

Л. В. Канторович

О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением*

Данная статья посвящена информации о работах в области программирования проводимых в Ленинградском отделении Математического института (ЛОМИ) АН СССР, именно следующим двум вопросам:

1) Описанию некоторой системы программирования или, правильнее сказать, системы подготовки вычислений на электронных счетных машинах.

Сущность этой системы, которая может быть названа крупно-блочной, состоит в том, что в машину вводится в закодированном виде вычислительный план работы, записанный в укрупненных элементах и операциях, который расшифровывается раз навсегда составленной универсальной программой-роботом — „прорабом“. Последняя ведет также размещением данных в оперативной и внешней памяти, переадресацией и пр. Таким образом, полная программа данной работы фактически не составляется: ее получение и не ставится задачей. Целью является нахождение результатов вычисления. Если угодно, хотя это звучит парадоксально, это система беспрограммного программирования.

2) Вопросу о систематическом проведении с помощью универсальных счетных машин аналитических выкладок. Как известно, в ряде математических и прикладных исследований много труда занимают часто не численные, а аналитические преобразования: дифференцирование, подстановки и т. п., иногда требующие десятков и сотен страниц выкладок. Во многих случаях эта работа носит стандартный характер. Поэтому естественна мысль об использовании машин при ее выполнении.

Подход к обоим вопросам связан с некоторыми общими идеями, относящимися к использованию машин с программным управлением в математике. С них мы и начнем, не излагая их в полном объеме и общности.

Проведенные исследования являются результатом работы группы научных сотрудников ЛОМИ, протекавшей под общим руководством автора, — научных сотрудников Л. Т. Петровой, В. А. Булавского,

* Доклад, читанный на сессии АН Армянской ССР 28 XI 1956.

М. А. Яковлевой, И. А. Платуиновой; в разработке отдельных вопросов принимали участие аспиранты О. К. Даугавет и К. В. Амбарцумян.

1. Введение математического задания в машину и его обработка

В настоящее время весьма актуальным является вопрос о проведении самых различных математических работ на электронных цифровых машинах, не только численных вычислений, но и ряда других видов их: аналитических выкладок и преобразований, логического анализа, анализа и синтеза релейных схем, обработки вычислительных планов, программ, а также некоторых нематематических (анализ текстов и пр.). Это, естественно, выдвигает задачу разработки практически удобных и универсальных методов введения такого рода заданий в машины и создания единых машинных методов выполнения этих заданий.

Для этой цели существенна разработка следующих трех вопросов:

1) *Создание единообразной символики.* Требования, которые естественно предъявить к такой символике, это: а) универсальность — возможность применения одной и той же символики для описания различных по содержанию математических заданий; б) точность и недвусмысленность символики; в) компактность (малая емкость записи относительно к содержащейся в ней информации), г) удобство обращения с ней на машине и достаточная наглядность для обычного восприятия.

2) *Разработка единых методов обработки математического задания, безотносительно от его конкретного содержания.* Выявление общих видов операций, встречающихся при такой обработке, выяснение их свойств и возможностей, а также подготовка программ, практически осуществляющих их на машинах. Иначе говоря, развитие своеобразной алгебры таких операций, так сказать, машинной алгебры.

3) *Разработка удобных форм описания состава и расположения материала, вводимого и сохраняемого в машине в процессе его обработки.* Эта задача, которая была мало актуальной при осуществлении математического задания человеком, с записью данных на бумаге или сохранении их в человеческой памяти, становится весьма важной при автоматическом проведении ее на машине.

Символика. Вопрос об используемой символике является очень существенным при передаче машине математического задания. Очевидно, процесс передачи будет легче, если математический язык человека и язык, воспринимаемый машиной, будут приближены друг к другу. С этой точки зрения очень вероятно, что применяемый иногда ввод в машину в закодированном виде обычных формул может оказаться не наилучшим путем.

Математическая символика изменялась и развивалась с развитием новых областей математики. Естественно, что применение машин также должно оказать влияние на используемую символику, т. е. в символике нужно учесть „интересы“ и особенности машины. С другой стороны, можно и машину „научить понимать“ не только простейшие операции, но и более сложные, например матричные и др.

Схема. Первое, что нам представляется удобным, это использовать вместо аналитических и логических формул со скобками запись связей и зависимостей математических объектов и виде расчлененной схемы типа

$$k_1 = (F_1, k_1', k_1'')$$

$$k_2 = (F_2, k_2', k_2'')$$

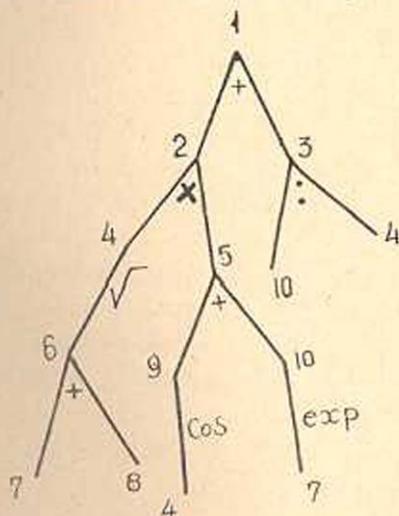
Здесь F и k — условные номера, обозначающие те или иные объекты из данного поля объектов. Каждую строку можно прочитать так: объект k_i получается с помощью оператора F_i , из объектов k_i' , k_i'' .

Некоторые из объектов даны, другие должны быть найдены на основании соотношений схемы.

Следует сказать, что выделение операторов является условным, так как номер, фигурирующий в качестве оператора в одной строке, в другой строке схемы может выступать в качестве аргумента или результата.

Будем называть явной схему, в которой результативные номера (т. е. номера, стоящие слева) не повторяются и в которой нельзя найти замкнутую цепочку опирающихся друг на друга номеров. Явную схему всегда можно изобразить в виде некоторого дерева, определяющего частичное упорядочение результатов. Поясним принцип записи в виде схемы на примере функции

$$y = \sqrt{x+a} (\cos \sqrt{x+a} + e^x) + \sqrt{x+a}$$



- | | |
|---------------|----------------|
| 1 = (+, 2, 3) | 5 = (+, 9, 10) |
| 2 = (x, 4, 5) | 9 = (cos, 4) |
| 4 = (sqrt, 6) | 10 = (exp, 7) |
| 6 = (+, 7, 8) | 3 = (:, 10, 4) |
| 7 = x | |
| 8 = a | |

Дерево подчиненности дано на фигуре.

Операции нужно было бы также обозначить пифрами. Следует обратить внимание на компактность записи в виде схемы, так как

выражения, встречающиеся повторно (например, 4), не даются в развернутом виде, в отличие от обычной формульной записи.

Схему можно рассматривать как функциональное преобразование группы опорных элементов, т. е. таких, которые не встречаются слева (ни на что не опираются, например x и a), в некоторую группу результативных (например, y).

Из данной схемы естественно выделяются подсхемы — именно той же записью задается зависимость некоторых групп промежуточных аргументов от других.

Наоборот, можно рассматривать операцию объединения нескольких схем при соответствующем согласовании нумерации их элементов, в частности последовательное наложение схем, степень схемы, накопительную операцию над объектами, построенную по данной схеме, и т. п.

Некоторые упрощения и преобразования схем. Приведем несколько конкретных операций обработки абстрактных схем, безотносительно от их содержательного значения, которые встречаются при различном использовании схем.

1) Могут быть построены специальные программы упорядочения схемы. Наиболее удобно упорядочение по логической зависимости, вводящее минимальное число номеров, необходимых для нахождения данного. Например, для схемы, данной на фигуре, при логическом упорядочении, последовательно определяются результаты: 6, 4, 9, 10, 5, 2, 3, 1.

2) Операция упрощения (отождествления). В случае, если соотношения, определяющие несколько номеров, одинаковы (т. е. одинаковы правые части соответствующих строк), то только одна из всех этих строк должна быть сохранена; остальные могут быть выброшены, при этом во всех прочих строках исключенные номера должны быть заменены сохраненными.

3) Пусть имеются некоторые тождества, связывающие переменные, т. е. произвольные или, в известной степени произвольные, номера объектов. Подобное тождество может быть записано в виде схемного тождества — некоторого правила преобразования — замены определенного вида подсхемы на другую. Может быть составлена определенная программа для преобразования схем в соответствии с этими правилами.

В качестве примера можно указать на правила преобразования, связанные со свойствами тех или иных операторов (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и др.). Дистрибутивность операторов $+$, \times (распределительный закон), например, записывается в виде схемного равенства $S_1 = S_2$, где

$$S_1 \begin{cases} 0 = (\times, 1, 4) \\ 4 = (+, 2, 3) \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} 0 = (+, 4, 5) \\ 4 = (\times, 1, 2) \\ 5 = (\times, 1, 3) \end{cases}$$

Здесь 0, 1, 2, 3 — основные аргументы (опорные и результативные), 4, 5 — вспомогательные, промежуточные.

С использованием подобных программ на основании данных законов действий (схемных тождеств) может быть произведено дальнейшее упрощение схем (обнаружение дополнительных тождеств между номерами), подъем или опускание некоторого оператора, исключение некоторого оператора, если дано правило его перестановки с другими и его значение для опорных элементов, максимальный подъем тех или иных аргументов (например, переменных) вверх, сокращение записи схемы за счет введения обозначений для многократно встречающихся схем и т. п.

Представляется полезным еще в ряде случаев объединение группы номеров в систему (список). В частности, такое объединение целесообразно, если ряд номеров связан последовательным применением некоторого ассоциативного оператора, что соответствует введению свертывающих операторов типа Σa_i . Кроме того, такое объединение позволяет с удобством производить упрощение внутри группы.

Наконец, в ряде случаев, если для некоторых выражений известны правила их вычисления, схема может быть упрощена за счет выполнения этих вычислений.

Обратим внимание на то, что применение всех такого рода программ преобразования при схемной записи чрезвычайно удобно благодаря тому, что добавленные и заменяющие строки могут записываться в произвольном порядке, а также вследствие того, что возможно локальное проведение каждого преобразования, т. е. рассмотрение только ближайших логических связей данных номеров без привлечения полных формул, которыми они выражаются.

Описание расположения материала. Для этой цели удобно ввести величины и справки. Представляется удобным при схемной записи оперировать не с отдельными числами, а с более крупными объектами — *величинами*. В качестве таких числовых величин могут быть взяты вектор, матрица, трехмерная матрица, поле и т. д. Для величины наряду с ее числовым содержанием вводится *справка*, представляющая собой описание числового материала и его расположения. Рассмотрим пример такой справки для матрицы. Пусть элементы матрицы

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

расположены соответственно в ячейках

$$\begin{aligned} &P, P + h_1, P + 2h_1, \dots \\ &P + h_2, P + h_2 + h_1, P + h_2 + 2h_1, \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Тогда справка о величине K имеет вид:

$$\begin{pmatrix} P, n, h_1 \\ m, h_2 \end{pmatrix}$$

P — номер ячейки, в которой помещается первый элемент величины,
 n — число столбцов,
 m — число строк,
 h_1 — расстояние между двумя соседними элементами любой строки,
 h_2 — расстояние между первыми (и вообще i -тыми элементами) двух соседних строк.

Отметим, что справка о транспонированной матрице K^* легко получается из данной и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} P, m, h_2 \\ n, h_1 \end{pmatrix}.$$

Отделение справки от числового материала тем более оправдано, что несколько величин могут опираться на один и тот же числовой материал.

II. Схемное или крупноблочное программирование

Развитие физических и технических дисциплин требует численного решения все большего числа различных математических задач и по возможности в короткие сроки.

Реализация огромных возможностей, которые несет за собой использование быстродействующих машин для решения этих задач, в известной степени затруднена при применении обычной системы программирования, так как процесс подготовки программы и отладки ее для реальной задачи оказывается довольно сложным и длительным.

В связи с этим и у нас и за границей были предприняты работы по упрощению и автоматизации программирования. Известен метод стандартных подпрограмм.

Другим путем является использование специальной программирующей программы (П.П.). Этот метод, в особенности, разработан в Математическом институте АН СССР Любимским и Камыниним под руководством А. А. Ляпунова и М. Р. Шура-Бура.

Мы опишем тот путь решения этого вопроса, по которому пошли в ЛОМИ, который использует в известной степени общие приемы, описанные в I части.

Вычислительный план машине может быть задан в виде описанной выше схемы, т. е. в виде ряда строк (блоков), элементами которых могут быть: 1) числовые величины, а также программы, матрицы программ, схемы и 2) операции над этими величинами. В основном должны применяться операции универсальные, заранее подготовленные и используемые в различных работах.

Среди операций отметим *типовые* , которые могут выполняться над числами или поэлементно над величинами (это все машинные операции $+$, $-$, \times , \dots и операции, выполняемые по стандартным подпрограммам, рассчитанным на подачу аргументов в стандартные ячейки: e^x , \sqrt{x} , x^y), *специальные* , которые опираются на некоторую программу, записанную в условных аргументах (например, операция ум-

ножения двух комплексных чисел) и, наконец, операции, рассчитанные специально на укрупненные аргументы, например такая

$$X = (R; A, B),$$

которая по матрице A и вектору B выдает вектор X — решение системы $AX = B$.

Кроме операций над числовыми величинами, могут быть операции над схемами и программами: упростить схему, по данной схеме (формуле) составить программу, провести итерацию схемы до выполнения некоторого условия.

Рассмотрим в качестве примера блоксхему для решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

путем сведения его к алгебраической системе

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \sum_{k=1}^n A_k K(x_i, x_k) \tilde{\varphi}(x_k) = f(x_i) = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

с помощью квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x) dx \cong \sum A_k f(x_k).$$

Участвующие в ней величины будут $A = \{A_k\}$, $X = \{x_k\}$, $F = \{f_k\}$.

$\Phi = \{\tilde{\varphi}_k\}$ — векторы, $B = \{K(x_i, x_k)\}$, $C = \{A_k K(x_i, x_k)\}$, D, E — матрицы.

Тогда блоксхема задачи запишется так:

- 1) $\Phi = (R; D, F)$ (R — решение системы);
- 2) $D = (-; E, C)$ (элементное вычитание матриц);
- 3) $C = (\cdot, A, B)$ (умножение столбцов матрицы на вектор);
- 4) $B = (K, x, x)$ (K — программа соотв. $K(x, y)$; применяется элементарно к парам: (x_i, x_k));
- 5) $F = (f, x)$ (f — программа соотв. $f(x)$; применяется элементарно к x).

В машину вводится только это задание; справки о величинах и операции с ними специально связанные (например, функции $K(x, y)$ и $f(x)$, записанные в виде схем); некоторые общие операции предполагаются введенными раз и навсегда.

Как уже говорилось, проведение вычислительного плана осуществляется с помощью специально построенной универсальной программы — *прораба*.

Было создано несколько типов такого рода программ. Пусть в машину введены блок-схема и исходные данные. *Прораб первого типа* (разработан Л. Т. Петровой) «сам определяет» порядок выполнения работ. Работа прораба заключается в последовательной логически упорядоченной выписке блоков схемы. Если для данного блока все аргументы оказываются известными, подаются данные о них и включается операция, если какой-либо аргумент неизвестен, предварительно выписывается блок, определяющий этот аргумент, и он, в свою очередь, подвергается исследованию.

Помимо выполнения операции, стоящей в данной строке, прорабом вырабатывается справка результата, если она не предусмотрена заранее. При выполнении операции, в соответствии со справками аргументов и результата, прорабом производится переадресация; возможны два способа ее — в зависимости от того, как построена программа операции — в расчете на фиксированные ячейки или на условные аргументы.

Включение переадресации в работу прораба делает программы большинства универсальных и специальных операций весьма короткими.

Прорабом производится и размещение результатов.

Результаты могут размещаться на места, предусмотренные в плане, или на свободные со стиранием ненужных. Такая безадресная система особенно удобна, если объем получаемых результатов и фактическая схема процесса заранее полностью неизвестны. Возможна также система, в которой используется ряд полей, и положение результатов фиксируется относительно начала поля, но поля целиком можно сдвигать, стирать или переносить в магнитную память. При наличии отметки о печати полученный результат печатается.

Основным достоинством этой системы является то, что вводимое задание максимально приближено к обычному вычислительному плану, отличаясь от него по существу только тем, что он надлежаще закодирован. Более того, при введении в машину подобного плана можно обойтись даже без предварительного выписывания всех формул задания, оформляя непосредственно словесное или математическое описание метода в виде блок-схемы. Это делает такой план наглядным и удобным для математика.

В частности, удобным является введение необходимых изменений в него, контрольных операций; облегчается также отладка работы на машине.

Недостатками в работе этого прораба являются прежде всего значительные «накладные расходы», так как при выполнении вычислений с помощью него, наряду с необходимыми действиями над числами, выполняется ряд машинных операций, связанных с работой самого прораба — по развертыванию схемы и справок, перемещению и стиранию данных и т. п. Хотя эти операции просты, но довольно многочисленны и, в особенности на машинах со стандартным операционным циклом (типа БЭСМ), дают заметное увеличение машинного времени.

Кроме того, в некоторых случаях такой порядок заставляет иногда фиксировать в памяти лишние промежуточные величины, что приводит к увеличению загрузки оперативной памяти. Прораб сам также занимает значительное место, до 500—600 ячеек, зато, правда, получается выигрыш в месте, затрачиваемом на ввод программы. Увеличение расхода машинного времени не играет существенной роли при единичных работах небольшой продолжительности, в частности экспериментальных, и оно вполне окупается упрощением работы, сокращением времени на подготовку задачи, отладку программы и возможностью применения более сложных, но экономных по времени схем счета. Однако в других случаях это существенно.

В связи с этим были предприняты работы по составлению других типов прорабов, более практичных. В прорабе второго типа схема пишется в порядке ее выполнения, но могут быть скачки перехода и вообще вставлены отдельные машинные строчки. Таким образом, схема по которой работает этот прораб, несколько ближе к обычной программе, отличаясь от нее в основном тем, что использует укрупненные операции и величины.

В настоящее время отлажен прораб № 5 (разработан В. А. Булавским и М. А. Яковлевой), который решает задачи весьма экономно по времени.

За счет чего достигнуты эти усовершенствования и сокращения?

В ряде случаев некоторые действия (порядок работы, размещение, стирание, подготовка справки) оказывается выгоднее осуществлять не через „прораба“, а непосредственно при составлении плана. Упрощено составление справок.

Для некоторых участков схемы оказалось целесообразным фиксировать ту программу, по которой фактически ведется вычисление на этом участке, и определенное время сохранять ее в памяти машины.

Использованы некоторые специальные приемы (условные номера, возбуждение). Кроме того, накопленный опыт позволил рационализировать решение некоторых вопросов.

С помощью прорабов проводился ряд работ, относящихся к задачам линейной алгебры, численному решению дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений эллиптического типа, численному осуществлению конформного преобразования и др.

Эксперимент был несколько затруднен тем, что нам приходилось пользоваться московскими машинами.

Вследствие этого, нам также трудно провести сопоставление этого метода с методом П.П.

Последний имеет свои преимущества, но и свои трудности, так как использование П.П. требует предварительной подготовки, довольно большой, и не очень наглядной информации, вывода и хранения полученной программы.

При этом в работах со сложной вычислительной и логической схемой необходимо детальное составление программы для всех логи-

чески возможных случаев, в то время как в крупноблочной системе при разветвлениях процесса разворачиваются только те ветви, которые фактически реализуются в данных условиях.

В общем нам кажется, что оба пути являются перспективными. По-видимому, для однократно проводимых и экспериментальных работ должна оказаться более выгодной крупноблочная система. Для других работ это менее ясно, но, как мы уже говорили, ввиду недостаточного опыта в применении нашей системы, это заключение является предварительным.

Следует еще обратить внимание на то, что наличие этой системы программирования полезно учесть при проектировании электронных машин с программным управлением. Например, нежелательна унификация времени на разные команды, полезно наличие полуоперативной памяти (для размещения прораба) и др.

III. Аналитические вычисления

Та же схемная символика и упоминавшиеся операции по преобразованию схем весьма удобны для проведения на машине аналитических выкладок и преобразований.

Прежде всего следует отметить, что имеет большие преимущества запись функции в виде схемы. Мы уже отмечали некоторые из них: отчетливое выявление характера зависимости, экономия записи и др., которые имеют значение при введении функций в машину. Однако эти преимущества вскрываются в полном виде, когда машина не только использует эту запись для вычислений, но и сама преобразует и составляет такие записи, как это имеет место при аналитических вычислениях, подобно тому, как преимущество двоичной системы записи чисел становится особенно заметным при осуществлении действий с ними на машине.

В качестве первого примера аналитического преобразования приведем упрощение рациональных функций. Рациональная функция это любая схема с операциями $+$, $-$, \times , $:$, с опорными элементами x , y , z, \dots (независимые, переменные) и c_1, c_2, \dots (постоянные). Записав в качестве схемных тождеств правила действий с дробями и раскрытия скобок, используя выполнение вычислений в случае действий с постоянными, а также применяя упоминавшуюся запись групп и их упрощение (что, впрочем, не обязательно), в результате последовательного применения перечисленных операций, получим преобразование рациональной функции к канонической форме отношения двух многочленов.

Более подробно мы остановимся на аналитическом выполнении дифференцирования на машине.

Пусть функция k записана в виде схемы S , состоящей из рядов строк вида

$$\left. \begin{aligned} k &= f(k_1, k_2) \\ k_1 &= f_1(\dots) \\ \dots & \end{aligned} \right\} S.$$

Тогда запись в виде схемы S' для ее производной по x мы получаем формально, присоединив к ней одну строку:

$$\left. \begin{aligned} S \\ k' &= (D; k, x) \end{aligned} \right\} S'.$$

Однако, чтобы раскрыть эту запись и получить схему, не содержащую символа D , мы должны использовать ряд правил, а именно

$$\begin{aligned} (D; c, x) &= 0 \\ (D; z, x) &= 0 \quad (z - \text{другая независимая переменная}), \\ (D, x, x) &= 1 \end{aligned}$$

а также таблицу производных, записанную как правила перестановки оператора дифференцирования с остальными операторами; например, правило дифференцирования произведения $k_1 = k_2 k_3$

$$k_1 = (k_2 k_3)' = k_2' k + k_2 k_3'$$

дает такое схемное тождество $A = B$:

$$\left. \begin{aligned} k &= (D, k_1, x) \\ k_1 &= (x, k_2, k_3) \end{aligned} \right\} A \qquad \left. \begin{aligned} k &= (+, n_1, n_2) \\ n_1 &= (\times, n_3, k_3) \\ n_2 &= (\times, k_2, n_4) \\ n_3 &= (D, k_2, x) \\ n_4 &= (D, k_3, x) \end{aligned} \right\} B$$

(n_1, n_2, \dots — вспомогательные аргументы). Тогда, опуская последовательно знак D на основе этих тождеств и пользуясь для опорных элементов отмеченными правилами, получим схему для k' . Эта схема может быть еще упрощена за счет использования некоторых правил алгебраических преобразований, а также выполнения вычислений, если встретятся действия над числами.

После того, как упрощение выполнено, таким же образом может быть найдена на основании схемы первой производной схема k'' и т. д. (так находятся не только обычные, но также и частные производные).

Если потребуется численное значение производной при конкретном значении переменных, то оно может быть легко найдено с помощью прораба непосредственно в машине, без вывода этой схемной записи и какой-либо внешней обработки ее.

Итак, машина „умеет дифференцировать“. Наличие возможности аналитического дифференцирования позволяет сделать многое, что было бы невозможно без этого.

Например, мы можем не только провести численное интегрирование, но и выполнить на машине строгую оценку погрешности по остаточному члену. Наличие такого аналитического решения позволяет производить ряд исследований и оценок, которые нельзя сделать с помощью одного численного решения, изучать зависимость от параметра и пр.

Приведем два примера аналитического построения решения дифференциального уравнения.

Пример 1. Разложение решения в степенной ряд

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!} (x - x_0) + \frac{y_0''}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Для нахождения последовательных производных мы должны описанным выше образом по схеме

$$y' = f(x, y) \mid S$$

строить схему производной $y'' = (y')'$, присоединяя к ней только еще одно соотношение:

$$(y' = (D, y, x)$$

(вместо $(D, y, x) = 0$; она включает, как указывалось выше, схему S , определяющую y').

Точно так же по y'' находятся y''' и т. д., после чего вычисляются значения производных в точке x_0 и составляется степенной ряд.

Пример 2. В качестве другого примера упомянем о возможности построения известного разложения решения дифференциального уравнения по степеням параметра (метод Пуанкаре — Липунова):

$$y'' + y = F(\tau) y'^2 \quad (\text{либо } = F(x, y, y', \tau))$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0; \quad F(\tau) = c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \dots$$

Решение ищется в виде

$$y(\tau, x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\tau + \varphi_2(x)\tau^2 + \dots$$

φ_k последовательно находятся из дифференциальных уравнений

$$\ddot{\varphi}_0 + \varphi_0 = 0; \quad (\varphi_0 = \cos x)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \varphi_0'^2 c_1 \equiv f_1(x);$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = \dots \equiv f_2(x);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_k(x) = \int_0^x f_k(t) \sin(x-t) dt;$$

$$f_k(t) = \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left\{ y_{k-1}'^2(t) F(\tau) \right\} \right]_{\tau=0}$$

Здесь f_k и φ_k — выражения типа

$$\sum_{k,v} (a_{k,v} t^k \sin vt + b_{k,v} t^k \cos vt).$$

Операции, которые здесь требуются, кроме дифференцирования, что мы уже умеем, осуществляются посредством простых схемных тождеств. Именно нужны преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (формулы, обратные формулам приведения к виду, удобному для логарифмирования) и формулы интегрирования по частям выражений вида

$$\int x^l \sin kx dx.$$

Существенную роль играют в этой задаче также различные действия над группами номеров.

Этот метод широко используется в различных задачах небесной механики и теории регулирования, при этом осуществление его связано с весьма громоздкими выкладками. Поэтому их проведение с помощью машины было бы весьма полезным.

Для данной задачи, хотя она в основном запрограммирована, фактическое решение на машине еще не осуществлялось, но решение ряда других задач, в частности аналитическое вычисление производных различных порядков, было уже реализовано (Л. Т. Петровой).

Подобным же образом может выполняться и ряд других аналитических выкладок.

При этом преобразования и упрощения схем (формул) могут выполняться двояким образом. Либо вводя подходящее поле объектов, в котором все участвующие в схеме операции определены. При этом можно последовательно включить значения элементов схемы в этом поле. Либо схему можно привести к каноническому виду за счет последовательного применения к ней, пока это возможно, группы преобразований, определяемых некоторыми тождествами (подобно нормальному алгорифму).

Сложнее дело обстоит с задачами, которые не всегда имеют решения и для решения которых нет определенного алгорифма, например аналитическое интегрирование в общем случае. Однако намечаются некоторые перспективы разработки довольно общих методов их анализа и систематизации возможных попыток их решения.

Те же приемы, помимо аналитических выкладок, могут использоваться также для преобразования, упрощения, приведения к канонической форме и других видов математических заданий, например:

а) преобразования вычислительных планов с целью обеспечения более удобного вычисления по ним: вынос наверх выражений, зависящих от большего числа параметров, подъем более сложных операций, исключение повторного вычисления выражений и т. д.;

б) преобразование логических и теоретико-множественных формул: вынос кванторов наружу, исключение некоторых операций (отрицания, дополнения) и т. п.;

в) в вопросах анализа и синтеза релейно-контактных схем;
 г) различные вычисления и преобразования в алгебре и топологии;

д) формальный анализ дедуктивных теорий (нахождение параллелизмов, частей, допускающих аксиоматическое построение, и т. д.).

В заключение мы полагаем, что нужно считать уже в самое ближайшее время осуществимым на машинах, наряду с обычными численными вычислениями, полное автоматическое проведение определенного математического метода решения задачи, с выполнением всех необходимых числовых и аналитических выкладок, а также логического анализа.

Наряду с использованием в приближенных вычислениях и прикладной математике машинный анализ должен получить систематическое применение и в ряде так называемых теоретических областей математики.

Ленинградское отделение
 Математического института
 АН СССР

Поступило 21 I 1957

Լ. Վ. Կանտորովիչ

ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ՂԵԿԱՎԱՐՈՒՄ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐԻ ՎՐԱ ԹՎԱՅԻՆ ԵՎ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ԿԱՏԱՐԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածը բաղկացած է երեք մասից: Առաջին մասում մշակվում են խնդիրը ավտոմատիկ հաշիվի մեքենայի մեջ մտցնելու ընդհանուր հարմար կղանակ, ինչպես նաև մաթեմատիկական ու արամարտական բանաձևերը սիմվոլիկ կերպով գրելու կղանակ, որպիսի կղանակները կիրառվում են մաթեմատիկական հաշվումներում և, մասնավորապես, ընդհանուր բանաձևերը հատուկ սխեմաներով փոխարինելու, այդ սխեմաները ձևափոխելու և այլ հարցերում:

Երկրորդ մասում նկարագրվում է մեքենայի վրա հաշվումների նախապատրաստման որոշ սխեմաներ, որի էությունն այն է, որ կարճագրված տեսքով մեքենայի մեջ է մտցվում աշխատանքի հաշվողական սխեման, որը գրված է խոշորացված էլեմենտներով և զործողություններով: Այդ սխեման վերծանվում և կատարվում է մեկ ընդմիջու կազմված ծրագրով՝ շաշխոյակով, որը դիկավարում է նաև մեքենայի օպերատիվ և արտաքին հիշողության ավյալների տեղավորումը, հրամանների վերահասցեակազմման ամբողջ սխեման և այլն:

Վերջապես, երրորդ մասը նվիրված է անալիտիկ հաշվումների (օրինակ՝ ամանցման, տեղադրումների և այլն) սխեմատիկ կատարմանը մեքենաների օգնությամբ:

С. А. Амбарцумян

О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек

1. *Основные предпосылки и гипотезы.* Рассмотрим тонкую двухслойную оболочку, составленную из двух однородных ортотропных слоев. Пусть плоскости упругой симметрии материалов каждого слоя взаимно перпендикулярны, при этом одна из плоскостей упругой симметрии в каждой точке каждого слоя параллельна внешним параллельным поверхностям оболочки, а остальные две перпендикулярны координатным линиям $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ *

Пусть α и β являются криволинейными, ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности, γ — расстояние по нормали от точки (α, β) координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки.

За координатную поверхность принимаем поверхность слая слоев, которая параллельна внешним поверхностям оболочки.

Считаем, что коэффициенты первой квадратичной формы $A = A(\alpha, \beta)$ и $B = B(\alpha, \beta)$, а также главные кривизны координатной поверхности $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$ и $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ при дифференцировании ведут себя как постоянные [1, 2, 3].

Предположим также, что слои после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

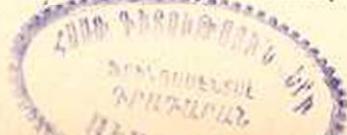
В отличие от общепринятого метода расчета слоистых оболочек, здесь в основу ставим следующие предположения:

1. В каждом слое оболочки нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины.

