad (2.23'')$$

Далее, заметим, что в силу (2.9) и (1.9)

$$F(\lambda)\,\Omega(\lambda) = \frac{\omega_1}{2}\Phi_2(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda\sin\alpha + i\omega_1\cos\alpha} +$$

$$+ \frac{\omega_2}{2}\Phi_1(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda\sin\alpha - i\omega_2\cos\alpha}. \qquad (2.24)$$

Умножая (2.23′) на $\frac{\omega_2}{2}$, а (2.23″) на $\frac{\omega_1}{2}$ и складывая, из (2.24) найдем

$$\frac{\pi}{2}(\omega_1+\omega_2) f(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\,\Phi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda, \quad \text{на} \quad (0, +\infty),$$

т. е. — формулу (2.20) теоремы.

б) Пусть $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, тогда из (2.11) и (2.13′), (2.13″) имеем формулу

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda\sin\alpha + i\omega_1\cos\alpha}{\lambda\sin\alpha - i\omega_2\cos\alpha} e^{i\omega_1 x\lambda} d\lambda =$$

$$= -4\pi\sqrt{1+a_0^2}\,\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\Phi_1(i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha), \quad \text{на} \quad (0, +\infty), \qquad (2.25')$$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda\sin\alpha - i\omega_2\cos\alpha}{\lambda\sin\alpha + i\omega_1\cos\alpha} e^{-i\omega_2 x\lambda} d\lambda =$$

$$= -4\pi\sqrt{1+a_0^2}\,\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\Phi_2(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha). \qquad (2.25'')$$

Умножая (2.21) на $\pi\omega_1^2$, а (2.13′) на $\frac{\omega_2}{2}$, согласно (2.1) получим

$$\pi\omega_1^2 f(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_1(\lambda) \frac{\lambda\Phi(x,\lambda)}{\lambda\sin\alpha - i\omega_1\cos\alpha} d\lambda +$$

$$+ 2\pi\omega_2\sqrt{1+a_0^2}\,\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\Phi_1(+i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha), \quad \text{на} \quad (0, +\infty). \qquad (2.26')$$

Аналогично умножая (2.12″) на $\pi\omega_2^2$, а (2.13′) на $\frac{\omega_1}{2}$, по (2.1) будем иметь

$$\pi\omega_2^2 f(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi_2(\lambda) \frac{\lambda\Phi(x,\lambda)}{\lambda\sin\alpha + i\omega_1\cos\alpha} d\lambda +$$

$$+ 2\pi\omega_1\sqrt{1+a_0^2}\,\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\Phi_2(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha), \quad \text{на} \quad (0, +\infty). \tag{2.26″}$$

Наконец, умножая (2.26′) на $\frac{\omega_2}{2}$, а (2.26″) на $\frac{\omega_1}{2}$, на основании (2.24) получим формулу

$$\frac{\pi}{2}(\omega_1+\omega_2) f(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\,\Phi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \pi\sqrt{1+a_0^2}\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\,\{\omega_2^2\Phi_1(i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha) +$$

$$+ \omega_1^2\Phi_2(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)\} \quad \text{на} \quad (0, +\infty). \tag{2.27}$$

Но согласно (2.5), (2.6) и (1.24)

$$\Phi_1(i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}\,\sin\alpha} F(i\omega_2\operatorname{ctg}\alpha),$$

$$\Phi_2(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}\,\sin\alpha} F(-i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha), \tag{2.28}$$

поэтому из (2.27) и (2.28) следует формула (2.20′) теоремы.

В заключение отметим, что аналогичные теоремы можно доказать и в случае, когда ядро преобразования порождается несамосопряженным дифференциальным уравнением вида

$$y'' + (ai\lambda + b)\,y' + (\lambda^2 + ci\lambda + d)\,y = 0,$$

где a, b, c, d — вещественные постоянные.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 24 IV 1957

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հայտնի է [1], որ

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

հավասարման լուծումը

$$y'(0) = \theta y(0), \quad (\mathrm{Im}\,\theta = 0)$$

եզրային պայմանի դեպքում, հանդիսանում է Ֆուրյեի ձևափոխության կորիզ։

Այս աշխատության մեջ հետազոտվում են այն ինտեգրալ ձևափոխությունները, որոնք ծագում են

$$y'' - i2a_0\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad (a_0 > 0)$$

ոչ ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումից,

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$

եզրային պայմանի դեպքում, որտեղ α — կամայական իրական պարամետր է։ Ապացուցվում է, որ եթե $\Phi(x, \lambda)$ վերոհիշյալ խնդրի լուծումն է, ապա ձևափոխելով $f(x) \in L_1(0, +\infty)$ կամ $L_2(0, \infty)$ ֆունկցիան $e^{-i2a_0\lambda x}\Phi(x, \lambda)$ կորիզի օգնությամբ, կարելի է ձևափոխության շրջումն իրականացնել $\Phi(x, \lambda)$ կորիզի օգնությամբ։ Այդպիսով ստացված արդյունքները հավանաբար հանդիսանում են $a_0 = 0$ դեպքի համար հայտնի կլասիկ արդյունքի ամենաբնական ընդհանրացումը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы, М., 1954 (стр. 220—221).

2. *Тамаркин Я. Д.* а) О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. б) Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitscher. 27 (1927), 1—54.

3. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 87 (1957), 11—14.

4. *Арутюнян Н. Х., Джрбашян М. М., Александрян Р. А.* Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную: Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, X, № 1 (1957).

5. *Paley R.* and *Wiener N.* Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934, p. 8.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Р. Фельдман

Устойчивость стержней переменного сечения*

(Днепропетровск)

В статье рассматривается задача об устойчивости ступенчатого стержня с изменяющейся скачкообразно по длине стержня силой сжатия.

В общем случае невозможно найти решение соответствующего дифференциального уравнения при заданных граничных условиях в замкнутой форме, вследствие чего приходится обращаться к приближенным методам [1].

А. Н. Динник в работе [2] по этому вопросу пишет, что для получения результатов, пригодных для приложений в одном только случае, потребовалось вычислить 60 корней. Как он справедливо указывает все это требует большой затраты труда и времени.

Решение задач по устойчивости и колебаниям стержневых систем и пластин можно получить более простым путем, если воспользоваться синтезом методов Бубнова—Галеркина и конечных разностей [3].

Этот же метод может быть применен к решению задач прочности. Так, многие задачи строительной механики корабля, например, определение реакций киль-блоков при постановке корабля в док на килевую дорожку, расчет плоских перекрытий, опирающихся на непрямоугольный контур и т. п., приводят к задаче о расчете балки переменного сечения, лежащей на упругом основании переменной жесткости.

Коэффициенты $I(x)$ и $K(x)$ уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\,\frac{d^2y}{dx^2}\right]+K(x)\,y=q(x) \tag{1}$$

где $K(x)$—жесткость упругого основания.

$q(x)$—интенсивность внешней нагрузки, действующей на балку,

$I(x)$—момент инерции площади поперечного сечения балки,

обычно находятся эмпирическим путем и задаются в виде таблиц или графиков.

* Рассмотренные здесь вопросы являются частью работы, доложенной автором 23 декабря 1954 года на совещании по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики при Институте механики Академии наук СССР.

При интегрировании уравнения (1) одним из известных приближенных методов нужно сначала путем применения той или иной интерполяционной формулы представить значения $I(x)$ и $K(x)$ в аналитической форме. В рекомендуемом методе не требуется обязательно знать значения $I(x)$ и $K(x)$ в аналитической форме, так как в этом случае достаточно знать значения этих коэффициентов лишь в отдельных точках.

§ 1. Метод решения

Рассмотрим конечно-разностное уравнение порядка $2p$ при заданных граничных условиях,

неоднородное

$$\sum_{z=-p}^{p} a_{i,i+z} Y_{i+z} = V_i, \qquad (i = 0, 1, 2 \cdots n) \tag{2}$$

или однородное

$$\sum_{z=-p}^{p} a_{i,i+z} Y_{i+z} = \lambda Y_i; \qquad (i = 0, 1, 2 \cdots n) \tag{3}$$

где Y — значение неизвестной функции в точке i.

a_i и V_i — переменные коэффициенты, определяемые конкретными условиями задачи, λ — неизвестный параметр.

Приближенное решение этих уравнений ищем в виде

$$Y_n = \sum_{k=1}^{\nu} b_k \varphi_k(x) \tag{4}$$

где b_k — неизвестные постоянные, $\varphi_k(x)$ — фундаментальные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям задачи.

Вместо искомой функции в заданное уравнение подставим приближенное значение в форме (4). Умножим результат подстановки последовательно на все $\varphi_k(x)$, суммируем в заданном интервале и результат приравняем нулю. Для однородного уравнения получим следующую систему однородных линейных уравнений:

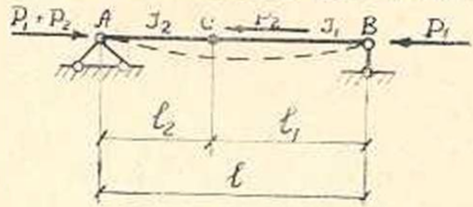
$$\sum_{k=1}^{\nu} b_k \left\{ \sum_{z=-p}^{p} \left[a_{i,i+z} \varphi_k(x) - \lambda \varphi_k(x) \right] \varphi_n(x) \right\} = 0 \tag{5}$$

$$k = 1, 2 \cdots \nu$$

При решении неоднородной задачи находим значения неизвестных параметров b_k. При решении однородной задачи, чтобы удовлетворить этой системе уравнений, не полагая все $b_k = 0$, нужно приравнять нулю определитель полученной системы уравнений. Наименьший вещественный корень этого определителя и будет первым собственным значением задачи.

Очевидно, что порядок определителя зависит не от числа точек деления интервала, а от числа коэффициентов входящих в сумму (4). Порядок решения остается тот же при решении системы совместных конечно-разностных уравнений.

Сходимость процесса будет обеспечена во всех тех случаях, когда сходится процесс Бубнова-Галеркина [4].



Фиг. 1

С целью иллюстрации метода и получения представления о степени точности, рассмотрим ступенчатый шарнирно опертый стержень, подверженный действию сжимающих сил P_1, приложенных на концах, и сил P_2—в промежуточном поперечном сечении C и на левом конце (фиг. 1).

§ 2. Устойчивость ступенчатого стержня

Задача об устойчивости двухступенчатого стержня была исследована Ф. С. Ясинским. Однако, им приведены численные значения коэффициентов длины только для случая $l_1 = l_2$ [5]

Случай $l_1 \neq l_2$ представляет определенный практический интерес, например, при проектировании колонн промышленных зданий.

Вначале рассмотрим стержень, состоящий из двух призматических частей AC и CB с общей осью, но различными моментами инерции сечений I_1 и I_2 (фиг. 1). Пусть отношение длин участков не равно единице. Ось ox направим вдоль оси стержня слева направо, начало координат поместим в центре тяжести левого концевого сечения, а ось oy проведем в плоскости изгиба, нормально к оси ox.

Примем, что P_1 и P_2 находятся в некотором постоянном, наперед заданном отношении и при постепенном возрастании они достигают таких значений, что становится возможной искривленная форма первоначально прямолинейного стержня.

Конечно-разностные уравнения соответственно на участках l_1 и l_2 стержня будут:

$$\Delta^2 [EI(x)\, \Delta^2 y]_i = -\frac{P_1 l^2}{n^2}\, \Delta^2 y_i;$$

$$\Delta^2 [EI(x)\, \Delta^2 y]_i = -\frac{(P_1 + P_2)\, l_2}{n^2}\, \Delta^2 y_i, \qquad (6)$$

где i—номер точки деления.

Длина стржня l, свободно опертого на жесткие опоры, разделена на n равных частей длины $\Delta x = \frac{l}{n}$. Точки деления пронумерованы от 0 до n, номер 0 соответствует точке $x = 0$, а номер n точке $x = l$.

Значение момента инерции в сечении с номером i обозначим через I_i.

Введем обозначения:

$$I(x) = I_1 f(x);\quad \Delta^2 y = z;\quad m = \frac{P_1 + P_2}{P_1};$$

$$F(x) = F_1 \psi(x);\quad \frac{P_1 l^2}{EI_1} = \lambda;\quad n_1 = \frac{I_2}{I_1} \tag{7}$$

где I_1 и F_1—соответственно значения момента инерции и площади поперечного сечения в правом опорном сечении. $f(x)$ и $\psi(x)$—соответственно функции, описывающие закон изменения момента инерции и площади поперечного сечения вдоль оси стержня. Пользуясь обозначениями (7), придадим уравнениям (6) вид:

$$n^2 \Delta^2 [f(x) z]_i = -\lambda z_i$$

$$n^2 \Delta^2 [f(x) z]_i = -\lambda \frac{m}{n_1} z_i. \tag{8}$$

Критическую нагрузку представим в следующей форме:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_{np}^2} \tag{9}$$

где $I_{min} = I_1$; $l_{np} = l\alpha$; α—коэффициент, зависящий от способа загружения и закрепления концов сжимаемого стержня.

Из формулы (9) видно, что задача сводится к нахождению значений α для различных соотношений m и n_1.

Принимая $\lambda \frac{m}{n_1} = \frac{\pi^2}{\alpha^2}$, окончательно получим

$$(P_1 + P_2)_{kp} = \frac{\pi^2 E I_1}{l_{np}^2}. \tag{10}$$

Задаваясь различными отношениями $\frac{I_2}{I_1}$, $\frac{I_2}{I_1}$ и $\frac{P_2}{P_1}$ можно получить значения α для любого случая.

С достаточной для практики точностью решение задачи может быть получено, если ограничиться удержанием одного члена ряда (4), а именно:

$$y_i = b \sin \pi \eta_i \tag{11}$$

где $\eta_i = \frac{x_i}{l}$.

Пользуясь равенством (11) вычислим значения функции y_i в точках ($i = 0, 1, 2 \cdots n$), соответствующие вершинам ломаной оси стержня в момент потери устойчивости и подставим в систему уравнений (8). Стержень разобьем на 10 частей.

Приведем вычисления для случая, для которого имеется точное решение Ф. С. Ясинского, а именно:

$$l_1 = l_2;\ m = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 1{,}0 \qquad n_1 = \frac{I_2}{I_1} = 2{,}0.$$

Выполняя действия в соответствии с [5], после подстановки числовых значений получим $\lambda = 13{,}05$.

Так как $\frac{\pi^2}{\alpha^2} = \lambda \frac{m}{n_1}$ то $\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda \frac{m}{n_1}}} = 1{,}23$.

По Ф. С. Ясинскому $\alpha = 1{,}24$.

Такое же небольшое расхождение получается и для других значений коэффициентов m и n_1 рассматриваемого случая, в чем можно убедиться сравнением значений коэффициента α, вычисленных по изложенному методу и приведенных в графике 3, со значениями коэффициента α, найденными точным методом Ф. С. Ясинским.

Значения коэффициентов длины $l_{пр} : l = \alpha$ для случаев $l_2 : l = 0{,}2$; 0,4; 0,6 сведены в таблицы 1, 2, 4 и 5 и графики 2, 3 и 4.

Значения α, вычисленные для $l_2 = 0{,}2l$

Таблица 1

n_1 \ m	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,004	0,905	0,831	0,777	0,729	0,610
1,25	1,118	1,004	0,922	0,858	0,807	0,673
1,50	1,220	1,095	1,004	0,935	0,878	0,729
1,75	1,313	1,179	1,081	1,004	0,943	0,782
2,00	1,402	1,259	1,152	1,071	1,004	0,831
2,25	1,485	1,333	1,220	1,132	1,063	0,878
2,50	1,563	1,402	1,282	1,190	1,117	0,922
2,75	1,636	1,472	1,343	1,249	1,168	0,964
3,00	1,707	1,533	1,402	1,301	1,219	1,004

Значения α, вычисленные для $l_2 = 0{,}4l$

Таблица 2

n_1 \ m	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,004	0,933	0,881	0,843	0,813	0,738
1,25	1,087	1,004	0,945	0,900	0,865	0,777
1,50	1,164	1,072	1,004	0,955	0,914	0,813
1,75	1,243	1,135	1,060	1,004	0,960	0,848
2,00	1,306	1,195	1,114	1,047	1,004	0,882
2,25	1,372	1,252	1,166	1,099	1,047	0,914
2,50	1,435	1,306	1,213	1,143	1,087	0,945
2,75	1,493	1,358	1,261	1,186	1,126	0,976
3,00	1,552	1,409	1,306	1,227	1,166	1,004

Значения α, вычисленные $l_2 = 0{,}6l$ *Таблица 3*

m / n_1	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,004	0,973	0,952	0,936	0,924	0,895
1,25	1,043	1,004	0,979	0,959	0,944	0,909
1,50	1,080	1,035	1,004	0,982	0,965	0,924
1,75	1,116	1,065	1,030	1,004	0,985	0,937
2,00	1,149	1,094	1,055	1,027	1,004	0,952
2,25	1,183	1,122	1,080	1,048	1,024	0,965
2,50	1,215	1,149	1,104	1,069	1,043	0,979
2,75	1,247	1,177	1,127	1,090	1,061	0,991
3,00	1,278	1,203	1,149	1,110	1,080	1,004

Рассмотрим устойчивость трехступенчатого (фиг. 5) и пятиступенчатого (фиг. 6) стержней с общими осями и участками разной длины.

Критическое значение продольной сжимающей силы определяем по обычной формуле

$$P_{kp} = K\frac{EI}{l^2},$$

где K — коэффициент устойчивости,

I — момент инерции в фиксированном сечении.

Задача сводится к вычислению коэффициентов устойчивости в зависимости от изменения отношений длин и моментов инерции на отдельных участках стержня. А. Н. Динник рассмотрел [2] только симметричные трехступенчатые стержни и в частности для случая

$$\lambda/l = 0{,}2; \; I/I_0 = 0{,}8 \text{ и } l_1/l_2 = 1$$

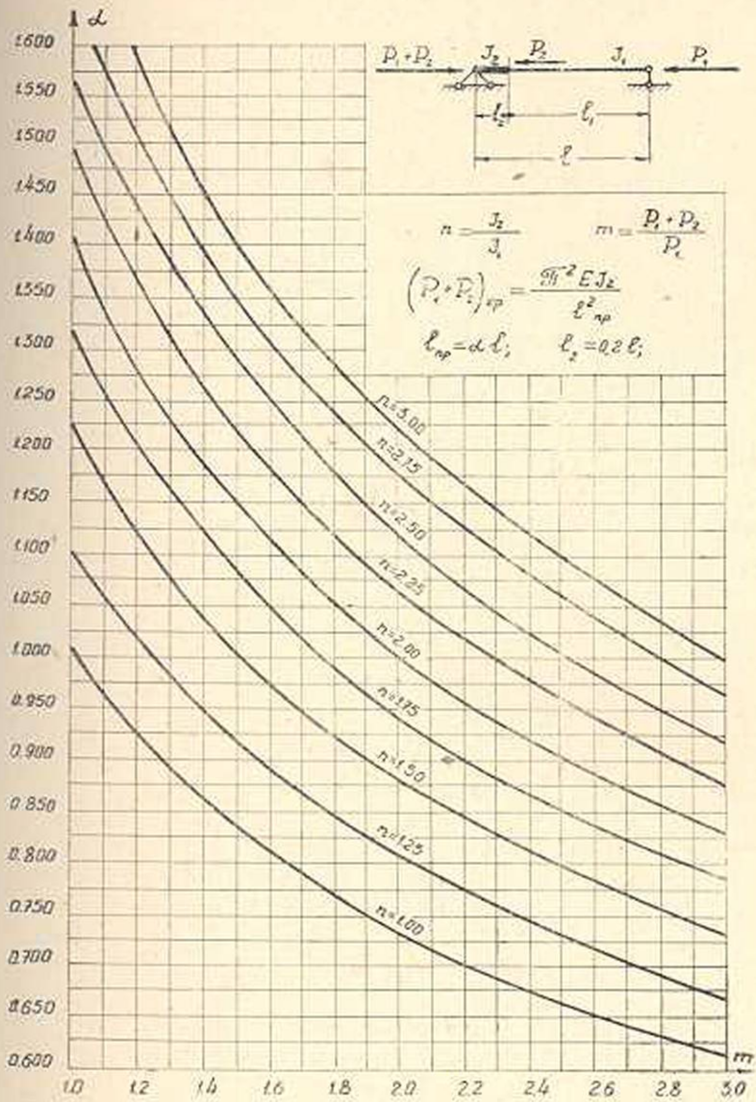
получил значение $K = 8{,}86$. Нами же для этого случая получено $K = 8{,}54$.

Следуя методике изложенной выше, найдены величины коэффициентов устойчивости при различных отношениях моментов инерции J/J_0 и соотношений между длинами участков λ/l.

В таблицах 4 и 5 приведены коэффициенты устойчивости K для трехступенчатого стержня, в таблице 6 для пятиступенчатого стержня.

Таблица 4 $\lambda/l = 0{,}2$

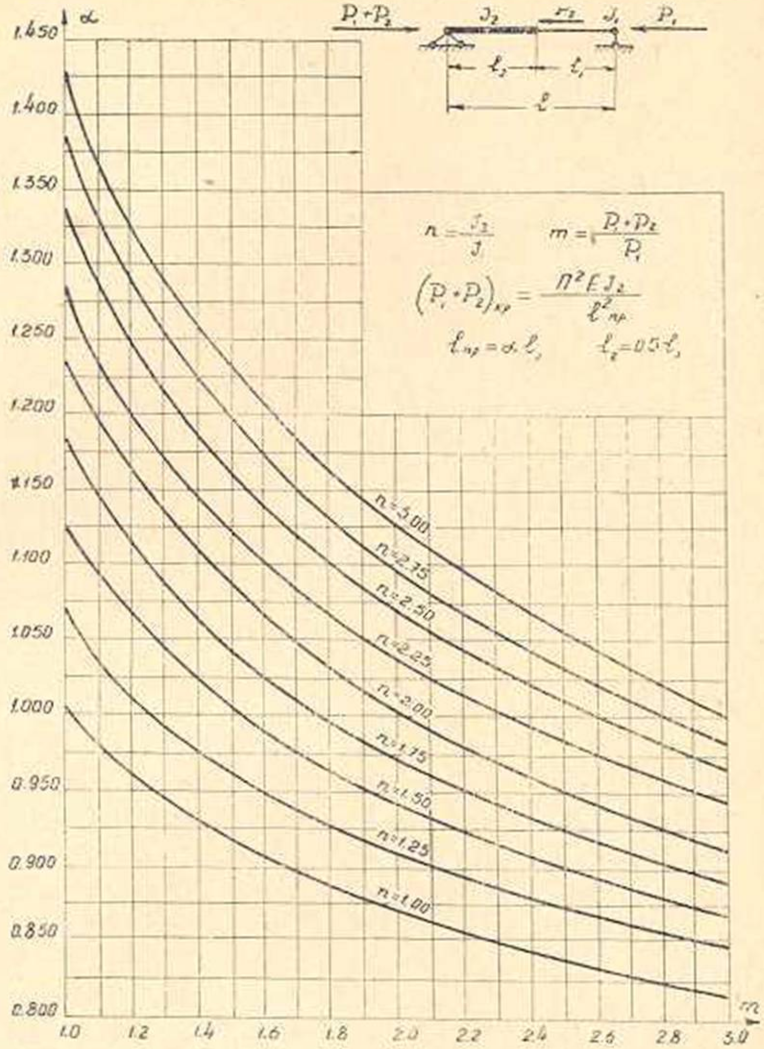
$l_1 : l_2$ / $I : I_0$	0	:	2:5	3:5	1:0
0,1	1,06	1,24	1,35	1,50	1,55
0,2	2,10	2,31	2,59	2,83	2,92
0,4	4,11	4,42	4,79	5,09	5,20
0,6	6,18	6,47	6,69	6,94	7,03
0,8	7,96	8,14	8,34	8,48	8,54



Фиг. 2.

Таблица 5 $\lambda/l = 0.4$

$I_1 : I_2$ / $I : I_0$	0	1 : 5	1 : 2	1 : 1
0,1	1,41	1,76	2,16	2,37
0,2	2,69	3,23	3,81	4,09
0,4	4,91	5,55	6,15	6,43
0,6	6,79	7,31	7,74	7,95
0,8	8,40	8,68	8,87	9,00



Фиг. 3

Таблица 6

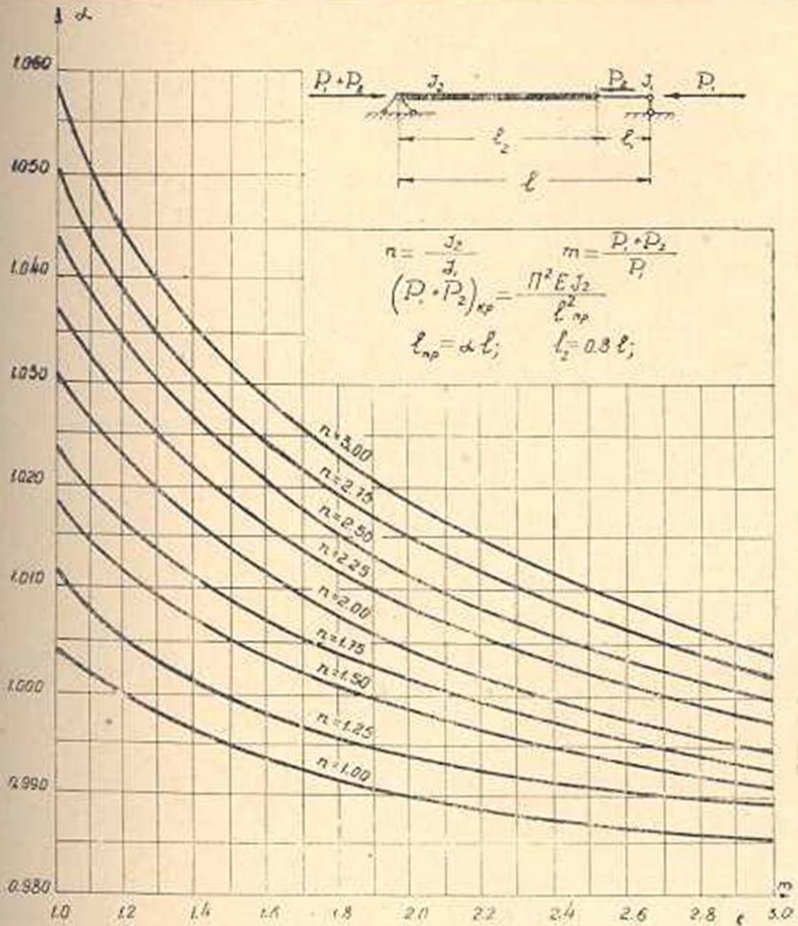
$l_1 : l_2 : l_0$			$l_1 : l_2 : l_3$ 1:1:1	1:2:2	2:1:2	2:2:1	3:1:1
0,2	0,4	1,0	7,22	5,96	5,03	4,34	3,68
0,2	0,6	1,0	7,96	7,22	5,74	5,36	4,40
0,4	0,6	1,0	8,52	7,62	7,04	6,39	5,39
0,4	0,8	1,0	9,02	8,59	7,71	7,45	6,52

С равным успехом можно определить значения коэффициентов устойчивости для многоступенчатого стержня, при этом вычисления почти не усложняются.

