

И. С. Саргсян

Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля

Пусть дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля

$$L[y] = \frac{d^2}{dx^2} y(x) - q(x)y(x) \quad (1)$$

задан на полупрямой $(0, \infty)$, и вещественная функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале.

Краевая задача для оператора (1) определяется граничным условием в нуле:

$$y'(0) - hy(0) = 0. \quad (2)$$

Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение уравнения

$$L[y] + \lambda y = 0, \quad (\lambda = \mu^2, \lambda > 0), \quad (3)$$

при начальных условиях

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \quad (4)$$

Каждой краевой задаче (2) соответствует неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, порождающая изометрическое отображение пространства $L^2(0, \infty)$ на $L^2_{[\rho]}(-\infty, \infty)$ по формулам

$$F(\mu) = l.i.m. \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx,$$

$$f(x) = l.i.m. \int_{-A}^A F(\mu) \varphi(x, \mu) d\rho(\mu),$$

где интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_{[\rho]}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$, соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\mu) d\rho(\mu).$$

Назовем спектральной функцией уравнения (3) (при начальных данных (4)) функцию

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, s; \mu) &= \int_0^x \varphi(x, \nu) \varphi(s, \nu) d\nu, & \mu > 0, \\ \theta(x, s; \mu) &= -\theta(x, s; -\mu), & \mu < 0, \\ \theta(x, s; \mu) &= 0, & \mu = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Настоящая заметка посвящена изучению асимптотического поведения производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ при больших μ , вернее, улучшению полученных нами в работе [7] асимптотических формул для производных спектральной функции. В работе [7] было установлено следующее предложение:

Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированном x и s при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка:

$$\left| \int_0^x \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^k d\nu \left\{ \frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} \right| < C,$$

$$(i+j=k=1, 2, \dots).$$

где $\theta^*(x, s; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3) при $q(x) \equiv 0$, а C — некоторая постоянная, зависящая от x и s и не зависящая от μ .

Цель настоящей работы доказать следующую теорему:

Теорема. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированном x и s справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^x \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^k d\nu \left[\frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^k u(x, t, s)}{\partial x^i \partial s^j} \cdot \frac{I_{k+1/2}(\mu t)}{(\mu t)^{k+1/2}} dt \right\} = 0$$

$$(i+j=k=1, 2, \dots),$$

где $\theta^*(x, s; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3) при $q(x) \equiv 0$, функция $w(x, t, s)$ строится по функции Римана уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, а $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p .

Асимптотическое поведение самой спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ изучено Б. М. Левитаном [1] и В. А. Марченко [4]–[5].

Основными вспомогательными средствами в настоящей работе являются метод Б. М. Левитана [1] и одна спектральная тауберова теорема В. А. Марченко [5].

1. Некоторые вспомогательные формулы и леммы

Для простоты изложения будем предполагать, что $h = 0$, т. е. будем рассматривать задачу:

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - q(x)] y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

Далее, будем предполагать, что спектр задачи (6) неотрицателен или, если отрицательный спектр существует, то он снизу ограничен. Последний случай легко приводится к предыдущему. Пусть $\lambda = \mu^2$, ($\mu > 0$). Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение задачи (6).

Как известно (см., например, [2], стр. 78), для произвольного действительного числа t справедлива формула

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x+t, \mu) + \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

О дифференцируемости функции $w(x, t, s)$ по x и s в работе [7] была доказана следующая

Лемма 1. Если функция $q(x)$ имеет производные до порядка $k-1$, то функция $w(x, t, s)$ по x и s дифференцируема k раз и из суммируемости и ограниченности $(k-1)$ -й производной функции $q(x)$ следует, соответственно, суммируемость и ограниченность производной k -го порядка по x и s функции $w(x, t, s)$.

Обозначим через $g_s^{(l)}$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $g_s(t)$ четна, т. е. $g_s(t) = g_s(-t)$
2. $g_s(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
3. $g_s(t)$ бесконечно дифференцируема.

Обозначим через $\psi_s(\mu) \cos$ — преобразование Фурье функции $g_s(t)$, т. е. положим

$$\psi_s(\mu) = \int_0^\varepsilon g_s(t) \cos \mu t dt. \quad (8)$$

Дифференцируя равенство (7) по x , получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x+t, \mu) + \varphi'_x(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \{ w(x, t, x+t) \varphi(x+t, \mu) - w(x, t, x-t) \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Из определения функции $w(x, t, s)$ следует, что $w(x, t, x \pm t) = 0$, поэтому равенство (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x+t, \mu) + \varphi'_x(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Помножим обе части равенства (10) на $g_s(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до x , после чего, в силу (8), получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \phi_s(\mu) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x \varphi'_t(x+t, \mu) g_s(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \varphi'_t(x-t, \mu) g_s(t) dt \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x g_s(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем первый член в правой части равенства (11). Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi'_t(x+t, \mu) g_s(t) dt &= -\varphi(x, \mu) g_s(0) - \int_0^x \varphi(x+t, \mu) g'_s(t) dt, \\ \int_0^x \varphi'_t(x-t, \mu) g_s(t) dt &= -\varphi(x, \mu) g_s(0) - \int_0^x \varphi(x-t, \mu) g'_s(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^x \varphi'_t(x+t, \mu) g_s(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x \varphi'_t(x-t, \mu) g_s(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \varphi(x+t, \mu) g'_s(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \varphi(x-t, \mu) g'_s(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_x^{x+x} \varphi(s, \mu) g'_s(s-x) ds - \frac{1}{2} \int_{x-x}^x \varphi(s, \mu) g'_s(s-x) ds = \\ &= -\int_{x-x}^{x+x} \varphi(s, \mu) g'_s(s-x) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу равенства (12) равенство (11) можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \psi_s(\mu) &= \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ g'_s(x-s) + \right. \\ &+ \left. \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt \right\} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (11')$$

Пусть функция $f(x) \in L^2(0, \infty)$. Обозначим через $F(\mu)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ (по функциям $\varphi(x, \mu)$), т. е. положим

$$F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx. \quad (13)$$

Тогда в силу равенства Парсеваля из (11') и (13) следует:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \psi_s(\mu) \varphi'_x(x, \mu) d\mu &= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ g'_s(x-s) + \right. \\ &+ \left. \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt \right\} ds. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу произвольности функции $f(x)$, из (14) следует тождество:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) \varphi(s, \mu) \varphi'_x(x, \mu) d\mu &= \\ &= \begin{cases} g'_s(x-s) + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt, & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

В силу определения спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$, т. е. (5), тождество (15) примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} &= \\ &= \begin{cases} g'_s(x-s) + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt, & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через $\theta^*(x, s; \mu)$ спектральную функцию задачи (6) при $q(x) \equiv 0$, т. е. положим

$$\theta^*(x, s; \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \cos vx \cdot \cos vs \, dv. \quad (17)$$

Выписывая для функции $\theta^*(x, s; \mu)$ формулу, аналогичную формуле (16) и вычитывая ее из (16), притом учитывая, что из $q(x) \equiv 0$ следует $w(x, t, s) \equiv 0$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} \int_{|x-s|}^s \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt. \quad (18)$$

Из определения функции $\theta^*(x, s; \mu)$ следует следующая

Лемма 2. При фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|} \bigvee_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} < \infty. \quad (19)$$

Оценка (19) имеет место равномерно на полупрямой $(0, \infty)$.

Так как тождество (18) имеет место для любой бесконечно дифференцируемой функции $g_s(t)$, то оценка (19) удовлетворяется и для первой производной спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$, как это следует из вычислений В. А. Марченко [5], т. е. справедлива.

Лемма 3. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|} \bigvee_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} < \infty. \quad (20)$$

Оценка (20) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

В силу тождества (18) и оценок (19) и (20) применима тауберова теорема 4.1 вышеупомянутой работы В. А. Марченко, согласно которой и в силу леммы 1 (при $k=1$) при больших μ имеет место

Лемма 4. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} = o(\mu). \quad (21)$$

Оценка (21) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

§ 2. Доказательство теоремы

Докажем теорему при $k=1$.

Теорема 1. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s справедлива асимптотическая формула:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) d\nu \left[\frac{\partial \theta(x, s; \nu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cdot \frac{I_{\nu}(\mu t)}{(\mu t)^{1/2}} dt \right\} = 0,$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p .
Доказательство. Положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos \mu t dt, \quad (22)$$

Тогда в силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье из (8) и (22) следует:

$$\int_0^{\infty} \psi_s(\mu) \alpha(x, s; \mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \int_{|x-s|}^{\infty} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_s(t) dt. \quad (23)$$

В силу четности функций $\psi_s(\mu)$ и $\alpha(x, s; \mu)$ по μ , из (18) и (23) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \alpha(x, s; \nu) d\nu \right\} = 0. \quad (24)$$

Из одной леммы Б. М. Левитана (см. [3], лемма 1. 1. 3) в силу равенства (24) следует, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции

$$\frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \alpha(x, s; \nu) d\nu \quad (25)$$

— линейная функция в каждом конечном интервале изменения x и s . Тогда в силу оценки (21) применима одна тауберова теорема Б. М. Левитана (см. [3]), согласно которой из формулы (24) следует, что средние по М. Риссу первого порядка функции (25) стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s , т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) d\nu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \nu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\nu} \alpha(x, s; \sigma) d\sigma \right\} = 0. \quad (26)$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu.$$

В силу определения функции $\alpha(x, s; \mu)$, т. е. (22), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ &= \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \left\{ \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos \nu t dt \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (27)$$

Меняя порядок интегрирования в (27), получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ & \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \cos \nu t d\nu \right\} dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Как известно (см. [6], стр. 234),

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \cos \nu t d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mu \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}. \quad (29)$$

Из (28) и (29) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; \nu) d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cdot \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt,$$

что с формулой (26) доказывает теорему.

Для исследования асимптотического поведения второй производной спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ воспользуемся формулой (16). Дифференцируя эту формулу по s , получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\mu) d\mu \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} &= \begin{cases} -g_1^*(x-s) - g_1(x-s) \frac{\partial w^2(x, t, s)}{\partial x \partial s} \Big|_{t=|x-s|} + \\ 0, \end{cases} \\ &+ \int_{|x-s|}^{\infty} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} g_1(t) dt, \quad |x-s| \leq \varepsilon, \\ &|x-s| \geq \varepsilon. \end{aligned} \quad (30)$$

Выпишем для функции $\theta^*(x, s; \mu)$ формулу, аналогичную формуле (30). Так как в этом случае $w(x, t, s) \equiv 0$, то получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} = \begin{cases} -g_{\varepsilon}^*(x-s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (31)$$

Вычитая формулу (31) из формулы (30), находим:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} \right\} = \\ & = -g_{\varepsilon}(x-s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} + \int_{|x-s|}^{\varepsilon} g_{\varepsilon}(t) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} dt. \end{aligned} \quad (32)$$

В силу формулы обращения, из (8) следует

$$g_{\varepsilon}(x-s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \cos(x-s)\mu d\mu. \quad (33)$$

Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$. Положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cos \mu t dt. \quad (34)$$

Тогда, в силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье, из (8) и (34) следует

$$\int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \alpha(x, s; \mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} g_{\varepsilon}(t) dt. \quad (35)$$

В силу равенств (33), (35) и четности функций $\psi_{\varepsilon}(\mu)$ и $\alpha(x, s; \mu)$ по μ , формула (32) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \Phi(x, s; \mu) = 0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, s; \mu) = & \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} \cos \mu(x-s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \alpha(x, s; \nu) d\nu. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассуждая аналогичным образом, легко установить леммы, обобщающие леммы 2, 3 и 4.

Лемма 5. При фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|^k} \sum_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial^{k+j} \eta^*(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} < \infty, \quad (i+j=k=1, 2, \dots). \quad (38)$$

Оценка (38) имеет место равномерно в полупрямой $(0, \infty)$.

Лемма 6. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu_0 > 0$ имеет место оценка

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|^k} \sum_a^{\alpha + \mu_0} \left\{ \frac{\partial^{k+j} \eta(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} < \infty, \quad (i+j=k=1, 2, \dots). \quad (39)$$

Оценка (39) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Из равенства (4) лемм 5 и 6 (при $k=2$) и вышеупомянутой тауберовой теоремы В. А. Марченко следует

Лемма 7. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то при каждом фиксированных x и s при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{\partial^k \eta(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \eta^*(x, s; \mu)}{\partial x^i \partial s^j} = o(\mu^k), \quad (i+j=k=1, 2, \dots). \quad (40)$$

Оценка (40) имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Докажем теорему при $k=2$.

Теорема 2. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то при каждом фиксированных x и s справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right)^2 dv \left[\frac{\partial^2 \eta(x, s; v)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \eta^*(x, s; v)}{\partial x \partial s} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(3)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^{\mu} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cdot \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt \right\} = 0.$$

Доказательство. Из одной леммы Б. М. Левитана (см. [3], лемма 1. 1. 3) в силу равенства (36) следует, что преобразование Бохнера—Стильтьеса функции $\Phi(x, s; \mu)$ 2-эквивалентно нулю (т. е. полином второй степени) в каждом конечном интервале изменения x и s . Тогда в силу леммы 7 применима одна тауберова теорема Б. М. Левитана (см. [3]), согласно которой из формулы (36) следует, что средние по М. Риссу второго порядка функции (37) стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s , т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 d\nu \left[\frac{\partial^2 \theta(x, s; \nu)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x \partial s} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\nu} \alpha(x, s, \sigma) d\sigma \right\} = 0 \quad (41)$$

Вычислим интегралы

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) d\nu, \\ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \alpha(x, s; \nu) d\nu.$$

Как известно (см. [6], стр. 234),

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \cos \nu t d\nu = \Gamma(3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mu \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}. \quad (42)$$

Тогда

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) d\nu = \\ = \Gamma(3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \frac{I_{3/2}[\mu(x-s)]}{[\mu(x-s)]^{3/2}}. \quad (43)$$

Из асимптотики функций Бесселя, при неограниченном возрастании аргумента, из леммы 1 и (43) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos \nu(x-s) d\nu = 0 \quad (44)$$

равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Далее, из определения функции $\alpha(x, s; \mu)$, т. е. (34), следует, что

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 \left\{ \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cos \nu t dt \right\} d\nu.$$

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ &= \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 \cos \nu t d\nu \right\} dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда из (42) и (45) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 \alpha(x, s; \nu) d\nu = \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \cdot \frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt, \end{aligned}$$

что с формулами (41) и (44) доказывает теорему при $k=2$.

Случай любого k доказывается аналогичным образом.

Применяя полученные асимптотические формулы для производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ можно получить (как это сделано в работе [7]) теоремы о равной суммируемости по М. Риссу производных разложения по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам функций с интегрируемым квадратом.

Введем обозначения:

$$S^*(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(x) \theta^*(x, s; \mu) ds, \quad S(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(s) \theta(x, s; \mu) ds.$$

В силу доказанных асимптотических формул для производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ справедлива

Теорема. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$ -ю производную, то равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d\nu \left\{ \frac{\partial^k S(x, \nu)}{\partial x^k} - \frac{\partial^k S^*(x, \nu)}{\partial x^k} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по М. Риссу k -го порядка производными k -го порядка разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам, стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 5.1 работы [7].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20 VII 1956

Ереванский Армянский
Гос. пед. институт им. Х. Абовяна

Ի. Ս. Սարգսյան

ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԼԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՄԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԱՐՔԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է $(0, \infty)$ կիսաառանցքի վրա որոշված Շտուրմ-Լիովիլի

$$L[y] = \frac{d^2}{dx^2} y(x) - q(x)y(x) \quad (1)$$

դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների ասիմպտոտիկ վարքը: Մեր [7] հոդվածում ստացել էինք գնահատականներ (1) օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների համար, որոնք արտահայտվում էին հետևյալ թևորևմամբ՝

Թեորեմ 1. Եթե $q(x)$ ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի հանրագումարելի $(k-1)$ -րդ կարգի ածանցյալ, ապա ամեն մի ֆիքսած x և s արժեքների համար երբ $\mu \rightarrow \infty$ տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը՝

$$\left| \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^k d\nu \left[\frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right] \right| < C$$

$$(i+j=k=1, 2, 3, \dots),$$

որտեղ $\theta^*(x, s; \mu)$ -ով նշանակված է (1) օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիան, իսկ $\theta(x, s; \mu)$ -ով՝ նույն օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիան, երբ $q(x) \equiv 0$. C -ն հաստատուն է՝ կախված x -ից և s -ից:

Բ. Մ. Լևիտանի մեթոդի [1] և Վ. Ա. Մարչենկոյի հատուկ առաքերյան թևորևմալի [5] օգնությամբ ներկա հոդվածում ստացված է սպեկլի ճշգրիտ ասիմպտոտիկ բանաձև՝ (1) օպերատորի $\theta(x, s; \mu)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների համար: Ապացուցված է հետևյալ թևորևման՝

Թեորեմ 2. Եթե $q(x)$ ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի հանրագումարելի $(k-1)$ -րդ կարգի ածանցյալ, ապա ամեն մի ֆիքսած x և s արժեքների համար տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը՝

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right)^2 d\nu \left[\frac{\partial^k \theta(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^k \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^i \partial s^j} \right] - \right.$$

$$-\frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial^k w(x, t, s)}{\partial x^i \partial s^i} \cdot \frac{I_{k+1/2}(\mu t)}{(\mu t)^{k+1/2}} dt \Big\} = 0,$$

որտեղ $I_p(x)$ — Բեսսելի ֆունկցիան է առաջին սենի և p կարգի:

Հաջորդում բերվում է թեորեմա 2-ի ապացույցը առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալների համար, միաժամանակ ցույց տալով, որ անալոգիալով թեորեման կարելի է ապացուցել ցանկացած կարգի ածանցյալի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Известия АН СССР, сер. матем., 19, 33—58, (1955).
2. Левитан Б. М. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Успехи матем. наук, IV, 3—112, (1949).
3. Левитан Б. М. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Матем. сборник, 35 (77): 2, 267—316, (1954).
4. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. Труды Московского матем. общества, I, 327—420, (1952).
5. Марченко В. А. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов. Известия АН СССР, серия матем., 19, 381—422, (1955).
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Саргсян И. С. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля. Известия АН СССР серия математическая, 21 (1957), 263—282.
8. Саргсян И. С. Суммирование производных разложения по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля. ДАН СССР, 104, 6, 821—824, (1955).

А. А. Талалян

О сходимости почти всюду, подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов

Введение

В работе [2] Марцинкевичем была доказана следующая теорема:
Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная О. Н. система функций, определенных на $[0, 1]$, то существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

не все коэффициенты которого равны нулю и для которого существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$, где

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n \varphi_n(x).$$

Далее он доказал, что в том случае когда функции $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены, коэффициенты a_n могут стремиться к нулю.

Используя несколько другой метод, можно доказать следующую теорему.

Теорема I. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная О. Н. система функций, определенных на $[0, 1]$, то существует универсальный ряд по этой системе с коэффициентами, стремящимися к нулю, т. е. существуют действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ такие, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ обладает свойствами:

*а) для любой измеримой функции $f(x)^{**}$ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.*

* Т. е. $\{\varphi_n(x)\}$ есть ортонормированная система на $[0, 1]$.

** $f(x)$ может быть равна $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

где

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n \tilde{\varphi}_n(x);$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Далее рассматриваются системы полные в смысле сходимости почти всюду.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, называется полной в смысле сходимости почти всюду, если для любой измеримой функции $f(x)$, заданной на $[0, 1]$, можно найти последовательность конечных линейных комбинаций функций из системы $\{f_n(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.

Из теоремы 1 следует, что существуют О. Н. системы, полные в смысле сходимости почти всюду, которые не являются полными в смысле L_2 .

Если не требовать выполнения условия б), то можно доказать, что теорема 1 верна для любой системы $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, полной в смысле сходимости почти всюду.

Далее приводится пример О. Н. системы $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$, которая полна в смысле сходимости почти всюду и для которой не существует универсального ряда с коэффициентами стремящимися к нулю.

§ 1. Универсальные ряды для полных* О. Н. систем

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 1. Для этого нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ — произвольное конечное число функций, определенных на отрезке $\Delta = (\alpha, \beta)$ и принадлежащих классу $L_2(\alpha, \beta)$.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — произвольное фиксированное число, такое, что $\varepsilon_0 < 1$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $f(x) \in L_2(\alpha, \beta)$, обладающую свойствами:

$$1) \quad \text{mes } E[f(x) \neq 0] \leq \varepsilon_0 |\Delta|.$$

$$2) \quad \int_{\Delta} f^2(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta} \psi_0^2(x) dx,$$

$$3) \quad \left| \int_{\Delta} \psi_0(x) \psi_k(x) dx - \int_{\Delta} f(x) \psi_k(x) dx \right| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

* В дальнейшем, если система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в L_2 , то мы будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ полна.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — О. Н. система функций, определенных на $[0,1]$, и $F(x)$ — произвольная функция из $L_2[0,1]$.

Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$ можно определить функцию $f(x) \in L_2[0,1]$, обладающую следующими свойствами:

$$a) \quad \text{mes } E[f(x) \neq 0] \leq \varepsilon_0,$$

$$b) \quad \left| \int_0^1 F(x) \varphi_n(x) dx - \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти леммы являются следствиями леммы 1 и леммы 2 из работы [4].

Лемма 3. Пусть $\varphi_n(x)$ — полная О. Н. система на множестве положительной меры $E_0 \subset [0,1]$ и $f(x) \in L_2(0,1)$, где $f(x) = 0$ при $x \in CE_0$ и $\varphi_i(x) = 0$ при $x \in CE_0$, $i = 1, 2, \dots$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$ можно определить действительные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m$ и множество $E \subset E_0$, обладающие свойствами:

$$1) \quad \left| f(x) - \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } x \in E;$$

$$2) \quad \text{mes } E > \text{mes } E_0 - \varepsilon;$$

$$3) \quad |a_k| \leq \varepsilon \quad (k = n+1, n+2, \dots, m).$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ настолько малым, чтобы множество

$$E_1 = E_0 \cdot E \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon' |\varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

имело меру

$$\text{mes } E_1 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу леммы 2 можно определить $\varphi(x) \in L_2(0,1)$ такую, что множество $E_2 = E_0 \cdot E[\varphi(x) = 0]$ имеет меру

$$\text{mes } E_2 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{3}$$

и для $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ имеем:

$$\left| \int_0^1 \varphi(x) \varphi_k(x) dx - \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \right| = \left| \int_{E_0} [\varphi(x) - f(x)] \varphi_k(x) dx \right| < \varepsilon'.$$

Очевидно, можно считать $\varphi(x) = 0$ при $x \in CE_0$.

Возьмем

$$F(x) = f(x) - \varphi(x), \quad F(x) \in L_2[0,1].$$

Положим

$$a_k = \int_0^1 F(x) \varphi_k(x) dx = \int_{E_0} F(x) \varphi_k(x) dx.$$

Тогда $|a_k| \leq \varepsilon' \quad (k=1, 2, \dots).$

В силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ на E_0 , можно взять m настолько большим, чтобы множество

$$E_3 = E_0 \cdot E \left(\left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - F(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

имело меру $\text{mes } E_3 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{3}$.

На множестве $E = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ будет:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - F(x) - \varphi(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x) - F(x) \right| + \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon' \varphi_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

и так как $|a_k| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots)$ и $\text{mes } E = \text{mes } E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 > \text{mes } E_0 - \varepsilon$, то лемма 3 доказана.

Сформулируем еще две известные леммы [3]:

Лемма 4. Пусть $\varepsilon_\nu \quad (\nu=1, 2, \dots)$ — положительные числа такие, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ сходится, и пусть $\psi_\nu(x)$, $\nu=1, 2, \dots$ — измеримые функции, почти всюду конечные на $[0,1]$ и такие, что $|\psi_\nu(x)| < \varepsilon_\nu$ при $x \in e_\nu$, где e_ν — измеримые множества, удовлетворяющие условиям:

$$\text{mes } e_\nu > 1 - \varepsilon_\nu, \quad e_\nu \subset [0,1].$$

Тогда имеем $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$.

Лемма 5. Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, имеющая в каждой точке сегмента определенное значение, конечное или бесконечное, можно найти последовательность полиномов

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_\nu(x), \dots,$$

которые все различны, имеют рациональные коэффициенты и удовлетворяют условию:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu(x) = f(x)$$

почти всюду на $[0,1]$.

Доказательство теоремы 1. Перенумеруем все полиномы с рациональными коэффициентами: $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$ и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ такую, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (1)$$

Принимая в формулировке леммы 3 $n=0$, $f(x)=P_1(x)$, $\varepsilon=\varepsilon_1$, $E_0=(0,1)$, определяем числа $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}$ и множество E_1 так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\left| P_1(x) - \sum_{i=1}^{n_1} a_i^{(1)} \varphi_i(x) \right| < \varepsilon_1$ при $x \in E_1$;
- 2) $\text{mes } E_1 > 1 - \varepsilon_1$;
- 3) $|a_i^{(1)}| \leq \varepsilon_1$ ($i=1, 2, \dots, n_1$).

Предположим, что числа $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$; $\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}\}, \dots, \{a_{n_{k-2}+1}^{(k-1)}, \dots, a_{n_{k-1}}^{(k-1)}\}$ и множества $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}$ уже определены.