2. При определении деформаций $e_{\alpha\gamma}^m$ и $e_{\beta\gamma}^m$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$ не отличаются от соответствующих напряжений ($\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$), найденных в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей для всего пакета оболочки в целом [4—8]

Здесь, будучи более строгими [3, 10], первую гипотезу можно сформулировать несколько иначе. При рассмотрении деформаций пренебрегаем влиянием напряжения σ_γ^m на $e_{\alpha\alpha}^m$ и $e_{\beta\beta}^m$, а также приближенно принимаем, $e_{\gamma\gamma} = 0$.

* Здесь и в дальнейшем в основном приняты известные обозначения [2, 3, 10].



Учитывая результаты, полученные при решении плоской задачи изгиба составного бруса [7], в настоящей работе, начиная с 7-го номера, будет рассмотрен вариант теории расчета двухслойной оболочки, в котором приведенная выше первая гипотеза будет изменена следующим образом. В каждом слое оболочки нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации остается линейным и не меняет своей длины. В силу этой гипотезы при рассмотрении деформаций будем пренебрегать влиянием напряжения σ_{γ}^m на деформации $e_{\alpha\gamma}^m$ и $e_{\beta\gamma}^m$, которые по высоте каждого слоя оболочки будут иметь прямолинейный закон распределения, а также будем считать $e_{\gamma\gamma}^m = 0$. Укажем, что и при этом варианте второе предположение остается в силе.

Принятые здесь гипотезы являются результатом логического развития гипотезы недеформируемых нормалей, принятой для всего пакета оболочки в целом, и находят подтверждение в исследованиях плоской задачи изгиба неоднородного бруса [6, 7].

2. *Исходные уравнения и соотношения.* В этом номере без доказательств приводятся известные результаты, которые лежат в основе дальнейшего изложения.

Для объемного дифференциального элемента, выделенного в каком-либо m -ом слое оболочки, имеем следующие уравнения равновесия [2]:

$$\begin{aligned} H_2 \frac{\partial \sigma_{\alpha}^m}{\partial x} + H_1 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}^m) &= 0, \\ H_1 \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^m}{\partial \beta} + H_2 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial x} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2^2 \tau_{\beta\gamma}^m) &= 0, \\ H_2 \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^m}{\partial x} + H_1 \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^m}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \tau_{\gamma}^m) - \sigma_{\alpha}^m H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \sigma_{\beta}^m H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где для коэффициентов Ламе имеем

$$H_1 = A(1 + k_1 \gamma), \quad H_2 = B(1 + k_2 \gamma). \quad (2.2)$$

Для компонентов деформаций имеем

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}^m &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_{\alpha}^m}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_{\gamma}^m \right), & e_{\beta\beta}^m &= \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial u_{\beta}^m}{\partial \beta} + \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma}^m \right), \\ e_{\alpha\beta}^m &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\alpha}^m}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_{\beta}^m}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$e_{\beta\gamma}^m = H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_2} u_{\beta}^m \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\gamma}^m}{\partial \beta},$$

$$e_{\gamma\gamma}^m = H_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_1} u_{\gamma}^m \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_{\gamma}^m}{\partial x}, \quad e_{\gamma\alpha}^m = \frac{\partial u_{\gamma}^m}{\partial \alpha}, \quad (2.4)$$

где $u_a^m = u_a^m(x, \beta, \gamma)$, $u_\beta^m = u_\beta^m(x, \beta, \gamma)$ и $u_\gamma^m = u_\gamma^m(x, \beta, \gamma)$ — компоненты полного перемещения какой-либо точки m -го слоя оболочки.

В силу первой гипотезы, из обобщенного закона Гука, для напряжений в m -ом слое оболочки получим [4, 8]

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^m &= B_{11}^m e_\alpha^m + B_{12}^m e_\beta^m, & \sigma_\beta^m &= B_{22}^m e_\beta^m + B_{12}^m e_\alpha^m, \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m e_{\alpha\beta}^m, & \tau_{\beta\gamma}^m &= B_{44}^m e_{\beta\gamma}^m, & \tau_{\alpha\gamma}^m &= B_{55}^m e_{\alpha\gamma}^m, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}^m &= \frac{E_\alpha^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, & B_{22}^m &= \frac{E_\beta^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \\ B_{12}^m &= \frac{\mu_2^m E_\alpha^m}{1 - \mu_2^m \mu_2^m} = \frac{\mu_1^m E_\beta^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, & (2.6) \\ B_{66}^m &= G_{\alpha\beta}^m, & B_{55}^m &= G_{\alpha\gamma}^m, & B_{44}^m &= G_{\beta\gamma}^m, \end{aligned}$$

где E_α^m и E_β^m — модули упругости; $G_{\alpha\gamma}^m$, $G_{\beta\gamma}^m$, $G_{\alpha\beta}^m$ — модули сдвига; $\mu_1^m = \mu_{\alpha\beta}^m$, $\mu_2^m = \mu_{\beta\alpha}^m$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление действия напряжения).

Перемещения и напряжения на внешних поверхностях оболочки и на поверхности контакта должны удовлетворять следующим условиям:

1) на верхней поверхности, при $\gamma = \delta_2$,

$$\dot{\tau}_{\alpha\gamma} = X, \quad \dot{\tau}_{\beta\gamma} = Y, \quad \dot{\sigma}_\gamma = Z; \quad (2.7)$$

2) на нижней поверхности, при $\gamma = -\delta_1$,

$$\dot{\tau}_{\alpha\gamma} = 0, \quad \dot{\tau}_{\beta\gamma} = 0, \quad \dot{\sigma}_\gamma = 0; \quad (2.8)$$

3) на поверхности контакта, при $\gamma = 0$,

$$\dot{\tau}_{\alpha\gamma} = \dot{\tau}_{\alpha\gamma}^*, \quad \dot{\tau}_{\beta\gamma} = \dot{\tau}_{\beta\gamma}^*, \quad \dot{\sigma}_\gamma = \dot{\sigma}_\gamma^*, \quad (2.9)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^*, \quad u_\beta = u_\beta^*, \quad u_\gamma = u_\gamma^*. \quad (2.10)$$

Здесь $X = X(x, \beta)$, $Y = Y(x, \beta)$, $Z = Z(x, \beta)$ — компоненты внешней поверхностной нагрузки, δ_1 — толщина нижнего слоя, δ_2 — толщина верхнего слоя.

Напряжения вызывают внутренние силы (T_1 , T_2 , T_{12} , T_{21} , Q_1 , Q_2) и внутренние моменты (M_1 , M_2 , M_{12} , M_{21}), которые определяются обычным способом [4, 5, 9] и должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия [10, 12]:

* Здесь и в дальнейшем для первого или второго слоев, когда m фигурирует как индекс, расположенный сверху расчетной величины, то вместо $m = 1$ или $m = 2$ соответственно будем употреблять один или два штриха. Например: вместо B_{ik}^1 напишем B_{ik}^{\cdot} или вместо B_{ik}^2 напишем $B_{ik}^{\cdot\cdot}$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial T_{21}}{\partial \beta} + k_1 Q_1 + X = 0, \\
 & \frac{1}{B} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha} + k_2 Q_2 + Y = 0, \\
 & -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{A} \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + Z = 0, \\
 & \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - Q_2 = 0, \\
 & \frac{1}{B} \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - Q_1 = 0, \\
 & T_{12} - T_{21} + k_1 M_{12} - k_2 M_{21} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. Значения касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^{om}$ и $\tau_{\beta\gamma}^{om}$ в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей для всего пакета оболочки в целом*. Согласно гипотезе недеформируемых нормалей, нормальный к координатной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной координатной поверхности оболочки и сохраняет свою длину. В силу этой гипотезы [2]

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha}^{om} &= (1 + k_1 \gamma) u^{\circ} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial \alpha}, \\
 u_{\beta}^{om} &= (1 + k_2 \gamma) v^{\circ} - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial \beta}, \quad u_{\gamma}^{om} = w^{\circ},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u^{\circ} = u^{\circ}(\alpha, \beta)$, $v^{\circ} = v^{\circ}(\alpha, \beta)$ и $w^{\circ} = w^{\circ}(\alpha, \beta)$ — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения рассматриваемой точки координатной поверхности оболочки.

Подставляя значения u_{α}^{om} , u_{β}^{om} и u_{γ}^{om} из (3.1) в (2.3), учитывая при этом, что

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha}^{om} &= \varepsilon_1^{\circ} + \gamma x_1^{\circ}, \quad e_{\beta}^{om} = \varepsilon_2^{\circ} + \gamma x_2^{\circ}, \\
 e_{\beta\alpha}^{om} &= \omega^{\circ} + \gamma z^{\circ},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

получим следующие соотношения для относительных удлинений и сдвига, а также для параметров, характеризующих изменение кривизны и кручения координатной поверхности оболочки, [2, 3, 10, 11]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^{\circ} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u^{\circ}}{\partial \alpha} + k_1 w^{\circ}, & \varepsilon_2^{\circ} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v^{\circ}}{\partial \beta} + k_2 w^{\circ}, \\
 \omega^{\circ} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u^{\circ}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v^{\circ}}{\partial \alpha},
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

* Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к задаче, при которой принимается гипотеза недеформируемых нормалей, отмечаем «кружочком».

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^\circ &= -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \alpha^2} + k_1 \frac{1}{A} \frac{\partial u^\circ}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2^\circ &= -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{1}{B} \frac{\partial v^\circ}{\partial \beta}, \\ \tau^\circ &= -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} + 2 \left(k_1 \frac{1}{B} \frac{\partial u^\circ}{\partial \beta} + k_2 \frac{1}{A} \frac{\partial v^\circ}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (2.5) на основании (3.2) для напряжений в m -ом слое оболочки получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^m &= B_{11}^m \varepsilon_1^\circ + B_{12}^m \varepsilon_2^\circ + \gamma (B_{11}^m \varepsilon_1^\circ + B_{12}^m \varepsilon_2^\circ), \\ \varepsilon_\beta^m &= B_{22}^m \varepsilon_2^\circ + B_{12}^m \varepsilon_1^\circ + \gamma (B_{22}^m \varepsilon_2^\circ + B_{12}^m \varepsilon_1^\circ), \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m \tau^\circ + \gamma B_{66}^m \tau^\circ. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя значения напряжений из (3.5) в первые два уравнения (2.1), при этом учитывая условия на внешних поверхностях (2.7) и (2.8), а также (3.3) и (3.4), для искоемых касательных напряжений с точностью гипотезы недеформируемых нормалей, получим [4, 5]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\gamma}^m &= \frac{1}{2} (\delta_m^2 - \gamma^2) \left(B_{11}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_1^\circ}{\partial \alpha} + B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_2^\circ}{\partial \alpha} + B_{66}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \tau^\circ}{\partial \beta} \right) + \\ &+ [(-1)^m \delta_m - \gamma] \left(B_{11}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_1^\circ}{\partial \alpha} + B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_2^\circ}{\partial \alpha} + B_{66}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \tau^\circ}{\partial \beta} \right) + (m-1)X = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_m^2 - \gamma^2) E_1 (B_{ik}^m) w^\circ + [(-1)^m \delta_m - \gamma] \left[B_{11}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \alpha^2} + \right. \\ &+ B_{66}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \beta^2} + (B_{12}^m + B_{66}^m) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ &+ (k_1 B_{11}^m + k_2 B_{12}^m) \frac{1}{A} \frac{\partial w^\circ}{\partial \alpha} \left. \right] + (m-1)X, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\gamma}^m &= \frac{1}{2} (\delta_m^2 - \gamma^2) \left(B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_2^\circ}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_1^\circ}{\partial \beta} + B_{66}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \tau^\circ}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ [(-1)^m \delta_m - \gamma] \left(B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_2^\circ}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_1^\circ}{\partial \beta} + B_{66}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \tau^\circ}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ (m-1)Y = \frac{1}{2} (\delta_m^2 - \gamma^2) E_2 (B_{ik}^m) w^\circ + [(-1)^m \delta_m - \gamma] \left[B_{22}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \beta^2} + \right. \\ &+ B_{66}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \alpha^2} + (B_{12}^m + B_{66}^m) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ &+ (k_2 B_{22}^m + k_1 B_{12}^m) \frac{1}{B} \frac{\partial w^\circ}{\partial \beta} \left. \right] + (m-1)Y, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$E_1 (B_{ik}^m) = B_{11}^m \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (B_{12}^m + 2B_{66}^m) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2},$$

$$E_2(B_{ik}^m) = B_{22}^m \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (B_{12}^m + 2B_{66}^m) \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \quad (3.8)$$

Таким образом, задача определения искоемых напряжений $\tau_{\alpha 1}^{\circ m}$ и $\tau_{\beta 1}^{\circ m}$ сводится к нахождению перемещений u° , v° и w° .

4. Разрешающие уравнения в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, для всего пакета оболочки в целом. Для построения разрешающих уравнений относительно искоемых перемещений u° , v° , w° , во-первых, определим внутренние усилия. Воспользовавшись известными формулами [9] для внутренних усилий, получим

$$T_1^{\circ} = C_{11} \varepsilon_1^{\circ} + C_{12} \varepsilon_2^{\circ} + K_{11} \chi_1^{\circ} + K_{12} \chi_2^{\circ}, \quad (4.1)$$

$$T_2^{\circ} = C_{22} \varepsilon_2^{\circ} + C_{12} \varepsilon_1^{\circ} + K_{22} \chi_2^{\circ} + K_{12} \chi_1^{\circ},$$

$$T_{12}^{\circ} = (C_{66} + k_2 K_{66}) \omega^{\circ} + (K_{66} + k_2 D_{66}) \tau^{\circ}, \quad (4.2)$$

$$T_{21}^{\circ} = (C_{66} + k_1 K_{66}) \omega^{\circ} + (K_{66} + k_1 D_{66}) \tau^{\circ},$$

$$M_1^{\circ} = D_{11} \chi_1^{\circ} + D_{12} \chi_2^{\circ} + K_{11} \varepsilon_1^{\circ} + K_{12} \varepsilon_2^{\circ}, \quad (4.3)$$

$$M_2^{\circ} = D_{22} \chi_2^{\circ} + D_{12} \chi_1^{\circ} + K_{22} \varepsilon_2^{\circ} + K_{12} \varepsilon_1^{\circ},$$

$$M_{12}^{\circ} = M_{21}^{\circ} = H = D_{66} \tau^{\circ} + K_{66} \omega^{\circ}, \quad (4.4)$$

где для жесткостей имеем [9, 12]:

$$C_{ik} = (\delta_2 B_{ik}^{\circ} + \delta_1 B_{ik}^{\circ}),$$

$$K_{ik} = \frac{1}{2} (\delta_2^2 B_{ik}^{\circ} - \delta_1^2 B_{ik}^{\circ}), \quad (4.5)$$

$$D_{ik} = \frac{1}{3} (\delta_2^3 B_{ik}^{\circ} + \delta_1^3 B_{ik}^{\circ}).$$

В (4.1)–(4.4) мы получили наиболее простые соотношения упругости, которые, как нетрудно заметить, не противоречат шестому уравнению равновесия (2.11).

Подставляя значения внутренних усилий из (4.1)–(4.4) в уравнения равновесия, при этом учитывая (3.3) и (3.4), для определения искоемых перемещений u° , v° , w° получим следующую систему из трех дифференциальных уравнений:

$$L_{11}(C_{ik}K_{ik})u^{\circ} + Q_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial \alpha \partial \beta} - \left[L_{13}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] w^{\circ} = -X, \quad (4.6a)$$

$$L_{22}(C_{ik}K_{ik})v^{\circ} + Q_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial \alpha \partial \beta} - \left[L_{23}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{23} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] w^{\circ} = -Y, \quad (4.6b)$$

$$\begin{aligned} & \left[L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ik}) + Q_{33} \right] w^{\circ} - \left[L_{13}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] u^{\circ} - \\ & - \left[L_{23}(D_{ik}K_{ik}) - Q_{23} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] v^{\circ} = Z, \end{aligned} \quad (4.6b)$$

где для линейных операторов и коэффициентов введены следующие обозначения:

$$L_{11}(C_{ik} K_{ik}) = (C_{11} + 2k_1 K_{11} + k_1^2 D_{11}) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ + [C_{66} + 4k_1 (K_{66} + k_1 D_{66})] \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad (4.7)$$

$$L_{22}(C_{ik} K_{ik}) = (C_{22} + 2k_2 K_{22} + k_2^2 D_{22}) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \\ + [C_{66} + 4k_2 (K_{66} + k_2 D_{66})] \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (4.8)$$

$$L_{33}(D_{ik}) = D_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \\ + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2}, \quad (4.9)$$

$$L_{13}(D_{ik} K_{ik}) = (K_{11} + k_1 D_{11}) \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \\ + [2K_{66} + K_{12} + k_1 (D_{12} + 4D_{66})] \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2},$$

$$L_{23}(D_{ik} K_{ik}) = (K_{22} + k_2 D_{22}) \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \\ + [2K_{66} + K_{12} + k_2 (D_{12} + 4D_{66})] \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta},$$

$$F(K_{ik}) = (k_1 K_{11} + k_2 K_{12}) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ + (k_2 K_{22} + k_1 K_{12}) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad (4.10)$$

$$Q_{12} = [C_{11} + C_{66} + k_1 k_2 (D_{12} + 4D_{66}) + (k_1 + k_2) (K_{12} + 2K_{66})], \quad (4.11)$$

$$Q_{13} = [C_{11} k_1 + C_{12} k_2 + k_1 (k_1 K_{11} + k_2 K_{12})],$$

$$Q_{23} = [C_{22} k_2 + C_{12} k_1 + k_2 (k_2 K_{22} + k_1 K_{12})], \quad (4.12)$$

$$Q_{33} = k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22}. \quad (4.13)$$

В случае, когда оболочка „пологая“ [2, 14] или „не слишком длинная“ [3], полученные уравнения и соотношения могут быть несколько упрощены*.

* Здесь следует указать, что полученные уравнения и соотношения могут быть использованы как в случае пологих оболочек, если даже оболочка слишком длинная [14], так и в случае не слишком длинных оболочек, если даже оболочка совершенно не полая [11].

Всюду методически пренебрегая величинами порядка γk по сравнению с единицей, получим следующую упрощенную систему разрешающих дифференциальных уравнений [12]:

$$\left(C_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u^\circ + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} - \left[E_1(K_{ik}) - (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] w^\circ = -X, \quad (4.14a)$$

$$\left(C_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v^\circ + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \alpha \partial \beta} - \left[E_2(K_{ik}) - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] w^\circ = -Y, \quad (4.14b)$$

$$[L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ik}) + Q_{33}] w^\circ - \left[E_1(K_{ik}) - (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] u^\circ - \left[E_2(K_{ik}) - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] v^\circ = Z. \quad (4.14v)$$

Укажем, что, при выводе системы (4.14), в первых двух уравнениях равновесия (2.11) величины $k_1 Q_1$ и $k_2 Q_2$ принимались равными нулю. Изменения кривизны и кручение имели следующий вид:

$$\kappa_1^\circ = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \alpha^2}, \quad \kappa_2^\circ = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \beta^2}, \quad \tau_2^\circ = -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad (4.15)$$

и, наконец,

$$T_{12}^\circ = T_{21}^\circ = C_{66} \omega^\circ + K_{66} \tau^\circ. \quad (4.16)$$

5. *Несколько слов об условиях контакта слоев оболочки.* Рассматривая формулы (3.1), замечаем, что условия контакта (2.10) удовлетворяются тождественно. Что же касается условий контакта (2.9), то, как известно [4], эти условия сводятся к системе разрешающих уравнений (4.6) или в частном случае к (4.14).

Таким образом, если u° , v° и w° будут определены из системы уравнений (4.6) или в частном случае из (4.14), то условия контакта (2.9) также будут удовлетворены тождественно.

6. *Основные уравнения и соотношения поставленной задачи.* В силу принятых гипотез (гипотезы 1 и 2), для деформаций в m -ом слое оболочки имеем:

$$e_{\alpha 1}^m = \frac{\tau_{\alpha 1}^m}{B_{55}^m} = \frac{\tau_{\alpha 1}^m}{B_{55}^m}, \quad (6.1)$$

$$e_{\beta 1}^m = \frac{\tau_{\beta 1}^m}{B_{44}^m} = \frac{\tau_{\beta 1}^m}{B_{44}^m},$$

$$e_{11}^m = 0. \quad (6.2)$$

Из (6.2), учитывая (2.4), для перемещения u_γ получим

$$u_\gamma^m = w(x, \beta). \quad (6.3)$$

Значит, как и во всех существующих теориях расчета тонких оболочек, перемещение u_γ какой-либо точки m -го слоя оболочки не зависит от координаты γ . Это перемещение для всех точек данного нормального элемента оболочки имеет постоянное значение, равное нормальному перемещению $w = w(x, \beta)$ той точки координатной поверхности, которая образуется при пересечении данной нормали с координатной поверхностью оболочки.

Подставляя значения $\varepsilon_{\alpha 1}^{\circ m}$ и $\varepsilon_{\beta 1}^{\circ m}$ из (3.6) и (3.7) в (6.1), для деформаций сдвига получим:

$$\begin{aligned} e_{\alpha 1}^m &= \varphi_1^{\circ m} - \gamma I_1^{\circ m} - \frac{\gamma^2}{2} \chi_1^{\circ m}, \\ e_{\beta 1}^m &= \varphi_2^{\circ m} - \gamma I_2^{\circ m} - \frac{\gamma^2}{2} \chi_2^{\circ m}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\varphi_1^{\circ m} = \frac{m-1}{B_{55}^m} X + (-1)^m \delta_m I_1^{\circ m} + \frac{\delta_m^2}{2} \chi_1^{\circ m}, \quad (6.5)$$

$$\varphi_2^{\circ m} = \frac{m-1}{B_{44}^m} Y + (-1)^m \delta_m I_2^{\circ m} + \frac{\delta_m^2}{2} \chi_2^{\circ m}. \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} I_1^{\circ m} &= \frac{1}{B_{55}^m} \left(B_{11}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_1^{\circ}}{\partial x} + B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_2^{\circ}}{\partial x} + B_{66}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \omega^{\circ}}{\partial \beta} \right) = \\ &= \frac{1}{B_{55}^m} \left[B_{11}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial x^2} + B_{66}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial \beta^2} + (B_{12}^m + B_{66}^m) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial x \partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + (B_{11}^m k_1 + B_{12}^m k_2) \frac{1}{A} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} I_2^{\circ m} &= \frac{1}{B_{44}^m} \left(B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_2^{\circ}}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_1^{\circ}}{\partial \beta} + B_{66}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \omega^{\circ}}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{B_{44}^m} \left[B_{22}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial \beta^2} + B_{66}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial x^2} + (B_{12}^m + B_{66}^m) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial x \partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + (B_{22}^m k_2 + B_{12}^m k_1) \frac{1}{B} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial \beta} \right], \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\chi_1^{\circ m} = -\frac{1}{B_{55}^m} E_1(B_{ik}^m) w^{\circ}, \quad (6.9)$$

$$\chi_2^{\circ m} = -\frac{1}{B_{44}^m} E_2(B_{ik}^m) w^{\circ}. \quad (6.10)$$

Из (6.4), подставляя значения $e_{\alpha\gamma}^m$ и $e_{\beta\gamma}^m$ в (2.4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\frac{u_\alpha^m}{H_1} \right) &= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\alpha^m}{\partial z} + \frac{\varphi_1^{\circ m}}{H_1} - \frac{\gamma}{H_1} I_1^{\circ m} - \frac{\gamma^2}{2H_1} \chi_1^{\circ m}, \\ \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\frac{u_\beta^m}{H_2} \right) &= -\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\beta^m}{\partial \beta} + \frac{\varphi_2^{\circ m}}{H_2} - \frac{\gamma}{H_2} I_2^{\circ m} - \frac{\gamma^2}{2H_2} \chi_2^{\circ m}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Умножая каждое из этих уравнений на $d\gamma$ и интегрируя в пределах от нуля до γ , при этом учитывая, что при $\gamma = 0$ $u_\alpha^m = u(\alpha, \beta)$ и $u_\beta^m = v(\alpha, \beta)$, получим

$$\begin{aligned} u_\alpha^m &= (1 + k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma \left(1 + k_1 \frac{\gamma}{2} \right) \varphi_1^{\circ m} - \\ &- \frac{\gamma^2}{2} \left(1 + k_1 \frac{\gamma}{3} \right) I_1^{\circ m} - \frac{\gamma^3}{6} \left(1 + k_1 \frac{\gamma}{4} \right) \chi_1^{\circ m}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} u_\beta^m &= (1 + k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma \left(1 + k_2 \frac{\gamma}{2} \right) \varphi_2^{\circ m} - \\ &- \frac{\gamma^2}{2} \left(1 + k_2 \frac{\gamma}{3} \right) I_2^{\circ m} - \frac{\gamma^3}{6} \left(1 + k_2 \frac{\gamma}{4} \right) \chi_2^{\circ m}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь, как и вообще [2], $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ — тангенциальные перемещения какой-либо точки координатной поверхности.

Формулы (6.12) и (6.13) показывают, что, в отличие от существующих теорий расчета слоистых оболочек [4, 9, 12, 13], здесь тангенциальные перемещения u_α^m и u_β^m какой-либо точки оболочки, удаленной от координатной поверхности по нормали на расстояние γ , зависят от γ нелинейно. При этом коэффициенты нелинейных членов $\varphi_1^{\circ m}$, $\varphi_2^{\circ m}$, $I_1^{\circ m}$, $I_2^{\circ m}$, $\chi_1^{\circ m}$, $\chi_2^{\circ m}$ являются известными величинами, которые определяются с помощью формул (6.5) — (6.10), на основании решения задачи теории слоистой оболочки, опирающейся на гипотезу недеформируемых нормалей, данную для всего пакета оболочки в целом.

Укажем, что в формулах (6.12) и (6.13) известные коэффициенты ($\varphi_1^{\circ m}$, $\varphi_2^{\circ m}$) имеются и при γ .

В силу (6.12) и (6.13) деформации $e_{\alpha\alpha}^m$, $e_{\beta\beta}^m$ и $e_{\alpha\beta}^m$ могут быть представлены в виде многочлена по степеням γ :

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}^m &= \varepsilon_1^m + \gamma \chi_1^m + \gamma^2 \eta_1^m + \gamma^3 \theta_1^m + \gamma^4 \zeta_1^m, \\ e_{\beta\beta}^m &= \varepsilon_2^m + \gamma \chi_2^m + \gamma^2 \eta_2^m + \gamma^3 \theta_2^m + \gamma^4 \zeta_2^m, \\ e_{\alpha\beta}^m &= \omega^m + \gamma \tau^m + \gamma^2 \nu^m + \gamma^3 \kappa^m + \gamma^4 \zeta_4^m. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из (6.3), (6.12) и (6.13), подставляя значения u_α^m , u_α^m и u_β^m в (2.3) и полученные при этом значения $e_{\alpha\alpha}^m$, $e_{\beta\beta}^m$ и $e_{\alpha\beta}^m$ сравнивая с соот-

ветствующими выражениями (6.14), для коэффициентов разложений получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^m = \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, & \varepsilon_2^m = \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w, \\ \omega^m = \omega &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^m = \chi_1 &+ \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial x} = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial x}, \\ \chi_2^m = \chi_2 &+ \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \beta} = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \beta}, \\ \tau^m = \tau &+ \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial x} = -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + \\ &+ 2 \left(k_1 \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + k_2 \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \eta_1^m &= k_1 \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} (I_1^{\circ m} + k_1 \varphi_1^{\circ m}), \\ \eta_2^m &= k_2 \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{2B} \frac{\partial}{\partial \beta} (I_2^{\circ m} + k_2 \varphi_2^{\circ m}), \\ \nu^m &= (k_1 + k_2) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} - \frac{1}{2B} \frac{\partial}{\partial \beta} [I_1^{\circ m} - (k_1 - 2k_2) \varphi_1^{\circ m}] - \\ &- \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [I_2^{\circ m} - (k_2 - 2k_1) \varphi_2^{\circ m}], \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \theta_1^m &= -\frac{1}{6A} \frac{\partial}{\partial x} (\chi_1^{\circ m} - 2k_1 I_1^{\circ m}), & \theta_2^m &= -\frac{1}{6B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\chi_2^{\circ m} - 2k_2 I_2^{\circ m}), \\ \lambda^m &= -\frac{1}{6B} \frac{\partial}{\partial \beta} [\chi_1^{\circ m} + (k_1 - 3k_2) I_1^{\circ m}] - \\ &- \frac{1}{6A} \frac{\partial}{\partial x} [\chi_2^{\circ m} + (k_2 - 3k_1) I_2^{\circ m}], \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \xi_1^m &= k_1 \frac{1}{8A} \frac{\partial \chi_1^{\circ m}}{\partial x}, & \xi_2^m &= k_2 \frac{1}{8B} \frac{\partial \chi_2^{\circ m}}{\partial \beta}, \\ \zeta^m &= (4k_2 - k_1) \frac{1}{24B} \frac{\partial \chi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + (4k_1 - k_2) \frac{1}{24A} \frac{\partial \chi_2^{\circ m}}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Рассматривая разложения (6.14) замечаем, что они похожи на аналогичные разложения, использованные в работе [2], однако, как нетрудно заметить, здесь мы имеем лишь внешнее сходство. Дело в том, что в цитированной работе [2] при опреде-

лении деформаций e_{22}^m , e_{33}^m и $e_{\alpha\beta}^m$ пользуются рядами по степеням γ , одновременно сохраняя гипотезу недеформируемых нормалей [2, 3]. В настоящей же работе соотношения (6.14) получаются в силу исходных гипотез поставленной задачи.

Укажем также, что, как и в п^о3; при определении x_1 , x_2 и τ принято условие нерастяжимости координатной поверхности оболочки [2, 3, 10].

На основании (6.14) из обобщенного закона Гука (2.5) для расчетных напряжений в m -ом слое оболочки получим

$$\begin{aligned} \sigma_x^m = & (B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2) + \gamma (B_{11}^m x_1^m + B_{12}^m x_2) + \\ & + \gamma^2 (B_{11}^m \eta_1^m + B_{12}^m \eta_2^m) + \gamma^3 (B_{11}^m \theta_1^m + B_{12}^m \theta_2^m) + \\ & + \gamma^4 (B_{11}^m \xi_1^m + B_{12}^m \xi_2^m), \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^m = & (B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{12}^m \varepsilon_1) + \gamma (B_{22}^m x_2^m + B_{12}^m x_1^m) + \\ & + \gamma^2 (B_{22}^m \eta_2^m + B_{12}^m \eta_1^m) + \gamma^3 (B_{22}^m \theta_2^m + B_{12}^m \theta_1^m) + \\ & + \gamma^4 (B_{22}^m \xi_2^m + B_{12}^m \xi_1^m), \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\tau_{xy}^m = B_{66}^m (\omega^m + \gamma \tau^m + \gamma^2 \nu^m + \gamma^3 \lambda^m + \gamma^4 \zeta^m). \quad (6.22)$$

Решая систему уравнений равновесия (2.1) относительно напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$, $\tau_{\beta\gamma}^m$ и σ_γ^m , получим:

$$\begin{aligned} H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}^m = & - \int H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_\alpha^m}{\partial x} d\gamma - \int H_1^2 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \beta} d\gamma + C_1^m(x, \beta), \\ H_1 H_2^2 \tau_{\beta\gamma}^m = & - \int H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_\beta^m}{\partial \beta} d\gamma - \int H_2^2 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \alpha} d\gamma + C_2^m(x, \beta), \\ H_1 H_2 \sigma_\gamma^m = & Ak_1 \int H_2 \tau_\alpha^m d\gamma + Bk_2 \int H_1 \tau_\beta^m d\gamma - \\ & - \int H_2 \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^m}{\partial x} d\gamma - \int H_1 \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^m}{\partial \beta} d\gamma + C_3^m(x, \beta). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Входящие в эти формулы постоянные интегрирования $C_1^m(x, \beta)$, $C_2^m(x, \beta)$ и $C_3^m(x, \beta)$ определяем из условий на поверхностях (2.7) и (2.8).

