ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ X, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян

К теоремам Шотки и Пикара

1. Пусть $f(z)$—аналитическая функция, заданная рядом Тейлора в окрестности начала координат. Обозначим через Σ поверхность Римана этой функции, получаемую всевозможными аналитическими продолжениями заданного элемента, а Ω пусть будет некоторая подобласть Σ, содержащая начало координат; в частности, допускается совпадение Ω с Σ.

В настоящей работе мы установим теорему Шотки для Ω, в частности и для Σ. Отсюда, естественно, следует утверждение, связанное с теоремой Пикара.

В качестве следствия получаем условия, которым должна удовлетворять функция $f(z)$ для того, чтобы она принимала в Ω либо в Σ всевозможные значения, кроме, быть может, одного значения.

Если бы Σ либо Ω были достаточно простые области и можно было при их отображении на круг либо плоскость иметь количественные оценки искажения, при переходе от одной переменной к другой, то установление указанных результатов не представляло бы трудности.

Однако Σ, как и Ω, вообще говоря, могут представлять многолистные и бесконечно связные поверхности, для которых нет соответствующих оценок искажения, и поэтому получить вышеупомянутые количественные результаты путем сведения к кругу либо плоскости нельзя.

Но эти оценки можно получить прямым путем, что и составляет существо настоящей статьи.

2. Границу римановой поверхности Σ обозначим через $S(\Sigma)$, а границу Ω через $S(\Omega)$.

Произвольную точку P поверхности Ω можно достигнуть из начала координат, оставаясь внутри Ω, какой-либо спрямляемой дугой L. Длину L обозначим через l.

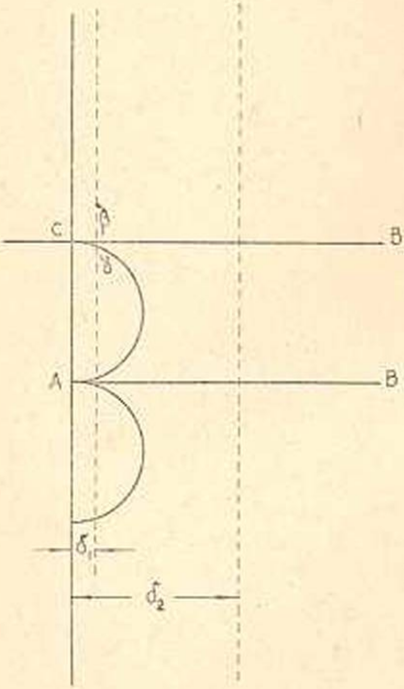
Пусть s — дуговое расстояние переменной на L точки Q от начала, $\rho(s)$ — расстояние точки Q до $S(\Omega)$.

3. Наконец, возьмем на правой половине ζ — плоскости криволинейный треугольник с нулевыми углами A, B, C, ограниченный полупрямыми AB ($Im\zeta = -1$), CB ($Im\zeta = 0$) и полуокружностью с диаметром AC (фиг. 1). Отображая конформно треугольник ABC на

полуплоскость $Imw > 0$ так, чтобы точки $\zeta = 0, -i, \infty$ перешли соответственно в 0, 1, ∞, получим модулярную функцию

$$w = \lambda(\zeta),$$

которая аналитически продолжается на всю полуплоскость $R\zeta > 0$ и отображает ее на универсальную поверхность наложения (у. п. н.) плоскости w с выключенными точками $w = 0, 1, \infty$.



Фиг. 1.

Обратную функцию, отображающую у. п. н. на $R\zeta > 0$, обозначим через

$$\zeta = \nu(w)$$

(ср. [1], стр. 14—29).

4. Для области Ω можно сформулировать теорему Шотки следующим образом.

Теорема 1. Если в Ω функция $f(z)$ не принимает конечных значений a и b, то в любой точке P поверхности Ω имеет место оценка

$$\lg\left|\frac{f(z)-a}{b-a}\right| < ke^{2\int\limits_{L}\frac{ds}{\rho(s)}} + \text{const}, \qquad (1)$$

где const — *абсолютная постоянная, а*

$$K < 1 + \left|\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right]\right| + \frac{1}{4R\nu\left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right]}.$$

Неравенство (1) и есть неравенство Шотки для $f(z)$.

Доказательство. Рассмотрим, как это принято в таких задачах, функцию

$$\nu\left[\frac{f(z)-a}{b-a}\right] = \psi(z) \; .$$

Функция $\frac{f(z)-a}{b-a}$ не принимает в Ω значений 0, 1, ∞; поэтому ее значения попадают внутрь упомянутой у. п. н. и, следовательно, в Ω

$$R\psi(z) > 0.$$

Обозначим

$$\psi(z) = u + iv. \qquad (2)$$

Оценим функцию u в произвольной точке $P \in \Omega$. Для этого заметим, что для гармонической и положительной в круге $|z| < R$ функции $\vartheta(x, y)$ имеет место оценка

$$\vartheta(0, 0)\frac{R-r}{R+r} < \vartheta(x, y) < \vartheta(0, 0)\frac{R+r}{R-r}, \qquad (3)$$

где $r = |z|$. В частности, применив это неравенство для точки, бесконечно близкой к $z = 0$, и обозначив через $d\vartheta$ дифференциал функции $\vartheta(x, y)$ при переходе от точки (0, 0) к бесконечно близкой точке

$(\Delta x, \Delta y)$, расположенной на некоторой дуге, проходящей через $(0, 0)$, и, наконец, обозначив бесконечно малую дугу через ds,

$$ds \sim dr,$$

получим из предыдущего неравенства

$$\left| \frac{d\vartheta}{ds} \right| \leqslant 2 \frac{\vartheta}{R}. \tag{4}$$

Здесь ϑ и $\dfrac{d\vartheta}{ds}$ — значения этих величин в центре круга.

Так как в нашем случае в (2) функция u положительная на поверхности Ω, то неравенство (4) можно применить к функции u в любой точке дуги L и получим

$$\left| \frac{du(s)}{ds} \right| \leqslant 2 \frac{u(s)}{\rho(s)}, \tag{5}$$

где через $u(s)$ обозначено ради краткости значение $u(x, y)$ в точке $Q(s) \in L$.

Интегрируя (5) по длине дуги L от начала координат до точки P, получим

$$u(0)\, e^{-2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} < u(P) < u(0)\, e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}$$

или

$$R\nu \left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} < u(P) < R\nu \left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{6}$$

Это неравенство показывает, что значение функции

$$\nu \left[\frac{f(z)-a}{b-a}\right]$$

в точке P римановой поверхности Σ попадает в полосу

$$R\nu \left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{-2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} < R\zeta < R\nu \left[\frac{f(0)-a}{b-a}\right] e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{7}$$

(область $\delta_1 < R\zeta < \delta_2$, на фиг. 1, где через δ_1 и δ_2 обозначены соответственно левая и правая части неравенства (7).

5. Оценим теперь в точке P функцию $\psi(z)$.

Поместив временно начало координат в точке $Q(s)$ кривой L, применим в круге $|z| < r < \rho(s)$ формулу Шварца

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=r} u \frac{t+z}{t-z} d\alpha + iv(0);$$

здесь $t = re^{i\alpha}$; значения $u(z)$ и $\psi(z)$ в точке $z = 0$ обозначены соответственно через $u(s)$ и $\psi(s)$.