Полагая в формулировке леммы 3 $n=n_{k-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_k$, $E_0=(0,1)$ и

$$f(x) = P_k(x) - \left[\sum_{s=1}^{n_1} a_s^{(1)} \varphi_s(x) + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} a_s^{(2)} \varphi_s(x) + \dots + \sum_{s=n_{k-2}+1}^{n_{k-1}} a_s^{(k-1)} \varphi_s(x) \right],$$

определяем числа $a_{n_{k-1}+1}^{(k)}, \dots, a_{n_k}^{(k)}$ и множество E_k так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\left| P_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=n_{i-1}+1}^{n_i} a_s^{(i)} \varphi_s(x) - \sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s^{(k)} \varphi_s(x) \right| < \varepsilon_k$, $x \in E_k$, $n_0=0$,
- 2) $\text{mes } E_k > 1 - \varepsilon_k$;
- 3) $|a_i^{(k)}| \leq \varepsilon_k$ ($i=n_{k-1}+1, \dots, n_k$).

Продолжая эти построения последовательно для всех $k=1, 2, \dots$ получаем ряд:

$$\sum_{s=1}^{n_1} a_s^{(1)} \varphi_s(x) + \sum_{s=n_1+1}^{n_2} a_s^{(2)} \varphi_s(x) + \dots + \sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s^{(k)} \varphi_s(x) + \dots$$

Напишем его в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (2)$$

где полагается, что члены следуют по порядку их следования в первоначальном ряде.

Покажем, что этот ряд обладает свойствами, указанными в формулировке теоремы 1.

Из определения ряда (2) и условия 3) непосредственно видно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, т. е. условие б) теоремы 1 выполнено.

Проверим условие а).

Заметим сначала, что для любого полинома с рациональными коэффициентами $P_k(x)$ найдутся натуральное число n_k и множество E_k такие, что

$$\left| P_k(x) - \sum_{i=1}^{n_k} a_i \varphi_i(x) \right| < \varepsilon_k \quad \text{при } x \in E_k, \text{ mes } E_k > 1 - \varepsilon_k. \quad (3)$$

Это непосредственно следует из определения ряда (2) и из условия 1).

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция, имеющая определенное значение, конечное или бесконечное, в каждой точке отрезка $[0, 1]$.

В силу леммы 5 можно найти последовательность полиномов с рациональными коэффициентами: $\{P_{s_\nu}(x)\}$, расположенных по порядку их следования в последовательности $\{P_k(x)\}$, такую, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{s_\nu}(x) = f(x) \quad (4)$$

почти всюду на $[0, 1]$, при этом $s_{\nu-1} < s_\nu$, $\nu = 2, 3, \dots$

В силу (3), для некоторой последовательности натуральных чисел $\{m_\nu\}$ ($m_\nu = n_{s_\nu}$, $m_{\nu-1} < m_\nu$) будет иметь место:

$$\left| P_{s_\nu}(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} a_i \varphi_i(x) \right| < \varepsilon_{s_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, x \in E_{s_\nu}, \text{ mes } E_{s_\nu} > 1 - \varepsilon_{s_\nu}) \quad (5)$$

Согласно лемме 4,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[P_{s_\nu}(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} a_i \varphi_i(x) \right] = 0 \quad (6)$$

почти всюду на $[0, 1]$. Отсюда в силу (4) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i \varphi_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{m_n}(x) = f(x)$$

почти всюду.

Теорема 1 доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 условием 3) леммы 3 мы пользовались лишь для того, чтобы коэффициенты a_n , ($n = 1, 2, \dots$) универсального ряда стремились к нулю.

Если не потребовать выполнения условия б), то теорему 1 можно доказать при помощи леммы 3, используя условия 1) и 2).

§ 2. Системы функций, полные в смысле сходимости почти всюду. Универсальные ряды по таким системам

В этом параграфе рассматриваются последовательности $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$, полные в смысле сходимости почти всюду (см. определение, стр. 18).

Теорема 2. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, была полной в смысле сходимости почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

А) Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти множество $E \subset (0, 1)$, $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$ такое, что последовательность $\{f_n(x)\}$ полна на множестве E в смысле L_2^* .

Необходимость. Пусть $\{f_n(x)\}$ полна в смысле сходимости почти всюду. Возьмем какую-нибудь систему $\{\varphi_n(x)\}$, полную в $L_2(0, 1)$. Применяя теорему Егорова, для каждой функции $\varphi_n(x)$ можно найти последовательность линейных комбинаций из функций

системы $\{f_n(x)\}$ вида $F_{n,k}(x) = \sum_{i=1}^{m_k} C_{n,i}^{(k)} f_i(x)$, сходящуюся к $\varphi_n(x)$ при

$k \rightarrow \infty$ равномерно на множестве E_n , $\text{mes } E_n > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тогда на

множестве $E' = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $\text{mes } E' > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, каждая функция равномерно приближается линейными комбинациями из функций $\{f_n(x)\}$.

Так как функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ почти везде конечны, то можно найти множество $E \subset E'$, $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$ такое, что каждая функция $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ ограничена на E и, следовательно, на множестве E принадлежит L_2 .

Очевидно, на множестве E система $\{f_n(x)\}$ будет полной в L_2 .

* Из доказательства будет видно, что теорема верна и в том случае, когда вместо $[0, 1]$ взято любое измеримое множество E_0 .

Достаточность. Пусть $F(x)$ — произвольная измеримая функция. Возьмем последовательность $\{P_k(x)\}$ полиномов так, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = F(x)$$

почти всюду на $[0,1]$ (см. лемму 5). Так как условие А) выполнено,

то легко видеть, что можно найти функции $\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} a_{ki} f_i(x)$ и множества E_k такие, что

$$1) \quad |P_k(x) - \Phi_k(x)| < \varepsilon_k \quad \text{при } x \in E_k;$$

$$2) \quad \text{mes } E_k > 1 - \varepsilon_k, \quad \text{где } \varepsilon_k > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

Тогда в силу леммы 4 будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = F(x)$$

почти всюду на $[0,1]$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если система $\{f_n(x)\}$ полна в смысле сходимости почти всюду, то она остается полной также после удаления любого конечного числа функций, и всегда можно удалить такую бесконечную систему $\{f_{n_k}(x)\}$, что оставшаяся система $\{\varphi_n(x)\} = \{f_n(x)\} - \{f_{n_k}(x)\}$ тоже будет полной в смысле сходимости почти всюду.

Доказательство. Выделим из системы $\{f_n(x)\}$ какую-нибудь функцию, например функцию $f_1(x)$ и покажем, что последовательность $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна в смысле сходимости почти всюду.

Пусть ε — произвольное положительное число и множество E , $\text{mes } E > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ в силу условия А) выбрано так, что система $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна на множестве E в смысле L_2 .

Пусть $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ есть О. Н. система на E , полученная при помощи ортогонализации последовательности $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$. Покажем, что с точностью до постоянного множителя существует не более одной не эквивалентной нулю функции, которая ортогональна ко всем функциям

$$\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

Обозначим через $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x), \dots$ О. Н. систему на E , полученную при помощи ортогонализации системы $f_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$. Система $\{\omega_n(x)\}$ будет полной О. Н. системой на множестве E , и эти функции напишутся в виде:

$$\omega_n(x) = C_{n,1} f_1(x) + C_{n,2} \varphi_2(x) + \dots + C_{n,n} \varphi_n(x) \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Если система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ не полна на E , то коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, ортогональной ко всем этим функциям, по системе $\{\omega_n(x)\}$ будут:

$$a_n = \int_E \omega_n(x) \varphi(x) dx = C_{n1} \int_E f_1(x) \varphi(x) dx.$$

Итак, $a_n = C_0 \cdot C_{n,1}$, $n = 1, 2, \dots$, где $C_0 = \int_E f_1(x) \varphi(x) dx$. Тогда

$C_0 \neq 0$, ибо в силу полноты $\{\omega_n(x)\}$ было бы $\varphi(x) \equiv 0$, и функция $\varphi(x)$ определяется с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля.

Пусть $\varphi_1(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ и $\int_E \varphi_1^2(x) dx = 1$. Тогда система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

есть полная О. Н. система на множестве E и, следовательно, полна в смысле сходимости почти всюду на множестве E (это следует из теоремы 1, а также из теоремы 2).

Применяя лемму 3, где положено $n = 1$, $f(x) = \varphi_1(x)$, $E_0 = E$, мы можем определить функции $\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^k a_i^{(k)} \varphi_i(x)$ и множества E_k ,

$k = 1, 2, \dots$ такие, что

- 1) $|\varphi_1(x) - \Phi_k(x)| < \varepsilon_k$ при $x \in E_k \subset E$;
- 2) $\text{mes } E_k > \text{mes } E - \varepsilon_k$ где $\varepsilon_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$.

Тогда в силу леммы 4 имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \varphi_1(x) \text{ почти всюду на } E.$$

Отсюда, так как $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ полна в смысле сходимости почти всюду на E , то система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ тоже будет полной на E в смысле сходимости почти всюду.

В силу теоремы 2 на некотором множестве $E' \subset E$, где $\text{mes } E' > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{2}$, система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ будет полной в смысле L_2 .

Система $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ тоже будет полной на множестве E' , ибо система $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ получена при помощи ортогонализации этой системы на множестве E , $E \supset E'$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E' \subset (0,1)$ $\text{mes } E' > 1 - \varepsilon$, такое, что $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна на E' в смысле L_2 . В силу тео-

ремы 2 система $f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ полна в смысле сходимости почти всюду на $[0, 1]$.

Итак, доказано, что система $\{f_n(x)\}$ остается полной в смысле сходимости почти всюду, если удалить из нее какую-нибудь одну функцию.

Отсюда непосредственно следует, что система $\{f_n(x)\}$ остается замкнутой в смысле сходимости почти всюду после удаления любого, конечного числа функций.

Покажем теперь, что из $\{f_n(x)\}$ можно удалить бесконечную систему $\{f_{n_k}(x)\}$ такую, что оставшаяся система $\{\psi_n(x)\} = \{f_n(x)\} - \{f_{n_k}(x)\}$ будет полной в смысле сходимости почти всюду.

Для этого, очевидно, достаточно выбрать систему $\{f_{n_k}(x)\}$ так, чтобы каждую функцию $f_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, можно было приблизить линейными комбинациями из функций системы $\{\psi_n(x)\}$.

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

Возьмем из системы $\{f_n(x)\}$ какую-нибудь функцию $f_{n_1}(x)$.

Так как системы $f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+p}(x), \dots$ при любом n полны в смысле сходимости почти всюду на $[0, 1]$, то, применяя теорему Егорова, можно найти последовательность функций вида

$$\Phi_{n_1, k}(x) = \sum_{n=n_1, k+1}^{n_1, k} b_n^{(1)} f_n(x)$$

и множества $e_k^{(1)} \subset (0, 1)$ обладающие свойствами:

- 1) $n_1 < n_{1,1}, n_{1,k} < n_{1,k+1} < n_{1,k+1} (k = 1, 2, 3, \dots)$;
- 2) $|f_{n_1}(x) - \Phi_{n_1, k}(x)| < \varepsilon_k$ при $x \in e_k^{(1)} (k = 1, 2, \dots)$;
- 3) $\text{mes } e_k^{(1)} > 1 - \varepsilon_k (k = 1, 2, \dots)$.

В силу 2) и 3) и в силу леммы 4 имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_1, k}(x) = f_{n_1}(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

Из условия 1) видно, что бесконечное множество функций из системы $\{f_n(x)\}$ не входит в выражения функций $\Phi_{n_1, k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Обозначим это счетное множество функций через $\{f\}_1$.

Возьмем какую-нибудь функцию $f_{n_2}(x)$ из множества $\{f\}_1$, так, чтобы $n_2 > n_1$.

Точно так же, как выше, можно найти последовательность функций вида

$$\Phi_{n_2, k}(x) = \sum_{n=n_{2, k}+1}^{n_{2, k}^*} b_n^{(2)} f_n(x)$$

и множества $e_k^{(2)}$, $k=1, 2, \dots$, обладающие свойствами:

- 1) $n_2 < n_{2, 1}$, $n_{2, k} < n_{2, k}^* < n_{2, k+1}$ ($k=1, 2, \dots$);
- 2) $|f_{n_2}(x) - \Phi_{n_2, k}(x)| < \varepsilon_k$ при $x \in e_k^{(2)}$, $k=1, 2, \dots$
- 3) $\text{mes } e_k^{(2)} > 1 - \varepsilon_k$ ($k=1, 2, \dots$)

Обозначим через $[f]_2$ множество функций из $\{f_n(x)\}$, не входящих в выражения функций $\Phi_{n_2, k}(x)$, $k=1, 2, \dots$. Легко видеть, что можно положить числа $n_{2, k}$, $n_{2, k}^*$, $k=1, 2, \dots$ выбранными таким образом, чтобы наряду с условиями 1), 2) и 3) выполнялось также условие:

4) Множество $[f]_1 \cdot [f]_2$, состоящее из общих элементов множеств $[f]_1$ и $[f]_2$, состоит из бесконечного числа элементов.

Точно так же, как и выше, имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_2, k}(x) = f_{n_2}(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

Продолжим этот процесс неограниченно.

В m -ом шаге имеем функцию $f_{n_m} \in [f]_1 \cdot [f]_2 \cdots [f]_{m-1}$; $n_m > n_{m-1}$, последовательность функций

$$\Phi_{n_m, k}(x) = \sum_{n=n_{m, k}+1}^{n_{m, k}^*} b_n^{(m)} f_n(x) \quad (k=1, 2, \dots) \text{ при чем}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_m, k}(x) = f_{n_m}(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

$$n_m < n_{m, k} < n_{m, k}^* < n_{m, k+1},$$

и множество $[f]_m$, которое имеет бесконечное число общих элементов с множеством $[f]_1 \cdot [f]_2 \cdots [f]_{m-1}$.

Из системы $\{f_n(x)\}$ исключим систему $\{f_{n_m}(x)\}$ и остальную систему обозначим через $\{\psi_n(x)\}$.

Так как для любой функции $f_{n_m}(x)$, $m=1, 2, 3, \dots$ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{n_m, k}(x) = f_{n_m}(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ и, как видно из выбора системы $\{f_{n_m}(x)\}$, функции $\Phi_{n_m, k}(x)$, $m=1, 2, \dots$, $k=1, 2, \dots$ выражаются функциями, входящими в систему $\{\psi_n(x)\} = \{f_n(x)\} - \{f_{n_m}(x)\}$, то теорема доказана.

Замечание. В частности, когда имеем полную О. Н. систему $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[0, 1]$, то для нее теорема 3 непосредственно следует из теоремы 1 (см. стр. 17).

В самом деле, пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, является универсальным рядом.

Так как $a_n \rightarrow 0$, то можно взять последовательность $\{m_k\}$ так, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} \varphi_{m_k}(x)$ сходилась почти всюду на $[0, 1]$. Пусть почти везде конечная функция $F_0(x)$ является суммой этого ряда, и пусть $F(x)$ — какая-нибудь измеримая функция.

Возьмем $\Phi(x) = F(x) + F_0(x)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ универсальный, то существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = \Phi(x).$$

Но $S_{n_k}(x) = \sum_{(s)} a_{m_s} \varphi_{m_s}(x) + \sum_{(e)} a_{p_e} \varphi_{p_e}(x)$, где φ_{p_e} , $e = 1, 2, \dots$ суть функции, оставшиеся от $\{\varphi_n(x)\}$ после удаления системы $\{\varphi_{m_k}(x)\}$.

Так как при $k \rightarrow +\infty$ первая сумма стремится к $F_0(x)$, то вторая сумма будет стремиться к $F(x)$.

Итак, система $\{\varphi_{p_e}(x)\}$ полна в смысле сходимости почти всюду. Остается заметить, что эти рассуждения можно провести также при удалении из $\{\varphi_n(x)\}$ любого конечного числа функций что и требовалось доказать.

В силу теоремы 2 отсюда следует, что при удалении любого конечного числа функций из полной О. Н. системы $\{\varphi_n(x)\}$ оставшаяся система обладает свойством А (см. теорему 2), и всегда можно удалить такую бесконечную последовательность $\{\varphi_{m_k}(x)\}$, что оставшаяся система будет обладать свойством А.

Теорема 4. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, полна в смысле сходимости почти всюду.

Тогда существуют действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ является универсальным, т. е. для любой измеримой функции $F(x)$ существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = F(x) \text{ почти всюду на } [0, 1], \text{ где}$$

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n f_n(x).$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что, так как в силу теоремы 3 все последовательности $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$, ..., $f_{n+p}(x)$, ..., $n = 1, 2, \dots$ полны в смысле сходимости почти всюду, то для любой почти всюду конечной функции $f(x)$, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и n , применяя теорему Егорова, можно найти числа a_{n+1} , a_{n+2} , ..., a_m и множество E такие, что

$$1) \quad \left| f(x) - \sum_{k=n+1}^m a_k f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } x \in E;$$

$$2) \quad \text{mes } E > 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, выполняются условия 1) и 2) леммы 3, которая применяется для доказательства теоремы 1 (см. стр. 17).

В силу замечания, сделанного в конце доказательства теоремы 3 (в конце § 1), мы видим, что теорема 4 верна.

Вообще говоря, для любой системы $\{f_n(x)\}$, полной в смысле сходимости почти всюду, нельзя построить универсальный ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю. Простым примером такой системы является система $\{x^n\}$, рассматриваемая на $[0, 1]$.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ имеем $a_n \rightarrow 0$, то он будет абсолютно сходящимся для $x < 1$ и, следовательно, не может быть универсальным.

Верно также следующее утверждение:

Существует О. Н. система $\{\psi_n(x)\}$ функций, заданных на $[0, 1]$, обладающая тем свойством, что она полна в смысле сходимости почти всюду, и по этой системе нельзя построить универсальный ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю.

Построение системы $\{\psi_n(x)\}$.

Возьмем последовательность интервалов

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots \quad \delta_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Разделим последовательность $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ на счетное число бесконечных последовательностей $\{\delta_k^{(m)}\}$ так, чтобы

1) при $m \neq l$ последовательности $\{\delta_k^{(m)}\}$ и $\{\delta_k^{(l)}\}$ не имели общих интервалов;

2) в каждой последовательности $\{\delta_k^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \dots$; интервалы следовали по порядку их следования в последовательности $\{\delta_n\}$ и при $m < l$ интервал $\delta_k^{(m)}$ предшествовал в последовательности $\{\delta_n\}$ интервалу $\delta_k^{(l)}$ для любого $k = 1, 2, \dots$

Положим:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(1)}, \\ 0 & \text{при } x \notin \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(1)}. \end{cases}$$

Определим $\varphi_2(x)$ следующим образом: возьмем из последовательности $\{\delta_k^{(1)}\}$ какой-нибудь интервал $\delta_{k_2}^{(1)}$, расположенный левее от δ_1 .

Заметим, что в силу свойства 2) все интервалы $\delta_k^{(2)}$ расположены левее интервала δ_1 .

Положим:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in \delta_0 + \delta_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \\ 1 & \text{при } x \in \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(2)}, \\ \frac{\int_{\delta_0+\delta_1} x \varphi_1(x) dx}{|\delta_{k_2}^{(1)}|} & \text{при } x \in \delta_{k_2}^{(1)}, \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0,1]. \end{cases}$$

Из определения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и из свойства 1) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= \int_{(\delta_0+\delta_1)} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx + \int_{C(\delta_0+\delta_1)} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \\ &= \int_{(\delta_0+\delta_1)} x \varphi_1(x) dx + \int_{\delta_{k_2}^{(1)}} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ уже определены так, что они попарно ортогональны на $[0,1]$, и функция $\varphi_i(x)$, $1 < i \leq n$ определена так, что:

$$(*) \varphi_i(x) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin (\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{i-1}) + (\delta_{k_1}^{(1)} + \delta_{k_1}^{(2)} + \dots + \delta_{k_1}^{(i-1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(i)}, \\ 1 & \text{при } x \in \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(i)}. \end{cases}$$

Здесь $\delta_{k_i}^{(j)}$ есть интервал из последовательности $\{\delta_k^{(j)}\}$ $j > i$, и полагается k_i выбранным настолько большим, что интервал $\delta_{k_i}^{(1)}$, а, следовательно, и интервалы $\delta_{k_i}^{(j)}$, $j > 1$, расположены левее интервала δ_{i-1} (см. свойство 2).

Интервал $\delta_i^{(1)}$ лежит левее интервалов $\delta_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, ($i = 1$).

Тогда $\delta_i^{(1)}$ лежит левее $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$, и, следовательно, все интервалы $\delta_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \dots$ лежат левее интервала δ_{i-1} (см. условия 1 и 2).

Далее, полагаем, что $k_i < k_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Определим функцию $\varphi_{n+1}(x)$. Возьмем $k_{n+1} > k_n$ так, чтобы выполнялось условие:

(**) Интервал $\delta_{k_{n+1}}^{(1)}$ левее интервала δ_n . Заметим, что интервалы $\delta_k^{(n+1)}$, $k = 1, 2, \dots$ лежат левее интервала δ_n .

Положим:

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} x^n & \text{при } x \in \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n = \left(\frac{1}{n+2}, 1\right), \\ -\frac{\int_{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n} x^n \varphi_i(x) dx}{|\delta_{k_{n+1}}^{(i)}|} & \text{при } x \in \delta_{k_{n+1}}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n, \\ 1 & \text{при } x \in \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(n+1)}, \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0, 1]. \end{cases}$$

Проверим, равенство $\int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В силу свойства (*) функции $\varphi_i(x)$ и определения функции $\varphi_{n+1}(x)$, учитывая, что $\varphi_i(x) = 0$ на $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(n+1)}$ (см. 1), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx &= \int_{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n} \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\delta_{k_{n+1}}^{(j)}} \varphi_j(x) \varphi_{n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

При $j \neq i$ интервалы $\delta_{k_{n+1}}^{(j)}$ отличны от всех интервалов $\delta_k^{(i)}$ $k = 1, 2, \dots$. Далее, интервалы $\delta_{k_{n+1}}^{(j)}$ лежат левее δ_n и, следовательно, левее от $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$ ($i < n$) в силу (**) и свойства 2). Следовательно, в силу (*) будет $\varphi_i(x) = 0$ на $\delta_{k_{n+1}}^{(j)}$ при $j \neq i$.

Итак:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx &= \int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n)} \varphi_i(x) \varphi_{n+1}(x) dx + \int_{\delta_{n+1}^{(1)}} \varphi_{n+1}(x) \varphi_i(x) dx = \\ &= \int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n)} x^n \varphi_i(x) dx - \int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n)} x^n \varphi_i(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что из определения функции $\varphi_{n+1}(x)$ непосредственно видно, что она тоже обладает свойством (*) функций $\varphi_i(x)$, $i \leq n$. Следовательно, так как $\varphi_2(x)$ обладает свойством (*), то $\varphi_i(x)$ обладают свойством (*) при любом $i = 1, 2, \dots$.

Неограниченно продолжая вышеуказанные построения мы получим систему $\{\varphi_n(x)\}$, ортогональную на $[0, 1]$. Положим:

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$$

Тогда система $\{\psi_n(x)\}$ будет О. Н. системой на $[0, 1]$.

Покажем, что $\{\psi_n(x)\}$ есть искомая система.

Для этого оценим нормы $\|\varphi_n(x)\|$, $n = 1, 2, \dots$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\| &= \left(\int_0^1 \varphi_n^2(x) dx \right)^{1/2} > \left(\int_{\delta_{k_n}^{(1)}} \varphi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \\ &= \left[\left(\frac{\int_{(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1})} \varphi_1(x) \varphi_n(x) dx}{|\delta_{k_n}^{(1)}|} \right)^2 \cdot |\delta_{k_n}^{(1)}| \right]^{1/2} > \left(\frac{\left[\int_{1/2}^1 x^{n-1} dx \right]^2}{|\delta_{k_n}^{(1)}|} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как в силу (**) интервал $\delta_{k_n}^{(1)}$ лежит левее интервала δ_{n-1} и длины интервалов убывают с возрастанием номера, то:

$$|\delta_{k_n}^{(1)}| \leq |\delta_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Итак.