Произведя необходимые и очевидные преобразования в (6.23), при этом учитывая (6.15)–(6.22) и удовлетворяя условиям контакта двух слоев (2.9), получим следующую систему разрешающих уравнений задачи:

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ik} K_{ik}) u + Q_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} - \left[L_{12}(D_{ik} K_{ik}) - N_{13}(D_{ik} E_{ik}) - \right. \\ \left. - Q_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \right] w = -X - \frac{1}{A} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (6.24a)$$

$$L_{22}(C_{ik} K_{ik}) v + Q_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta^2} - \left[L_{23}(D_{ik} K_{ik}) - N_{23}(D_{ik} E_{ik}) - \right. \\ \left. - Q_{23} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] w = -Y - \frac{1}{B} \frac{\partial T_2^*}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial x}, \quad (6.246)$$

$$[L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ik}) + N_{33}(D_{ik} K_{ik} E_{ik}) + Q_{33}] w - \left[L_{13}(D_{ik} K_{ik}) - \right. \\ \left. - Q_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \right] u - \left[L_{23}(D_{ik} K_{ik}) - Q_{23} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] v = Z - \\ - (k_1 T_1^* + k_2 T_2^*) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial x^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial \beta^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2}, \quad (6.24в)$$

где, кроме принятых обозначений, введены еще новые:

$$N_{13} = k_1 (D_{11} + k_1 E_{11}) \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + [k_2 D_{12} + \\ + (k_1 + k_2) (D_{66} + 2k_1 E_{66}) + k_1 k_2 E_{12}] \frac{1}{AB} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \beta^2}, \quad (6.25)$$

$$N_{33} = k_1 (k_1 D_{11} K_{11} + k_2 D_{12} K_{12}) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 (k_2 D_{22} K_{22} + \\ + k_1 D_{12} K_{12}) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - k_1 E_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - (k_1 + k_2) (E_{12} + \\ + 2E_{66}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} - k_2 E_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (6.26)$$

$$N_{23} = k_2 (D_{22} + k_2 E_{22}) \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + [k_1 D_{12} + \\ + (k_1 + k_2) (D_{66} + 2k_2 E_{66}) + k_1 k_2 E_{12}] \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \beta}, \quad (6.27)$$

В этих формулах наряду с известными жесткостями (4.5) фигурируют также жесткости высшего порядка

$$E_{ik} = \frac{1}{4} (B_{ik}^* \delta_2^4 - B_{ik}^* \delta_1^4). \quad (6.28)$$

В правых частях уравнений системы (6.24) имеются известные величины $(T_1^* \dots M_2^*)$, которые определяются с помощью решения задачи слоистой оболочки, в предположении о справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, для всего пакета оболочки в целом. Указанные величины с точностью $k\gamma$ определяются следующими формулами:

$$T_1^* = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (B_{11}^* R_1^* - B_{11}^* R_1^*) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (B_{12}^* R_2^* - B_{12}^* R_2^*), \\ T_2^* = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (B_{22}^* R_2^* - B_{22}^* R_2^*) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (B_{12}^* R_1^* - B_{12}^* R_1^*), \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned}
 T_{12}^* &= T_{21}^* = B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial R_1^*}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial R_2^*}{\partial \alpha} \right) - B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial R_1^*}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial R_2^*}{\partial \alpha} \right), \\
 M_1^* &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{11}^* S_1^* + B_{11}^* S_1^*) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (B_{12}^* S_2^* + B_{12}^* S_2^*), \\
 M_2^* &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (B_{22}^* S_2^* + B_{22}^* S_2^*) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B_{12}^* S_1^* + B_{12}^* S_1^*), \\
 H^* &= B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial S_1^*}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial S_2^*}{\partial \alpha} \right) + B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial S_1^*}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial S_2^*}{\partial \alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

где

$$R_1^m = \frac{\delta_m^2}{2} \varphi_1^m - (-1)^m \frac{\delta_m^3}{6} I_1^m - \frac{\delta_m^4}{24} \chi_1^m, \tag{6.31}$$

$$S_1^m = \frac{\delta_m^3}{3} \varphi_1^m - (-1)^m \frac{\delta_m^4}{8} I_1^m - \frac{\delta_m^5}{30} \chi_1^m. \tag{6.32}$$

Ограничиваясь точностью k_1 в расчетных формулах, для напряжений в m -ом слое оболочки получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^m &= (B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2) + \gamma (B_{11}^m \kappa_1 + B_{12}^m \kappa_2) + \\
 &+ B_{11}^m \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\gamma \varphi_1^m - \frac{\gamma^2}{2} I_1^m - \frac{\gamma^3}{6} \chi_1^m \right) + \\
 &+ B_{12}^m \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\gamma \varphi_2^m - \frac{\gamma^2}{2} I_2^m - \frac{\gamma^3}{6} \chi_2^m \right),
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy}^m &= (B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{12}^m \varepsilon_1) + \gamma (B_{22}^m \kappa_2 + B_{12}^m \kappa_1) + \\
 &+ B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\gamma \varphi_2^m - \frac{\gamma^2}{2} I_2^m - \frac{\gamma^3}{6} \chi_2^m \right) + \\
 &+ B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\gamma \varphi_1^m - \frac{\gamma^2}{2} I_1^m - \frac{\gamma^3}{6} \chi_1^m \right),
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m \omega + \gamma B_{66}^m \tau + B_{66}^m \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\gamma \varphi_1^m - \frac{\gamma^2}{2} I_1^m - \right. \\
 &\left. - \frac{\gamma^3}{6} \chi_1^m \right) + B_{66}^m \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\gamma \varphi_2^m - \frac{\gamma^2}{2} I_2^m - \frac{\gamma^3}{6} \chi_2^m \right).
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

С такой же точностью для внутренних усилий имеем следующие расчетные формулы:

$$T_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + K_{11} \kappa_1 + K_{12} \kappa_2 + T_1^*, \tag{6.36}$$

$$T_2 = C_{22} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_1 + K_{22} \kappa_2 + K_{12} \kappa_1 + T_2^*, \tag{6.37}$$

$$T_{12} = T_{21} = C_{66} \omega + K_{66} \tau + T_{12}^*, \tag{6.38}$$

$$M_1 = D_{11} x_1 + D_{12} x_2 + K_{11} \varepsilon_1 + K_{12} \varepsilon_2 + M_1^*, \quad (6.39)$$

$$M_2 = D_{22} x_2 + D_{12} x_1 + K_{22} \varepsilon_2 + K_{12} \varepsilon_1 + M_2^*, \quad (6.40)$$

$$H = D_{66} \tau + K_{66} \omega + H^*. \quad (6.41)$$

В случае „пологих“ оболочек система разрешающих уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(C_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} - \\ & - \left[E_1(K_{ik}) - (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] w = \\ & = -X - \frac{1}{A} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (6.42a)$$

$$\begin{aligned} & \left(C_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} - \\ & - \left[E_2(K_{ik}) - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] w = \\ & = -Y - \frac{1}{B} \frac{\partial T_2^*}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.42b)$$

$$\begin{aligned} & [L_{33}(D_{ik}) - 2F(K_{ki}) + Q_{33}] w - \left[E_1(K_{ik}) - (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \right] u - \\ & - \left[E_2(K_{ik}) - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] v = Z - (k_1 T_1^* + k_2 T_2^*) + \\ & + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial x^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2}. \end{aligned} \quad (6.42b)$$

В этом случае для расчетных величин остаются в силе формулы (6.33)–(6.41), однако при этом для изменений кривизны и кручения, как в (4.15), имеем

$$x_1 = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_2 = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta}. \quad (6.43)$$

Рассматривая полученные системы разрешающих уравнений (6.24) и (6.42) замечаем, что они своими левыми частями в основном совпадают с соответствующими левыми частями систем разрешающих уравнений (4.6) и (4.14), полученных на основании гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом. Дополнительные члены, уточняющие гипотезу недеформируемых нормалей, как и следовало ожидать, фигурируют в правых частях уравнений рассмотренных систем (6.24) и (6.42).

Здесь следует указать, что и в формулах расчетных величин (6.33) — (6.41) известные дополнительные члены (6.5) — (6.10), (6.29) — (6.32) фигурируют в явной форме.

7. *Вариант теории при наличии измененной первой гипотезы.* Здесь изложим теорию расчета слоистой оболочки, имея в виду наличие первой измененной и второй гипотез (см. п^о 1).

Рассматривая эти гипотезы замечаем, что в этом случае, по сути дела, для каждого слоя в отдельности принимается несколько расширенная гипотеза недеформируемых нормалей. Расширение гипотезы, что вполне естественно, заключается в том, что, в отличие от известной гипотезы недеформируемых нормалей ($e_{\alpha\gamma} = 0$, $e_{\beta\gamma} = 0$), здесь принимается, что в каждом слое $e_{\alpha\gamma} \neq 0$, $e_{\beta\gamma} \neq 0$. Вторая же гипотеза, которая пополюет первую, как было указано выше, подтверждается во всех задачах математической теории упругости, посвященных изгибу однородных или неоднородных балок и стержней.

В силу принятых гипотез, в отличие от (6.14), для деформаций имеем

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}^m &= \varepsilon_1^m + \gamma x_1^m, & e_{\beta\beta}^m &= \varepsilon_2^m + \gamma x_2^m, \\ e_{\alpha\beta}^m &= \omega^m + \gamma z^m. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Из (6.3), (6.12) и (6.14), подставляя значения u_1^m , u_2^m и u_3^m в (2.3) и полученные при этом значения деформаций $e_{\alpha\alpha}^m$, $e_{\beta\beta}^m$ и $e_{\alpha\beta}^m$ сравнивая с (7.1), для коэффициентов разложения получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^m &= \varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, & \varepsilon_2^m &= \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w, \\ \omega^m &= \omega = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ x_1^m &= -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^m}{\partial x}, \\ x_2^m &= -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^m}{\partial \beta}, \\ z^m &= -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + 2 \left(k_1 \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^m}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^m}{\partial x}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

которые совершенно не отличаются от соответствующих значений (6.15), (6.16). Что касается остальных коэффициентов разложения (6.17), (6.18) и (6.19), то они в этом варианте равны нулю.

Учитывая изложенное выше, из (6.33), (6.34) и (6.35) для напряжений в m -ом слое оболочки получим

$$\sigma_{\alpha}^m = (B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2) + \gamma (B_{11}^m \kappa_1 + B_{12}^m \kappa_2) + \\ + \gamma \left(B_{11}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial x} + B_{12}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \beta} \right), \quad (7.4)$$

$$\sigma_{\beta}^m = (B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{12}^m \varepsilon_1) + \gamma (B_{22}^m \kappa_2 + B_{12}^m \kappa_1) + \\ + \gamma \left(B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial x} \right), \quad (7.5)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = B_{66}^m \omega + \gamma B_{66}^m \tau + \gamma B_{66}^m \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ m}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ m}}{\partial x} \right). \quad (7.6)$$

Формулы внутренних усилий (6.36) — (6.41) остаются без изменений, однако в случае рассматриваемого варианта дополнительные члены $T_1^* \dots H^*$ имеют следующий вид:

$$T_1^* = \frac{\delta_2^2}{2} \left(B_{11}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} + B_{12}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} \right) - \\ - \frac{\delta_1^2}{2} \left(B_{11}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} + B_{12}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} \right), \quad (7.7)$$

$$T_2^* = \frac{\delta_2^2}{2} \left(B_{22}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} + B_{12}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\delta_1^2}{2} \left(B_{22}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} + B_{12}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} \right), \quad (7.8)$$

$$T_{12}^* = T_{21}^* = \frac{\delta^2}{2} B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\delta_1^2}{2} B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial x} \right), \quad (7.9)$$

$$M_1^* = \frac{\delta_2^3}{3} \left(B_{11}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} + B_{12}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} \right) + \\ + \frac{\delta_1^3}{3} \left(B_{11}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} + B_{12}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} \right), \quad (7.10)$$

$$M_2^* = \frac{\delta_2^3}{3} \left(B_{22}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} + B_{12}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\delta_1^3}{3} \left(B_{22}^* \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial \beta} + B_{12}^* \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial x} \right), \quad (7.11)$$

$$H^* = \frac{\delta_2^3}{3} B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\delta_1^3}{3} B_{66}^* \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1^{\circ}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial x} \right), \quad (7.12)$$

Система разрешающих уравнений (6.42) остается без изменений, а в системе (6.24) операторы $N_{13}(D_{ik} E_{ik})$, $N_{23}(D_{ik} E_{ik})$ и $N_{33}(D_{ik} E_{ik} K_{ik})$ равны нулю.

8. *Пример расчета.* Для иллюстрации хода расчета по предлагаемым теориям приводим один элементарный пример, который решаем с помощью второго варианта теории (см. п^о 7). Квадратная ($a=b$) двухслойная ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$) пластинка свободно оперта по всему контуру и несет распределенную нагрузку

$$Z = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Имеем:

а) для нижнего (первого) слоя

$$B'_{11} = B'_{22} = nE, \quad B'_{55} = B'_{44}, \quad B'_{12} = B'_{66} = 0, \quad \frac{B'_{11}}{B'_{55}} = \frac{B'_{22}}{B'_{44}} = k;$$

б) для верхнего (второго) слоя

$$B''_{11} = B''_{22} = E, \quad B''_{55} = B''_{44}, \quad B''_{12} = B''_{66} = 0, \quad \frac{B''_{11}}{B''_{55}} = \frac{B''_{22}}{B''_{44}} = k.$$

На основании приведенного из (4.5) для жесткостей имеем:

$$\begin{aligned} C &= C_{11} = C_{22} = \delta E(1+n), & C_{12} &= C_{66} = 0, \\ K &= K_{11} = K_{22} = \frac{\delta^2}{2} E(1-n), & K_{12} &= K_{66} = 0, \\ D &= D_{11} = D_{22} = \frac{\delta^3}{3} E(1+n), & D_{12} &= D_{66} = 0. \end{aligned}$$

Основная система разрешающих уравнений (6.42) для рассматриваемой задачи ($A=B=1$) имеет вид

$$\begin{aligned} C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\frac{\partial T_1^*}{\partial x}, & C \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - K \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -\frac{\partial T_2^*}{\partial y}, \\ D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - K \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) &= Z + \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Эта система после элементарных преобразований принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{Z}{G} + \frac{1}{G} \left[\frac{\partial^2 M_1^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{K}{C} \left(\frac{\partial^2 T_1^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2^*}{\partial y^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (A)$$

где

$$G = D - \frac{K^2}{C} = E \delta^3 \frac{1 + 14n + n^2}{12(1+n)}.$$

$M_1^* \dots T_2^*$, входящие в (А), определяются с помощью формул (7.7) — (7.11). Для φ_i^m , входящих в эти формулы, из (6.5) — (6.10) имеем

$$\varphi_1^{\circ} = -k\delta \left(\frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial x^2} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial x^3} \right),$$

$$\varphi_2^{\circ} = -k\delta \left(\frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial \beta^2} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial \beta^3} \right),$$

$$\varphi_1^* = k\delta \left(\frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial x^2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial x^3} \right),$$

$$\varphi_2^* = k\delta \left(\frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial \beta^2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial \beta^3} \right),$$

Перемещения u° , v° , w° определяются из вспомогательной системы дифференциальных уравнений (4.14), которая имеет следующий вид:

$$C \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial x^2} - K \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial x^3} = 0, \quad C \frac{\partial^2 v^{\circ}}{\partial \beta^2} - K \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial \beta^3} = 0,$$

$$D \left(\frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial \beta^4} \right) - K \left(\frac{\partial^3 u^{\circ}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v^{\circ}}{\partial \beta^3} \right) = Z.$$

Эта система, аналогично основной системе, тоже приводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial \beta^4} = \frac{Z}{G}. \quad (B)$$

На основании вспомогательной системы для φ_i^m получим

$$\varphi_1^{\circ} = -k \frac{\delta^2}{1+n} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial x^3}, \quad \varphi_2^{\circ} = -k \frac{\delta^2}{1+n} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial \beta^3},$$

$$\varphi_1^* = -k \frac{\delta^2 n}{1+n} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial x^3}, \quad \varphi_2^* = -k \frac{\delta^2 n}{1+n} \frac{\partial^3 w^{\circ}}{\partial \beta^3}.$$

Подставляя значения φ_i^m в (7.7) — (7.11), получим

$$T_1^* = 0, \quad M_1^* = -kE \frac{2}{3} \delta^5 \frac{n}{1+n} \frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial x^4},$$

$$T_2^* = 0, \quad M_2^* = -kE \frac{2}{3} \delta^5 \frac{n}{1+n} \frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial \beta^4}.$$

Подставляя значения $T_1^* \dots M_1^*$ в уравнение (А), окончательно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} = \frac{Z}{G} - \frac{8nk\delta^2}{1+14n+n^2} \left(\frac{\partial^6 w^{\circ}}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w^{\circ}}{\partial \beta^6} \right). \quad (C)$$

Для решения основного уравнения (С) необходимо знать значение w° , которое легко определяется из уравнения (В).

Решение уравнения (B) ищем в следующей форме:

$$w^0 = H \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Как известно [2], это w^0 удовлетворяет условиям свободного опирания.

Подставляя значения w^0 и Z в уравнение (B), для H^0 получим

$$H^0 = \frac{6q_0 a^4}{\pi^4 E \delta^3} \frac{1+n}{1+14n+n^2}$$

и окончательно для w^0 имеем

$$w^0 = \frac{6q_0 a^4}{\pi^4 E \delta^3} \frac{1+n}{1+14n+n^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подставляя значение w^0 в уравнение (C), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = & \frac{12(1+n)}{E \delta^3 (1+14n+n^2)} \left[Z + \right. \\ & \left. + \frac{8q_0 n k \pi^2}{1+14n+n^2} \frac{\delta^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right]. \end{aligned} \quad (D)$$

Решение этого уравнения, как и раньше, ищем в форме

$$w = H \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подставляя значения w и Z в уравнение (D), для H получим

$$H = \frac{6q_0 a^4 (1+n)}{\pi^4 E \delta^3 (1+14n+n^2)} \left[1 + \frac{8nk\pi^2}{1+14n+n^2} \frac{\delta^2}{a^2} \right]$$

и окончательно для w получим

$$w = w^0 \left[1 + \frac{8\pi^2 n}{1+14n+n^2} k \frac{\delta^2}{a^2} \right].$$

Рассматривая окончательное выражение w , замечаем, что второй член в скобках представляет поправку к гипотезе недеформируемых нормалей. Рассматривая поправку, замечаем, что она существенным образом зависит от относительной толщины пластинки $\left(\frac{\delta}{a}\right)$ и от отношения модуля упругости к модулю сдвига k . Она зависит также от отношения модулей упругости двух слоев (n). Безусловно, эта поправка зависит также от коэффициентов Пуассона, однако в рассмотренном примере это не видно, так как сначала же было принято, что коэффициенты Пуассона равны нулю.

Для наглядности приводим некоторые цифровые значения поправки в случае однородной ($n = 1$), изотропной ($k = 2$) и анизотропной ($k > 2$) пластинок.

Имея значения w и w^0 , нетрудно найти остальные расчетные величины задачи, однако на этом не останавливаемся, так как нашей целью была лишь иллюстрация хода расчета.

9. *Заключение.* В заключение отметим, что пределы применимости предлагаемых здесь теорий значительно шире пределов применимости теории, построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей.

Дело в том, что принятые здесь предположения о деформациях $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ значительно ближе к действительности, чем условия $e_{\alpha\gamma} = 0$ и $e_{\beta\gamma} = 0$, в особенности при малых значениях $G_{\alpha\gamma}$ и $G_{\beta\gamma}$, что имеет место во многих анизотропных материалах.

Следует отметить также, что, в отличие от теории построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей, точность предлагаемых теорий в значительной степени зависит не только от относительной толщины оболочки (δk_i), но и от отношений $\frac{B_{1k}}{B_{44}}$ и $\frac{B_{2k}}{B_{55}}$.

Укажем, что здесь, по сути дела, имеем последующее приближение, которое уточняет гипотезу недеформируемых нормалей.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 28 XI 1956

Ս. Ս. Համբարձումյան

**ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐՏՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՍԱՆ
ԵՐԿՈՒ ՄԵԹՈՂԻ ՄԱՍԻՆ**

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ արվում են երկշերտ օրտոտրոպ թաղանթների հաշվման երկու նոր տեսություն, որոնք, ի տարբերություն գոյություն ունեցող տեսությունների, չեն ընդունում զեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզը:

Այս աշխատության հիմքում դրված են հետևյալ ընդունելությունները՝

ա) Թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտները զեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունը:

բ) Սահբի $e_{\alpha\gamma}$ և $e_{\beta\gamma}$ զեֆորմացիաները որոշելու մամանակ ընդուն-

վում է, որ $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները չեն տարբերվում զեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների նիպոթեզի կիրառման ժամանակ ստացվող, համապատասխան շոշափող լարումներից:

Աշխատության մեջ բերվում է նաև երկրորդ, մոտավոր տեսությունը, որի կառուցման ժամանակ ընդունվում է $\rho\omega$) ընդունելությունը ձևափոխվում է այսպես՝ թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ, դժային էլեմենտները զեֆորմացիայից հետո մնում են դժային և չեն փոփոխում իրենց երկարությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. К расчету пологих оболочек. ПММ, XI, 5 (1947).
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат (1949).
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат (1953).
4. Амбарцумян С. А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, VIII, 5 (1948).
5. Амбарцумян С. А. Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Известия АН АрмССР, IV, 5 (1951).
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. АН СССР (1949).
7. Ерохин И. П. Исследование напряженного состояния в балках, составленных из материалов с разными модулями упругости. Труды ЛИИПС, 5 (1938).
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат (1947).
9. Григолюк Э. И. О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек. Инж. сборник, XVI (1953).
10. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз (1951).
11. Лурье А. И. Статика тонкостенных оболочек. Гостехиздат (1947).
12. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР (серия ФМЕ и Т наук), VI, 3 (1953).
13. Павлов Д. Ю. Об устойчивости биметаллических оболочек при нагреве. ПММ, XI, 6 (1947).
14. Амбарцумян С. А. К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек. ПММ, XVIII, 3 (1954).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. В. Пештмалджян

К расчету симметрично нагруженных слоистых
 анизотропных оболочек вращения

1. *Основные положения.* Будем рассматривать тонкую многослойную оболочку, собранную из произвольного числа ортотропных слоев, плоскости упругой симметрии которых взаимно параллельны. За координатную поверхность принимаем внешнюю поверхность с вогнутой стороны оболочки. Предполагается, что одна из плоскостей упругой симметрии параллельна внешним поверхностям оболочки, а остальные две — перпендикулярны координатным линиям $s = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ [4], совпадающим с линиями главной кривизны поверхности.

Как известно [1], расчет такой симметрично нагруженной оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны сводится к решению системы:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} V = \frac{P_1}{C_{11}} \frac{d^2 W}{ds^2} + \\ & + \frac{P_2 - P_1}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} - \left(\frac{P_3}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \frac{\Omega}{C_{11} R_2} \right) W + \Phi_1(s), \quad (1.1) \\ & \frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} - \frac{D_{22} - D_{22}^*}{D_{11} - D_{11}^*} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} W = - \frac{P_1}{\Omega (D_{11}^* - D_{11})} \frac{d^2 V}{ds^2} + \\ & + \frac{P_2 + P_1}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} + \left[\frac{P_3}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{D_{11} - D_{11}^*} \frac{1}{R_2} \right] V + \Phi_2(s), \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{r} \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r} F_1(s), \\ \Phi_2 &= \frac{1}{r} \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{1}{r (D_{11} - D_{11}^*)} F_2(s) - \\ & - \frac{K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}}{\Omega (D_{11} - D_{11}^*)} \frac{\sin \alpha}{r^2} F_1(s), \end{aligned}$$

$$F_1 = \sin \alpha \int_{s_0}^s r E_r ds + \cos \alpha \left(\frac{P_z}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right),$$

$$F_2 = -\cos \alpha \int_{s_0}^s r E_r ds + \sin \alpha \left(\frac{P_z}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right),$$

$$P_1 = K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}, \quad P_2 = K_{22} C_{11} - K_{11} C_{22}, \quad P_3 = K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}$$

$$\Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2, \quad D_{11} = \frac{K_{11}^2 C_{22} - 2K_{11} K_{12} C_{12} + K_{12}^2 C_{11}}{\Omega},$$

$$D_{12} = \frac{K_{11} K_{12} C_{22} - (K_{11} K_{22} + K_{12}^2) C_{12} + K_{22} K_{12} C_{11}}{\Omega},$$

$$D_{22} = \frac{K_{22}^2 C_{11} - 2K_{22} K_{12} C_{12} + K_{12}^2 C_{22}}{\Omega},$$

$$C_{ik} = \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m-1}) \quad K_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^2 - \delta_{m-1}^2),$$

$$D_{ik} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m-1}^3) \quad (i, k = 1, 2),$$

$$B_{11}^m = \frac{E_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{12}^m = \frac{E_1^m \mu_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m},$$

где E_1, E_2 — модули упругости вдоль главных направлений (s, φ);
 μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона;

P_z — значение главного вектора внешних сил, приложенных к границе параллельного круга;

E_r, E_z — радиальная и осевая проекции внешней силы [4];

δ_m — расстояние контактных поверхностей от координатной поверхности оболочки;

V и W — искомые функции, через которые выражаются все расчетные величины [1].

Усилия и моменты:

$$N_1 = -\frac{\sin \alpha}{r} V + \frac{1}{r} F_1 N_2 = \frac{dV}{ds} Q = \frac{\cos \alpha}{r} V + \frac{1}{r} F_2,$$

$$M_i = (D_{11} - D_{12}) \frac{dW}{ds} - (D_{12} - D_{22}) \frac{\sin \alpha}{r} W + \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \frac{dV}{ds} + \\ + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{r} (\sin \alpha V - F_1) \quad (A)$$

Перемещения:

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{1}{\Omega} \int \left[C_{22} \frac{\sin \alpha}{r} V + C_{12} \frac{dV}{ds} + (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}) \frac{\sin \alpha}{r} W - \right. \\
 & \left. - (K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}) \frac{dW}{ds} - C_{22} \frac{1}{r} F_1 \right] ds, \\
 w = & \frac{r}{\cos \alpha} \frac{1}{\Omega} \left[C_{12} \frac{\sin \alpha}{r} V + C_{11} \frac{dV}{ds} - \right. \\
 & \left. - (K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}) \frac{\sin \alpha}{r} W + (K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}) \frac{dW}{ds} - \right. \\
 & \left. - C_{12} \frac{1}{r} F_1 \right] + ur \operatorname{tg} \alpha.
 \end{aligned} \quad (B)$$

Напряжения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^m = & (-1)^i \frac{1}{\Omega} \left(\Delta_{i2}^m \frac{\sin \alpha}{r} V + \Delta_{i1}^m \frac{dV}{ds} \right) - (-1)^i \left[\frac{1}{\Omega} (K_{11} \Delta_{i2}^m - \right. \\
 & \left. - K_{12} \Delta_{i1}^m) + (-1)^i z B_{i1}^m \right] \frac{dW}{ds} + (-1)^i \left[\frac{1}{\Omega} (K_{12} \Delta_{i2}^m - K_{22} \Delta_{i1}^m) + \right. \\
 & \left. + (-1)^i z B_{i2}^m \right] \frac{\sin \alpha}{r} W - (-1)^i \frac{\Delta_{i2}^m}{\Omega} \frac{1}{r} F_1,
 \end{aligned} \quad (C)$$

где $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^m &= B_{11}^m C_{12} - B_{12}^m C_{11} & \Delta_{22}^m &= B_{22}^m C_{12} - B_{12}^m C_{22}, \\
 \Delta_{12}^m &= B_{11}^m C_{22} - B_{12}^m C_{12} & \Delta_{21}^m &= B_{22}^m C_{11} - B_{12}^m C_{12}.
 \end{aligned}$$

Если предположить, что выполняется условие

$$\frac{D_{22}}{D_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{C_{22}}{C_{11}} = K, \quad (1.2)$$

то с помощью некоторой комплексной функции [4]

$$\sigma = W + i \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} V \quad (1.3)$$

задача окончательно приводится к решению одного уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \sigma}{ds^2} \left(1 - \frac{iP_1}{\sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} \right) + \frac{d\sigma}{ds} \left(-1 + \frac{iP_1}{\sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} \right) \frac{\sin \alpha}{r} + \\
 + \sigma \left[\left(-K + \frac{iP_3}{\sqrt{C_{11} \Omega (D_{11} - D_{11}^*)}} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \right. \\
 \left. - \frac{i\sqrt{\Omega}}{\sqrt{C_{11} (D_{11} - D_{11}^*)}} \frac{\cos \alpha}{r} \right] = \Phi(s),
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

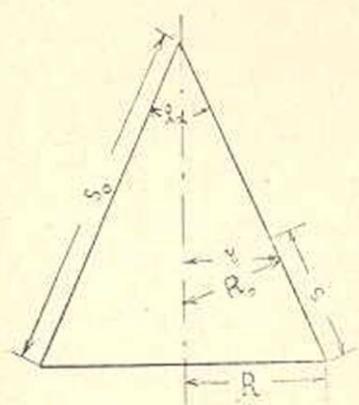
где

$$\Phi(s) = \Phi_2(s) + i\sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} \Phi_1(s).$$

Остановимся подробно на случаях конической и цилиндрической оболочек. Как и следует ожидать, задача сведется к решению уравнений такого же типа, как и в случае однородной оболочки [4].

В дальнейшем будем рассматривать однородные уравнения, так как нахождение частных решений не представляет трудностей.