§ 3 Пример

Стержень длиной $l = 5{,}00$ *м* состоит из двух двутавров № 12, поставленных так, как показано на фиг. 7.

Момент инерции поперечного сечения равен



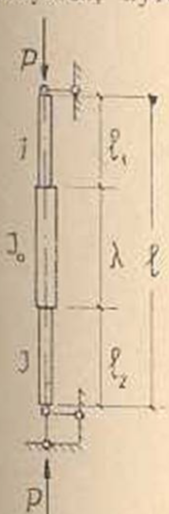
Фиг. 4.

$$I = 581{,}8\ см^4.$$

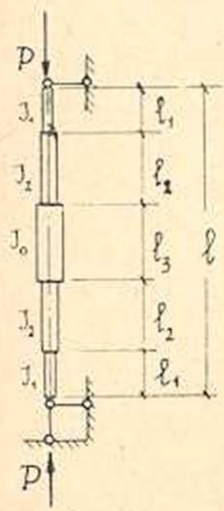
В случае опертых концов Эйлерова критическая сила $P = 46540\ кг$. Требуется, путем наложения двух листов, усилить стержень так. чтобы критическая сила возросла в полтора раза.

Необходимо определить длину λ усиленной части стержня.

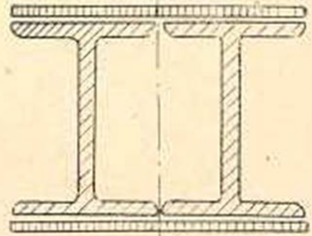
Момент инерции добавочных листов, шириной 15 *см* и толщиной 1 *см*, относительно



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

оси $t-t$ равен 562 $см^4$. В результате усиления стержень будет иметь в крайних частях момент инерции $I = 581{,}8$ $см^4$, в средней части $I_0 = 1143{,}8$ $см^4$.

Отношение моментов инерции $\frac{I}{I_0} = \frac{581{,}8}{1143{,}8} = 0{,}51$.

Определяем искомый коэффициент устойчивости:

$$K = \frac{Pl^2}{EI_0} = \frac{69800 \cdot 500}{2 \cdot 10^6 \cdot 1143{,}8} = 7{,}6.$$

Пользуясь таблицей (5), находим по $I/I_0 = 0{,}51$ и $K = 7{,}6$ соответствующее отношение $\lambda/l = 0{,}4$.

Таким образом стержень надо усилить в средней части на длину $\lambda = 0{,}4l = 2$ *м*.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступило 2 XI 1956

Մ. Ռ. Ֆելդման

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում շարադրվում է աստիճանաձև ձողի կայունության խնդիրների լուծման մոտավոր եղանակ, երբ սեղմող ուժը ըստ ձողի երկարության փոփոխվում է թռիչքաձև:

Ցույց է տրված մեթոդի կիրառումը պրակտիկ հետաքրքրություն ներկայացնող որոշ խնդիրների համար:

Երկարության և կայունության գործակիցների գտնված արժեքները ամփոփված են աղյուսակներում և գրաֆիկներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корноухов Н. В.* Прочность и устойчивость стрежневых систем, 1949.
2. *Динник А. Н.* Продольный изгиб, 1939.
3. *Фельдман М. Р.* О применении метода Галеркина к конечноразностным уравнениям. Инженерный сборник Института механики Академии наук СССР, том II, вып. 1, 1943.
4. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике, 1950.
5. *Ясинский Ф. С.* Избранные работы по устойчивости сжатых стержней, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ФИЗИКА

Н. А. Корхмазян

Решение задачи о переходном излучении методом изображений

В работе В. Гинзбурга и И. Франка [1] проведен расчет интенсивности переходного излучения для случаев двух сред, характеризующихся некоторыми (вообще говоря комплексными) значениями диэлектрических констант ε_1 и ε_2.

В настоящей работе дано решение той же задачи значительно более простым и наглядным методом. При этом использовались метод изображений и теория излучения при столкновениях заряженных быстрых частиц.

Следует отметить, что в работе [1], тем-же самым методом изображений, получется формула для полной интенсивности в нерелятивистском случае (формула (1) работы [1]). Однако указанные авторы решают задачу в общем виде другим методом.

Рассмотрим быструю частицу с зарядом e, движущуюся, с постоянной скоростью, из вакуума в идеальный проводник перпендикулярно плоской границе раздела этих двух сред, заполняющих бесконечное полупространство. Эта частица будет индуцировать на поверхности идеального проводника заряды, поле которых в вакууме, согласно методу изображений, идентично полю частицы с зарядом $-e$, движущейся навстречу первоначальной частице с той же скоростью; при этом идеальный проводник заменяется вакуумом. Перемещение изображения есть следствие фактического перераспределения индуцированных на поверхности идеального проводника зарядов. Излучение при переходе частицы с зарядом e из вакуума в металл может быть рассчитано как излучение при столкновении этой частицы и ее изображения.

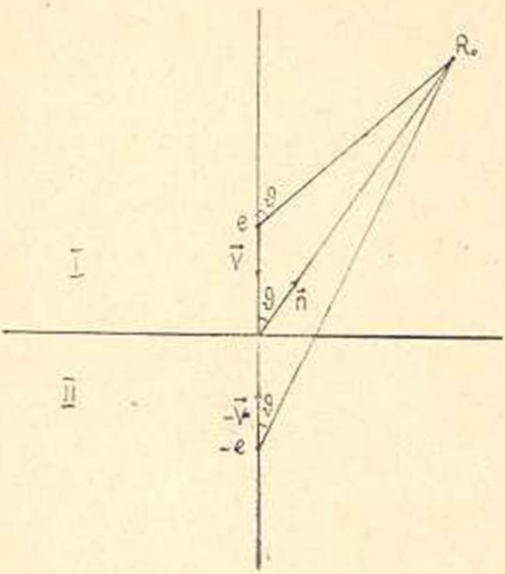
Поскольку при переходном излучении существенно излучение с частотой порядка меньше 10^{15} *герц*, а время столкновения τ порядка $\frac{a}{c}$, где a — порядок размеров атомов, то имеет место условие $\omega\tau \ll 1$. Это позволяет в дальнейшем использовать теорию излучения при столкновении заряженных частиц в форме, изложенной в [2].

Рассмотрим поле излучения в некоторой точке первой среды с координатой R_0^* (фиг. 1). Фурье-компонента магнитного поля в этой точке определится согласно формуле (68.8) [2] так:

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{2\pi c}[(\vec{A}_2 - \vec{A}_1)\vec{n}], \tag{1}$$

где $\vec{A}_1$ — вектор-потенциал в точке наблюдения R_0 до столкновения частиц, а $\vec{A}_2$ — вектор-потенциал поля в той же точке после столкновения, а $\vec{n} = \dfrac{\vec{R}_0}{R_0}$.

Величины $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ определяются как потенцилы Льенарь-Вихерта, созданные движущимися заряженной частицей и ее изображением. Потенциал, созданный частицей с зарядом e, движущейся со скоростью $\vec{V}$ по направлению к идеальному проводнику, будет равен



Фиг. 1.

$$\vec{A}_1^{(1)} = \frac{e\vec{V}}{cR_0\left(1 - \frac{\vec{n}\vec{V}}{c}\right)};$$

потенциал же, созданный изображением, определится как

$$\vec{A}_1^{(2)} = \frac{e\vec{V}}{cR_0\left(1 + \frac{\vec{n}\vec{V}}{c}\right)}.$$

Следовательно, потенциал $\vec{A}_1$ до столкновения есть:

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_1^{(1)} + \vec{A}_1^{(2)} = \frac{e\vec{V}}{cR_0}\left(\frac{1}{1 - \frac{V\cos\vartheta}{c}} + \frac{1}{1 + \frac{V\cos\vartheta}{c}}\right). \tag{2}$$

Потенциал $\vec{A}_2$ после столкновения частицы и ее изображения равен всюду нулю, в силу „аннигиляции" этих двух частиц. Физически это означает, что после перехода частицы в идеальный проводник, ее заряд полностью экранируется. Подставляя значения потенциалов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ в (1), а потом (1) в формулу для излучения при столкновении (66.9) [2]

* Начало отсчета координат помещено в точке столкновения частиц.

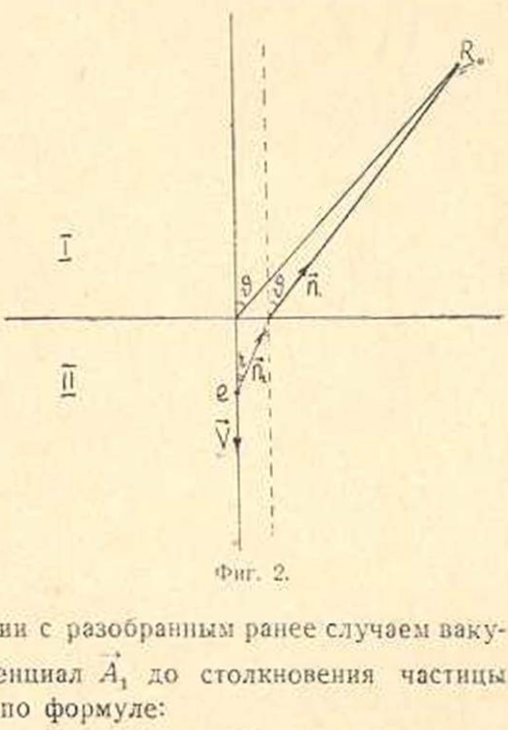
$$\dot{W}_\omega(\vartheta) = \frac{dE_{\vec{n}\omega}}{d\Omega d\omega} = c\,|\vec{H}_\omega|^2 \cdot R_0^2,$$

получаем окончательную формулу:

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{e^2 V^2}{\pi^2 c^3} \frac{\sin^2\vartheta}{(1-\beta^2\cos^2\vartheta)^2}; \qquad \beta = \frac{V}{c}. \tag{3}$$

Таково решение поставленной задачи в наиболее простом случае перехода заряженной частицы из вакуума в идеальный проводник. Этот случай наиболее ясно иллюстрирует суть излагаемого метода и позволяет провести обобщение на случай перехода частицы из одной произвольной среды в некоторую другую.

Итак, рассмотрим теперь две среды, разделенные плоской поверхностью, заполняющие бесконечное полупространство и характеризующиеся диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2, которые могут быть, вообще говоря, комплексными. Частица с зарядом e пусть, как и ранее, движется с постоянной скоростью $\vec{V}$ в направлении, перпендикулярном плоскости раздела. Поле в точке R_0 первой среды, до того как частица достигла границы раздела, складывается из поля, созданного непосредственно самим зарядом и, кроме того, поля отраженного от границы раздела двух рассматриваемых сред. Последнюю часть поля можно представить как образованную неким „зеркальным" изображением нашей частицы, находящимся во второй среде, движущимся скоростью $-\vec{V}$ и обладающим зарядом $-ef$, где f есть коэффициент отражения Френеля для волн, отраженных в первую среду. Заметим, что коэффициент f зависит от частоты падающей волны, и тем самым величина заряда изображения также будет различна для разных частот; кроме того отметим, что, вводя в рассмотрение изображение, нужно, как всегда, заменить вещество второй среды веществом первой.



Фиг. 2.

Таким образом, в полной аналогии с разобранным ранее случаем вакуум — идеальный проводник, потенциал $\vec{A}_1$ до столкновения частицы с ее изображением определится по формуле:

$$\vec{A}_1 = \frac{e\vec{V}}{cR_0\left(1 - \sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\vec{n}_1\vec{V}}{c}\right)} + \frac{e\vec{V}f}{cR_0\left(1 + \sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\vec{n}_1\vec{V}}{c}\right)}. \tag{4}$$

После столкновения, т. е. после проникновения нашей частицы во вторую среду, „анигиляция", т. е. полная экранировка, в общем случае не имеет места.

Поле в первой среде, созданной частично заэкранированным зарядом, движущимся теперь во второй среде от границы раздела, получается в результате преломления поля частицы с зарядом e на границе двух сред. Поэтому мы можем записать $\vec{A}_2$ в форме:

$$\vec{A}_2 = \frac{e\vec{V}}{cR_0\left(1 - \sqrt{\varepsilon_2}\,\frac{\vec{n}_2\vec{V}}{c}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}(1+f). \tag{5}$$

Фактор $\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\cdot(1+f)$ есть коэффициент преломления Френеля для амплитуды. Смысл единичных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, фигурирующих в формулах (4) и (5), ясен из фиг. 2. Обобщая формулу (1), запишем Фурье-компоненту магнитного поля в точке R_0 первой среды в виде

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{2\pi c}\left\{[\vec{A}_2\,\vec{n}_2] - [\vec{A}_1\,\vec{n}_1]\right\}, \tag{6}$$

и формулу излучения

$$W_\omega(\vartheta) = \sqrt{\varepsilon_1}\cdot c\cdot|\vec{H}_\omega|^2\cdot R_0^2,$$

можем написать:

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{4\pi^2 c}\,|(A_2\cdot\sin r - A_1\sin\vartheta)|^2\cdot R_0^2.$$

Из фиг. 2 имеем для закона преломления $\sin r = \sin\vartheta\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$; поэтому, используя (4) и (5), получим

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{e^2\sqrt{\varepsilon_1}\cdot\sin^2\vartheta}{4\pi^2 c^2}\left|\left\{\frac{V}{1-\sqrt{\varepsilon_2}\cdot\frac{\vec{n}_2\vec{V}}{c}}\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cdot(1+f) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{V}{1-\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\vec{n}_1\vec{V}}{c}} - \frac{Vf}{1+\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\vec{n}_1\vec{V}}{c}}\right\}\right|^2. \tag{7}$$

Эта формула и дает решение задачи в общем случае. Можно несколько преобразовать выражение (7); имеем для волнового вектора $k_{1,2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{1,2}}$ и, кроме того, из фиг. 2 $\vec{n}_1\vec{V} = -V\cos\vartheta$ и $\vec{n}_2\vec{V} = -V\cos r$, где $\cos r = \sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cdot\sin^2\vartheta}$; с учетом приведенных соотношений имеем:

$$W_\omega(\vartheta)=\frac{e^2\sqrt{\varepsilon_1}\cdot\omega^2\cdot\sin^2\vartheta}{4\pi^2\cdot c^3}\left|\left\{\frac{2k_1\cos\vartheta}{\frac{\omega^2}{V^2}-k_1^2\cos^2\vartheta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1+f)\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\cdot\frac{1}{\frac{\omega}{V}+\sqrt{k_2^2-k_1^2\sin^2\vartheta}}-\frac{1}{\frac{\omega}{V}-k_1\cos\vartheta}\right)\right\}\right|^2. \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $W_\omega(\vartheta)$ обращается в нуль в соответствии с физикой вопроса — переходное излучение должно отсутствовать в этом случае. Отметим здесь, что знаменатели вида $\left(1-\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{\vec{n}\,\vec{V}}{c}\right)$ нигде в нуль обратиться не могут, что соответствует Черенковскому излучению. Заметим, что аналогичная формула в работе [1] отличается от приведенной формулы (8) знаком в знаменателе второго члена в фигурных скобках. Как указали сами авторы в ответном письме это различие следует отнести за счет ошибки работы [1], исходящей из ср. 20, 5 строка сверху, где напечатано! $K_1R_0+\frac{z}{c}\sqrt{K_2^2-K_1^2\sin^2\vartheta}$ вместо: K_1R_0- $-\frac{z}{c}\sqrt{K_2^2-K_1^2\sin^2\vartheta}$.

В заключение автор выражает благодарность Г. М. Гарибяну и А. Ц. Аматуни за сделанные ими указания и внимание к работе.

Ереванский государственый университет
им. В. М. Молотова

Поступило 10 I 1957

Ն. Ա. Դորխմազյան

ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրված է հաստատուն արագությամբ շարժվող լիցքավորված մասնիկի մի միջավայրից մյուսը անցնելու ժամանակ առաջացած ճառագայթման խնդրի լուծումը արտապատկերման մեթոդով: Ստացված է բանաձև անցումային ճառագայթման հոսքի համար տվյալ ուղղությամբ և տվյալ հաճախությամբ:

Եթե e լիցքը շարժվում է երկու միջավայրերի հարթ սահմանին ուղղահայաց որոշ արագությամբ, անցնելով, օրինակ, առաջին միջավայրից երկրորդը, ապա առաջին միջավայրում էլեկտրամագնիսական դաշտի հաշվման տեսակետից կարելի է ընդունել, որ բացի նշված լիցքից գոյություն ունի նաև իր «հայելային պատկերը» — ef լիցքով և ճիշտ նույնպես արագու-

թյամբ։ Այստեղ f-ը առաջին միջավայրում անդրադարձած ճառագայթների Ֆրենելի անդրադարձման գործակիցն է։ Քանի որ f-ը կախված է անդրադարձող ճառագայթի հաճախականությունից, ապա պատկերի լիցքը տարբեր հաճախականությունների համար տարբեր է։ Այսպիսի պատկերացումը հնարավորություն է տալիս, հաշվել անցումային ճառագայթումը, օգտագործելով լիցքավորված մասնիկների բաշխման ժամանակ առաջացած ճառագայթմանը վերաբերվող տեսությունը։ Պետք է նշել, որ [1] աշխատանքի հեղինակները, այս մեթոդից օգտվել են լիցքի շարժման ոչ ռելյատիվիստիկ արագությունների դեպքում, իսկ ռելյատիվիստիկ արագությունների դեպքում նրանք գնացել են այլ ճանապարհով։

Բերված մեթոդը ամենակարճը և ակնհայտն է այդ խնդրի լուծման գոյություն ունեցող մեթոդներից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В.* и *Франк И.* ЖЭТФ, 16, 715 (1946).
2. *Ландау Л.* и *Лифшиц Е.* Теория поля, изд. 2, § 68. (1948).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ФИЗИКА

В. Ш. Камалян

Об обратном потоке протонов регистрируемых магнитным масспектрометром

1. В космическом излучении, помимо основного потока частиц идущих сверху, существует слабый поток протонов, π-мезонов и других частиц, возникающий в веществе от взаимодействия космического излучения и направленный снизу вверх. При масспектрометрических измерениях указанные частицы будут регистрироваться как частицы имеющие противоположный знак заряда. Так например: протоны возникающие в веществе, расположенном под магнитным зазором, и идущие снизу, будут регистрироваться как отрицательно заряженные частицы. При наличии генератора над магнитным зазором такие протоны, останавливаясь в веществе, могут имитировать „зарождение" отрицательно заряженной частицы в данном генераторе от нейтрального компонента космического излучения.

Одновременно известно, что в генераторе, от нейтрального излучения, зарождаются также отрицательно заряженные частицы —преимущественно π-мезоны; поэтому выделить обратный поток протонов остановившихся в генераторе от отрицательно заряженных частиц, зарожденных в том-же генераторе, при масспектрометрических измерениях—весьма трудная задача, если отсутствуют специальные измерения по определению ионизующей способности частиц. Однако, при определенных условиях, можно выделить обратный поток протонов от отрицательно заряженных генерированных частиц и без ионизационных измерений; пользуясь импульсными спектрами вышеуказанных частиц.

Импульсный спектр отрицательно заряженных частиц регистрируемый масспектрометром, поскольку частицы зарождены в генераторе от нейтрального компонента космического излучения, можно рассмотреть как наложение двух спектров, а именно:

а) импульсного спектра отрицательно заряженных частиц, возникающих в данном генераторе и,

б) импульсного спектра протонов идущих в обратном направлении и остановившихся в том-же генераторе (при достаточно толстых генераторах).

В случае очень тонкого генератора, из общего спектра обратных протонов будет вырезываться узкий интервал импульсов, соответствующий протонам ионизационно-остановившимся в данном генераторе. При этом в импульсном спектре отрицательно заряженных частиц, зарожденных в данном генераторе, появится максимум, обусловленный остановками обратных протонов. Разумеется, что при изменении ионизационного пробега максумум в импульсном спектре так-же соответственно сдвинется.

В течение 1953—54 гг. в лаборатории Большого Постоянного Магнита Арагацской Высотной Станции на высоте 3200 *м* над уровнем моря изучались вопросы зарождения частиц от нейтрального компонента космического излучения в генераторах разных толщин [1, 2].

Магнитный масспектрометр был дополнен специальным годоскопическим устройством состоящим из 10 групп координатных счетчиков Гейгера — Мюллера позволяющих выделить случаи зарождения заряженных частиц от нейтрального компонента космического излучения, изучать пространственную картину зарождения, выделить случаи звездообразования от одиночного прохождения частиц и т. д. На фиг. 1 приведен разрез магнитного масспектрометра с дополнительным годоскопическим устройством в двух взаимно перпендикулярных проекциях. С помощью координатных счетчиков создана своеобразная коробка с шестью отсеками А, Б, В, Г, Д, Е, внутри которых размещались блоки вещества.

Частица считалась зарожденной от нейтрального излучения в соответствующем отсеке, если отсутствовало срабатывание в счетчиках перекрывающих данный отсек сверху, а также в боковых и торцевых группах счетчиков.

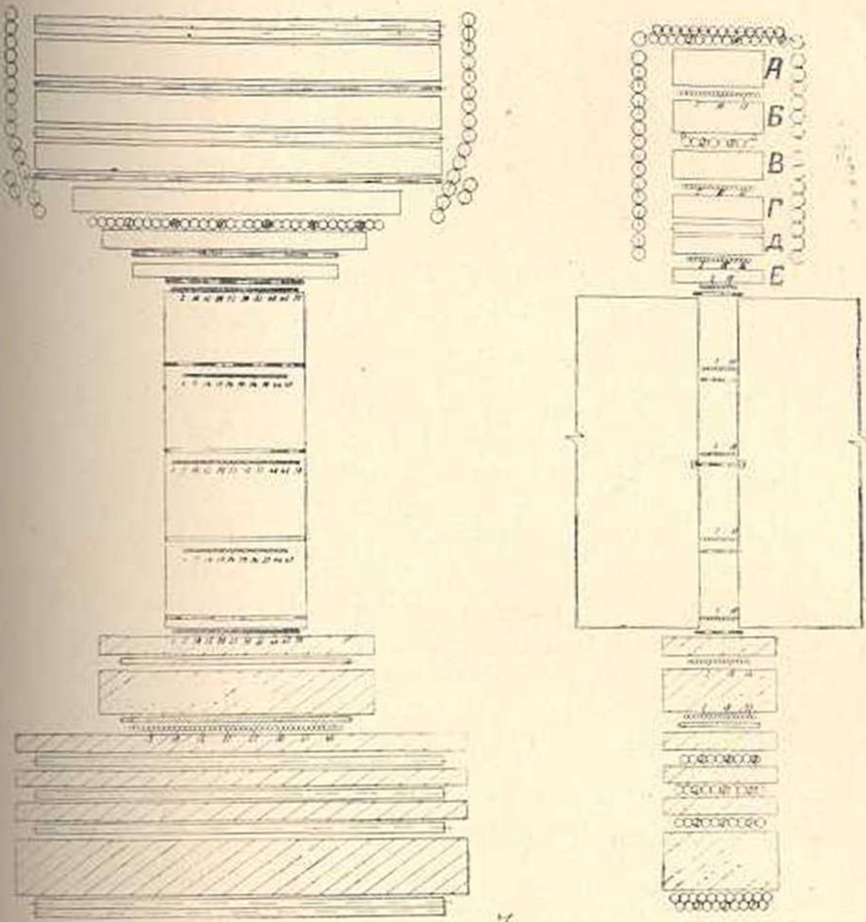
Далее частица исследовалась обыкновенным способом: по магнитному отклонению определялись импульс и знак частицы. Для частиц, остановившихся в поглотителях, по пробегу и импульсу определялась их масса.

Среднеквадратичная ошибка в измерении импульса частиц не превышала 3% при импульсе $2{,}10^8$ *эв/с* и 10% при 10^9 *эв/с*.

Распределение и толщина вещества для соответствующих отсеков приведены в таблице 1.