Из формулы Шварца следует

$$\left.\frac{d\psi}{dz}\right|_{z=0} = \frac{1}{\pi}\int \frac{u\,d\alpha}{t},$$

а отсюда

$$\left|\frac{d\psi}{ds}\right| \leqslant \frac{1}{\pi r}\int u\,d\alpha = \frac{2u(s)}{r},$$

и так как $u(s) \leqslant |\psi(s)|$ и $|d\psi| \geqslant |d|\psi||$, то получим для $|\psi(s)|$ следующее дифференциальное неравенство:

$$\left|\frac{d|\psi(s)|}{ds}\right| \leqslant 2\,\frac{|\psi(s)|}{r}$$

или

$$\left|\frac{d\lg|\psi(s)|}{ds}\right| \leqslant \frac{2}{r}.$$

Здесь левая часть не зависит от r; поэтому, беря $r \to \rho(s)$, получим окончательно

$$\left|\frac{d\lg|\psi(s)|}{ds}\right| \leqslant \frac{2}{\rho(s)}. \tag{8}$$

Интегрируя это неравенство вдоль дуги L, от $s = 0$ до $s = l$, получим

$$\lg\left|\frac{\psi(s)}{\psi(0)}\right| \leqslant 2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}$$

или

$$|\psi(s)| = |\psi(P)| \leqslant |\psi(0)|\,e^{2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{9}$$

Интегрируя вдоль той же дуги, но в обратном порядке, получим

$$|\psi(P)| \geqslant |\psi(0)|\,e^{-2\int_0^l \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{10}$$

Таким образом, заключаем, что функция

$$\zeta = \psi(z)$$

отображает Ω на некоторую однолистную область D, составляющую часть кругового сегмента, ограниченного отрезком прямой

$$R\zeta = |R\psi(0)|\,e^{-2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} = \delta_1$$

и другой окружности

$$|\zeta| = |\psi(0)|\,e^{2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} = \delta_2.$$

Рассмотрим на фиг. 2 криволинейный пятиугольник $\alpha\varkappa\nu\vartheta\mu$, где отрезок $\nu\vartheta$ лежит на прямой

$$R\zeta=\left(1+|\psi(0)|+\frac{1}{4|R\psi(0)|}\right)e^{2\int\limits_{L}\frac{ds}{\rho(s)}} \tag{11}$$

Не трудно видеть, что указанный пятиугольник покрывает область D и при инверсии относительно окружностей I и II отрезок $\nu\vartheta$ переходит в дугу, целиком лежащую слева от прямой

$$R\zeta=\delta_1=|R\psi(0)|e^{-2\int\limits_{L}\frac{ds}{\rho(s)}}$$

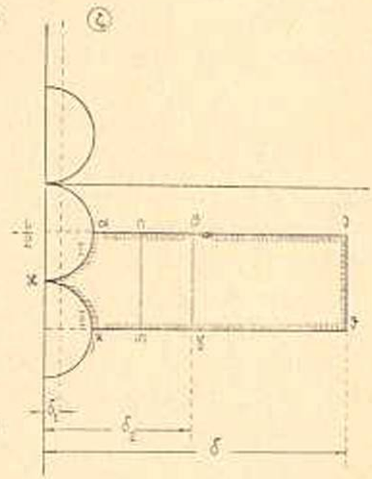
Очевидно, при этом

$$\max|\lambda(\zeta)|$$

в полосе

$$\delta_1\leqslant R\zeta\leqslant\left(1+|\psi(0)|+\frac{1}{4|R\psi(0)|}\right)e^{2\int\limits_{L}\frac{ds}{\rho(s)}} \tag{12}$$

достигается на отрезке $\nu\vartheta$.



Фиг. 2.

Функция $w=\lambda(\zeta)$ отображает бесконечную криволинейную полосу $\alpha\varkappa\mu\infty$ на полуплоскость $Rw>\frac{1}{2}$ с выключенным отрезком $0<u\leqslant 1$.

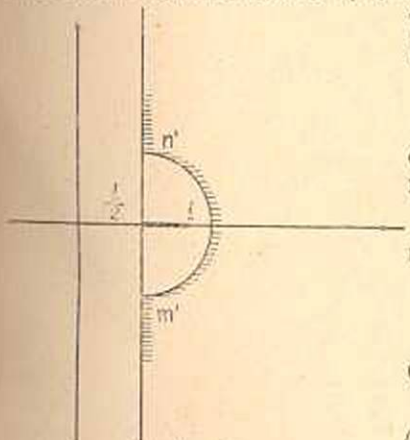
Эту область обозначим через D'. Не выписывая явным образом, обозначим через

$$t=\chi(w)$$

элементарную функцию, отображающую область D' на полуплоскость

$$Rt>0$$

плоскости комплексного аргумента $t=u'+iv'$ таким образом, чтобы точка $w=1$ перешла в $t=1$, а луч $1\leqslant u<\infty$ в луч $0\leqslant u'<\infty$.



Фиг. 3.

Функция

$$t=\chi(\lambda(\zeta))$$

отображает полосу $\alpha\varkappa\mu\infty$ в полуплоскость $Rt>0$.

Заметим, что при этом равномерно в D'

$$\lim_{w\to\infty}\frac{\chi(w)}{w}=1.$$

Отрезку mn, лежащему на прямой

$$R\zeta=1$$

(фиг. 2), соответствует на фиг. 3 дуга $m'n'$.

Справа от дуги $m'n'$ в полуплоскости $Rw > \frac{1}{2}$

$$|\chi(w)| > c \ |w|, \tag{13}$$

где c — постоянная >0. И, следовательно,

$$|\chi(\lambda(\zeta))| > c|\lambda(\zeta)|. \tag{14}$$

Функция

$$\xi = \lg \chi(\lambda(\zeta))$$

отображает криволинейную симметричную полосу $\alpha\varkappa\mu\infty$ на бесконечную в обе стороны полосу $|Im\,\xi| < \frac{\pi}{2}$, причем точка $\varkappa$ переходит в $\xi = -\infty$, точка $\zeta = \infty$ переходит в $\xi = \infty$ и прямая $Im\zeta = -1$ — в вещественную ось.

К этой функции применим известное второе неравенство Альфорса (ср. [2], стр. 12—16) в промежутке

$$1 < R\zeta < \delta.$$

Не выписывая здесь неравенства Альфорса, напишем результат, который получается при его применении в нашем случае.

Получаем

$$\left|\lg \chi(\lambda(\zeta))\right|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + \pi\delta, \tag{15}$$

где const абсолютная.

Тем более

$$\lg|\chi(\lambda(\zeta))|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + \pi\delta.$$

Учитывая (14), получим

$$\lg|\lambda(\zeta)|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + \pi\delta$$

или

$$\lg|\lambda(\zeta)|_{\zeta \in \nu\vartheta} < \text{const} + k \exp\left\{2\int_L \frac{de}{\rho(s)}\right\}, \tag{16}$$

где

$$k = 1 + |\psi(0)| + \frac{1}{4|R\psi(0)|}. \tag{17}$$

Неравенство (16) дает оценку $\max|\lambda(\zeta)|$ в многоугольнике $\varkappa\alpha\nu\vartheta\mu$, покрывающем D. Следовательно, в точке P области Ω

$$\lg\left|\frac{f(z)-a}{b-a}\right| < \text{const} + k \cdot e^{2\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{18}$$

где const абсолютная, а

$$k = 1 + \left| \nu \left[\frac{f(0) - a}{b - a} \right] \right| + \frac{1}{4 \left| R_\nu \left[\frac{f(0) - a}{b - a} \right] \right|} \tag{19}$$

Теорема 1 доказана.

6. Из теоремы 1 вытекает в качестве следствия следующая

Теорема 2. *Если в области* Ω

$$\overline{\lim_{z \in \Omega}} \frac{\lg |f(z)|}{e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}} = \infty, \tag{20}$$

где верхний предел берется по всем точкам $z \in \Omega$ *и по всем дугам* L, *соединяющим начало координат с* z, *то функция* $f(z)$ *принимает в* Ω *всевозможные значения, кроме, быть может, одного.*

В самом деле, если $f(z)$ при выполнении условия (20) не принимала бы в Ω двух значений a и b, то для нее имели бы место оценки (18)—(19). С другой стороны, беря сколь угодно большое число d, имели бы, согласно (20), в некоторой точке s,

$$|f(z)| > d \cdot e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}$$

Очевидно, при достаточно большом d это противоречит неравенствам (18)—(19).

Замечание. Обозначив расстояние дуги L до границы $S(\Omega)$ через Δ, а длину L через l, можно в теореме 2 условие (20) заменить более простым

$$\lim_{z \in \Omega} \frac{\lg |f(z)|}{e^{2l/\Delta}} = \infty. \tag{21}$$

Покажем на частном примере, что условия (20) и (21), вообще говоря, необходимы.

Построим пример функции, для которой

$$\lim_{z \in \Omega} \frac{\lg |f(z)|}{e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}} < \infty,$$

при этом функция $f(z)$ допускает в области Ω более одного исключительного значения.

Примером такой функции может служить функция e^{e^z} в полосе $|Imz| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

В этой полосе $\lim\limits_{z \in \Omega} \frac{\lg \left| e^{e^z} \right|}{e^{2\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}}$, очевидно, будет конечной величиной.