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\| &> \sqrt{(n+1)(n+2)} \int_{1/2}^1 x^{n-1} dx = \sqrt{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n \cdot n} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n}} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) > A > 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

По определению системы $\{\psi_k(x)\}$, для любого натурального N имеем при $k > N$

$$\psi_k(x) = \frac{x^k}{\|\varphi_k\|} \quad \text{при } x \in \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_N = \left(\frac{1}{N+2}, 1\right).$$

Отсюда видно, что система $\{\psi_k(x)\}$ полна в L_2 на любом интервале $\left(\frac{1}{N}, 1\right)$, $N = 1, 2, \dots$ и, следовательно, полна в смысле сходимости почти всюду (см. теорему 2). С другой стороны, любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$, где $a_k \rightarrow 0$, будет абсолютно сходящимся в интервале $(0, 1)$,

ибо для любого N имеем, при $x \in \left(\frac{1}{N+3}, 1\right)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k x^k}{\|\varphi_k\|},$$

и второй ряд абсолютно сходится, так как $\|\varphi_k\| > A > 0$. Таким образом, любой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$, где $a_n \rightarrow 0$, не может быть универсальным.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 1 VIII 1956

Յ. Յ. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐՅԱ ԱՄԵՆՈՒՐԵՔ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկվում են $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ շարքերը, որտեղ $f_n(x)$

($n = 1, 2, \dots$) $[0, 1]$ հատվածի վրա որոշված համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիա է:

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեման:

Թեորեմ. եթե $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը կազմում է լրիվ օրթոգոնալ սիստեմ, ապա, ըստ այդ սիստեմի, գոյություն ունի ունիվերսալ շարք, որի գործակիցները ձգտում են զրոյի, այսինքն գոյություն ունի իրական քվերի այնպիսի $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ հաջորդականություն, որի համար՝

ա) $[0, 1]$ հատվածում որոշված ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի բնական քվերի այնպիսի $\{n_k\}$ հաջորդականություն, որ $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x)$ համարյա ամենուրեք $[0, 1]$ -ի վրա, որտեղ

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n f_n(x),$$

$$p) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

եթե $p)$ պայմանը չպահանջենք, ապա թեորեման ճիշտ կլինի ցանկացած $(f_n(x))$ հաջորդականության համար, եթե այդ հաջորդականության ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաները միևնույն թիվ են համարյա միևնույնք զուգամիտելու իմաստով:

Այդ թեորեմաները հանգիստանում են ոչ-զրոյական շարքերի վերաբերյալ Մարցինկևիչի թեորեմաների ընդհանրացումը [2]:

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaczmarz und Steinhaus. Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa-Lwow (1935).
2. Marcinkiewicz. Quelques theorems sur les series orthogonales. Ann. de la Soc. Pol de math. XVI, 84—95 (1938).
3. Меньшов Д. Е. О частных суммах тригонометрических рядов. Матем. сборник, 20 (62): 2.
4. Талалян А. А. О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p , $p > 1$. Известия АН Армянской ССР, серия физико-матем. наук, 10, 1 (1957).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. Шерман

Об упругом равновесии пластинки, опертой по краю

§ 1. Допустим, что срединная поверхность пластинки заполняет конечную и односвязную область S , ограниченную замкнутым контуром L , и расположенную в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Будем считать декартовы координаты точек контура L требуемое число раз дифференцируемыми по дуге s . Обход L , как обычно, примем совершающимся против движения часовой стрелки. Для удобства за начало координат возьмем некоторую точку, принадлежащую S .

Прогиб $w_1(x, y)$ срединной поверхности пластинки удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta w_1 = \frac{q}{D}, \quad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, $q(x, y)$ — изгибающая пластинку нормальная нагрузка, и D — цилиндрическая жесткость. Кроме того, в случае опертой границы L должны соблюдаться на ней следующие предельные равенства:

$$w_1 = 0, \quad G(w_1) \equiv \sigma \Delta w_1 + (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \sin 2\theta + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \sin^2 \theta \right] = 0. \quad (1.2)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона и θ — угол между осью абсцисс и нормалью n к L , направленной во вне S . Таким образом, искомое решение $w_1(x, y)$ должно удовлетворять вкпе уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2).

Насколько нам известно, сформулированная задача была впервые рассмотрена З. И. Халиловым [1] для случая конечной и односвязной области в предположении, что ее граница не имеет точек с нулевой кривизной. Это требование не вызывается ни существом дела, ни избранным методом решения; автор оказался вынужденным прибегнуть к нему лишь из-за не вполне удачной записи краевых условий. Несколько позже другое решение той же задачи, свободное от указанного недостатка и для более общего случая многосвязной области,

было дано М. М. Фридманом [2]. Наконец А. И. Каландия [3], всецело основываясь на теории сингулярных интегральных уравнений, предложил еще одно решение упомянутой задачи. А. И. Каландия пока не указал алгоритм для решения своей системы сингулярных уравнений. Сведение же ее посредством регуляризации к системе Фредгольма в данном случае нецелесообразно; это мнение как будто разделяется и автором. Между тем наличие упомянутого алгоритма было бы весьма желательно и как нельзя более своевременно; с одной стороны, он позволил бы завершить полное исследование вопроса, включая его численную интерпретацию, оставаясь в сфере одних и тех же идей; помимо этого, такой алгоритм отвечал бы существующей сейчас настоятельной потребности в разработке эффективных методов решения сингулярных уравнений.

Новое решение задачи, которое мы намерены здесь предложить, обладает известными преимуществами по сравнению с перечисленными.

Положим

$$w_1(x, y) = w(x, y) + w_0(x, y), \quad (1.3)$$

где $w_0(x, y)$ — некоторое каким-либо образом найденное частное решение неоднородного уравнения (1.1); новая неизвестная $w(x, y)$ является бигармонической функцией; для нее имеем краевые условия

$$w = -w_0; \quad \bar{G}(w) = -G(w_0). \quad (1.4)$$

Согласно известной формуле Гурса,

$$2w(x, y) = \bar{z}\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1(\bar{z}) + \chi_1(z) + \bar{\chi}_1(\bar{z})$$

$$\psi_1(z) = \chi_1(z), \quad (1.5)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — некоторые функции комплексного переменного z , регулярные в области S . Имея в виду (1.5) и продифференцировав первое из равенств (1.4) по дуге s , получим на L

$$R_e t_s \{ \overline{\varphi_1(t)} + \bar{t} \varphi_1^*(t) + \psi_1(t) \} = f_1(s), \quad (1.6)$$

$$R_e \{ \lambda_0 \varphi_1(t) - t_s^2 [\bar{t} \varphi_1^*(t) + \psi_1(t)] \} = g_1(s), \quad (1.7)$$

где индекс s у переменной t , обозначает дифференцирование по дуговой абсциссе, и

$$f_1(s) = -\frac{\partial w_0}{\partial s}, \quad g_1(s) = -\frac{1}{1-\sigma} G(w_0), \quad \lambda_0 = \frac{2(1+\sigma)}{1-\sigma}.$$

Весьма важно прийти отсюда к такой форме граничных условий, каждое из которых наряду с $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ содержало бы высшие производные одного и такого же (не больше второго) порядка функции $\varphi_1(z)$ и, соответственно, на единицу сниженного порядка функ-

ции $\psi_1(z)$; желательно, естественно, чтобы порядок этих производных был возможно наименьшим. Мы добьемся этого, продифференцировав равенство (1.6) по дуге s и сложив его почленно с равенством (1.7). Действительно, в результате получим

$$\operatorname{Re}\{ (1 + \lambda_0) \varphi_1'(t) + \overline{\varphi_1'(t)} + t_{ss} [\overline{\varphi_1(t)} + \overline{t} \varphi_1'(t) + \psi_1(t)] \} = f_2(s), \quad (1.8)$$

где $f_2(s) = f_1'(s) + g_1(s)$. В каждое из условий (1.6) и (1.8) входят только производные первого порядка функции $\varphi_1(z)$, кроме того, взятые вместе, они эквивалентны предельным равенствам (1.6) и (1.7).

Примечание. А. И. Каландия, [4] преследуя, по-видимому, сходную цель (устранение из граничных равенств $\varphi_1'(t)$ и $\psi_1'(t)$) в более сложной задаче, поступает несколько иначе; он интегрирует по дуге краевое равенство (1.7) и складывает его с равенством (1.6), скорректированным на специальный множитель. Из полученного в результате равенства оказываются исключенными все слагаемые с производными искомого функций, в то время как в сопутствующем равенстве (1.6) присутствует первая производная $\varphi_1(t)$. Подобная форма заменяющего (1.7) граничного равенства вполне устраивает автора; для разбираемого же здесь случая она связана с серьезными неудобствами и чревата именно теми осложнениями*, которые мы стремимся избежать. Для нас несравненно более выгодна запись условия в виде (1.8).

Дабы сделать более явственной проводимую ниже аналогию между изучаемой и некоторой задачей плоской теории упругости, введем вместо первоначальных $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ функции

$$\varphi(z) = i\varphi_1(z), \quad \psi(z) = i\psi_1(z). \quad (1.9)$$

Затем, положив

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \psi(z) = p(x, y) + iq(x, y), \quad (1.10)$$

где u, v и p, q — гармонические сопряженные между собой функции, запишем (1.6) и (1.8) следующим образом:

$$x_s v - y_s u + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial x} + x_s q + y_s p = f_1(s), \quad (1.11)$$

$$x_{ss} v - y_{ss} u + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial x} + x_{ss} q + y_{ss} p = f_2(s), \quad (1.12)$$

при обозначениях

* Мы подразумеваем под таковыми затруднения, препятствующие приведению задачи непосредственно к регулярному интегральному уравнению; обычно при этом оказывается возможным прийти к нему лишь через промежуточный этап, — точнее говоря, через сингулярное уравнение, которое предварительно должно быть получено. Как отмечалось выше, в настоящее время мы, к сожалению, еще не располагаем достаточно разработанными, в смысле их эффективности, методами численного решения сингулярных уравнений. Поэтому, учитывая цели, которые мы себе ставим, сведение задачи к такому уравнению пока нельзя считать завершающим этапом исследования. Регуляризация же сингулярного уравнения, как правило, приводит к уравнению Фредгольма с громоздкими выражениями для ядер, что также не вполне приемлемо.

$$\begin{aligned}\delta_1 &= xu_s - yx_s, \quad \delta_2 = xx_s + yy_s, \quad \lambda = 2 + \lambda_0, \\ \gamma_1 &= xy_{ss} - yx_{ss}, \quad \gamma_2 = xx_{ss} + yy_{ss} + \lambda.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Прибавим теперь к левой части (1.11) оператор

$$(2S)^{-1} \text{Re} \bar{t}_s \text{Re} \varphi'(0), \quad (1.14)$$

где S — площадь области того же наименования; вновь полученное равенство (мы позволим себе его не выписывать) проинтегрируем по дуге кривой L .

Тогда, после очевидных преобразований, получим:

$$\text{Re} \varphi'(0) = 0. \quad (1.15)$$

Таким образом, две любые регулярные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющие видоизмененному равенству (1.11), обязательно обращают в нуль оператор (1.15); иначе говоря, видоизмененное равенство равносильно прежнему (1.11) при дополнительном соотношении (1.15). Назначение оператора (1.14) станет понятным в дальнейшем.

Итак, в конечном счете задача сводится к отысканию функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из граничных условий (1.11) и (1.12), причем первое из них предпочтительно брать в слегка измененной, как указано, форме.

Отметим ряд важных соотношений, справедливых на L :

$$\begin{aligned}x_s^2 + y_s^2 &= 1, \quad x_s x_{ss} + y_s y_{ss} = 0, \quad x_s (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) = y_{ss}, \\ -y_s (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) &= x_{ss}, \quad (xy_s - yx_s) (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) = \\ &= -(xx_{ss} + yy_{ss}), \\ (xx_s + yy_s) (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) &= xy_{ss} - yx_{ss}.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Они будут использованы ниже при различных выкладках. Приведем тут же основанную на тождественном преобразовании известную интегральную формулу [1] для бигармонической функции

$$\begin{aligned}& \int_L \left[w H(w) - \frac{d\tau w}{dn} G(w) \right] ds = \\ &= - \iint_S \{ \sigma (\Delta w)^2 + (1 - \sigma) [(w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2(w_{xy})^2] \} dx dy, \quad (1.17)\end{aligned}$$

где

$$H(w) = \frac{d\Delta w}{dn} + (1 - \sigma) \frac{d}{ds} [w_{xy} \cos 2\theta + (w_{yy} - w_{xx}) \cos \theta \sin \theta],$$

причем имеет место равенство

$$\int_L H(w) ds = 0. \quad (1.18)$$

Не трудно видеть, что для $w(x, y)$ тождественно равной постоянной

$$\varphi(z) = kz + C, \quad \psi(z) = \bar{C}, \quad (1.19)$$

где k и C соответственно произвольные действительная и комплексная постоянные.

§ 2. Искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ зададим интегральными формулами

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) G_n(t, z) dt, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) H_n(t, z) dt, \quad (2.1)$$

где плотности $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ — пока неизвестные вещественные величины, а функции G_n и H_n таковы:

$$\begin{aligned} G_1(t, z) &= -\bar{t}_s t_{ss} G_2(t, z), \quad G_2(t, z) = -\frac{1}{\pi\lambda} \left[-1 + \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) \right], \\ H_1(t, z) &= \frac{1}{\pi\lambda} \left\{ \bar{t}_s \bar{t}_{ss} \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) + P(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) \right\}, \\ H_2(t, z) &= \frac{1}{\pi\lambda} \left\{ -\bar{t}_s^2 \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) + Q(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) \right\}, \\ P(t) &= -(\bar{t} t_s \bar{t}_{ss} - \lambda \bar{t}_s), \quad Q(t) = -\bar{t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Логарифмический член в этих формулах следует считать равным нулю в начале координат, по предположению находящемся в области S . Из второго равенства (2.1) вытекает, что $\psi(0) = 0$; это соотношение будет учтено впоследствии. Обоснование представимости в виде (2.1)–(2.2) любых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярных в области S (вторая из которых обращается в нуль при $z = 0$), равносильно, собственно говоря, доказательству возможности нахождения плотностей γ_1 и γ_2 из каких-либо краевых условий; при этом достаточно ограничиться случаем, когда правые части (свободные члены) краевых условий непосредственно составляются по левым частям, содержащим граничные значения заданных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и производные от них. Вообще же краевые условия можно брать любыми, или подбирать специально в той мере, в какой это доступно, наимыгоднейшим образом, с целью возможно проще провести упомянутое доказательство; в частности, можно, например, исходить из условий (1.11) и (1.12). В этом случае вопрос о правомерности представления (2.1) и (2.2) оказывается тесно связанным с рассматриваемой задачей.

Читатель убедится ниже, что представление (2.1)–(2.2) обладает важными положительными качествами; они столь существенны, что позволяют с уверенностью утверждать о его решающих преимуществах, по крайней мере, в главном перед остальными представлениями, которые можно придумать или найти из каких-либо соображений.

Отделим в (2.1) вещественные и мнимые части, положив

$$\begin{aligned} G_n(t, z) &= \bar{t}_s \{u_n(s; x, y) + i v_n(s; x, y)\}, \\ H_n(t, z) &= \bar{t}_s \{p_n(s; x, y) + i q_n(s; x, y)\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда на основании (1.10) будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) u_n(s; x, y) ds, \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) v_n(s; x, y) ds, \\ p(x, y) &= \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) p_n(s; x, y) ds, \quad q(x, y) = \sum_{n=1}^2 \int_L \gamma_n(s) q_n(s; x, y) ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем заключающиеся под знаками интегралов вещественные функции равны

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \xi_{ss} \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) - \eta_{ss} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ u_2 &= -\frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \xi_s \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) - \eta_s \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ v_1 &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \eta_{ss} \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) + \xi_{ss} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ v_2 &= -\frac{1}{\pi \lambda} \left\{ \eta_s \left(-1 + \ln \frac{r}{\rho} \right) + \xi_s \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \\ p_1(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ a(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} + b(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + h_1(s; x, y) \right\}, \\ p_2(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ -\eta \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} - \xi \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + h_2(s; x, y) \right\}, \\ q_1(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ b(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} - a(s) \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + l_1(s; x, y) \right\}, \\ q_2(s; x, y) &= \frac{1}{\pi \lambda} \left\{ -\xi \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial n} + \eta \frac{\partial \ln \frac{r}{\rho}}{\partial s} + l_2(s; x, y) \right\}, \\ a(s) &= \lambda \eta_s - \xi (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}), \quad b(s) = \lambda \xi_s + \eta (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}), \\ h_1(s; x, y) &= \left\{ \xi_{ss} \ln \frac{r}{\rho} + \eta_{ss} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h_2(s; x, y) = - \left\{ \xi_s \ln \frac{r}{\rho} + \eta_s \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} - \arctg \frac{\eta}{\xi} \right) \right\},$$

$$l_1(s; x, y) = - \left\{ \eta_{ss} \ln \frac{r}{\rho} - \xi_{ss} \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} - \arctg \frac{\eta}{\xi} \right) \right\},$$

$$l_2(s; x, y) = \left\{ \eta_s \ln \frac{r}{\rho} - \xi_s \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} - \arctg \frac{\eta}{\xi} \right) \right\},$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

В формулах (2.1) и производной от первой из них перейдем к пределу, устремляя z к некоторой точке $t_0 = \xi_0 + i\eta_0$ кривой L . Найденные значения для функций $\varphi(t_0)$, $\psi(t_0)$ и $\varphi'(t_0)$, по отделении в них вещественной и мнимой частей, подставим в граничные условия (1.11) и (1.12), присоединив дополнительно к (1.11) оператор (1.14). Тогда, выполнив некоторые преобразования, получим для определения плотностей $v_1(s)$ и $v_2(s)$ систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$v_j(s_0) + \sum_{n=1}^2 \int_L v_n(s) K_{n,j}(s, s_0) ds = f_j(s_0) \quad (j = 1, 2). \quad (2.6)$$

Ядра системы, как читатель увидит, являются непрерывными функциями переменных s и s_0 . Чтобы выражениям для них придать большую обозримость, положим

$$K_{n,j}(s, s_0) = P_{n,j}(s, s_0) \frac{\partial \ln r_0}{\partial n} + Q_{n,j}(s, s_0) \frac{\partial \ln r_0}{\partial s} + R_{n,j}(s, s_0) \quad (n, j = 1, 2), \quad (2.7)$$

где n — нормаль к контуру L , направленная в область внешнюю к S и $P_{n,j}$, $Q_{n,j}$, $R_{n,j}$ — некоторые функции; они могут быть при помощи (1.16) приведены к достаточно простой форме. Именно, после подчас довольно длинных вычислений, будем иметь:

$$P_{11} = \frac{1}{\pi} (\xi_s \xi_{0s} + \eta_s \eta_{0s}) - (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) Q_{21},$$

$$P_{12} = \frac{1}{\pi} (\xi_s \xi_{0ss} + \eta_s \eta_{0ss}) + (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) Q_{22},$$

$$P_{21} = -\frac{1}{\pi \lambda} \{ \xi_{0s} (\xi - \xi_0) + \eta_{0s} (\eta - \eta_0) \},$$

$$P_{22} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda} [\xi_{0ss} (\xi - \xi_0) + \eta_{0ss} (\eta - \eta_0)] \right\},$$

$$Q_{11} = \frac{1}{\pi} [\xi_{0s} (\eta_s - \eta_{0s}) - \eta_{0s} (\xi_s - \xi_{0s})] + (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) P_{21},$$

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= \frac{1}{\pi} [\eta_s (\xi_{ss} - \xi_{0ss}) - \xi_s (\eta_{ss} - \eta_{0ss})] + (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) \left\{ \frac{1}{\pi} - P_{22} \right\}, \\
Q_{21} &= \frac{1}{\pi \lambda} [\xi_{0s} (\eta - \eta_0) - \eta_{0s} (\xi - \xi_0)], \\
Q_{22} &= \frac{1}{\pi \lambda} [\xi_{0ss} (\eta - \eta_0) - \eta_{0ss} (\xi - \xi_0)], \\
R_{n,j} &= S_{n,j} + T_{n,j}, \quad \theta(s, s_0) = \arctg \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} - \arctg \frac{\eta}{\xi}, \quad (2.8) \\
S_{11} &= \frac{1}{\pi \lambda} \{ -(\xi_{s0} \eta_{ss} - \eta_{0s} \xi_{ss}) + 2(\xi_{0s} \xi_{ss} + \eta_{0s} \eta_{ss}) \theta(s, s_0) \}, \\
S_{12} &= \frac{1}{\pi \lambda} \{ (\xi_{ss} \eta_{0ss} - \xi_{0s} \eta_{ss}) + 2(\xi_{ss} \xi_{0ss} + \eta_{ss} \eta_{0ss}) \theta(s, s_0) \}, \\
S_{21} &= \frac{1}{\pi \lambda} \{ (\xi_{0s} \eta_s - \xi_s \eta_{0s}) - 2(\xi_s \xi_{0s} + \eta_s \eta_{0s}) \theta(s, s_0) \}, \\
S_{22} &= -\frac{1}{\pi \lambda} \{ (\xi_s \eta_{0ss} - \xi_{0s} \xi_{ss}) + 2(\xi_s \xi_{0ss} + \eta_s \eta_{0ss}) \theta(s, s_0) \}, \\
T_{11} &= \xi_{0s} \alpha(s, s_0) + \eta_{0s} \beta(s, s_0), \quad T_{21} = \xi_{0s} \delta(s, s_0) + \eta_{0s} \gamma(s, s_0), \\
T_{12} &= \xi_{0ss} \Delta(s) + \eta_{0ss} \sigma(s), \quad T_{22} = \xi_{0ss} d(s) + \eta_{0ss} c(s), \\
c(s) &= \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [(\xi^2 - \eta^2) \xi_s + 2\xi \eta \eta_s], \\
d(s) &= \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [(\xi^2 - \eta^2) \eta_s - 2\xi \eta \xi_s], \\
\alpha(s, s_0) &= -(\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) c(s) + \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [\lambda \eta + (2S)^{-1} (\xi \xi_{ss} + \eta \eta_{ss}) \eta_0], \\
\beta(s, s_0) &= (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) d(s) - \frac{1}{\pi \lambda \rho^2} [\lambda \xi + (2S)^{-1} (\xi \xi_{ss} + \eta \eta_{ss}) \xi_0], \\
\delta(s, s_0) &= d(s) - \frac{(2S)^{-1}}{\pi \lambda \rho^2} (\xi \xi_s + \eta \eta_s) \eta_0, \\
\gamma(s, s_0) &= c(s) + \frac{(2S)^{-1}}{\pi \lambda \rho^2} (\xi \xi_s + \eta \eta_s) \eta_0, \\
\Delta(s) &= -(\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) c(s) + \frac{\eta}{\pi \rho^2}, \\
\sigma(s) &= (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}) d(s) - \frac{\xi}{\pi \rho^2}.
\end{aligned}$$

Здесь функции, зависящие от дуги s_0 , снабжены снизу нулевым указателем; при этом видно, что $Q_{nj}(s, s_0)$ ($n, j = 1, 2$) обращаются в нуль, когда дуги s и s_0 совпадают между собой; последнее убеждает в справедливости высказанного утверждения о непрерывности ядер системы (2.6).

Устранив из второй формулы (2.1) члены, содержащие логарифмическую особенность, мы приходим к иному, на первый взгляд, более простому представлению, нежели первоначальное. Назовем его главной частью представления (2.1); оно также приводит задачу к системе уравнений Фредгольма. Изучение же этой системы, по нашему мнению, сопряжено со значительными трудностями. Предпринятые попытки исследовать ее, нужно признаться, не увенчались должным успехом; нам не удалось преодолеть встретившиеся трудности до конца. Разумеется, можно было бы продолжать усилия в этом направлении; однако они были бы целесообразны и оправданы лишь в том случае, если бы упомянутые слагаемые вносили осложнения в систему интегральных уравнений. Между тем в данном случае имеет место как раз обратное. Наличие указанных слагаемых упрощает систему.

В формулах (2.8), откровенно говоря, вопреки ожиданию автора, при этом отсутствуют логарифмические члены, благодаря чему ядра (2.7) являются непрерывными функциями аргументов s и s_0 . Это обстоятельство в известной степени облегчает численные операции над системой.

Мы думаем и, нужно полагать, не без основания, что вряд ли исследуемая задача для области произвольного очертания может быть сведена к более простой нежели (2.6) системе уравнений Фредгольма. Учитывая элементарный характер ее ядер и, в особенности, средства, которыми в настоящее время располагает вычислительная техника, можно найденное решение без преувеличения считать эффективным.

Примечание. Существует глубокая и далеко идущая аналогия между рассматриваемой задачей и плоской задачей теории упругости с заданными краевыми значениями нормальной составляющей вектора смещения и касательной составляющей вектора напряжения. Эта аналогия, насколько нам известно, была впервые подмечена М. М. Фридрихом. Здесь она сразу выявляется при сопоставлении равенств (1.11), (1.12), (2.1) и (2.2) с предельными условиями и формой представления искомых функций в названной задаче*.

§ 3. Докажем теперь, что система (2.6) всегда (при любой правой части) разрешима единственным образом. Действительно, пусть $\chi_1^0(s)$ и $\chi_2^0(s)$ — некоторое нетривиальное решение однородной ($f_1 = f_2 = 0$) системы (2.6); отвечающие ему функции согласно (2.1) назовем $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$; они удовлетворяют однородным равенствам (1.11) и (1.12) при добавочном соотношении (1.15) и условию $\psi_0(0) = 0$.

* См. Д. И. Шерман, Об одной задаче теории упругости со смешанными однородными условиями (находится в редакции ДАН СССР).

Отсюда по теореме единственности заключаем, что везде в области S функции $\varphi_0(z) = \psi_0(z) = 0$. Имея это в виду и полагая $z=0$ в первом равенстве (2.1), получим важное соотношение

$$\int_L \{v_1^{(0)}(s) \bar{t}_s t_{ss} - v_2^{(0)}(s)\} dt = 0. \quad (3.1)$$

Введем на контуре L функцию

$$\omega(t) = \int_n^t \{v_1^{(0)}(s) \bar{t}_s t_{ss} - v_2^{(0)}(s)\} dt, \quad (3.2)$$

равную нулю в точке с аффиксом α , соответствующем началу отсчета дуг. Из (2.1), (3.1) и (3.2) ясно, что $\omega(z) = \omega_1(x, y) + i\omega_2(x, y)$ регулярно вне L и ограничена на бесконечности; ее же производная имеет на бесконечности порядок $O(z^{-2})$.