Таблица 1

№№ серий	№№ пленок	Количество вещества в отсеках в *см*						Продолжительность измерений в часах
		А	Б	В	Г	Д	Е	
1	163—318	—	7 св.	6 св.	—	—	—	560
2	403—435 464—2494	7 св.	6 св.	—	—	—	—	256
3	436—463	7 св.	6 св.	—	—	—	0,3 медь 0,15 алюм.	132
4	495—597	7 св.	6 св.	5 св.	—	—	—	614
5	598—637	8 св.	7 св.	—	—	—	—	193
6	638—668	8 св.	7 св.	0,3 медь 0,25 алюм.	—	—	—	146
7	669—735	5 св.	5 св	—	—	—	—	320



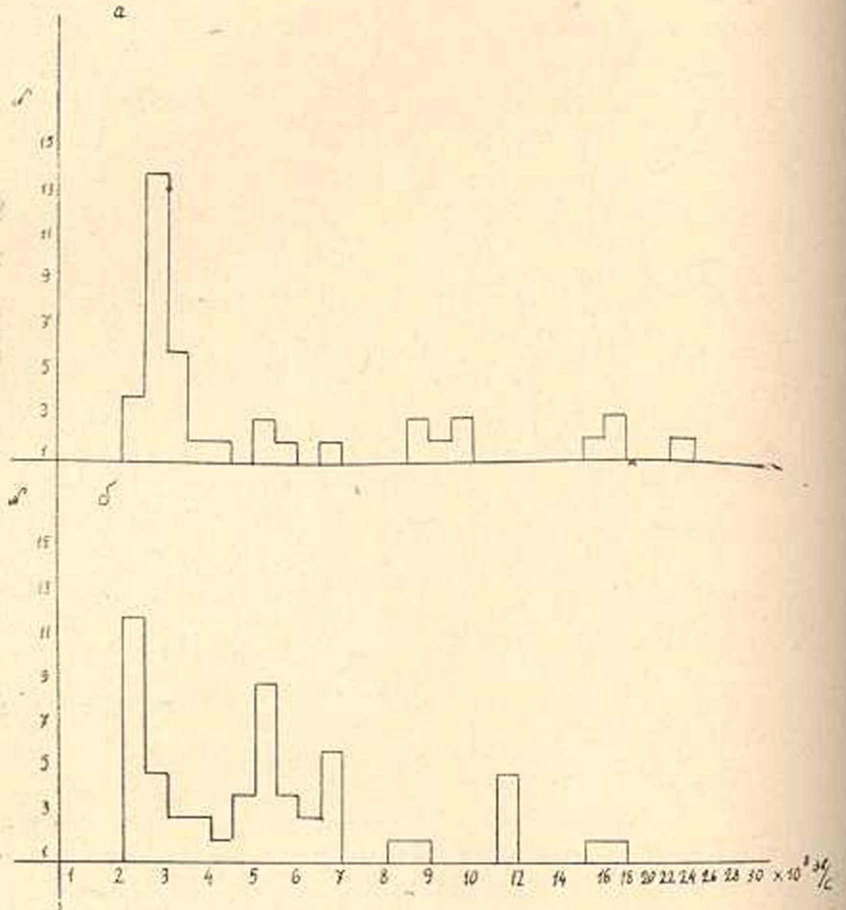
Фиг. 1.

Для выделения из всего потока зарожденных частиц возникающих в генерационной коробке от нейтрального компонента космического излучения, тех частиц, которые зародились в очень тонких слоях вещества, были отделены случаи зарождения частиц в отсеках не содержащих свинцовых блоков (таблица 1).

За 2220 часов измерений в интервале импульсов 2.10^8 *эв/с*—3.10^9 *эв/с* был зарегистрирован 631 случай, положительно и 86 случаев отрицательно заряженных частиц. Для выяснения вопроса возникают ли указанные частицы в веществе стенок счетчиков, или имеют иное происхождение, в сериях измерений 3 и 6 в отсеках „Е" и „В" было помещено 3,2 *гр/см*^{2} меди и алюминия. С увеличением вещества пропорционально увеличивались и количество зарожденных частиц в соответствующих отсеках, указывая тем самым, что наблюдаемые частицы зарождаются в стенках счетчиков толщиной 0,12—0,15 *мм*.

Рассмотрим более подробно отрицательно заряженные частицы, зарожденные в меди общей толщиной 2—2,5 *мм.*, расположенных под свинцовыми блоками толщиной 10—18 *см.*

На фиг. 2 приведены распределения отрицательно заряженных частиц по импульсам отобранные в отдельные группы по следующим признакам:



Фиг. 2.

а—Отрицательно заряженные частицы зарожденные в однолучевых звездах.
б—Отрицательно заряженные частицы зарожденные в многолучевых звездах.

Группа „а“: отрицательно заряженные одиночные частицы возникающие в отсеках без сопровождающих частиц—однолучевые звезды.

Группа „б“: отрицательно заряженные частицы возникающие в отсеках в сопровождении более одной частицы—многолучевые звезды.

Как видно из фиг. 2 распределение частиц в двух группах отличается по форме. Основная часть частиц возникающих в многолучевых звездах распределена в более широком интервале импульсов и группируется вокруг значений $P = 2—2{,}5 \cdot 10^8$ *эв/с*, $P = 5—5{,}5 \cdot 10^8$ *эв/с*. В случае однолучевых звезд, большинство частиц группируется в узком интервале импульсов, вокруг значений $P = 2{,}5—3 \cdot 10^8$ *эв/с*.

Сравнивая средние значения импульса частиц для групп „а" и „б" зарожденных в разных отсеках в интервале $P = 2—4 \cdot 10^8$ *эв/с*, видим, что для частиц группы „а" (таблица 2) среднее значение импульса с удалением отсека от магнитного зазора увеличивается в то время, как для частиц группы „б" определенной закономерности не наблюдается.

Таблица 2

Отсеки	Отрицательно заряженные частицы с импульсом $2—4 \cdot 10^8$ *эв/с* зарожденные в данном отсеке							среднее значение импульса в 10^8 *эв/с*
	Частицы зарожденные в однолучевых звездах							
В	3,29	3,59						3,44
Г	2,32 2,41	3,25 2,4	2,85	2,61	3,33	3,27		2,81
Д	2,67	2,81	2,8	2,98				2,81
Е	2,54 2,59	2,92 3,33	2,53	2,66	2,52	2,53		2,7
	Частицы зарожденные в многолучевых звездах							
В	2,52	2,47	2,41	2,8	2,7	3,0	2,5	2,61
Г	2,52	3,64	3,93					3,27
Д	2,2	2,2	3,14	3,93	2,2	2,06	2,28	2,6
Е	3,29	2,29						2,79

Наблюдаемая для частиц группы „а" зависимость среднего значения импульса, от места зарождения, можно объяснить ионизационными остановками протонов идущих снизу вверх, так как с удалением отсека увеличивается и ионизационный пробег.

Укажем, что остановки обратных протонов будут регистрироваться как зарождение частицы в однолучевых звездах, в отличие от π-мезонов возникающих в ядерных расщеплениях и в большинстве случаев регистрируемых, как частицы возникающе в многолучевых звездах.

Любопытно сравнение частиц групп „а" и „б" по взаимодействию с веществом в нижних поглотителях. В группе „а" в интервале импульса $P = 2—4 \cdot 10^8$ *эв/с* наблюдены 22 частицы; из них 19 провзаимодействовало с веществом в первых двух поглотителях толщиной 12 *см* графита. При чем, под взаимодействием подразумевается: а) остановка частицы, б) рассеивание на угол больше чем 15°, в) образование звезд. В группе „б" наблюдены 19 частиц в том же интервале импульса, из которых только 6 провзаимодействовало в тех же поглотителях.

Допуская, что все наблюдаемые нами отрицательно заряженные частицы группы „а" и „б" являются π-мезонами, можно определить ослабление π-мезонного пучка в поглотителях из-за ядерного взаимодействия. π-мезоны с импульсом $P = 2—4 \cdot 10^8$ *эв/с* в графитовом поглотителе толщиной 12 *см* могут остановиться только из-за неионизационных потерь энергии.

Количество π-мезонов выходящих из поглотителя $N = N_0 l^{-\frac{x}{\lambda}}$ где N_0—поток падающих частиц на поглотитель, N — число частиц прошедших поглотитель без взаимодействия, x — толщина поглотителя и λ — длина ядерного пробега вещества поглотителя.

Учитывая, что в интервале импульса $P = 2—4 \cdot 10^8$ *эв/с* сечение ядерного взаимодействия π-мезонов близко к геометрическому $\lambda = 36$ *см*, получим величину первичного потока, если известно количество частиц N прошедших через поглотитель толщиной 12 *см*.

Для частиц группы „б" имеем $N = 13$, отсюда $N_0 = 18{,}5$. На опыте наблюдены 19 частиц, т. е. все частицы в группе „б" являются π-мезонами. Для группы „а" $N = 3$, $N_0 = 4{,}5$, на опыте наблюдены 22 частицы.

Так как сечение ядерного взаимодействия не может быть больше геометрического, то следовательно из 22 частиц около 17 не являются π-мезонами. Можно предполагать, что они являются К-мезонами ионизационно остановившимися в 12 *см* графите. Однако трудно допустить, что тяжелые частицы зародились несколько раз интенсивнее чем π-мезоны при данном интервале импульсов, что противоречит известным экспериментальным фактам.

В таблице 3 приведены все 19 случаев частиц группы „а", провзаимодействовавших в 12 *см* графита. В графе 3 приведены импульсы частиц. В графах 4 и 5 приведены пробеги и масса частиц в предположении, что отрицательно заряженная частица зародилась в стенках счетчиков генерационной коробки и остановилась в нижних поглотителях из-за ионизационных потерь энергии. Для восьми случаев определение массы оказалось невозможным, из-за неионизационных остановок частиц.

В графах 6 и 7 приведены пробег и масса частиц в предположении, что положительно заряженная частица зародилась в нижних поглотителях и остановилась в стенках счетчиков генерационной коробки. При чем можно вычислить массу для всех 19 частиц.

Сравнивая значения полученные в графах 5 и 7 видим, что в графе 7 разброс в значениях масс меньше, чем в графе 5 и значения масс группируются вокруг значения массы протона.

Перечисленные факты дают основание утверждать, что некоторые из отрицательно заряженных частиц возникающих в однолучевых звездах, от нейтрального компонента космического излучения, являются протонами, идущими в обратном направлении—снизу вверх и остановившимися в данном генераторе.

Можно оценить вклад вносимый обратными протонами в общий поток отрицательно заряженных частиц, возникающих в генераторе от нейтрального компонента космического излучения. Возьмем отри-

Таблица 3

№№ п.п.	№ пленок и кадров	Импульс частицы в 10^8 *эв/с*	Пробег для отрицат. заряженных частиц в *см* свинца	Масса для отрицат. заряжен. частиц в эл. массах	Пробег для положительно заряжен. частиц в *мм* свинцах	Масса для положительно заряженных частиц в эл. массах
1	2	3	4	5	6	7
1	171—1	2,59	2—12	910—2050	2,0	2050
2	201—5	3,33	?	?	3,5	2240
3	216—25	3,33	?	?	2,0	2830
4	249—6	3,37	12—33	840—1330	3,5	2240
5	273—15	2,98	2—12	1070—2300	2,5	2300
6	420—4	2,4	2—12	840—1800	3,5	1460
7	437—56	2,53	?	?	2,0	2050
8	459—113	2,41	2—12	840—1800	3,5	1460
9	463—3	2,61	13—35	520—900	3,5	1700
10	526—42	2,54	?	?	2,0	1950
11	527—6	2,67	2—12	970—2050	2,5	1950
12	535—30	2,32	12—32	470—780	3,5	1360
13	701—70	3,25	?	?	3,5	2240
14	613—70	2,92	13,5—36	600—1000	2,0	2440
15	685—20	2,66	?	?	2,0	2140
16	689—2	3,59	2—12	1440—3200	4,5	2340
17	705—35	2,52	?	?	2,0	1950
18	768—59	2,81	12—32	640—1030	2,5	2140
19	770—79	2,53	?	?	2,0	1950

цательно заряженные одиночные частицы зарожденные в стенках счетчиков и в нижних блоках свинцового генератора толщиной 5—7 *см*.

За 2220 часов измерений в интервале импульса $P=2-5\cdot10^8$ *эв/с* зарегистрировано 77 частиц. Из них: в 12 *см* графите провзаимодействовало 50 и прошло без видимого взаимодействия 27. За то же время с импульсами превышающими $P=5\cdot10^8$ *эв/с* зарегистрировано 56 частиц. Из них в графите толщиною 12 *см* провзаимодействовало 19 и прошло без видимого взаимодействия 37. По количеству не взаимодействовавших чистиц определен общий поток π-мезонов приведенный в таблице 4.

Как видно из таблицы 4 в интервале импульсов $P=2-5\cdot10^8$ *эв/с*, из 77 частиц 39 являются π-мезонами, остальные 38 частиц могут

Таблица 4

Отрицательно заряженные одиночные частицы	Всего частиц	Провзаимодействовали в графите толщиной 12 *см*	Прошли без видимого взаимодействия	Ожидаемый поток π-мезонов	Другие частицы
$2\cdot10^8<P<5\cdot10^8$ *эв/с*	77	50	27	$36\pm6,2$	38
$P>5\cdot10^8$ *эв/с*	56	19	37	$52\pm7,2$	4

быть обратными протонами и частично К-мезонами; Однако, нужно предполагать, что доля последних невелика, так как они в основном зарождаются в многолучевых звездах и составляют небольшую часть от π-мезонов в данном интервале импульса.

Магнитным-масспектрометром за 2220 часов измерении в интервале импульса $P = 2-5\cdot10^8$ *эв/с* зарегистрирован 251 отрицательно заряженная частица зарожденная в однолучевых и многолучевых звездах от нейтрального компонента космического излучения в свинцовых генераторах толщиной 10—18 *см*. Из них 38 могут быть приняты как обратные протоны, что составляет около 15% от всех отрицательно заряженных частиц зарожденных в генераторе от нейтрального компонента в данном интервале импульсов и при указанной толщине генератора. Частота регистрации обратных протонов в указанных интервале импульсов и толщине генератора равна $0{,}017\pm0{,}0028$ частиц в час, при телесном угле ограниченном магнитным зазором в $70\times30\times$ $\times8$ *см*.

Частота регистрации протонов и π-мезонов зарожденных в свинцовом генераторе толщиной 10—18 *см*, от нейтрального компонента космического излучения, в интервале импульсов $P = 2-5\cdot10^8$ *эв/с* при том же телесном угле составляет соответственно $0{,}45\pm0{,}027$ и $0{,}096\pm0{,}0066$ частиц/час.

2. В течение 1955 года продолжались измерения по изучению частиц зарожденных в свинцовых генераторах от нейтрального компонента космического излучения. Существующая регистрирующая система была дополнена пятислойным пропорциональным счетчиком, позволяющим определить ионизирующую способность частицы с точностью 15%. Таким образом стало возможным проверить правильность выводов, высказанных выше на основании анализа экспериментального материала 1953/54 гг. о существовании обратного потока протонов. Были произведены измерения при разных толщинах генератора, для приближения условий эксперимента к условиям 1954 года. В одной серии измерений в качестве генератора были использованы сравнительно тонкие свинцовые листы толщиной 4—10 *мм*, с суммарной толщиной 20, 30, 50 *мм*.

Все отрицательно заряженные частицы, зарожденные в свинцовых генераторах от нейтрального компонента космического излучения, отобранные и обработанные также, как и в 1953—1954 гг., были условно разделены на две группы:

а) частицы зарожденные в однолучевых звездах, и

б) частицы зарожденные в многолучевых звездах.

На фиг. 3, 4 приведены распределения отрицательно заряженных частиц по группам „а" и „б" в зависимости от импульса и ионизирующей способности. Сплошными кривыми проведены зависимость ионизирующей способности частиц от импульса для π, К-мезонов, протонов, дейтонов.

При сравнении этих двух групп видно, что частицы возникающие в многолучевых звездах (фиг. 3) обладают ионизирующей способностью соответствующей частицам с массой π-мезонов. Повышенная ионизация в трех случаях обусловлена прохождением через пропорциональный счетчик нескольких частиц.

В случае однолучевых звезд (фиг. 4) выделяются две группы частиц, обладающих резко отличающимися ионизирующими способностями. Одна группа—это π-мезоны возникающие в генераторах. Вторая группа обладает значительно повышенной ионизирующей способностью, соответствующей частицам с массой протона.

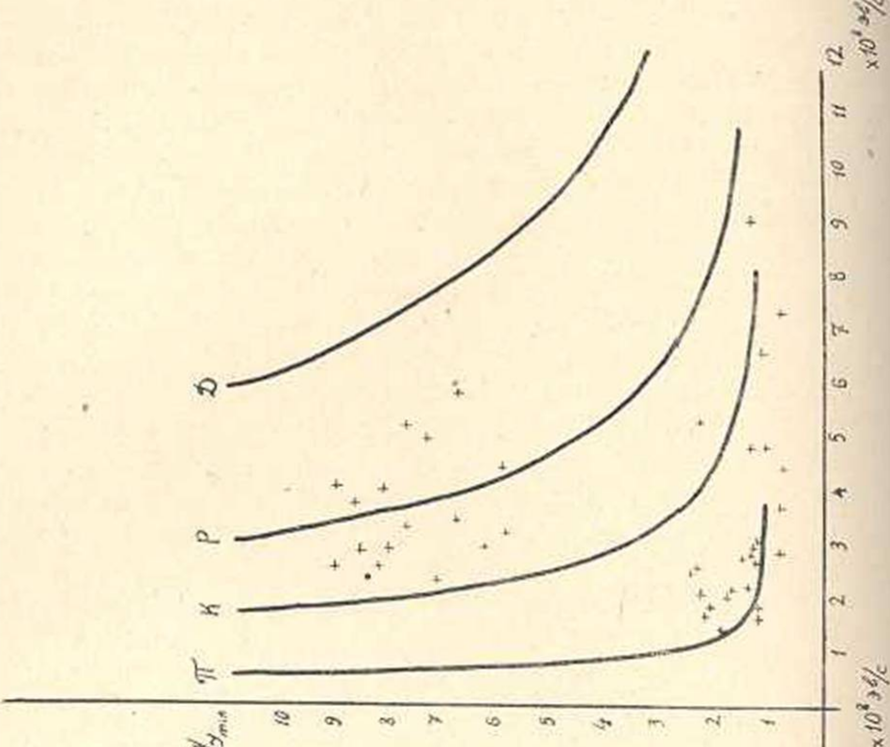
В таблице 5 приведены более подробные данные об этих частицах. В графе 4 приведены импульсы, в графе 7—массы частиц вычисленные по импульсу и ионизации. В графе 8 указан ионизационный пробег частицы в предположении, что она является обратной частицей, остановившейся в генераторе. В графе 9 вычислены масса по импульсу и пробегу для обратных частиц.

Как видно из табл. 5, значение массы частицы вычисленное двумя независимыми способами, в пределах экспериментальной ошибки, совпадает со значением массы протона*.

Таблица 5

№№ п.п.	№ пленок и кадров	Суммарная толщ. генератора в *мм*	$P_x \cdot 10^8$ *эв/с*	Эксперим. J/J_{min}	Ожидаем. J/J_{min} для π-мезонов	M_J в электрон. массах	Пробег в *мм* свинца	M_R в электронных массах
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	306—14	30	2,55	9,1	1,2	1400	2—6	1650±400
2	315—10	30	2,3	7,2	1,2	1100	2—6	1560±400
3	324—21	30	5,17	7,8	1,05	2600	12—18	2550±400
4	325—16	30	2,57	8,3	1,2	1350	2—6	1650±400
5	326—14	30	4,95	7,4	1,05	2480	6—12	2900±400
6	379—9	50	4,0	8,2	1,1	2050	2—10	3000±1000
7	388—4	50	5,8	6,8	1,0	2800	20—30	2250±250
8	390—2	50	2,9	8,1	1,2	1370	2—10	2050±450
9	400—5	50	3,74	8,75	1,1	2000	2—14	2650±950
10	435—57	20	3,48	6,8	1,1	1500	2—12	2350±850
11	450—74	20	4,03	9,1	1,1	2100	2—5	3350±650
12	86—660	250	3,25	5,9	1,15	1450	2—32	1925±1075
13	88—15	250	2,92	6,32	1,1	1300	2—32	1600±900
14	97—442	250	3,3	7,75	1,15	1580	2—32	1925±1095
15	164—163	250	4,36	5,95	1,1	1880	2—32	2800±1600
16	187—7	250	3,81	7,25	1,1	1840	2—32	2350±1250
17	188—15	250	2,86	8,66	1,2	1500	2—32	1600±900

* Заниженное значение для M_J при импульсе $P < 3,5 \cdot 10^8$ *эв/с* связано с ограничениями регистрирующей системы: начиная с определенного значения ионизации превышающего регистрирующие возможности системы, происходит отсечение иони-



Фиг. 4. Отрицательно заряженные частицы, зарожденные в одноузельных звездах.

Фиг. 3. Отрицательно заряженные частицы, зарожденные

зации, приводящее к уменьшению измеряемого значения ионизации для данной стицы и соответственно к занижению значения массы.

Все вышеуказанные факты дают нам основание утверждать, что существует поток обратных протонов, которые регистрируются магнитным масспектрометром как отрицательно заряженные частицы, возникающие в однолучевых звездах, причем, как правило, они являются малоэнергичными протонами обладающими импульсами меньшими чем 6.10^8 *эв/с* (таблица 4 и 5).

Частота регистрации обратных протонов меняется с изменением толщины генератора, что вполне закономерно, так как при этом изменяется поток ядерноактивного компонента. Так, при толщине генератора 2—5 *см* свинца, частота регистрации обратных протонов в интервале импулса $2—5 \cdot 10^8$ *эв/с* равна $0{,}018 \mp 0{,}006$ частица/час. При толщине 25 *см* равна $0{,}01 \pm 0{,}0024$ частица/час.

В заключение приношу глубокую благодарность А. И. Алиханяну за интерес к работе и за весьма ценные замечания, и Н. М. Кочаряну за участие в обсуждении результатов.

Институт физики
АН Армянской ССР

Поступило 24 XII 1956

Վ. Շ. Քամալյան

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄԱՍՍՊԵԿՏՐՈՄԵՏՐԻ ԿՈՂՄԻՑ ԱՐՁԱՆԱԳՐՎՈՂ ՀԵՏԱԴԱՐՁ ՊՐՈՏՈՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կոսմիկական ճառագայթների մեջ, բացի վերևից ընկնող մասնիկների հիմնական հոսքից, գոյություն ունի նաև հետադարձ մասնիկների թույլ հոսք, ընդ որում այդ հետադարձ մասնիկները մագնիսական մասսպեկտրոմետրի կողմից արձանագրվում են որպես հակառակ նշանի լիցքի մասնիկներ։

Այսպիսով, հետադարձ պրոտոնները արձանագրվում են որպես բացասական լիցք ունեցող մասնիկներ, ընդ որում, եթե մասսպեկտրոմետրի վրա դրված է բավականին նյութ, ապա վերջիններս, կանգ առնելով նյութի (գեներատորի) մեջ, իմիտացիայի են ենթարկվում որպես բացասական լիցք ունեցող մասնիկների «ծնունդ» կոսմիկական ճառագայթների նեյտրալ կոմպոնենտի կողմից։ Միաժամանակ հայտնի է, որ նույն նեյտրալ կոմպոնենտը նյութի մեջ ծնում է բացասական լիցք ունեցող մասնիկներ, հիմնականում π-մեզոններ, որոնց անջատումը հետադարձ պրոտոններից կապված է էքսպերիմենտալ մեծ դժվարությունների հետ։

Օգտագործելով պղինձի շատ բարակ շերտերում նեյտրալ կոմպոնենտի կողմից ծնված բացասական լիցք ունեցող մասնիկները, որոնք ծնվել են միաճառագայթ և բազմաճառագայթ աստղերում, ցույց է տրված, որ միաճառագայթ աստղերում ծնված մասնիկների զգալի մասը կազմում են հետադարձ պրոտոններ, ի տարբերություն բազմաճառագայթ աստղերի, որտեղ ծնվում են π-մեզոններ։

Հետադարձ պրոտոնները կազմում են նեյտրալ կոմպոնենտի կողմից ծնված բացասական լիցք ունեցող բոլոր մասնիկների մոտ 15%-ը, երբ գեներատորի (կապար) հաստությունը տատանվում է 10—18 սմ սահմաններում։

Հետադարձ պրոտոնների արձանագրման հաճախականությունը կազմում է 0,017±0,0028 մասնիկ/ժամ գեներատորի նույն հաստության համար։

Հետագայում մասսպեկտրոմետրի և հնգաշերտ հարաբերական հաշվիչի միջոցով կատարված իոնիզացիոն չափումներով, ցույց է տրված, որ միաճառագայթ աստղերի դեպքում բացասական լիցք ունեցող մասնիկները բաղկացած են տարբեր իոնիզացիոն հատկություն ունեցող երկու խումբ մասնիկներից, որոնցից առաջինները ունեն π-մեզոնին համապատասխանող իոնիզացիոն հատկություն, իսկ երկրորդ խումբը՝ պրոտոնի մասսա ունեցող մասնիկների իոնիզացիոն հատկություն։

Բազմաճառագայթ աստղերում ծնված բացասական մասնիկներն օժտված են π-մեզոններին համապատասխանող իոնիզացիոն հատկությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камалян В. Ш.* ДАН, т. 95, № 6, (1954).
2. *Хримян А. В.* Изв. АН СССР, сер., физ., т. 13, № 6 (1955).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

Э. Г. Мирзабекян

Сравнение методов исследования поляризации радиоизлучения космических источников

Разработка методов исследовиния степени поляризации радиоизлучения космических источников является актуальной задачей, так как результаты поляризационных измерений могут дать ответ на многие вопросы, стоящие перед радиоастрономией. В частности, данные о степени поляризации радиоизлучения позволяют судить о магнитных полях излучающих объектов и магнитных полях в среде, через которую распространяется это излучение. В литературе совершенно нет данных о степени и характере поляризации радиоизлучения космических источников в 3-сантиметровом диапазоне длин волн. Между тем наряду с изучением поляризации в диапазоне более длинных волн исследование степени поляризации радиоизлучения в 3-сантиметровом диапазоне волн может дать ценные результаты. В самом деле, рассмотрение влияния постоянного магнитного поля на распространение радиоволн показывает [1], что это влияние характеризуется отношением

$$U=\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2=\frac{e^2H_0^2}{m^2c^2\omega^2},$$

где ω_H — гироскопическая частота,
ω — радиочастота,
H_0 — постоянное внешнее магнитное поле.