2. *Коническая оболочка.* Учитывая, что в данном случае $\alpha = \text{const}$, $R_2 = \frac{\cos \alpha}{r}$, $r = (s_0 - s) \sin \alpha$ (фиг. 1), из (1.4) будем иметь:



Фиг. 1.

$$\frac{d^2 \tau}{ds^2} - \frac{1}{s_0 - s} \frac{d\tau}{ds} - \left[K \frac{1}{(s_0 - s)^2} + \beta R \frac{\text{ctg } \alpha}{s_0 - s} \right] \tau = \Psi(s), \quad (2.1)$$

где

$$\beta = \frac{k\Omega}{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2} \left\{ -P_1 + i\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} \right\}, \quad k = \frac{1}{R}.$$

R — радиус основания конуса,

$$\Psi(s) = \frac{1}{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2} \left\{ C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) \Phi_2(s) - C_{11}P_1\Phi_1(s) + i\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} [C_{11}\Phi_1(s) + P_1\Phi_2(s)] \right\}.$$

Если принять [4]

$$x = \frac{2\sqrt{(s_0 - s) \text{ctg } \alpha}}{\sqrt{\delta}} \quad \text{и} \quad \tau = \sqrt{x} \tau', \quad (2.2)$$

то (2.1) преобразуется к виду

$$\tau'' - \left[\left(4K - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x} + \delta R \beta \right] \tau = 0.$$

Получили одну из форм уравнения Бесселя, общий интеграл которого можно представить в виде [5]:

$$\tau = \sqrt{x} \left[C_1 I_{2\nu\sqrt{\delta R \beta}}(i\sqrt{\delta R \beta} x) + C_2 Y_{2\nu\sqrt{\delta R \beta}}(i\sqrt{\delta R \beta} x) \right], \quad (2.3)$$

где I_ν , Y_ν — функции Бесселя первого и второго рода индекса ν .

Ограничимся рассмотрением точек, достаточно удаленных от вершины конуса, при малом угле α . Тогда, вместе с x , аргумент бесселевых функций принимает большие значения, и для них будут справедливы асимптотические разложения. Для получения последних рассматриваем разложения функций Ханкеля, через которые I_ν и Y_ν выражаются следующим образом:

$$I_\nu = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}),$$

$$Y_\nu = \frac{1}{2i} (H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}).$$

Для функций Ханкеля имеем формулы [5]:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi)} \left[\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^m (\nu, m)}{(2iz)^m} + O(z^{-p}) \right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi)} \left[\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\nu, m)}{(2iz)^m} + O(z^{-p}) \right],$$

где

$$(\nu, m) = \frac{[4\nu^2 - 1^2][4\nu^2 - 3^2] \dots [4\nu^2 - (2m-1)^2]}{2^{2m} m!},$$

а символ $O(z^{-p})$ обозначает функцию порядка z^{-p} .

В зависимости от значений аргумента, учитывая требуемую точность, можно ограничиться определенным числом членов. Так, ограничиваясь одним слагаемым, с точностью $\frac{1}{z}$, для функций Бесселя получим:

$$I_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.4)$$

откуда для искомых функций V и W , в силу (2.2) и (2.3), будем иметь:

$$\begin{aligned} W = & E_1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(-\gamma\sqrt{R\delta}x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K}\pi\right) \operatorname{ch} \alpha\sqrt{R\delta}x + \\ & + F_1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(-\gamma\sqrt{R\delta}x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K}\pi\right) \operatorname{sh} \alpha\sqrt{R\delta}x + \\ & + E_2 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(-\gamma\sqrt{R\delta}x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K}\pi\right) \operatorname{ch} \alpha\sqrt{R\delta}x - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -F_2 \frac{1}{Vx} \cos \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{sh} \alpha \sqrt{R\delta} x, \quad (2.5) \\
 V = & \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}')}{C_{11}}} \left\{ F_1 \frac{1}{Vx} \cos \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \frac{\pi}{4} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{ch} \alpha \sqrt{R\delta} x - E_1 \frac{1}{Vx} \sin \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{sh} \alpha \sqrt{R\delta} x + F_2 \frac{1}{Vx} \sin \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{ch} \alpha \sqrt{R\delta} x + E_2 \frac{1}{Vx} \cos \left(-\gamma \sqrt{R\delta} x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} - \sqrt{K} \pi \right) \operatorname{sh} \alpha \sqrt{R\delta} x \right\}.
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{\frac{k\Omega[V C_{11} \Omega(D_{11} - D_{11}') + P_1^2 - P_1]}{2[C_{11} \Omega(D_{11} - D_{11}') + P_1^2]}}, \\
 \gamma &= \sqrt{\frac{k\Omega[V C_{11} \Omega(D_{11} - D_{11}') + P_1^2 + P_1]}{2[C_{11} \Omega(D_{11} - D_{11}') + P_1^2]}}.
 \end{aligned}$$

E, F — вещественные постоянные, которые определяются из краевых условий.

Имея значения V и W , по формулам (А, В, С) можем получить все расчетные величины.

Отметим случай изотропных слоев. Условие (1.2) в данном случае всегда имеет место; поэтому в самом общем случае решение выражается с помощью функций Бесселя индекса два.

$$\tau = \sqrt{x} [C_1 I_2(i\sqrt{\delta R} x) + C_2 Y_2(i\sqrt{\delta R} x)]. \quad (2.6)$$

Не налагаем никаких ограничений на рассматриваемые точки и угол конусности. Функции индекса два в решении (2.6) могут быть выражены через $I_1(i\sqrt{\delta R} x)$ и $I_0(i\sqrt{\delta R} x)$, которые табулированы для значений $|i\sqrt{\delta R} x| \leq 10$.

При больших значениях аргумента, как показывают вычисления, можно брать для бесселевых функций выражения (2.4). Тогда для искомых функций будем иметь:

$$\begin{aligned}
 W = & E_1 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + \\
 & + F_1 \frac{1}{Vx} \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + E_2 \frac{1}{Vx} \times \\
 & \times \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) - F_2 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x),
 \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}')}{C_{11}}} \left\{ F_1 \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) - \right. \\ \left. - E_1' \frac{1}{Vx} \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + F_2 \frac{1}{Vx} \times \right. \\ \left. \times \sin(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{ch}(\alpha \sqrt{\delta R} x) + E_2' \frac{1}{Vx} \cos(-\gamma \sqrt{\delta R} x) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{\delta R} x) \right\}.$$

Подобная задача была решена для двухслойной оболочки [3], но в процессе решения предполагалось, что коэффициенты Пуассона слоев одинаковы.

Рассмотрим для примера замкнутую коническую оболочку, состоящую из изотропных слоев и нагруженную по краю распределенными силой q и моментом m .

На краю $s = 0$ выполняются условия:

$$M_1 = m \quad Q \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = q. \quad (2.7)$$

Решение (2.6) с помощью соотношения

$$Y_2(z) = -i f_2^{(1)}(z) + i l_2(z)$$

можно представить в виде:

$$z = C_1 I_2(i \sqrt{\delta R} \beta x) + C_2 f_2^{(1)}(i \sqrt{\delta R} \beta x),$$

где C_1, C_2 — комплексные числа.

Чтобы решение оставалось конечным по всему протяжению оболочки, константа C_2 должна быть принята равной нулю [4].

Следовательно, будем иметь:

$$z = (A - iB) I_2(i \sqrt{\delta R} \beta x).$$

Представим функцию Бесселя индекса два через I_0 и I_1 с помощью рекуррентной формулы

$$I_2(z) = \frac{2}{z} I_1(z) - I_0(z), \quad \text{где} \quad z = i \sqrt{\delta R} \beta x = \rho e^{i\varphi}.$$

Введем обозначения:

$$\operatorname{Re}(I_0) = u_0(\rho, \varphi), \quad \operatorname{Im}(I_0) = v_0(\rho, \varphi),$$

$$\operatorname{Re}(I_1) = u_1(\rho, \varphi), \quad \operatorname{Im}(I_1) = v_1(\rho, \varphi).$$

Тогда

$$I_0(\rho e^{i\varphi}) = u_0(\rho, \varphi) + i v_0(\rho, \varphi),$$

$$I_1(\rho e^{i\varphi}) = u_1(\rho, \varphi) + i v_1(\rho, \varphi).$$

и окончательно для искомых функций получим:

$$W = A \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + B \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right], \\
 V = & \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \left\{ -B \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] + \right. \\
 & \left. + A \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя значения V и W в (2.7), учитывая при этом (A) и известные соотношения бесселевых функций

$$I_1(z) = -\frac{d}{dz} I_0(z) \quad \text{и} \quad z I_1'(z) + I_1(z) = z I_0'(z),$$

для определения A и B получим систему:

$$\begin{aligned}
 & A \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] - B \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] = \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} q s_0 \sin \alpha, \\
 & A \left\{ (D_{11} - D_{11}^*) \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \cos \varphi - \left(\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) v_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} u_0 \right] - \right. \\
 & \left. - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{s_0} \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) v_1 \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} v_0 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{s_0} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] \right\} + B \left\{ (D_{11} - D_{11}^*) \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) v_1 \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} v_0 \right] - \right. \\
 & \left. - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{s_0} \left[\frac{2}{\rho} v_1 \cos \varphi - \frac{2}{\rho} u_1 \sin \varphi - v_0 \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} \frac{d\rho}{ds} \left[\left(-\frac{4}{\rho^2} + 1 \right) u_1 \cos \varphi - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{4}{\rho^2} + 1\right) v_1 \sin \varphi + \frac{2}{\rho} u_0 \left] - \right. \\ \left. - \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{s_0} \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} \left[\frac{2}{\rho} u_1 \cos \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\rho} v_1 \sin \varphi - u_0 \right] \right] = m,$$

где всюду $s = 0$, а u и v — известные величины.

3. *Цилиндрическая оболочка.* Для цилиндрической оболочки $r = R = \text{const}$, $\alpha = \pi$. Исходное уравнение (1.3) может быть получено для этого случая без допущения (1.2). Следовательно, для любых комбинаций упругих постоянных слоев, из (1.3) будем иметь:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} - \beta^2 z = \Psi(s). \quad (3.1)$$

Решение этого уравнения получаем в виде

$$V = \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} [F_1 \theta_1(s) + E_1 \xi_1(s) + F_2 \theta(s) - E_2 \xi(s)], \\ W = E_1 \theta_1(s) - F_1 \xi_1(s) + E_2 \theta(s) + F_2 \xi(s), \quad (3.2)$$

где

$$\theta(x) = e^{-\alpha x} \cos \gamma x \quad \xi(x) = e^{-\alpha x} \sin \gamma x, \\ \theta_1(x) = e^{\alpha x} \cos \gamma x \quad \xi_1(x) = e^{\alpha x} \sin \gamma x.$$

Для расчетных величин из (A, B) получим

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} [(\alpha E_1 - \gamma F_1) \xi_1(s) + (\alpha F_1 + E_1 \gamma) \theta_1(s) + \\ + (\alpha E_2 - \gamma F_2) \xi(s) - (\alpha F_2 + \gamma E_2) \theta(s)],$$

$$Q = k \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} [F_1 \theta_1(s) + E_1 \xi_1(s) + F_2 \theta(s) - E_2 \xi(s)],$$

$$M_i = \left[(D_{ii} - D_{ii}^{\circ}) (E_i \alpha - F_i \gamma) + \frac{K_{i1} C_{12} - K_{i2} C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} (E_1 \gamma + \right. \\ \left. + \alpha F_1) \right] \theta_1(s) + \left[- (D_{ii} - D_{ii}^{\circ}) (F_i \alpha + E_i \gamma) + \right. \\ \left. + \frac{K_{i1} C_{12} - K_{i2} C_{11}}{\Omega} (E_1 \alpha - F_1 \gamma) \sqrt{\frac{\Omega (D_{11} - D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} \right] \xi_1(s) + \\ + \left[(D_{ii} - D_{ii}^{\circ}) (F_{2i} \gamma - E_2 \alpha) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{K_{12}C_{12} - K_{22}C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} (E_2\gamma + \alpha F_2) \Big] \theta(s) + \\
& + \left[-(D_{11} - D_{11}^*)(F_2\alpha + E_2\gamma) + \right. \\
& + \left. \frac{K_{12}C_{12} - K_{22}C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}{C_{11}}} (\alpha E_2 - \gamma F_2) \right] \xi(s), \\
\omega = & \frac{1}{k\Omega} \{ [\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} (\alpha F_1 + \gamma E_1) - P_1 (E_1\alpha - F_1\gamma)] \theta_1(s) + \\
& + [\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} (\alpha E_1 - \gamma F_1) + P_1 (\alpha F_1 + \gamma E_1)] \xi_1(s) - \\
& - [\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} (\alpha F_2 + \gamma E_2) + P_1 (F_2\gamma - E_2\alpha)] \theta(s) + \\
& + [\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} (\alpha E_2 - \gamma F_2) + P_1 (F_2\alpha + E_2\gamma)] \xi(s) \}.
\end{aligned}$$

Имея значения функций V и W , нетрудно определить зону распространения краевого эффекта. В выражениях (3.2) имеем функции типа $e^{\pm \alpha s} \cos \gamma s$ и $e^{\pm \alpha s} \sin \gamma s$, попарно убывающие при удалении от краев. Убывание этих функций определяется экспоненциальным множителем. Поэтому, с достаточной точностью, на расстоянии

$$s > s_0 = \pi \sqrt{\frac{2[C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*) + P_1^2]}{k\Omega[\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11} - D_{11}^*)} + P_1^2 - P_1]}} \quad (3.3)$$

от края можно пренебречь влиянием его на напряженное состояние в оболочке [4]. Из (3.3) легко получить формулы для симметрично собранной, однородной анизотропной и изотропной оболочек. Для этого достаточно подставить $K_{ik} = 0$ и соответствующие значения жесткостей изгиба и растяжения [2.4].

Рассмотрим для примера некоторые задачи цилиндрических оболочек.

Имеем длинную ($l \gg s_0$) цилиндрическую оболочку, по краям которой ($s = 0$, $s = l$) действуют перерезывающие усилия Q_1 , Q_2 и изгибающие моменты M_1 , M_2 .

Пренебрегая взаимным влиянием краев, определим постоянные E , F в формулах (3.2) через данные величины [2]. Получим

$$\begin{aligned}
E_1 &= A_1^* Q_1 + A_1^* M_1 & E_2 &= A_2^* Q_1 + A_2^* M_1, \\
F_1 &= B_1^* Q_1 + B_1^* M_1 & F_2 &= B_2^* Q_1,
\end{aligned}$$

где

$$A_i^* = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^*)}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}[\gamma\theta(s) + \alpha\xi(s)] - P_1[\alpha\theta(s) - \gamma\xi(s)]}{2\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})} + \gamma P_1},$$

$$A_i^{\circ} = \sqrt{\frac{C_{11}\Omega}{D_{11}-D_{11}^{\circ}}} \frac{(-1)^{i+1}\theta(s)}{2\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})} + \gamma P_1};$$

$$B_i^{\circ} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}} \frac{1}{\theta_1(s)} - \frac{\xi(s)}{\theta(s)} A_i^{\circ},$$

$$B_i^{\circ} = - \frac{\xi(s)}{\sqrt{C_{11}\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})\alpha + \gamma P_1}} \sqrt{\frac{C_{11}\Omega}{D_{11}-D_{11}^{\circ}}};$$

при $i=1$ подставляем $s=l$, а при $i=2$ подставляем $s=0$.

Для V и W получим следующие значения:

$$V = \sqrt{\frac{\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}{C_{11}}} \{ [B_1^{\circ}\theta_1(s) + A_1^{\circ}\xi_1(s)] Q_1^{\circ} + [B_1^{\circ}\theta_1(s) + A_1^{\circ}\xi_1(s)] M_1^{\circ} +$$

$$+ [B_2^{\circ}\theta(s) - A_2^{\circ}\xi(s)] Q_1^{\circ} - A_2^{\circ}\xi(s) M_1^{\circ} \},$$

$$W = [A_1^{\circ}\theta_1(s) - B_1^{\circ}\xi_1(s)] Q_1^{\circ} + [A_1^{\circ}Q_1(s) - B_1^{\circ}\xi_1(s)] M_1^{\circ} +$$

$$+ [A_2^{\circ}\theta(s) + B_2^{\circ}\xi(s)] Q_1^{\circ} + A_2^{\circ}\theta(s) M_1^{\circ}. \quad (3.4)$$

Отсюда при $M_1^{\circ} = Q_1^{\circ} = 0$ получим решение для полубесконечной цилиндрической оболочки с загруженным краем.

Выражения для расчетных величин, ввиду их громоздкости, не приводим.

Рассмотрим также бесконечный цилиндр, загруженный в сечении $s=0$ силами и моментами, равномерно распределенными по окружности сечения. Интенсивность силы q кг/см, а момента M кг.

При $s > 0$ будем иметь [5]:

$$V = \frac{q}{2k} \theta(s) - \frac{M}{2k} [\alpha\theta(s) + \gamma\xi(s)], \quad (3.5)$$

$$W = \frac{q}{2k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}} \xi(s) + \frac{M}{2k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}} [\gamma\theta(s) - \alpha\xi(s)],$$

при $s < 0$:

$$V = -\frac{q}{2k} \theta_1(s) - \frac{M}{2k} [\alpha\theta_1(s) - \gamma\xi_1(s)], \quad (3.6)$$

$$W = \frac{q}{2k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}} \xi_1(s) + \frac{M}{2k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^{\circ})}} [\gamma\theta_1(s) + \alpha\xi_1(s)].$$

Наконец, рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку.

ку, нагруженную силами и моментами, равномерно распределенными по окружности сечения [6], находящегося на расстоянии t от свободного конца оболочки.

Для получения решения суммируем результаты двух предыдущих задач со следующими изменениями: в (3.4) подставляем $M_1^* = Q_1^* = 0$, а M_1^* и Q_1^* принимаем равными по величине перерезывающей силе и моменту, возникающим в бесконечной оболочке в сечении $s = -t$, т. е.

$$Q_1^* = \frac{q}{2} \theta(t) + \frac{M}{2} [x\theta(t) + \gamma\xi(t)],$$

$$M_1^* = -\frac{q}{2k} \left\{ \sqrt{\frac{C_{11}(D_{11} - D_{11}^0)}{\Omega}} [\gamma\theta(t) - x\xi(t)] - \right.$$

$$\left. - \frac{P_1}{\Omega} [x\theta(t) - \gamma\xi(t)] \right\} -$$

$$-\frac{M}{2k} \left\{ \sqrt{\frac{C_{11}(D_{11} - D_{11}^0)}{\Omega}} [(\gamma^2 - x^2)\xi(t) + 2x\gamma\theta(t)] - \right.$$

$$\left. - \frac{P_1}{\Omega} [2x\gamma\xi(t) + (x^2 - \gamma^2)\theta(t)] \right\}.$$

Кроме того, начало координат смещаем влево на величину t .

В результате будем иметь:

при $0 \leq s_1 \leq t$:

$$V = \frac{q}{2} \left\{ -\frac{1}{k} \theta_1(s_1 - t) + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) \theta(t) - A_2^* \xi(s_1) \theta(t)] + \right.$$

$$\left. + \frac{A_2^*}{k} (D_{11} - D_{11}^0) \xi(s_1) [\gamma\theta(t) - x\xi(t)] - \frac{A_2^* P_1}{k} \sqrt{\frac{D_{11} - D_{11}^0}{C_{11}\Omega}} \xi(s_1) [x\theta(t) + \right.$$

$$\left. + \gamma\xi(t)] \right\} + \frac{M}{2} \left\{ -\frac{1}{k} [x\theta_1(s_1 - t) - \gamma\xi_1(s_1 - t)] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) - A_2^* \xi(s_1)] [x\theta(t) + \gamma\xi(t)] + \right.$$

$$\left. + A_2^* \frac{D_{11} - D_{11}^0}{k} \xi(s_1) [(\gamma^2 - x^2)\xi(t) + 2x\gamma\theta(t)] - \right.$$

$$\left. - A_2^* \frac{P_1}{k} \sqrt{\frac{D_{11} - D_{11}^0}{C_{11}\Omega}} \xi(s_1) [2x\gamma\xi(t) + (x^2 - \gamma^2)\theta(t)] \right\},$$

$$W = \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)}} \xi_1(s_1 - t) + [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta(t) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -A_2^* \frac{1}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11}-D_{11}^*)}{\Omega}} \xi_1(t) + \frac{P_1}{\Omega} \theta'(t) \right] + \quad (3.7) \\
& + \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}} [\gamma \theta_1(s_1-t) + \alpha \xi_1(s_1-t)] - \right. \\
& \quad \left. - [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta'(t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{A_2^*}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11}-D_{11}^*)}{\Omega}} (\alpha \xi'(t) - \gamma \theta'(t)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{P_1}{\Omega} (\alpha \theta'(t) + \gamma \xi'(t)) \right] \right\}, \\
& \text{при } t \leq s_1 \leq \infty:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{k} \theta(s_1-t) + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) \theta(t) - A_2^* \xi(s_1) \theta(t)] + \right. \\
& + \frac{A_2^*}{k} (D_{11}-D_{11}^*) \xi(s_1) [\gamma \theta(t) - \alpha \xi(t)] - \\
& - \frac{A_2^*}{k} P_1 \sqrt{\frac{D_{11}-D_{11}^*}{C_{11}\Omega}} \xi(s_1) [\alpha \theta(t) + \gamma \xi(t)] \left. \right\} + \\
& + \frac{M}{2} \left\{ -\frac{1}{k} [\alpha \theta(s_1-t) - \gamma \xi(s_1-t)] + \right. \\
& + \sqrt{\frac{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}{C_{11}}} [B_2^* \theta(s_1) - A_2^* \xi(s_1)] [\alpha \theta(t) + \gamma \xi(t)] + \\
& + A_2^* \frac{D_{11}-D_{11}^*}{k} \xi(s_1) [(\gamma^2 - \alpha^2) \xi(t) + 2\alpha\gamma \theta(t)] - \\
& - A_2^* \frac{P_1}{k} \sqrt{\frac{D_{11}-D_{11}^*}{C_{11}\Omega}} \xi(s_1) [2\alpha\gamma \xi(t) + (\alpha^2 - \gamma^2) \theta(t)] \left. \right\}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}} \xi(s_1-t) + [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta(t) - \right. \\
& - A_2^* \frac{1}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11}-D_{11}^*)}{\Omega}} \xi_1(t) + \frac{P_1}{\Omega} \theta'(t) \right] + \\
& + \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_{11}}{\Omega(D_{11}-D_{11}^*)}} [\gamma \theta(s_1-t) - \alpha \xi(s_1-t)] - \right. \\
& \quad \left. - [A_2^* \theta(s_1) + B_2^* \xi(s_1)] \theta'(t) - \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{A_2}{k} \theta(s_1) \left[\sqrt{\frac{C_{11}(D_{11} - D_{11}^*)}{\Omega}} (z z'(t) - \gamma \theta'(t)) + \frac{P_1}{\Omega} (z \theta'(t) + \gamma z'(t)) \right]$$

Заклучение, для иллюстрации хода расчета, рассмотрим один численный пример. Полубесконечная двухслойная цилиндрическая оболочка, радиуса R , нагруженная в сечении t кольцевой распределенной силой q . Общая толщина оболочки $\delta_2 = (1 + e) \delta_1$, где δ_1 — толщина внутреннего слоя, а e — отношение толщин слоев. Модуль упругости материала внутреннего слоя — $E_1 = E_2 = nE_s$, а наружного — $E_1 = E_s$, $E_2 = mE_s$.

Для простоты коэффициент Пуассона принимаем равным нулю. Тогда из формул (B, C) и (3.7), (3.8) получим:

$$\text{при } 0 \leq s_1 \leq t:$$

$$\omega = \frac{qz}{2k^2 C_{22}} [\xi_1(s_1 - t) - \theta_1(s_1 - t) - 3\theta(s_1) \theta(t) + \theta(s_1) \xi(t) + \theta(t) \xi(s_1) - \xi(s_1) \xi(t)],$$

$$\sigma_s^m = \left(\frac{K_{11}}{C_{11}} - z \right) \frac{qz B_{11}^m}{2k \sqrt{C_{22}(D_{11} - D_{11}^*)}} [\theta_1(s_1 - t) + \xi_1(s_1 - t) - \theta(s_1) \theta(t) - 3\theta(t) \xi(s_1) + \xi(t) \xi(s_1) + \xi(t) \theta(s_1)],$$

$$\sigma_r^m = \frac{B_{22}^m}{C_{22}} \frac{qz}{2k} [\xi_1(s_1 - t) - \theta_1(s_1 - t) + \theta(t) \xi(s_1) - 3\theta(t) \theta(s_1) + \xi(t) \theta(s_1) - \xi(t) \xi(s_1)],$$

$$\text{при } t \leq s_1 \leq \infty:$$

$$\omega = \frac{qz}{2k^2 C_{22}} [-\xi(s_1 - t) - \theta(s_1 - t) - 3\theta(s_1) \theta(t) + \theta(s_1) \xi(t) + \xi(s_1) \theta(t) - \xi(s_1) \xi(t)],$$

$$\sigma_s^m = \left(\frac{K_{11}}{C_{11}} - z \right) \frac{qz B_{11}^m}{2k \sqrt{C_{22}(D_{11} - D_{11}^*)}} [\theta(s_1 - t) - \xi(s_1 - t) - \theta(t) \theta(s_1) - 3\theta(t) \xi(s_1) + \xi(t) \xi(s_1) + \xi(t) \theta(s_1)],$$

$$\sigma_r^m = \frac{B_{22}^m}{C_{22}} \frac{qz}{2k} [-\xi(s_1 - t) - \theta(s_1 - t) + \theta(t) \xi(s_1) -$$

$$-3\theta(t)\theta(s_1) + \xi(t)\theta(s_1) - \xi(t)\xi(s_1],$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{C_{22}}{D_{11} - D_{11}^0}}, \quad C_{11} = E_s \delta_1 (e + n), \quad C_{22} = E_s \delta_1 (me + n),$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} E_s \delta_1^2 (n + 2e + e^2), \quad D_{11} - D_{11}^0 = \frac{n^2 + e^4 + 6ne^2 + 4ne + 4ne^3}{12(n + e)}$$

Зона распространения краевого эффекта определится по формуле:

$$s_0 = \frac{\pi \sqrt{R \delta_1}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n^2 + e^4 + 6ne^2 + 4ne + 4ne^3}{(me + n)(n + e)}}$$

Положим $t = 50$ см, $R = 1,5$ м, $\delta_1 = 1$ см, $e = 5$ и рассмотрим два случая: 1) $n = 10$, $m = 1$; 2) $n = m = 10$. Тогда $s_0^{(1)} = 69,41$ см, $s_0^{(2)} = 49,41$ см.

Результаты вычислений приведены в таблицах.

Значения $10^5 \frac{k}{q} \sigma_s^m$

		$n = 10, m = 1$								
s_1		0	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
Точки	1	0	-67	-71	+313	+1393	+243	-212	-289	-205
	2	0	-22	-23	+104	+464	+81	-70	-96	-68
	3	0	-2	-2	+10	+46	+8	-7	-9	-6
	4	0	+20	+21	-93	-417	-72	+63	+86	+61

$n = m = 10$

1	0	-74	-177	+2	+959	-5	-202	-125	-39
2	0	-24	-59	+0,6	+319	-1	-67	-41	-13
3	0	-2	-5	+0,06	+31	-0,1	-6	-4	-1
4	0	+22	+53	-0,6	-287	+1	+60	+37	+11

Значения $10^5 \frac{k}{q} \sigma_r^m$

		$n = 10, m = 1$								
s_1		0	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
I слой		+399	+103	-654	-1235	-1552	-1214	659	-245	-19
II слой		+39	+10	-65	-123	-155	-121	-65	-24	-1

$n = m = 10$

I и II слой		+88	+15	-113	-345	-231	-340	-106	+1	+22
-------------	--	-----	-----	------	------	------	------	------	----	-----

Значения $10^5 \frac{E_1 2k^2}{q} w$

s_1	0	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
$n=10$ $m=1$	+80	+21	-130	-247	-310	-242	-132	-35	-4
$n=10$ $m=10$	+17	+3	-22	-68	-105	-67	-21	+0,7	+4

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 21 I 1957

Ջ. Վ. Փեշտմալձյան

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողմածում քննարկվում են կամայական թվով օրթոտրոպ շերտերից կազմված պատման թաղանթները, որը նրանք ունեն գծային ծնիչներ և բևեռավորված են սիմետրիկ բևեռ:

Ընդհանուր դեպքում ստացված են լուծումներ գլանային և կոնական թաղանթների համար: Լուծված են մի շարք խնդիրներ: Բերված է մեկ թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН Армянской ССР, VI, 3 (1953).
2. Амбарцумян С. А. Длинные анизотропные оболочки вращения. Известия АН Армянской ССР, IV, 6 (1951).
3. Григолоук Э. И. Уравнения осесимметричных биметаллических упругих оболочек. Инж. сборник, XVIII (1954).
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат (1947).
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Издат. ин. лит. (1949).
6. Амбарцумян С. А. К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, подкрепленных поперечными ребрами. Известия АН СССР, ОТН, 12 (1955).

Г. А. Гурзаян

Определение плотности атмосферы Луны по
данным радиоизлучения Солнца

§ 1. Введение

Гипотеза о существовании атмосферы у Луны была высказана Пикерингом, а также Кроммелином и Ла Пазом [1]. Впоследствии были предприняты попытки оценить плотность атмосферы Луны или ее полную массу различными способами [1—6]. Эти оценки оказались сильно отличающимися друг от друга; расхождения между отдельными определениями доходили до 4—5 порядков. При таком состоянии вопроса поиски новых путей и разработка новых методов определения плотности атмосферы Луны являются крайне желательными. В настоящей статье мы остановимся на одном новом методе оценки плотности атмосферы Луны, основанном на некоторых особенностях радиоизлучения Солнца во время солнечных затмений.

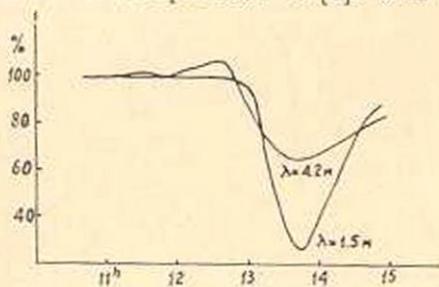
Во время некоторых солнечных затмений было замечено любопытное явление увеличения суммарного излучения Солнца в радиочастотах (особенно в дециметровом и метровом диапазонах), около первого и последнего контактов. В таких случаях увеличение составляет от нескольких процентов до 10—15% от средней интенсивности незатменного Солнца и значительно превышает вероятную ошибку измерения. Указанное явление наблюдалось не при всех солнечных затмениях, но в тех случаях, когда оно наблюдалось, достоверность его трудно поставить под сомнение или пытаться объяснить случайными причинами. Самым убедительным примером в настоящее время нужно считать результаты наблюдений, проведенных Ребером и сотрудниками на волне $\lambda = 65$ см во время полного солнечного затмения 12 сентября 1951 г. [7]. На фиг. 1а приведен



Фиг. 1а.