Преобразовав посредством (3.2) к надлежащей форме второе равенство (2.1), будем иметь на L

$$v_1^{(0)}(s) \bar{t}_s t_{ss} - v_2^{(0)}(s) = \omega'(t), \\ -\overline{\omega(t)} + v_1^{(0)}(s) P(t) + v_2^{(0)}(s) Q(t) + \theta(t) = A, \quad (3.3)$$

где $\theta(z) = \theta_1(x, y) + i\theta_2(x, y)$ регулярна вне L и исчезает на бесконечности; причем A , вообще говоря, комплексная постоянная, равная

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_L \{-\overline{\omega(t)} + v_1^{(0)}(s) P(t) + v_2^{(0)}(s) Q(t)\} \frac{dt}{t}. \quad (3.4)$$

Положим далее

$$\tau(z) = \omega(z) + \bar{A}, \quad \tau(z) = \tau_1(x, y) + i\tau_2(x, y) \quad (3.5)$$

и внесем во второе равенство (3.3) вместо плотностей $v_1^{(0)}(s)$ и $v_2^{(0)}(s)$ их значения через τ_1 и τ_2 , взятые из первого равенства. После этого получим

$$\overline{\tau(t)} + \left(-i\bar{t} - \lambda \frac{\bar{t}_s}{\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}} \right) \frac{\partial \tau_2}{\partial \bar{\xi}} - \bar{t} \frac{\partial \tau_1}{\partial \bar{\xi}} - \theta(t) = 0. \quad (3.6)$$

Умножим теперь последнее равенство на t_s и отделим в нем вещественные и мнимые части; затем первое из вновь полученных соотношений дополнительно почленно умножим на $\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss}$ и выполним некоторые само собой напрашивающиеся преобразования. В результате, переставив эти уравнения местами, будем иметь

$$\xi_s \tau_2 - \eta_s \tau_1 + \delta_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \bar{\xi}} + \delta_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \bar{\xi}} + \xi_s \theta_2 + \eta_s \theta_1 = 0. \quad (3.7)$$

$$\xi_{ss}\tau_2 - \eta_{ss}\tau_1 + \gamma_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \xi} + \xi_{ss}\theta_2 + \eta_{ss}\theta_1 = 0. \quad (3.8)$$

Введем в области внешней к S бигармоническую функцию

$$\chi(x, y) = \bar{z}\tau(z) + z\bar{\tau}(\bar{z}) + \sigma(z) + \bar{\sigma}(\bar{z}), \quad \sigma(z) = \int^z \theta(z) dz.$$

Соотношения (3.7) и (3.8) при этом дают на L

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = 0, \quad G(\chi) = 0. \quad (3.9)$$

Так как χ принимает постоянное значение на L и по построению $\tau(z)$ однозначная функция, то $\sigma(z)$ может иметь логарифмическую особенность, выражаемую слагаемым $D \ln z$, где коэффициент D — обязательно вещественный; в противном случае $\chi(x, y)$ при обходе контура L получила бы приращение, отличное от нуля, что невозможно. Следовательно, функция $\chi(x, y)$ является однозначной в области ее изменения. В окрестности же бесконечно удаленной части плоскости

$$\chi(x, y) = \bar{B}z + B\bar{z} + D \ln R + \chi^*(x, y), \quad (3.10)$$

где B — некоторая постоянная, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ и χ^* — ограниченная функция; ее любая n -я частная производная имеет порядок $O(R^{-n})$. Нетрудно усмотреть, что формула (1.17) остается справедливой применительно к функции $\chi(x, y)$ для бесконечной области, ограниченной L . В этом убедимся, учитывая поведение $\chi(x, y)$ на бесконечности и заметив, что $G(\chi)$ и $H(\chi)$ имеют соответственно порядок $O(R^{-2})$ и $O(R^{-3})$. В самом деле, при этих условиях криволинейный интеграл, подобный (1.17), распространенный по окружности сколь угодно большого радиуса, в пределе обращается в нуль. Далее, приняв во внимание, что взятый на контуру L интеграл в (1.17) равен нулю, на основании (3.9), заключаем, что необходимо $\chi = \text{const}$ тождественно всюду вне L . Отсюда имеем $\tau(z) = \theta(z) = 0$, что в свою очередь, если вспомним условие $\omega(z) = 0$, дает $\omega(z) = 0$, а значит и $A = 0$. Наконец, обращаясь к (3.3), найдем, что плотности $\nu_1^{(0)}(s) = \nu_2^{(0)}(s) = 0$. Таким образом, установлено, что неоднородная система (2.6) действительно имеет единственное решение.

Примечание 1. Вид первой формулы (3.3) побуждает несколько задержаться на случае, когда в состав отдельных участков, образующих контур L , входят отрезки прямых, достаточно гладко сопряженные со смежными дугами. На прямолинейных участках $\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss} = 0$, вследствие чего указанная формула становится неопределенной. Однако и в данном случае безусловно соблюдается равенство $\nu_1^{(0)}(s) = 0$; мы удостоверимся в этом, обратившись непосредственно к второму равенству (3.3) и взяв во внимание, что по доказанному $\omega(z) = \theta(z) = A = 0$.

Примечание II. Из условия (1.11) ясно, что найденное решение (2.1) будет удовлетворять заданному краевому значению прогиба с точностью до некоторой постоянной. Изменив решение на эту аддитивную постоянную, мы точно удовлетворим названному условию.

Институт механики АН СССР

Поступило 21/1957

Գ. Ի. Շերման

ԵԶՐՈՎ ԱԶԱՏ ՇԵՆՎԱԾ ՍԱԼԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում զիտարկվում է ազատ հենված սալի լայնական ծառի մեթոդներով, որ նրա միջին մակերևույթը գրավում է բավականաչափ հարթ փակ եզրագծով սահմանափակված վերջավոր տիրույթ: Մնդիրը հանդուս է տիրույթում $z = x + iy$ կոմպլեքս փոփոխականի $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ երկու ռեզուլյար սխտեմների որոնմանը համապատասխան եզրային պայմաններից: Այդ ֆունկցիաները տրվում են հատուկ կերպով ընտրված ինտեգրալ ձևով, որը կախված է այսպես կոչված $\nu_1(s)$ և $\nu_2(s)$ խտություններից՝ ազդի իրական ֆունկցիաներից: Այդ ձևով արտահայտված $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ -ի տեղադրումը վերահիշյալ եզրային պայմանների մեջ՝ հանգեցնում է Ֆրեդհոլմի երկու ինտեգրալ հավասարումների սխտեմին՝ $\nu_n(s)$ ($n=1, 2$) խտությունները որոշելու համար: Նրա միջուկներն անընդհատ են և արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Ապացուցված է, որ Ֆրեդհոլմի սաացված սխտեմն ունի միայն մեկ լուծում: Ինտեգրալ հավասարումների միջուկների պարզությունը թույլ է տալիս, նկատ ունենալով ժամանակակից հաշվողական տեխնիկայի միջոցները, համեմատաբար հեշտ կատարել երևույթի որակական և թվային անալիզը: Այդ հանգամանքը հիմք է տալիս ընդունելու, որ խնդրի աշտեղ առաջարկված լուծումը գոյություն ունեցող այլ լուծումների համեմատությամբ, ունի որոշ առավելություններ:

ЛИТЕРАТУРА

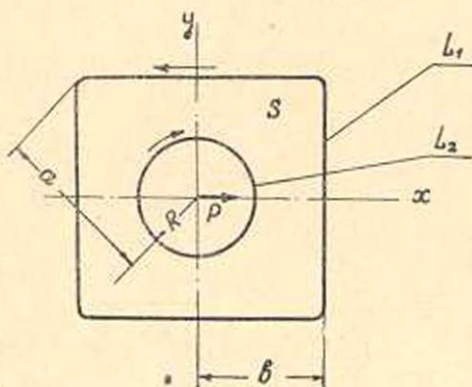
1. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. Прикл. матем. и механика, XIV, 4 (1950).
2. Фридман М. М. Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края. Прикл. матем. и механика, XVI (1952).
3. Каландия А. И. О задаче равновесия упругой пластинки с опертыми краями. Труды Тбилисского матем. института, XIX (1953).
4. Каландия А. И. Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. Прикл. матем. и механика, XVI, 3 (1952).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ю. А. Амензаде

Изгиб призматического бруса, ослабленного
 круговой полостью*

1. Рассмотрим изгиб однородного изотропного призматического бруса с круговой полостью, под действием сосредоточенной силы, приложенной вдоль одной из малых осей квадрата (фиг. 1) Обозначим через S двусвязное сечение бруса, ограниченное: извне — криволинейным квадратом L_1 со стороной $2b$ и диагональю $2a$, изнутри — окружностью L_2 радиуса R , расположив сечение S в плоскости $z = x + iy$ и поместив начало координат в его центре, направив координатные оси x и y по малым полуосям криволинейного квадрата L_1 .



Фиг. 1.

Как известно [1], определение напряженного состояния при изгибе бруса сводится к отысканию функции $\varphi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитической в области S , при граничных условиях

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = 2F_1(t) + D_1 \text{ на } L_1, \quad (1.1)$$

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = 2F_2(t) + D_2 \text{ на } L_2, \quad (1.2)$$

где t — аффикс точки квадрата L_1 или окружности L_2 ; D_1 и D_2 — вещественные постоянные; одну из них, например D_2 , примем равной нулю.

$$F_j(t) = -\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{y^3}{3} - \frac{\sigma}{2} x^2 y + 2(1 + \sigma) \int x y dx \quad (j = 1, 2). \quad (1.3)$$

Здесь интеграл берется по окружности или по периметру криволинейного квадрата от некоторого произвольно фиксированного начала до переменной точки, σ — коэффициент Пуассона.

2. Возьмем отображающую функцию внешности криволинейного квадрата на внешность единичной окружности в виде

* Эта задача нами ранее была решена [4] методом Д. И. Шермана, при этом решение было сведено к интегральному уравнению Фредгольма.

$$z = A \left(\zeta - \frac{m}{\zeta^3} \right) \quad \left(A = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{9} \right). \quad (2.1)$$

Из равенства (1.3), после некоторых не сложных преобразований, получим

$$F_1(t) = F^*(\tau) = A^3 i \left\{ C_1 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) + C_3 \left(\tau^3 - \frac{1}{\tau^3} \right) + \right. \\ \left. + C_5 \left(\tau^5 - \frac{1}{\tau^5} \right) + C_7 \left(\tau^7 - \frac{1}{\tau^7} \right) + C_9 \left(\tau^9 - \frac{1}{\tau^9} \right) \right\} \text{ на } \gamma, \quad (2.2)$$

$$F_2(t) = iR^3 \left\{ e_1 \left(\frac{t}{R} - \frac{R}{t} \right) + e_3 \left[\left(\frac{t}{R} \right)^3 - \left(\frac{R}{t} \right)^3 \right] \right\} \text{ на } L_2. \quad (2.3)$$

Здесь τ — аффикс точки γ ; t — аффикс точки L_2 , и, кроме того,

$$e_1 = \frac{3}{8} + \frac{\sigma}{4}, \quad e_3 = -\frac{1}{8},$$

$$C_1 = \frac{1}{8} [3(1-m) - 10m^2 + 2\sigma(1-\sigma m^2)],$$

$$C_3 = -\frac{1}{24} [3 - 2m - 9m^3 + 2m\sigma(2 - 3m^2)],$$

$$C_5 = \frac{m}{8} \left[3m + \frac{1}{5} + \frac{6\sigma}{5} \right],$$

$$C_7 = -\frac{m^2}{56} (5 - 2\sigma), \quad C_9 = -\frac{m^3}{8}.$$

3. Искомую функцию $\varphi(z)$, регулярную в области, занимаемой сечением бруса, будем искать в виде

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \quad (3.1)$$

где $\varphi_1(z)$ — функция, регулярная внутри контура L_1 ,
 $\varphi_2(z)$ — функция, регулярная вне окружности L_2 , и

$$\varphi_2(\infty) = 0.$$

Кроме того, функция $\varphi_2(z)$ представима в виде ряда

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{R}{z} \right)^k, \quad (3.2)$$

где неизвестные коэффициенты $b_k^{(2)}$ условимся считать чисто мнимыми.

Функцию $\varphi_1(z)$, регулярную внутри кривой L_1 , очевидно следует считать непрерывной вплоть до L_1 . Пусть t — аффикс точки L_1 и τ — аффикс единичной окружности γ в плоскости ζ , отображающей, согласно (2.1), кривую L_1 .

Д. И. Шерман указал способ разложения $\varphi_1(z)$ в ряд по полиномам [2]. Воспроизведем здесь эти рассуждения применительно к взятой отображающей функции (2.1).

Разложим граничное значение функции $\varphi_1(z)$ на криволинейном квадрате L_1 в ряд Фурье на отображенной окружности γ ; полагая $\varphi_1(t) = \varphi_1^*(\tau)$, будем иметь

$$\varphi_1^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(1)} \tau^k. \quad (3.3)$$

Здесь неизвестные коэффициенты $b_k^{(1)}$ ($k \neq 0$) примем чисто мнимыми, а постоянную $b_0^{(1)}$ — вещественной. Умножим обе части (3.3) на ядро Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-z}$$

и проинтегрируем по криволинейному квадрату L_1 . Считая точку z находящейся внутри контура L_1 , будем иметь

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^k}{t-z} dt. \quad (3.4)$$

Учитывая, что функция $g(z)$, обратная функции (2.1), регулярна вне L_1 , за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс первого порядка, получим, разложив ее в ряд Лорана

$$g(z) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{4n}, \quad (3.5)$$

где $a_0 = 1$; $a_n = mD_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Здесь коэффициенты D_{n-1} вычисляются один за другим последовательно, согласно рекуррентной формуле:

$$D_0 = a_0^2 = 1; \quad D_{k_1} = -\frac{1}{k_1 a_0} \sum_{k=1}^{k_1} (2k + k_1) a_k D_{k_1-k}, \quad k_1 \geq 1.$$

Таким образом,

$$a_1 = m, \quad a_2 = -3m^2, \quad a_3 = 15m^3, \quad a_4 = -91m^4, \\ a_5 = 612m^5, \quad a_6 = -4389m^6 \text{ и т. д.}$$

Разложение (3.5) справедливо вне окружности, описанной вокруг криволинейного четырехугольника L_1 .

Возводя ряд (3.5) в степень k , будем иметь

$$g^k(z) = \left(\frac{z}{A}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \left(\frac{A}{z}\right)^{4n}. \quad (3.6)$$

Здесь

$$a_0^{(k)} = a_0^k, \quad a_n^{(k)} = \frac{1}{na_0} \sum_{k_1=1}^n (k_1(k+1)^{-n}) a_{k_1} a_{n-k_1}^{(k)}, \text{ при } n \geq 1.$$

Принимая во внимание (3.6), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g^k(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\left(\frac{A}{t}\right)^{4n-k}}{t-z} dt, \quad (3.7)$$

откуда (учитывая, что точка z лежит внутри L_1) найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g^k(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{k}{4}\right)} a_n^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^{k-4n},$$

где $E\left(\frac{k}{4}\right)$ — наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{k}{4}$.

$$\text{т. е.} \quad E\left(\frac{k}{4}\right) = \frac{k-\beta}{4} \quad (\beta = 0, 1, 2, 3).$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \psi_k(z), \quad (3.8)$$

где положено

$$\psi_k(z) = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{k}{4}\right)} a_n^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^{k-4n},$$

или

$$\psi_k(z) = \sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^{\nu}. \quad (3.9)$$

Подставим (3.9) в (3.8); тогда

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \left(\frac{R}{A}\right)^{\nu} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}. \quad (3.10)$$

4. Исходя из (3.8) и (3.10) можно, как сейчас покажем, получить выражение для коэффициентов $b_{\nu}^{(1)}$ с отрицательным индексом через коэффициенты $b_{\nu}^{(1)}$ с положительным индексом.

Учитывая отображающую функцию (2.10), будем иметь:

$$\left(\frac{t}{A}\right)^{\nu} = \sum_{e=-3\nu}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-e}{4}} C_{\nu}^{\frac{\nu-e}{4}} m^{\frac{\nu-e}{4}} \tau^e. \quad (4.1)$$

Подставив в выражение (3.10) значение $\left(\frac{t}{A}\right)$ из формулы (4.1), получим

$$\varphi_1^*(\tau) = b_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} P_k(\tau), \quad (4.2)$$

где

$$P_k(t) = \sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \sum_{e=-3\nu}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-e}{4}} C_{\nu}^{\frac{\nu-e}{4}} m^{\frac{\nu-e}{4}} \tau^e. \quad (4.3)$$

Разобьем внутреннюю сумму (4.3) на две суммы, соответственно с положительными и отрицательными степенями τ (не выписывая выражения под знаками сумм), а именно

$$\sum_{e=-3\nu}^{\nu} \dots = \sum_{e=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} \dots + \sum_{e=-3\nu}^{\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)-4} \dots$$

а) Рассмотрим двойную сумму из (4.3) с положительными степенями τ , записав ее в виде

$$\sum_{\nu=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{\nu, k-4e^{(1)}}^{(1)} \sum_{e=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} \dots \varepsilon_{e, \nu-4e^{(2)}}^{(2)},$$

где

$$\varepsilon_{\nu, k-4e^{(1)}}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = k - 4e^{(1)}, \\ 0 & \text{если } \nu \neq k - 4e^{(1)}, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{e, \nu-4e^{(2)}}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{если } e = \nu - 4e^{(2)}, \\ 0 & \text{если } e \neq \nu - 4e^{(2)}, \end{cases}$$

$$\left(e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right), \quad e^{(2)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{\nu}{4}\right) \right).$$

Из условий

$$\nu = k - 4e^{(1)}, \quad e = \nu - 4e^{(2)}$$

находим

$$e = k - 4(e^{(1)} + e^{(2)}),$$

где

$$e^{(2)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k - 4e^{(1)}}{4}\right) = 0, 1, \dots, \left(E\left(\frac{k}{4}\right) - e^{(1)}\right);$$

отсюда

$$e_{\min} = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right), \quad e_{\max} = k,$$

и при фиксированном e из условия $v = e + 4e^{(2)}$ имеем

$$v_{\min} = e, \text{ а из условия } v = k - 4e^{(1)}, \quad v_{\max} = k.$$

Таким образом, меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{v=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{v,k-4e^{(1)}}^{(1)} \sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^v \dots \varepsilon_{e,v-4e^{(2)}}^{(2)} = \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k g_{k,e} \tau^e,$$

где

$$g_{k,e} = \sum_{v=e}^k (-1)^{\frac{v-e}{4}} C_v^{\frac{v-e}{4}} m^{\frac{v-e}{4}} a_{\frac{k-v}{4}}^{(k)},$$

так, что для суммы с положительными степенями τ , входящей в (4.2), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{v,k-4e^{(1)}}^{(1)} \sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^v \dots \varepsilon_{e,v-4e^{(2)}}^{(2)} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k g_{k,e} \tau^e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В (4.4), меняя порядок суммирования, легко найдем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^k \dots \varepsilon_{v,k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^{(1)} \sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^v \dots \varepsilon_{e,v-4e^{(2)}}^{(2)} = \\ = \sum_{e=0}^{\infty} \tau^e \sum_{k=E(e)}^{\infty} g_{k,e} b_k^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из условия $e = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(2)}$ ($e^{(2)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right)$),

при заданном e , имеем $k = e + 4e^{(1)}$ ($e^{(1)} = 0, 1, \dots, \infty$).

Принимая, что $k \neq 0$, получим

$$k_{\min} = \begin{cases} E(e) = e, & e \neq 0; \\ 4, & e = 0 \end{cases}; \quad k_{\max} = \infty.$$

в) Рассмотрим теперь сумму с отрицательными степенями τ :

$$\sum_{e=3v}^{v-4E\left(\frac{v}{4}\right)-4} (-1)^{\frac{v-e}{4}} C_v \frac{v-e}{4} m^{\frac{v-e}{4}} \tau^e = \sum_{e_1=4\left(1+E\left(\frac{v}{4}\right)\right)-v}^{3v} (-1)^{\frac{v+e_1}{4}} C_v \frac{v+e_1}{4} m^{\frac{v+e_1}{4}} \frac{1}{\tau^{e_1}}.$$

Здесь правая часть получена изменением знака у индекса суммирования.

Следует иметь в виду, что значение $v=0$ здесь автоматически выпадает, так как при $v=0$, нижний предел для e оказывается больше верхнего; следовательно, $v \geq 1$. В двойной сумме

$$\sum_{v=k-4k\left(\frac{k}{4}\right)}^k a_{k-v}^{(k)} \sum_{e=4E\left(1+\frac{v}{4}\right)-v}^{3v} (-1)^{\frac{v+e}{4}} C_v \frac{v+e}{4} m^{\frac{v+e}{4}} \frac{1}{\tau^e} \quad (4.6)$$

изменив порядок суммирования; из условия

$$e = 3v - 4e^{(1)} \left(e^{(1)} = 0, 1, \dots, v - E\left(1 + \frac{v}{4}\right) \right),$$

исключая v , находим

$$e = 3k - 4(e^{(1)} + 3e^{(2)}),$$

отсюда

$$e_{\min} = 4\left(1 + E\left(\frac{k}{4}\right)\right) - k,$$

$$e_{\max} = 3k.$$

При заданном e из условия

$$v = \frac{e + 4e^{(1)}}{3},$$

очевидно,

$$v_{\min} = \beta + \frac{e + \beta}{3} \quad (\beta = 0, 1, 2) \text{ и}$$

из условия

$$v = k - 4e^{(2)}; \quad v_{\max} = k.$$

После перестановки порядка суммирования вместо (4.6) будем иметь

$$\sum_{e=k-4E\left(1+\frac{k}{4}\right)}^{3k} \lambda_{k,e} \frac{1}{\tau^e},$$

где

$$\lambda_{k,e} = \sum_{\nu=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^k (-1)^{\frac{\nu+e}{4}} C_{\nu}^{\frac{\nu+e}{4}} m^{\frac{\nu+e}{4}} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \quad (4.7)$$

Изменив порядок суммирования в выражении

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{e=-k+4E\left(1+\frac{k}{4}\right)}^{3k} \lambda_{k,e} \frac{1}{\tau^e},$$

приведем его к виду

$$\sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^e} \sum_{k=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^{\infty} \lambda_{k,e} b_k^{(1)}. \quad (4.8)$$

В самом деле, из условия $e = 3k - 4e_1$

$$\left(e_1 = 0, 1, \dots, k - E\left(1 + \frac{k}{4}\right) \right) \text{ следует, что } e_{\max} = \infty \text{ и}$$

$e_{\min} = 1$. При заданном же e , очевидно,

$$k_{\max} = \infty \text{ и } k_{\min} = \beta + \frac{e+\beta}{3} \quad (\beta = 0, 1, 2).$$

На основании (4.5) и (4.8) из (4.2) для значения функции $\varphi_1(t)$ на L_1 будем иметь

$$\varphi_1^*(\tau) = b_0^{(1)} + \sum_{e=0}^{\infty} \tau^e \sum_{k=E(e)}^{\infty} g_{k,e} b_k^{(1)} + \sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^e} \sum_{k=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^{\infty} \lambda_{k,e} b_k^{(1)}. \quad (4.9)$$

С другой стороны, согласно (3.3), имеем

$$\varphi_1^*(\tau) = b_0^{(1)} + \sum_{e=0}^{\infty} b_e^{(1)} \tau^e + \sum_{e=1}^{\infty} b_{-e}^{(1)} \frac{1}{\tau^e}. \quad (4.10)$$

Сопоставление (4.9) и (4.10) дает

$$g_{e,e} = 1, \quad g_{e,k} = 0 \quad (e \neq k), \quad (4.11)$$

$$b_{-e}^{(1)} = \sum_{k=\beta+\frac{e+\beta}{3}}^{\infty} \lambda_{k,e} b_k^{(1)} \quad (e = 1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Формулы (4.11) и (4.12) и приведенный их вывод были сообщены нам Д. И. Шерманом в качестве дополнения к содержащемуся в упомянутой статье [1] разложению функции, регулярной внутри криволинейного квадрата L_1 в ряд по полиномам.

5. Вернемся к сумме (3.10). Звездочка над суммой (3.10) указывает, что индекс ν изменяется на 4 при переходе к смежному значению

$$\nu = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)} \quad \left(e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right)\right).$$

В круге, ограниченном контуром L_2 , функция $\varphi_1(z)$ разложима в ряд Тейлора; внутри и на окружности L_2 можно изменить порядок суммирования в двойной сумме, определяющей $\varphi_1(z)$.

Введем множитель $\varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}} \left(e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, E\left(\frac{k}{4}\right)\right)$ так,

что

$$\varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}} = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}, \\ 0 & \text{если } \nu \neq k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}. \end{cases}$$

Опуская звездочку в (3.10), будем иметь

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{\nu=0}^k \left(\frac{R}{A}\right)^{\nu} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu} \varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}} \quad (5.1)$$

Переставим в двойной сумме порядок суммирования. Не выписывая (для краткости) выражения под знаками сумм, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu=0}^k \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \dots \sum_{k=E(\nu)}^{\infty} \dots$$

Из условия $\nu = k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}$, при заданном ν , имеем $k = \nu + 4e^{(2)}$, ($e^{(2)} = 0, 1, 2, \dots, \infty$).