В солнечных пятнах, где H_0 порядка нескольких тысяч эрстед, гироскопическая частота $\omega_H \simeq 10^{10}_{\text{гц}}$, т. е. лежит в сантиметровом диапазоне длин волн. Таким образом, влияние магнитного поля пятен может быть существенно для 3-сантиметрового диапазона радиоволн. Исследование поляризации радиоизлучения в трехсантиметровом диапазоне представляет интерес и для других объектов, у которых поля значительно слабее, но где при наблюдении с помощью установок, имеющих достаточно высокую чувствительность, можно обнаружить слабые степени поляризации.

Разработанный нами поляризационный радиометр [2, 3] является, по-видимому, первой поляризационной установкой для измерения степени поляризации радиоизлучения на волне 3,2 *см*, поскольку до сих пор подобные установки в литературе описаны не были. В нашей статье [3] подробно был описан разработанный метод исследования поляризации радиоизлучения и были указаны возможности поляризационного радиометра.

Из данных измерений поляризации радиоизлучения космических источников, проведенных с помощью поляризационного радиометра, можно получить ряд сведений, к числу которых относятся сведения:

1. О координатах источников поляризованного излучения.

2. О магнитных полях солнечных пятен и общем магнитном поле Солнца.

3. О зависимости степени и характера поляризации радиоизлучения от развития солнечных пятен.

4. О направленности поляризованного излучения солнечных пятен. Наблюдая изменение характера поляризации радиоизлучения при движении пятна по солнечному диску, можно определить направленность поляризованного излучения. Данные о направленности поляризованного радиоизлучения на волне 3,2 *см* позволяют судить об условиях распространения радиоволн данного диапазона в солнечной атмосфере. Эти данные могут быть полезными при оценках тех или иных параметров солнечной атмосферы.

5. О градиентах и конфигурациях магнитных полей. Как известно, радиоизлучение Солнца в 3-сантиметровом диапазоне волн идет из слоев более глубоких, чем излучение метрового и дециметрового диапазонов. Поэтому результаты поляризационных измерений сантиметрового диапазона дают сведения о магнитных полях более глубоких слоев солнечной атмосферы.

Таким образом, из сравнения результатов поляризационных измерений на волнах различной длины можно получить сведения о конфигурациях и градиентах магнитных полей солнечных пятен.

6. О механизме „всплесков" радиоизлучения Солнца. Данные измерений степени и характера поляризации „всплесков" радиоизлучения Солнца будут способствовать выяснению вопроса о происхождении таких всплесков.

7. О магнитных полях дискретных источников радиоизлучения. Как известно, радиоизлучение туманностей заставило высказать предложение [4—6] о наличии в них релятивистских электронов, движущихся в магнитных полях. Для выяснения роли излучения релятивистских электронов в туманностях большое значение имеет изучение поляризации радиоизлучения. В работе Гарибяна и Гольдмана [7] показано, что степень поляризации излучения слабо зависит от вида спектра. Если в радиоизлучении некоторых туманностей основной вклад вносят релятивистские электроны, движущиеся в магнитных полях, то следует ожидать, что степень поляризации радиоизлучения будет такого же порядка как и излучения в оптической области.

Данные о поляризации радиоизлучения дискретных источников дадут сведения о магнитных полях в областях, из которых исходит излучение. Эти сведения могут оказаться важными и с точки зрения проблемы происхождения космических лучей, так как многие гипотезы о происхождении космических лучей связываются с наличием магнитных полей, необходимых для ускорения частиц космического излучения.

В литературе имеется ряд работ по измерению степени поляризации радиоизлучения космических источников. Подавляющее большинство этих работ относится к метровому диапазону волн. Авторы их [8—11] пользуются интерференционным методом измерений. Как известно, интерференционная методика наблюдений радиоизлучения космических источников нашла широкое применение в метровом диапазоне, где этот метод позволяет получать с антеннами сравнительно малых размеров достаточно узкие лепестки диаграммы направленности. При измерениях степени поляризации принимаемого радиоизлучения две поляризованные антенны интерферометра располагаются таким образом, чтобы они принимали волны взаимно перпендикулярной поляризации. При этом, если принимаемое излучение неполяризовано, то интерференционная картина не будет наблюдаться. Если же в принимаемом излучении есть поляризованная компонента, то при прохождении источника через диаграмму интерферометра будет наблюдаться интерференционная картина. В самом деле, неполяризованное излучение возбуждает в антеннах две некогерентные составляющие, и поэтому при прохождении источника через диаграмму направленности интерферометра, когда периодически меняется разность хода в двух антеннах, интерференция не наблюдается. С другой стороны, поляризованное излучение возбуждает в антеннах когерентные колебания, и поэтому при изменении разности хода наблюдается периодическое изменение интерференционной картины. Изменяя ориентировку антенн, по наблюдению глубины модуляции интерференционной картины, можно в некоторых частных случаях исследовать характер поляризации. Такой же метод исследования поляризации применяется в более совершенном интерферометре, осуществленном Райлем [12]. В этом интерферометре периодическим введением в одно из плеч интерферометра отрезка фидера длиной $\frac{\lambda}{2}$ осуществляется „качание" диаграммы. При этом диаграмма в пространстве смещается так, что максимумы и минимумы периодически меняются местами, и на выходе появляется периодический сигнал, пропорциональный (при соответствующих соотношениях угловых размеров лепестков и источника) разности мощностей фона и источника.

Единственной описанной в литературе установкой, предназначенной для измерения степени поляризации радиоизлучения Солнца в сантиметровом диапазоне волн, является установка Ковингтона [13] на длине волны 10,7 *см*. Установка эта представляет собой обычный модуляционный радиометр с параболическим зеркалом (диаметр Ф = =122 *см*), впереди которого расположена сетка из металлических пластин. Расстояния между пластинками этой сетки подобраны так, чтобы между двумя взаимно-перпендикулярными компонентами плоской волны, прошедшей через такую сетку, создавался сдвиг фаз, равный 90°. Иначе говоря, эта сетка была аналогом „пластинки $\frac{\lambda}{4}$“. Циркулярно-поляризованная компонента принимаемого излучения, пройдя через такую „пластинку $\frac{\lambda}{4}$“, оказывается линейно-поляризованной под углом $+45°$ или $-45°$ к осям пластинки, в зависимости от знака вращения. Помещенный в фокусе зеркала в качестве облучателя диполь перекидывался через каждые 30 *сек* на 90° и ориентировался вдоль этих двух взаимно перпендикулярных направлений. Таким образом, в одном положении диполя принималось неполяризованное излучение и компонента, поляризованная по левому кругу, в другом—неполяризованное излучение и компонента, поляризованная по правому кругу. Разность показаний выходного прибора при двух положениях диполя была пропорциональна разности интенсивностей двух компонент циркулярно-поляризованного излучения.

Проведем сравнение вышеописанных методов с новым методом [2, 3] исследования поляризации радиоизлучения при помощи поляризационного радиометра на длине волны $\lambda = 3.2$ *см*.

I. При поляризационных измерениях степени поляризации радиоизлучения Солнца методом Ковингтона происходит модуляция всего принимаемого радиоизлучения, т. е. вместе с модуляцией, подлежащей измерению слабой поляризованной компоненты, модулируется и сильный неполяризованный фон. Ясно, что ошибка измерений поляризованной компоненты при таком методе — порядка флуктуаций фона. Как показывают многочисленные измерения эти флуктуации— порядка 2% (а в случае активного Солнца, значительно больше).

Наличие большого сигнала от всего Солнца не дает возможности Ковингтону работать при высокой чувствительности аппаратуры.

Поляризационный радиометр, не давая модуляции неполяризованного фона, свободен от этих недостатков.

II. Как указывает Ковингтон [14], вследствие несовершенства аппаратуры и методики, в приемник его установки просачивалось 2% мощности излучения с поляризацией обратного направления. Это просачивание обусловлено использованием диполя и металлической сетки.

В поляризационном радиометре ошибка такого рода вообще исключена.

Таким образом, даже без учета паразитных эффектов иного характера — интерференционного эффекта, флуктуаций коэффициента усиления и т. д.—чувствительность установки Ковингтона к поляризованному излучению Солнца, т. е. минимально различимая интенсивность поляризованного радиоизлучения Солнца на фоне неполяризованного его излучения, составляет 2% от общей интенсивности.

Экспериментально определенная, с помощью „креста поглотителей“, чувствительность нашей установки к поляризованному излучению по температуре антенны равна

$$\delta T_a = 1^\circ K.$$

При поляризационных измерениях по Солнцу эта чувствительность несколько ухудшается, ввиду увеличения шумфактора и появления некоторых паразитных эффектов.

Фактически она в худших случаях оказалась равной на фоне Солнца

$$\delta T_a' = 2^\circ K.$$

Это составляет примерно 0,03% от температуры антенны при приеме общего радиоизлучения Солнца (температура антенны при приеме общего радиоизлучения Солнца $\simeq 6000^\circ K$). Итак, чувствительность нашего поляризационного радиометра к поляризованной компоненте радиоизлучения Солнца выше чувствительности единственной известной из литературы поляризационной установки на волне 10,7 *см* примерно в 50 раз.

III. Как указывает Ковингтон [14], его метод не позволяет произвести полный анализ поляризации принимаемого радиоизлучения. В частности, он не позволяет отличить линейную поляризацию от эллиптической. При наличии эллиптической поляризации интенсивность и эллиптичность этой поляризованной компоненты не могут быть определены. Фактически его метод пригоден только для измерения излучения с круговой поляризацией.

Как указывалось в статье [3], поляризационный радиометр позволяет производить полный анализ поляризации принимаемого радиоизлучения.

IV. Ковингтоном совершенно не рассматривается паразитный эффект, могущий быть вызванным поворотом диаграммы направленности антенны в пространстве при перекидке диполя. В самом деле, диаграммы направленности диполя, применяемого Ковингтоном в качестве облучателя, в направлениях вдоль диполя и поперек его различны. Вследствие этого диаграмма направленности самой антенны в *E*- и *H*-плоскостях не одинаковы. При перекидке диполя на 90° вся диаграмма направленности вместе с ним поворачивается на 90°, что может привести к изменению интенсивности принимаемого излучения.

V. Разработанный нами метод поляризационной модуляции должен дать по сравнению с обычными радиометрами (в том числе и радиометром Ковингтона) особые преимущества при измерении поляризованных сигналов малой интенсивности.

В случае сигналов малой интенсивности в обычном радиометре сравнивается низкая температура антенны с гораздо более высокой температурой эквивалента, и вследствие большой разности температур существенные ошибки вносит непостоянство коэффициента усиления.

В самом деле, выходной уровень обычного радиометра пропорционален величине:

$$\Delta Tn = (T_э - T_c) \cdot n,$$

где $T_э$ — температура эквивалента, T_c — температура сигнала, а n — коэффициент усиления аппаратуры. При изменении коэффициента усиления на dn выходной уровень изменяется на $(T_э - T_c)\,dn$, что может быть принято, ошибочно, за изменение сигнала на dT_c, т. е.

$$(T_э - T_c)\,dn = n \cdot dT_c.$$

Отсюда относительная ошибка в определении температуры сигнала равна

$$\frac{dT_c}{T_c} = \left(\frac{T_э}{T_c} - 1\right)\frac{dn}{n}.$$

При измерениях сигналов малой интенсивности фактор $\frac{T_э}{T_c} - 1 \gg 1$, и поэтому незначительные изменения коэффициента усиления могут вызвать большую относительную ошибку в измерении температуры сигнала.

При $T_э \simeq T_c$, т. е. при малых значениях ΔT, можно достигнуть значительного уменьшения влияния непостоянства коэффициента усиления.

В поляризационном радиометре

$$\Delta T = [(T_ф + T_c) - T_ф] = T_c,$$

где $T_ф$ — температура неполяризованного фона; T_c — температура поляризованного сигнала.

Таким образом, в поляризационном радиометре, чем меньше интенсивность измеряемого поляризованного излучения, тем слабее влияние флуктуаций коэффициента усиления.

VI. В амплитудном радиометре ФИАН'а [15] применялся камертонный модулятор, который имеет некоторые преимущества по сравнению с ранее применявшимися модуляторами. Но этот способ модуляции в том виде, в каком он применялся в указанном радиометре, имеет ряд недостатков, к которым относятся следующие:

а) Глубина модуляции сигнала зависит от амплитуды колебания ножек камертона, к которым прикреплены находящиеся в волноводе поглощающие пластинки. Эта амплитуда зависит от режима работы камертонного генератора и меняется при изменении этого режима. Изменение же глубины модуляции сигнала, конечно, вызывает паразитное изменение показаний на выходе радиометра.

б) Заметная зависимость формы кривой модуляции сигнала от амплитуды колебания поглощающих пластинок. При большой глубине модуляции форма кривой модуляции сильно искажена. Это ведет к необходимости компромиссного решения, при котором чувствительность радиометра несколько понижается. Кроме того, изменения формы кривой модуляции в ходе измерений вследствие изменений амплитуды колебания камертона также приводят к паразитным изменениям показаний на выходе.

в) Коэффициенты поглощения и отражения поглощающих пластинок модулятора сильно зависят от температуры пластинок, т. е. температуры окружающего воздуха. Еще резче эти величины зависят от влажности. При изменении же этих величин меняется глубина модуляции сигнала и величина интерференционной ошибки измерений. Так как камертонный модулятор находится на антенне на открытом воздухе, где температура и влажность могут меняться в значительных пределах, то ошибки измерений, вызванные этими паразитными эффектами, могут быть относительно большими.

г) Выходной уровень амплитудного радиометра, как указывалось выше, пропорционален разности

$$\Delta T = T_c - T_э,$$

где T_c — температура сигнала, а $T_э$ — температура эквивалента, т. е. температура поглощающих пластинок модулятора.

При изменении температуры окружающего воздуха меняется и температура поглощающих пластинок — $T_э$, что вызывает паразитное изменение разности ΔT. Таким образом, ошибка в измерении температуры сигнала, вызванная только этим эффектом, порядка изменения температуры окружающего воздуха. Наша же установка, в которой применен новый модулятор — „поляризационный модулятор", при поляризационных измерениях лишена недостатков, перечисленных в пунктах а) — г), ограничивающих чувствительность установки и вносящих ошибки в измерения.

В самом деле, как указывалось выше, при поляризационной модуляции:

α) глубина модуляции равна единице;

β) кривая модуляции, если мотор модулятора работает синхронно, всегда синусоидальна;

γ) так как поглощающих пластинок при поляризационных измерениях в высокочастотном тракте нет, наша установка лишена недостатков отмеченных в пунктах в) и г).

Более того, поляризационный модулятор можно рекомендовать и для применения в обычных амплитудных радиометрах с поляризованными облучателями, запитываемыми прямоугольным волноводом. При этом в таких радиометрах волноводный тракт с обеих сторон от модулятора должен иметь плавные переходы: до модулятора—с прямоугольного на цилиндрический волновод, после—с цилиндрического на прямоугольный. В цилиндрической части таких плавных переходов должны быть помещены поглощающие пластинки вдоль по диаметру, параллельному широкой стенке прямоугольного волновода. Такой способ модуляции, исключающий некоторые недостатки, отмеченные выше, делает целесообразным применение нового поляризационного модулятора и в обычных амплитудных радиометрах.

VII. Другим возможным вариантом решения поставленной задачи,—измерения поляризации радиоизлучения в трехсантиметровом диапазоне волн,—является использование интерференционного метода. Практически, обычные поляризационные интерференционные установки позволяют обнаруживать поляризованную компоненту только в тех случаях, когда интенсивность ее превышает 2—3% от общей интенсивности неполяризованного фона.

Описанный в литературе [12] новый радиоинтерферометр с качающейся диаграммой, предназначенный для измерений в метровом диапазоне волн, может быть также использован для измерения степени поляризации радиоизлучения. Имея ряд преимуществ по сравнению с обычной интерференционной методикой, эта методика при измерениях степени поляризации радиоизлучения имеет ряд недостатков, к числу которых относятся:

1) паразитная модуляция сигнала за счет изменения импедансов антенн при переключениях;

2) необходимость каждый раз учитывать соотношения угловых размеров источника и лепестков;

3) паразитная модуляция за счет краев излучающего объекта;

4) одновременная модуляция от каждой области, в общем случае, с произвольной фазой, при наличии более одной области поляризованного излучения, вследствие чего происходит резкое замазывание интерференционной картины;

5) необходимость частой тщательной фазовой калибровки плеч интерферометра;

6) измерения степени поляризации при помощи этой методики фактически пригодны только для циркулярно-поляризованной компоненты; эти измерения не позволяют произвести полный анализ поляризации принимаемого радиоизлучения: различить линейную от эллиптической поляризации, при наличии эллиптической поляризации—определить эксцентриситет эллипса поляризации;

7) взаимное просачивание в приемник циркулярно-поляризованной компоненты противоположного знака вращения;

8) паразитная модуляция относительно сильного неполяризованного фона: в два взаимно-перпендикулярных диполя просачиваются когерентные компоненты неполяризованного фона, которые могут дать, в случае сильного фона, заметную интерференцию.

Кроме перечисленных недостатков, связанных с методикой измерений, использование интерференционного метода с качающейся диаграммой в 3-сантиметровом диапазоне волн натолкнулось бы на ряд серьезных технических трудностей. Требования к точности сохранения параллельности электрических осей каждой антенны интерферометра настолько жестки, что практически возможно сделать только неподвижные антенны, не позволяющие вести наблюдения с сопровождением или наблюдения не в меридиане. Весьма жестки требования, обеспечивающие постоянство разности фаз между плечами интерферометра. Так, изменения вследствие температурного расширения длины волноводов, соединяющих две интерференционные антенны, могут внести ощутимую фазовую расстройку.

Вообще, если применение интерференционной методики, позволяющей с антеннами сравнительно малых размеров решать ряд радиоастрономических задач по изучению радиоизлучения в метровом диапазоне волн, для решения которых методом „карандашного пучка“ (одна антенна с отражителем в виде параболоида вращения) необходимы были бы антенны громоздких размеров, вполне оправдано, то в сантиметровом диапазоне этого сказать нельзя, так как значительное уменьшение длины волны принимаемого излучения делает более целесообразным применение метода „карандашного пучка“.

Особые преимущества имеет метод „карандашного пучка“ при определении координат излучающих объектов.

В случае создания поляризационных интерференционных установок на волне 3,2 *см* с качающейся диаграммой эти установки, вследствие ряда вышеуказанных недостатков, по нашему мнению, не смогут пока заменить поляризационных радиометров и в лучшем случае будут служить необходимым дополнением к ним.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступило 20 XI 1956

Է. Հ. Միրզաբեկյան

ՌԱԴԻՈՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԲԵՎԵՌԱՑՄԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում բերված է կոսմիկական աղբյուրների ռադիոճառագայթման բևեռացման հետազոտության՝ հեղինակի կողմից մշակված մեթոդի համեմատությունը նախկինում հայտնի մեթոդների հետ։ Ցույց է տրված, որ նոր մեթոդն ունի մի շարք էական առավելություններ, որոնց թվին են պատկանում՝ ռադիոճառագայթման չբևեռացված ֆոնի չեզոքացումը, ռադիոճառագայթման բևեռացման բնույթի լրիվ վերլուծության հնարավորությունը, փոքր ինտենսիվության բևեռացված ճառագայթման ժամանակ ընդունիչի ուժեղացման գործակցի ֆլյուկտուացիաների ազդեցության զգալի փոքրացումը, նոր մոդուլյատորի կիրառման շնորհիվ միավոր խորության և սինուսոիդալ ձև ունեցող մոդուլյացիայի իրականացումը, ռադիոմետրի համեմատաբար ճշգրիտ բացարձակ կալիբրովկան։

Նոր մեթոդի այդ բոլոր առավելությունները թույլ են տալիս ստեղծել նոր սարքավորում՝ բևեռացման ռադիոմետր, որը, նախկին սարքավորումների համեմատությամբ, ունի զգալիորեն ավելի մեծ զգայնություն։

Մասնավորապես, բևեռացման ռադիոմետրի զգայնությունը Արեգակի ռադիոճառագայթման բևեռացված բաղադրիչի նկատմամբ մոտ հիսուն անգամ բարձր է գրականության մեջ հայտնի միակ 10.7 սմ ալիքի երկարության համար կառուցված բևեռացման սարքավորման զգայնությունից։ Բևեռացման

ռադիոմետրի միջոցով հնարավոր է հայտնաբերել և չափել Արեգակի ռադիոճառագայթման բևեռացված բաղադրիչը, եթե նրա ինտենսիվությունը կազմում է ընդհանուր ինտենսիվության ավելի քան 0.03%-ը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л.* Распространение радиоволн.
2. *Кайдановский Н. Л., Мирзабекян Э. Г., Хайкин С. Э.* Труды V совещания по вопросам космогонии. Изд. АН СССР, (1956).
3. *Мирзабекян Э. Г.* Сообщения Бюраканской обсерватории. XIX (1956).
4. *Гинзбург В. Л.* ДАН СССР. **76**, 376 (1951).
5. *Гетманцев Г. Г.* ДАН СССР. **83**, 557 (1952).
6. *Шкловский И. С.* Астрономич. журнал, **30**. 1 (1953).
7. *Гарибян Г. М., Гольдман.* Известия АН АрмССР, VII, 2, (1954).
8. *Ryle M. Vonberg D.* Proc. Roy. Soc: 193, 1032 (1948).
9. *Pane-Scott R., Little A.* Austr. Journ. Sci. Res. **4A**, 489—507 (1951).
10. *Payne-Scott R., Little A.* Austr. Journ. Sci. Res. **4A**, 508—525 (1952).
11. *Payne-Scott R., Little A.* Austr. Journ. Sci. Res. **5A**, 32—46 (1952).
12. *Ryle M.* Proc. Roy. Soc. **211A**, 351—375 (1952).
13. *Covington A.* Proc. Inst. Radio Eng., **37**, 4 (1949).
14. *Covington A.* Journ. Roy. Astron. Soc. Canada, **45**, 157—161 (1951).
15. *Кайдановский Н. Л., Турусбеков М. Т., Хайкин С. Э.* Труды V совещания по вопросам космогонии. Изд. АН СССР, (1956).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

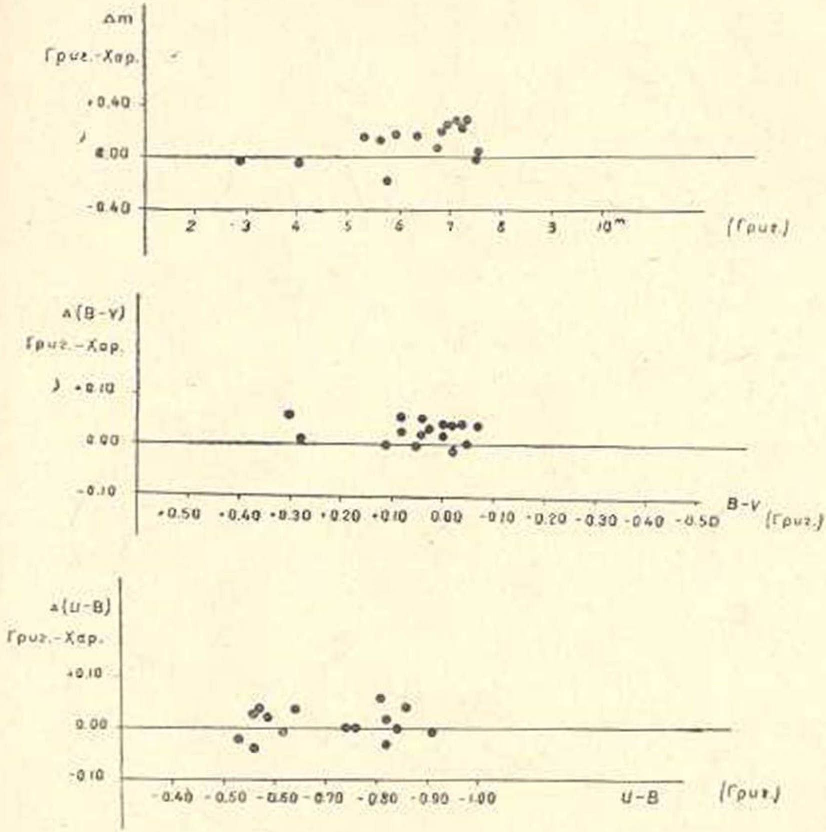
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

К. А. Григорян

Сравнение и обсуждение результатов электрофотометрических и электрополяриметрических наблюдений ассоциаций Цефей II и Персей II

В работах [1] и [2] приведены результаты определения фотоэлектрическим способом звездных величин и двух цветовых эквивалентов $B-V$ и $U-B$ для звезд ассоциации Персея II в системе U, B, V. На фиг. 1 приведено сопоставление наших определений звездных



Фиг. 1.

величин и цветовых эквивалентов с определениями Харриса. Как видно, согласие между этими величинами не вполне удовлетворительное. Действительно, между нашими определениями величин и цветового эквивалента $B-V$ и определениями Харриса существуют некоторые систематические расхождения. Для цвета $U—B$ систематических расхождений не замечается. Указанное расхождение между цветовыми эквивалентами $B—V$, вероятно, можно приписать ошибкам наблюдений Харриса, так как фундаментальность нашей системы для звездных величин и цветовых эквивалентов была показана [1]. Причина систематического расхождения между нашими результатами и результатами Харриса могла бы выясниться, если бы возможно было сравнить наблюдения Харриса и наблюдения Джонсона и Моргана между собой. К сожалению, такое сравнение невозможно произвести потому, что у этих авторов нет достаточного количества общих звезд.