Одновременно видно, что в этой полосе функция e^{e^z} не может принимать значений $e^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$.

Однако в этой же полосе, согласно теореме 1, функция

$$e^{e^z}\lg(z-iz)$$

принимает любые значения, кроме значения нуль.

7. В случае, когда Ω однолистна и ограничена, теорему 2 можно выразить в других терминах, удобных при распространении на пространственный случай. В этом параграфе в дальнейшем речь идет о таких Ω.

Определение. Возьмем внутри Ω произвольную односвязную область Ω', содержащую одновременно начало координат и точку P. Расстояние области Ω' от границы $S(\Omega)$ обозначим через

$$\delta(\Omega').$$

Верхнюю грань расстояний $\delta(\Omega')$

$$\sup\delta(\Omega')$$

обозначим через $\delta(P, \Omega)$ и будем называть обобщенным расстоянием точки P до границы $S(\Omega)$.

Это же определение имеет, очевидно, смысл и для любой односвязной либо многосвязной пространственной области Ω.

Из теоремы 1 следует, далее, следующая теорема.

Теорема 3. *Если Ω однолистна и лежит в круге $|r| < R$, то из условия*

$$\lim_{z\in\Omega}\frac{\lg|f(z)|}{e^{\frac{c}{\delta^2(z;\Omega)}}} = \infty, \tag{22}$$

где c — любое постоянное $> \pi R^2$, следует, что $f(z)$ принимает в Ω всевозможные значения, кроме, быть может, одного.

Наметим доказательство. Из неравенства (1) следует, что в случае двух исключительных значений a и b в любой точке P области Ω

$$|f(z)| < |a| + |b-a|\,\text{const}\,\exp\left\{e^{k\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}\right\}$$

Согласно определению расстояния $\delta(P; \Omega)$, существует некоторая односвязная область $\Omega' \in \Omega$, покрывающая одновременно начало координат и точку P с расстоянием $\delta(\Omega')$, удовлетворяющим условию

$$\delta(\Omega') > \delta(P;\Omega) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое сколь угодно малое число.

Проведя на плоскости квадриляж со стороной $q\delta(\Omega')$, где $0 < q < 1$, и беря ломаную, состоящую из некоторых сторон этих квадратов, добавляя к ним, в случае необходимости, по одному прямолинейному отрезку внутри квадратов, содержащих точки 0 и P, получим ломаную L, для которой интеграл

$$\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}$$

будет величиной порядка $\frac{c}{(\delta(\Omega')-\varepsilon)^2}$, где c постоянная $> \pi R^2$.

Следовательно, для таким образом подобранной L

$$|f(z)| < |a| + |b-a| \cdot \text{const} \exp\left\{ k e^{\frac{c}{(\delta(\Omega')-\varepsilon)^2}} \right\}.$$

Но так как это имеет место при любом сколь угодно малом ε, то, перейдя к пределу, когда $\varepsilon \to 0$, получим

$$|f(z)| < |a| + |b-a| \,\text{const} \exp\left\{ k e^{\frac{c}{\delta^2(P;\Omega)}} \right\}. \tag{23}$$

Отсюда вытекает теорема 3.

8. Пусть теперь L — произвольная жорданова кривая на поверхности Ω, с началом в точке $q=0$ и уходящая другим концом к границе $S(\Omega)$. Каждую конечную порцию L считаем спрямляемой. Обозначим через $q(s)$ произвольную положительную непрерывную функцию, удовлетворяющую единственному ограничению

$$q(s) \leqslant \rho(s).$$

Обозначим через $\Omega(L; q(s))$ область, составленную из всевозможных кругов с центрами в точках $Q(s) \in L$ и с радиусами $q(s)$.

Легко решить следующую задачу.

При каких ограничениях, накладываемых на значения $f(z)$ на кривой L, функция $f(z)$ будет иметь в области $\Omega(L; \alpha q(s))$, соответствующей любому значению $0 < \alpha < 1$, не более одного исключительного значения.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если на кривой L

$$\varlimsup_{z \in L} \frac{\lg\lg|f(z)|}{\int\limits_0^l \frac{ds}{\rho(s)}} = \infty, \tag{24}$$

то $f(z)$ в любой области $\Omega(L; \alpha q(s))$, $0 < \alpha < 1$ имеет не более одного исключительного значения.

В равенстве (24) l есть дуговое, на L, расстояние точки $z \in L$ до начала координат.

Доказательство. Если бы $f(z)$ допускала в области $\Omega(L; \alpha q(s))$ более одного исключительного значения, то $f(z)$, согласно (1), удовлетворяла бы в любой точке $z \in L$ неравенству

$$|f(z)| < |a| + |b-a| \operatorname{const} \exp\left\{ k e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l \frac{dx}{\rho(s)}} \right\}.$$

что противоречит условию (24). Тем самым доказывается утверждение теоремы 4.

Известно (G. Julia), что для любой целой функции $g(z)$ существует хотя бы один луч, такой, что в любом сколь угодно малом угле, покрывающем этот луч, функция $g(z)$ допускает не более чем одно исключительное значение.

Теорема 4 дает условие, когда в сколь угодно узкой полосе, окружающей кривую L, функция $f(z)$ обладает тем же свойством.

В связи с оценкой (1) напомним одну заметку H. Bohr'a [3]. Неравенство (1) содержит, в частности, результат этой заметки.

9. Сформулируем одну аналогичную теорему для пространственного случая.

Пусть Ω — произвольная односвязная либо многосвязная ограниченная область в пространстве p измерений.

Допустим Ω содержит начало координат 0 и сама содержится в сфере радиуса R с центром в 0.

Через $\delta(P; \Omega)$ обозначим обобщенное расстояние точки P до границы $S(\Omega)$, определенное в смысле § 7.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Если в области Ω для гармонической в ней функции $u(x_1, x_2, \ldots x_p)$

$$\overline{\lim}\, \delta^p \lg |u(x_1, x_2, \ldots x_p)| > 2p \frac{\pi^{p/2} R^p}{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}, \tag{25}$$

то функция u принимает в Ω всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Наметим доказательство.

Допустим функция u имеет в Ω сколь угодно большие положительные значения, однако нижняя грань значений u есть некоторая конечная величина C.

Функция

$$u(x_1, x_2, \ldots x_p) - C = u^*$$

есть некоторая неотрицательная и гармоническая в Ω функция.

Соединив точку 0 с точкой $P \in \Omega$ дугой L внутри Ω, имеем для любой точки $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ внутри сферы радиуса $\rho(s)$ с центром в произвольной точке $Q(s) \in L$ оценку

$$u^*(s)\left(\frac{\rho - r}{\rho + r}\right)^p \leq u^*(x_1, \ldots x_p) \leq u^*(s)\left(\frac{\rho + r}{\rho - r}\right)^p,$$

где $\rho(s)$ есть расстояние точки $Q(s)$ до границы $S(\Omega)$ и r — расстояние внутренней точки $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ сферы до центра $Q(s)$. Через $u^*(s)$ обозначено значение $u^*(x_1, x_2, \ldots x_p)$ в точке $Q(s)$.

Из этого неравенства таким же путем, как это было сделано в случае неравенства (3), получим неравенство

$$\left| \frac{du^*(s)}{ds} \right| \leqslant 2p \, \frac{u^*(s)}{\rho(s)}. \tag{26}$$

Это неравенство является аналогом неравенства (4).