Принимая, что $k \neq 0$, легко получим:

$$E(\nu) = \nu \quad (\nu \neq 0),$$

$$E(\nu) = 0 \quad (\nu = 0).$$

Опуская в двойной сумме множитель $\varepsilon_{\nu, k - 4E\left(\frac{k}{4}\right) + 4e^{(1)}}$ и вводя

обозначение

$$H_{\nu} = \left(\frac{R}{A}\right)^{\nu} \sum_{k=E(\nu)}^{\infty} a_{\frac{k-\nu}{4}}^{(k)} b_k^{(1)}, \quad (5.2)$$

получим

$$\varphi_1(z) = b_0^{(1)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}. \quad (5.3)$$

Отметим, что, согласно сделанному выше допущению, постоянные H_v будут чисто мнимыми величинами.

На основании граничного условия (1.2) и формул (3.2) и (5.3) имеем на окружности L_2

$$2b_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (H_v - b_v^{(2)}) \left[\left(\frac{t}{R} \right)^v - \left(\frac{R}{t} \right)^v \right] = \\ = 2iR^3 \left\{ e_1 \left(\frac{t}{R} - \frac{R}{t} \right) + e_3 \left[\left(\frac{t}{R} \right)^3 - \left(\frac{R}{t} \right)^3 \right] \right\}.$$

Постоянная $H_0^{(1)}$, как легко видеть, выпадает из соотношения на L_2 .

Из последнего тождества имеем

$$b_0^{(1)} = 0, \quad H_v - b_v^{(2)} = 2iR^3 e_v, \quad (v = 1, 2, \dots); \quad (5.4)$$

здесь $e_v = 0$ для $v \neq 1, 3$.

При помощи (2.1) и (3.2), с учетом разложения бинома, получим на криволинейном квадрате L_1

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{R}{A} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n m^n C_{-k}^n \frac{1}{\tau^{4n+k}}.$$

Введя в выражение функции $\varphi_2(t)$ вместо n новый индекс $e = 4n + k$, будем иметь

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{A} \right)^k b_k^{(2)} \sum_{e=k}^{\infty} (-1)^{\frac{e-k}{4}} m^{\frac{e-k}{4}} C_{-k}^{\frac{e-k}{4}} \frac{1}{\tau^e} \quad \text{на } L_1. \quad (5.5)$$

Введем множитель $\varepsilon_{e, k+4e^{(1)}}$ ($e^{(1)} = 0, 1, 2, \dots, \infty$) так, что

$$\varepsilon_{e, k+4e^{(1)}} = \begin{cases} 1 & (e = k + 4e^{(1)}), \\ 0 & (e \neq k + 4e^{(1)}). \end{cases}$$

Не вписывая в (5.5) звездочку, получим

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{A} \right)^k b_k^{(2)} \sum_{e=k}^{\infty} (-1)^{\frac{e-k}{4}} C_{-k}^{\frac{e-k}{4}} m^{\frac{e-k}{4}} \frac{1}{\tau^e} \varepsilon_{e, k+4e^{(1)}}.$$

Переставляя порядок суммирования и опуская множитель $\varepsilon_{e, k+4e^{(1)}}$, окончательно будем иметь

$$\varphi_2(t) = \varphi_2^*(\tau) = \sum_{e=1}^{\infty} T_e \frac{1}{\tau^e}, \quad (5.6)$$

где

$$T_e = \sum_{k=e-4E\left(\frac{e}{4}\right)}^e (-1)^{\frac{e-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^k C_{-k}^{\frac{e-k}{4}} m^{\frac{e-k}{4}} b_k^{(2)}. \quad (5.7)$$

Пределы суммы (5.7) легко определяются из $k = e - 4e^{(2)}$:

$$\left(e^{(1)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{e}{4}\right) \right)$$

Отметим, что T_e суть величины чисто мнимые.

Исходя из граничного условия (1.1), формул (3.3) и (5.6) на окружности γ в плоскости ζ , получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} -T_{\nu} \left(\tau^{\nu} - \frac{1}{\tau^{\nu}} \right) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{\nu}^{(1)} \left(\tau^{\nu} - \frac{1}{\tau^{\nu}} \right) = 2F_1^*(\tau) + D_1, \quad (5.8)$$

где штрих над суммой указывает на пропуск слагаемого, отвечающего $\nu = 0$.

Из тождества (5.8) имеем:

$$-T_{\nu} + b_{\nu}^{(1)} - b_{-\nu}^{(1)} = 2iA^3 C_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (5.9)$$

причем нужно положить $C_{\nu} = 0$ для $\nu \neq 1, 3, 5, 7, 9$; кроме того, из (5.8) вытекает, что постоянная $D_1 = 0$.

Из (5.4) имеем

$$b_{\nu}^{(1)} = H_{\nu} - 2iR^3 e_{\nu}. \quad (5.10)$$

Подставив значение для $b_{\nu}^{(1)}$ из (5.7) в выражение для T_{ν} , получим

$$T_{\nu} = \sum_{k=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-k}{4}} m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^k (H_k - 2iR^3 e_{\nu}),$$

или

$$\begin{aligned} T_{\nu} = & \sum_{k=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-k}{4}} m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^k H_k - \\ & - 2iA^3 (-1)^{\frac{\nu-j}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^{j+3} m^{\frac{\nu-j}{4}} C_{-j}^{\frac{\nu-j}{4}} e_j \\ & j = \nu - 4E \frac{\nu}{4}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Учтем формулу (5.2) в (5.11), тогда

$$\begin{aligned} T_{\nu} = & \sum_{k=\nu-4E\left(\frac{\nu}{4}\right)}^{\nu} (-1)^{\frac{\nu-k}{4}} m^{\frac{\nu-k}{4}} C_{-k}^{\frac{\nu-k}{4}} \left(\frac{R}{A} \right)^{2k} \sum_{e=E(k)}^{\infty} a_{\frac{e-k}{4}}^{(e)} b_e^{(1)} - 2iA^3 (-1)^{\frac{\nu-i}{4}} \times \\ & \times \left(\frac{R}{A} \right)^{j+3} m^{\frac{\nu-j}{4}} C_{-j}^{\frac{\nu-j}{4}} e_j \end{aligned}$$

$$(E(k) = k \quad (k \neq 0), \quad E(k) = 4 \quad (k = 0)).$$

Меняя теперь порядок суммирования, будем иметь

$$T_v = - \sum_{e=M(v)}^{\infty} d_{e,v}^* b_e^{(1)} - 2iA^3 (-1)^{\frac{e-j}{4}} \left(\frac{R}{A}\right)^{j+3} m^{\frac{v-j}{4}} C_{-j}^{\frac{v-j}{4}} e_j, \quad (5.12)$$

где

$$d_{e,v}^* = - \sum_{k=M(e)}^{N(v,v)} (-1)^{\frac{v-k}{4}} m^{\frac{v-k}{4}} C_{-k}^{\frac{v-k}{4}} \left(\frac{R}{A}\right)^{2k} a_{\frac{e-k}{4}}^{(e)}. \quad (5.13)$$

Пределы $M(v)$, $M(e)$ и $N(e, v)$ определяются из условий

$$k = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right) + 4e^{(1)} \quad e^{(1)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{v}{4}\right),$$

$$e = E(k) + 4e^{(2)} \quad (e^{(2)} = 0, 1, \dots, \infty),$$

отсюда

$$e = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right) + 4(e^{(1)} + e^{(2)}).$$

Таким образом,

$$e_{\min} = M(v) = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right), \quad e_{\max} = \infty.$$

Из условия $e = k + 4e^{(2)}$ при заданном e определим

$$k = e - 4e^{(1)} \quad \left(e^{(1)} = 0, 1, \dots, E\left(\frac{e}{4}\right)\right),$$

отсюда

$$k_{\min} = M(e) = e - 4E\left(\frac{e}{4}\right),$$

$$k_{\max} = \begin{cases} N(e, v) = e, & e \leq v, \\ N(e, v) = v, & e > v; \end{cases}$$

Учитывая (4.12) и (5.12), из (5.9) получим

$$\sum_{e=v-4E\left(\frac{v}{4}\right)}^{\infty} d_{e,v} b_e^{(1)} - \sum_{e=v+\frac{v+3}{3}}^{\infty} \lambda_{e,v} b_e^{(1)} = f_v, \quad (5.14)$$

где

$$d_{e,e} = 1 + d_{e,e}, \quad d_{e,v} = d_{e,v}^*, \quad e \neq v,$$

$$f_v = -2iA^3 \left\{ (-1)^{\frac{v-j}{4}} \left(\frac{R}{A}\right)^{j+3} m^{\frac{v-j}{4}} C_{-j}^{\frac{v-j}{4}} e_j - C_v \right\} \quad (v = 1, 3, 5, \dots) \quad (5.15)$$

$$\left(e_1 = \frac{3}{8} + \frac{5}{4}, \quad e_3 = -\frac{1}{8}, \quad e_j = 0, \quad (j \neq 1, 3) \right).$$

Значения свободных членов системы (5.14) для $\frac{R}{A} = 0,8$ и $\tau = 0,3$ приведены в табл. 1.

Теперь придадим системе (5.14) вид:

$$\sum_{e=1}^{\infty} q_{e,v} b_e^{(1)} = f_v. \quad (5.16)$$

Здесь $q_{e,v}$ — коэффициенты, составленные соответствующим образом из коэффициентов $d_{e,v}$, $\lambda_{e,v}$, а именно

$$q_{e,v} = d_{e,v}, \quad e = v - 4E\left(\frac{v}{4}\right) + 4\varepsilon,$$

$$q_{e,v} = -\lambda_{e,v}, \quad e = \beta + \frac{v+\beta}{3} + 4\varepsilon$$

$$(\varepsilon = 0, 1, 2, \dots).$$

Таблица 1

v	$f_v : iA^3$ $\tau = 0,3$
1	0,4060514
3	-0,1758220
5	-0,161452 · 10 ⁻¹
7	0,199053 · 10 ⁻¹
9	-0,489405 · 10 ⁻²
11	0,48545 · 10 ⁻²
13	-0,50568 · 10 ⁻³
15	0,8990 · 10 ⁻³
17	-0,5619 · 10 ⁻⁴
19	0,1498 · 10 ⁻³

Из (5.15) следует, что при четных v система (5.16) представляет однородную систему уравнений относительно неизвестных $b_e^{(1)}$ ($v = 0, 2, 4, 6, \dots$). В силу единственности решения следует полагать их равными нулю. Следовательно,

$$e = 1, 3, 5, \dots; \quad v = 1, 3, 5, \dots$$

Положив

$$q_{e,v} = C_{k_1,k}, \quad b_e^{(1)} = x_{k_1}, \quad f_v = f_k^{(0)},$$

$$\left(k_1 = \frac{e-1}{2}, \quad k = \frac{v-1}{2} \right)$$

вместо (5.16) получим

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} C_{k_1,k} x_{k_1} = f_k^{(0)} \quad (k = 0, 1, \dots, \infty).$$

Удержав из этой системы первые десять уравнений, будем иметь

$$\sum_{k_1=0}^9 C_{k_1,k} x_{k_1} = f_k^{(0)} \quad (k = 0, 1, \dots, 9). \quad (5.17)$$

Значения коэффициентов $C_{k_1,k}$ приведены в табл. 2.

В первом уравнении системы (5.17), приведенной к нормальной форме, сумма модулей коэффициентов больше единицы (как это следует из табл. 2); в остальных же уравнениях эта сумма меньше единицы.

Выделив из системы (5.18) первое уравнение

$$\sum_{k_1=0}^9 C_{k_1,0} x_{k_1} = f_0^{(0)}. \quad (5.18)$$

получим систему, состоящую из девяти уравнений:

$$\sum_{k_1=1}^9 C_{k_1, k} x_{k_1} = \beta_k \quad (k_1 = 1, 2, \dots, 9),$$

где

$$\beta_k = f_k^{(0)} - C_{0,0} x_0.$$

Решение этой системы ищем методом последовательных приближений (что возможно в силу сказанного), полагая

$$x_k = \sum_{\alpha=0}^{\infty} x_k^{(\alpha)}. \quad (5.19)$$

Здесь $x^{(\alpha)}$ — приближения $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ порядка, определяемые последовательно одно за другим рекуррентной формулой

$$x_k^{(0)} = -\frac{1}{C_{k,k}} \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} C_{k_1, k} x_{k_1}^{(0)} - \beta_k \right), \quad (5.20)$$

$$x_k^{(\alpha)} = -\frac{1}{C_{k,k}} \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} C_{k_1, k} x_{k_1}^{(\alpha)} + \sum_{k_1=k+1}^9 C_{k_1, k} x_{k_1}^{(\alpha-1)} \right), \quad \alpha > 0.$$

На основании (5.18), (5.19) и (5.20) получим:

$$x_k = \omega_k x_0 + \psi_k i A^3, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 9,$$

$$x_0 = \frac{0,4750423}{0,2810652} i A^3 = 1,690150 i A^3.$$

Здесь

$$\omega_k = \sum_{\alpha=0}^4 \omega_k^{(\alpha)}, \quad \psi_k = \sum_{\alpha=0}^4 \psi_k^{(\alpha)}.$$

Значения $\omega_k^{(\alpha)}$ и ω_k , $\psi_k^{(\alpha)}$ и ψ_k ($k = 1, 2, \dots, 9$) для $\frac{R}{A} = 0,8$ приведены в табл. 3 и 4.

По определению $b_v^{(1)}$, на основании формул (4.12), (5.2) и (5.4), для $\frac{R}{A} = 0,8$ были подсчитаны неизвестные H_v , $b_v^{(2)}$, $b_{-v}^{(1)}$; они помещены в табл. 5.

Учитывая (3.2), (5.3) и что $b_0^{(1)} = 0$, получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ H_k \left(\frac{z}{R} \right)^k + b_k^{(2)} \left(\frac{R}{z} \right)^k \right\}. \quad (5.21)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что найденная функция $\varphi(z)$ точно удовлетворяет граничному условию (1.2) на окружности L_2 .

Таблица 2

$k \backslash k_1$	0		8	9
0	0,36	-1	$-0,165828 \cdot 10^{-2}$	
1	-0,1111111	0^{-1}		$-0,379571 \cdot 10^{-2}$
2	$-0,7111111 \cdot 10^{-1}$	-1^{-1}	$-0,1771173 \cdot 10^{-1}$	
3		-0^{-1}	$-0,31989 \cdot 10^{-4}$	$-0,1502045 \cdot 10^{-1}$
4	$-0,790123 \cdot 10^{-2}$	-1^{-3}	$-0,2866196 \cdot 10^{-1}$	$-0,15890 \cdot 10^{-4}$
5		-0^{-1}	$-0,817486 \cdot 10^{-4}$	$-0,2136449 \cdot 10^{-1}$
6	$-0,877915 \cdot 10^{-3}$	-3	$-0,2786092 \cdot 10^{-1}$	$-0,278069 \cdot 10^{-4}$
7		-1	$-0,501548 \cdot 10^{-4}$	$-0,2011296 \cdot 10^{-1}$
8	$-0,97546 \cdot 10^{-4}$	-4	0,9799029	$-0,158407 \cdot 10^{-4}$
9		-0^{-1}	$-0,141732 \cdot 10^{-4}$	0,853812

Таблица 3

$k \backslash \sigma$	1		9
0	-0,1505864	$+^3$	$-0,24588 \cdot 10^{-3}$
1	$+0,15260 \cdot 10^{-2}$	$\pm^{-4}$	$-0,3745 \cdot 10^{-6}$
2	$+0,1550 \cdot 10^{-3}$	+	$+0,2441 \cdot 10^{-6}$
3	$+0,103 \cdot 10^{-4}$	+	$+0,198 \cdot 10^{-7}$
4	$+0,6 \cdot 10^{-6}$	+	$+0,12 \cdot 10^{-6}$
ω_k	-0,1488945	$+^3$	$-0,24599 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

$k \backslash \sigma$	1		9
0	-0,2382877	-3	$+0,6981 \cdot 10^{-5}$
1	$-0,25560 \cdot 10^{-2}$	-	$-0,4072 \cdot 10^{-5}$
2	$-0,1719 \cdot 10^{-4}$	-	$-0,329 \cdot 10^{-6}$
3	$-0,95 \cdot 10^{-5}$	-	$-0,196 \cdot 10^{-7}$
4	$-0,5 \cdot 10^{-6}$	-	$-0,11 \cdot 10^{-8}$
ψ_k	-0,2410196	-3	$+0,2559 \cdot 10^{-5}$

Значения величин

$$\Delta\%_0 = \frac{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} - 2F_1(t)}{2F_1(t)} 100,$$

характеризующие степень точности, с которой найденная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет граничному условию в наиболее характерных точ-

ках $t = ib$ и $t = ae^{i\frac{\pi}{4}}$, соответственно равны:

$$\Delta\%_0 = -0,05146\%, \quad \Delta\%_0 = 0,02222\%.$$

Таким образом, граничное условие выполняется достаточно точно на внешней границе L_1 .

Таблица 5

k	$b_k^{(1)} : iA^3$	$b_k^{(2)} : iA^3$	$H_k : iA^3$	$b_k^{(1)} : iA^3$
1	+1,6901498	+0,9390423	+1,3998423	+0,1642245
3	-0,4926736	-0,1364394	-0,2644394	-0,1814587
5	+0,1037894	+0,403459 $\cdot 10^{-1}$	+0,403459 $\cdot 10^{-1}$	-0,177163 $\cdot 10^{-1}$
7	-0,282039 $\cdot 10^{-1}$	-0,785012 $\cdot 10^{-2}$	-0,785012 $\cdot 10^{-2}$	-0,133150 $\cdot 10^{-2}$
9	+0,172751 $\cdot 10^{-1}$	+0,322489 $\cdot 10^{-2}$	+0,322489 $\cdot 10^{-2}$	+0,56593 $\cdot 10^{-3}$
11	-0,646953 $\cdot 10^{-2}$	-0,83614 $\cdot 10^{-3}$	-0,83614 $\cdot 10^{-3}$	+0,5734 $\cdot 10^{-4}$
13	+0,393674 $\cdot 10^{-2}$	+0,32190 $\cdot 10^{-3}$	+0,32190 $\cdot 10^{-3}$	+0,7464 $\cdot 10^{-5}$
15	-0,160972 $\cdot 10^{-2}$	-0,8733 $\cdot 10^{-4}$	-0,8733 $\cdot 10^{-4}$	+0,1855 $\cdot 10^{-6}$
17	+0,101568 $\cdot 10^{-2}$	+0,2287 $\cdot 10^{-4}$	+0,2287 $\cdot 10^{-4}$	-0,940 $\cdot 10^{-7}$
19	-0,41321 $\cdot 10^{-3}$	-0,5955 $\cdot 10^{-5}$	-0,5955 $\cdot 10^{-5}$	-0,695 $\cdot 10^{-7}$

Вычисления, проведенные в точках ib , $i\frac{R+b}{2}$ и iR для величины касательных напряжений при $\sigma = 0,3$ и $\frac{R}{A} = 0,8$, дают соответственно значения:

$$x_{z,1} = 2,1565 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_{z,2} = 2,1761 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_{z,3} = 2,2563 \frac{Pb^3}{I},$$

где P — величина изгибающей силы,

I — момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси.

Сопоставим величины этих напряжений с теми, которые могут быть вычислены по известной для односвязных простейших сечений формуле Д. И. Журавского. С этой целью последнюю, для рассматриваемого сечения, приведем к виду

$$x_z = \frac{0,924 - 0,667 \left(\frac{R}{b}\right)^3}{2 \left(1 - \frac{R}{b}\right)} \frac{Pb^2}{I}.$$

Тогда при $\frac{R}{b} = 0,9$ будем иметь

$$\tau = 2,1888 \frac{Pb^2}{I}.$$

Из сравнения величин напряжений, полученных по нашим формулам и по формуле Д. И. Журавского, следует, что напряжения по формуле Журавского в точке iR оказываются пониженными на 1,49%, а в точках $i\frac{b+R}{2}$ и ib повышенными, соответственно, на 0,58% и 2,99%. Как видно, напряжение определенное по формуле Журавского, достаточно близко к истинному.

Величины касательных напряжений, действующих в указанных точках, полученных нами на электрической модели (ЭМ-7):

$$x_{z,1} = 2,11 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_{z,2} = 2,17 \frac{Pb^2}{I}, \quad x_z = 2,35 \frac{Pb^2}{I}.$$

Расхождения между касательными напряжениями, полученными по нашим формулам и на ЭМ-7, будут: в точке ib 2,17%, в точке $i\frac{b+R}{2}$ 0,03%, в точке iR 4,2%.

Азербайджанский индустриальный институт
им. М. Азизбекова

Поступило 12 X 1956

Յու. Ա. Ամենզադե

ՇՐՋԱՆԱԶԵՎ ԱՆՑՔՈՎ ՔՈՒԼԱՑՎԱԾ ՀԱՏՎԱԾԱԿՈՂՄ ԶՈՐՍՈՒԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հոդվածում դիտարկվում է շրջանաձև անցքով թուլացված համասեռ իզոտրոպ հատվածակողմ չորսուր ծռումը քառակուսի փոքր առանցքներից մեկի երկայնությամբ կիրառված կենտրոնացած ուժի ազդեցությամբ առկա (նկ. 1):

Անհալս սկզբնական ֆունկցիան չորսուրի զրադեցրած տիրույթում, (1.1) և (1.2) կերպի՝ պայմանների դեպքում, որոնցում է (1.3) երկու ֆունկցիաների տեսքով՝ φ_1 — սկզբնական քառակուսու ներսում, φ_2 — սկզբնական շրջանաձևից դուրս և անվերջության մեջ գերուրի փոխարկվող: Այս մեթոդը թույլ է տալիս սովորական դեպքերում ստանալ հավասարումների պահանջով անվերջ հանրահազվական մի սխեմով, առանց խնդիրը նախապես Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարմանը բերելու: Որպես անհրաժեշտ, բայց միջակա էտապ, օգտագործվում է 'Ի. Ի. Շերմանի կողմից մեկ հաղորդված (4.11) և (4.12) արդյունքը:

Ստացված անվերջ սխեմումը կրճատված, հասցված է առաջ հավասարման: Կրճատված, նորմալ ձևի բերված սխեմումի առաջին հավասարման մեջ գործակիցների մոդուլների գումարը մեծ է մեկից (ինչպես այդ հետևում է աղյուսակ 2-ից), իսկ մնացած հավասարումների մեջ այդ գումարը փոքր է

մեկից: Առաջի աղ սխեմից առաջին հավասարումն առանձնացված է, իսկ երկրորդը՝ իր հավասարումները լուծված են հաջորդական մասավորությունների մեթոդով:

Այնուհետև լուծումն ստացված է և ցույց է տրված, որ այն մեծ ճշտությամբ բավարարում է (1.1) եզրային պայմանին և ճշգրտորեն՝ (1.2) պայմանին:

Հարկավոր է բերվում է նաև չեղք առանցքի կետերում աղյուղ շոշափող լարումների մեծությունների համեմատությունը ժուրավսկու բանաձևից բխող տվյալների հետ, եթե այն պայմանորեն տարածենք ոչ-միակապ տիրույթի վրա և, վերջապես, շոշափող լարումների արժեքները համեմատված են (էՄ-7) էլեկտրական մոդելի վրա ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости (1954).
2. Шерман Д. И. О напряжениях в скручиваемом круговом бруссе, ослабленном призматической полостью. Известия АН СССР, ОТН, 7 (1951).
3. Научно-технический отчет, фонд АЗНИИ по добыче нефти (1955).
4. Амензаде Ю. А. Изгиб призматического бруса, ослабленного круговой полостью. Труды АЗИИ им. М. Азизбекова, XIV (1956).
5. Амензаде Ю. А. Изгиб призматического бруса, ослабленного круговой полостью. ДАН СССР, том 114, № 1 (1957).

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. И. Мелковян

**Решение задачи струйного обтекания плоского затвора
с учетом силы тяжести по методу
источников и стоков****1. Общие замечания**

Теоретическое решение, построенное на базе теории отрывного обтекания тел, находит свое применение в различных отраслях техники при решении важных практических задач.

Решением этого вопроса занималось большое число исследователей, в основном с целью освещения ряда вопросов аэродинамики.

В последнее время методы теории струй были использованы для решения практических задач гидротехнического строительства, судостроения, глиссирования и т. п. [1, 2, 3, 4, 5].

Отметим, что при использовании методов гидромеханики в отдельных задачах практики важнейшим условием для получения реальной картины движения жидкости, является построение теоретической модели, соответствующей действительной схеме течения.

В этих задачах движение жидкости принимается плоским и потенциальным. Следовательно, рассматриваемый реальный поток должен быть ограничен в решении лишь той зоной, в которой отсутствуют вихревые движения жидкости. Наряду с этим рассматривается такая схема движения, когда силами внутреннего трения по сравнению с силами инерции можно пренебречь. Как известно, такого рода решения с точностью до толщины пограничного слоя довольно удовлетворительно отвечают реальной картине движения. Вместе с тем громадное значение для получения правильных результатов имеет соответствие граничных условий принимаемой теоретической модели с реальным потоком. Однако в работах ряда авторов имеют место такого рода несоответствия. Так, например, на приводимых ими схемах обтекания неравнобоких клиньев, ориентированных под различными углами наклона к оси потока и обтекаемых как безграничными, так и ограниченными потоками, а также в случае течения жидкости в тройнике, вершина обтекаемого острого угла принимается за критическую точку потока, скорость в которой равна нулю.