полученный Ребером ход изменения радиоизлучения Солнца во время затмения. На этой фигуре отчетливо виден прирост радиоизлучения около первого и последнего контактов; он составляет около 15% при первом контакте и около 10%—при втором. Во время этого же затмения были получены изменения интенсивностей на волнах $\lambda = 3$ см и $\lambda = 10$ см, но указанное явление для этих волн не было обнаружено.

Дениссе с сотрудниками производили наблюдение на двух волнах, $\lambda = 1.78$ м и $\lambda = 3.12$ см, во время частного солнечного затмения 1 сентября 1951 г. [8]. Они обнаружили прирост радиоизлучения



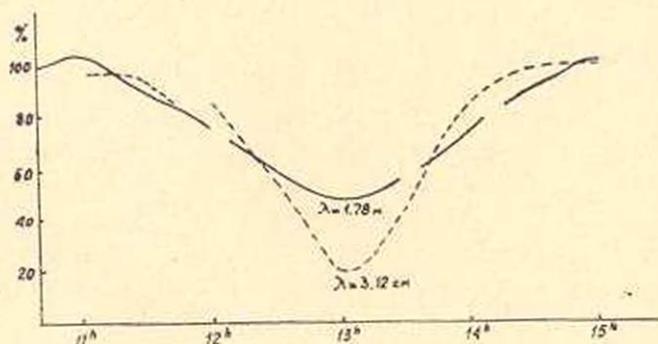
Фиг. 16.

для $\lambda = 1.78$ м в размере около 8% в начале и около 2% в конце затмения (фиг. 16). На волне $\lambda = 3.12$ см прирост не был обнаружен.

В. А. Санамян и Г. А. Еркикян в Бюраканской обсерватории производили наблюдения на волнах $\lambda = 4.2$ м и $\lambda = 1.5$ м во время частного солнечного затмения 30 июня 1954 г. [9]. Их измерения да-

ли прирост радиоизлучения в размере около 6% в начале затмения для волны $\lambda = 4.2$ м (фиг. 16). Для $\lambda = 1.5$ м, в пределах ошибок измерения ($\sim 2\%$)*, прирост не был обнаружен**.

Мы здесь привели те случаи, когда увеличение интенсивности радиоизлучения при первом или последнем контактах наблюдалось-



Фиг. 1в.

Наряду с этим имеются случаи, когда указанное явление или совсем не было обнаружено, или же было выражено очень слабо. Это можно иллюстрировать примером наблюдений Христиансена и Хиндмана, проведенных на волне $\lambda = 50$ см во время частного солнечного затмения 1 ноября 1948 г. в Австралии [10]. Имея в виду высокую точность и тщательность их наблюдений, отсутствие прироста интенс-

* Устное сообщение.

** Как любезно сообщил нам В. В. Виткевич, наблюдения экспедиции ФИАН во время того же затмения на волне 1.5 м также не дали прироста в начале затмения.

ности радиоизлучения при контактах на этой волне следует считать достоверным. Поскольку достоверными являются также результаты вышеупомянутого наблюдения Ребера на волне, близкой к $\lambda = 50$ см, то отсюда приходится сделать вывод о непостоянстве указанного явления, по крайней мере для полуметровых волн. Наблюдения, проведенные на волне $\lambda = 10$ см Пиддингтоном и Хиндманом во время того же затмения (1 ноября), также не дали прироста радиоизлучения [11].

Нужно заметить, что недостаточная точность и невысокие качества наблюдений в ряде случаев не дают возможность сделать уверенный вывод о наличии или отсутствии указанного явления. Это особенно относится к более ранним наблюдениям. Тем не менее приведенные примеры позволяют констатировать в настоящее время следующие факты:

а) во время солнечных затмений (полных или частных) иногда имеет место увеличение (прирост) интенсивности радиоизлучения при первом и последнем контактах для волн $\lambda > 50$ см;

б) относительная величина самого прироста для данной волны непостоянна и меняется со временем (от затмения к затмению);

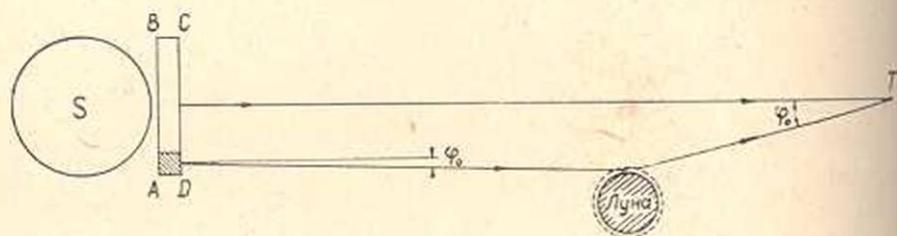
в) увеличение интенсивности радиоизлучения обычно больше при первом контакте и меньше при втором.

Реберу и Беку принадлежит первая попытка объяснить увеличение интенсивности радиоизлучения Солнца во время затмения положим отражением радиоволн от лунной поверхности [12]. Однако Линк показал несостоятельность этой гипотезы с количественной точки зрения и выдвинул свою гипотезу об увеличении интенсивности радиоизлучения под влиянием рефракции радиоволн в лунной ионосфере [13]. Эту последнюю гипотезу следует считать более правдоподобной. Однако она нуждается в количественной разработке, чего не было сделано Линком. Нами предпринята такая попытка, в частности, с целью оценить величину плотности атмосферы Луны.

§ 2. Рефракция радиоволн в лунной атмосфере

Увеличение интенсивности радиоизлучения в начале и в конце солнечного затмения под влиянием рефракции радиоволн в лунной ионосфере становится понятным из приведенной схематической фиг. 2. Пусть Солнце S излучает по направлению к точке T на Земле радиоволны равномерно и постоянно по диску, т. е. распределение интенсивности радиоизлучения по диску представляется прямоугольником $ABCD$. Полная интенсивность, принимаемая нашей антенной вне затмения, равна объему цилиндра с основанием, равным площади диска и высотой AD , представляющему собой сумму интенсивностей прямых лучей, направленных к Земле. Однако как только видимый край Луны во время затмения приближается к видимому краю Солнца, исходящие от Солнца некоторые косые лучи, подвергаясь искривлению — рефракции — из

тонком слое ионосферы Луны, также направляются к наблюдателю T на Земле. Таким образом, наряду с полной интенсивностью „прямых“ лучей наша антенна около первого и последнего контактов будет принимать дополнительную интенсивность преломленных лучей, исходящих от некоторой части диска, прилегающей к ее периферии. Так получается увеличение интенсивности радиоизлучения около контакта затмения. Очевидно, оно будет тем больше, чем больше угол φ_0 (на-



Фиг. 2.

зовем его полным углом рефракции), а этот последний зависит, в частности, от показателя преломления μ различных слоев лунной ионосферы, т. е. в конечном счете от распределения электронной плотности N . Этим устанавливается связь между приростом интенсивности радиоизлучения Солнца в данной волне и электронной плотностью ионосферы Луны. Отсюда, с помощью дополнительных соображений, уже нетрудно перейти к определению количества молекул в 1 см^3 атмосферы Луны, т. е. к определению ее плотности. В этом и заключается сущность нашего метода.

При всей простоте явления, количественная разработка поставленной задачи встречает ряд серьезных трудностей. Строение ионосферы, даже в самом простом случае, определяется многими параметрами. Простейший — „параболический“ — ионосферный слой, например, определяется высотой максимума слоя от поверхности h_m , полутолщиной слоя, максимальной электронной плотностью N_m на высоте h_m , приведенной высотой атмосферы H и т. д. Эти параметры обычно определяются специальными экспериментами, что в настоящее время невозможно поставить в отношении Луны. Приходится поэтому предварительно задавать форму слоя и путем разумных допущений уменьшать число произвольных параметров. Так, например, учитывая большую разреженность атмосферы Луны по сравнению с атмосферой Земли, можно исключить возможность существования более или менее резких границ ионосферного слоя и задать распределение электронов в экспоненциальном виде:

$$N = N_m e^{-\left(\frac{h-h_m}{H}\right)^2} \quad (1)$$

где толщина ионосферного слоя уже отсутствует. В (1) N есть коли-

чество свободных электронов в 1 см^3 на высоте h от поверхности Луны.

Приняв слой в виде (1), переходим к выводу наших основных уравнений, определяющих полный угол рефракции φ_0 .

Здесь следует заметить, что угол φ' между косыми и прямыми радиолучами, исходящими от Солнца, по своей величине примерно в 400 раз меньше угла φ_0 . Поэтому, при выводе уравнения траектории радиолуча в лунной ионосфере, мы можем падающие от Солнца на лунную атмосферу косые радиолучи принять параллельными к радиолучам, направленным непосредственно от Солнца к Земле.

Обозначим через μ показатель преломления среды на высоте h от поверхности Луны. Имеем, учитывая также (1):

$$\mu^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\pi m f^2} \times 10^{-12} = 1 - a_f \cdot e^{-\left(\frac{h-h_m}{H}\right)^2} \quad (2)$$

где
$$a_f = \frac{N_m e^2}{\pi m f^2} \times 10^{-12} \quad (3)$$

Здесь m и e — масса и заряд электрона, f — частота радиоволны в МГц-ах.

Уравнение траектории луча в плоскости, проходящей через центр Луны, с учетом рефракции, будет:

$$r \mu \sin i = p, \quad (4)$$

где i — угол падения луча в данной точке, p — расстояние от центра Луны до прямой, по которой движется луч на расстоянии $r = \infty$ со стороны Солнца (фиг. 3). Представим r в виде суммы $r = R + h$, где R — радиус Луны, а h равен, из (2):

$$h = h_m + H \left[\text{Mod} \lg \frac{a_f}{1 - \mu^2} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

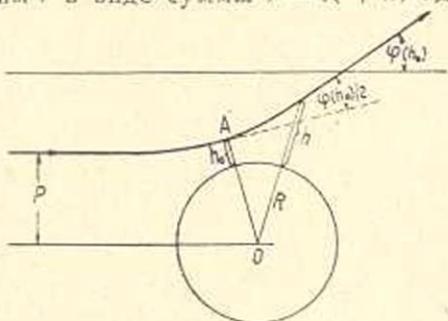
Теория рефракции дает следующее выражение для определения изменения направления распространения луча в диспергирующей среде φ :

$$\frac{d\varphi}{dh} = -\frac{1}{\mu} \lg \mu. \quad (6)$$

Обозначим значения h и μ в точке поворота луча A , где $i = \frac{\pi}{2}$ соответственно, через h_0 и μ_0 . Тогда μ_0 будет решением уравнения:

$$\mu_0 \left[R + h_m + H \left(\text{Mod} \lg \frac{a_f}{1 - \mu_0^2} \right)^{1/2} \right] = p. \quad (7)$$

Прежде чем луч дойдет до этой точки, он изменяет свое первоначальное



Фиг. 3.

чальное направление на угол $\frac{\varphi(p)}{2}$. Поскольку траектория луча симметрична относительно точки поворота A , то будем иметь из (6) и (4) для полного угла изменения направления луча $\varphi(p)$:

$$\varphi(p) = 2p \int_1^{p_0} \frac{1}{V(R+h)^2 \mu^2 - p^2} \frac{d\mu}{\mu}, \quad (8)$$

где принято $\mu = 1$ на бесконечности ($h \rightarrow \infty$). Определение $\varphi(p)$ производится численным интегрированием (8) для заданного значения h_m , H и a_f , используя при этом также соотношения (5) и (7).

Для различных значений p мы получим разные $\varphi(p)$. Минимальное значение $\varphi(p)$ имеет место, теоретически, при $p \rightarrow \infty$ или при $h \rightarrow \infty$ и равно: $\varphi(\infty) = 0$. Максимальное значение $\varphi(p)$ определяется из условия:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[p \int_1^{\mu(p)} \frac{1}{V(R+h)^2 \mu^2 - p^2} \frac{d\mu}{\mu} \right]_{p=p_0} = 0 \quad (9)$$

и равно $\varphi(p_0)$. Нас интересует, в конечном счете, величина того угла φ_0 , где все косые лучи, после искривления в лунной ионосфере, направляются к Земле. Очевидно, этот угол — угол полной рефракции — будет равен:

$$\varphi_0 = \varphi(p_0) - \varphi(\infty) = \varphi(p_0). \quad (10)$$

Перед тем, как перейти к конкретным вычислениям, целесообразно сделать одно существенное упрощение. Интегрирование выражения (8), как видим, приходится выполнять численно только потому, что h в подынтегральной функции сложным образом зависит от μ (с помощью (5)). Но из этого же выражения одновременно видно, что h изменяется очень медленно в зависимости от μ , и поэтому мы можем принять h за постоянную величину. С другой стороны, экспоненциальный характер зависимости h от μ приводит к тому, что μ становится равным единице не на бесконечности, как это следует теоретически, а уже при небольших в сравнении с радиусом Луны R значениях h . Тогда, пренебрегая h в сравнении с R в подынтегральной функции и выполняя интегрирование, найдем из (8):

$$\varphi(p_0) = 2 \operatorname{arc} \cos \mu(0). \quad (11)$$

Решение (11) относится, таким образом, к случаю $h_m \ll R$. Примем в дальнейшем $h_m = 0$, т. е. максимум слоя находится прямо на поверхности Луны (что, как увидим в § 4, соответствует действительности). Тогда максимальный угол рефракции мы получим при $h = 0$, т. е. когда луч проходит мимо поверхности с показателем преломления $\mu(0) = (1 - a_f)^{1/2}$. Это одновременно будет максимальным отклонением

луча и, в силу соотношения (10), полный угол рефракции φ_0 будет:

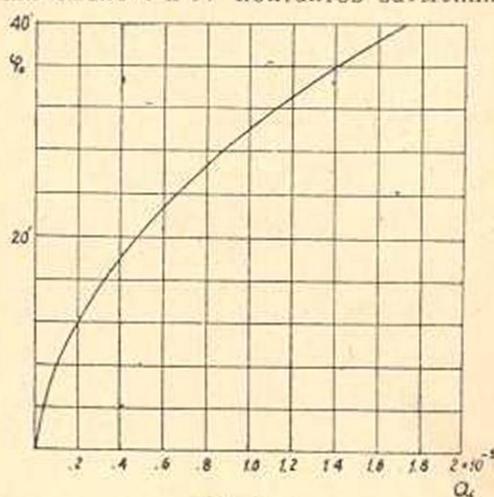
$$\varphi_0 = 2 \arccos(1 - a_f)^{1/2}. \quad (12)$$

На фиг. 4 и 5 приведены кривые φ_0 как функция a_f . Первая фигура относится к значениям a_f порядка 10^{-5} , вторая — порядка 10^{-7} .

§ 3. Сравнение с наблюдениями

Сравнение теории с наблюдениями преследует цель нахождения того полного угла рефракции φ_0 , при котором теоретическое значение роста интенсивности радиоизлучения около I и IV контактов затмения

равняется наблюдаемому значению. При решении этой части задачи необходимо знать распределение интенсивности радиоизлучения по диску Солнца в данной волне. Известно, что закон распределения радиояркости по диску Солнца сильно отличается при переходе от одной длины волны к другой. В то время, когда для очень коротких — сантиметровых волн это распределение по своей форме напоминает распределение яркости в оптических лучах, т. е. максимум в центре, а минимум на краях диска, для дециметровых волн картина совершенно противоположная — максимум на краях, минимум — в центре диска. В диапазоне метровых волн характер распределения опять меняется — максимум в центре, минимум — на краях, но с одной существенной особенностью, заключающейся в том, что для волн этого диапазона так называемый радиодиаметр значительно превосходит оптический диаметр Солнца. Все указанные особенности в распределении радиояркости по диску Солнца в настоящее время в основном получили свою теоретическую интерпретацию.



Фиг. 4.

равняется наблюдаемому значению. При решении этой части задачи необходимо знать распределение интенсивности радиоизлучения по диску Солнца в данной волне. Известно, что закон распределения радиояркости по диску Солнца сильно отличается при переходе от одной длины волны к другой. В то время, когда для очень коротких — сантиметровых волн это распределение по своей форме напоминает распределение яркости в оптических лучах, т. е. максимум в центре, а минимум на краях диска, для дециметровых волн картина совершенно противоположная — максимум на краях, минимум — в центре диска. В диапазоне метровых волн характер распределения опять меняется — максимум в центре, минимум — на краях, но с одной существенной особенностью, заключающейся в том, что для волн этого диапазона так называемый радиодиаметр значительно превосходит оптический диаметр Солнца. Все указанные особенности в распределении радиояркости по диску Солнца в настоящее время в основном получили свою теоретическую интерпретацию.

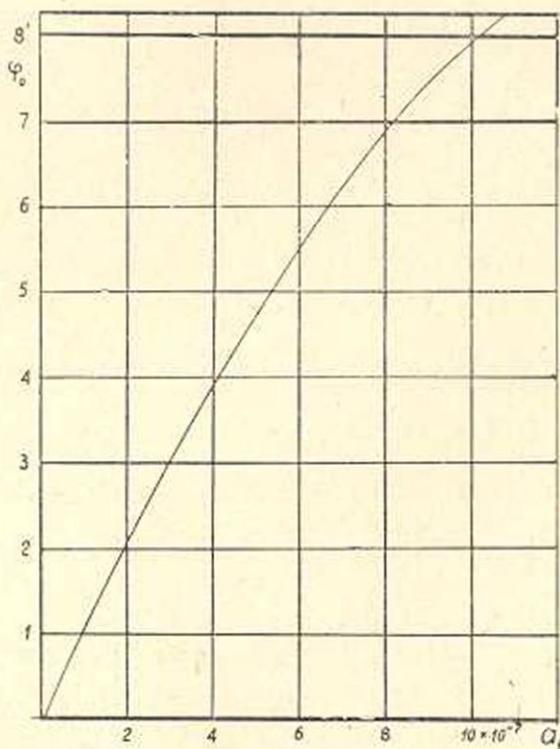
Следует отметить также, что даже для данной волны, закон распределения радиояркости по диску Солнца может меняться со временем. Это вызывает уже дополнительное затруднение при вычислении теоретического хода изменения радиояркости во время затмения с учетом рефракции радиоволн в лунной ионосфере. Однако мы не будем учитывать эти изменения.

Предполагая, что имеется сферическая симметрия в распределении интенсивностей по диску Солнца, обозначим через $I(\rho)$ интенсивность радиоизлучения в данной волне на расстоянии ρ (в минутах дуги) от его центра. Полная интенсивность E_0 , которую принимает наша антенна от всего диска до затмения, очевидно, будет:

$$E_0 = 2\pi \int_0^{p_0} I(p) p dp. \quad (13)$$

где p_0 — «радиорadius» Солнца в данной волне.

Обозначим через Δ расстояние лунного края от центра диска Солнца. Значению $\Delta = p$ соответствует момент первого, а $\Delta = -p$ —



Фиг. 5.

момент IV контактов радиозатмения. Уменьшение радиояркости во время затмения без учета рефракции и поглощения радиоволн в лунной ноосфере представляется, как это не трудно вывести, следующей формулой:

$$E(\Delta) = 2 \int_{\Delta}^{p_0} I(p) p \arccos \left[\frac{p^2 + (p_A + \Delta)^2 - p_A^2}{2p(p_A + \Delta)} \right] dp, \quad (14)$$

где p_A — видимый радиус Луны. Ход изменения радиояркости во время затмения, очевидно, представится формулой:

$$I(\Delta) = E_0 - E(\Delta). \quad (15)$$

Это выражение представляет собой плавно изменяющуюся кри-

вую и не дает никаких „выступов“ ни в начале и ни в конце затмения.

Однако, из-за рефракции радиоволн в лунной атмосфере, до земного наблюдателя доходит еще некоторое добавочное излучение от дугообразной области, находящейся около проекции лунного края на диск Солнца, указанной на фиг. 6 штриховкой. Ширина этой дугообразной области, — назовем ее „областью рефракции“, — определяется полным углом рефракции φ_0 , и тем больше, чем больше величина параметра a_f в формуле (2).

Обозначая через $\delta I(\Delta)$ рост интенсивности радиоизлучения, вызванный рефракцией, будем иметь (см. фиг. 6):

$$\delta I(\Delta) = 2\varphi_0 \left(\rho_\Delta + \frac{\varphi_0}{2} \right) \int_0^{\theta_0} I(\rho) d\theta, \quad (16)$$

где $I(\rho)$ есть средняя по ширине дуги интенсивность на расстоянии ρ от центра диска Солнца, и

$$\rho = \rho_\Delta \left[\left(1 + \frac{\varphi_0}{2\rho_\Delta} \right) + \left(1 + \frac{\Delta}{\rho_\Delta} \right)^2 - 2 \left(1 + \frac{\Delta}{\rho_\Delta} \right) \left(1 + \frac{\varphi_0}{2\rho_\Delta} \right) \cos \theta \right]^{1/2}, \quad (17)$$

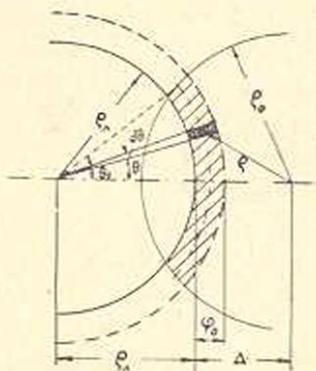
$$\theta_0 = \arccos \left[\frac{1 + \left(1 + \frac{\Delta}{\rho_\Delta} \right)^2 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_\Delta} \right)^2}{2 \left(1 + \frac{\Delta}{\rho_\Delta} \right)} \right].$$

Ход изменения радиояркости во время затмения с учетом рефракции радиоволн в лунной ионосфере, как функция от величины полного угла рефракции φ_0 , представляется следующим выражением:

$$I(\Delta, \varphi_0) = 2\pi \int_0^{\rho_0} I(\rho) \rho d\rho + 2\varphi_0 \left(\rho_\Delta + \frac{\varphi_0}{2} \right) \int_0^{\theta_0} I(\rho) d\theta -$$

$$- 2 \int_0^{\rho_0} I(\rho) \rho \arccos \left[\frac{\rho^2 + (\rho_\Delta + \Delta)^2 - \rho_\Delta^2}{2\rho_\Delta(\rho_\Delta + \Delta)} \right] d\rho. \quad (18)$$

Здесь мы не учитывали влияние экранирования части солнечного диска со стороны ионосферы Луны. Дело в том, что выражение (18) включает в себе излучение незатменной части солнечного диска полностью (последний член). Между тем тонкий слой около лунной поверхности, толщина которого определяется эффективной высотой ионосферы, искривляет в результате рефракции те прямые лучи от Солнца, которые при отсутствии рефракции свободно дошли бы до зем-



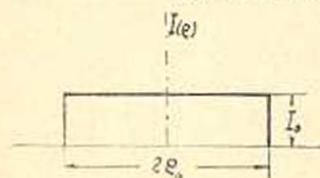
Фиг. 6.

ного наблюдателя. В результате остаточная интенсивность будет несколько меньше, чем это дается выражением (18). Учет этого эффекта эквивалентен некоторому увеличению видимого радиуса Луны в момент затмения. Однако, как увидим ниже, влияние этого фактора невелико, и его можно в первом приближении не учитывать.

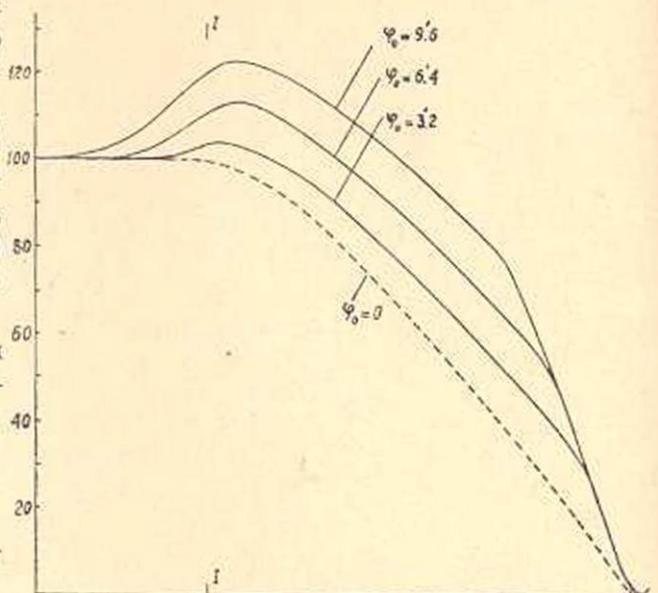
Вычисление интегралов, входящих в (18), можно производить численным или графическим способами, задавая вид функции $I(\rho)$ для каждого частного случая отдельно.

Рассмотрим сначала самый простой случай, а именно прямоугольное

распределение функции $I(\rho)$ по ρ (фиг. 7). В этом случае $I(\rho) = I_0 = \text{const}$. Теоретические кривые изменения интенсивности радиоизлучения, вычисленные по (18) для различных значений φ_0 , представлены на фиг. 8. Пунктиром обозначен ход измене-

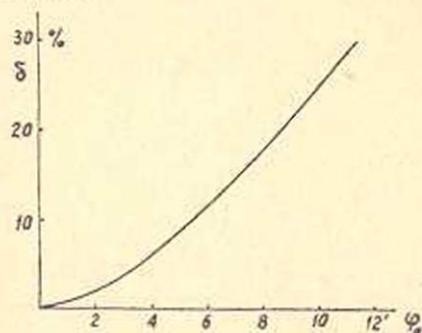


Фиг. 7.



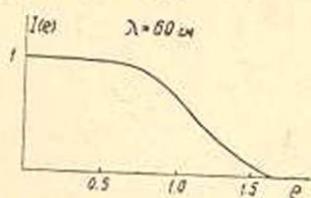
Фиг. 8.

ния интенсивности во время затмения без учета рефракции ($\varphi_0 = 0$). На фиг. 9 приведена зависимость максимального роста интенсивности δ , выраженного в долях интенсивности внезатменного Солнца, от полного угла рефракции φ_0 .



Фиг. 9.

Переходим к более реальным случаям распределения функции $I(\rho)$. В качестве при-

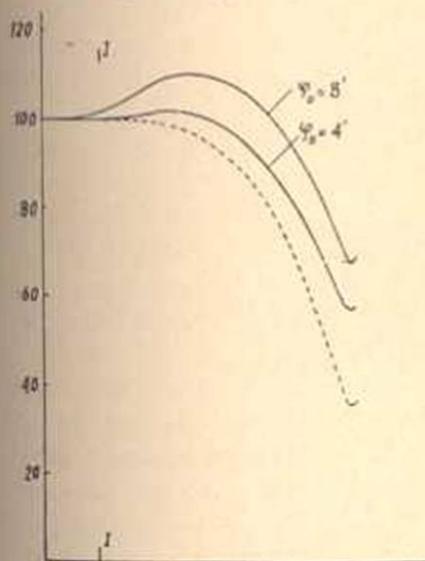


Фиг. 10.

мера рассмотрим распределение, даваемое Станьером для волны $\lambda = 60$ см (фиг. 10) [14]. Эта кривая, между прочим, не совпадает с тем, что теоретически вычислено многими исследователями; согласно

фиг. 10, максимум интенсивности имеется в центре диска, между тем по теории максимум должен быть на краях диска (см., например, [15, 16]).

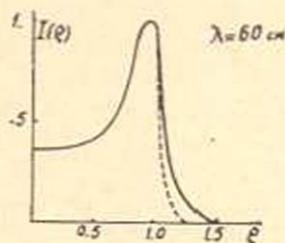
Вычисленные по фиг. 10 кривые изменения интенсивности для двух значений φ_0 , а именно $\varphi_0 = 4'$ и $\varphi_0 = 8'$, представлены на фиг. 11. Сравнивая это с тем, что мы имеем по наблюдениям Ребера для волны $\lambda = 65$ см (фиг. 1а) замечаем, что хотя в начале затмения имеет место рост интенсивности, остаточная интенсивность при максимальной фазе затмения (полное затмение) очень велика — около 70%, в то время как у Ребера она более чем в два раза меньше ($\sim 30\%$). Это



Фиг. 11.

указывает на то, что распределение, данное Станьером для $\lambda = 60$ см, не соответствует действительности.

Мы повторили вычисления для случая теоретического распределения, данного Смердом [15]. Это распределение представлено на фиг. 12 (сплошная линия, являю-

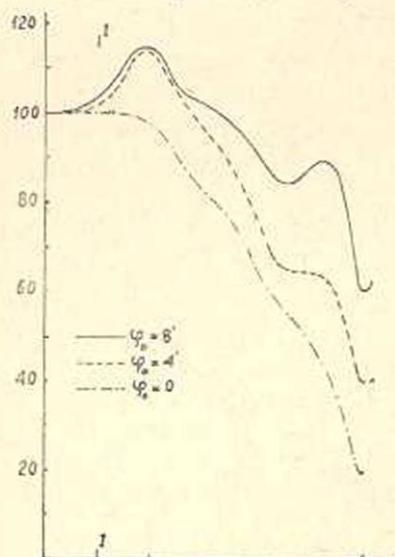


Фиг. 12.

щаяся интерполяционной между волнами $\lambda = 75$ см и $\lambda = 50$ см). Ход изменения интенсивности радионизлучения с учетом рефракции ($\varphi_0 = 8'$), вычисленный для этого случая, представлен на фиг. 13 сплошной линией. Из этой фигуры следует, что хотя данное Смердом распределение более близко подходит к результатам наблюдений Ребера (даже в некоторых деталях), разница между теоретической и наблюдаемой остаточными интенсивностями по-прежнему остается большой. Незначительное изменение, вносимое в распределение Смерда (пунктирная линия на фиг. 12), делает это различие еще меньшим (пунктир на фиг. 13). По-видимому, теоретическое распределение, данное И. С. Шкловским и О. Б. Пикельнером, ближе к действительности [16].

Отмечая важность учета рефракции при выводе закона распределения радиояркостности из данных наблюдений, произведенных во время солнечных затмений, укажем также, что характер этого распределения сравнительно мало влияет на величину относительного роста интенсивности в начале (или в конце) затмения. Относительный рост интенсивности в основном зависит от величины полного угла рефракции φ_0 . Для рассмотренного здесь случая $\lambda = 60-65$ см мы нашли этот

угол приблизительно равным $\varphi_0 = 8'$; при таком угле рост составляет около 15% , т. е. такой, какой наблюдал Ребер. Учитывая даже экранирующее действие лунной ионосферы, которое приводит к увеличению этого угла, мы можем утверждать, что φ_0 не может превышать $10'$ для волны $\lambda = 65$ см. Эта оценка не может считаться окончательной, так как она относится к данному конкретному случаю затмения. Кроме того, как следует из приведенных выше формул, полный угол рефракции φ_0 увеличивается с переходом к длинным волнам, что приводит к увеличению роста интенсивности в длинных волнах. Но в этих волнах радиодиаметр Солнца значительно превышает его опти-



Фиг. 13.

ческий диаметр. Учет последнего факта приводит к уменьшению относительного роста интенсивности при затмениях. Для полной трактовки задачи необходимо иметь данные о ходе изменения интенсивности во время данного затмения одновременно в нескольких волнах. Особо желательно проведение наблюдений в метровом диапазоне длин волн.