Из (26) получаем

$$\lg \frac{u^*(s)}{u^*(0)} \leqslant 2p \int \frac{ds}{\rho(s)}.$$

Дальнейшие рассуждения почти не отличаются от того, что мы уже проделали в предыдущем изложении, поэтому их не приводим.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступило 22 I 1957

Ս. Լ. Շահինյան

ՇՈՏԿԻԻ ԵՎ ՊԻԿԱՐԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածը պարունակում է հետևյալ արդյունքները։

1. Դիցուք $f(z)$ հոլոմորֆ ֆունկցիան տրված է սկզբնակետի շուրջն իր Թեյլորի շարքով։ Շարունակելով այդ շարքը բոլոր հնարավոր եղանակներով, նշանակենք Σ-ով նրա Ռիմանի մակերևույթը, իսկ $S(\Sigma)$-ով այդ մակերևույթի եզրագիծը։ Ընդհանուր դեպքում Σ-ն կլինի բազմակապ և բազմաթերթ մի մակերևույթ։ Նշանակենք Ω-ով այդ մակերևույթի մի որևէ մասը, որը պարունակում է իր մեջ սկզբնակետը։

Շոտկիի հայտնի անհավասարությունը ձևակերպված է շրջանի համար։ Ներկա հոդվածում մենք ստանում ենք Շոտկիի տիպի անհավասարություն Ω տիրույթի և մասնավորապես նաև Σ-ի համար։

2. Նշված է, թե ինչ պայմանի պետք բավարարի Ω-ում $f(z)$-ը, որպեսզի նա այդ տիրույթում ունենա մեկից ոչ ավել բացառիկ արժեք (տես (20)—(22) անհավասարությունները)։

3. Նշված է մի պայման ((24) հավասարությունը), որին պետք բավարարի տրված L կորի վրա $f(z)$ ֆունկցիան, որպեսզի նա այդ կորին ծածկող կամայապես բարակ շերտում ընդունի ամեն արժեք, բացի, գուցե, մեկ արժեքից։

4. Կամայական P-չափանի տարածության մեջ որևէ Ω տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան (25) պայմանին բավարարելիս, նա նույն տիրույթում չի ունենա բացառիկ արժեքներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Julia G.* Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (Paris, Gauthier—Villars, 1923).
2. *Ahlfors Lars.* Untersuchungen zur theorie der Konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (Acta Soc. Sc. Fenn. Nova Ser. A, I, 9, 1930, pp. 1—40).
3. *Bohr H.* En funtionsteoretisk Bemärkning (Nyt Tidsskr. for Mat., 27 (1916).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ 10, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов

В настоящей работе для данного ограниченного замкнутого континуума K строится система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ с заданным множеством полюсов. При определенных ограничениях, налагаемых на область D и на множество полюсов $\{\omega_k\}$, расположенных вне области D, доказывается, что любая аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция $f(z)$ разлагается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(z),$$

равномерно сходящийся внутри области D.

Построенные здесь рациональные функции являются естественными обобщениями полиномов Фабера.

1°. Пусть K — ограниченный замкнутый континуум, содержащий более одной точки, и G_∞ — та из смежных с ним областей, которая содержит точку $z=\infty$. Область G_∞ односвязна, и ее граница $L \subset K$.

Пусть функция

$$w = \Phi(z),\ \Phi(\infty) = \infty,\ \Phi'(\infty) > 0 \tag{1}$$

конформно отображает область G_∞ на внешнюю область единичного круга $|w|>1$, а $z = \Psi(w)$ — обратная функция.

Пусть $\{\omega_k\}$, $(k=0, 1, 2, \cdots)$ — последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и равные, образы которых принадлежат области G_∞ и нумерованы так, что

$$|\Phi(\omega_0)| \geqslant |\Phi(\omega_1)| \geqslant \cdots \geqslant |\Phi(\omega_n)| \geqslant \cdots \tag{2}$$

Отметим при этом, что не исключается случай, когда в последовательности $\{\omega_k\}$, $\omega_0 = \omega_1 = \cdots = \omega_N = \infty$, $0 \leqslant N \leqslant \infty$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_0[\Phi(z)] = \frac{(|\Phi(\omega_0)|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(\omega_0) - \Phi(z)},$$

$$\varphi_n[\Phi(z)] = \frac{(|\Phi(\omega_n)|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(\omega_n) - \Phi(z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \overline{\Phi(\omega_k)}\Phi(z)}{\Phi(z) - \Phi(\omega_k)}, \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

каждая из которых голоморфна в области G_∞, кроме конечного числа точек, где они имеют полюсы. Если $\omega_0^*, \cdots, \omega_m^*$ — суть образы чисел $\omega_0, \cdots, \omega_n$ на плоскости z и $p_0, p_1, \cdots, p_m$ — кратности этих точек, то функция $\varphi_n[\Phi(z)]$ голоморфна в G_∞, кроме точек $\omega_0^*, \cdots, \omega_m^*$, где она имеет полюсы порядков $p_0, p_1, \cdots, p_m$ соответственно.

Отметим, что в частном случае, когда $\omega_0 = \omega_1 = \cdots = \omega_n = \cdots = \infty$, из (1) и (3) следует

$$\varphi_n[\Phi(z)] = [\Phi(z)]^n, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4}$$

Обозначим через $M_n(z)$ главную часть функции $\varphi_n[\Phi(z)]$. Очевидно, что $M_n(z)$ — рациональная функция вида

$$M_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (z - \omega_k)}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{5}$$

где $P_n(z)$ — некоторый полином степени n.

Заметим также, что в случае, когда $\omega_k = \infty$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, из (4) следует, что $M_n(z)$ нужно определить как совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановом разложении функций $[\Phi(z)]^n$. Иначе говоря, в этом случае $M_n(z)$ представляет собой n-й полином Фабера, порожденный континуумом K. Поэтому естественно вобщем случае называть $\{M_n(z)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ с истемой рациональных функций, порожденной континуумом K и последовательностью $\{\omega_k\}$.

Для данного значения $n \geqslant 0$ замкнутую спрямляемую жорданову кривую l_n, лежащую в области G_∞, выберем так, чтобы образы чисел $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$, т. е. точки $\omega_0^*, \omega_1^*, \cdots \omega_m^*$, принадлежали внешней части l_n. Очевидно, что, если граница L континуума K представляет собой замкнутую спрямляемую кривую Жордана, то за l_n можно взять просто кривую L.

Покажем, что при таком выборе кривой l_n, если точка z лежит внутри l_n, имеет место интегральное представление

$$M_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi - z} d\xi. \tag{6}$$

Действительно, функция $\varphi_n[\Phi(\xi)] - M_n(\xi)$ голоморфна в области G_∞, а в бесконечно удаленной точке $\xi = \infty$ имеет нуль не ниже первого порядка. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{\varphi_n[\Phi(\xi)] - M_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0, \tag{7}$$

если точка z лежит внутри l_n.

Но функция $M_n(\xi)$ голоморфна в замкнутой области ограниченной кривой l_n; поэтому если z лежит внутри l_n, то

$$M_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_n}\frac{M_n(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_n}\frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi - z}\,d\xi,$$

в силу формулы (7).

2°. Пусть односвязная область D ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана L. Пусть система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ порождена континуумом $K = D + L$ и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_n\}$, образы которых лежат в дополнительной к D области G_∞ и нумерованы как выше.

Ниже, при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на последовательность точек $\{\omega_n\}$ и на кривую L, будет установлено, что система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ образует базис в пространстве функций аналитических на континууме K.

Докажем теперь две предварительные леммы:

Пусть, как и в пункте 1°, функция $z = \Psi(w)$, $\Psi(\infty) = \infty$, $\Psi'(\infty) > 0$ конформно отображает область $|w| > 1$ на внешнюю часть кривой L, т. е. на область G_∞.

Функция

$$\chi(w, z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} \tag{8}$$

при любом фиксированном $z \in D$ голоморфна в области $|w| > 1$, при этом $\chi(\infty, z) = 0$. Отсюда следует, что при $z \in D$ справедливо разложение

$$\chi(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(z)}{w^{n+1}}, \quad |w| > 1, \tag{9}$$

где $\{c_n(z)\}$ — вполне определенные функции от z в области D.

Из (9) следует, что функция

$$\chi_1(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta}\,\overline{\chi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}, z\right)}, \tag{10}$$

при $z \in D$, голоморфна в круге $|\zeta| < 1$.