Указанные предположения справедливы лишь в случае снимо-

тричного расположения клиньев, так как при несимметричном расположении вершина клина может превратиться в точку срыва потока.

Зачастую не учитывается возможность отрыва струй от боковых стенок реального потока при его расширении в направлении течения и т. п.

Теоретическое рассмотрение вопроса о потенциальном движении жидкости приводит к заключению о невозможности безотрывного обтекания потоком острых кромок тел без понижения давления ниже допустимого предела, т. е. о неизбежности возникновения отрыва. Гидромеханическое решение задачи обтекания тупого угла показывает, что в его вершине скорость равна бесконечности. Последнее обстоятельство указывает на невозможность безотрывного обтекания острых кромок.

При отрыве жидкости от острой кромки, образующиеся струйные течения характеризуются вполне определенными кинематическими условиями вдоль граничных линий тока, ограничивающих струю. Правильное теоретическое обоснование этих условий и их соответствие с реальными потоками также является одним из основных факторов создания модели действительного течения. Данная работа является продолжением работы автора (Труды ЛИИВТ-а, XXIII, 1956), поэтому остановимся на некоторых основных данных, которые были отмечены ранее.

Основной задачей данной работы является иллюстрация метода источников и стоков на частном примере обтекания плоского затвора (с учетом действия силы тяжести). Этот метод позволяет в отдельных конкретных случаях подойти к более эффективному решению задачи по определению коэффициента сжатия струи. Сопоставление решения, опубликованного в XXIII сборнике Трудов ЛИИВТа с предлагаемым, говорит о несомненной простоте последнего.

2. Анализ граничных условий потока, обтекающего плоский затвор

В указанной выше статье вопросу изменения скоростей вдоль границ потока было уделено достаточно внимания. Однако, исходя из общих соображений, можно отметить, что при истечении из-под щита в атмосферу, на границе струи CD , рассматриваемой от отверстия до сжатого сечения, действует атмосферное давление. Последнее обстоятельство позволяет написать для линии тока CD уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2g} + y = C$$

(так как $\frac{P_{ат.}}{\gamma} = \text{const}$). Здесь v —скорость вдоль CD , y —ордината граничной линии тока.

Из этого равенства видно, что скорость вдоль границы струи является величиной постоянной в случае истечения ее в атмосферу.

Отсюда следует, что построение решения в этом частном случае, строго говоря, не может быть осуществлено по методу классической гидромеханики, разработанному Гельмгольцем и Кирхгофом.

Однако ранее уже указывалось (XXIII выпуск Трудов ЛИИВТ-а), что при условии

$$\frac{\partial}{\partial s} \left| \frac{v^2}{2g} + \frac{P_{at.}}{\gamma} \right| \gg \frac{\partial |y|}{\partial s}$$

изменением скоростей вдоль линии тока s можно пренебречь. Там же отмечалось, что последнее неравенство справедливо в случае больших

относительных напоров $\zeta = \frac{z_0^*}{b_0}$ (фиг. 1). При $\zeta_0 = 1$ это неравенство,

как показал приближенный количественный анализ, справедливо для малых значений относительных открытий затвора $x = \frac{b_2}{b_0}$.

Приняв, что скорость в точке C равна v_2 , а в сечении $DD_1 - v_1$ (при этом очевидно, что $v_2 < v_1$), приближенно было получено, что $\sigma = \frac{v_2}{v_1}$ изменяется в случае $\zeta_0 = 1$ в пределах от $\sigma = 0,8$ до $\sigma = 1$, в зависимости от степени открытия затвора x .

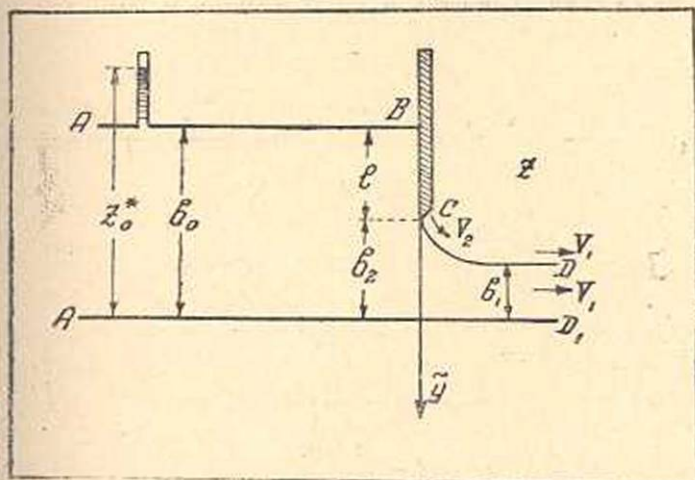
С помощью уравнений Бернулли, записанных для линий токов AD и CD , и уравнения неразрывности, было выведено равенство:

$$x = \frac{\zeta_0 - \frac{b_1}{b_0}}{1 - \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2} (1 - \sigma^2) + \frac{b_1}{b_0}. \quad (1)$$

где

$$x = \frac{b_2}{b_0}, \quad \zeta = \frac{z_0^*}{b_0} \text{ и } \sigma = \frac{v_2}{v_1}.$$

Для определения зависимости $x = f\left(\frac{b_1}{b_0}\right)$ с учетом силы тяжести



Фиг. 1.

($y \neq \text{const}$) необходимо иметь еще одно уравнение $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$, что позволит исключить из зависимости (1) параметр σ .

3. Определение зависимости $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$ с помощью метода источников и стоков

а) Построение плана скоростей

Для определения зависимостей $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$ построим в области комплексного переменного $v_x + iv_y$ план (или годограф) скоростей рассматриваемого течения, представленного на фиг. 1 комплексной областью $z = x + iy$. Как известно, $w = \varphi + i\psi$.

Здесь w — функция комплексного потенциала,

φ — функция потенциала скоростей,

ψ — функция тока.

Известно также, что

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = |v| e^{-i\theta}, \quad (2)$$

где v_x и v_y — проекции вектора скорости любой точки потока, а θ — угол наклона его по отношению к оси ox .

Наряду с этим отметим, как и прежде, что из уравнения Бернулли, записанного для линии тока CD , справедливо следующее равенство:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g(b_2 - b_1) = n^2. \quad (3)$$

Здесь введено обозначение $n = \sqrt{2g(b_2 - b_1)}$.

Из равенства (2) следует, что зависимость между скоростями v_1 и v_2 и величиной n подчиняется известной связи, существующей между полуосями эллипса и его полуфокусным расстоянием. Исходя из этих соображений, сделаем предположение о том, что изменение скоростей вдоль границы струи подчиняется эллиптическому закону. Тогда годограф скоростей может быть представлен в виде четверти эллипса (фиг. 2) с большой полуосью равной v_1 , малой полуосью равной v_2 , и полуфокусным расстоянием равным n , которое может быть записано в таком виде:

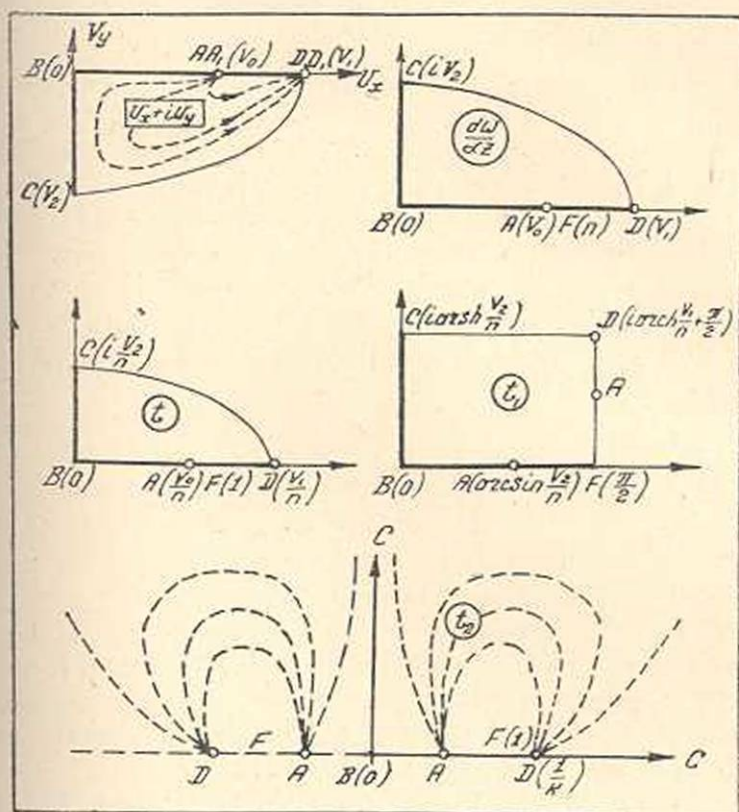
$$n = v_1 \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (4)$$

Возьмем зеркальное отображение полученной области и разделим его на величину n .

Обозначим эту область ограниченную эллипсом с полуфокусным расстоянием равным 1, буквой t .

Нетрудно видеть, что на основании (2)

$$t = \frac{1}{n} \frac{dw}{dz}. \quad (5)$$



Фиг. 2.

Очевидно также, что выражение

$$t = \sin t_1, \quad (6)$$

реализует конформное отображение области t на прямоугольник плоскости t_1 , шириной, равной $\frac{\pi}{2}$, и высотой, равной

$$i \operatorname{arsh} \frac{v_2}{n} \text{ или } i \operatorname{arch} \frac{v_1}{n}.$$

Подставив выражение (6) в уравнение (5) и решив его относительно z , получим выражение для комплексной координаты любой точки потока, обтекающего плоский щит, в виде:

$$z = \frac{1}{n} \int \frac{dw}{\sin t_1} + A. \quad (7)$$

Остается теперь отобразить прямоугольник области t_1 на полуплоскость t_2 и определить $w = f(t_2)$. Тогда уравнение (7) может быть приведено к квадратуре, что и было сделано ранее в цитированной выше статье.

Однако решение данной задачи указанным способом приводит к сочетанию гиперболических и эллиптических функций, разложение которых в ряд крайне затруднительно. Численное же интегрирование

указанного выражения представляет собой работу, требующую большой затраты времени и труда. Все это наводит на мысль об изыскании способа, позволяющего записать выражение (7) в более простом виде.

Для этого остановимся подробнее на физическом смысле отдельных элементарных гидромеханических понятий.

б) Физическая сущность особенностей и их связь с рассматриваемым течением

Известно, что выражение функции комплексного потенциала для системы источников и стоков можно в комплексной плоскости представить так:

$$w = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} q_k (t_z - a_k).$$

где q_k — расход или интенсивность источника или стока, a_k — координата точки расположения его.

Очевидно, что бесконечное число одноименных особенностей, симметрично лежащих на одной прямой, делит всю плоскость на бесконечное число вертикальных полос, ограниченных по краям вертикальными линиями токов, проходящими через точки разветвления. При этом эти точки будут находиться между особенностями.

Попробуем далее увязать действительную картину обтекания плоского щита с понятием источника и стока. На фиг. 3 представлена гидродинамическая сетка этого течения, причем, как нетрудно видеть, течение жидкости происходит от сечения AA_1 к сечению DD_1 , которые расположены в области z в точках $-\infty$ и $+\infty$.

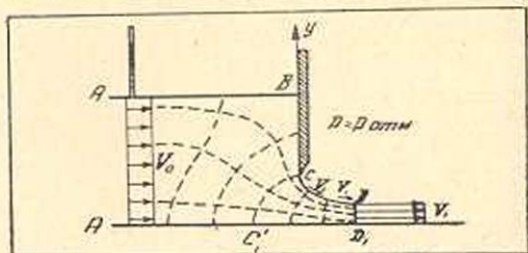
Таким образом, поток жидкости в области течения z ограничен стенками, плоскостью щита и границей струи.

Движение потока происходит от источника, расположенного в точке AA_1 с координатой $-\infty$, к стоку, расположенному в DD_1 с координатой $+\infty$.

При этом граничные линии тока, следуя вдоль твердых стенок и отрываясь от острой кромки, движутся по некоторой кривой, форму которой можно будет в дальнейшем определить.

Нетрудно видеть, что построенный голограф скоростей представляет собой область внутренности эллипса с источником, расположенным в точке $AA_1 (v_0)$.

Интенсивности указанных источника и стока должны соответствовать расходу жидкости, протекающей через отверстие щита. Ясно



Фиг. 3.

также, что течение в области плана скоростей будет осуществляться от точки A к точке D , образуя при этом гидродинамическую сетку.

Применение в дальнейшем конформного отображения этой области на прямоугольник устанавливает соответствие между точками отображенных областей.

В этом случае гидродинамическая сетка одной области переходит в геометрически подобную сетку другой области, и понятие течения от источника к стоку во вновь полученной области по прежнему остается в силе.

Исходя из этих соображений, можно по прежнему прийти к заключению о течении жидкости от точки A к точке D в области t_1 (прямоугольник). Вдоль граничной линии тока жидкость будет двигаться влево от точки A к точке D через B и C , а также вправо через точку F в D , что соответствует граничной линии $ABCD$ и A_1D_1 на фиг. 3. Остальные линии токов должны полностью заполнять внутренность прямоугольника.

в) Составление зависимости $w = f(t_1)$

Из уравнения (7) видно, что его решение возможно в случае, если значение входящей в него функции w будет выражено через t_1 . При этом видно, что для получения искомого течения сток в прямоугольнике $FBCD$ должен быть расположен в точке D с координатой

$$\frac{\pi}{2} + i \operatorname{arsh} \frac{v_1}{n} \text{ или } \frac{\pi}{2} + i \operatorname{arsh} \frac{v_2}{n}.$$

Источник, расположенный в точке A , будет менять свое местоположение вдоль сторон BF и FD в зависимости от степени открытия затвора.

Если нам теперь удастся расположить систему источников и стоков в плоскости t_1 таким образом, чтобы линии токов их соответствовали границам полученного прямоугольника, то определение w не представит никакой трудности.

Очевидно, что если разместить систему особенностей в плоскости t_1 так, как это указано на фиг. 4, то в дальнейшем решение задачи будет вполне определенным. Такое построение вытекает также из представления об эллиптических функциях, являющихся двойкопериодическими.

Введем следующие обозначения: $i\omega_2$ — вертикальная, а $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ — горизонтальная стороны прямоугольника. $m = p + iq$ — ордината точки A (в общем случае величина комплексная).

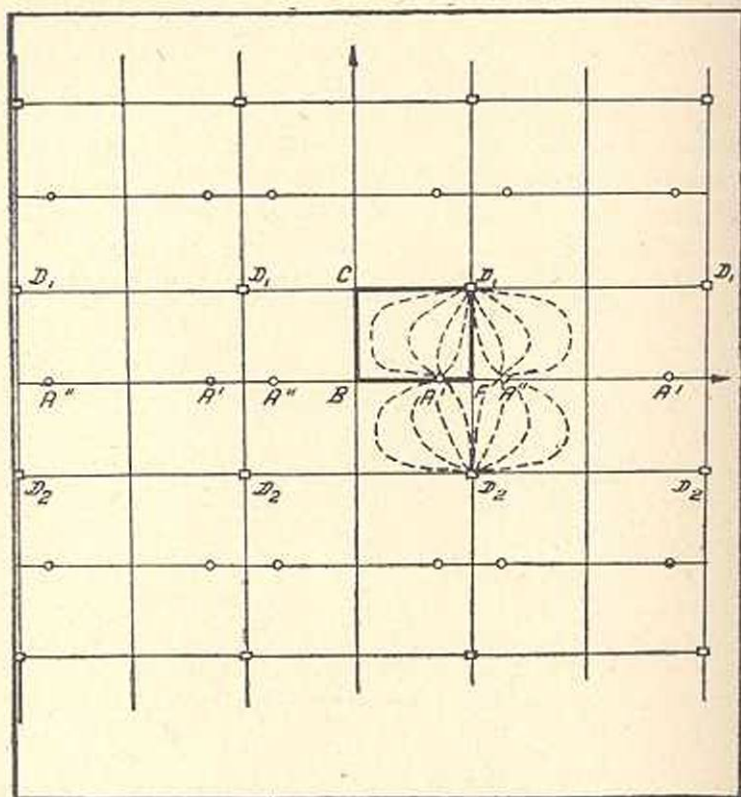
Запишем выражение характеристической функции для одного ряда источников и стоков: w'_{A_1} , w''_{A_1} , w_{D_1} . Штрихи у значений w_{A_1} показывают, что в первом случае взяты источники расположенные в точках A' (см. фиг. 4), а во втором — в точках A'' .

Очевидно также, что w_1 — характеристическая функция, записанная для особенностей, входящих в две горизонтальные полосы прямоугольников. При этом:

$$w_1 = w'_{A_1} + w''_{A_1} + w_{D_1} + w_{D_2}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} w'_{A_1} &= \frac{Q}{\pi} \left\{ \ln \frac{[t_1 - (p + iq)]\pi}{2\omega_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{t_1 - (p + iq) - 2k\omega_1}{-2k\omega_1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{t_1 - (p + iq) + 2k\omega_1}{2k\omega_1} \right\} = \\ &= \frac{Q}{\pi} \ln \frac{[t_1 - (p + iq)]\pi}{2\omega_1} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{[t_1 - (p + iq)]^2}{(2k\omega_1)^2} \right\}. \end{aligned}$$



Фиг. 4.

На основании выражения $\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)$

$$w'_{A_1} = \frac{Q}{\pi} \ln \sin (t_1 - p - iq).$$

По аналогии с этим

$$w_{A_1} = \frac{Q}{\pi} \ln \sin(t_1 + p + iq) + C_1,$$

$$w_{D_2} = \frac{2Q}{\pi} \ln \cos(t_1 + i\omega_2) + C_2,$$

$$w_{D_1} = -\frac{2Q}{\pi} \ln \cos(t_1 - i\omega_2) + C_3.$$

Из (8) следует, что

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{Q}{\pi} [\operatorname{ctg}(t_1 - m_1) + \operatorname{ctg}(t_1 + m_1) + 2\operatorname{tg}(t_1 - i\omega_2) + 2\operatorname{tg}(t_1 + i\omega_2)]. \quad (9)$$

Здесь $m_1 = p + iq$.

Теперь остается произвести суммирование по вертикали. Тогда дифференциал характеристической функции для всех рядов плоскости, после ряда тригонометрических преобразований, примет вид:

$$\begin{aligned} dw = \frac{2Q \sin t_1}{\pi} & \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d \cdot \sin t_1}{\cos^2 l (2k-1) \omega_2 - \sin^2 t_1} - \right. \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d \cdot \sin t_1}{\sin^2 [p + i(2k\omega_2 + q) - \sin^2 t_1]} - \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d \cdot \sin t_1}{\sin^2 [p - i(2k\omega_2 - q) - \sin^2 t_1]} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Зависимости, входящие в (10), обозначим следующим образом:

$$\cos i(2k-1)\omega_2 = \operatorname{ch}(2k-1)\omega_2 = a_{1k},$$

$$\sin(p + iq + i2k\omega_2) = a_{2k},$$

$$\sin(p + iq - i2k\omega_2) = a_{3k},$$

$$p + iq = \arcsin \frac{v_0}{n} = \arcsin \frac{b_1}{b_0 \sqrt{1 - \sigma^2}} = \arcsin m.$$

г) Интегрирование уравнения (7)

Подставляя (10) с введенными обозначениями и в (7), проинтегрировав в пределах от 0 до $\sin i\omega_2$ и сделав подстановку $\sin t_1 = y$, получим:

$$\begin{aligned} i l = \frac{2b_1}{\pi \sqrt{1 - \sigma^2}} & \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{1k}} \operatorname{arth} \frac{y}{a_{1k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_{2k}} \operatorname{arth} \frac{y}{a_{2k}} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{3k}} \operatorname{arth} \frac{y}{a_{3k}} \right] \sin i\omega_2. \quad (11) \end{aligned}$$

Если в последнем уравнении обозначим верхний предел

$$y_1 = \sin i\omega_2 = i \operatorname{sh} \omega_2 = iu,$$

то окончательно будем иметь, относя обе части равенства (11) к b_0 ,

$$\frac{l}{b_0} = \left| \frac{2b_1}{b_0 \pi \sqrt{1-\sigma^2}} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}}}{a_{1k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{a_{2k}}}{a_{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{a_{3k}}}{a_{3k}} \right) \right|. \quad (12)$$

В выражении (12) две последние суммы содержат величины a_{2k} и a_{3k} , которые в общем случае могут быть комплексными. Разложим их на действительные и мнимые части.

Тогда

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin m \pm 2k\omega_2) &= m \operatorname{ch} 2k\omega_2 \pm i \sqrt{1-m^2} \operatorname{sh} 2k\omega_2 = \\ &= m \operatorname{ch} 2k\omega_2 \mp \sqrt{m^2-1} \operatorname{sh} 2k\omega_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что в случае, если $m^2 > 1$, то a_{3k} и a_{2k} действительны; в противном случае величины, входящие под знак суммы, подлежат также разложению на действительную и мнимую части. При этом, так как $\frac{l}{b_0}$ в (12) действительно, то мнимые части разложения можно откинуть

Таким образом, в случае

$$m^2 > 1$$

(12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{l}{b_0} = 1 - \frac{b_2}{b_0} = & \left| \frac{2b_1}{b_0 \pi \sqrt{1-\sigma^2}} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{1k}} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k - b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k - b_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k + b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k + b_k} \right) \right|, \end{aligned}$$

где

$$a_k = m \operatorname{ch} 2k\omega_2,$$

$$b_k = \sqrt{m^2-1} \operatorname{sh} 2k\omega_2.$$

Введя обозначения

$$\beta_1 = \frac{b_1}{b_0}, \quad x = \frac{b_2}{b_0}, \quad r = \frac{2}{\pi \sqrt{1-\sigma^2}},$$

получим:

$$x = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{u}{m} + r \beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a_{1k}} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}} - \frac{1}{a_k - b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k - b_k} - \right.$$

$$-\frac{1}{a_k + b_k} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_k + b_k} \Big). \quad (13)$$

Напомним, что здесь:

$$u = \operatorname{sh} \omega_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad a_{1k} = \operatorname{ch} (2k - 1) \omega_2; \quad a_{2k} = m \operatorname{ch} 2k \omega_2;$$

$$\omega_2 = \operatorname{arsh} u; \quad b_k = \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{sh} 2k \omega_2;$$

$$m = \frac{\beta_1}{\sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad r = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

В предлагаемом ряде возможно ограничиться двумя членами, что дает точность в пятом знаке после запятой.

В случае $m^2 < 1$ формула для x несколько усложняется. Не приводя промежуточных выкладок, о которых говорилось ранее, запишем ее в окончательном виде:

$$x = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{u}{m} + r \beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a_{1k}} \operatorname{arctg} \frac{u}{a_{1k}} - \frac{1}{u d_k} \left(b_k \operatorname{arctg} \frac{2b_k}{d_k - u^2} - \frac{c_k}{2} \ln \frac{d_k + u^2 + 2c_k}{d_k + u^2 - 2c_k} \right) \right], \quad (14)$$

где

$$a_{1k} = \operatorname{ch} (2k - 1) \omega_2,$$

$$b_k = u m \operatorname{ch} 2k \omega_2; \quad d_k = m^2 + \operatorname{sh}^2 2k \omega_2;$$

$$r = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \sigma^2}}; \quad \frac{u}{m} = \frac{\sigma}{\beta_1}; \quad u = \operatorname{sh} \omega_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}};$$

$$c_k = u \sqrt{1 - m^2} \operatorname{sh} 2k \omega_2.$$

Нетрудно видеть, что в точке $m = 1$ формулы (13) и (14) должны давать одни и те же значения. Определение величины β_1 при $m = 1$ можно легко получить из выражения $m = \frac{\beta_1}{\sqrt{1 - \sigma^2}}$.

Очевидно, что значениям $m = 1$ соответствует $\beta_1 = \sqrt{1 - \sigma^2}$. Кривые, построенные по приведенным выше равенствам в координатной системе $x; \beta_1$, проходят через начало координат, что вытекает из (13) и (14) при подстановке $\beta_1 = 0$. Таким образом, полученные уравнения характеризуют функциональную зависимость $x = F\left(\sigma; \frac{b_1}{b_0}\right)$ и позволяют при совместном решении их с уравнением (1) определить связь между степенью открытия затвора $x = \frac{b_2}{b_0}$ и величиной относительного сжатия струи $\beta_1 = \frac{b_1}{b_0}$, в случае учета силы тяжести. Последняя учитывается в граничных условиях изменением скорости вдоль линии тока, ограничивающей струю. Полученные уравнения позволяют по-

лучить искомые величины с необходимой точностью. Сходимость рядов в уравнениях (13) и (14) такова, что для требуемых значений достаточно было ограничиться первым членом ряда, что давало точность в третьем знаке после запятой.