Следует сказать несколько слов о возможном влиянии интерференции в рассматриваемой задаче*. Дело в том, что два радиолуча, исходящие из одной точки в солнечной атмосфере и проходящие разными путями (один прямой, второй —

через ионосферу Луны), могут интерферировать в точке их приема, вследствие того, что из-за разности в оптических путях может образоваться разность в фазах обоих колебаний. В тех случаях, когда разность фаз для всех радиолучей, искривляющихся в ионосфере Луны, одинакова, явление интерференции должно иметь место, и в результате мы получим усиленный или ослабленный прирост интенсивности в момент контакта. Если разности фаз будут различными и распределены равномерно в интервале $0-360^\circ$, можно с интерференцией не считаться; прирост интенсивности будет нормальный и определится как сумма интенсивностей искривленных радиолучей.

Предварительные расчеты показывают, что максимальное значение разности в путях обоих радиолучей при $\varphi_0 = 8'$ составляет приблизительно $0,5 \mu$, т. е. порядка длины волны рассматриваемого радиоизлучения ($\lambda = 0,65 \mu$), а минимальное значение равно нулю. В этом случае разности фаз будут колебаться в интервале $0-360^\circ$. Поэтому влияние интерференции в данном случае можно не учитывать.

В остальных случаях учет влияния интерференции подлежит спе-

* На это обратил наше внимание Э. Г. Мирзабекян.

пильному рассмотрению. В частности, влиянием интерференции следует, по-видимому, объяснить усиление флюктуаций в величине интенсивности радионизлучения, наблюдавшееся во время некоторых солнечных затмений (например, результаты наблюдений С. Э. Хайкина и Б. М. Чихачева на волне $\lambda = 1.5$ м во время затмения в 1947 г. [23], наблюдения Ковингтона на волне $\lambda = 10.7$ см и т. д.).

Следует также указать на возможное влияние диффракции радиоволн на лунном крае, впервые рассмотренное В. Л. Гинзбургом по другому поводу [24]. Величина диффракции ψ определяется соотношением

$$\psi = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi D}},$$

где λ — длина волны, D — расстояние Земли от Луны ($\approx 4 \cdot 10^{10}$ см). Очевидно, до тех пор, пока величина ψ будет сравнима или больше угла рефракции φ , влияние диффракции следует учитывать, в противном случае им можно пренебречь. В нашем случае имеем для $\lambda = 65$ см $\psi \sim 0'.1$, что почти на два порядка меньше угла рефракции ($\sim 8'$). Поэтому влияние диффракции на величину прироста интенсивности радионизлучения во время затмения можно не учитывать.

В практике применяется метод определения координат дискретных источников космического радионизлучения путем наблюдения покрытия Луной этих источников. При этом не учитывается искажающее влияние лунной ионосферы на проходящие через нее радиоволны. В свете полученных выше результатов становится очевидным, что указанный метод определения координат дискретных источников следует применять с некоторой осторожностью*.

§ 4. Определение плотности атмосферы Луны

Из (3) имеем для концентрации свободных электронов в основании ионосферы (в данном случае на поверхности Луны):

$$N_m = a_f \frac{\pi m \cdot 10^{12}}{e^2} f^2 = 1.25 \cdot 10^4 \cdot a_f f^2. \quad (19)$$

Из фиг. 4 или 5 найдем для $\varphi_0 = 8'$ значение a_f , равное $a_f = 10^{-6}$. Подставляя это в (19), получим для $\lambda = 65$ см ($f = 462$ МГц):

$$N_m \approx 3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}. \quad (20)$$

Это на два-три порядка ниже того значения, которое обычно наблюдается в земной ионосфере (например, в слое F_2).

Переходим теперь к оценке полного количества газовых частиц (молекул) в единице объема ионосферы Луны.

Пренебрегая всеми другими видами ионизации молекул в атмосфере Луны и учитывая только процессы образования свободных

* По этому вопросу см. статью Линка [22].

электронов путем фотоионизации под влиянием коротковолнового (ультрафиолетового) излучения Солнца, будем иметь следующее дифференциальное уравнение, определяющее изменение количества электронов N_m во времени [17]:

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{J}{1+\lambda} - \alpha N_m^2, \quad (21)$$

где λ есть отношение количества отрицательных ионов и электронов и дается соотношением:

$$\lambda = \frac{\alpha_e N_m^2 + \beta n N_m - \alpha N_m^2}{\gamma N_m n + I N_m - \alpha_e N_m^2 + J_0}, \quad (22)$$

α называется эффективным коэффициентом рекомбинации и имеет вид:

$$\alpha = \alpha_e + \lambda \alpha_i + \frac{1}{N_m} \frac{d \ln(1+\lambda)}{dt}; \quad (23)$$

J есть количество вновь образуемых пар ионизованных частиц (электроны и положительные ионы) в 1 см^3 в секунду. Его можно определить разделяя общее количество энергии, поглощаемой в данной точке атмосферы и идущей на ионизацию, на энергию ионизации молекулы. Обозначая через S_∞ количество падающей на внешнюю границу атмосферы Луны ультрафиолетовой энергии и, ради простоты, пренебрегая поглощением в атмосфере, будем иметь:

$$J = \frac{\sigma n S_\infty}{\epsilon}, \quad (24)$$

где n — количество молекул, σ — эффективное сечение поглощения, ϵ — энергия ионизации для данной молекулы.

Все остальные величины, входящие в (22) и (23), представляют собой коэффициенты происходящих в ионосферных слоях различных микропроцессов: рекомбинация электронов (α_e), прилипание электронов к нейтральным частицам (β), рекомбинация ионов (α_i), фотоионизация электронов (I), отсоединение электронов при соударениях (γ) и т. д. Для всех этих коэффициентов имеются их теоретические значения (см., например, [17], стр. 657). Однако эти данные в настоящее время не согласуются с результатами измерений основной величины — коэффициента рекомбинации для главнейших слоев земной ионосферы, который обычно определяется экспериментальным путем. Причина подобного расхождения для земной ионосферы до сих пор неизвестна. Предполагается существование реакции, для которой имело бы место условие $\alpha_e \sim \alpha$.

Поскольку экспериментальное определение α для ионосферы Луны невозможно, а условие $\alpha_e \sim \alpha$ доказано для земной ионосферы, мы вынуждены будем допустить, что условие $\alpha_e \sim \alpha$ имеет место и для Луны, принимая априори, что атмосфера Луны имеет тот же хими-

ческий состав, что и Земли. Так же можно будет показать, что $\lambda \ll 1$, что указывает на незначительность роли отрицательных ионов в микропроцессах ионосферы.

Далее, учитывая медленность вращения Луны, можно пренебречь изменением количества свободных электронов в течение всего периода затмения, т. е. рассмотреть стационарный случай: $\frac{dN_m}{dt} = 0$. Тогда из (21) и (24) получаем, с учетом сделанных выше выкладок, следующее соотношение для определения полного количества молекул в единице объема в основании лунной атмосферы:

$$n = \frac{\alpha}{\sigma} \frac{\varepsilon}{S_{\infty}} N_m^2. \quad (25)$$

Основными поглотителями коротковолновой энергии Солнца являются атомарный и молекулярный кислороды O_1 и O_2 ; они поглощают излучение с $\lambda < 1000 \text{ \AA}$. Полный поток энергии с $\lambda < 1000 \text{ \AA}$, падающий в секунду на 1 см^2 поверхности на расстоянии Луны (Земли), порядка $S_{\infty} \approx 10^{-13} \text{ эрг/см}^2 \text{ сек}$. Потенциалы ионизации для O_1 и O_2 равны соответственно 12.5 эв и 13.5 эв, т. е. $\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ эрг}$. Эффективное сечение поглощения для атомарного кислорода порядка $\sigma_{O_1} \approx 10^{-17} \text{ см}^2$ (для O_2 оно в три порядка меньше). Наконец, подставляя $\alpha = \alpha_e \approx 10^{-12} \text{ см}^3/\text{сек}$ (электронная рекомбинация), получим из (25):

$$n = 2 \cdot 10^7 \cdot N_m^2. \quad (26)$$

В нашем случае, для $N_m \approx 3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, найдем:

$$n = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}. \quad (27)$$

Эта оценка является нижней границей плотности атмосферы Луны, так как мы приняли выше $h_m = 0$ (т. е. максимум ионосферы находится на поверхности Луны). В случае, когда $h_m \neq 0$, мы будем иметь на поверхности Луны большую плотность, чем полученное значение (27). Однако не трудно убедиться, что полученное значение (27) и есть плотность атмосферы у поверхности Луны. В самом деле, пусть значение $N_m \approx 3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ мы имеем не на поверхности, а на высоте h_m . Но это значение N_m на два-три порядка меньше того значения, которое мы имеем в земной ионосфере, и поскольку Луна находится практически на том же расстоянии от Солнца, что и Земля, т. е. условия поглощения коротковолновой энергии в обоих случаях одинаковы, то, безусловно, и на Луне мы имели бы — при наличии более плотной атмосферы — предельную концентрацию свободных электронов, равную $N_{np} \sim 10^5 - 10^6 \text{ см}^{-3}$ на некоторой высоте $h_m > 0$. И если в нашем случае N_m оказалось меньше N_{np} , то это наверняка означает, что $h_m = 0$. Поэтому полученное выше значение $n \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ нужно считать относящимся к слою, прилегающему к поверхности.

Приняв концентрацию молекул на поверхности Земли равной $n_0 = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, найдем для отношения n/n_0 :

$$\frac{n}{n_0} \sim 10^{-5}.$$

Для полного количества молекул M , находящихся в столбе с основанием, равным 1 см^2 , имеем, приняв барометрический закон распределения плотностей по высоте h :

$$M = n \int_0^{\infty} e^{-\frac{mg_1 h}{kT}} dh = n \frac{kT}{mg_1}.$$

Приняв $g_1 = g/6 = 164 \text{ см/сек}^2$, $T = 285^\circ \text{ К}$, найдем:

$$M \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2}.$$

Для земли имеем $M_0 \approx 2 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-2}$. Поэтому:

$$M/M_0 \sim 10^{-4}.$$

Сводка известных до сих пор определений n/n_0 и M/M_0 приведена в табл. 1.

Таблица 1

А в т о р	n/n_0	M/M_0	М е т о д
Фесенков [2]	—	10^{-6}	поляризационный
Липский [6]	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	поляризационный
Лио и Дольфус [18]	10^{-8}	—	фотометрический
Дольфус [19]	10^{-9}	—	поляризационный
Гаас [4, 21]	10^{-5}	—	метеорный
Эник [20]	10^{-6}	—	фотометрический
Койпер [5]	10^{-9}	—	оптич. рефракция
Гурздян	10^{-5}	10^{-4}	радиофизический

Из всех нерадиофизических методов определений плотности атмосферы Луны самым убедительным, по-видимому, нужно считать метод, основанный на наблюдениях метеоров, падающих на Луну. Гаас и сотрудники, например, за 65 часов наблюдений над теневой стороной Луны регистрировали появление десяти ярких вспышек до 11 звездной величины, которые интерпретируются как падение и возгорание метеоритов в лунной атмосфере. Поскольку для возгорания метеоров требуется некоторая минимальная плотность, то можно оценить величину плотности лунной атмосферы [21]. Факт обнаружения метеоров на Луне является в некотором смысле прямым доказательством существования атмосферы на Луне.

Как было отмечено выше, в одном случае не был замечен рост

радиоизлучения в полуметровом диапазоне [10]. Полагая, что в этот период (1 ноября 1948 г.) мы имеем минимум количества свободных электронов в 1 см^{-3} лунной ионосферы, оценим верхнюю границу N для этого момента. Примем, что рост радиоизлучения из-за рефракции в момент затмения не превышал 1% (порядка ошибок наблюдений). Этому соответствует угол рефракции, равный приблизительно $\tau_0 \sim 1'$. Из фиг. 6 найдем $a_f \sim 10^{-7}$. Отсюда найдем из (19) $N \sim 450 \text{ см}^{-3}$ (для $\lambda = 50 \text{ см}$), т. е. колебание в концентрации свободных электронов составляет приблизительно один порядок. С такими же колебаниями концентрации электронов мы встречаемся и в земной ионосфере.

Оценим оптическую толщину τ_f лунной ионосферы для радиочастот вдоль луча, проходящего близ края диска Луны (максимальное значение). Имеем:

$$\tau_f = 2 \int_0^{\infty} \kappa ds = 2 \int_0^{\infty} \frac{\kappa h dh}{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\kappa h dh}{\sqrt{2Rh + h^2}}, \quad (28)$$

где R — радиус Луны, h — высота от ее поверхности, κ — коэффициент поглощения единицы объема, определяющийся, например, выражением (с учетом отрицательного поглощения) [16]:

$$\kappa = \frac{4\pi e^6}{3\sqrt{3}} \frac{1}{c} \frac{N_e N_i}{(mkT_e)^2} \frac{g_{II}}{f^2}, \quad (29)$$

где $g_{II} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{4R}{f^2}$ — гантовский фактор для переходов между близкими уровнями непрерывного спектра.

Приняв $N_e = N_i = N_m$ и используя для N выражение (1), получим из (28):

$$\tau_f = 2\psi(f, T_e) N_m^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\left(\frac{h}{H}\right)^2} h dh}{\sqrt{2Rh + h^2}}, \quad (30)$$

где $\psi(f, T_e)$ может быть получено из (29). Приняв $H = 48 \text{ км}$, $T = 285^\circ \text{К}$ и производя численное интегрирование, найдем:

$$\tau_f \approx 10^{-10} \frac{N_m^2}{f^2}, \quad (31)$$

где f выражена в МГц-ах. Для Луны мы нашли $N_m \sim 3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$. Поэтому:

$$\tau_f \approx \frac{10^{-12}}{f^2}. \quad (32)$$

Ниже в табл. 2 приведены величины (порядки) τ_f для некоторых значений f .

λ см	f мГц	τ_f
10	3000	10^{-18}
100	300	10^{-16}
1000	30	10^{-14}

Как видно из этой таблицы, оптическая толща лунной ионосферы в радиочастотах (даже в метровом диапазоне) ничтожно мала. Поэтому мы были вправе пренебречь выше поглощением радиоволн в лунной ионосфере.

В заключение оценим ширину экранирующей полосы около лунного края. Высоту этой полосы, считая от поверхности Луны, следует определить из следующего условия: рефракция в этих слоях должна быть достаточно малой, чтобы не вызывать искажения направления луча, распространяющегося практически прямолинейно от Солнца к Земле. Для этого достаточно принять $\varphi_0 \sim 0''.01$, что дает: $a_f e^{-(h_0/H)^2} \sim 10^{-11}$, где h_0 — высота экранирующей полосы. Отсюда, подставляя $a_f \approx 10^{-6}$ (для $\lambda = 65$ см), найдем $h_0 \sim 3.5 \cdot H = 170$ км или $h_0 \sim 1'.5$. Это может вызывать уменьшение прироста радионизлучения в момент контакта в размере порядка 1% .

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступило 9 IX 1956.

Գ. Ա. Գուրզայան

ԼՈՒՍՆԻ ՄՔՆՈԼՈՐՏԻ ԽՏՈՒՅՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԱՐԵԳԱԿԻ ՌԱԴԻՈՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏՎՅԱԼՆԵՐՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Արեգակի խափարման ժամանակ նկատվում է արեգակնային սադրոնաոպայթման աճ (մինչև $10-15\%$ -ի չափով) խափարման սկզբում և վերջում: Երբևէ աճի փոխարեն սադրոնաոպայթման ինտենսիվության մեջ նկատվում է ֆլյուկտուացիաների ուժեղացում՝ որը զգալիորեն դերազանցում է չափման սխալներով պայմանավորված ֆլյուկտուացիաներից: Ենթադրվում է, որ նշված երևույթը հետևանք է սադրալիքների խտորման (սեֆրակցիա), որը տեղի է ունենում Լուսնի մթնոլորտում, ավելի ճիշտ՝ նրա իոնոսֆերայում: Ներկա հոդվածում առաջարկվում է մեթոդ, որի օգնությամբ կարելի է որոշել Լուսնի մթնոլորտի խտությունը, ելնելով խափարման ժամանակ Արեգակի սադրոնաոպայթման աճի մեծությունից:

Ելակետային հանդիսանում է խտորման լրիվ անկյան φ_0 -ի որոշումը, որի դեպքում Արեգակից դուրս եկած սադրալիքների մի մասը խտորվելով Լուսնի մթնոլորտում (իոնոսֆերա), սղղվում է դեպի մեզ (նկ. 2): Այդ ինչից բխում է, որ առանց նախապես լուսնային իոնոսֆերայի տեսքը ապուս հնարավոր

է լածել: Ներկա դեպքում վերցված է պարզազույն՝ պարարտիկ խոնոֆերան, որը ներկայացվում է (1) բանաձևով: Այնուհետև, հիմնվելով սեֆրակցիայի տեսութունից հայտնի որոշ առնչությունների վրա, արտածվել է խոտորման լրիվ անկյան՝ φ_0 -ի մեծությունը, որպես ֆունկցիա էլեկտրոնային խտությունից և սադիտայիքի հաճախականությունից՝ (բանաձև (2)):

Լուսնի մթնոլորտում անդի ունեցող սեֆրակցիայով պայմանավորված արեգակնային սադիտաազայթման աճը հաշվելիս կարևոր է իմանալ սադիտաազայթման ինտենսիվության բաշխումը ըստ Արեգակի սկավառակի: Այն, ինչպես հայտնի է, տարբեր ալիքների համար տարբեր է և նույնիսկ միևնույն ալիքի համար ժամանակի ընթացքում՝ փոփոխական: Ներկա դեպքում, օգտագործելով մոտ կես մեարանոց ալիքների համար տարբեր հեռազտողների կողմից արված բաշխումները (ինչպես սեսական, այնպես էլ էքսպերիմենտալ ճանապարհով ստացված), հաշվված են այդ ալիքների համար սադիտաազայթման ինտենսիվության փոփոխությունները Արեգակի խավարման ընթացքում՝ տարբեր խոտորման անկյունների դեպքում: Պարզվում է, որ այդ ալիքների համար դիտումներից ստացված սադիտաազայթման աճը կարող է բացատրվել, եթե լրիվ խոտորման անկյուն φ_0 -ն հավասար լինի $8'$ -ի:

Ունենալով խոտորման լրիվ անկյան մեծությունը, դժվար չէ արդեն որոշել ազատ էլեկտրոնների քանակը՝ Լուսնի իոնոսֆերայում այնպես, ինչպես այդ արվում է Երկրի իոնոսֆերայի դեպքում (տես բանաձև (19)): Ստացվել է $N_m \approx 3 \cdot 10^3 \text{ սմ}^{-3}$, որը երկու-երեք կարգ փոքր է Երկրի իոնոսֆերայում եղած էլեկտրոնների խտությունից: Հետաքրքիր է նշել, որ Լուսնի դեպքում մաքսիմալ էլեկտրոնային խտության շերտը դանդաղ է հենց Լուսնի մակերևույթի վրա: Սա թերևս ամենաբնորոշ հանգամանքն է, որով Լուսնի իոնոսֆերան տարբերվում է Երկրի իոնոսֆերայից:

Ընդունելով, որ Լուսնի մթնոլորտում գազի մոլեկուլների իոնացման նաև կապված պրոցեսները նույն քնույթն են կրում, ինչ դիտվում է մեզ մոտ՝ Երկրի մթնոլորտում, դժվար չէ այստեղից որոշել Լուսնի մթնոլորտի խտությունը նրա մակերևույթում: Վերջնական հաշվումները տվել են $n \approx 10^{14} \text{ սմ}^{-3}$, այսինքն մոտ հարյուր հազար անգամ պակաս այն խտությունից, որ մենք ունենք Երկրի մթնոլորտում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. La Paz L. Pop. A. 46, 277 (1938).
2. Фесенков В. Г. Астрономич. журнал, 20, 3 (1943).
3. Kahn M. Pop. A. 54, 312 (1946); 53, 353 (1945).
4. Haas W. Pop. A. 55, 256 (1947).
5. Kõjner Л. Атмосферы Земли и планет. 361, М. (1951).
6. Липский Ю. Н. Труды ГАИИИ, XXII, 66 (1953).
7. Hagen J. Haddock F. a. Reber G. Sky a. Telescope, 10, 5 (1951).
8. Dennise J., Blum E. a. Steinberg J. C. R. Acad. Sci., Paris, 234, 1597 (1952).
9. Санамян В. А. и Ерзникян Г. А. ДАН АрмССР, XX, 161 (1955).
10. Christiansen W., Yabsley D. a. Mills B. Austr. J. Sci. Res. A, 2, 506 (1949).
11. Pittington J. a. Hindman J. Austr. J. Sci. Res., A, 2, 521 (1949).
12. Reber G. a. Beck E. A. J. 56, 47 (1951).
13. Липк Ф. В. А. С., 3, 69 (1952).

14. Stanier H. *Nat.* 165, 354 (1950).
15. Smerd S. *Austr. J. Sci. Res. A.* 3, 34 (1950).
16. Шкловский И. С. и Пикельнер С. Б., *Известия Крымской астрофиз. обсерватории*, VI (1951).
17. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л. и Фейнберг Е. *Распространение радиоволн*, 559, М., (1953).
18. Lyot B. а. Dollfus A. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 229, 1277 (1949).
19. Dollfus A. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 234, 2046 (1952).
20. Örik E. *I. A. J.* 3, 137 (1955).
21. De Vancouleurs G. *L'Ast.* 267 (1947).
22. Link F. *B. A. C.* 7; 1 (1956).
23. Хайкин С. Э. и Чихачев Б. Н. *ДАН СССР*, 58, 1923 (1947).
24. Гинзбург В. Л. *УФН*, 34, 13 (1948).

М. А. Аракелян

Об эффекте вращения затменно-двойных звезд

В 1924 г. Д. Мак Лофлин [1] определил скорость вращения главной звезды в системе Алголя по избыткам лучевых скоростей в первичном минимуме. Искомая величина получилась значительно превышающей возможные ошибки наблюдений ($V_e \cdot \sin i = 42 \text{ км/сек}$), однако наблюдаемая кривая эффекта вращения имела заметную асимметрию, происхождение которой не удалось объяснить.

Позднее Г. А. Шайном и О. Струве [2] был разработан метод определения скоростей вращения звезд по контурам линий поглощения. Применение О. Струве и К. Т. Элви [3] этого метода к главной звезде Алголя дало значение $V_e \cdot \sin i = 60 \text{ км/сек}$. Эти авторы обратили внимание на то обстоятельство, что эффект вращения, полученный по избыткам лучевых скоростей, имеет меньшую амплитуду, чем теоретическое значение этой величины, вычисленное при скорости 60 км/сек . Позднее А. Слеттебак [4] получил значение $V_e \cdot \sin i = 65 \text{ км/сек}$.

Аналогичное расхождение между скоростями вращения, полученными двумя упомянутыми методами, имеет место для звезды λ Тельца. Д. Мак Лофлин [1] получил для нее $V_e \cdot \sin i = 41.5 \text{ км/сек}$, в то время как метод Г. А. Шайна и О. Струве привел А. Слеттебака и Р. Ф. Говарда [5] к величине 110 км/сек . Можно утверждать, следовательно, что подобное расхождение является результатом каких-то систематических ошибок.

Возможны два рода ошибок, влияющих на результаты определения скорости вращения путем измерений избытков лучевых скоростей.

Один из них был отмечен О. Струве и К. Т. Элви [2]. Ошибки этого рода состоят в том, что при конечной разрешающей способности спектрографа наблюдаемая асимметрия линий поглощения, вызванная эффектом вращения, всегда будет несколько меньше, чем асимметрия, которая наблюдалась бы с идеальным инструментом. Действительно, предположим, что половина диска звезды закрыта экраном, край которого совмещен с осью вращения. Тогда контур линии, не искаженный инструментом, должен быть ограничен с одной стороны отрезком прямой, перпендикулярной оси длин волн (фиг. 1а). Однако, благодаря конечной разрешающей способности спектрографа, линия будет ограничена не прямой, а половиной инструментального контура (фиг. 1б). Это приведет к тому, что наиболее глубокая точка линии погло-

щения окажется смещенной меньше, чем это имело бы место при бесконечно большой разрешающей силе.

Ошибки второго рода также обусловлены конечной разрешающей способностью инструмента. Они связаны с тем, что для измерения лучевых скоростей звезд часто используются линии, являющиеся блендами, причем в разных конкретных случаях компоненты бленды могут быть совершенно слитыми или частично разрешенными. Предположим, что при измерении лучевой скорости нить микрометра наводится на самую глубокую точку контура линии. Рассмотрим такую бленду подробно. Пусть контур каждой ее компоненты представляется экспоненциальным выражением:

$$A(\lambda) = A_0 e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\beta^2}} \quad (1)$$

или

$$I(\lambda) = I(0) \left[1 - A_0 e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\beta^2}} \right], \quad (2)$$

где $A(\lambda)$ — глубина линии поглощения, A_0 — ее центральная глубина, $I(\lambda)$ — интенсивность в линии, $I(0)$ — интенсивность непрерывного спектра. Величина β , определяющая ширину спектральной линии, является функцией разрешающей способности спектрографа, но может зависеть также и от характера линий в спектре данной звезды. В частности, если звезда имеет большую скорость осевого вращения, то это приводит к расширению спектральной линии, что эквивалентно увеличению β .

Если теоретическое расстояние между компонентами бленды равно $\Delta\lambda_0$, то глубина линии в какой-либо ее точке, обусловленная глубинами двух компонент, будет:

$$A(\lambda) = A'(\lambda) + A''(\lambda) = A_0 e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\beta^2}} + A_0 e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0 - \Delta\lambda_0)^2}{\beta^2}} \quad (3)$$

Очевидно, что для нахождения длин волн, соответствующих экстремальным значениям $A(\lambda)$, необходимо решить относительно λ уравнение:

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = 2A_0 \frac{(\lambda - \lambda_0)}{\beta^2} \cdot e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\beta^2}} + 2A_0 \frac{(\lambda - \lambda_0 - \Delta\lambda_0)}{\beta^2} e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0 - \Delta\lambda_0)^2}{\beta^2}} = 0. \quad (4)$$

Обозначим $\lambda - \lambda_0 = x$. Получим:

$$A_0 \cdot x + A_0 (x - \Delta\lambda_0) e^{-\frac{2x\Delta\lambda_0}{\beta^2}} e^{-\frac{x^2}{\beta^2}} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\beta^2 = \frac{\text{Mod} \cdot (\Delta\lambda_0^2 - 2x\Delta\lambda_0)}{\lg\left(\frac{\Delta\lambda_0 - x}{kx}\right)} \quad (6)$$

где $k = \frac{A'_0}{A_0}$ — отношение центральных глубин двух компонент бленды.

На фиг. 2 приведены графики зависимости x от β на основании уравнения (6) для трех случаев: $k = 0.25, 0.50$ и 1.00 при $\Delta\lambda_0 = 1.6 \text{ \AA}$, что соответствует бленде линий $C_{II} 3968.465 (H)$ и $H 3970.075 (H_e)$. Рассмотрим для конкретности фигуру, соответствующую $k = 0.25$.

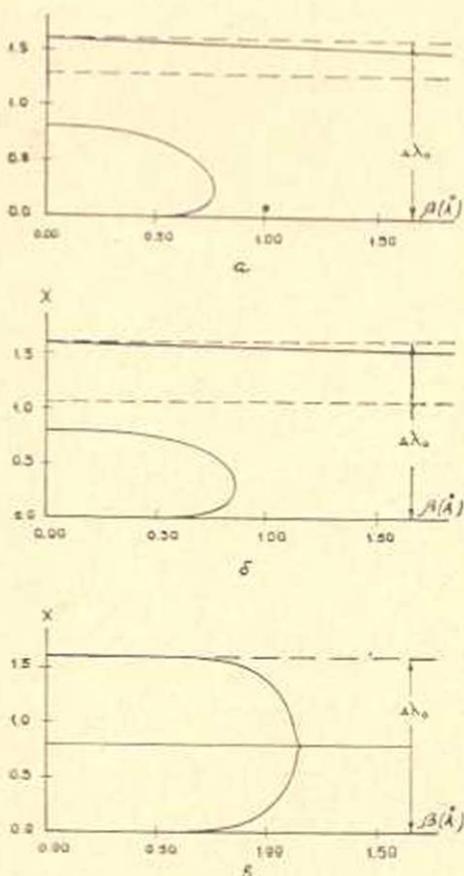
Мы видим, что при достаточно больших разрешающих способностях имеет место три экстремума, соответствующие точкам 1, 2 и 3 фиг. 3б и в.

При уменьшении разрешающей способности или, что то же самое, при увеличении скорости вращения начинается сближение экстремальных точек, причем вплоть до значений $\beta \approx 0.6 \text{ \AA}$ заметно изменяется только длина волны сильной компоненты, в то время как для слабой она практически неизменна. Однако в области $0.62 \text{ \AA} < \beta < 0.76 \text{ \AA}$ происходит резкое изменение длины волны слабой компоненты, после чего экстремумы, соответствующие точкам 2 и 3, перестают существовать. Далее длина волны бленды непрерывно изменяется и достигает в пределе значения

$$\lambda = \frac{\lambda_1 A'_0 + \lambda_2 A''_0}{A_0 + A'_0}$$

При больших значениях k исчезновение слабой компоненты происходит при меньших разрешающих силах.

В случае, если интенсивности обеих компонент бленды одинаковы ($k = 1.0$), эффективные длины волн изменяются с уменьшением



Фиг. 2. Графики зависимости $(\lambda - \lambda_0)_{\text{extrem}}$ от β на основании уравнения (6) а) $k = 0.25$, б) $k = 0.50$, в) $k = 1.00$.

разрешающей силы спектрографа, приближаясь друг к другу, и при очень малых разрешающих силах сливаются в $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Из изложенного следует два важных вывода:

1. Стандартные длины волн линий, входящих в бленду, если последние частично разрешены, могут отличаться от теоретических; они зависят от разрешающей способности спектрографа и, при той же разрешающей способности, от скорости вращения исследуемой звезды.

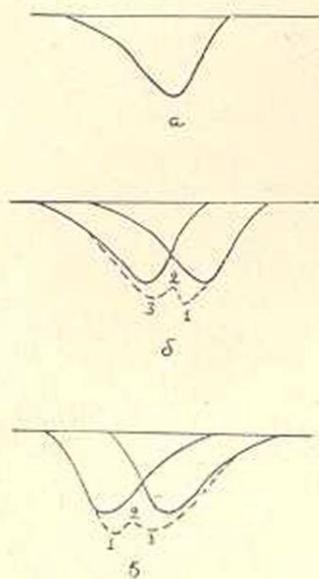
2. Если же компоненты бленды не разрешены, то результирующая длина волны бленды может отличаться от весового среднего из длин волн компонент и стремится к этой величине с уменьшением разрешающей способности.

Указанные эффекты могут иметь большое значение при измерениях лучевых скоростей звезд поздних спектральных классов, в спектрах которых подавляющее большинство линий является блендами двух или большего числа компонент.