Условимся говорить, что кривая L принадлежит к классу U (коротко $L \in U$), если

$$\lim_{r \to 1+0}\ \sup\int\limits_0^{2\pi}|\Psi'(re^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta < +\infty.$$

Лемма 1. Если граница L области D принадлежит к классу U, то функция $\chi_1(\zeta, z)$ принадлежит к классу H_2 Рисса в единичном круге $|\zeta| < 1$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$; обозначим

$$\inf_{t \in L}|t - z_0| = d(z_0) > 0;$$

тогда очевидно, что

$$|\Psi(w)-z_0| \geqslant d(z_0) \text{ при } |w|=r>1.$$

Отсюда и из того, что $L \in U$, следует

$$\lim_{r\to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\vartheta}, z_0)|^2 d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d^2(z_0)} \lim_{r\to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\Psi'(re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta < +\infty. \tag{11}$$

Далее, из определения (10) функции $\chi_1(\zeta, z)$ получим, что, при $0<\rho<1$,

$$\int_0^{2\pi} |\chi_1(\rho e^{i\varphi}, z_0)|^2 d\varphi = \frac{1}{\rho^2}\int_0^{2\pi} \left|\chi\left(\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}, z_0\right)\right|^2 d\varphi,$$

откуда и из (11) следует, что

$$\lim_{\rho\to 1-0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi_1(\rho e^{i\varphi}, z_0)|^2 d\varphi \leqslant M(z_0) < +\infty. \tag{12}$$

Но, как указывалось выше, при любом $z \in D$ функция $\chi_1(\zeta, z)$ голоморфна в круге $|\zeta|<1$; поэтому (12) означает, что $\chi_1(\zeta, z) \in H_2$ в круге $|\zeta|<1$, при $z \in D$. Лемма доказана.

Пусть $\{\alpha_k\}$, $(k=0, 1, 2, \cdots)$—некоторая последовательность комплексных чисел, лежащих в круге $|\zeta|<1$, нумерованных в порядке

$$0 \leqslant |\alpha_0| \leqslant |\alpha_1| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha_n| \leqslant \cdots$$

Составим систему рациональных функций

$$\Phi_0(\zeta) = c_0(1-|\alpha_0|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-\bar{\alpha}_0\zeta},$$

$$\Phi_n(\zeta) = c_n(1-|\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-\bar{\alpha}_n\zeta} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}, \quad (n=1, 2, \cdots).$$

с полюсами на последовательности $\{\bar{\alpha}_n^{-1}\}$, где $c_0, c_1, \cdots$ любая последовательность комплексных чисел, для которых $|c_0|=|c_1|=\cdots=1$.

Известно [1], что система функций $\{\Phi_n(\zeta)\}$, $(n=0, 1, 2, \cdots)$, ортогональна на единичной окружности $|\zeta|=1$, причем

$$\int_{|\zeta|=1} \Phi_n(\zeta)\overline{\Phi_m(\zeta)}\,|d\zeta| = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m=n. \end{cases} \tag{13}$$

Лемма 2. Пусть граница L области D принадлежит к классу U; если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-|\alpha_n|) = +\infty, \tag{14}$$

то справедливо разложение

$$\chi(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\psi_n(w), \tag{15}$$

где

$$\psi_n(w) = \frac{1}{w}\overline{\Phi_n\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)}, \tag{16}$$

$$A_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} \chi(w, z)\overline{\psi_n(w)}\,|dw|, \ (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{17}$$

в среднем сходящееся на окружности $|w| = 1$, *при этом равномерно относительно* $z \in \bar{D}_1 \subset D$.

Доказательство. Известно [1], что при условии (14) система $\{\Phi_n(\zeta)\}$ полна в классе функций H_2. Поэтому, так как по лемме 1 функция $\chi_1(\zeta, z)$ принадлежит к классу H_2 в круге $|\zeta| < 1$ при $z \in D$, то для коэффициентов Фурье функции

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \chi_1(t, z)\overline{\Phi_n(t)}\,|dt| \tag{18}$$

справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \left|\chi_1(t, z)\right|^2 |dt| \leq M(z) < +\infty. \tag{19}$$

Из определения (10) функции $\chi_1(\zeta, z)$ и из формул (18), (16) и (17) следует, что

$$a_n(z) = \overline{A_n(z)}, \ (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{20}$$

Действительно,

$$\overline{a_n(z)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \overline{\chi_1(t, z)}\Phi_n(t)\,|dt| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \frac{1}{\bar{t}}\overline{\chi\left(\frac{1}{\bar{t}}, z\right)}\Phi_n(t)\,|dt| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} \overline{w\chi(w, z)}\Phi_n\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)|dw| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} \overline{\chi(w, z)}\psi_n(w)\,|dw| = A_n(z), \ (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Из (19) и (20) и из того очевидного факта, что интеграл

$$\int\limits_{|t|=1} |\chi_1(t, z)|^2\,dt$$

является непрерывной функцией от z в области D, по теореме Дини заключаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(z)|^2$ равномерно сходится внутри области D.

Отсюда и из очевидного тождества

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\left|\chi(w,z)-\sum_{k=0}^{n}A_k(z)\varphi_k(w)\right|^2|dw|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\left|\chi_1(t,z)-\sum_{k=0}^{n}a_k(z)\Phi_k(t)\right|^2|dt|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(z)|^2$$

следует утверждение леммы.

Наконец, отметим, что в силу (16) для коэффициентов $\{A_n(z)\}$ будем иметь также следующее выражение:

$$A_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\chi(w,z)\Phi_n(w)dw,\ (n=0,1,\cdots). \tag{17'}$$

3°. Если последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ лежит в области G_∞ и функция $w=\Phi(z)$ имеет прежний смысл, т. е. конформно отображает область G_∞ на $|w|>1$ при нормировке (1), то последовательность чисел

$$\alpha_k=\frac{1}{\Phi(\omega_k)}\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{20'}$$

лежит внутри единичного круга $|\zeta|<1$.

Теперь в определении (13) ортогональной системы $\{\Phi_n(\zeta)\}$, $(n=0,1,2,\cdots)$, выберем числа $\{\alpha_k\}$ согласно (20); тогда при соответствующем подборе фигурирующих там постоянных $\{c_n\}$, $|c_n|=1$, $(n=0,1,\ldots)$, будем иметь

$$\Phi_n(\zeta)=\varphi_n(\zeta), \tag{21}$$

где функции $\{\varphi_n(\zeta)\}$ были определены выше по формуле (3).
Поэтому, если $z\in D$, то при

$$\alpha_k=\frac{1}{\Phi(\omega_k)},\quad (k=0,1,2,\ldots)$$

из формул (17'), (21) и (8) будем иметь

$$A_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\chi(w,z)\varphi_n(w)dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi-z}d\xi,\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Но по формуле (6), дающей интегральное представление для функций $M_n(z)$ $(n=0,1,\cdots)$, порожденных континуумом $K=D+L$, имеем также

$$M_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi-z}d\xi,\quad (n=0,1,2,\ldots);$$

поэтому
$$A_n(z) = M_n(z), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{22}$$

Таким образом, из (22), а также из сказанного выше, следует, что лемму 2 можно сформулировать и таким образом:

Лемма 2'. Пусть граница L области D принадлежит к классу U. Пусть $\{M_n(z)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ — последовательность рациональных функций, порожденная континуумом $K = D + L$ и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

Если
$$\sum_{n=0}^{\infty} (|\Phi(\omega_n)| - 1) = + \infty, \tag{23}$$

тогда справедливо разложение
$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z) \psi_n(w), \tag{24}$$

в среднем сходящееся на окружности $|w| = 1$, при этом равномерно относительно $z \in \overline{D}_1 \subset D$, где
$$\psi_n(w) = \frac{(|\Phi(\omega_n)|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{1 - \Phi(\omega_n) w} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{w - \Phi(\omega_k)}{1 - \Phi(\omega_k) w}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{25}$$

Наконец, сформулируем и докажем основной результат данной статьи.

Теорема. Пусть граница L области D принадлежит к классу $\{U\}$. Пусть $\{M_n(z)\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ — последовательность рациональных функций, порожденная континуумом $K = D + L$ и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_n\}$, $(n = 0, 1, \cdots)$, удовлетворяющих условию
$$\sum_{n=0}^{\infty} (|\Phi(\omega_n)| - 1) = + \infty.$$

Если функция $f(z)$ голоморфна внутри области D и непрерывна в $\overline{D}$, то имеет место разложение
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_n(z), \tag{26}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} f[\Psi(w)] \psi_n(w) dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} f(\xi) \psi_n[\Phi(\xi)] \Phi'(\xi) d\xi, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{27}$$

равномерно сходящееся внутри области D.