Можно также сравнить между собой результаты поляриметрических наблюдений звезд ассоциаций Персей II и Цефей II произведенных нами, Хилтнером и Холлом. Графическое сопоставление наших определений степени поляризации и направления электрического вектора с результатами Хилтнера [3] показывает, что существует систематическое расхождение между нашими результатами и результатами Хилтнера. Это расхождение имеет тот же характер, что и расхождение между результатами Хилтнера и Холла. Между нашими же результатами и результатами Холла систематических расхождений нет. При этом нельзя не отметить довольно значительный разброс точек вокруг прямой, соответствующий равным значениям степени поляризации и электрических векторов на графике [3].

Изложенное, повидимому, говорит о том, что в наблюдениях Хилтнера есть какие-то систематические ошибки.

Приведенные графики [3] показывают, что в исследуемых областях направления электрических векторов не остаются постоянными и меняются от точки к точке. Заметим, что в некоторых случаях они почти перпендикулярны галактическому экватору.

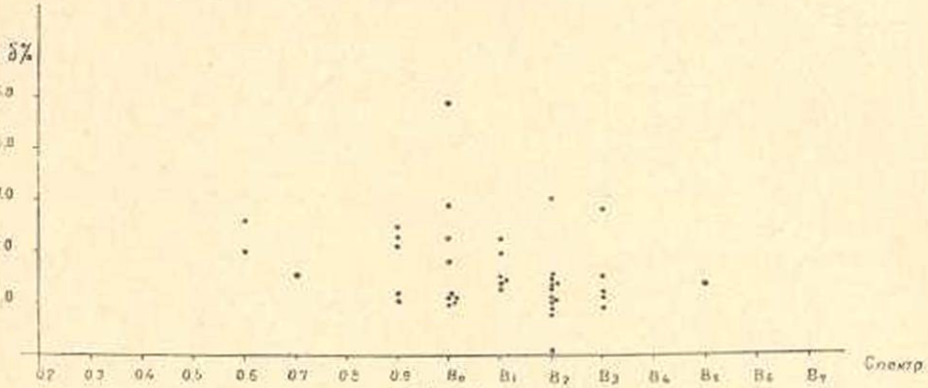
Этот результат, повидимому, можно объяснить неоднородностью магнитного поля в исследуемых областях. Этот вывод находится в согласии с результатами исследований Г. А. Шайна [4, 5].

Представляет определенный интерес изучение зависимости степени поляризации от спектральных типов исследуемых звезд. По Домбровскому степень поляризации звезд не зависит от спектрального типа. Как видно из фиг. 2 наши наблюдения подтверждают заключение указанного автора.

Зависимость степени поляризации от избытков цвета была рассмотрена Хилтнером, Холлом—Микеселем. Из анализа своих наблюдений они сделали вывод, что между этими величинами существует некоторая корреляция.

Известно [6], [7], что многоцветная колориметрия открывает принципиально новые пути для решения проблемы одновременного массового определения избытков цвета звезд и их спектральных типов, или, точнее, соответствующих спектру числовых индексов. При этом, применяя многоцветную электрофотометрию, всегда можно выделить звезды с большими избытками цвета.

Для определения точных избытков цвета и спектральных типов, в работе Никонова [7] на двухцветной диаграмме строятся линии соответствующие нормальным цветам в исследуемой спектральной области и линий растущего поглощения. Построение этих кривых для нашего случая не является необходимостью, так как все наши результаты были редуцированы к системе U, B, V.



Фиг. 2.

Редукция к системе Джонсона—Моргана была произведена на основе следующих соображений. Различие исходных фотометрических систем Джонсон—Моргана и нашей обусловлено различием эффективных длин волн соответствующих систем, поэтому, для перехода от одной системы к другой, следовало бы исходить из того, что цветовые эквиваленты в одной системе должны быть линейной функцией двух цветовых эквивалентов в другой системе:

$$CI_{12} = A \cdot CI'_{12} + B \cdot CI'_{23} + C. \tag{1}$$

Очевидно, что если для редукции используется формула типа (1), но без члена BCI'_{23}, то при условии, что значение B заметно отличается от нуля, использование формулы (1) может привести к неправильным результатам. Следует отметить, что если на двухцветной диаграмме, взятые для редкуции звезды расположены на одной прямой линии, или очень близко к ней, то обманчивым образом может получиться редкуционная формула, связывающая каждый из цветового эквивалента одной системы только с одним соответствующим цвету в другой системе.

На полученной нами двухцветной диаграмме точки для редукционных звезд расположены не на прямой. Поэтому появляется возможность определения коэффициентов в редукционной формуле вида (1).

После решения этих уравнений, для двух цветовых эквивалентов, мы получили редукционные формулы типа (1) где коэффициенты B очень близки к нулю. Таким образом в нашем случае возможно было использовать редукционные формулы приведенные в [1].

Поэтому определения избытков цвета в двух различных участках спектра, проведены с помощью следующих формул [6].

$$E^{(Q)}_{B-V} = (B-V) - 0{,}337Q + 0{,}009, \tag{2}$$

$$E^{(Q)}_{U-B} = E^{(Q)}_{B-V} \frac{E^{(Q)}_{B-V} - (B-V) + 0{,}337\,(U-B) - 0{,}009,}{0{,}337\,(B-V)} \tag{3}$$

где $B-V$, $U-B$ — цветовые эквиваленты, Q — параметр, зависящий от спектра и не зависящий от межзвездного поглощения. Далее уже не представляет трудностей определение средних расстояний ассоциаций, причем для коэффициента γ связывающего общее поглощение с избытками цвета по [8], [9] принято значение 3,5.

Используемые визуальные абсолютные величины этих же звезд в зависимости от класса светимости приведены в нашей работе [3].

Исходя из изложенного, для расстояния двух ассоциаций получим: $r_1 = 0{,}69$ кпс. (Цефей II), $r_2 = 0{,}42$ кпс. (Персей II).

Если принимать угловые размеры этих ассоциаций — 6,5—7°,0 (Цефей II) и 8,0—0,5° (Персей II) то для линейных размеров получим:

d_1 (по b) = 76 пс., d_2 (по. l) = 83 пс. (Цефей II)

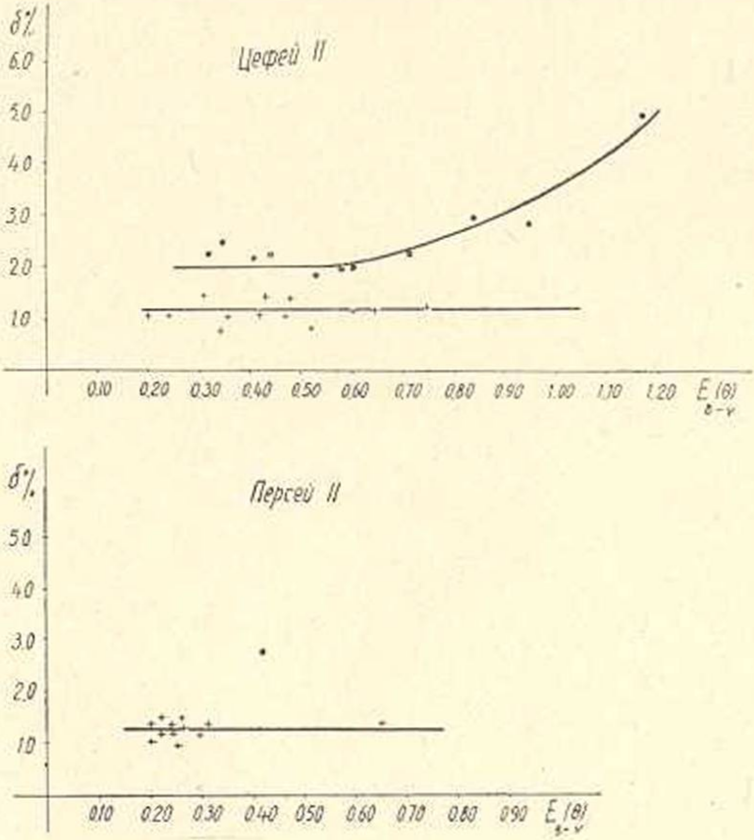
d_1' (по b) = 59 пс., d_2' (по. l) = 38 пс. (Персей II).

Сравнение этих данных для ассоциаций Цефей II и Персей II с результатами других авторов [10], [11] показывает таб. 1.

Таблица 1

Ассоциация	по b d_1 пс.	по d_2 пс.	r кпс.	Автор
Цефей II	80	70	0.63	Маркарян
"	151	100	0.72	Морган, Уитфорд, Коде
"	83	76	0.69	Григорян
Персей II	30	50	0.29	Маркарян
"	32	43	0.26	Морган, Уитфорд, Коде
"	38	59	0.42	Григорян

Рассмотрим, далее, зависимости степени поляризации от избытков цвета. Эти зависимости графически представлены на фиг. 3, 4. В ассоциации Цефей II, на диаграмме поляризации — избытка цвета, звезды, повидимому, разделяются на две группы по степеням поляризации. Это разделение наблюдается на обоих графиках, $E^{(Q)}_{B-V}$ и $E^{(Q)}_{U-B}$. Вассоциации Персей II не заметно подобного разделения. Исключением является звезда ζ Персея, степень поляризации которой заметно больше, чем у всех остальных. Наши поляриметрические результаты для звезд указанных ассоциаций сопоставлены также с избытками цвета



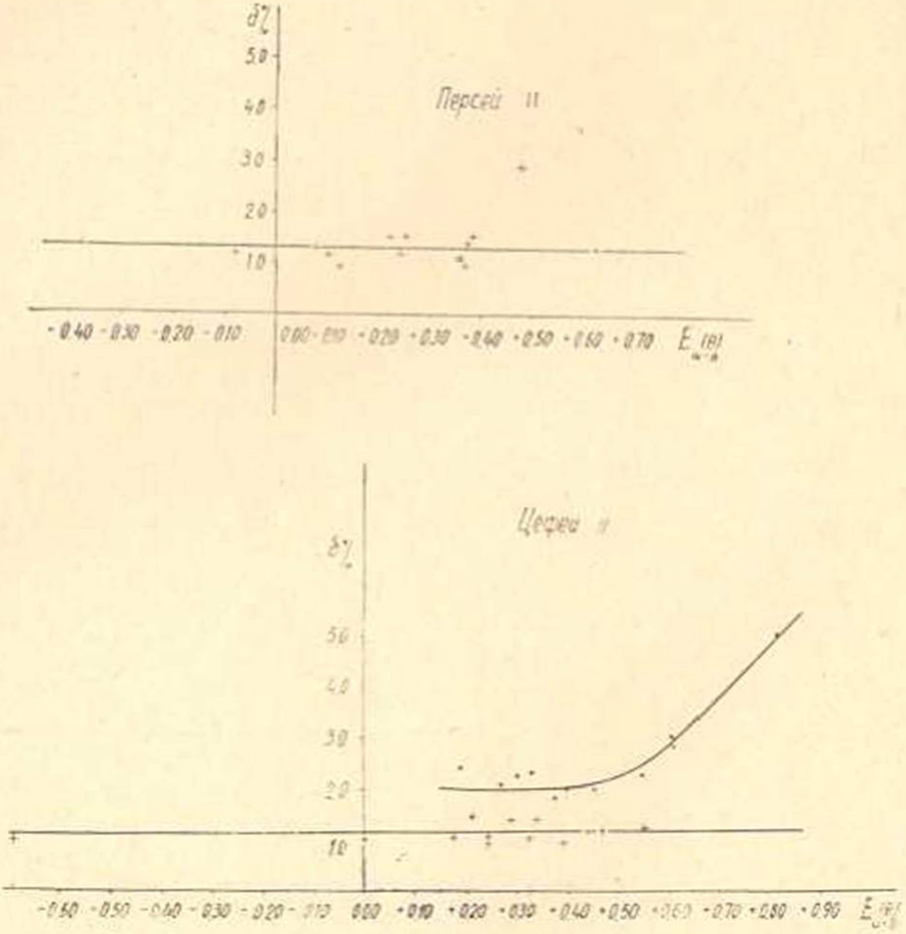
Фиг. 3.

из работы Стебинса и Уитфорда. Упомянутое разделение на две группы для ассоциаций Цефей II сохраняется и в этом случае (фиг. 5).

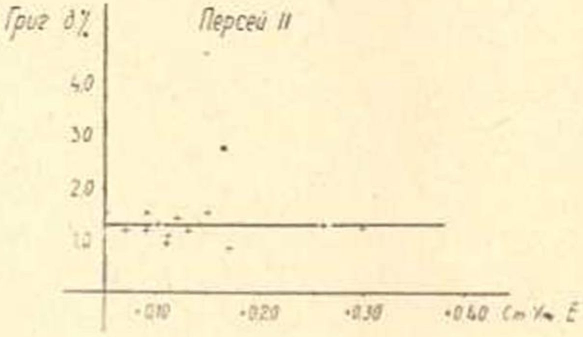
Рассмотрим этот вопрос более подробно. Для этого остановимся на зависимости степени поляризации от цветовых эквивалентов, исправленных за поглощение.

Фиг. 6 показывает, что разделение этих двух групп наблюдается и в этом случае. Для части звезд ассоциации Цефей II наблюдаются зависимости от их исправленных цветов. Из этого следует, что степень поляризации звездной группы в некоторой степени зависит от истинного цвета, т. е. имеет, повидимому, звездное или циркумзвездное происхождение.

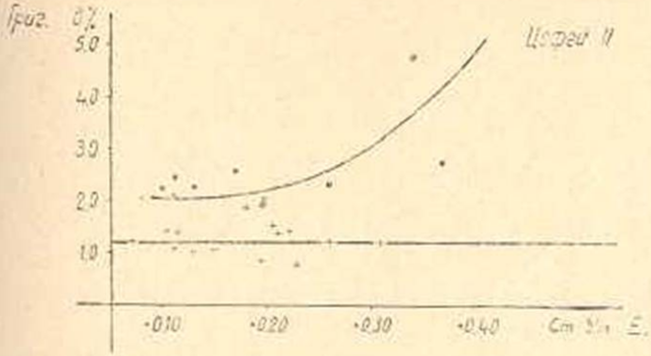
Аналогичную картину представляет собой фиг. 7 на которой степени поляризации, полученные Хилтнером и Холлом сопоставлены с полученными нами истинными цветами. Следует отметить, что и на этих графиках кривые имеют, начиная с некоторого значения $C_{осж}$ и


δ%
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
Персей II
-0.40 -0.30 -0.20 -0.10 0.00 +0.10 +0.20 +0.30 +0.40 +0.50 +0.60 +0.70
Цефей II
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
-0.60 -0.50 -0.40 -0.30 -0.20 -0.10 0.00 +0.10 +0.20 +0.30 +0.40 +0.50 +0.60 +0.70 +0.80 +0.90

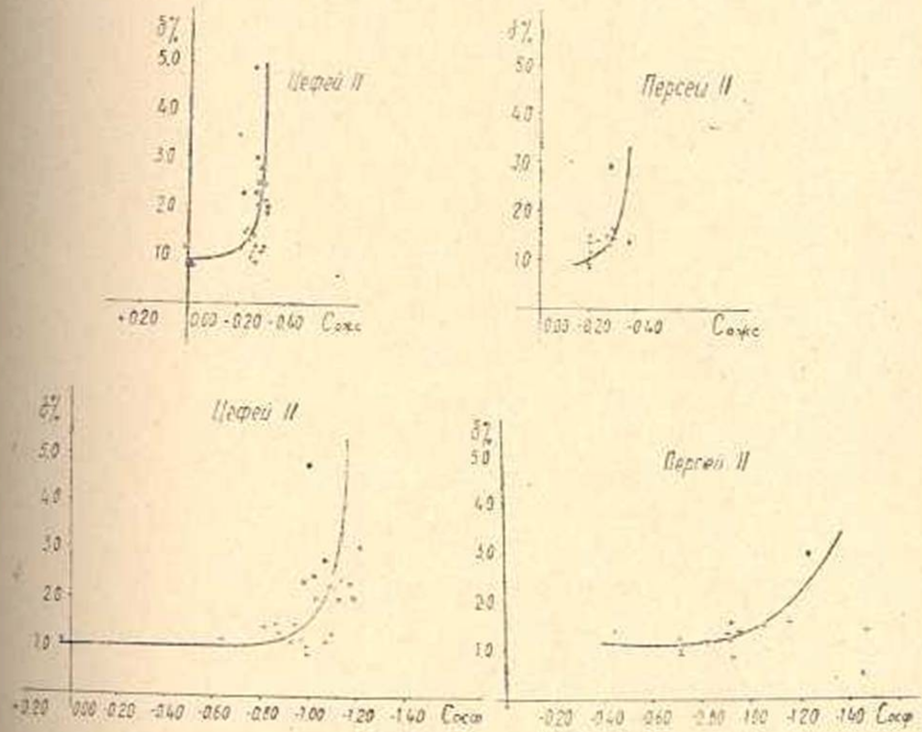
Фиг. 4.


Григ δ%
Персей II
4,0
3,0
2,0
1,0
+0.10
+0.20
+0.30
+0.40

Фиг. 5а.



Фиг. 5б.

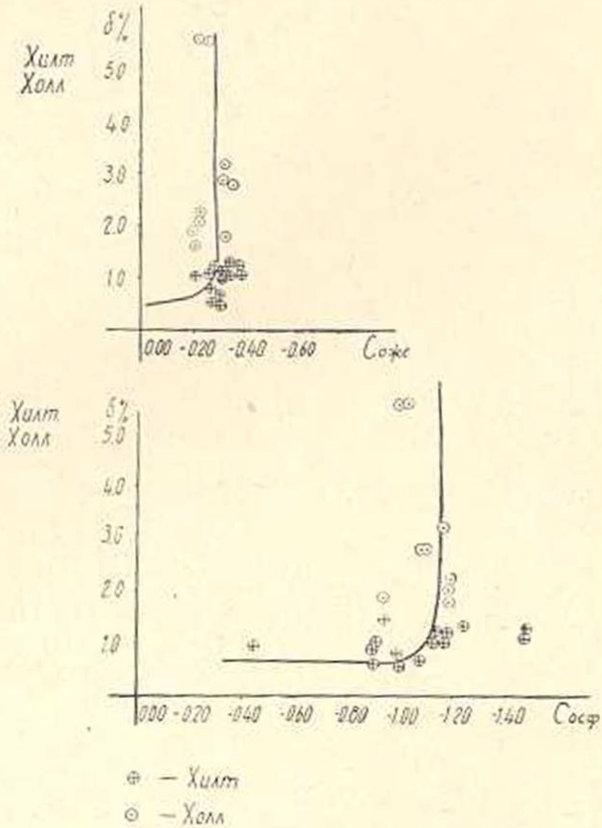


Фиг. 6.

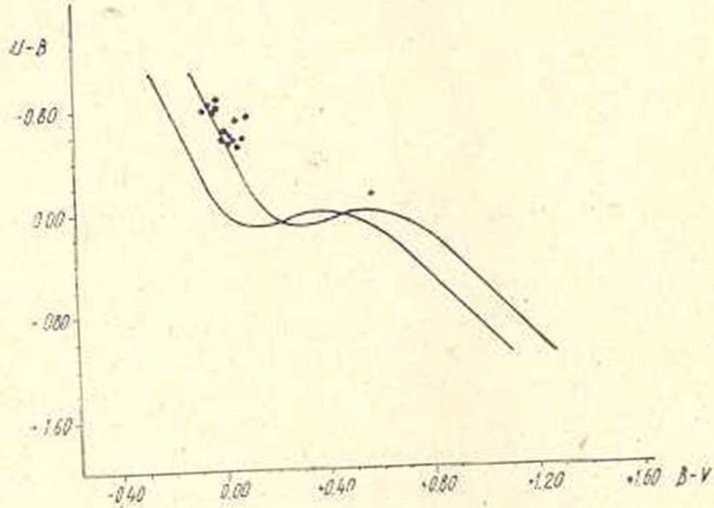
$C_{эфф.}$ очень крутой подъем, где в основном и происходит разделение на две группы.

На фиг. 8 показаны двухцветные диаграммы звезд исследуемых ассоциаций, причем на этих же фигурах дана зависимость между цветами для звезд свободных от межзвездного поглощения (сплош. линия). Приведенные фигуры дают некоторое представление о форме двухцветной диаграммы звездных ассоциаций Цефей II и Персей II, а также об избирательном поглощении в этих двух направлениях.

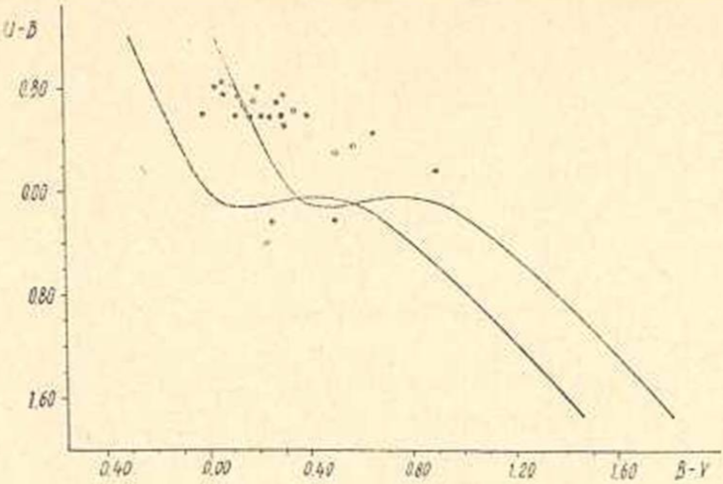
Значительный интерес представляет получение данных о распределении поглощающей материи в исследуемых ассоциациях. Приве-


δ%
Хилт
Холл
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.00 -0.20 -0.40 -0.60
Хилт
Холл
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.00 -0.20 -0.40 -0.60 -0.80 -1.00 -1.20 -1.40
⊕ — Хилт
⊙ — Холл

Фиг. 7.

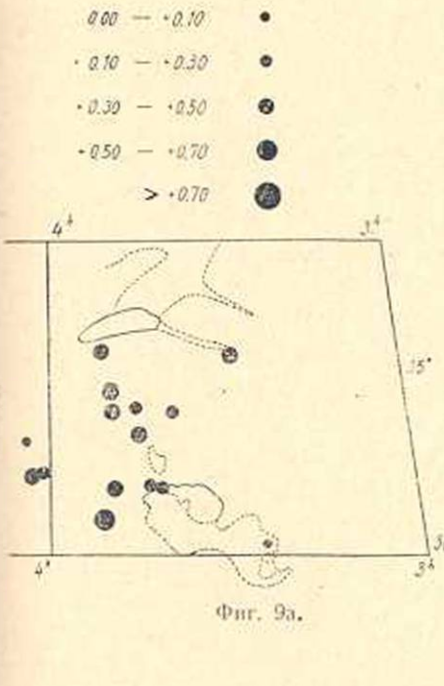

U-B
-0.80
0.00
0.80
1.60
-0.40
0.00
+0.40
+0.80
+1.20
+1.60
B-V

Фиг. 8а.

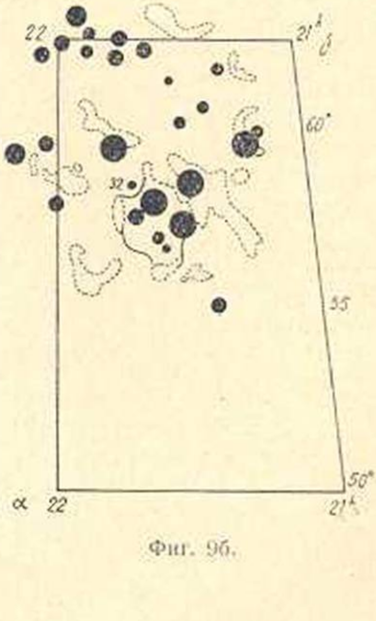


Фиг. 8б.

денные нами карты (фиг. 9) показывают распределение избытков цвета в экваториальной системе координат и распределение светлых и темных туманностей взятых из атласа Бечвара [12]. Избытки цвета, относящиеся к звездам ассоциаций, нанесены кружками различного раз-



Фиг. 9а.



Фиг. 9б.

мера и заполнения, диаметры которых пропорциальны наблюдаемым избыткам цвета.

Приведенные карты показывают, что наблюдается некоторая корреляция между избытками цвета звезд и расположением темных туманностей.

Бюраканская астрофизическая обсерватория АН Армянской ССР

Поступило 30 I 1957

Կ. Հ. Գրիգորյան

ՑԵՖԵՅ II ԵՎ ՊԵՐՍԵՅ II ԱՍՏՂԱՍՓՅՈՒՌՆԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐԱԼՈՒՍԱՉԱՓԱԿԱՆ ԴԻՏՈՒՄՆԵՐԻ ՔՆՆԱՐԿՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ կատարված են համեմատություններ մեր էլեկտրալուսաչափական և էլեկտրաբևեռաչափական դիտումների և Հարիսի լուսաչափական ու Հիլտների և Հոլի բևեռաչափական դիտումների միջև։

Համեմատությունները բերված են 1-ին պատկերի վրա և (3) հոդվածում։ Քննարկման համար անհրաժեշտ դիտողական արդյունքները հրատարակված են [1, 3]։ Անհրաժեշտ գույնի ավելցուկների հաշվումները կատարված են եղել հայտնի մեթոդով [6]։

Աշխատության մեջ բերված են այդ աստղասփյուռների համար մեր հաշված հեռավորությունները և չափերը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян К. А.* Сооб. Бюр. Обсер., XXII, 42, 1957.
2. *Harris B.* Ap. J. 123, 371, 1956.
3. *Григорян К. А.* Сооб. Бюр. Обсер., XXII, 55, 1957.
4. *Шайн Г. А.* А. Ж. 32, 381, 1955.
5. *Шайн Г. А.* А. Ж. 32, 489, 1955.
6. *Iohnson H., Morgan W.* Ap. J. 117, 373, 1953.
7. *Никонов В. Б.* Изв. Крым. Астф. Обсер., XII, 1954
8. *Мельников О. А.* Труды ГАО 97, 1950.
9. *Iohnson H., Hiltner W.* Ap. J. 124, 367, 1956.
10. *Маркарян Б. Е.* ДАН Арм. ССР, XV, 1, 1952.
11. *Morgan W., Whiford A., Code A.* Ap. J. 118, 318, 1953.
12. *Becvar A.* Atlas Coeli skalnate Pleso, Praha, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Г. С. Григорян

К расчету безмоментных тонких железобетонных оболочек произвольного очертания с учетом ползучести бетона

В настоящей работе рассматривается вопрос о перераспределении усилий между бетоном и арматурными стержнями в железобетонных тонких безмоментных оболочках вследствие ползучести бетона и о его влиянии на перемещения и деформации срединной поверхности оболочки, в предположении, что распределение усилий в соответствующих упругих оболочках известно. Работа основывается на известной теории ползучести бетона, разработанной Н. Х. Арутюняном [1], и предпосылках теории упругих тонких безмоментных оболочек [2—5]. Задача об определении напряжений сводится к интегрированию двух самостоятельных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно первых производных по времени от напряжений в бетоне. В общем случае эти уравнения — однородные, полные, с переменными коэффициентами. Доказывается возможность представить их решения сходящимися степенными рядами.