Что касается измерения лучевых скоростей затменных переменных звезд вне затмения с целью определения абсолютных размеров их орбит и масс компонент, то указанные эффекты не могут повлиять на результаты, так как приводят к изменению всех внезатменных наблюдений на постоянную величину, т. е. могут изменить только лучевую скорость центра тяжести системы.

Однако в измерениях, произведенные в затмении главной звезды, эти эффекты будут входить не аддитивно, так как благодаря деформации контуров линий, обусловленной эффектом вращения, длины волн стандартных линий изменяются с фазой затмения.

Попробуем качественно выяснить влияние указанного эффекта. На фиг. 3а изображен асимметричный контур линии Mg II 4481, полученный О. Струве и К. Т. Элви [2] на фазе $0^d 064$ до минимума блеска Алголя. В первом приближении можно считать, что фиолетовое крыло этой линии характеризуется большим значением β , чем красное. Если бленда состоит из двух подобных компонент (фиг. 3б), то очевидно, что длина волны красной компоненты больше сдвинется в коротковолновую область спектра, чем длина волны фиолетовой в



Фиг. 3. а) Контур линии Mg II 4481 в спектре Алголя на фазе $0^d 064$. б) и в) Бленда двух линий до и после минимума блеска.

длинноволновую. Если даже лучевая скорость измеряется по двум

компонентам бленды, то и в этом случае она будет в конечном счете алгебраически занижена. На той же фазе затмения после минимума блеска будет иметь место обратная картина (фиг. 3в), т. е. результирующая лучевая скорость будет алгебраически завышена.

Следовательно, асимметричные контуры спектральных линий, обусловленные эффектом вращения звезды, приводят в результате измерения лучевых скоростей посредством бленд к уменьшению амплитуды кривой эффекта вращения.

В связи с этим же можно указать на два источника асимметричности кривой эффекта вращения, полученной Д. Мак Лофлином [1]. Это, с одной стороны, — бленды, состоящие из компонент разной эквивалентной ширины, и, с другой — бленды, в которых только одна компонента используется для определения лучевой скорости. Совершенно очевидно, что в обоих случаях смещение длин волн, обусловленное деформацией спектральных линий, до и после максимальной фазы затмения будет неодинаковым.

Наряду с изложенными ошибками, обусловленными конечной разрешающей способностью спектрографа, необходимо отметить еще один источник неточностей измерения лучевых скоростей звезд в затмении. Это — ошибки наведения. Выше мы исходили из того, что при измерениях лучевых скоростей нить микрометра наводится на наиболее глубокую точку спектральной линии. Однако известно, что на практике измеритель наводит ее скорее на середину линии. Аналогичный эффект для асимметричных линий поглощения в спектрах долгопериодических цефеид был подробно исследован О. А. Мельниковым [6]. Ошибки такого рода также могут значительно уменьшить наблюдаемый эффект вращения, так как их величина растет вместе с ростом асимметричности линии, т. е. чем больше избыток скорости, тем больше ошибка. При этом ошибки наведения всегда уменьшают избыток лучевой скорости. Точный учет ошибок наведения затруднителен, так как деформация различных линий, используемых для измерения лучевой скорости, различна.

Из изложенного следует, что для определения абсолютных элементов главной звезды в случае, когда наблюдается только спектр одной из компонент затменной системы, правильнее использовать скорость вращения, полученную методом Г. А. Шайна и О. Струве, а не выведенную из избытков лучевой скорости в главном затмении.

Пользуюсь случаем принести глубокую благодарность проф. О. А. Мельникову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Մ. Ա. Առաքելյան

ԽԱՎԱՐՈՒՆ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՍՏՂԵՐԻ ՊՏՏՄԱՆ ԷՖԵԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգվածում ուսումնասիրված է սպեկտրալ գծերի բլենդների վարքը սպեկտոգրաֆի տարրեր բաժնոց ուժերի դեպքում: Ենթադրելով, որ առանձին գծի կոնտուրն արտահայտվում է (1) բանաձևով, ստացված է բլենդի էքստրեմալ (խորության իմաստով) կետերի ալիքային երկարությունների գործիքային կոնտուրի հետ կապող (6) առընչությունը: Այդ հավասարման ուսումնասիրությունը մեզ հանդեպրել է նաեւյալ եզրակացություններին՝

1. Բլենդի մեջ մանող գծերի ստանդարտ ալիքային երկարությունները, եթե այդ գծերը մասնակիորեն բաժանված են, աեսակա՛ն ալիքային երկարություններից տարբերվում են: Նրանք կախված են գործիքի բաժանող ուժից, իսկ այլալ բաժանող ուժի դեպքում՝ ուսումնասիրվող աստղի արագությունից:

2. Եթե կոմպոնենտները բաժանված չեն, ապա բլենդի ալիքային երկարությունը կարող է տարբերվել կոմպոնենտների ալիքային երկարությունների կշռային միջինից: Գործիքի բաժանող ուժի փոքրացման հետ այն մոտենում է այդ մեծությունը: Այդ էֆեկտները պետք է հանգեցնեն խավարուն փոփոխական աստղերի պատման էֆեկտի կորի ամպլիտուդի փոքրացմանը, իսկ որոշ դեպքերում՝ այդ կորի սիմետրիկության խախտմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. McLaughlin D. Publ. Michigan Obs. 6 (1934).
2. Schain G. A., Struve O. M. N. 89, 221 (1929).
3. Struve O., Elvey C. T. M. N. 91, 664 (1931).
4. Sletteback A. Ap. J. 119, 146 (1954).
5. Sletteback A., Howard B. F. Ap. J. 121, 102 (1955).
6. Мельников О. А. Труды ГАО, 64 (1930).

В. А. Джрбашян

Об угловой корреляции γ -квантов, излучаемых мезоатомами

Как было впервые указано Уилером [1], изучение μ -мезоатома может дать полезные сведения о свойствах μ -мезона. Благодаря близости μ -мезонных орбит к ядру μ -мезон может быть использован одновременно и для зондирования ядра.

В последние годы получены экспериментальные данные [2] о спектре мезоатома и о радиационных мезоатомных переходах, некоторые из которых являются последовательными.

Подгорецкий [3] обратил внимание на возможность уточнения спина μ -мезона, используя данные по угловой корреляции между направлениями γ -квантов, излучаемых при таких переходах. При этом сравнивается с опытом анизотропия

$$A = \frac{W(180)}{W(90)} - 1,$$

где $W(\theta)$ — зависящая от угла вероятность излучения двух квантов.

В настоящее время эффект угловой корреляции в μ -мезоатомах может быть использован и для проверки спинов целого ряда ядер, для которых значение $I=0$ сомнительно или получено только из теоретических соображений, не подтвержденных экспериментом.

В нашей работе получены формулы для угловой корреляции γ -квантов, излучаемых средними и тяжелыми μ -мезоатомами*. В расчетах учитывались эффекты тонкой и сверхтонкой структур, а также влияние конечности размеров и квадрупольного момента ядра.

Поскольку специфическое взаимодействие между μ -мезоном и ядром относительно мало, а электрический потенциал даже для самых тяжелых ядер мал по сравнению с энергией покоя μ -мезона**, задача по существу является нерелятивистской.

Операторами 2^{λ} -польного момента $Q_{LM}^{(\lambda)}$ (электрического при $\lambda=1$ и магнитного при $\lambda=0$), учитывающими спин в первом релятивистском приближении, являются [4]

* Эти формулы могут быть использованы также при определении спинов других мезонов.

** Например, в центре ядра свинца $V = -21 \text{ MeV}$.

$$Q_{LM}^{(1)} = e \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} r^L Y_{LM}^* \quad (1)$$

$$Q_{LM}^{(0)} = (-1)^M \frac{e}{m} r^{L-1} \sqrt{4\pi L} \sum_{q=-1}^{+1} C_{L-1-M-q; 1q}^{L-M} Y_{L-1-M-q} L_q \quad (2)$$

где введены обозначения

$$L_{\pm 1} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} (L_x \pm iL_y),$$

$$L_0 = L_z,$$

$$L = \frac{1}{L+1} + s. \quad (3)$$

l и s — операторы орбитального момента и спина мезона.

$C_{L-1-M-q; 1q}^{L-M}$ — коэффициент Клебша — Жордана.

Из выражений для матричных элементов от операторов (1), (2), взятых по волновым функциям

$$\varphi_{sIJFN} = \sum_{Mn} C_{JM; In}^{FN} \varphi_{sIJM} \varphi_{In} = a(r) b(r_1) \Omega\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\right), \quad (4)$$

где

$$\varphi_{sIJM} = a(r) \sum_{\mu} C_{IM-\mu; s\mu}^{JM} Y_{IM-\mu} U_{s\mu}$$

волновая функция μ -мезона, а

$$\varphi_{In} = b(r_1) Y_{In}$$

функция ядра,

следуют:

1. Закон сохранения момента:

$$\begin{aligned} |F_A - F_B| \leq L_1 \leq F_A + F_B, \quad |J_\alpha - J_\beta| \leq L_1 \leq J_\alpha + J_\beta \\ |l_A - l_B| \leq L_1 \leq l_A + l_B \quad \text{для } \lambda = 1, \\ |l_A - l_B| + 1 \leq L_1 \leq l_A + l_B + 1 \quad \text{для } \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и 2. Закон сохранения четности:

$$\lambda = \frac{1 + (-1)^{l_A - l_B - L_1}}{2} \quad (6)$$

Наиболее существенны электрические дипольные переходы.

Отношение вероятности электрического квадрупольного излучения к вероятности электрического дипольного излучения мало:

$$\frac{W_2^{(1)}}{W_1^{(1)}} \sim \frac{1}{20} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 = \begin{cases} \frac{1}{20} \left(\frac{137 \Delta E}{Z \mu c^2} \right)^2 \ll 1 \text{ для малых } Z \\ \frac{V}{10 \mu c^2} \ll 1 \text{ для больших } Z \end{cases}$$

Кроме того, из (5) вытекает, что при $l_A \neq l_B$ $L_{\min} = |l_A - l_B|$ и $\lambda = 1$, т. е. переход наименьшей мультипольности есть электрический переход.

При $l_A = l_B$ согласно (5) переходом наименьшей мультипольности является магнитный дипольный, однако он не будет наблюдаться из-за ортогональности радиальных функций в интересующем нас приближении для $n_A \neq n_B$. Будет иметь место электрическое квадрупольное излучение.

Таким образом, в случае тяжелых мезоатомов следует рассматривать только электрические переходы, для которых матричный элемент оператора мультипольного момента по шаровым спинорам имеет вид:

$$\begin{aligned} (\Omega(\alpha) | Q_{L_i M_i}^{(1)} | \Omega(\beta)) &= (-1)^{M_i} e r^{L_i} C_{L_i 0; l_B 0}^{L_i A 0} \times \\ &\times [(2F_B + 1)(2J_\alpha + 1)(2J_\beta + 1)(2l_B + 1)]^{1/2} W(F_B l l_1 J_\alpha; J_\beta F_A) \times \\ &\times W(J_\beta s L_1 l_A; l_B J_\alpha) C_{F_B N_B; L_1 - M_1}^{F_A N_A} \end{aligned} \quad (7)$$

$W(F_B l l_1 J_\alpha; J_\beta F_A)$ — коэффициент Рака [5].

Вероятность последовательного испускания двух квантов, проинтегрированная по энергиям этих квантов и учитывающая взаимодействие с „внешним“ полем, дается [6] выражением

$$\begin{aligned} W\left(\frac{\mathbf{k}_p}{k_p}, \frac{\mathbf{k}_s}{k_s}\right) &= \sum_{\alpha, \beta, \beta', \gamma, p_p, p_s} \frac{(\alpha | H(\mathbf{k}_p, p_p) | \beta)^*}{h^4 \gamma_A \gamma_B / \pi^2} \times \\ &\times \frac{(\beta | H(\mathbf{k}_s, p_s) | \gamma)^* (\alpha | H(\mathbf{k}_p, p_p) | \beta') (\beta' | H(\mathbf{k}_s, p_s) | \gamma)}{1 + (\gamma_{\beta, \beta'} / 2\gamma_B)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_{\beta, \beta'}$ — расщепление, вызванное взаимодействием, а γ_B — ширина промежуточного уровня.

Матричный элемент от $V_{L_i M_i}^{(1)}$, являющегося частью оператора H , ответственной за электрическое 2^{L_i} -польное излучение, равен

$$(\alpha | V_{L_i M_i}^{(1)}(\mathbf{k}_p, p_p) | \beta) = f(\Omega(\alpha) | Q_{L_i M_i}^{(1)} | \Omega(\beta)) e_p Y_{L_i M_i}^{(1)}, \quad (9)$$

где величина f не зависит от индексов суммирования в (8), e_p — поляризация, $Y_{L_i M_i}^{(1)}$ — шаровой спинор.

Чтобы представить корреляционную функцию с нормировкой

$$\frac{1}{4\pi} \int W(\theta) d\theta = 1,$$

в виде линейной комбинации полиномов Лежандра четного порядка, примем во внимание, что [7]

$$|Y_{L_2 M_2}^{(0)}(\theta)|^2 = \frac{(-1)^{L_2-1} (2L_2+1)}{4\pi} \sum_k (4k+1)^{1/2} \times \\ \times C_{L_1, L_1-1}^{2k0} C_{L_2, M_2}^{L_2, M_2; 2k0} P_{2k}(\cos \theta)$$

и воспользуемся соотношениями свертываемости коэффициентов Клебша — Жордана:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} C_{f\varphi; b\beta}^{d\delta} C_{aa; b\beta}^{\alpha\alpha} C_{f\varphi; c\gamma}^{\alpha\alpha} = (2d+1)^{1/2} (2a+1)^{1/2} W(dbc\alpha; f\epsilon) C_{d\delta; c\gamma}^{\alpha\alpha}$$

и Рака [5]:

$$\sum_{\lambda} (2\gamma+1) W(a'\lambda\alpha; a'c') W(b\lambda\beta c'; bc) W(a'\lambda\gamma b; ab') = \\ = W(\alpha\lambda\beta\gamma; c\gamma) W(a'\lambda b'\beta; c'\gamma).$$

Для легких мезоатомов ($Z < 15$) вероятности радиационных переходов малы по сравнению с вероятностями электронных (конверсионных) переходов [1].

Для более тяжелых мезоатомов, при небольших квантовых числах (n, l), вероятностями конверсионных переходов можно пренебречь.

Приведем выражение для корреляционной функции $W(\theta)$, которое пригодно для не очень больших Z ($15 < Z < 50$) в случае, если оба перехода являются электрическими или магнитными.

$$W(\theta) = \sum_{k=0}^N A_{2k} P_{2k}(\cos \theta). \quad (10)$$

$$A_{2k} = A_{2k} b_{2k};$$

$$A_{2k} = A_{2k} (L_1 L_2 J_A J_B J_C) = (-1)^{J_A - J_C} (2L_1 + \\ + 1) (2L_2 + 1) (2J_B + 1) C_{L_1, L_1-1}^{2k0} \times \quad (10a)$$

$$\times C_{L_1, L_1-1}^{2k0} W(J_B J_B L_1 L_1; 2kJ_A) W(J_B J_B L_2 L_2; 2kJ_C); \\ b_{2k} = \sum_{F_B} \frac{(2F_B + 1)^2 W^2(J_B 2k F_B F_B; J_B)}{2I + 1}. \quad (10b)$$

Здесь принято предположение, что при мезоатомных переходах не меняется спин ядра и учтено, что для атомов данного типа $\nu_{FF}/2\gamma_B \gg 1$ (например, для $Al \nu_{FF}/2\gamma_B \sim \frac{10eV}{10^{-5}eV} = 10^6$).

Выражение (10) совпадает по форме с функцией, полученной Альдером [8] для угловой корреляции при ядерных переходах, учи-

твующей взаимодействии ядра с электронной оболочкой. Это выражение может быть использовано для проверки спинов ядер (например, $^{34}_{16}\text{S}$, $^{40}_{20}\text{Ca}$, $^{74}_{34}\text{Se}$), у которых значение $I=0$ экспериментально не подтверждено.

В качестве примера приведем значения анизотропии A при переходах $\frac{1}{2}(D) \frac{3}{2}(D) \frac{1}{2}$:

$$A = 0,43 \quad \text{для } I = 0;$$

$$A = 0,25 \quad \text{для } I = \frac{1}{2}.$$

Тяжелые мезотома отличаются следующей особенностью. Именно, расщепление, обусловленное взаимодействием спин-орбита ($\Delta \sim \sim 0,1 \text{ MeV}$), мало по сравнению с расщеплением уровней, соответствующим различным l , вызванным конечностью размеров ядра*. Однако в таком случае вероятности переходов между подуровнями одного и того же уровня ($J \rightarrow J'$ при $n = n'$ и $l = l'$) ничтожно малы по сравнению с вероятностями переходов между различными уровнями ($l \rightarrow l'$ при $n \neq n'$, либо $l \neq l'$).

Последние по величине практически совпадают с вероятностями переходов между уровнями, которые возникли бы в отсутствии взаимодействия спин-орбита.

Следовательно, малость разностей энергий подуровней приводит к тому, что мы не можем идентифицировать отдельные переходы типа $J \rightarrow J'$ и должны суммировать по значениям J и J' для данного l и l' .

Таким образом, для тяжелых мезотомов получаем

$$W(\theta) = \sum_{k=0}^N A_{2k} P_{2k}(\cos \theta), \quad (11)$$

где

$$A_{2k} = A_{2k}(L_1 L_2 l_A l_B l_C) b_{2k}, \quad (11a)**$$

$$b_{2k} = \sum_{F_B F_B' J_B J_B'} \frac{(2F_B + 1)(2F_B' + 1) W^2(J_B' I 2k F_B'; F_B J_B)}{(2I + 1)(2s + 1)[1 + (\nu_{FF'} / 2\gamma_B)^2]} \times \\ \times (2J_B + 1)(2J_B' + 1) W^2(l_B s 2k J_B'; J_B l_B). \quad (11b)$$

Причем в $\nu_{FF'}$ входят как тонкая, так и сверхтонкая структуры. Их вклад в (11) соответствует тому, что вследствие взаимодействия спин-орбита, после испускания первого кванта, в промежуточном

* Для тяжелых мезотомов расстояние между уровнями с различными l порядка нескольких MeV .

** См. [10а].

состоянии меняется ориентация орбитального момента, тогда как взаимодействие с ядром приводит к изменению ориентации полного момента J .

Эти эффекты оказываются существенными, так как время жизни промежуточного состояния превышает периоды прецессий моментов.

В случае малости сверхтонкой структуры по отношению к $2\gamma_B$ выражение (11) свелось бы к функции Альдера (что, например, имеет место для $l=0$).

Любое дополнительное взаимодействие может быть учтено аналогичным изменением в b_{2k} . В частности, для рассматриваемых нами мезоатомов возникает вопрос учета взаимодействия с электронной оболочкой. Однако, из-за малости расщепления по отношению к γ_B , полученное b_{2k} сводится к (11б).

Так как для рассматриваемых мезоатомов $\nu_{JJ}/2\gamma_B \gg 1$ (например, для свинца $\frac{\nu_{JJ}}{2\gamma_B} \sim \frac{200 \text{ keV}}{1 \text{ keV}}$) (см. ниже фигуру), то

$$b_{2k} = \sum_{F_B, F_B', J_\beta} \frac{(2F_B + 1)(2F_B' + 1)W^2(J_B l 2k F_B'; F_B J_\beta) (2J_\beta + 1)^2 W^2(l_B s 2k J_\beta; J_\beta l_B)}{(2l + 1)(2s + 1) \left[1 + \left(\frac{\nu_{FF'}}{2\gamma_B} \right)^2 \right]} \quad (12)$$

где $\nu_{FF'}$ — сумма расщеплений, вызванных взаимодействиями магнитного дипольного и электрического квадрупольного моментов ядра с мезоном.

Обозначая b_{2k} посредством $b_{2k}^{s,l}(l_B)$, имеем

$$b_0^{s,l}(l_B) = 1 \quad (12a)$$

$$b_{2k}^{0,0}(l_B) = 1 \quad (12б)$$

$$b_{2k}^{s,0}(l_B) = \sum_{J_\beta} \frac{(2J_\beta + 1)^2 W^2(l_B s 2k J_\beta; J_\beta l_B)}{2s + 1} \quad (12в)$$

$$b_{2k}^{s, \frac{1}{2}}(l_B) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{2\gamma_B} \right)^2} \sum_{F_B J_B} \left[1 + \left(\frac{\nu}{2\gamma_B} \right)^2 \frac{(2F_B + 1)^2 W^2 \left(J_\beta \frac{1}{2} 2k F_B; F_B J_\beta \right)}{2} \right] \times \\ \times \frac{(2J_B + 1)^2 W^2(l_B s 2k J_\beta; J_\beta l_B)}{2s + 1} \quad (12г)$$

$$b_{2k}^{s, > \frac{1}{2}}(l_B) =$$

$$= \sum_{F_B J_\beta} \frac{(2F_B + 1)^2 W^2(J_\beta l 2k F_B; F_B J_\beta) (2J_\beta + 1)^2 W^2(l_B s 2k J_\beta; J_\beta l_B)}{(2l + 1)(2s + 1)} \quad (12д)$$

Из (12а) видно, что требуемая нормировка обеспечивается. В случае отсутствия взаимодействий „уменьшающий фактор“ b_{2k} равен своему максимальному значению -1 (12б).

Частный случай $I=0$ (12в) был рассмотрен Подгоревским [3]. Однако им не была учтена тонкая структура. Критерий, данный в работе [3] для выяснения вопроса о том, равняется ли спин μ -мезона $1/2$ или $3/2$ по каскаду $3p \rightarrow 2s \rightarrow 2p$, является некорректным, так как уже из (11) следует, что в обоих случаях распределение изотропно.

Входящая в (12г) ν есть сверхтонкая структура мезотома, объясняемая взаимодействием магнитных моментов ядра и мезона.

В (12д) учтено, что расщепление, вызванное электрическим квадрупольным взаимодействием, порядка величины спин-орбитальной связи [9], т. е. $\frac{\nu_{FF'}}{2\gamma_B} \gg 1$.

Приведем значения анизотропии A для $\gamma-\gamma$ каскада $2s \rightarrow 2p \rightarrow 1s$, в случае различных спинов μ -мезона.

Каскад $0(D)1(D)0$

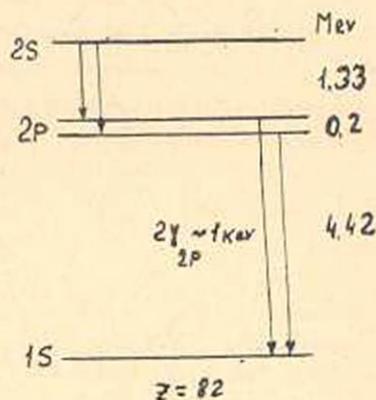
$$A = \frac{3A_2'}{2-A_2'}, \quad A_2' = \frac{1}{2}$$

$$I=0 \quad s=0 \quad A=1$$

$$s = \frac{1}{2} \quad A = 0,273$$

$$s = 1 \quad A = 0,225$$

$$s = \frac{3}{2} \quad A = 0,197$$



Для свинца сверхтонкая структура $\nu \sim 3 keV$ и в (12г) необходимо подставить $\left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2 = 9$, что приводит к:

$$I = \frac{1}{2} \quad s = \frac{1}{2} \quad A = 0,175,$$

$$s = \frac{3}{2} \quad A = 0,150.$$

Таким образом, измерение анизотропии A с точностью, дающей возможность отличить 0,08, достаточно, чтобы определить спин μ -мезона в случае, когда спин ядра равен нулю, а при равенстве спина мезона $\frac{1}{2}$ выяснить, равняется ли нулю спин ядра (так, например, для ядер ${}_{74}W^{182}$, ${}_{78}Pt^{194}$, ${}_{82}Pb^{204}$).

В заключение приношу глубокую благодарность проф. И. Я. Померанчуку за постановку вопроса, а также К. А. Тер-Мартirosяну и Л. М. Африкяну за внимание к работе.

Институт физики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 5 X 1956

Վ. Ա. Զրբաշյան

ՄԵԶՈՍՈՄՆԵՐԻ ԱՐՁԱԿԱԾ Դ-ԿՎԱՆՏՆԵՐԻ ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿՈՐԵԼՅԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է մեզոատոմի օրբիտներից մեկի վրա գտնվող μ -մեզոնի արձակած γ -կվանտների անկյունային կորելյացիայի էֆեկտը: Նուրբ և գերնուրբ ստրուկտուրաները հաշվի առնող բանաձևերի համեմատումը էքսպերիմենտի հետ կարող է նպաստել μ -մեզոնի սպինի, ինչպես և մի ամբողջ շարք միջին ու ծանր միջուկների սպինների ճշտմանը, օրոնց համար ենթադրվում է $I=0$:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wheeler J. A. Rev. Mod. Phys., 21, 133 (1949).
2. Fitch V. L. and Rainwater J. Phys. Rev., 92, 789 (1953).
3. Подгорецкий М. И. ЖЭТФ. 29, 374 (1955).
4. Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика, ГИИТТ (1953).
5. Biedenharn L. C., Blatt J. M. and Rose M. E. Rev. Mod. Phys. 24, 249 (1952).
6. Coertzel G. Phys. Rev., 70, 897 (1946).
7. Тер-Мартirosян К. А. ЖЭТФ, 21, 894 (1951).
8. Alder K. Helv. Phys. Acta, 25, 235 (1952).
9. Cooper L. N. and Henley E. M. Phys. Rev., 92, 801 (1953).

Г. И. Мелкоян

Задача о струйном обтекании дуги плоским, ограниченным потоком и ее практическое приложение

В настоящей статье рассмотрена задача кавитационного обтекания криволинейной поверхности, помещенной в поток с прямолинейными стенками. Решение проводится по схеме, предложенной Д. А. Эфроном. При этом указывается возможность обобщения данной задачи на случай наличия перелома поверхности препятствия, имея в виду, что точка перелома расположена на оси потока.

Это позволяет решать конкретные задачи обтекания криволинейных затворов гидросооружений в случаях, когда ось вращения затвора не лежит на геометрической оси рассматриваемого потока.

Наряду с этим выводятся расчетные формулы, позволяющие вычислять коэффициент сжатия струи, а следовательно, величину гидравлического сопротивления в случае, отвечающем схеме Кирхгофа.

Данное решение подлежит в дальнейшем экспериментальной проверке, поэтому расчетные графики и материал сравнения с опытом будут приложены во второй части статьи.

1. Исходные предпосылки

Частные задачи, решаемые теорией струйного обтекания

Явление обтекания тел ограниченным потоком с отрывом струй, представляет большой практический интерес.

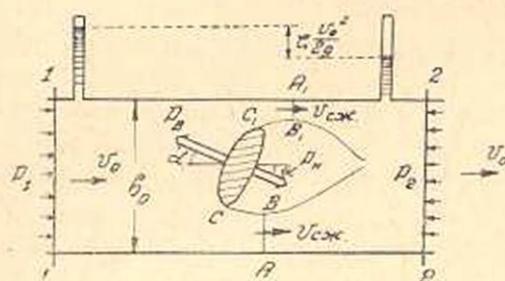
При обтекании препятствий тех или иных очертаний струя принимает вполне определенную форму, характеризующуюся коэффициентом сжатия ϵ , т. е. отношением площади сжатого сечения струи к площади отверстия в свету.

Знание величины ϵ позволяет теоретически определить коэффициент сопротивления в случае внезапного расширения потока. Из работ, посвященных этому вопросу, следует отметить работы В. М. Маккавеева [1], [2].

Постановка задачи при этом связана с принятием следующего предположения. Местные потери в напорных трубопроводах обусловлены наличием внезапного расширения потока за преградой. При этом на практике при обтекании жидкостью различного рода затворов — плоских, поворотных (дрессельных), сегментных, вальцевых и других —

струи, вытекая из отверстия, претерпевает сжатие, а затем быстрое и внезапное расширение, что позволяет применять формулу Борда к участку струи от сжатого ее сечения до полного расширения. Нетрудно видеть, что задача о теоретическом определении коэффициента местных потерь ζ сводится к вопросу определения сжатого сечения струи.

Решение вышеуказанной задачи позволяет также теоретически определять величину гидродинамического давления, возникающего от взаимодействия жидкости и обтекаемого препятствия.



Фиг. 1.

Для движения для сечений (1—1), $(A_1 B_1 C_1 CBA)$ и $(A_1 B_1 C_1 CBA)$ (2—2) (фиг. 1), получим:

$$\frac{\gamma}{g} Q (v_{сж.} - v_0) = p_1 b_0 - P_b \cos \alpha - \int_{ABC} p \cos (s; x) ds - \int_{A_1 B_1 C_1} p \cos (s; x) ds,$$

$$\frac{\gamma}{g} Q (v_0 - v_{сж.}) = P_n \cos \alpha - p_2 b_0 + \int_{ABC} p \cos (s; x) ds + \int_{A_1 B_1 C_1} p \cos (s; x) ds.$$

Все обозначения ясны из фиг. 1.

Сложив почленно оба выражения, придем к равенству:

$$(P_b - P_n) \cos \alpha = (p_1 - p_2) b_0 = \zeta_1 \frac{\gamma}{2g} v_0^2 b_0.$$

Наряду с этим, как это будет показано ниже, на основе полученных гидромеханических решений, возможно найти центр давлений, а также построить эпюру гидродинамического давления.

Исходные предположения о динамических соотношениях в потоке

Из предыдущего, следует, что задача сводится к определению величины ζ , которую можно определить из общих положений классической теории струй [9]. Предполагается что движение жидкости в рассматриваемом случае происходит при силах трения пренебрежимо малых по сравнению с силами инерции. Имея в виду уравнения движения реальной жидкости, условие представится в следующем виде:

$$\left| v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \gg |gf_x|.$$

$$\left| v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \gg |gfy|,$$

Здесь справа записаны члены, учитывающие влияние трения. С первого взгляда может показаться, что принятая схема движения не соответствует действительной, ввиду отбрасывания сил внутреннего трения.

Однако, в действительности в ряде случаев силы трения фактически малы, так как струя рассматривается только на участке между отверстием и сжатым сечением. Что же касается качественной стороны явления, а именно непрерывности распределения поля скоростей и давлений, то она сохраняется во всем потоке и нарушается лишь при подходе к твердым стенкам и переходе через линии отжима к зонам покоя в случае истечения под уровень.

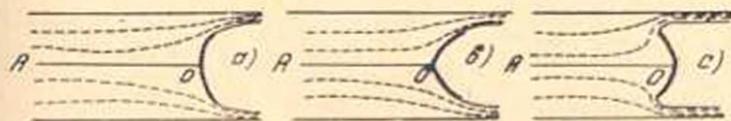
Наряду с этим предположением, движение жидкости принимается установившимся и потенциальным. Последнее условие соответствует безвихревому движению потока под действием потенциальных сил, что позволяет написать функцию потенциала скоростей φ , связанную с компонентами скоростей зависимостями:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Таким образом, задача с несколькими неизвестными v_x, v_y, v_z сводится к отысканию только функции φ . Последняя определяется при заданных граничных условиях уравнения Лапласа, для решения которого применена теория функций комплексного переменного.