Доказательство. Если $z \in D$, то имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}f\,[\Psi(w)]\,\chi(w,z)\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}f\,[\Psi(w)]\left\{\chi(w,z)-\sum_{k=0}^{n}M_k(z)\,\varphi_k(w)\right\}dw+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}c_kM_k(z)=J_1^{(n)}+J_2^{(n)}. \tag{28}$$

Но имеем очевидную оценку

$$|J_1^{(n)}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\max_{\xi\in L}|f(\xi)|\left\{\int\limits_{|w|=1}\left|\chi(w,z)-\sum_{k=0}^{n}M_k(z)\,\varphi_k(w)\right|^2|dw|\right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда по лемме 3

$$\lim_{n\to\infty}J_1^{(n)}=0, \tag{29}$$

при этом равномерно относительно z внутри области D.

Из тождества (28) и из (29) следует утверждение теоремы.

Вопрос о том, единственно ли разложение (26) в общем случае, когда полюсы $\{\omega_k\}$ сгущаются к границе L области, пока остается открытым.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 13 XI 1956

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ՝ ԸՍՏ ԲԵՎԵՌՆԵՐԻ ՏՎԱԾ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՇԱՐՔԻ ՎԵՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թող K-ն լինի մեկից ավելի կետ պարունակող փակ սահմանափակ կոնտինուում, իսկ G_∞-ն՝ վերջինիս կից այն տիրույթը, որը պարունակում է $z=\infty$ կետը: G_∞ տիրույթը կլինի միակապ և նրա եզրը՝ $L\in K$:

Թող

$$w=\Phi(z);\ \Phi(\infty)=\infty,\ \Phi'(\infty)>0$$

ֆունկցիան G_∞ տիրույթը կոնֆորմ կերպով արտապատկերի $|w|>1$ շրջանի արտաքին մասի վրա և թող $z=\Psi(w)$ լինի այդ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:

Կասենք, որ L կորը պատկանում է U դասին (կարճ՝ $L\in U$), եթե

$$\lim_{r\to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\Psi'(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty$$

Թող $\{\omega_k\}$, $(k=0, 1, \cdots)$ լինի կոմպլեքս թվերի հաջորդականություն, որոնց պատկերները ընկած են G_∞ տիրույթում և որոնք համարակալված են այնպես, որ տեղի ունի (2) պայմանը։ Նշենք, որ բացառված չէ նաև

$$\omega_0 = \omega_1 = \cdots = \omega_N = \infty, \quad 0 \leq N \leq \infty \qquad (ա)$$

դեպքը։

Դիտարկում ենք $\{\varphi_n[\Phi(z)]\}$ ֆունկցիաների (3) հաջորդականությունը։ Այդ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հոլոմորֆ է G_∞ տիրույթում, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի, որոնցում նրանք բևեռներ ունեն։ $M_n(z)$-ով նշանակենք $\varphi_n[\Phi(z)]$ ֆունկցիայի գլխավոր մասը։

(ա) դեպքում, երբ $N=\infty$ (1)-ից և (3)-ից կունենանք (4) հավասարությունը, որից բխում է, որ այդ դեպքում $M_n(z)$-ը կլինի Ֆաբերի n-րդ բազմանդամը՝ գրված K կոնտինուումի համար։ Այդ պատճառով էլ բնական է ընդհանուր դեպքում $\{M_n(z)\}$ $(n=0, 1, \cdots)$ անվանել ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմ՝ առաջացած K կոնտինուումի և $\{\omega_k\}$ հաջորդականության միջոցով։

Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքն է հետևյալ թեորեմը.

Թող D տիրույթի L եզրագիծը պատկանի U դասին, իսկ $\{M_n(z)\}$-ը լինի ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմ՝ առաջացած $K=D+L$ կոնտինուումի և կոմպլեքս թվերի $\{\omega_n\}$ հաջորդականության միջոցով, որը բավարարում է $\sum_{n=0}^{\infty}(|\Phi(\omega_n)|-1)=+\infty$ պայմանին։

Եթե $f(z)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է D-ում և անընդհատ է $\bar{D}$-ում, ապա տեղի ունեն (26)—(27) վերլուծությունները, որը հավասարաչափ զուգամետ է D տիրույթի ներսում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walsh J. L.* Interpolation and Approximation. X. 1935.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ 10, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p

В работе [3] Д. Е. Меньшов доказал следующую теорему.

Теорема. Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

который сходится по мере на $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$ и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Сходимость по мере к функции, которая может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры, Д. Е. Меньшов определяет следующим образом.

Последовательность конечных почти всюду на $[a, b]$ измеримых функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

сходится по мере на сегменте $[a, b]$ к измеримой функции $f(x)$, если почти всюду на $[a, b]$ выполняется равенство

$$f_n(x) = g_n(x) + \varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $g_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ измеримы и конечны почти всюду на $[a, b]$, причем

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ и последовательность функций $\varphi_n(x)$ $n = 1, 2, \cdots$ сходится по мере к нулю на данном сегменте.

Д. Е. Меньшов дал также естественное определение верхнего и нижнего пределов по мере последовательности почти везде конечных измеримых функций $\{f_n(x)\}$, определенных на отрезке $[a, b]$ (см. [3], стр. 4).

*Измеримая функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$**,

* $F(x)$ может равняться бесконечности на множестве положительной меры.

есть верхний предел по мере на $[a, b]$ *последовательности* $\{f_n(x)\}$, *если* $F(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$a.\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left\{E[f_n(x) > \varphi(x)]\cdot E[\varphi(x) > F(x)]\right\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$.

$$b.\ \limsup_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left\{E[f_n(x) > \psi(x)]\cdot E[F(x) > \psi(x)]\right\} > 0$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$ *и такой, что* $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$.

Функция $G(x)$, *определенная почти всюду на* $[a, b]$, *называется нижним пределом по мере на* $[a, b]$ *последовательности* $\{f_n(x)\}$, *если* $G(x)$ *измерима и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\alpha.\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left\{E[f_n(x) < \tau(x)]\cdot E[\tau(x) < G(x)]\right\} = 0$$

для любой измеримой функции $\tau(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$.

$$\beta.\ \limsup_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left\{E[f_n(x) < \chi(x)]\cdot E[\tau(x) < G(x)]\right\} = 0$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$ *и такой, что* $\operatorname{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$.

Далее Д. Е. Меньшов показал, что если верхний и нижний пределы последовательности $\{f_n(x)\}$ совпадают с некоторой измеримой функцией $f(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на $[a, b]$ к этой функции и наоборот (см. [3], стр. 26–27).

Оказывается, что вышеуказанная теорема Д. Е. Меньшова о сходимости по мере тригонометрических рядов верна для любой системы $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на некотором измеримом множестве $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L_p(G)$, $p > 1$, а именно справедлива.

Т е о р е м а 1. *Если* $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p > 1$, *то для любой измеримой функции* $f(x)$, *определенной на* G, *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на множестве G *к* $f(x)$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^*.$$

Справедлива также следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Если* $\{\varphi_n(x)\}$ *система функций, определенных на*

* В частном случае, когда система $\{\varphi_n(x)\}$ есть ортонормированный базис, теорема 1 сформулирована в заметке автора, опубликованной в ДАН СССР, 110, 4(1956).

измеримом множестве $G\subset[0,1]$, $\text{mes}\, G>0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p>1$, *то существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

у которого не все коэффициенты равны нулю и который сходится по мере на G *к нулю.*

При доказательстве этих теорем мы будем пользоваться другим определением сходимости по мере, которое эквивалентно определению, данному Д. Е. Меньшовым.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций сходится по мере на измеримом множестве $E_0\subset G$, $\text{mes}\, E_0>0$, к $+\infty$, если для любых, наперед заданных чисел $M>0$ и $\varepsilon>0$ можно определить натуральное число $N(M,\varepsilon)$ такое, что при $n>N$ имеет место

$$\text{mes}\, E_{(E_0)}[f_n(x)<M]<\varepsilon^*.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на множестве E_0 к $-\infty$, если последовательность $\{-f_n(x)\}$ сходится по мере на множестве E_0 к $+\infty$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная измеримая функция, определенная на множестве G. Пусть G_1, G_2, G_3 — множества тех точек на G, где $f(x)$ принимает, соответственно, конечные значения; значение $+\infty$ и значение $-\infty$.

Мы скажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на G, сходится по мере на G к $f(x)$, если она сходится по мере к $f(x)$ на каждом из множеств G_1, G_2, G_3**.