В частном случае, когда оболочки армированы сетками с одинаковым относительным содержанием арматуры в обоих направлениях ($\mu_1=\mu_2$), задача сводится к интегрированию двух самостоятельных обыкновенных уравнений первого порядка. Вычислены функции влияния показывающие изменение напряжений в арматуре и бетоне сферической и параболической оболочек находящихся под воздействием вертикальной равномерно-распределенной нагрузки (собственный вес) при коэффициенте Пуассона $\nu=0{,}25$ и $\mu_1=\mu_2=0{,}5\%$. При $\nu=0$ функции влияния для напряжений в бетоне и арматуре, как и следовало ожидать, совпадают с таковыми полученными Н. Х. Арутюняном для железобетонных стоек при осевом сжатии (растяжении).

В конце вкратце рассмотрен также вопрос об определении влияния ползучести на перемещения и деформации срединной поверхности оболочки.

Влияние ползучести на напряженно-деформироранное состояние железобетонных оболочек с учетом неоднородности материала (бетон-сталь) рассматривается в настоящей работе, повидимому, впервые.

И. Е. Прокоповичем [6], на основе полубезмоментной теории цилиндрических оболочек В. З. Власова, рассмотрено влияние ползучести материала на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках, к которым, при определенных предположениях, могут быть отнесены и железобетонные оболочки.

1. Рассмотрим железобетонные тонкие оболочки произвольного очертания, постоянной толщины, армированные одной сеткой расположенной в срединной поверхности оболочки, или двумя сетками равноотстоящими от нее. Стержни арматурных сеток будем считать работающими только на растяжение и сжатие и направленными вдоль линий главных кривизн поверхностей в коих они расположены. Будем считать справедливой гипотезу о неизменяемости нормального элемента и допустимой предположение о безмоментной работе оболочки [2—5]. Арматуру будем считать подчиняющейся закону Гука, а бетон— обладающей ползучестью. Примем также, что параметры характеризующие ползучесть бетона не зависят от знака напряжений. Сцепление между арматурой и бетоном будем считать достаточным для обеспечения их совместной работы.

Компоненты напряжений в бетоне и арматуре, а также деформаций и перемещений оболочки, под воздействием не меняющейся во времени внешней нагрузки, будут функциями не только координат точек срединной поверхности, как это имеет место в упругих оболочках, но также возраста бетона в момент приложения внешней нагрузки и продолжительности действия последней.

За начало отсчета времени примем некоторый момент укладки бетона. Возраст бетона будем определять координатой τ, а момент времени для которого определяются напряжения и деформации— координатой t.

Придерживаясь теории ползучести бетона изложенной в работе [1] будем считать, что мера ползучести призматического бетонного бруса находящегося под воздействием осевой силы единичной интенсивности, приложенной в некотором возрасте τ, к моменту t выражается зависимостью:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right], \tag{1.1}$$

где

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0, \tag{1.2}$$

A_1, C_0, γ — параметры определяемые экспериментальным путем. Влияние старения бетона не будем принимать во внимание.

2. Как известно, безмоментные оболочки статически определимы в малом. Поэтому дифференциальные уравнения равновесия рассматриваемых оболочек не будут ничем отличаться от таковых для упругих безмоментных оболочек и, при отнесении срединной поверхности к линиям главных кривизн, будут иметь следующий известный вид [2—5]:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)+\frac{\partial A}{\partial\beta}S+\frac{\partial}{\partial\beta}(AS)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+ABq_1=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS)-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+ABq_2=0; \qquad (2.1)$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=q_n,$$

где: α, β и A, B — соответственно, криволинейные координаты точек и коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности;

T_1, T_2, S — нормальные и тангенциальные усилия отнесенные к единице длины дуги, соответственно, линий главных кривизн $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$ срединной поверхности;

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности;

q_1, q_2, q_n — проекции поверхностной нагрузки соответственно на касательную к линии $\alpha=\text{const}$, на касательную к линии $\beta=\text{const}$ и на нормаль к срединной поверхности.

В тех случаях, когда свободные члены q_1, q_2, q_n и граничные условия системы (2.1) не являются функциями от времени, тогда и усилия T_1, T_2, S не будут функциями от времени, и будем иметь

$$T_1=T_1(\alpha,\beta);$$
$$T_2=T_2(\alpha,\beta); \qquad (2.2)$$
$$S=S(\alpha,\beta).$$

При этом, T_1, T_2, S определяются решением соответствующей упруго-мгновенной задачи.

Приняв, что оболочка загружается в возрасте бетона $\tau=\tau_1$ и введя обозначения:

h — толщина оболочки;

$$\sigma_{a_1}(\tau_1,t,\alpha,\beta),\quad \sigma_{б_1}(\tau_1,t,\alpha,\beta),\quad \sigma_{a_2}(\tau_1,t,\alpha,\beta),$$
$$\sigma_{б_2}(\tau_1,t,\alpha,\beta),\quad \tau_{б_1}(\tau_1,t,\alpha,\beta)=\tau_{б_2}(\tau_1,t,\alpha,\beta),$$

соответственно,— нормальные напряжения в арматуре и бетоне и касательные напряжения в бетоне; μ_1, μ_2 — относительные содержания арматуры в сечениях $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$, можем написать следующие очевидные равенства

$$\mu_1 h\sigma_{a_1}+h\sigma_{б_1}=T_1{}^*,$$
$$\mu_2 h\sigma_{a_2}+h\sigma_{б_2}=T_2, \qquad (2.3)$$
$$h\tau_{б}=S.$$

3. Обозначив компоненты деформаций бетона, с учетом ползучести бетона, в общем случае объемного напряженного состояния через ε_1, ε_2, ε_3, ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}, пользуясь известными зависимостями свя-

* Здесь и в последующем, ради упрощения записи, аргументы, частично, или полностью, опускаем.

зывающими их с компонентами напряжений (см. [1], стр. 19), считая справедливыми приближенные равенства:

$$\varepsilon_3 = 0; \quad \omega_{13} = 0; \quad \omega_{23} = 0, \tag{3.1}$$

пренебрегая влиянием σ_z на ε_1 и ε_2, в соответствии с принятой гипотезой о недеформируемости нормального элемента оболочки, получаем следующие зависимости между остальными компонентами деформаций и напряжениями в бетоне:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_б}(\sigma_{б_1} - \nu\sigma_{б_2}) - \int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_1}(\tau) - \nu\sigma_{б_2}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_б}(\sigma_{б_2} - \nu\sigma_{б_1}) - \int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_2}(\tau) - \nu\sigma_{б_1}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau; \tag{3.2}$$

$$\omega_{12} = \omega = 2(1+\nu)\tau_б\left[\frac{1}{E_б} - \int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau\right].$$

Из сказанного выше следует, что, если имеет место (2.2), то касательные напряжения в бетоне не будут претерпевать изменений во времени. В настоящей работе будем органичиваться рассмотрением этого случая, что и учтено в третьем уравнении (3.2).

Используя обычные соотношения упругости при осевом растяжении-сжатии для арматурных стержней:

$$\varepsilon_{ak} = \frac{\sigma_{ak}}{E_a} \quad (k = 1, 2), \tag{3.3}$$

принимая, из условия совместной работы арматуры и бетона

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{ak} = \varepsilon_{бk} \quad (k = 1, 2), \tag{3.4}$$

используя первые два ур-ния (2.3) и (3.2), и введя обозначение

$$\frac{E_a}{E_б} = m, \tag{3.5}$$

можем написать:

$$T_1 - h(1+\mu_1 m)\sigma_{б_1} + \nu\mu_1 hm\sigma_{б_2} + \mu_1 hE_a\int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_1}(\tau) - \nu\sigma_{б_2}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau = 0;$$

$$(3.6)$$

$$T_2 - h(1+\mu_2 m)\sigma_{б_2} + \nu\mu_2 hm\sigma_{б_1} + \mu_2 hE_a\int\limits_{\tau_1}^{t}[\sigma_{б_2}(\tau) - \nu\sigma_{б_1}(\tau)]\frac{\partial C}{\partial \tau}d\tau = 0.$$

Дифференцируя (3.6) по t с учетом (1.1) получаем:

$$
\begin{aligned}
&-h(1+\mu_1 m)\sigma'_{\delta_1}+\nu\mu_1 hm\sigma'_{\delta_2}-\gamma\mu_1 hE_a\varphi(\sigma_{\delta_1}-\nu\sigma_{\delta_2})+\\
&+\gamma\mu_1 hE_a\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_{\delta_1}(\tau)-\nu\sigma_{\delta_2}(\tau)][\varphi'(\tau)+\gamma\varphi(\tau)]e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=0;\\
&-h(1+\mu_2 m)\sigma'_{\delta_2}+\nu\mu_2 hm\sigma'_{\delta_1}-\gamma\mu_2 hE_a\varphi(\sigma_{\delta_2}-\nu\sigma_{\delta_1})+\\
&+\gamma\mu_2 hE_a\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_{\delta_2}(\tau)-\nu\sigma_{\delta_1}(\tau)][\varphi'(\tau)+\gamma\varphi(\tau)]e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=0.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Умножая (3.6) на γ, складывая с (3.7), дифференцируя еще раз по t и внеся обозначения:

$$
\begin{aligned}
h(1+\mu_1 m)&=a_1; & h(1+\mu_2 m)&=a_2;\\
\nu\mu_1 hm&=b_1; & \nu\mu_2 mh&=b_2;\\
\mu_1 hE_a&=c_1; & \mu_2 hE_a&=c_2;\\
\frac{\partial\sigma_{\delta_1}}{\partial t}&=y; & \frac{\partial\sigma_{\delta_2}}{\partial t}&=z,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

получаем:

$$
\begin{aligned}
&b_1\frac{\partial z}{\partial t}+\gamma(b_1+\nu c_1\varphi)z-\gamma(a_1+c_1\varphi)y-a_1\frac{\partial y}{\partial t}=0;\\
&b_2\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma(b_2+\nu c_2\varphi)y-\gamma(a_2+c_2\varphi)z-a_2\frac{\partial z}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Систему (3.9) не трудно привести к виду:

$$
\begin{aligned}
&\left(b_2-\frac{a_1a_2}{b_1}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma\left[(b_2+\nu c_2\varphi)-(a_1+c_1\varphi)\frac{a_2}{b_1}\right]y+\\
&\qquad+\gamma\left[\frac{a_2}{b_1}(b_1+\nu c_1\varphi)-(a_2+c_2\varphi)\right]z=0;\\
&\left(b_1-\frac{a_1a_2}{b_2}\right)\frac{\partial z}{\partial t}+\gamma\left[(b_1+\nu c_1\varphi)-(a_2+c_2\varphi)\frac{a_1}{b_2}\right]z+\\
&\qquad+\gamma\left[\frac{a_1}{b_2}(b_2+\nu c_2\varphi)-(a_1+c_1\varphi)\right]y=0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Учитывая (1.2) и введя обозначения:

$$
\frac{\gamma}{b_2-\dfrac{a_1a_2}{b_1}}\left[(a_1+c_1C_0)\frac{a_2}{b_1}-(b_2+\nu c_2C_0)\right]=p_1;
$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_2 - \frac{a_1 a_2}{b_1}} \left(c_1 \frac{a_2}{b_1} - \nu c_2 \right) = q_1;$$

$$\frac{\gamma}{b_2 - \frac{a_1 a_2}{b_1}} \left[a_2 + C_0 c_2 - (b_1 + \nu C_0 c_1) \frac{a_2}{b_1} \right] = m_1;$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_2 - \frac{a_1 a_2}{b_1}} \left(c_2 - \frac{\nu C_0 a_2}{b_1} \right) = n_1;$$

$$\frac{\gamma}{b_1 - \frac{a_1 a_2}{b_2}} \left[(a_2 + c_2 C_0) \frac{a_1}{b_2} - (b_1 + \nu c_1 C_0) \right] = p_2;$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_1 - \frac{a_1 a_2}{b_2}} \left(\frac{c_2 a_1}{b_2} - \nu c_1 \right) = q_2;$$

$$\frac{\gamma}{b_1 - \frac{a_1 a_2}{b_2}} \left[a_1 + c_1 C_0 - (b_2 + \nu c_2 C_0) \frac{a_1}{b_2} \right] = m_2;$$

$$\frac{\gamma A_1}{b_1 - \frac{a_1 a_2}{b_2}} \left(c_1 - \frac{\nu a_1 c_2}{b_2} \right) = n_2,$$

перепишем (3.10) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \left(p_1 + \frac{q_1}{t} \right) y &= \left(m_1 + \frac{n_1}{t} \right) z; \\ \frac{\partial z}{a t} - \left(p_2 + \frac{q_2}{t} \right) z &= \left(m_2 + \frac{n_2}{t} \right] y, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где p_k, q_k, m_k, n_k $(k = 1, 2)$, как это видно из (3.11), не зависят от t.

Система (3.12) легко приводится к следующим двум самостоятельным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + M_1(t) \frac{\partial y}{\partial t} + N_1(t) y &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + M_2(t) \frac{\partial z}{\partial t} + N_2(t) z &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

В виду полной идентичности этих ур-ний займемся первым из них.

Переменные коэффициенты его имеют следующий вид:

$$M_1(t) = -\left[\left(p_1 + \frac{q_1}{t}\right) + \frac{\left(m_1 + \frac{n_1}{t}\right)\left(p_2 + \frac{q_2}{t^2}\right) - \frac{n_1}{t^2}}{m_1 + \frac{n_1}{t}}\right] =$$

$$= -(p_1 + p_2) - \frac{q_1 + q_2}{t} + \frac{n_1}{m_1 t^2} \frac{1}{1 + \frac{n_1}{m_1 t}}; \tag{3.14}$$

$$N_1(t) = \frac{p_1 + \frac{q_1}{t}}{m_1 + \frac{n_1}{t}}\left[\left(m_1 + \frac{n_1}{t}\right)\left(p_2 + \frac{q_2}{t}\right) - \frac{n_1}{t}\right] +$$

$$+ \left[\frac{q_1}{t^2} - \left(m_1 + \frac{n_1}{t}\right)\left(m_2 + \frac{n_2}{t}\right)\right] =$$

$$= (p_1 p_2 - m_1 m_2) + (p_1 q_2 + q_1 p_2 - m_1 n_2 - n_1 m_2)\frac{1}{t} +$$

$$+ \left(q_1 q_2 - n_1 n_2 - \frac{n_1 p_1}{m_1}\right)\frac{1}{t^2} +$$

$$+ \left(\frac{p_1 n_1}{m_1} - q_1\right)\frac{n_1}{m_1 t^3} - \left(\frac{p_1 n_1}{m_1} - q_1\right)\frac{n_1^2}{m_1^2 t^4} + \cdots$$

Введя новую независимую переменную подстановкой

$$x = \frac{1}{t}, \tag{3.15}$$

будем иметь

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -x^2 \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x^3 \frac{dy}{dx}. \tag{3.16}$$

Используя (3.14)—(3.16) перепишем первое из ур-ний (3.13) в следующем виде:

$$x^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\left[(p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2 - 2)x^2 -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{n_1}{m_1}\right)x^3 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2 x^4 - \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^3 x^5 + \cdots\right]\frac{\partial y}{\partial x} +$$

$$+ \left[(p_1 p_2 - m_1 m_2) + (p_1 q_2 - q_1 p_2 - m_1 n_2 - n_1 m_2)x +\right.$$

$$+ \left(q_1 q_2 - n_1 n_2 - \frac{n_1 p_1}{m_1}\right)x^2 +$$

$$+\left(\frac{p_1n_1}{m_1}-q_1\right)\frac{n_1}{m_1}x^3-\left(\frac{p_1n_1}{m_1}-q_1\right)\frac{n_1^2}{m_1^2}x^4+\cdots\Bigg]y=0. \qquad (3.17)$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+\frac{n_1}{m_1}x}=1-\frac{n_1}{m_1}x+\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2x^2-\cdots \qquad (3.18)$$

$$\left(0<x=\frac{1}{\tau_1}\right)$$

Из (3.11) имеем:

$$\frac{n_1}{m_1}=\frac{A_1}{C_0}. \qquad (3.19)$$

Для обычных бетонов марок 50—150, $\frac{A_1}{C_0}\approx 5{,}5$ (см. [1], стр. 70). Для бетонов более высоких марок, обычно применяемых в оболочках, это отношение, как не трудно сообразить, еще меньше. Оболочки не распалубливаются в такие ранние сроки, как 5—6 дней, т. е.

$$\frac{A_1}{C_0}<\tau_1 \qquad (3.20)$$

Из (3.20) следует сходимость ряда (3.18), следовательно и выражений содержащихся в квадратных скобках в (3.17), что в свою очередь означает возможность представить решение (3.17), следовательно и (3.13) сходящимися степенными рядами (см., например, [7], стр. 139, где даны доказательство этого и метод определения коэффициентов ряда). Интегрируя полученные решения для y и z от τ_1 до t, в соответствии с (3.8), можем определить значения $\sigma_{бk}$ $(k=1, 2)$, которые не трудно представить в виде

$$\sigma_{бk}=\overset{\circ}{\sigma}_{бk}\cdot H_{бk} \quad (k=1, 2), \qquad (3.21)$$

где $\overset{\circ}{\sigma}_{бk}$ — напряжения в бетоне при $t=\tau_1$ — определяемые решением соответствующей упругой задачи; $H_{бk}=H_{бk}(\alpha, \beta, \tau_1, t)$ $(k=1, 2)$ — функции влияния показывающие закон изменения напряжений в бетоне рассматриваемых оболочек вследствие ползучести бетона.

Для напряжений в арматуре получаются следующие очевидные формулы:

$$\sigma_{ak}=\overset{\circ}{\sigma}_{ak}\cdot H_{ak} \quad (k=1, 2), \qquad (3.22)$$

где

$$H_{ak}=H_{ak}(\tau_1, t, \alpha, \beta)=\frac{1+\mu_k m-H_{бk}}{\mu_k m} \quad (k=1, 2). \qquad (3.23)$$

4. При

$$\mu_1=\mu_2=\mu \qquad (4.1)$$

достигается существенное упрощение. Взамен (3.9) будем иметь:

$$bz' + \gamma(b + \nu c\varphi) z - \gamma(a + c\varphi) y - ay' = 0;$$
$$by' + \gamma(b + \nu c\varphi) y - \gamma(a + c\varphi) z - az' = 0, \tag{4.2}$$

где

$$a = h(1 + \mu m); \; b = \nu\mu mh; \; c = \mu hEa. \tag{4.3}$$

Перепишем (4.2) в следующем виде:

$$(b + a) u' + \gamma[a + b + c\varphi(1 + \nu)] u = 0;$$
$$(b - a) w' + \gamma[b - a - c\varphi(1 - \nu)] w = 0, \tag{4.4}$$

где

$$u = y - z;$$
$$w = y + z. \tag{4.5}$$

Откуда

$$u = u^\circ e^{-\gamma\int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{a + b + c\varphi(1 + \nu)}{a + b} d\tau};$$
$$w = w^\circ e^{\gamma\int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{b - a - c\varphi(1 - \nu)}{a - b} d\tau} \tag{4.6}$$

Следовательно:

$$y = \frac{1}{2}\left[u^\circ e^{-\gamma\int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{a + b + c\varphi(1 + \nu)}{a + b} d\tau} + w^\circ e^{-\gamma\int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{b - a - c\varphi(1 - \nu)}{a + b} d\tau}\right];$$
$$z = \frac{1}{2}\left[-u^\circ e^{-\gamma\int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{a + b + c\varphi(1 - \nu)}{a - b} d\tau} + w^\circ e^{-\gamma\int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{b - a - c\varphi(1 - \nu)}{b - a} d\tau}\right]. \tag{4.7}$$

Интегрируя (4.7) от τ_1 до t, учитывая (1.2) и (4.5) получаем:

$$\sigma_{б_1}(t) = \sigma^н_{б_1} + \frac{1}{2}\left[(y^\circ - z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_1(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2} d\tau + \right.$$
$$\left. + (y^\circ + z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_3(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_4} d\tau\right];$$
$$\sigma_{б_2}(t) = \sigma^н_{б_2} + \frac{1}{2}\left[-(y^\circ - z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_1(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2} d\tau + \right. \tag{4.8}$$
$$\left. + (y^\circ + z^\circ)\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{a_3(\tau_1 - \tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_4} d\tau\right].$$

где

$$a_1=\gamma\left[1+\frac{\mu E_a C_0(1+\nu)}{1+\mu m(1+\nu)}\right];\quad a_2=\frac{\mu E_a A_1(1+\nu)\gamma}{1+\mu m(1+\nu)};$$
$$a_3=\gamma\left[1+\frac{\mu E_a C_0(1+\nu)}{1+\mu m(1-\nu)}\right];\quad a_4=\frac{\mu E_a A_1(1+\nu)\gamma}{1+\mu m(1-\nu)}. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.1) в (3.7), учитывая (3.8), принимая $t=\tau_1$ и отбросив некоторые малые величины, получаем:

$$y^\circ=\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[\nu\sigma^\circ_{б_2}-(1+\mu m)\sigma^\circ_{б_1}\right];$$
$$z^\circ=\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[\nu\sigma^\circ_{б_1}-(1+\mu m)\sigma^\circ_{б_2}\right]. \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.8) получаем следующие выражения для напряжений в бетоне с учетом ползучести:

$$\sigma_{б_1}=\sigma^\circ_{б_1}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^\circ_{б_2}}{\sigma^\circ_{б_1}}\right)J_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^\circ_{б_2}}{\sigma^\circ_{б_1}}\right)J_2\right]\right\};$$

$$\sigma_{б_2}=\sigma^\circ_{б_2}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^\circ_{б_1}}{\sigma^\circ_{б_2}}\right)J_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^\circ_{б_1}}{\sigma^\circ_{б_2}}\right)J_2\right]\right\},$$

где

$$J_1=\int_{\tau_1}^{t}e^{a_1(\tau_1-\tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2}d\tau=e^{a_1\tau_1}\tau_1^{a_2}a_1^{-(1-a_2)}\left[\Phi(a_1t,a_2)-\Phi(a_1\tau_1,a_2)\right];$$
$$J_2=\int_{\tau_1}^{t}e^{a_3(\tau_1-\tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_4}d\tau=e^{a_3\tau_1}\tau_1^{a_4}a_3^{-(1-a_4)}\left[\Phi(a_3t,a_4)-\Phi(a_3\tau_1,a_4)\right]. \tag{4.12}$$

а функция

$$\Phi(\xi,p)=\int_0^{\xi}e^{-\tau}\tau^{-p}d\tau \tag{4.13}$$

выражается известными табулированными функциями. Она рассмотрена и табулирована в работе [1].

Введя обозначения

$$1-\frac{1}{2}\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1-2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^{\circ}_{б_2}}{\sigma^{\circ}_{б_1}}\right)J_1+\right.$$
$$\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^{\circ}_{б_2}}{\sigma^{\circ}_{б_1}}\right)J_2\right]=H_{б_1};$$
$$1-\frac{1}{2}\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1-2\mu m}\left[(1+\mu m+\nu)\left(1-\frac{\sigma^{\circ}_{б_1}}{\sigma^{\circ}_{б_2}}\right)J_1+\right.$$
$$\left.+(1+\mu m-\nu)\left(1+\frac{\sigma^{\circ}_{б_1}}{\sigma^{\circ}_{б_2}}\right)J_2\right]=H_{б_2},\tag{4.14}$$

перепишем (4.11) в виде:

$$\sigma_{бk}=\sigma^{\circ}_{бk}\cdot H_k \qquad (k=1,2).\tag{4.15}$$

Напряжения в бетоне соответствующие упругому решению $\sigma^{\circ}_{бk}$ $(k=1,2)$ определяются из (3.6) при $t=\tau_1$ и с учетом (4.1) имеют вид:

$$\sigma^{\circ}_{б_1}=\frac{T_1(1+\mu m)+T_2\mu\nu m}{h(1+2\mu m)}$$
$$\sigma^{\circ}_{б_2}=\frac{T_2(1+\mu m)+T_1\mu\nu m}{h(1+2\mu m)},\tag{4.16}$$

где отброшены некоторые малые величины.

5. При

$$\nu=0\tag{5.1}$$

будем иметь:

$$a_1=a_3=\gamma\left(1+\frac{\mu E_a C_0}{1+\mu m}\right);$$
$$a_2=a_4=\frac{\gamma\mu E_a A_1}{1+\mu m};\tag{5.2}$$

$$J_1=J_2=J=\int\limits_{\tau_1}^{t}e^{a_1(\tau_1-\tau)}\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{a_2}d\tau.$$

$$H_{б_1}=H_{б_2}=H_б=1-\frac{\mu E_a\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1}+C_0\right)}{1+\mu m}J;\tag{5.3}$$

$$H_{a_1}=H_{a_2}=H_a.\tag{5.4}$$

Не трудно заметить, что ф-ла (5.3) полностью совпадает, как это следовало ожидать, с ф-лой полученной в работе [1] для сжатых (растянутых) железобетонных стоек.