4. Построение зависимости $x = f\left(\frac{b_1}{b_0}\right)$

Выше уже отмечалось, что построение зависимости $x = f(\beta_1)$ теряет свой смысл для $\zeta_0 = \frac{z^*}{b_0}$, превышающих 2. Поэтому расчет проведем для значений $\zeta_0 = 1$, что соответствует истечению жидкости из-под щита в случае наличия свободной поверхности. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$x = \beta_1 + \frac{1 - \sigma^2}{1 + \beta_1} \quad (15)$$

Задаваясь последовательно значениями σ , равными $1, 0,95, 0,9, 0,8$ и т. п., можно получить семейство помеченных этими значениями кривых, в координатной системе $\frac{b_2}{b_0} = x$ и β_1 . Очевидно, что, как это следует из физического смысла величин x и β_1 , они могут изменяться от 0 до 1, причем x везде превышает величину соотношения β_1 , за исключением точек $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = 1$, т. е. когда x и β_1 равны друг другу. Эти точки соответствуют полному открытию и закрытию затвора.

На фиг. 5 указанное семейство кривых проходит выше прямой $x = \beta_1$, соответствующей $\sigma = 1$.

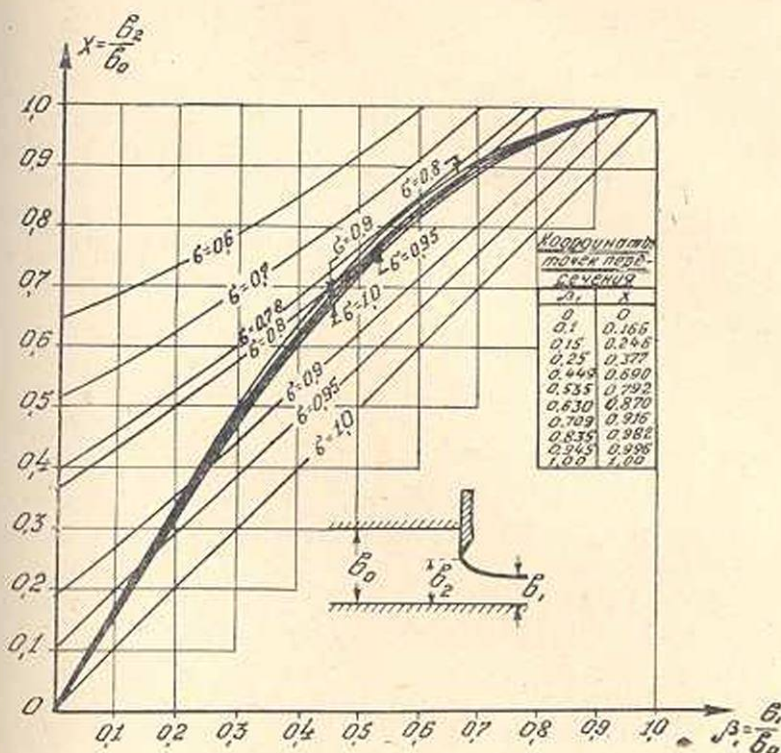
Таблица 1

β_1	$\sigma = 1$ x	$\sigma = 0,95$ x	$\sigma = 0,9$ x	$\sigma = 0,8$ x
1	1,00	0,999	0,998	0,992
0,95	0,988	0,997	0,986	0,990
0,9	0,977	0,989	0,988	0,984
0,8	0,942	0,954	0,954	0,958
0,7	0,897	0,903	0,906	0,912
0,6	0,820	0,827	0,833	0,846
0,5	0,722	0,729	0,738	0,747
0,4	0,605	0,611	—	0,642
0,3	0,465	—	—	—
0,2	0,320	0,3263	0,333	0,342
0,1	0,165	0,166	—	—
0	0	—	0	0

Вычисление второго семейства кривых, соответствующих уравнениям (13) и (14), показало быструю сходимость рядов при принимаемых в расчетах значениях σ (от 1 до 0,7).

Эти кривые, помеченные значениями σ равными 1; 0,95; 0,90 и 0,8, пересекаются с кривыми уравнения (15). Ввиду того, что в рассматриваемом случае обтекания затвора с учетом силы тяжести отношение $\sigma = \frac{v_2}{v_1}$ колеблется пример-

но в пределах от 0,8 до 1,0, то кривые, помеченные значениями $\sigma = 0,7$ и меньше, на графике фиг. 5 не пересекаются. В табл. 1 приводятся значения x при заданных σ и β_1 , полученных путем расчетов по уравнениям (13) и (14).



Фиг. 5.

В табл. 2 приводятся значения x и β_1 , полученные в результате графического совмещения семейства кривых, построенных по уравнениям (13), (14) и (15).

В табл. 3 приведены значения коэффициента сжатия струи $\epsilon = \frac{\beta_1}{x}$ в зависимости от величины открытия затвора в случае учета действия силы тяжести, подсчитанные по результатам данным в табл. 2.

Таблица 2

β_1	0,0	0,10	0,15	0,23	0,449	0,709	0,885	0,945	1,00
x	0,0	0,166	0,246	0,377	0,690	0,916	0,982	0,996	1,00

Таблица 3

β_1	0	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,00
ϵ'	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644	0,662	0,688	0,722	0,781	0,860	1,00
β_1	0	0,1	0,15	0,23	0,449	0,709	0,885	0,945	1,00	—	—	—
ϵ	0,611	0,611	0,611	0,612	0,642	0,773	0,901	0,949	1,00	—	—	—

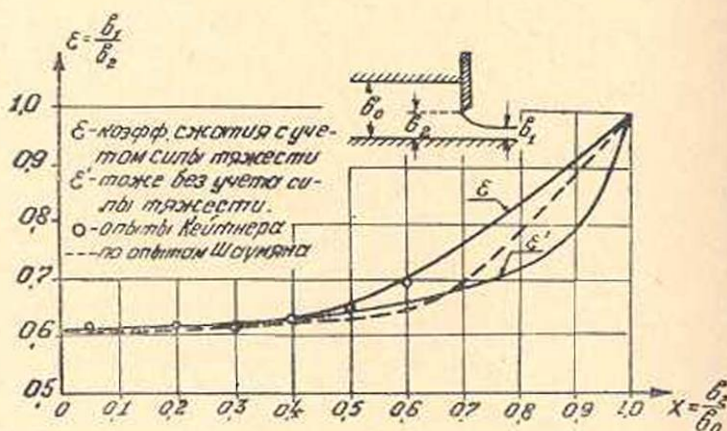
Ниже приводятся значения $\varepsilon' = \frac{\beta_1'}{x}$ без учета силы тяжести, что соответствует значению $\sigma = 1$. Определение последней зависимости было ранее дано рядом авторов: Н. Е. Жуковским, Мизесом, Голубевым, Бетцем, Петерсоном и т. д., однако наиболее полные численные расчеты и сопоставление их результатов с опытами дано у Мизеса [5].

Данные, приведенные в табл. 3, представлены на графике фиг. 6.

Из сопоставления этих данных видно, что коэффициенты сжатия ε' и ε совпадают в промежутке $0 \leq x \leq 0,5$.

При относительном открытии затвора $x = \frac{b_2}{b_0}$, большем 0,5, эффект действия силы тяжести сказывается все более разительно, достигая максимума при значениях $x = 0,85$, после чего эта разница начинает убывать. На графике кружками с точкой нанесены данные опытов Кейтнера, заимствованные из *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Н. 24, 1935. Эти опыты вполне удовлетворительно совпадают с теоретической кривой для ε .

В диапазоне открытий x от 0 до 0,5 эти опытные данные подтверждают также правильность теоретической кривой для случая ис-



Фиг. 6.

течения без учета силы тяжести. На этом же графике пунктирной линией нанесена кривая, полученная В. А. Шаумяном в результате обработки проведенных им экспериментов (В. А. Шаумян, *Научные основы орошения*, 1948, стр. 439). Как это следует из графика, данная экспериментальная кривая подтверждает то обстоятельство, что, ввиду действия сил тяжести, величина коэффициента сжатия отклоняется от значений ε в зоне больших открытий затвора.

Отметим, что определение в дальнейшем по полученным формулам величины гидродинамического давления, оказываемого потоком на затвор, не представляет никакой трудности. Действительно, подставляя в уравнение

$$\frac{dw}{dz} = |v| e^{i\theta} = n \sin t_1 = v_1 \sqrt{1-\sigma^2} \sin t_1 \quad (16)$$

значение $1-\sigma^2$, определенное из уравнения (15),

$$1-\sigma^2 = (x-\beta_1)(1+\beta_1), \quad (17)$$

и определяя для ряда значений открытий затвора, величины β_1 и v_1 по построенному графику, можно будет получить уравнение для закона распределения скоростей вдоль плоскости щита:

$$|v| = |iv_1 \sqrt{(x-\beta_1)(x+\beta_1)} \sin t_1|. \quad (18)$$

Используя последнее уравнение и уравнение Бернулли, записанное для линии тока, движущейся вдоль плоскости щита, нетрудно получить эпюры распределения гидродинамического давления, оказываемого потоком на щит. Следует иметь в виду, что для построения этих эпюр величина t_1 должна меняться в пределах от 0 до $i \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{(x-\beta_1)(1+\beta_1)}}$.

5. Заключение

Данная статья является продолжением работы автора, опубликованной в XXIII выпуске Трудов ЛИИВТа за 1956. Из приведенного в этой статье решения видно, что оно приводит к трудоемким вычислениям, требующим большой затраты времени. В предлагаемой работе задача решена при помощи метода источников и стоков, дающего возможность вычислить искомые значения при помощи быстроходящихся рядов и с требуемой точностью.

Данный метод решения задачи иллюстрируется на частном примере струйного обтекания плоского щита с учетом влияния силы тяжести.

Последнее вводится в решение согласно принимаемому предположению об эллиптическом законе изменения скоростей вдоль границы струи на годографе скоростей.

Графическое сопоставление коэффициента сжатия при обтекании щита с учетом силы тяжести и без учета ее показывает, что закон изменения скоростей вдоль границы струи может быть принят постоянным в случае, если $\zeta_0 = \frac{z_0^*}{b_0} \gg 2$.

При $\zeta_0 = 1$ отношение $\sigma = \frac{v_2}{v_1}$ колеблется от 0,8 до 1,0. Решение позволяет найти величину гидродинамического давления производимого потоком при обтекании затвора.

Գ. Ի. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

**ՀԱՐՔ ՓԱԿԱՆԻ ՇԻՔԱՅԻՆ ՇՐՋՆՈՍՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ
ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ՈՒԺԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ՝ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐԻ
ԵՎ ՀՈՍՔԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ**

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արվում է հարթ փականի շիթային շրջնոսման խնդրի լուծումը, երբ հաշվի է առնված ծանրության ուժը և երբ շիթը արտահոսում է մթնոլորտ:

Մնգիլը լուծված է աղբյուրների և հոսքերի մեթոդով, որը հնարավորություն է տալիս այն լուծել արագ զուգամիտվող շարքերի միջոցով, ցանկացած ճշտությամբ: Այս մեթոդի օգտագործումը որոշակի հետաքրքրություն է ներկայացնում բոլոր այն դեպքերում, երբ արագության հոդոգրաֆի (պլանը) կոնֆորմ արտապատկերումը տալիս է ուղղանկյուն:

Նշված մեթոդը ցուցադրվում է մասնավոր դեպքում հարթ փականի շրջնոսման խնդրում ծանրության ուժի առկայության պայմաններում, երբ արագությունների փոփոխման օրենքը շիթի սահմանագծով արագությունների պլանում հնթադրվում է էլիպտական:

Սեղման գործակցի դրաֆիկական համեմատությունը փականի շրջնոսման ժամանակ, ծանրության ուժի առկայության բացակայության պայմաններում ցույց է տալիս, որ արագությունների փոփոխման օրենքը կարելի է ընդունել հաստատուն, եթե $\zeta_0 = \frac{z_0}{b_0}$; $\zeta_0 = 1$ դեպքում և հատկապես $x = 0,5$ մինչև $x = 1,0$ դիսպազոնով հարաբերական բացման պայմաններում արագությունների հաստատունությունը խախտվում է և $\zeta = \frac{v_2}{v_1}$ հարաբերությունը տատանվում է $0,8$ -ից մինչև $1,0$:

Սեղման գործակցի որոշումը հնարավորություն է տալիս որոշելու հիդրոդինամիկական ճնշումը փականի վրա վերջին շրջնոսման ժամանակ և արագությունների դաշտը կառուցելու. գիտվող հոսանքի դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маккаев В. М., Коновалов И. М. Гидравлика (1940).
2. Маккаев В. М. Некоторые приложения метода комплексного переменного к задачам гидромеханики. Труды II Всесоюзного матем. съезда (1934), II том, изд. АН СССР (1935).
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики (1950).
4. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд. И. Л. (1954).
5. Mises, Berechnung von Ausfluss und Ueberfallzahlen, V. D. J. (1917).

Н. М. Кочарян, Г. С. Саакян, М. Т. Айвазян, А. С. Алексанян и Х. Б. Пачаджян

Ядерные взаимодействия π -мезонов и протонов в графите

В 1955 г. на высокогорной станции Арагац были поставлены эксперименты по определению поперечных сечений неупругого ядерного взаимодействия σ_a протонов и π -мезонов в графите. Измерения производились при помощи магнитного спектрометра Алиханяна—Алиханова, приведенного ниже.

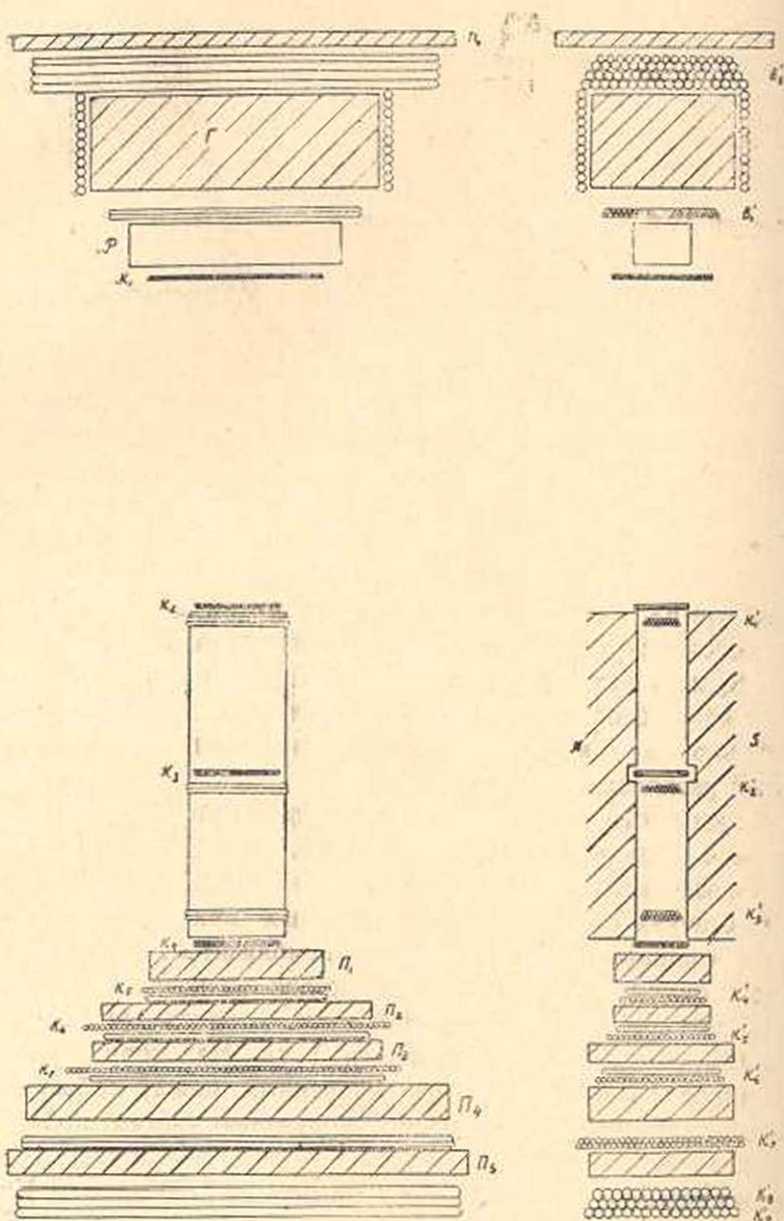
Координаты траекторий частиц определялись четырьмя рядами счетчиков K_1 — K_4 . Счетчики в этих рядах имели диаметр 0,46 см и были расположены в два слоя, с уточнением на одну треть счетчика. Ряды K_2 , K_3 и K_4 находились в магнитном поле, а ряд K_1 вне магнитного поля на расстоянии 69,1 см от оси ряда K_2 , расположенного непосредственно над магнитным зазором. Расстояние между рядами K_2 и K_4 также равнялось 69,1 см.

Под магнитным зазором находилось пять графитовых поглотителей P_1 — P_5 , с толщинами соответственно 10,1; 5,6; 7,1; 11,7; и 8,5 г/см². В приведенные числа включено также количество вещества, содержащегося в стенках счетчиков, расположенных между поглотителями. Суммарная толщина стенок счетчиков приблизительно равна 3 г/см² меди, что в смысле ядерных взаимодействий эквивалентно приблизительно 2 г/см² графита. Диаметр счетчиков в рядах, расположенных между поглотителями P_1 — P_5 , равнялся 1 см. Над координатным рядом счетчиков K_1 находились два спаренных между собою пропорциональных счетчика P , измеряющих ионизацию частиц, проходящих через них.

Напряженность магнитного поля равнялась 7100 эрстед. Импульсы частиц, измеренные в единицах $\frac{Bev}{c}$, непосредственно вычислялись по формуле (1).

$$P = \frac{300H}{2 \sin(\varphi + \psi) \cos \psi}, \quad (1)$$

где H —напряженность магнитного поля, а углы φ и ψ определяются соотношениями



Фиг. 1. Вертикальные разрезы установки магнитного спектрометра, перпендикулярной и параллельной силовым линиям магнитного поля, Г—графитовый поглотитель, Р—пропорциональный счетчик, К и В с индексами и штрихами—ряды счетчиков, П₁—П₅—графитовые поглотители и П₀—свинцовый поглотитель. Установка начерчена в масштабе.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_1 - x_2}{l_{12}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{x_2 - x_4}{l_{24}}. \quad (2)$$

Здесь $l_{12} = l_{24} = l = 69,1 \text{ см}$ — соответственно расстояния между рядами счетчиков K_1 и K_2 , K_2 и K_4 ; x_1 , x_2 , x_3 и x_4 — координаты частиц (номера счетчиков) в рядах K_1 – K_4 . При импульсах $P \gg 1 \frac{\text{Bev}}{c}$ имеем

$\cos \varphi \approx 1$ и $\sin(\varphi + \psi) \approx \varphi + \psi \approx \frac{x_1 - x_4}{l}$, следовательно

$$P = \frac{300 H l^2}{2 |x_1 - x_4|}.$$

Точность в измерении импульсов частиц, в этих измерениях, примерно в два раза превышала точность измерения импульсов в наших предыдущих работах.

Таблица 1

Интервалы возможных значений отклонений частиц $x_1 - x_4$ и соответствующие им значения импульсов

Интервалы отклонений $x_1 - x_4$ в см	Интервалы импульсов P в $\frac{\text{Bev}}{c}$	Средний импульс $\bar{P}$
0–0,153	∞ –33,2	66,5
0,153–0,319	33,2–16	21,5
0,319–0,484	16–10,4	12,7
0,484–0,649	10,4–7,8	9,0
0,649–0,815	7,8–6,25	7,0
0,815–0,980	6,25–5,2	5,7
0,980–1,145	5,2–4,44	4,8
1,145–1,311	4,44–3,88	4,1
1,311–1,48	3,88–3,45	3,65
1,48–1,64	3,45–3,09	3,27
1,64–1,81	3,09–2,82	2,95
1,81–1,97	2,82–2,52	2,70
1,97–2,14	2,52–2,38	2,48
2,14–2,30	2,38–2,20	2,30
2,30–2,47	2,20–2,06	2,12
2,47–2,63	2,06–1,93	2,0
2,63–2,80	1,93–1,81	1,87
2,80–2,96	1,81–1,72	1,76
2,96–3,13	1,72–1,62	1,67
3,13–3,29	1,62–1,54	1,58

В табл. 1 вычислены интервалы возможных значений отклонений частиц в магнитном поле $|x_1 - x_4|$ и соответствующие им интервалы импульсов и средние значения импульсов. Средние значения импульсов соответствуют среднеарифметическим значениям отклонений.

Над пропорциональным счетчиком находился графитовый поглотитель Г, окруженный со всех сторон счетчиками Гейгера-Мюллера. Над этим поглотителем находился ряд счетчиков $B\frac{1}{2}$, состоящий из четырех слоев счетчиков. Счетчики самого верхнего слоя этого ряда имели диаметр 1 см, а в остальных слоях—2 см.

Изучению подвергались частицы, генерированные в поглотителе Г нейтральной компонентой космического излучения, а также негенерированные частицы.

Генерированные частицы отрицательного знака заряда отождествлялись с π^- -мезонами, а положительные с протонами и π^+ -мезонами.

В нашем распоряжении было множество трафаретов, подобных фиг. 1. Проекция траектории всех частиц наносилась на эти трафареты и подвергалась тщательному изучению. В результате удавалось установить в каких случаях частицы, исходящие из магнитного зазора, проходят графитовые поглотители не испытывая ядерные взаимодействия и в каких случаях испытывают такие взаимодействия.

В настоящих измерениях, по сравнению с предыдущими нашими измерениями, юстировка системы была точнее, и мы имели возможность установить случаи отклонения частиц от их прямолинейного пути движения на угол $\alpha \sim 5^\circ$.

Все необходимые данные, относящиеся к ядерным взаимодействиям генерированных отрицательных частиц (π^- -мезонов), приведены в табл. 2.

Таблица 2

Поперечное сечение неупругого ядерного взаимодействия π^- -мезонов в графите

Интервалы полной энергии в Bev	Средняя энергия в Bev	Толщина поглотителей в г/см ²	Общее число частиц	Число взаимодействующих частиц	Полное поперечное сечение σ_a в миллибарн.
1	2	3	4	5	6
0,36—0,55	0,43	43	201	72	+22 205—25
0,55—0,79	0,65	43	107	38	+32 202—33
0,79—1,15	0,94	43	53	22	+54 248—57
1,15—2,0	1,5	43	39	14	+52 206—60
2,0—4,0	2,8	43	33	12	+59 210—68
4—66	15	43	11	4	+97 208—120

В первых двух столбцах этой таблицы даются интервалы импульсов и средние импульсы. В третьем столбце указана суммарная толщина по-

глотителей, в которых исследовались ядерные взаимодействия частиц. В четвертом и пятом столбцах указаны соответственно общее число π^- -мезонов и число взаимодействующих π^- -мезонов. В шестом столбце даются поперечные сечения неупругого взаимодействия π^- -мезонов в графите. Ошибки представляют собою среднеквадратичные. Они вычислены по известной формуле $\Delta n = \sqrt{n_0 w (1-w)}$, где Δn — возможные флуктуации в числе взаимодействующих частиц, n_0 — общее число частиц и w — вероятность взаимодействия.

Углы дифракционного рассеяния π^- -мезонов в графите порядка $\theta \sim \frac{hc}{2\pi R p} \approx \frac{3,5}{p}$ градусов, где $R = 3,2 \cdot 10^{-13}$ см — радиус ядра графита. При просмотре на трафаретах проекции траекторий частиц мы в число ядерных взаимодействий включили также случаи рассеяния частиц на углы $\theta \geq 5^\circ$. Для первых трех интервалов импульсов углы дифракционного рассеяния не малы (они порядка 8; 5,4 и 3,7 градусов). Поэтому, для этих интервалов импульсов, измеренные поперечные сечения, приведенные в табл. 2, не представляют собою лишь поперечные сечения неупругого ядерного взаимодействия, а включают в себя и некоторую долю от упругого рассеяния частиц. Для остальных трех интервалов импульсов углы дифракционного рассеяния достаточно малы и полученные поперечные сечения при этих энергиях соответствуют только процессу неупругого ядерного взаимодействия π^- -мезонов.

Из таблицы видно, что при средних энергиях 1,5; 2,8 и 15 Bev поперечное сечение неупругого ядерного взаимодействия π^- -мезонов в графите σ_a в пределах статистических ошибок постоянно и приблизительно равно $0,65 \sigma_0$, где $\sigma_0 = 3,22 \cdot 10^{-25}$ см² — геометрическое сечение ядра графита. Таким образом, даже при энергиях 15 Bev, или, точнее, при $E > 4$ Bev, поперечное сечение σ_a меньше геометрического сечения σ_0 . Итак, ядра графита для π^- -мезонов, при таких энергиях, не являются черным телом, а имеют некоторую прозрачность.

Результаты, полученные при изучении потока генерированных положительных частиц сведены в табл. 3.

Из сравнения чисел π^- -мезонов и положительных частиц, по-видимому, можно утверждать, что большинство из генерированных положительных частиц является протонами.

Полученные поперечные сечения, приведенные в шестом столбце табл. 3, представляют собою сечения неупругого ядерного взаимодействия смеси протонов и π^+ -мезонов в графите. Это сечение в пределах ошибок эксперимента оказывается таким же, как и для π^- -мезонов. Отсюда можно заключить, что при импульсах 2,7; 3,3 и $6,7 \frac{\text{Bev}}{c}$ поперечное сечение σ_a для неупругого ядерного взаимодействия протонов в графите приблизительно равно $0,65 \sigma_0$. Таким образом, даже при энергиях протонов $E \approx 6$ Bev ядра графита являются полупрозрачными для протонов.