Легко видеть, что в силу этого определения функция $f(x)$ будет одновременно верхним и нижним пределами по мере на множестве G последовательности $\{f_n(x)\}$*** (см. стр. 32). А это означает, что вышеуказанное определение сходимости по мере эквивалентно определению, данному Д. Е. Меньшовым.

Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Для этого понадобятся несколько лемм.

---

* Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на G, то мы будем обозначать через $E_{(E_0)}[\varphi_1(x)>\varphi_2(x)]$ множество всех точек на E_0, для которых $\varphi_1(x)>\varphi_2(x)$.

Через $E[\varphi_1(x)>\varphi_2(x)]$ будем обозначать множество всех точек из G, для которых $\varphi_1(x)>\varphi_2(x)$.

** Сходимость по мере на множестве G_1, где функция $f(x)$ принимает конечные значения, понимается в обычном смысле.

*** Понятия верхнего и нижнего пределов по мере Д. Е. Меньшов определил для отрезка $[a, b]$, но мы можем функции $f_n(x)$ и $f(x)$ положить равными нулю на $[0,1]-G$, и тогда $f(x)$ будет одновременно верхним и нижним пределами по мере на $[0,1]$ для $\{f_n(x)\}$.

§ 1. *Лемма* 1. *Пусть* $\psi_0(x)$ — *произвольная функция, определенная на отрезке* $\Delta = (\alpha, \beta)$, *принадлежащая классу* $L_p(\Delta)$, $p > 1$, *и равная нулю вне некоторого множества* E_0, $E_0 \subset \Delta$.

Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ — *произвольное конечное число функций, определенных на* $\Delta = (\alpha, \beta)$ *и принадлежащих классу* $L_q(\Delta)$, *где*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда, для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ *и* $\varepsilon > 0$, *можно определить ограниченную функцию* $f(x)$ *и множество* e, *обладающие следующими свойствами:*

1) $f(x) = 0$ *при* $x \overline{\in} e$, *где* $e \subset E_0$ *и* $\operatorname{mes} e \leqslant \varepsilon_0 \cdot |\Delta|$;

2) $\displaystyle\int_\Delta |f(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^{p-1}} \int_\Delta |\psi_0(x)|^p dx$;

3) $\displaystyle\left| \int_\Delta [\psi_0(x) - f(x)]\, \psi_k(x)\, dx \right| < \varepsilon$,

при $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Случай, когда $\psi_0(x) = 0$ почти всюду на Δ, тривиален, так как тогда достаточно положить $f(x) \equiv 0$.

Пусть на некотором множестве положительной меры $\psi_0(x) \neq 0$. Разделим интервал Δ на N равных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta$ и определим функции $\psi_i^{(N)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ следующим образом:

$$\psi_i^{(N)}(x) = \frac{1}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} \psi_i(x)\, dx \quad x \in \Delta_k \tag{1.1}$$

$(k = 1, 2, \ldots, N)$.

В силу того, что

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta |\psi_0(x) - \psi_0^{(N)}(x)|^p dx = 0 \tag{1.2}$$

и

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta |\psi_i(x) - \psi_i^{(N)}(x)|^q dx = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

(см. [1], стр. 12), и учитывая соотношение

$$\psi_0^{(N)}(x)\psi_i^{(N)}(x) - \psi_0(x)\psi_i(x) = \psi_0^{(N)}(x)[\psi_i^{(N)}(x) - \psi_i(x)] + \psi_i(x)[\psi_0^{(N)}(x) - \psi_0(x)],$$

получаем также

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta \psi_0^{(N)}(x)\, \psi_i^{(N)}(x)\, dx = \int_\Delta \psi_0(x)\, \psi_i(x)\, dx \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

В самом деле, имеем

$$\left| \int_\Delta \psi_0^{(N)}(x)\, \psi_i^{(N)}(x)\, dx - \int_\Delta \psi_0(x)\, \psi_i(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Delta |\psi_0^{(N)}(x)[\psi_i^{(N)}(x)-\psi_i(x)]|\,dx+\int_\Delta |\psi_i(x)[\psi_0^{(N)}(x)-\psi_0(x)]|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_\Delta |\psi_0^{(N)}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_\Delta |\psi_i^{(N)}(x)-\psi_i(x)|^q\,dx\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\int_\Delta |\psi_i(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\cdot\left(\int_\Delta |\psi_0^{(N)}(x)-\psi_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда, в силу (1.2) и (1.3), непосредственно следует (1.4), ибо, как легко видеть из (1.2), $\|\psi_0^{(N)}(x)\|$ равномерно ограничены для всех $N=1, 2, \ldots$

Функции $f_N(x)$ определим следующим образом.

В центре каждого интервала Δ_k возьмем интервал длины $|\delta_k|=$ $=\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|$, $k=1, 2, \ldots, N$ и положим

$$f_N(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0|\Delta_k|}\displaystyle\int_{\Delta_k}\psi_0(x)\,dx \text{ при } x\in\delta_k \quad (k=1, 2, \ldots, N),\\[2ex] 0 \quad \text{при } x\overline{\in}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\delta_k.\end{cases}\tag{1.5}$$

Легко видеть, что для любого $N=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство:

$$\int_\Delta |f_N(x)|^p dx\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0^{p-1}}\int_\Delta |\psi_0(x)|^p dx.\tag{1.6}$$

В самом деле,

$$\int_\Delta |f_N(x)|^p\,dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{\delta_k}\left|\frac{1}{\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|}\cdot\int_{\Delta_k}\psi_0(x)dx\right|^p dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{|\delta_k|}{\varepsilon_0^p\cdot|\Delta_k|^p}\left|\int_{\Delta_k}\psi_0(x)dx\right|^p.$$

но

$$\left|\int_{\Delta_k}\psi_0(x)\,dx\right|\leqslant|\Delta_k|^{1/q}\left(\int_{\Delta_k}|\psi_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\int_\Delta |f_N(x)|^p dx\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{|\delta_k|}{\varepsilon_0^p\cdot|\Delta_k|^p}\cdot|\Delta_k|^{p/q}\cdot\int_{\Delta_k}|\psi_0(x)|^p\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|\cdot|\Delta_k|^{p/q}}{\varepsilon_0^p\cdot|\Delta_k|^p}\cdot\int_{\Delta_k}|\psi_0(x)|^p\,dx=\frac{1}{\varepsilon_0^{p-1}}\int_\Delta|\psi_0(x)|^p\,dx.$$

Легко видеть также, что для любого N имеем:

$$\int_\Delta f_N(x)\psi_i^{(N)}(x)\,dx=\int_\Delta \psi_0^{(N)}(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx\tag{1.7}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

В самом деле,

$$\int_{\Delta} f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_k} f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_k} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot |\Delta_k|}\int_{\Delta_k} \psi_0(x)\,dx\right) \cdot \left(\frac{1}{|\Delta_k|} \cdot \int_{\Delta_k} \psi_i^{(N)}(x)\,dx\right)\right] dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{|\delta_k|}{\varepsilon_0 \cdot |\Delta_k|^2} \cdot \int_{\Delta_k} \psi_i^{(N)}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|\Delta_k|}\int_{\Delta_k} \psi_0(x)\,dx \cdot \int_{\Delta_k} \psi_i^{(N)}(x)\,dx =$$

$$= \int_{\Delta} \psi_0^{(N)}(x) \cdot \psi_i^{(N)}(x)\,dx.$$

Из (1.4) и (1.7) вытекает:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Delta} f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx = \int_{\Delta} \psi_0(x)\,\psi_i(x)\,dx \tag{1.8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

С другой стороны, на основании (1.6) можно написать:

$$\left|\int_{\Delta} f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx - \int_{\Delta} f_N(x)\,\psi_i(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_{\Delta} |f_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\Delta} |\psi_i^{(N)}(x) -\right.$$

$$\left.- \psi_i(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^{\frac{p-1}{p}}} \cdot \left(\int_{\Delta} |\psi_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\Delta} |\psi_0^{(N)}(x) - \psi_i(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9), учитывая (1.3), получаем:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Delta} f_N(x)\,\psi_i(x)\,dx = \int_{\Delta} \psi_0(x)\,\psi_i(x)\,dx \tag{1.10}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определим теперь функции $f_N^*(x)$ следующим образом:

$$f_N^*(x) = \begin{cases} f_N(x), & \text{при } x \in E_0 \cdot \delta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \\ 0, & \text{при } x \overline{\in} E_0 \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} \delta_k. \end{cases} \tag{1.11}$$