В приведенных ниже таблицах даны значения $H_б$ и H_a вычисленные при $\nu = 0$ при различных μ по (5.3), а также $H_{бk}$ и H_{ak} ($k = 1, 2$) вычисленные по (4.14) при $\nu = 0{,}25$ и $\mu = 0{,}5\%$, для сферической оболочки и параболической оболочки вращения находящихся под воздействием вертикальной равномерно-распределенной нагрузки (собственный вес)*.

При этом приняты следующие численные значения параметров характеризующих свойства ползучести бетона:

$$A_1 = 4{,}82 \cdot 10^{-5};\ C_0 = 0{,}90 \cdot 10^{-5};\ \mu = 0{,}026. \tag{5.4}$$

В работе [1], откуда они взяты показана их достаточно хорошая согласованность с опытными данными для обычных бетонов марок 50—150 на портландцементе. Принято также $m = 10$.

Таблица 1

Значения $H_б$ и H_a для обычного железобетона в зависимости от времени t и процента армирования μ, при $\tau_1 = 28$ дням

t \ μ	$H_б$				H_a			
	$= 0{,}5\%$	$= 1{,}0\%$	$= 1{,}5\%$	$= 2{,}0\%$	$= 0{,}5\%$	$= 1{,}0\%$	$= 1{,}5\%$	$= 2{,}0\%$
28 дней	1	1	1	1	1	1	1	1
1,5 мес.	0,96	0,93	0,91	0,88	1,88	1,65	1,62	1,60
3 мес.	0,87	0,86	0,81	0,76	3,62	2,40	2,28	2,18
6 мес.	0,84	0,84	0,78	0,73	4,10	2,63	2,46	2,33
1 год	0,84	0,83	0,78	0,73	4,12	2,66	2,48	2,34
∞	0,84	0,83	0,78	0,73	4,12	2,66	2,48	2,34

Таблица 2

Значения $H_{бk}$ и H_{ak} ($k = 1, 2$) для сферического железобетонного купола при $\mu = 0{,}5\%$, $\tau_1 = 28$ дням (см. ф-лы (3.22), (3.23), (4.14), 4.15)) в зависимости от времени t и угла θ образованного нормалью к срединной поверхности с осью оболочки

θ	t (дней)							
	45	90	180	360	45	90	180	360
	Значения $H_{б_1}$				Значения $H_{б_2}$			
0	0,97	0,94	0,93	0,93	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{8}$	0,97	0,93	0,92	0,92	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{4}$	0,97	0,93	0,91	0,91	0,999	0,998	0,995	0,994
$\frac{3\pi}{8}$	0,96	0,92	0,90	0,90	0,95	0,89	0,87	0,87
$\frac{\pi}{2}$	0,96	0,91	0,89	0,89	0,96	0,91	0,89	0,89

* Вычислительная работа результаты которых сведены в табл. 2 и 3 проведена студентами Ереванского политехнического института им. К. Маркса. С. Заргаряном и М. Мартиросяном.

θ	t (дней)							
	45	90	180	360	45	90	180	360
	Значения H_{a_1}				Значения H_{a_2}			
0	1,56	2,20	2,45	2,45	1,56	2,20	2,45	2,45
$\frac{\pi}{8}$	1,59	2,26	2,51	2,54	1,52	2,12	2,33	2,35
$\frac{\pi}{4}$	1,68	2,45	2,72	2,75	1,02	1,15	1,11	1,11
$\frac{3\pi}{8}$	1,78	2,66	2,97	3,00	2,13	3,20	3,60	3,63
$\frac{\pi}{2}$	1,86	2,84	3,17	3,20	1,86	2,83	3,17	3,20

Таблица 3

Значения $H_{бk}$ и H_{ak} ($k = 1, 2$) для параболического железобетонного купола нагруженного собственным весом при $\mu = 0,5\%$, $\tau_1 = 28$ дням (см. ф-лы (3.22), (3.23), (4,14), (4.14)), в зависимости от времени t и угла θ образованного нормалью к срединной поверхности с осью оболочки

θ	t (дней)							
	45	90	180	360	45	90	180	360
	Значения $H_{б_1}$				Значения $H_{б_2}$			
0	0,97	0,94	0,93	0,93	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{8}$	0,97	0,94	0,92	0,92	0,97	0,94	0,93	0,93
$\frac{\pi}{4}$	0,97	0,93	0,91	0,91	1,01	1,02	1,02	1,02
$\frac{3\pi}{8}$	0,96	0,91	0,90	0,90	0,95	0,90	0,88	0,88
$\frac{9\pi}{20}$	0,96	0,91	0,89	0,89	0,96	0,91	0,89	0,89
	Значения H_{a_1}				Значения H_{a_2}			
0	1,56	2,20	2,43	2,46	1,56	2,20	2,43	2,46
$\frac{\pi}{8}$	1,59	2,26	2,51	2,54	1,52	2,15	2,33	2,35
$\frac{\pi}{4}$	1,68	2,46	2,74	2,76	0,83	0,66	0,66	0,66
$\frac{3\pi}{8}$	1,80	2,70	3,02	3,05	1,96	3,06	3,42	3,45
$\frac{9\pi}{20}$	1,85	2,81	3,14	3,17	2,87	2,92	3,20	3,23

6. Выпишем известные геометрические соотношения безмоментной теории связывающие компоненты деформации с перемещениями, относя срединную поверхность к линиям главных кривизн:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial C}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}; \tag{6.1}$$

$$\omega = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right).$$

Входящие в (6.1) относительные удлинения — ε_1, ε_2 определяются следующими формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma^*_{a_1}}{E_a} H_{a_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma^*_{a_2}}{E_a} H_{a_2}, \tag{6.2}$$

Для определения ω — деформации сдвига срединной поверхности, обратимся к третьему ур-нию (3.2), решение которого, с учетом (1.1) и (1.2) можно представить в виде:

$$\omega = \omega^0 G \tag{6.3}$$

где

$$\omega^0 = \frac{2(1+\nu)}{E_б}\tau_0 \tag{6.4}$$

представляет сдвиг без учета ползучести бетона, а

$$G = G(\tau_1, t) = 1 + E_б e^{\gamma\tau_1}\left(\frac{A}{\tau_1} + C_0\right)\left(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma\tau_1}\right) \tag{6.5}$$

суть функция влияния показывающая нарастание деформации сдвига во времени вследствие ползучести бетона.

Подставляя (6.2) — (6.5) в (6.1) замечаем, что хотя искомые неизвестные u, v, w — суть функции не только α, β, как это имеет место в упругих оболочках, но и времени t, однако интегрирование системы (6.1) может быть осуществлено также как и в упругих оболочках, так как t может быть рассмотрен как постоянный параметр.

7. После того как определены перемещения u, v, w, не трудно определить также и компоненты изгибной деформации в функции времени и координат α, β по известным формулам [2 — 5], которые также как и (6.1) не претерпевают изменений вследствие ползучести бетона.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 20 IV 1957

Գ. Ս. Գրիգորյան

ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԵ ԲԱՐԱԿ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է լարումների վերաբաշխումը, որ տեղի է ունենում բետոնի և արմատուրայի միջև, երկաթբետոնե անմոմենտ բարակ թաղանթներում, բետոնի սողքի հետևանքով: Աշխատությունը հիմնված է բետոնի սողքի Ն. Խ. Հարությունյանի կողմից մշակված տեսության [1] և առաձգական անմոմենտ բարակ թաղանթների տեսության վրա [2—5]:

Լարումների որոշման խնդիրը բերված է երկու ինքնուրույն երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Ընդհանուր դեպքում այդ հավասարումները լրիվ են, անհամասեռ, փոփոխական գործակիցներով: Ցույց է տրված, որ նրանց լուծումները կարելի է ներկայացնել զուգամիտվող աստիճանական շարքերի միջոցով:

Բերված են աղյուսակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ սողքի ազդեցությունը առանձին դեպքերում կարող է ավելի քան 4 անգամ մեծացնել արմատուրայի լարումները: Սեղմ կերպով դիտարկված է նաև սողքի ազդեցությունը տեղափոխումների և դեֆորմացիաների վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
2. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехтеоретиздат, М., 1949.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехтеориздат, М., 1953.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
5. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
6. *Прокопович И. Е.* О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. Инженерный сборник, XXIV, 1956.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, II, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

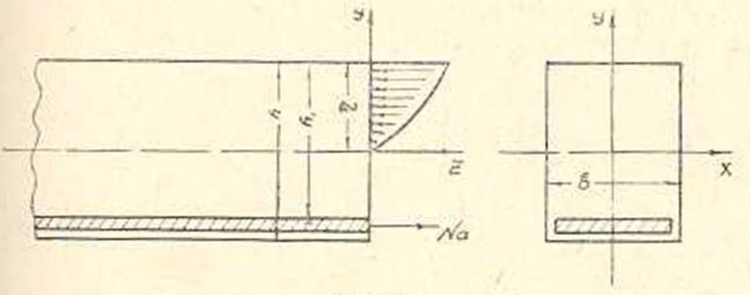
М. М. Манукян

Изгиб железобетонной балки с учетом установившейся ползучести только сжатой зоны бетона

В работе исследуются деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом нелинейной ползучести только сжатой зоны бетона, пользуясь нелинейной теорией ползучести бетона, развитой Н. Х. Арутюняном [1].

Рассматривается тот случай, когда бетон находится в состоянии установившейся ползучести, а напряжение арматуры получает свое предельное значение σ_T.

Пусть имеем изгибаемую железобетонную балку (фиг. 1), имеющую одну плоскость симметрии, и все внешние силы действуют в этой плоскости. Положим, что сжимаемая зона бетона работает полностью, а растянутая зона не работает вследствие образования в ней трещин. Обозначим расстояние от сжатого края сечения до центра тяжести арматуры через h_1, высоту сечения — h, ширину — b, расстояние нейтральной оси от верхнего края балки — η.



Фиг. 1.

Направим координатные оси OX и OY параллельно главным осям инерции поперечного сечения, а ось OZ — по направлению параллельно геометрической оси балки.

При решении задачи будем принимать, что сечения после деформации остаются плоскими.

Допустим, что модуль мгновенной деформации бетона постоянен и равен $E_б$.

Как известно [1], при больших значениях t бетон находится в состоянии установившейся ползучести. Тогда между полной продольной деформацией бетона $\varepsilon_б(t)$ и напряжением $\sigma_б(t)$ будет существовать следующая зависимость [1]:

$$\frac{d\varepsilon_б(t)}{dt}+\gamma\varepsilon_б(t)=\gamma C_б f\left[\frac{\sigma_б(t)}{R}\right]. \tag{1}$$

где $C_б$, γ — параметры, определяемые из опыта,
t — текущая координата времени,
R — временное сопротивление бетона,
$f\left[\frac{\sigma_б(t)}{R}\right]$ — некоторая, определяемая из опыта функция от $\frac{\sigma_б(t)}{R}$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного бетона.

Положим, что $f\left[\frac{\sigma_б(t)}{R}\right]$ есть степенная функция вида

$$f\left[\frac{\sigma_б(t)}{R}\right]=\left[\frac{\sigma_б(t)}{R}\right]^n. \tag{2}$$

Тогда из (1) получим:

$$\frac{\sigma_б(t)}{R}=\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma C_б}}\sqrt[n]{\frac{d\varepsilon_б(t)}{dt}+\gamma\varepsilon_б(t)} \tag{3}$$

Пользуясь гипотезой плоских сечений, имеем

$$\varepsilon_б(t)=B(z,t)\,y, \tag{4}$$

где $B(z, t)$ — неизвестная кривизна балки в данный момент времени t
y — координата точки.

Подставляя значение $\varepsilon_б(t)$ из (4) в (3), найдем

$$\frac{\sigma_б(t)}{R}=\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma C_б}}\sqrt[n]{\frac{dB(z,t)}{dt}+\gamma B(z,t)}\cdot\sqrt[n]{y} \tag{5}$$

Допустим, что напряжение арматуры получает свое предельное значение σ_T, тогда для определения усилий в арматуре N_a получим

$$N_a=F_a\sigma_T. \tag{6}$$

где F_a — площадь арматуры.

Напишем уравнения равновесия элемента балки, находящегося между произвольным сечением z и торцевым сечением $z=l$.

Имеем

$$\int_0^{x}\sigma_б(t)\,b\,dy-N_a=0, \tag{7}$$

$$\int_0^{\eta} \sigma_б(t)\, by\, dy + N_a(h_1 - \eta) = M_z, \tag{7}$$

где η — пока неизвестная высота сжатой зоны бетона.

Подставляя значения $\sigma_б(t)$ и N_a из (5) и (6) в уравнения (7), после интегрирования и некоторых преобразований находим:

$$\zeta = \left(1 - \frac{M_z}{\mu h_1 F_б \sigma_T}\right) \frac{2n+1}{n}, \tag{8}$$

$$\left[\frac{dB(z,t)}{dt} + \gamma B(z,t)\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\gamma C_0}{h_1}\right)^{\frac{1}{n}} \mu \frac{n+1}{n} \frac{1}{\zeta^{1+\frac{1}{n}}} \frac{\sigma_T}{R}, \tag{9}$$

где

$$\zeta = \frac{\eta}{h_1}, \tag{10}$$

$\mu = \dfrac{F_a}{F_б}$ — процент армирования.

Пользуясь (9), выражению (5) можно дать следующий вид:

$$\sigma_б = \mu \frac{n+1}{n} \frac{1}{\zeta^{1+\frac{1}{n}}} \left(\frac{y}{h_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sigma_T. \tag{11}$$

Из формул (8) и (11) видно, что ζ и $\sigma_б$ не зависят от времени t.

Из (9) следует, что

$$\frac{dB(z,t)}{dt} + \gamma B(z,t) = \frac{\gamma C_0}{h_1} \frac{\mu^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\zeta^{n+1}} \left(\frac{\sigma_T}{R}\right)^n \tag{12}$$

Интегрируя это уравнение и пользуясь начальным условием, найдем:

$$B(z,t) = \mu^n \frac{C_0}{h_1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\zeta^{1+n}} \cdot \left(\frac{\sigma_T}{R}\right)^n \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right] \tag{13}$$

Пользуясь выражениями (4) и (13) для определения полной продольной деформации бетона $\varepsilon_б(t)$, получим

$$\varepsilon_б(t) = \mu^n \frac{C_0 y}{h_1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\zeta^{1+n}} \left(\frac{\sigma_T}{R}\right)^n \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right]. \tag{14}$$

Для деформации арматуры $\varepsilon_a(t)$ имеем:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_T}{E_a}, \tag{15}$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки согласно (13) будет иметь вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \mu^n \frac{C_0}{h_1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\xi^{1+n}} \left(\frac{\sigma_T}{R}\right)^n \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right] \tag{16}$$

где w — прогиб балки.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступило 20 IV 1957

Մ. Մ. Մանուկյան

ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԵ ՀԵԾԱՆԻ ԾՌՈՒՄԸ ԲԵՏՈՆԻ ՄԻԱՅՆ ՍԵՂՄՎԱԾ ԳՈՏՈՒ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում, Ն. Խ. Հարությունյանի առաջարկած ոչ գծային սողքի տեսության հիման վրա, ուսումնասիրվում են ծռվող երկաթ-բետոնե հեծանի լարումները և դեֆորմացիան, երբ բետոնի սեղմված գոտին աշխատում է լրիվ, իսկ ձգված գոտին չի աշխատում՝ նրանում առաջացած ճաքերի պատճառով:

Քննարկվում է այն դեպքը, երբ բետոնը գտնվում է հաստատված սողքի վիճակում, իսկ երկաթի լարումն ստանում է իր սահմանային արժեքը:

Առաջադրված խնդրի լուծման համար օգտագործվում է բետոնի հաստատված սողքի (1) հավասարումը: Սողքի ոչ գծայնությունը վերցվում է աստիճանային տեսքով: Ապա օգտագործելով հարթ հատվածների հիպոթեզը, հեծանի հավասարակշռության հավասարումներից որոշվում են հեծանի սեղմված գոտու և բետոնի լարման մեծությունները: Այնուհետև որոշվում են բետոնի և երկաթի դեֆորմացիաները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ X, № 4, 1957 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Н. И. Левитский и К. Х. Шахбазян

Аналитический метод проектирования пространственного четырехзвенника с двумя вращательными и двумя шаровыми парами

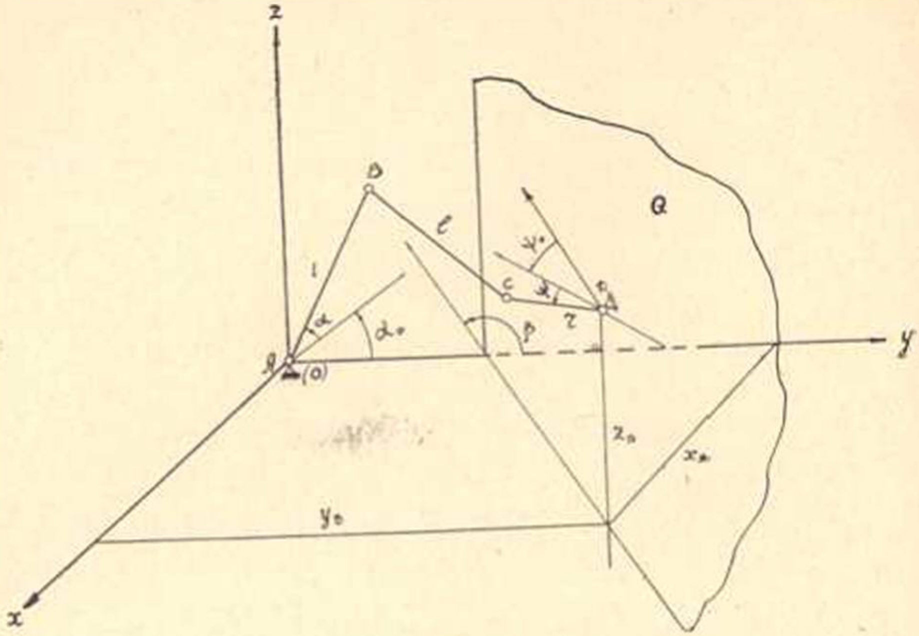
Пространственные четырехзвенники с двумя вращательными и двумя шаровыми парами применяются в качестве передаточных механизмов приборов и служат для воспроизведения заданной зависимости между премещениями ведущего и рабочего (ведомого) звеньев. Проектированию (синтезу) этих механизмов были посвящены работы Е. П. Новодворского [4], Б. И. Степанова [5], Н. И. Левитского и К. Х. Шахбазяна [2], В. А. Зиновьева [1] и П. В. Цвияка [6], причем только в работах [2] и [1] указаны методы вычисления всех восьми параметров.

В настоящем исследовании дано развитие метода, предложенного авторами в предыдущей работе [2]. Это развитие выразилось в более целесообразном выборе системы координат, благодаря чему упростились расчетные операции по вычислению искомых параметров и облегчилось построение схемы механизма в ортогональных проекциях.

1. Постановка задачи

Рассматривается пространственный четырехзвенник, в котором ведущее звено AB и рабочее (ведомое) звено CD соединены со стойкой при помощи вращательных пар (фиг. 1), а с шатуном BC при помощи шаровых пар. Лишняя степень свободы, которая получается от свободного вращения шатуна относительно своей оси, не учитывается, так как она не влияет на зависимость между углами поворота звеньев AB и CD.

Положение координатных осей, следуя П. Б. Цвияку [6], выбираем следующим образом: ось ox направлена по оси вращения звена AB, плоскость oyz совпадает с плоскостью движения центра шаровой пары B, плоскость oyx составляет угол равный 90° с плоскостью движения центра шаровой пары C, т. е. с плоскостью Q. Тогда рассматриваемый механизм определится шестью параметрами, в качестве которых при длине звена AB, принятой за единицу, удобно взять следующие: координаты точка $D(x_D, y_D, z_D)$, т. е. точки пересечения оси вращения звена CD с плоскостью Q; длина шатуна l, длина рабочего



Фиг. 1.

звена r и угол β, т. е. угол между положительным направлением оси oy и положительным направлением следа плоскости Q на плоскости oxy, которое будем выбирать так, чтобы угол β заключался в пределах от 0° до 180°. Кроме того в число вычисляемых параметров входят начальные углы α_0 и ψ_0, которые определяют начало отсчета углов поворота звеньев AB и CD т. е. углов α и ψ. Начальный угол α_0 отсчитывается от положительного направления оси oy, начальный угол ψ_0—от линии, проходящей через точку D параллельно следу плоскости Q на плоскости oxy. Отсчет всех углов будем производить против движения часовой стрелки.

Как и в предыдущей нашей работе [2] для получения аналитического выражения отклонения от заданной зависимости составим сперва выражение взвешенной разности Δ_q в виде разности квадратов переменной длины l_ϕ и длины шатуна l.

$$\Delta_q = l_\phi^2 - l^2.$$

Переменная длина l_ϕ представляет собою расстояние между точками B и C при заданных углах α и ψ.

Отсюда

$$l_\phi^2 = (x_B - x_c)^2 + (y_B - y_c)^2 + (z_B - z_c)^2, \tag{2}$$

где

$$x_B = 0; \qquad x_c = x_D - r\cos(\psi + \psi_0)\cdot\sin\beta;$$

$$y_B = \cos(\alpha + \alpha_0); \qquad y_c = y_D + r\cos(\psi + \psi_0)\cdot\cos\beta;$$

$$z_B = \sin(\alpha + \alpha_0); \qquad z_c = z_D - r\sin(\psi + \psi_0).$$

Подставляя значение l_ϕ^2 из уравнения (2) в выражение взвешенной разности (1), получаем после преобразований

$$\Delta_q = -2rz_D \sin(\psi+\psi_0) + 2r(y_D\cos\beta - x_D\sin\beta)\cos(\psi+\psi_0) -$$
$$-2z_D\sin(\alpha+\alpha_0) - 2y_D\cos(\alpha+\alpha_0) + 2r\sin(\alpha+\alpha_0)\sin(\psi+\psi_0) -$$
$$-2r\cos\beta\cos(\alpha+\alpha_0)\cos(\psi+\psi_0) + x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 + r^2 + 1 - l^2. \quad (3)$$

Для получения приближенного выражения разности Δ_ψ, т. е. разности между заданной функцией $\psi = f(\alpha)$ той функцией $\psi = f_M(\alpha)$, которая воспроизводится механизмом, раскладываем в ряд выражение взвешенной разности (3) в окрестности точки Δ_{q_M}, соответствующей значениям $\alpha = \alpha_M$ и $\psi = \psi_M$, где α_M и ψ_M—значения углов α и ψ, получаемые в механизме.

Тогда, ограничиваясь линейными членами ряда, имеем:

$$\Delta_q \approx \Delta_{q_M} + \frac{\partial\Delta_q}{\partial\psi}(\psi-\psi_M) + \frac{\partial\Delta_q}{\partial\alpha}(\alpha-\alpha_M). \quad (4)$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\Delta_{q_M} = 0$, а разность $\psi - \psi_M$ при $\alpha = \alpha_M$ равна искомой разности Δ_ψ, получаем:

$$\Delta_\psi = \frac{\Delta_q}{\dfrac{\partial\Delta_q}{\partial\psi}}.$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\Delta_\psi = \frac{\dfrac{\Delta_q}{2r}}{A\cos(\psi+\psi_0) - B\sin(\psi+\psi_0)}, \quad (5)$$

где

$$A = \sin(\alpha+\alpha_0) - z_D;$$
$$(6')$$
$$B = y_D\cos\beta - x_D\sin\beta - \cos\beta\cos(\alpha+\alpha_0).$$

Отклонение Δ_ψ согласно выражению (6) зависит от восьми параметров: r, l, x_D, y_D, z_D, α_0, β и ψ_0.

Задача синтеза рассматриваемого механизма и состоит в таком выборе этих параметров, при котором отклонение Δ_ψ мало на заданном интервале изменения углов α и ψ.

2. Вычисление восьми параметров

Если требуется подобрать (вычислить) восемь параметров механизма, то выражение взвешенной разности Δ_q после преобразований представляется в следующем виде:

$$\Delta_q = 2A\,[F(\alpha) - P_0\varphi_0(\alpha) - P_1\varphi_1(\alpha) - \cdots - P_7\varphi_7(\alpha)], \quad (7)$$

где

$$F(\alpha) = \sin\psi;$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(\alpha) &= \cos\alpha\cos\psi; \\
\varphi_1(\alpha) &= \sin\alpha\cos\psi; \\
\varphi_2(\alpha) &= \cos\alpha\sin\psi; \\
\varphi_3(\alpha) &= 1; \\
\varphi_4(\alpha) &= \sin\alpha\sin\psi; \\
\varphi_5(\alpha) &= \cos\alpha; \\
\varphi_6(\alpha) &= \sin\alpha; \\
\varphi_7(\alpha) &= \cos\psi.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$A = -r\,[z_D\cos\psi_0 + (y_D\cos\beta - x_D\sin\beta)\cdot\sin\psi_0]; \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{r}{A}(\cos\beta\cos\alpha_0\cos\psi_0 - \sin\alpha_0\sin\psi_0); \\
P_1 &= -\frac{r}{A}(\cos\beta\sin\alpha_0\cos\psi_0 + \cos\alpha_0\sin\psi_0); \\
P_2 &= -\frac{r}{A}(\cos\beta\cos\alpha_0\sin\psi_0 + \sin\alpha_0\cos\psi_0); \\
P_3 &= -\frac{1}{2A}(x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 + r^2 + 1 - l^2); \\
P_4 &= \frac{r}{A}(\cos\beta\sin\alpha_0\sin\psi_0 - \cos\alpha_0\cos\psi_0); \\
P_5 &= \frac{1}{A}(z_D\sin\alpha_0 + y_D\cos\alpha_0); \\
P_6 &= \frac{1}{A}(z_D\cos\alpha_0 - y_D\sin\alpha_0); \\
P_7 &= \frac{r}{A}[z_D\sin\psi_0 - (y_D\cos\beta - x_D\sin\beta)\cos\psi_0].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Отклонение Δ_ψ определяется по формуле (6), которая принимает следующий вид:

$$\Delta_\psi = \frac{F(\alpha) - P_0\varphi_0(\alpha) - P_1\varphi_1(\alpha) - \cdots - P_7\varphi_7(\alpha)}{(1 - P_2\cos\alpha - P_4\sin\alpha)\cos\psi + (P_6\cos\alpha + P_1\sin\alpha + P_7)\sin\psi}. \tag{11}$$

Для вычисления тех значений коэфициентов $P_0, P_1, \cdots P_7$, при которых отклонение Δ_ψ будет мало на заданном интервале изменения углов α и ψ, можно использовать интерполирование, квадратическое приближение или наилучшее приближение.