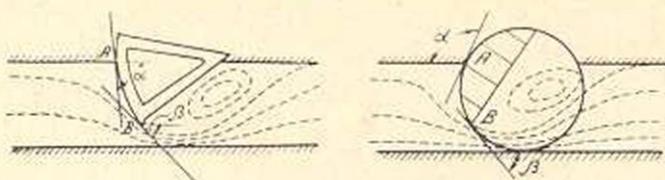
Теоретические схемы обтекания криволинейных поверхностей

Рассмотрим плоское обтекание криволинейных цилиндрических поверхностей потоком, ограниченным параллельными прямолинейными стенками (фиг. 2).



Фиг. 2.

На всех приведенных фигурах препятствия очерчены по дуге, с кромок которой происходит отрыв граничной линии тока. Не трудно видеть, что фиг. 2(в) соответствует схемам сегментного и вальцевого затворов в случае, если раздельную линию тока AO принять за твердую стенку. Действительно, напорные поверхности AB представляют собой части окружности, характеризующиеся определенным радиусом и величинами углов α и β между касательными, проведенными в точках A и B и горизонтальной осью (фиг. 3).



Фиг. 3.

Точка B является точкой отрыва граничной линии тока. В дальнейшем струя, вытекающая из отверстия затвора, рассматривается в пределах от отверстия до сжатого сечения. Скорость вдоль границы струи, не соприкасающейся с твердой стенкой, принимается постоянной.

Распределение скоростей в сжатом сечении отвечает гидростатическому закону. Однако следует сразу же указать на те пределы, в которых указанные теоретические модели будут соответствовать реальным течениям.

Остановимся более подробно на принимаемом условии постоянства скоростей вдоль границы струи. Из уравнения Бернулли, записанного вдоль границы струи от точки отрыва и до сжатого сечения без учета потерь следует, что скорость может быть величиной постоянной в случае истечения струи в атмосферу и пренебрежения членами, учитывающими эффект действия силы тяжести (т. е. $\frac{P}{\gamma} = \frac{P_{вт}}{\gamma}$ и $z = 0$).

В случае кавитационного обтекания тел, когда $\frac{P}{\gamma} = \frac{P_{кавит}}{\gamma}$, условие постоянства скоростей также возможно принять при пренебрежении силами тяжести. Истечение струи под уровень характеризуется гидростатическим распределением давлений вдоль границы струи, ибо при условии $v = \text{const}$ указанное выше уравнение Бернулли превращается в равенство:

$$\frac{P}{\gamma} + z = c.$$

Это предположение довольно удовлетворительно подтверждается экспериментами (см. [1] и [2]).

Однако принятие одного условия постоянства скоростей в случае обтекания криволинейных препятствий малого радиуса кривизны, даже при правильном его назначении, недостаточно. Важнейшую роль в построении картины обтекания играет также определение местоположения точки отрыва. Из экспериментов известно, что при обтекании цилиндра, набегающий поток, разветвившись в передней критической точке, омывает его лишь до точек отрыва, находящихся примерно на $\alpha = 84^\circ$ при числе Рейнольдса, равном 157 200, и на $\alpha = 120^\circ$ при $Re = 251 300$, после чего поток отрывается (Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, стр. 243 и 591). Очевидно, что эта зависимость

расположения точки отрыва от степени турбулизации потока не может быть учтена в решениях, полученных с помощью потенциальных течений. Исходя из этого, в предлагаемом нами решении заранее предполагается, что на всем протяжении преграды отрыва потока не происходит. Затем поток, достигнув кромок рассматриваемого препятствия, срывается с них, образуя до сжатого сечения струи ограниченные поверхности, на которых принимаются указанные выше условия.

Данное предположение полностью соответствует действительности, так как из экспериментов известно, что при обтекании затворов с напорными поверхностями относительно большой кривизны поведение потока аналогично описанному выше.

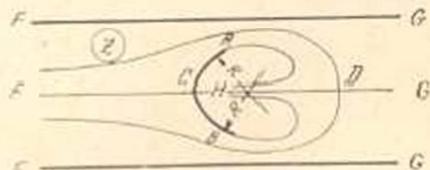
При обтекании препятствий малого радиуса кривизны точка отрыва потока должна в каждом частном случае определяться особо, с учетом степени турбулентности потока или же экспериментально. Решения, даваемые в этих случаях теорией отрывного обтекания (см. [7] и [10]), с нашей точки зрения кажутся маловероятными, ввиду невозможности учета вышеназложенных обстоятельств.

2. Кавитационное обтекание ограниченным потоком поверхности, очерченной по дуге круга

Рассмотрим общий случай кавитационного обтекания поверхности, очерченной по дуге круга, частным случаем которого будет интересующее нас обтекание криволинейных поверхностей затворов. Постановка задачи кавитационного течения принадлежит Д. А. Эфросу.

Составление уравнения связи области течения z и области параметрического переменного w

Пусть плоский ограниченный поток обтекает симметричную поверхность, очерченную кривой, состоящей из двух дуг круга, и пусть за этой поверхностью образуется кавитационная область течения, указанная на фиг. 4. Вдоль границ струи AH и BH скорости принимаем постоянными и равными v_1 . В бесконечно удаленных точках F и G скорости равны v_0 . В критической точке потока C скорость равна нулю. Как известно, $\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}$ есть сопряжен-

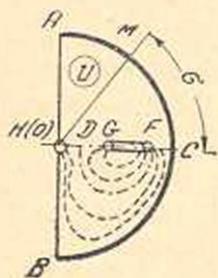


Фиг. 4.

ная скорость в любой точке области течения $z = x + iy$, где $w = \varphi + i\psi$ — характеристическая функция, ψ — функция тока, φ — функция потенциала скоростей.

Наряду с этим в случае кавитационного обтекания существуют две отдельные криволинейные линии тока FD , разветвляющиеся в точке D на линии токов HD и DG . Очевидно, что в этой точке ско-

рость также равна нулю. Отообразим конформно область течения Z на внутренность единичного полукруга в области параметрического



Фиг. 5.

комплексного переменного u таким образом, чтобы обтекаемый контур перешел в полукруг, а свободной струе соответствовал вертикальный диаметр (фиг. 5). Нетрудно видеть, что краям преграды будут соответствовать точки $u \pm i$, критической точке потока C — значение $u = 1$, а бесконечно удаленной точке H будет соответствовать центр данного полукруга. Граничным стенкам потока в области u будут соответствовать линии разреза от точки G до точки F . Обозначим точки G, D и F в области u соответственно через g, d и f .

Составим уравнение связи $\frac{dz}{du} = f(u)$, по которому найдем выражение, связывающее область течения и область параметрического переменного в виде:

$$z = \int_{u_1}^{u_2} \frac{dz}{du} du. \quad (2.1)$$

Последнее уравнение позволяет, используя ряд граничных условий, определить в дальнейшем все неизвестные величины, которые войдут в уравнение (2.1),

но

$$\frac{dz}{du} = \frac{dw}{v_1 du}, \quad (2.2)$$

$$\frac{dw}{v_1 dz}$$

Следовательно, задача сводится к построению двух функций:

$$\frac{dw}{v_1 du} = f_1(u) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{v_1 dz} = f_2(u).$$

Вышеуказанные выражения построим по нулям и полюсам, определив их в области u .

Продолжим функцию $\frac{dw}{v_1 du}$ на всю плоскость. Тогда, как не трудно видеть, будем иметь нули в точках

$$\pm i; \pm d; \pm \frac{1}{d}; \pm 1,$$

а полюсы в точках

$$0; \pm g; \pm f; \pm \frac{1}{g}; \pm \frac{1}{f}.$$

Таким образом, можно сразу написать, независимо от очертаний обтекаемой преграды, следующее выражение:

$$\frac{dw}{v_1 du} = N \frac{(u^4 - 1)(d^2 - u^2)(1 - d^2 u^2)}{u(f^2 - u^2)(g^2 - u^2)(1 - f^2 u^2)(1 - g^2 u^2)} \quad (2.3)$$

Обратим внимание на физический смысл понятия нулей и полюсов при построении функции $\frac{dw}{v_1 du}$ в области $u = u_1 + iu_2$. Можно показать, что

$$\frac{dw}{du} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = v_{u_1} - i v_{u_2} = v e^{-i\alpha},$$

т. е. $\frac{dw}{v_1 du}$ представляет значение сопряженной скорости течения в области переменного u , возникающего ввиду наличия источника в точке f и двух стоков в $u=0$ и в $u=g$. На фиг. 5 в одной половине области показаны линии токов вышеуказанного течения, соответствующие линиям токов действительного потока в области z .

Известно, что в точках обтекания внутренности углов и в критических точках $\frac{dw}{v_1 du} = 0$ (точки нулей). В точках же расположения источников или стоков $\frac{dw}{v_1 du} = \infty$ (так как в этих точках $w = a \ln(u-g)$).

Отсюда: $\left(\frac{dw}{du}\right)_{u=g} = \left|\frac{a}{u-g}\right|_{u=g} = \infty$. В таких точках будут расположены точки полюсов.

Аналогичным образом запишем зависимость

$$\frac{dw}{v_1 dz} = f_2(u).$$

Данная функция представляет, как указывалось выше, сопряженную скорость в действительном потоке. Она обращается в нуль в критической точке C и в точке разветвления D . Продолжая полукруг в области u на всю плоскость, будем иметь нули выше указанной функции в точках $1; d; \frac{1}{d}$ и полюсы в точках $-1; -d; -\frac{1}{d}$.

В работе Л. И. Седова ([3], стр. 227) указывается, что при наличии криволинейных препятствий выражение для $\frac{dw}{v_1 dz}$ примет вид

$$\frac{dw}{v_1 dz} = f_2(u) e^{-F(u)}, \quad (2.4)$$

где $F(u)$ — некоторая регулярная в верхней полуплоскости функция. Представим ее в виде следующего степенного ряда:

$$F(u) = A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \frac{A_5}{5} u^5 + \dots \quad (2.5)$$

На основании сказанного выше можно написать:

$$\frac{dw}{v_1 dz} = \frac{(u-1)(u-d)(du-1)}{(u+1)(u+d)(du+1)} \exp - \left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \frac{A_5}{5} u^5 + \dots \right). \quad (2.6)$$

Разделив равенство (2.3) на (2.5), получим:

$$\frac{dz}{du} = \frac{(u^2+1)(u+1)^2(d+u)^2(du+1)^2 \exp \left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \dots \right)}{u(f^2-u^2)(g^2-u^2)(1-f^2u^2)(1-g^2u^2)}. \quad (2.7)$$

Составление уравнения, определяющего радиус кривизны обтекаемой преграды

$$\text{Как известно, } R = \frac{ds}{d\theta}, \quad (2.8)$$

где R — радиус кривизны,

ds — дифференциал дуги,

θ — угол наклона вектора скорости к горизонтальной оси.

Вместе с тем $ds = |dz|$, где из (2.7)

$$dz = N \left| \frac{(e^{2i\sigma} + 1)(e^{i\sigma} + 1)^2 (de^{i\sigma} + 1)^2 i e^{i\sigma} e^{Re F(u)} d\sigma}{e^{i\sigma} (f^2 - e^{2i\sigma})(g^2 - e^{2i\sigma})(1 - f^2 e^{2i\sigma})(1 - g^2 e^{2i\sigma})} \right|. \quad (2.9)$$

Здесь σ — полярный угол комплексной точки в области u .

Из (2.5) следует, что

$$F(u) = A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots + i (A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \dots). \quad (2.10)$$

В общем случае

$$\theta = \alpha + A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \frac{A_5}{5} \sin 5\sigma + \dots, \quad (2.11)$$

где α — угол наклона к горизонтальной оси касательной, проведенной в точке C .

Подставив (2.9) и (2.11) в (2.8) и произведя преобразования, получим окончательно:

$$\frac{R}{N} = \frac{8 \cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2} (1 + d^2 + 2d \cos \sigma)^2 \exp \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots \right)}{(1 + f^4 - 2f^2 \cos 2\sigma)(1 + g^4 - 2g^2 \cos 2\sigma)(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \dots)}. \quad (2.12)$$

Определение коэффициентов A_n ряда (2.5)

Вспользуемся уравнением радиуса кривизны (2.12). Задаваясь в нем значениями σ , получим в левой части одну и ту же величину отношения $\frac{R}{N}$, так как обтекаемая преграда представляет собой дугу окружности.

Так, например, при $\alpha = 0$

$$\left. \frac{R}{N} \right|_{\alpha=0} = \frac{8(1+d)^4 \exp(A_1 + \frac{A_3}{3} + \frac{A_5}{5} + \dots)}{(1-f^2)^2 (1-g^2)^2 (A_1 + A_3 + A_5 + \dots)} \quad (2.13)$$

При $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\left. \frac{R}{N} \right|_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} (1+d^2 + \sqrt{2}d) \exp \frac{\sqrt{2}}{2} (A_1 - \frac{A_3}{3} - \frac{A_5}{5} + \dots)}{(1+f^4)(1+g^4)(A_1 - A_3 - A_5 + \dots)} \quad (2.14)$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \frac{R}{N} \right|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \frac{4(1+d^2)^2}{(1+f^2)(1+g^2)^2 (A_1 - 3A_3 + 5A_5 \dots)} \quad (2.15)$$

В уравнении (2.5) воспользуемся тремя членами ряда. Тогда, приравняв друг другу выведенные равенства, получим два уравнения для определения искомых коэффициентов.

Для получения дополнительного уравнения отметим, что угол наклона вектора скорости β в точке отрыва струи $A \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right)$ задан и равен β .

Тогда из уравнения (2.11) получим:

$$\beta = \alpha + A_1 - \frac{A_3}{3} + \frac{A_5}{5} - \dots \quad (2.16)$$

или

$$A_1 - \beta - \alpha + \frac{A_3}{3} - \frac{A_5}{5} + \dots \quad (2.17)$$

Наряду с этим можно, исходя из соображений о конечности кривизны в точке отрыва, получить еще одно довольно простое условие [10].

Запишем выражение:

$$\frac{d}{du} \left(\ln \frac{dw}{v, dz} \right) = \frac{1}{u-d} - \frac{1}{u+d} + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{d}{du-1} - \frac{d}{du+1} - A_1 - A_2 u^2 - A_3 u^4 - \dots \quad (2.18)$$

Но на свободных струях $v = v_1$. Поэтому:

$$-i \frac{d\theta}{du} = \frac{2d}{u^2-d^2} + \frac{2}{u^2-1} + \frac{2d}{d^2 u^2-1} -$$

$$-A_1 - A_3 u^2 - A_5 u^4 - \dots \quad (2.19)$$

С другой стороны, из (2.7) следует, что:

$$\left| i \frac{ds}{du} \right| = N \frac{(u^2 + 1)(u + 1)^2 (d + u)^2 (du + 1)^2 \exp\left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \dots\right)}{u(f^2 - u^2)(g^2 - u^2)(1 - f^2 u^2)(1 - g^2 u^2)} \quad (2.20)$$

Поделив (2.19) на (2.20), получим выражение для радиуса кривизны, из которого следует, что в точках срыва струй $u = \pm i$; $R = 0$, что противоречит действительной картине обтекания дуги определенного радиуса. Поэтому можно записать следующее условие:

$$\left| i \frac{d\theta}{du} \right|_{u=\pm i} = 0,$$

что приводит к выражению:

$$1 + \frac{4d}{1+d^2} = -A_1 + A_3 - A_5 + \dots \quad (2.21)$$

Решая уравнение (2.17) и (2.21) относительно A_1 и A_3 , получим:

$$A_1 = \frac{3}{2}(\beta - \alpha) + \frac{1}{2} + \frac{2d}{1+d^2} + \frac{A_5}{5}, \quad (2.22)$$

$$A_3 = \frac{3}{2}(\beta - \alpha) + \frac{3}{2} + \frac{6d}{1+d^2} + \frac{6A_5}{5}. \quad (2.23)$$

Коэффициент A_5 определится из уравнений (2.13) и (2.15). Действительно, приравняв эти уравнения друг другу и произведя простые преобразования с исключением коэффициентов A_1 и A_3 , придем к следующему равенству, содержащему A_5 в неявном виде:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+f^2}{1-f^2} \right)^2 \left(\frac{1+d}{1+d^2} \right)^2 \left(\frac{1+g^2}{1-g^2} \right)^2 = \\ & = \frac{\frac{3}{2}(\beta - \alpha) + 1 + \frac{3d}{1+d^2} + \frac{6}{5}A_5}{-3(\beta - \alpha) - 4 - \frac{16d}{1+d^2} + \frac{8}{5}A_5} \left[\begin{aligned} & 2(\beta - \alpha) + 1 + \\ & + \frac{20d}{1+d^2} + 4A_5 + \dots \end{aligned} \right]. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Определение неизвестных параметров N , d , f и g

Для определения этих параметров имеем следующие условия:

1) условие равенства ширины потока в сечениях F и G (в области z), что равносильно выражению:

$$\int_f^g \frac{dz}{du} du = - \int_g^f \frac{dz}{du} du; \quad (2.25)$$

2) условия для скорости набегающего потока:

$$\left[\frac{dw}{v_1 dz} \right]_{u=f} = [f_2(u)]_{u=f} = \frac{v_0}{v_1} \quad (2.26)$$

и транзитного потока

$$\left[\frac{dw}{v_1 dz} \right]_{u=g} = [f_2(u)]_{u=g} = \frac{v_0}{v_1}; \quad (2.27)$$

3) условие, определяющее толщину струи b_1 :

$$ib_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{du} du; \quad (2.28)$$

4) условие равенства уравнений (2.14) и (2.15).
Выведем уравнения (2.25), (2.26), (2.27) и (2.28).

$$1. \quad \int_f^g \frac{dz}{du} du = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_0^{\pi} r e^{i\varphi} R(f + r e^{i\varphi}) d\varphi =$$

$$= - \frac{iN\pi}{2} \frac{(f^2 + 1)(f + 1)^2(d + f)^2(1 + fd)^2 \exp\left(A_1 f + \frac{A_3}{3} f^3 + \dots\right)}{f^2(g^2 - f^2)(1 - f^4)(1 - g^2 f^2)} \quad (2.29)$$

$$- \int_g^f \frac{dz}{du} du =$$

$$= \frac{iN\pi}{2} \frac{(g^2 + 1)(g + 1)^2(d + g)^2(1 + dg)^2 \exp\left(A_1 g + \frac{A_3}{3} g^3 + \dots\right)}{g^2(f^2 - g^2)(1 - f^2 g^2)(1 - g^4)} \quad (2.30)$$

Приравняв (2.29) и (2.30), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{g^2(1+f^2)}{f^2(1+g^2)} \left(\frac{1+f}{1+g} \right)^2 \left(\frac{d+f}{d+g} \right)^2 \left(\frac{1+df}{1+dg} \right)^2 \left(\frac{1-g^4}{1-f^4} \right) = \\ & = \exp \left[A_1(g-f) + \frac{A_3}{3}(g^3-f^3) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \left| \frac{dw}{v_1 dz} \right|_{u=f} = \frac{v_0}{v_1} = \\ & = \frac{(f-1)(d-f)(1-df)}{(1+f)(d+f)(1+df)} \exp \left(A_1 f + \frac{A_3}{3} f^3 + \dots \right); \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\left| \frac{dw}{v_1 dz} \right|_{u=g} = \frac{v_0}{v_1} =$$

$$= \frac{(g-1)(d-g)(1-dg)}{(1+g)(d+g)(1+dg)} \exp - \left(A_1 g + \frac{A_3}{3} g^3 + \dots \right). \quad (2.33)$$

Приравняв (2.32) и (2.33), получим после несложных преобразований:

$$\frac{(g-1)(d-g)(1-dg)(1+f)(d+f)(1+df)}{(g+1)(d+g)(1+dg)(f-1)(d-f)(1-df)} = \\ = \exp \left[A_1 (g-f) + \frac{A_3}{3} (g^3 - f^3) + \dots \right]. \quad (2.34)$$

$$3. \quad b_1 = -i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{du} du = N \frac{d^2}{f^2 g^2} \pi, \quad (2.35)$$

откуда
$$N = \frac{b_1}{\pi} \left(\frac{fg}{d} \right)^2. \quad (2.36)$$

$$4. \quad \frac{(1+d^2)^2(1+f^4)(1+g^4)}{(1+\sqrt{2}d+d^2)(1+f^2)^2(1+g^2)^2} = \\ = \sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \frac{A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \dots}{A_1 - A_3 - A_5 + \dots} \exp \frac{\sqrt{2}}{2} \left(A_1 - \frac{A_3}{3} - \right. \\ \left. - \frac{A_5}{5} + \dots \right). \quad (2.37)$$

Для упрощения решения уравнений (2.31) и (2.34) относительно неизвестных параметров приравняем их, что приведет к равенству, в левую и правую части которого входят параметры g , f и d :

$$\frac{(g^2 - d^2)(1 - d^2 g^2)}{g^2} = \frac{(f^2 - d^2)(1 - d^2 f^2)}{f^2}. \quad (2.38)$$

Следует отметить, что параметры f , d и g по величине меньше единицы и наряду с этим

$$f > g > d.$$

Очевидно, уравнения, полученные на основании приведенных выше четырех условий, позволяют определить четыре неизвестных параметра.

Определение величины сжатого сечения струи

Подставим в уравнение для радиуса кривизны (2.12) значение постоянной N из уравнения (2.36), предварительно разделив обе части равенства на высоту потока b_0 и решив уравнение относительно $\frac{R}{b_0}$.

Тогда получим:

$$\frac{R}{b_0} = \frac{8}{\pi} \frac{b_1}{b_0} \left(\frac{fg}{d} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{\cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2} (1 + d^2 + 2d \cos \sigma)^2 \exp \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_2}{3} \cos 3\sigma + \dots \right)}{(1 + g^4 - 2g^2 \cos 2\sigma) A_1 \cos \sigma + A_3 \cos 3\sigma + \dots} (2.39)$$

Последнее уравнение при известных параметрах позволяет построить зависимость $\frac{R}{b_0}$ в функции от $\frac{b_1}{b_0}$, что в свою очередь позволит для заданных соотношений относительного радиуса кривизны определить значение $\frac{b_1}{b_0}$.

3. Решение задачи обтекания сегментного и вальцевого затворов в частном случае $d = g = 0$

Определение параметров, входящих в выведенные уравнения

Как нетрудно видеть, решение обтекания поверхности, очерченной по дуге круга, в случае $d = g = h = 0$ сводится к постановке задачи, предложенной Кирхгофом. В этом случае полученные уравнения сильно упрощаются.

Действительно, вычисление коэффициентов A_1 , A_3 , A_5 , возможно провести, пользуясь следующими равенствами, получающимися из (2.22), (2.23) и (2.24):

$$A_1 = \frac{3}{2} (\beta - \alpha) + \frac{1}{2} + \frac{A_5}{5}; \quad (3.1)$$

$$A_3 = \frac{3}{2} (\beta - \alpha) + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} A_5;$$

$$\left(\frac{1 + f^2}{1 - f^2} \right)^2 = \frac{\frac{3}{2} (\beta - \alpha) + 1 + \frac{6}{5} A_5}{-3 (\beta - \alpha) - 4 + \frac{8}{5} A_5} \exp \left[2 (\beta - \alpha) + 1 + 4A_3 \right]. \quad (3.2)$$

Преобразуем последнее уравнение, предварительно обозначив правую часть через $f(A_5)$. Тогда, решив его относительно f , запишем:

$$f = \sqrt{\frac{\sqrt{f(A_5)} - 1}{\sqrt{f(A_5)} + 1}}. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) позволяет построить зависимость между параметром $f < 1$ и коэффициентом A_5 при заданных значениях $(\beta - \alpha)$.

Наряду с этим из (2.39) получаем:

$$\frac{R}{b_0} = \frac{b_1}{b_0} \frac{8}{\pi} \times$$

$$f^2 \cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2} \exp \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \frac{A_5}{5} \cos 5\sigma + \dots \right) \times \frac{1}{(1 + f^4 - 2f^2 \cos 2\sigma)(A_1 \cos \sigma + A_3 \cos 3\sigma + A_5 \cos 5\sigma + \dots)} \quad (3.4)$$

В совокупности с (3.1) и (3.2) последнее равенство позволяет построить зависимость между $\frac{R}{b_0}$ и коэффициентом A_5 при заданном угле $(\beta - \alpha)$.

Однако для осуществления этого построения, кроме отмеченных величин, необходимо знать также зависимость входящего в (3.4) отношения $\frac{b_1}{b_0}$ от вышеуказанных величин.

Для определения этой зависимости отметим, что исходя из уравнения неразрывности, можно написать:

$$\frac{b_1'}{b_0'} = \frac{v_0}{v_1}, \quad (3.5)$$

где в данной рассматриваемой задаче, величина $b_1 = 2b_1'$,

b_0' — половина ширины потока,

а b_1' — величина сжатого сечения каждой из двух струй, обтекающих преграду (ввиду симметричности обтекаемой поверхности, величины этих сжатых сечений равны между собой). Подставляя (3.5) в (3.4) и воспользовавшись уже выведенным уравнением (2.32), представив его в виде:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{1-f}{1+f} \exp - \left(A_1 f + \frac{A_3}{3} f^3 + \frac{A_5}{5} f^5 + \dots \right), \quad (3.6)$$

окончательно получим зависимость при известном $\beta - \alpha$.

Так как отношение $\frac{R}{b_0}$ для любых значений σ остается одним и тем же, то для упрощения выражения (3.4) примем $\sigma = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\frac{R}{b_0'} = \frac{8}{\pi} \frac{v_0}{v_1} \frac{f^2}{(1+f^2)^2} \frac{1}{A_1 - 3A_3 + 5A_5}. \quad (3.7)$$

Совокупность уравнений (3.7), (3.6), (3.1), (3.2) и (3.3) позволяет определить коэффициент A_5 в зависимости от заданного отношения $\frac{R}{b_0}$.

Определение зависимости, характеризующей закон распределения давления вдоль обтекаемой преграды

Из уравнения Бернулли, записанного для крайней линии тока

CB (фиг. 6), характеризующейся постоянной ординатой b_2 и переменной y , получим

$$\frac{p-p_0}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} - y + b_2, \quad (3.8)$$

где v — значение скорости в любой точке дуги CB . Наряду с этим

$$\left| \frac{v}{v_1} \right| = \left| \frac{dw}{v_1 dz} \right|.$$

Следовательно, для определения величины избыточного давления, оказываемого потоком на обтекаемую преграду, достаточно решить уравнение

$$\left| \frac{dw}{v_1 dz} \right| = \frac{1-u}{1+u} \exp - \left(A_1 u + \frac{A_3}{3} u^3 + \frac{A_5}{5} u^5 + \dots \right) \quad (3.9)$$

для точек, лежащих на дуге BC или AC области u (фиг. 5). Так как картина обтекания симметрична, то ограничимся положительными и меньшими, чем $\frac{\pi}{2}$, значениями σ ($\frac{\pi}{2} \geq \sigma \geq 0$). Преобразовав (3.9), придем к выражению

$$\frac{v}{v_1} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \exp - \left(A_1 \cos \sigma + \frac{A_3}{3} \cos 3\sigma + \frac{A_5}{5} \cos 5\sigma \right). \quad (3.10)$$

Однако для окончательного решения задачи необходимо знать соответствие точек обтекаемой поверхности области u точкам области действительного течения z . Это соответствие можно установить из уравнения (2.11):

$$\theta = \alpha + A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \frac{A_5}{5} \sin 5\sigma + \dots \quad (3.11)$$

Из простых геометрических построений (фиг. 6) следует, что

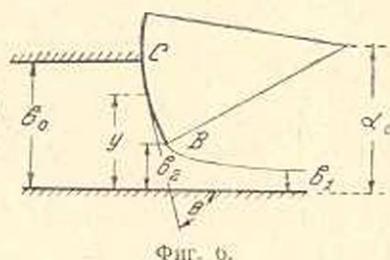
$$\cos \theta = \frac{d_0 - y}{R}; \quad (3.12)$$

$$\cos \alpha = \frac{d_0 - b_0}{R}. \quad (3.13)$$

Подставив (3.11) в (3.12) и разделив обе части равенства на b_0 , получим

$$\frac{y}{b_0} = -\frac{R}{b_0} \cos \left(\alpha + A_1 \sin \sigma + \frac{A_3}{3} \sin 3\sigma + \dots \right) + \frac{d_0}{b_0},$$

где d_0 — расстояние оси вращения затвора от дна флютбета.



Фиг. 6.

Գ. Ի. Մեկրոնյան

ՈՒՂՂԱԶԻԳ ՊԱՏԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ՀԱՐԹ ԱՂԵՂԻ
ՇՐՋԱՀՈՍՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ ՆՐԱ ՊՐԱԿՏԻԿ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է ազդածից պատերով սահմանափակված աղեղի կապիտացիոն շրջահոսման խնդիրը, համաձայն Դ. Էֆրոսի առաջարկած սխեմայի: Ընդ որում խնդիրը լուծվում է այն դեպքի համար, երբ աղեղը հոսանքի առանցքի վրա ունի բեկում:

Սրանով մենք հնարավորություն ենք տեսնում լուծելու հիդրոտեխնիկական կառուցվածքների փականների (սեղմենառային և վալցային) շրջահոսման խնդիրն այն դեպքերի համար, երբ փականների պտտման առանցքները չեն համընկնում հոսանքի երկրաչափական առանցքի հետ:

Ելնելով Կրիստաֆի սխեմայից, հոդվածում տրվում են հաշվային բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է հաշվի առնել շիֆի սեղման գործակիցը, հետևապես և հիդրավլիկական գիմադրությունը: Իրա հետ մեկտեղ տրվում է արտահայտություն, որի միջոցով կարելի է որոշել հիդրոդինամիկական ճնշման բաշխումը կոր մակերևույթի վրա:

Ստացված լուծումը ենթակա է փորձով ստուգման:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маккавеев В. М. О теоретическом определении коэффициента местных гидравлических сопротивлений. Труды ЛИИВТа, 1 (1932).
2. Маккавеев В. М. и Коновалов И. М. Исследование на модели участка галерей Колвинского шлюза. Труды ЛИИВТа, 5 (1934).
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики (1950).
4. Гуревич М. И. Симметричное обтекание плоской пластинки, помещенной между стенками. Известия АН СССР, 4 (1946).
5. Гуревич М. И. Обтекание цилиндра в кавитацион. потоке. Труды Московск. института рыбн. промышленности, V (1953).
6. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения. ДАН СССР, 4 (1946).
7. Берман Я. Р. Отрывное обтекание круглого цилиндра в ограниченном потоке. Прикл. матем. и механика, XIII (1949).
8. Мелконян Г. И. К вопросу отрывного обтекания затворов гидросооружений. Труды ЛИИВТ, XXIII.
9. Мелконян Г. И. Струйное несимметричное обтекание наклонной пластинки в ограниченном потоке. Труды ЛИИВТа, XXI.
10. Brodetsky. Comptes Reudus du 2-ieme congres Inter. de Mecanique appliquee Zurich (1926).