Таблица 3

Поперечные сечения неупругого ядерного взаимодействия положительно заряженных генерированных частиц в графите

Интервалы импульсов в единицах $\frac{Bev}{c}$	Средний импульс $\frac{Bev}{c}$	Толщина поглотителей в g/cm^2	Общее число частиц	Число взаимодействующих частиц	Поперечное сечение неупругого взаимодействия σ_a в миллибарнах
1	2	3	4	5	6
2—4	2,7	43	161	58	205 ± 27 +41
3—4	3,3	43	59	20	191 ± 45 +60
4—16	6,7	43	30	11	212 ± 70

В области энергии $8 < E < 16 \text{ Bev}$ (средняя энергия около 10 Bev) наблюдалось около 11 положительных частиц, и среди них было обнаружено 3 взаимодействия. Поперечное сечение σ_a для этих частиц получается равным 0,15 барна. Но трудно серьезно отнестись к этому результату, так как статистика явно недостаточна и флуктуации σ_a от его истинного значения могут быть значительными.

Эксперимент был достаточно точным для измерения импульсов частиц и мы имели возможность произвести определение сечения σ для протонов и π -мезонов до энергии 60 Bev . Однако светосила установки была малой и, несмотря на большую продолжительность произведенных измерений (приблизительно 1000 часов), нам не удалось набрать достаточное количество частиц. По этой причине нам пришлось произвести соединение интервалов импульсов.

Средние импульсы или энергии, приведенные во вторых столбцах табл. 2 и 3, представляют собою среднеарифметическое значение этих величин.

Теперь сравним полученные данные с уже известными в литературе. В работе [2] измерялось выбывание π^- -мезонов, с полной энергией $0,59 \text{ Bev}$, из пучка в графитовой мишени. Для сечения σ_a получено значение 186 ± 22 миллибарна, что в пределах ошибок экспериментов совпадает с нашим результатом при этой энергии. В работе [3] определено полное поперечное сечение σ_i взаимодействия π^- -мезонов в графите, и найдено $\sigma_i = 0,498$ барна, при энергии $0,53 \text{ Bev}$. В работе [4] определялось неупругое поперечное сечение для π^- -мезонов в алюминии при энергии 5 Bev . Получено $\sigma_a = 0,40$ барна, что составляет примерно 72% от геометрического поперечного сечения. Наш результат для графита в области больших энергий не противоречит с этим результатом для алюминия. Наконец, в недавно опубликованной работе [5] при $E\pi = 4,2 \text{ Bev}$ для графита найдено $\sigma_a = 0,218$ барна, что хорошо согласуется с нашим результатом при этих энергиях.

Поскольку генерированный поток положительных частиц в ос-

новном состоит из протонов, то может быть имеет некоторый смысл данные, полученные в табл. 3, сравнить с известными в литературе данными для протонов. В работе [6] при энергии протонов, равной $0,87 \text{ Bev}$, для поперечного сечения неупругого взаимодействия σ_a с ядрами графита найдено $\sigma_a = 0,25$ барна. В работах [7] и [8] для нейтронов с энергией $1,4 \text{ Bev}$ для сечения σ_a в графите найдены соответственно $\sigma_a = 0,231$ и $0,200$ барна. Результаты, приведенные в шестом столбце табл. 3, согласуются с результатами цитированных работ.

Институт физики АН Армянской ССР

Поступило 27 X 1956

Կ. Մ. Բոչարյան, Գ. Ս. Սահակյան, Մ. Տ. Սվազյան,
Յ. Ս. Ալեքսանյան և Խ. Բ. Փաշաջյան

π -ՄԵԶՈՆՆԵՐԻ ԵՎ ՊՐՈՏՈՆՆԵՐԻ ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆ ՓՈԽ-ԱՋԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԳՐԱՖԻՏՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեր նպատակն է եղել որոշել պրոտոնների և π -մեզոնների ոչ-ատոմային միջուկային փոխազդեցությունների լայնական կտրվածքը գրաֆիտում $E \geq 1 \text{ Bev}$ էներգիաների համար: Այդ նպատակի համար անհրաժեշտ մասնիկների փնջերը կոմպակտ և ճառագայթման չեզոք բաղադրիչների կոմպլեքս առաջացել են 40 գ/սմ^2 հաստություն ունեցող գրաֆիտե կլանիչում, որը գրված է եղել էլեկտրոմագնիսի բեռների բացվածքից վերև (փորձը կատարվել է մագնիսական սպեկտրոմետրի օգնությամբ):

Էքսպերիմենտալ սարքավորման ճշտությունը բավականաչափ բարձր էր, և մենք հնարավորություն ունինք չափելու մասնիկների փոխազդեցության լայնական կտրվածքը մինչև 60 Bev էներգիաների համար: Սակայն, չնայած երկարատև չափումներին (մոտավորապես 1000 ժամ) սարքավորման լուսատի փոքր լինելու պատճառով, մենք չկարողացանք անհրաժեշտ թվով մասնիկներ ստանալ մեծ էներգիաների տիրույթում: Միջուկային փոխազդեցություններն ուսումնասիրվում էին մագնիսի բեռների բացվածքի տակ գրված 43 գ/սմ^2 ընդհանուր հաստություն ունեցող 5 գրաֆիտե կլանիչներում (նկ. 1): Ստացված արդյունքները, որոնք բերված են աղյուսակներ 2 և 3-ում, ցույց են տալիս, որ թե՛ մեզոնների և թե՛ պրոտոնների ոչ-ատոմային փոխազդեցության լայնական կտրվածքները գրաֆիտում մինչև 10 Bev էներգիաների համար փոքր են գրաֆիտի միջուկների երկրաչափական լայնական կտրվածքից և մոտավորապես կազմում են նրա 70% -ը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочарян Н. М. Докторская диссертация, ФИАН СССР (1954).
2. Lindenbaum S. J. and Luke C. L. Yuan Phys. Rev. 92, 1578 (1953).
3. Игнатенко А. Е., Мухин А. И., Озеров Е. Б. и Понте-Корво Б. М. ДАН СССР, 103, 395 (1955).

4. John Yse, Jr., Andre Lagarrigue and Robert V. Pyle. Bul. Amer. Phys. Soc., 30, Number 8, 15 (1955); Phys. Rev. 100, 1799 (1955).
5. Wikner N. F., Bostick H. A., and Moyer B. J. Bull. Amer. Phys. Soc., 1, № 5, 252 (1956).
6. Chew F. F., Leavitt C. P., and Shapiro A. M. Bull. Amer. Phys. Soc., 29, 47 (1954).
7. Snow G. A., Goor T., Hill D. A., Hornyak W. F. and Smith L. W. Bull. Amer. Phys. Soc., 29, 54 (1954).
8. Goor T., Hill D. A., Hornyak W. F., Smith L. W. and Snow G. A. Phys. Rev., 98, 1369 (1955).

М. А. Аракелян

Кривая роста для поздних В-звезд главной последовательности

Эффективным средством исследования звездных атмосфер является метод построения и изучения кривой роста, т. е. зависимости полных поглощений в спектральных линиях определенного элемента (данной степени ионизации) от оптической глубины в центре линии. При этом удобно выражать полные поглощения в единицах длин волн, т. е. изучать зависимость:

$$\frac{W}{\lambda} = F(X_0), \quad (1)$$

где

$$X_0 = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{m \cdot c^2} \cdot \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda_D} N_n H f \quad (2)$$

оптическая толщина в центре линии. В уравнении (2) $\Delta \lambda_D$ — доплеровская полуширина спектральной линии, f — сила осциллятора, $N_n H$ — число атомов данного элемента над единичной площадкой фотосферы звезды, находящихся на нижнем энергетическом уровне, соответствующем данной линии. Остальные обозначения имеют общепринятый смысл. В общем случае зависимость (1) имеет довольно сложный вид и может быть вычислена только численно. Однако известен [1, 2] ряд простых приближений, имеющих практический интерес.

1. Для слабых линий ($X_0 < 1$) имеем:

$$\frac{W}{\lambda} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{v}{c} \cdot X_0, \quad (3)$$

где

$$v = \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda} c. \quad (4)$$

Очевидно, что в случае слабых линий имеет место схема оптически тонкого слоя и эквивалентная ширина линий растет пропорционально числу поглощающих атомов.

2. Для сильных линий ($X_0 \gg 1$; $\ln X_0 > 1$):

$$\frac{W}{\lambda} = 2 \frac{v}{c} \cdot \sqrt{\ln X_0}. \quad (5)$$

В этом случае эквивалентная ширина линии зависит от числа поглощающих атомов очень слабо.

3. Для очень сильных линий эффектом Доплера в коэффициенте поглощения можно пренебречь и приобретает большое значение расширение спектральных линий вследствие затухания:

$$\frac{W}{\lambda} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^{1/2} \left(X_0 \cdot \frac{\Gamma}{v_0} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где Γ — постоянная затухания.

Если, воспользовавшись формулой Больцмана, перейти от числа поглощающих атомов на данном энергетическом уровне к полному числу атомов элемента данной степени ионизации — $N_0 H$, то вместо (2) можно написать:

$$X_0 = \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^2}{m \cdot c^2} \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{N_0 H}{b(T_B)} g_n \lambda f \cdot e^{-\frac{E_n}{kT_B}}, \quad (7)$$

где $g_n = 2J + 1$ — статистический вес нижнего уровня,

$b(T_B) = \sum g_n e^{-\frac{E_n}{kT_B}}$ — сумма по состояниям,
 T_B — температура возбуждения.

Величина X_0 была бы независимой от длины волны, если бы оптическая глубина в непрерывном спектре не менялась с частотой. Однако, благодаря зависимости коэффициента непрерывного поглощения от длины волны, эффективная оптическая глубина фотосферы также зависит от λ . Это приводит к зависимости числа атомов над фотосферой от длины волны. Так как непрерывное поглощение в исследуемых звездах обусловлено в основном нейтральным водородом, мы будем считать, что:

$$(N_0 H)_\lambda = (N_0 H)' \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^3, \quad (8)$$

где λ' — какая-то стандартная длина волны. Примем ее равной $5000 \text{ \AA}$. Таким образом, получим:

$$X_0 = \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^2}{m \cdot c^2} \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{(N_0 H)'}{b(T_B)} \cdot \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^3 \cdot g_n \lambda f \cdot e^{-\frac{E_n}{kT_B}}, \quad (9)$$

Вместо зависимости (1) можно построить кривую роста вида:

$$\frac{W}{\lambda} = F(X'), \quad (10)$$

где

$$X' = g_n \frac{(\lambda')^3}{\lambda^2} \cdot f \cdot e^{-\frac{E_n}{kT_B}}. \quad (11)$$

Далее, передвижением полученной зависимости параллельно оси $\lg X'$ можно добиться наилучшего совпадения с одной из теоретических кривых роста, вычисленных для определенных значений $\Delta\lambda_D$ и $\Delta\lambda_N = \frac{\Gamma}{4\pi}$ и зафиксировать, таким образом, нуль-пункт кривой роста.

Из приведенных выше формул (3), (5) и (6) следует, что эквивалентная ширина линий поглощения пропорциональна оптической глубине в их центрах только в области очень слабых линий. При больших значениях оптической глубины изменениям последней соответствуют очень незначительные изменения эквивалентных ширины линий. В 1944 г. Г. А. Шайн [3] обратил внимание на тот факт, что в результате указанного явления компоненты спектральных мультиплетов могут иметь в звездных спектрах относительные интенсивности, отличные от таковых, вычисленных теоретически. Действительно, так как оптическая глубина в линиях пропорциональна их теоретическим интенсивностям, то относительные интенсивности компонент будут пропорциональны теоретическим только в области очень малых глубин. Если же компоненты мультиплета находятся на части кривой роста, соответствующей уравнению (5), то отношение их интенсивностей может быть достаточно близким к единице. Следовательно, если в числе линий, используемых для определения лучевых скоростей, имеются неразрешенные мультиплеты, то при определении их стандартных длин волн необходимо вычислять их взвешенное среднее с учетом относительных интенсивностей, обусловленных кривой роста. Как указывает Г. А. Шайн, если не принимать во внимание это явление, лучевые скорости будут искажены систематическими ошибками.

Нами была предпринята попытка оценить ошибки указанного характера в лучевых скоростях поздних В-звезд главной последовательности.

Для построения кривой роста для этих звезд мы воспользовались измерениями полных поглощений в линиях нейтрального гелия, произведенных Э. Виллиамс [4] и П. Рудником [5]. Величины X' определены с помощью сил осцилляторов, вычисленных Л. Гольдбергом [6]. В табл. 1 приведен список линий HeI , использованных при построении кривой роста.

Четвертая графа таблицы содержит потенциалы возбуждения нижних уровней соответствующих линий в электрон-вольтах.

Ранее Л. Гольдберг [7] построил кривые роста по линиям гелия для 55 звезд из списка Э. Виллиамс. Однако мы считаем более целесообразным построить среднюю кривую роста для группы звезд, так как благодаря малочисленности линий гелия индивидуальные кривые роста для отдельных звезд едва ли будут достаточно точны. В частности, для оценки эффекта кривой роста на стандартные длины волн нейтрального гелия необходимо иметь именно среднюю кривую роста для группы звезд. Кроме того, указанную работу имеет смысл повто-

Таблица 1

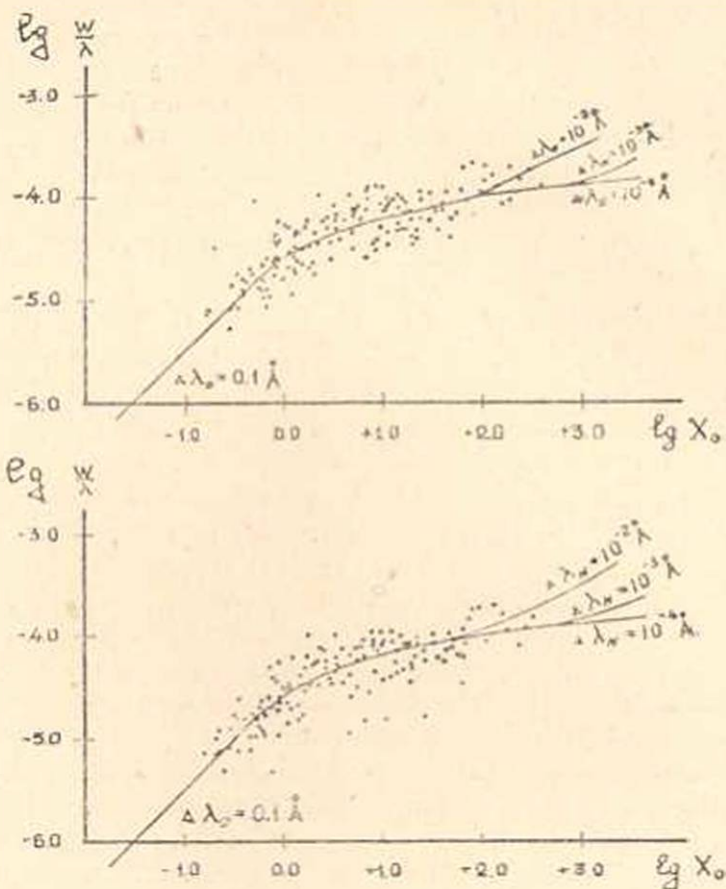
№№	λ	Термы	$E. P.$	$\lg f$	$\lg X'$
1	4471.477 .688	$2^3 P-4^3 D$	20.87	-0.889	-14.575
2	4026.189 .361	$2^3 P-5^3 D$	20.87	-1.291	-14.885
3	3819.606 .761	$2^3 P-6^3 D$	20.87	-1.585	-15.133
4	4921.921	$2^1 P-4^1 D$	21.13	-0.928	-15.303
5	4387.928	$2^1 P-5^1 D$	21.13	1.381	-15.656
6	4143.759	$2^1 P-6^1 D$	21.13	-1.701	-15.926
7	4009.270	$2^1 P-7^1 D$	21.13	-1.951	-16.128
8	3926.530	$2^1 P-8^1 D$	21.13	-2.159	-16.331
9	3871.819	$2^1 P-9^1 D$	21.13	-2.328	-16.495
10	4713.143 .373	$2^3 P-4^3 S$	20.87	-2.247	-15.977
11	4120.812 .993	$2^3 P-5^3 S$	20.87	-2.712	-16.326
12	3867.477 .631	$2^3 P-6^3 S$	20.87	-3.004	-16.562

рять, так как в настоящее время имеется более полная таблица сил осцилляторов для нейтрального гелия [6].

При вычислении X' мы приняли, что температура возбуждения исследуемых звезд равна 10000° , так как из исследования Солнца и других звезд известно [2, 8], что температуры возбуждения систематически ниже эффективных температур. Заметим, что возможная ошибка в принятой величине T_b не может заметно сказаться на построенной кривой роста, так как потенциалы возбуждения синглетной и триплетных серий гелия, как это видно из табл. 1, отличаются всего лишь на 0.26 eV .

Для построения средней кривой роста из списков Э. Вилламе и П. Рудника было выбрано 20 звезд спектральных подклассов $B7$, $B8$ и $B9$ главной последовательности. Построенные для них кривые роста были сдвинуты параллельно оси $\lg X'$ до наилучшего совпадения друг с другом. Указанная операция была произведена двумя лицами для выявления возможной субъективной ошибки. Как видно из приведенных ниже на фигуре кривых роста, ими был получен практически одинаковый результат. На этой же фигуре сплошной линией нанесена теоретическая кривая роста, вычисленная О. А. Мельниковым [2] для $\Delta\lambda_D = 0.1 \text{ \AA}$ и $\Delta\lambda_N = 10^{-2} \text{ \AA}$, $10^{-3} \text{ \AA}$ и $10^{-4} \text{ \AA}$. Как видим, она достаточно хорошо представляет кривую роста, полученную нами из наблюдений.

Была сделана попытка оценить с помощью полученной кривой роста относительные интенсивности компонент триплетов №№ 1, 2, 10 и 11 из табл. 1, рекомендованных Международным Астрономическим Союзом в качестве стандартов для измерения лучевых скоростей. Теоретическое отношение интенсивностей внутри этих триплетов, как



Фиг. 1. Средняя кривая роста для 20 звезд B7, B8 и B9 главной последовательности.

известно, равно 5:3:1. Благодаря слиянию термов 2^3P_2 и 2^3P_1 можно рассматривать их как дуплеты с отношением интенсивностей 8:1.

Для определения относительных интенсивностей компонент этих мультиплетов в звездных спектрах мы использовали средние эквивалентные ширины соответствующих линий для всей группы звезд. С их помощью из кривой роста определялись значения X_0 , соответствующие этим компонентам. Затем, снова входя в кривую роста, определяли значения $\frac{W'}{\lambda}$ и $\frac{W''}{\lambda}$.

Для указанных выше мультиплетов №№ 1, 2, 10 и 11 было получено соответственно:

$$\frac{W'}{W''} = 1.8, 1.6, 6.5, 7.2.$$

Как видим, в случае линий второй побочной серии относительные интенсивности компонент близки к теоретическим, в то время как компоненты первой побочной серии имеют почти равные эквивалентные ширины.

Спектрографы, используемые для измерения лучевых скоростей, имеют разрешающую силу, слишком малую, чтобы разделить столь близкие компоненты. Поэтому для установления стандартных длин волн необходимо брать взвешенные средние из длин волн компонент с учетом относительных интенсивностей, полученных из кривой роста. Ниже мы приводим полученные нами длины волн указанных мультиплетов и ошибку, вводимую при использовании стандартов, рекомендованных Международным Астрономическим Союзом:

λ	4471.553	4026.255	4713.174	4120.834
ΔV_r	+ 5.10 км/сек	+ 4.92 км/сек	+ 1.91 км/сек	+ 1.60 км/сек.

Необходимо отметить, что влияние кривой роста на относительную интенсивность компонент может быть направлено только в сторону усиления слабой компоненты. Следовательно, верхним пределом отношения интенсивностей (в смысле отношения сильной компоненты к слабой) является теоретическое значение последнего, а нижним — единица. Поэтому в случаях, когда эффект кривой роста неизвестен, необходимо брать для длины волны мультиплета взвешенное среднее из длин волн компонент, используя теоретическое отношение интенсивностей. Этим ошибка стандартной длины волны может быть только уменьшена. Ничем не оправдан поэтому тот факт, что в списке стандартных длин волн, рекомендованных Международным Астрономическим Союзом, приведены длины волн сильных компонент.

Если даже считать, что длины волн всех остальных компонент не искажены эффектом кривой роста и учесть, что лучевые скорости поздних *B*-звезд определяются по 10—12 линиям, то только ошибки длин волн четырех линий гелия исказят среднюю лучевую скорость этих звезд на 1.0—1.3 км/сек. Эта величина может ошибочно трактоваться как *K*-эффект исследуемой группы звезд.

Далее, по кривой роста нами были определены некоторые физические параметры поздних *B*-звезд главной последовательности. Из сравнения наблюдаемой и теоретической кривых роста была получена средняя скорость хаотического движения атомов гелия:

$$v = \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda} c \approx 7 \frac{\text{км}}{\text{сек}}.$$

Заметим, что полученная скорость совпадает с термической скоростью, соответствующей эффективной температуре звезд типа *B8* ($T_e = 12600^\circ$)

$$v = \sqrt{\frac{2kT_e}{\mu}} \approx 7 \frac{\text{км}}{\text{сек}},$$

где k — постоянная Больцмана, а μ — атомный вес.

Известно [8], что для звезд-сверхгигантов получается систематическая разница между скоростями, полученными по кривым роста, и термическими скоростями, соответствующими их температурам. Это расхождение объясняется наличием турбулентных движений в атмос-

ферах сверхгигантов. Как видим, в атмосферах звезд главной последовательности такие движения отсутствуют.

Оценить постоянную затухания для исследуемых звезд нам, к сожалению, не удалось, так как на полученной кривой роста отсутствует область, обусловленная этим параметром.

Произведена оценка числа атомов в столбе атмосферы сечением в 1 см^2 . Из уравнений (9) и (11) имеем:

$$\lg X_0 - \lg X' = \lg \frac{V \pi e^2}{m \cdot c^2} - \lg \frac{v}{c} + \lg \frac{(N_0 H)'}{b (T_B)} \quad (12)$$

Величины $\lg X_0 - \lg X'$ и $\lg v$ нам известны из сравнения полученной кривой роста с теоретической. Таким образом, для уровней 2^1P и 2^3P из уравнения (12) и формулы Больцмана получим $\lg(N_0 H) = 14.0$ и 14.5 .

В заключение приношу свою глубокую благодарность проф. О. А. Мельникову, руководившему настоящей работой.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступило 5 IX 1956

Մ. Ս. Սահակյան

ԱՅՄԱՆ ԿՈՐԸ ԳԼԻԱՎՈՐ ՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՒՇ B-ԱՍՏՂԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Չեզոք հելիումի գծերի միջոցով կառուցված է աճման միջին կորը գլխավոր հաշորդականության ուշ B-աստղերի մի խմբի համար: Աստղափառված է աճման կորի՝ Գ. Ս. Շախի կողմից նշված ազդեցությունը հելիումի տրիպլանների աստղափառ ալիքային երկարությունների վրա: Յուրաքանչյուր է տրված, որ երկրորդ կողմակի սերիայի գծերի դեպքում կոմպոնենտների հաջարկական ինտենսիվությունները մոտ են տեսականներին, մինչդեռ առաջին կողմակի սերիայի գծերի դեպքում այդ ինտենսիվությունները զգալիորեն տարբերվում են նրանցից: Չեզոք հելիումի չորս գծերի ($4472 \text{ \AA}$, $4026 \text{ \AA}$, $4713 \text{ \AA}$, $4121 \text{ \AA}$) աստղափառ ալիքային երկարությունների ոչ ճշգրիտ լինելու պատճառով տառաջացած միջին սխալը համապատասխանում է տեսագծային արագության սխալին՝ $1.0-1.3 \text{ կմ/վրկ}$: Այդ արժեքը նույն կարգի մեծություն է, ինչ որ Կ-էֆեկտը ուսումնասիրված աստղերի համար. ուստի նրա հաշվառումը խիստ անհրաժեշտ է:

Աճման կորի միջոցով գնահատված է հելիումի քառակ շարժման միջին արագությունը հիշյալ աստղերի մթնոլորտներում: Ստացված մեծությունը ($v \approx 7 \text{ կմ/վրկ}$) համընկնում է B8 դասի աստղերի էֆեկտիվ ջերմաստիճանին համապատասխանող ջերմային արագությանը: Հետևաբար, ուսումնասիրված աստղերի մթնոլորտներում բացակայում են զազային զանգվածների տուր-

բուլինա շարժումները: Անճան կորից ստացված չեղոք հեղիումի ատոմները թիվը միջնորդաբ 1 սմ² հատվածք ունեցող սխան մեջ 2^1P և 2^2P մակարդակների համար համապատասխանորեն հախառար է $10^{14,2}$ և $10^{14,5}$:

ЛИТЕРАТУРА

1. Menzel D. Ap. J. **84**, 462 (1936).
2. Мельников О. А. Успехи астр. наук, **5**, 306, (1950).
3. Шайн Г. А. ДАН СССР, **45**, 57, (1944).
4. Williams E. Ap. J. **83**, 279, (1936).
5. Rudnick P. Ap. J. **83**, 439, (1936).
6. Goldberg L. Ap. J. **93**, 244, (1941).
7. Goldberg L. Ap. J. **89**, 623, (1939).
8. Мельников О. А. Уч. зап. ЛГУ, 153, 80, (1952).