Методы вычисления коэффициентов $P_0, P_1, \ldots P_7$ дляфункции вида [7] указаны в монографии Н. И. Левитского [3]. В настоящей статье покажем только как после вычисления коэффициентов $P_0, P_1, \cdots P_7$

можно найти искомые параметры механизма. С этой целью преобразуем систему уравнений (10) к следующему виду:

$$A(P_0\sin\alpha_0+P_1\cos\alpha_0)=-r\sin\psi_0; \qquad (12)$$

$$A(P_0\cos\alpha_0-P_1\sin\alpha_0)=r\cos\beta\cos\psi_0; \qquad (13)$$

$$A(P_2\sin\alpha_0+P_4\cos\alpha_0)=-r\cos\psi_0; \qquad (14)$$

$$A(P_2\cos\alpha_0-P_4\sin\alpha_0)=-r\cos\beta\sin\psi_0; \qquad (15)$$

$$A(P_6\sin\alpha_0-P_5\cos\alpha_0)=-y_D; \qquad (16)$$

$$A(P_6\cos\alpha_0+P_5\sin\alpha_0)=z_D; \qquad (17)$$

$$AP_7=r\,[z_D\sin\psi_0-(y_D\cos\beta-x_D\sin\beta)\cos\psi_0]; \qquad (18)$$

$$-2AP_3=x_D^2+y_D^2+z_D^2+r^2+1-l^2. \qquad (19)$$

Разделив уравнения (12) на (14) и (15) на (13), имеем:

$$tg\psi_0=\frac{P_0tg\alpha_0+P_1}{P_2tg\alpha_0+P_4}=-\frac{P_4tg\alpha_0-P_2}{P_1tg\alpha_0-P_0}. \qquad (20)$$

Отсюда

$$tg\alpha_0=B\pm\sqrt{B^2+1} \qquad (21)$$

где

$$B=\frac{P_0^2+P_2^2-P_1^2-P_4^2}{2(P_0P_1+P_2P_4)} \qquad (22)$$

Резделив уравнение (15) на (12), получаем:

$$\cos\beta=\frac{P_2-P_4tg\,\alpha_0}{P_0tg\alpha_0+P_1}. \qquad (23)$$

Разделив уравнение (16) на (17) и подставляя в уравнения (14) и (18) значение коэффициента A, имеем

$$\frac{y_D}{z_D}=\frac{P_5-P_6\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}{P_6+P_5\,\mathrm{tg}\,\alpha_0};$$

$$[z_D\cos\psi_0+(y_D\cos\beta-x_D\sin\beta)\sin\psi_0]\times$$
$$\times(P_2\sin\alpha_0+P_4\cos\alpha_0)=\cos\psi_0;$$

$$-[z_D\cos\psi_0+(y_D\cos\beta-x_D\sin\beta)\sin\psi_0]\cdot P_7=$$
$$=z_D\sin\psi_0-(y_D\cos\beta-x_D\sin\beta)\cdot\cos\psi_0.$$

Полученная система уравнений является линейной относительно неизвестных x_D, y_D и z_D. Решая эту систему, получаем:

$$z_D=\frac{1-P_7\,\mathrm{tg}\,\psi_0}{(1+\mathrm{tg}^2\psi_0)(P_2\sin\alpha_0+P_4\cos\alpha_0)}; \qquad (24)$$

$$y_D=\frac{P_5-P_6\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}{P_6+P_5\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}z_D; \qquad (25)$$

$$x_D = \frac{1}{\sin\beta}\left(y_D\cos\beta - z_D\frac{P_7 + \operatorname{tg}\psi_0}{1 - P_7\operatorname{tg}\psi_0}\right). \tag{26}$$

Из уравнений (14) и (17) получаем:

$$r = -\frac{z_D}{\cos\psi_0}\cdot\frac{P_2\operatorname{tg}\alpha_0 + P_4}{P_6 + P_5\operatorname{tg}\alpha_0}. \tag{27}$$

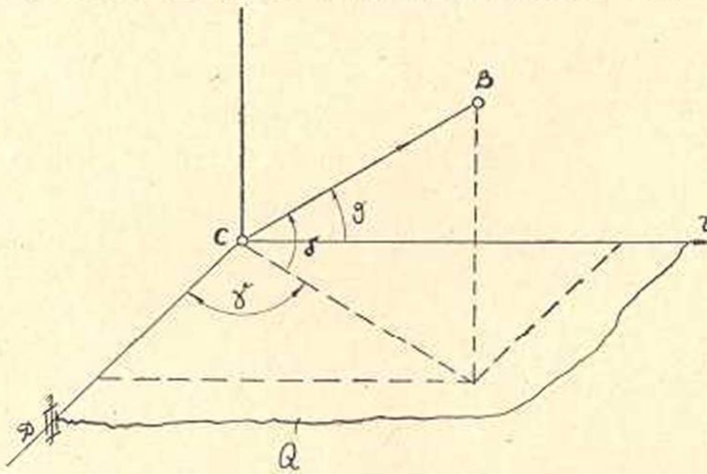
Наконец из уравнений (19) имеем:

$$l = \sqrt{2AP_3 + x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 + r^2 + 1}. \tag{28}$$

3. Угол давления

После вычислния параметров механизма из условий приближения к заданной зависимости следует проверить значение углов давления в механизме.

Для рабочего звена CD углом давления будем считать угол между направлением шатуна BC и направлением скорости точки C. В соответствии с фиг. 2 обозначим угол давления через ϑ, угол между направлением шатуна и проекцией его на плоскость Q через δ и угол между направлением звена CD и той же проекцией шатуна через γ.

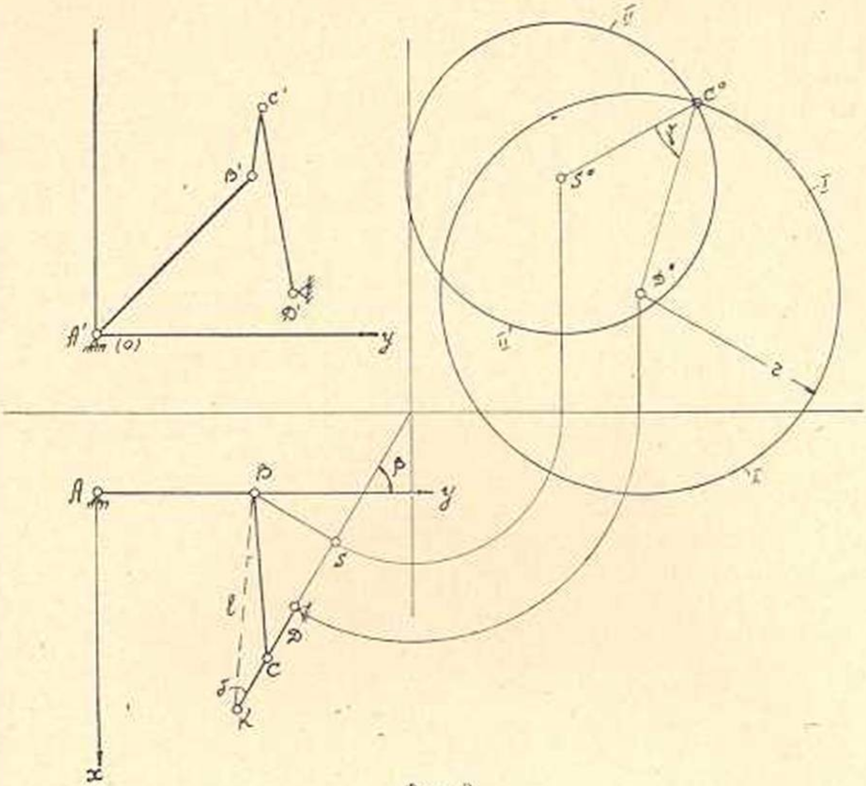


Фиг. 2.

Тогда на основании известного соотношения между направляющими косинусами имеем:

$$\cos\vartheta = \cos\delta\sin\gamma. \tag{29}$$

Углы δ и γ, как показал П. Б. Цвияк, могут быть найдены графически одновременно с построением положений механизма в ортогональных проекциях. На фиг. 3 показано, как можно определить положение звена CD по заданному положению звена AB. В качестве вертикальной плоскости проекции принимаем плоскость oyz и в качестве горизонтальной—плоскость oxy. Для нахождения положения точки C по заданному положению точки B совмещаем плоскость Q с вертикальной



Фиг. 3.

плоскостью проекций. Искомое положение точки C должно находиться на окружности I—I радиуса r. Кроме того эта точка должна лежать на расстоянии l от точки B. Геометрическим местом точек, лежащих в плоскости Q на расстоянии l от заданного положения точки B, является окружность II—II, получающаяся при пересечении с плоскостью Q сферы радиуса l с центром в точке B. Центр окружности II—II обозначим через S. Горизонтальная проекция центра S найдется в основании перпендикуляра, опущенного из точки B на след плоскости Q, а вертикальная проекция и положение точки S в совмещенной плоскости (S°) найдется из условия равенства аппликат точек B и S. Радиус окружности II—II равен расстоянию от точки S в горизонтальной плоскости до точки K, получающейся на следе плоскости Q путем засечки радиусом l из точки B. Искомое положение точки C в совмещенной плоскости (C°) находится на пересечении окружностей I—I и II—II, угол δ при этом графическом построении равен углу BKS, а угол γ—углу $S^\circ C^\circ D^\circ$.

Покажем, что углы δ и γ можно вычислять также аналитически Проектируя треугольник BDS в горизонтальной плоскости на оси ox и oy, имеем:

$$BS\cos\beta + DS\sin\beta = x_D;$$

$$BS\sin\beta - DS\cos\beta = y_D - \cos(\alpha + \alpha_0). \qquad (30)$$

Отсюда

$$BS = x_D \cos\beta + y_D \sin\beta - \sin\beta\cos(\alpha + \alpha_0),$$

следовательно

$$\sin\delta = \frac{x_D\cos\beta + y_D\sin\beta}{l} - \frac{\sin\beta}{l}\cos(\alpha + \alpha_0). \tag{31}$$

В треугольнике $D^\circ C^\circ S^\circ$ имеем:

$$C^\circ D^\circ = r;$$

$$C^\circ S^\circ = l\cos\delta;$$

$$\cos\gamma = \frac{r^2 + l^2\cos^2\delta - (D^\circ S^\circ)^2}{2rl\cos\delta}.$$

Кроме того имеем:

$$(D^\circ S^\circ)^2 = (DS)^2 + [z_D - \sin(\alpha + \alpha_0)]^2.$$

Из уравнений (30) получаем:

$$DS = x_D\sin\beta - y_D\cos\beta + \cos\beta\cos(\alpha + \alpha_0).$$

Следовательно,

$$\cos\gamma = \frac{r^2 + l^2\cos^2\delta + A^2 - B^2}{2rl\cos\delta}, \tag{32}$$

где A и B определяются по (6′).

4. Пример

Спроектировать пространственный механизм для воспроизведения функции

$$y = \lg x$$

в пределах от $x_0 = 1$ до $x_m = 10$ при углах размаха $\alpha_m = 55^\circ$ и $\psi_m = -90^\circ$.

Масштабы графика $\psi = f(\alpha)$, изображающего зависимость $y = \lg x$ найдутся из соотношений:

$$\mu_y = \frac{y_m - y_0}{\psi_m} = -\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{\text{град}}.$$

$$\mu_x = \frac{x_m - x_0}{\alpha_m} = \frac{9}{55}\cdot\frac{1}{\text{град}}.$$

Заданная зависимость (фиг. 4) имеет вид:

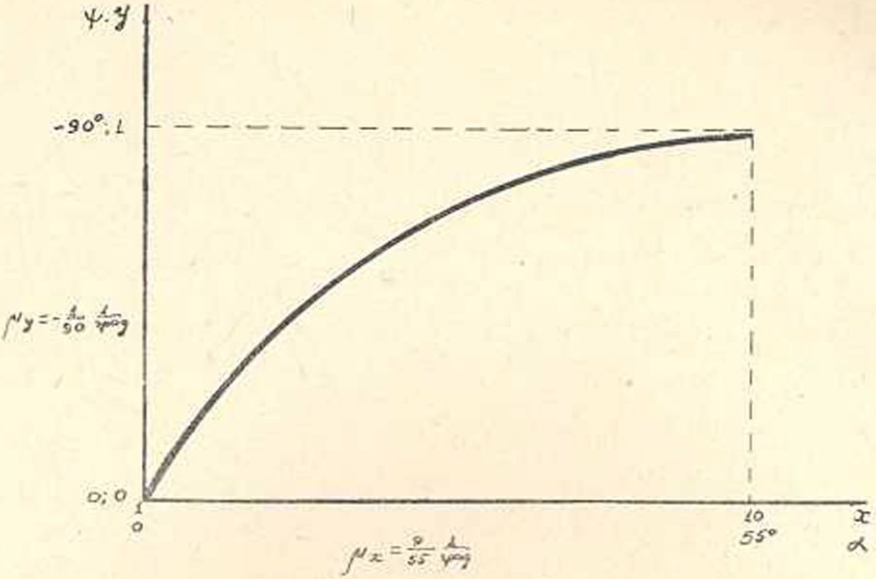
$$y_0 + \mu_y\psi = \lg(x_0 + \mu_x\alpha).$$

Подставляя значения масштабов μ_y и μ_x, получаем

$$\psi = -90\lg\left(1 + \frac{9}{55}\alpha\right)^*; \text{ или } \alpha = \frac{55}{9}\left(10^{-\frac{\psi}{90}} - 1\right).$$

---

* Углы ψ и α измеряются в градусах.



Фиг. 4.

Коэффициенты P_0, $P_1 \cdots P_7$ будем вычислять по методу интерполирования, располагая узлы интерполирования так же, как располагаются нули многочлена Чебышева восьмой степени [7]. В соответствии с графиком заданной зависимости можно ожидать, что многочлен вида

$$P(y) = a_0 y^8 + a_1 y^7 + \cdots + a_8,$$

лучше представляет отклонение от заданной зависимости Δ_ψ чем многочлен вида

$$P(x)\, a_0 x^8 + a_1 x^7 + \cdots + a_8.$$

Поэтому выбираем узлы интерполирования вблизи тех точек, где обращается в нуль многочлен Чебышева $T_8(y)$. Ординаты этих точек даются формулой:

$$\psi = \frac{\psi_m}{2} - \frac{\psi_m}{2} \cos \frac{2i-1}{16} \pi; \quad i = 1, 2, \cdots, 8.$$

После некоторого округления принимаем значения углов ψ и α в узлах интерполирования, указанные в таблице 1.

Таблица 1

α	0°	1°34'55"	4°45'22"	9°14'20"
ψ	0°	9°	22°30'	36°
α	18°13'05"	28°15'16"	42°25'55"	55°
ψ	54°	67°30'	81°	90°

Вычисляя по формулам (8) функции $F(\alpha)$, $\varphi_0(\alpha)$, $\varphi_1(\alpha), \cdots, \varphi_7(\alpha)$ получаем, из условия равенства нулю разности Δ_ψ в узлах интерполирования, следующие уравнения:

$$P_0+P_3+P_5+P_7=0;$$

$$0.98931\ P_0+0.02727\ P_1-0.15637\ P_2+P_3-0.00432\ P_4+0.99962\ P_5+$$
$$+0.02761\ P_6+0.98769\ P_7=-0.15643;$$

$$0{,}92070\ P_0+0.07660\ P_1-0.38136\ P_2+P_3-0.03173\ P_4+0.99656\ P_5+$$
$$+0.08291\ P_6+0.92388\ P_7=-0.38268;$$

$$0.79853\ P_0+0.12989\ P_1-0.58017\ P_2+P_3-0.09437\ P_4+0.98703\ P_5+$$
$$+0{,}16055\ P_6+0.80902\ P_7=-0.58779;$$

$$0.55832\ P_0+0.18376\ P_1-0.76846\ P_2+P_3-0.25292\ P_4+0.94987\ P_5+$$
$$+0.31263\ P_6+0.58779\ P_7=-0.80902;$$

$$0.33709\ P_0+0.18115\ P_1-0.81381\ P_2+P_3-0.43735\ P_4+0.88086\ P_5+$$
$$+0.47338\ P_6+0.38268\ P_7=-0.92388;$$

$$0.11546\ P_0+0.10554\ P_1-0.75892\ P_2+P_3-0.66640\ P_4+0.73808\ P_5+$$
$$+0.67471\ P_6+0.25643\ P_7=-0.98769;$$

$$-0.57358\ P_2+P_3-0.81915\ P_4+0.57358\ P_5+0.81915\ P_6=-1.$$

Применяя обычные способы решения системы линейных уравнений, находим следующие значения коэффициентов:

$$P_0=\ \ 0.0811402;$$
$$P_1=\ \ 0.2649784;$$
$$P_2=\ \ 0.9245966;$$
$$P_3=-0.6451103;$$
$$P_4=\ \ 0.5390084;$$
$$P_5=\ \ 0.6030679;$$
$$P_6=-0.7471119;$$
$$P_7=\ \ 0.0390978.$$

Затем находим значение величины $\frac{\Delta_q}{2A}$ по формуле (7) в промежутках между узлами интерполирования. Во всех точках эти величины оказались равными нулю с точностью, по крайней мере, до пяти знаков после запятой.

Далее, приступаем к определению искомых параметров механизма. По формуле (21) находим:

$$\operatorname{tg}\alpha_0=-1.65446 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_0=604424.$$

Подсчитывая затем значение $\cos\beta$ по формуле (23) убеждаемся, что только первое значение $\operatorname{tg}\alpha_0$ удовлетворяет условиям задачи, так как при втором значении $\cos\beta$ получается больше единицы.

Имеем

$$\alpha_0 = -121^\circ 09'00'' \quad \text{и} \quad -58^\circ 51'00''$$

$$\cos\beta = \quad 0.252209 \qquad \beta = 75^\circ 27'24''.$$

Затем по формуле (20) имеем:

$$\operatorname{tg}\psi_0 = -0.0631970.$$

Отсюда

$$\psi_0 = 176^\circ 23'02'' \quad \text{и} \quad -3^\circ 36'58''.$$

Вычисляя параметр z_D по формуле (24), имеем:

$$z_D = 0.92847 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = 121^\circ 09'$$

$$z_D = 0.92847 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = 58^\circ 51'.$$

Параметр r по условию всегда величина положительная. Поэтому, вычисляя его по формуле (27), получаем:

$$r = 1.15631,$$

причем одновременно из условия получения положительного значения r устанавливаем, что значению $\alpha_0 = 121^\circ 09'$ соответствует $\psi_0 = 176^\circ 23'02''$, а значению $\alpha_0 = -58^\circ 51'$, значение $\psi_0 = -3^\circ 36'58''$.

Далее по формулам (25) и (26) имеем:

$$y_D = \quad 0.33683 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = 121^\circ 09'$$

$$y_D = -0.336683 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = -58^\circ 51';$$

$$x_D = \quad 0.18575 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = 121^\circ 09';$$

$$x_D = \quad 0.18575 \quad \text{при} \quad \alpha_0 = -58^\circ 51.$$

Наконец, по формулам (9) и (28) получаем:

$$A = 1.0784;$$

$$l = 1.39845.$$

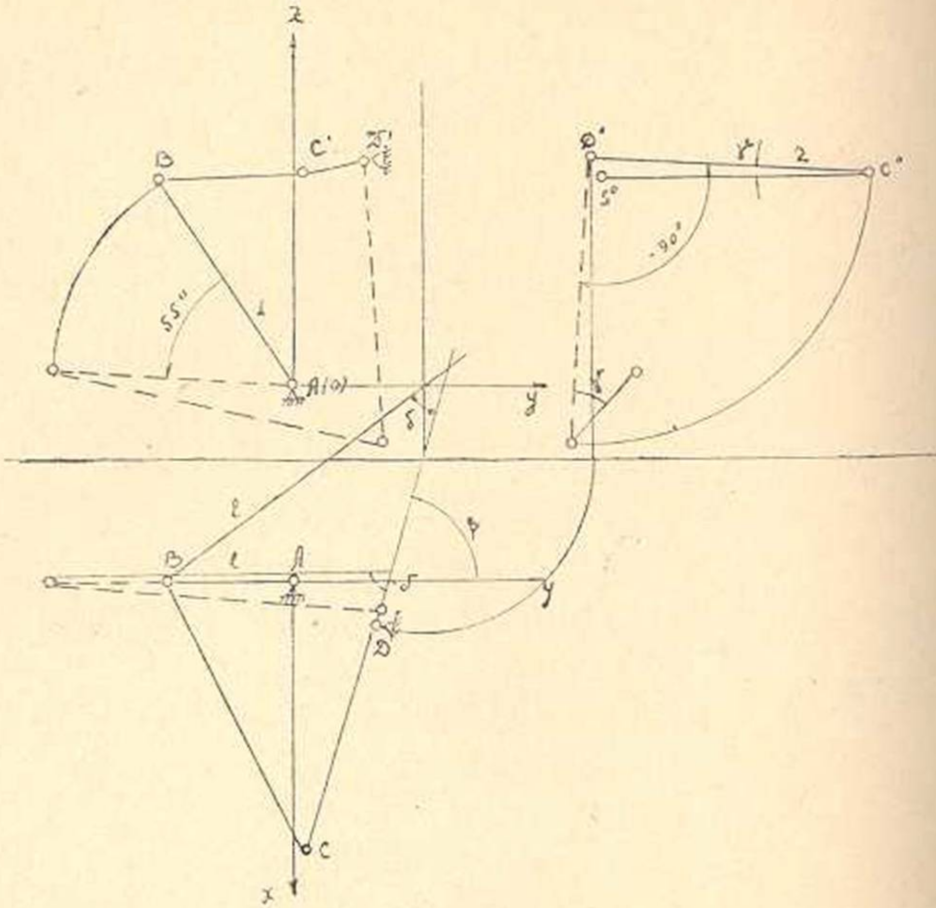
Следовательно, после вычислений мы получаем две системы параметров механизма, которые приведены в таблице 2.

Таблица 2

№№	α_0	ψ_0	x_D	z_D	y_D
1	121°09′	176°23′02″	0.18575	0.92847	0.33683
2	—58°51′	—3°36′58″	0.33683	—0.92847	—0.33683

Значения параметров $\beta = 75^\circ 27'24''$, $r = 1.15631$ и $l = 1.39845$ являются одинаковыми для обеих систем.

На фиг. 5 в ортогональных проекциях построена схема механизма по первой системе параметров. Вторая система нового меха-



Фиг. 5.

низма не дает. Изображение схемы механизма по второй системе получается путем поворота чертежа на 180°.

Полученный механизм теоритически обеспечивает высокую точность приближения к заданной зависимости, но при заданных углах размаха является неудовлетворительным по значениям углов давления. Как видно из фигуры 5, угол γ в одном из промежуточных положений обращается в нуль и, следовательно, угол давления становится равным 90°.

Возможность получения неконструктивных решений при вычислении всех параметров только из условия приближения к заданной зависимости неоднократно указывалось многими исследователями. Поэтому важное значение приобретает разработка методов, с помощью которых можно предварительно на основании графического варьирования параметров или же по атласу кривых выбирать конструктивно приемлемый механизм, уточняя затем его параметры путем вычисления небольшого числа их.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 6 IV 1956

Ն. Ի. Լևիցկի, Կ. Խ. Շահբազյան

ԵՐԿՈՒ ՊՏՏԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ԳՆԴԱՅԻՆ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՔԱՌՕՂԱԿԱՆԻՆԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԹՈԴ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է մի մեթոդ, որի օգնությամբ հնարավոր է լինում նախագծել տարածական քառօղակ մեխանիզմները՝ ցանկացած քանակով պարամետրների դեպքում։

Խնդիրը լուծված է մաքսիմում, այսինքն 8 պարամետրների դեպքում։ Արտածված հավասարումները հնարավորություն են տալիս անալիտիկորեն հաշվելու մեխանիզմի պարամետրների մեծությունները։

Որպես օրինակ դիտարկված է լոգարիթմական ֆունկցիան վերարտադրող տարածական մեխանիզմը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зиновьев В. А.* Проектирование пространственных четырехзвенных механизмов по полному числу параметров. Труды Семинара по теории машин и механизмов, вып. 55, изд. АН СССР, 1954.
2. *Левитский Н. И.* и *Шахбазян К. Х.* Синтез пространственных четырехзвенных механизмов с низшими парами. Труды Семинара по ТММ, вып. 54, Изд. АН СССР, 1954.
3. *Левитский Н. И.* Проектирование плоских механизмов с низшими парами. Изд. АН СССР, 1950.
4. *Новодворский Е. П.* Об одном способе синтеза механизмов. Труды Семинара по ТММ, вып. 42, Изд. АН СССР, 1952.
5. *Степанов Б. И.* Проектирование пространственных передаточных механизмов с низшими парами. Труды Семенара по ТММ, вып. 45, Изд. АН СССР, 1952.
6. *Цвияк П. В.* Графический метод исследования (анализ и синтез) пространственного шарнирного четырехзвенного механизма и распространение этого метода на другие виды механизмов, диссертация, Львовский политехнический институт, 1952.
7. *Чебышев П. Л.* Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1948.