Ясно, что

$$|f_N^*(x)| \leqslant |f_N(x)| \quad (x \in \Delta). \tag{1.12}$$

Из (1.5) и (1.11) имеем:

$$f_N(x) - f_N^*(x) = \begin{cases} f_N(x), & \text{при } x \in CE_0, \\ 0, & \text{при } x \in E_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Поэтому будем иметь:

$$\int_{\Delta} |f_N(x) - f_N^*(x)|^p\,dx = \int_{CE_0} |f_N(x)|^p\,dx. \tag{1.14}$$

Так как в силу (1.1) и (1.5) имеем

$$f_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}\psi_0^{(N)}(x), \text{ при } x \in \delta_k \ (k = 1, 2, \ldots, N), \\ 0, \text{ при } x \overline{\in} \sum_{k=1}^{N} \delta_k, \end{cases} \qquad (1.15)$$

то

$$| f_N(x) |^p \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^p} | \psi_0^{(N)}(x) |^p, \ (x \in \Delta).$$

Учитывая, что

$$\int_\Delta | \psi_0^{(N)}(x) - \psi_0(x) |^p \, dx \to 0, \quad \text{при } N \to \infty,$$

и что $\psi_0(x) = 0$ на CE_0 (см. условие леммы), получаем:

$$\int_{CE_0} | \psi_0^{(N)}(x) |^p \, dx \to 0, \quad \text{при } N \to \infty.$$

Так как

$$\int_\Delta | f_N(x) - f_N^*(x) |^p \, dx = \int_{CE_0} | f_N(x) |^p \, dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^p} \int_{CE_0} | \psi_0^{(N)}(x) |^p dx,$$

то

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta | f_N(x) - f_N^*(x) |^p \, dx = 0. \qquad (1.16)$$

Из (1.10) и (1.16) получаем

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta f_N^*(x) \cdot \psi_i(x) \, dx = \int_\Delta \psi_0(x) \, \psi_i(x) \, dx \qquad (1.17)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Выберем N_0 настолько большим, чтобы

$$\left| \int_\Delta f_{N_0}^*(x) \, \psi_i(x) \, dx - \int_\Delta \psi_0(x) \, \psi_i(x) \, dx \right| < \varepsilon \qquad (1.18)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Легко видеть, что ограниченная функция $f(x) = f_{N_0}^*(x)$ и множество $e = \left(\sum_{k=1}^{N_0} \delta_k \right) E_0$ удовлетворяют условиям леммы 1. Условие 1 следует из (1.11) и из того, что $| \delta_k | = \varepsilon_0 | \Delta_k |$. Условие 2 следует из (1.6) и (1.12), а условие 3 следует из (1.18). Тем самым доказательство леммы закончено.

§ 2. *Лемма 2* (*основная*). *Пусть* $\{ \varphi_n(x) \}$ — *система функций,* *определенных на измеримом множестве* $G \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}\, G > 0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $P > 1$.

Пусть $f(x) \in L_p(G)$ *— не эквивалентная нулю функция, равная нулю вне некоторого множества* $E_0 \subset G$*.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *можно определить функцию* $F(x) \in L_p(G)$ *и множество* e_0*, обладающие следующими свойствами:*

α) $F(x) = f(x)$ при $x \in ce_0 = G - e_0$, $e_0 \subset E_0$ и $\mathrm{mes}\, e_0 < \varepsilon$;

β) $|a_n| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, где числа a_n суть коэффициенты разложения функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$;

γ) для любого множества $e \subset G - e_0$

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon + 2 \| f(x) \|_e, \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots,^{**}$$

где $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ суть частные суммы разложения функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

При доказательстве леммы 2 мы будем пользоваться следующими свойствами нормированных базисов пространства $L_p(G)$:

1) Произвольная функция $\psi(x) \in L_p(G)$, в смысле сходимости в среднем порядка P на множестве G, единственным образом представляется в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

При этом

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

2) Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, чтобы какова бы ни была функция $\psi(x) \in L_p(G)$, для которой

$$\| \psi(x) \|_G = \left(\int_G |\psi(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \delta,$$

имело место неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \varepsilon, \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ есть разложение функции $\psi(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Свойство 1) непосредственно следует из определения базисов и из того, что, по предположению, $\{\varphi_n(x)\}$ есть нормированный базис, т. е. $\| \varphi_n(x) \|_G = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

---

* В частности, может быть $E_0 = G$.

** $\| f(x) \|_e = \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

В самом деле, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ в $L_p(G)$ сходится к $\varphi(x)$, то $\|a_n\varphi_n(x)\|_G = |a_n|\cdot\|\varphi_n(x)\|_G = |a_n| \to 0$, при $n\to\infty$.

Свойство 2) легко следует из известных свойств базисов в пространстве Банаха.

В самом деле, пусть E — пространство типа B с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$

Пусть E_1 — линейная система, элементами которой являются всевозможные числовые последовательности $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$, такие, что ряд $\Sigma\eta_i e_i$ сходится.

Введем в E_1 норму, полагая

$$\|y\| = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right\|.$$

Тогда пространство E_1 будет пространством типа B ([2], стр. 221). Каждому $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in E$ соответствует единственный элемент $y_x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$. Обратно, каждому элементу $y = \{\eta_i\} \in E_1$ соответствует единственный элемент $x_y \in E$, а именно

$$x_y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i.$$

Таким образом, определен оператор $x = A_0 y$, взаимно-однозначно отображающий E_1 на E. Легко видеть, что оператор A_0 аддитивен. Кроме того, оператор A_0 ограничен, ибо

$$\|A_0 y\| = \|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i\right\| \leqslant \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right\| = \|y\|.$$

Следовательно, A_0 есть линейный оператор, отображающий E_1 на E взаимно-однозначно.

По теореме Банаха существует обратный оператор $y = A_0^{-1}x$, который также является линейным ([2], стр. 223).

Выполнение свойства 2) непосредственно вытекает из ограниченности оператора A_0^{-1}. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, если $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\|A_0^{-1}\|}$, то для любого $x \in E$, где $\|x\| < \delta$, будет иметь место неравенство:

$$\|y\| = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right\| = \|A_0^{-1}\|\cdot\|x\| < \varepsilon.$$

где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$ есть разложение элемента x по базису $e_1, e_2, \ldots$.

Прежде чем приступить к доказательству леммы 2, отметим еще один факт.

Существует последовательность $\{\psi_n(x)\}$ функций из $L_q(G)$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, которая вместе с системой $\{\varphi_n(x)\}$ образует биортогональную систему, т. е.

$$\int\limits_G \varphi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{при } m=n, \\ 0, & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

(см. [2], стр. 223, 224).

Таким образом, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ есть разложение некоторой функции $f(x) \in L_p(G)$, то имеем:

$$a_n = \int\limits_G f(x)\,\psi_n(x)\,dx.$$

Доказательство леммы 2. Функцию $f(x)$, фигурирующую в формулировке леммы 2, и функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x), \cdots$, образующие биортогональную систему с последовательностью $\{\varphi_n(x)\}$, положим равными нулю на множестве $[0, 1] - G$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что $\delta < \varepsilon$ и для любой функции $\psi(x) \in L_p(G)$, для которой $\|\psi(x)\|_G < \delta$, имеет место

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \right\|_G < \frac{\varepsilon}{4} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{2.1}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$ есть разложение функции $\psi(x)$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$, т. е. имеем:

$$a_i = \int\limits_G \psi(x)\,\psi_i(x)\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Это всегда можно сделать в силу свойства 2) (стр. 38).

Из неравенства (2.1), в силу нормированности системы $\{\varphi_n(x)\}$, непосредственно следует, что для выбранного $\delta > 0$ будет иметь место также неравенство:

$$|a_n| = \left| \int\limits_G \psi(x)\,\psi_n(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что можно найти конечное число неперекрывающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, лежащих на $[0, 1]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\operatorname{mes} \Delta_k \cdot G > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\operatorname{mes} G = \operatorname{mes} \left(\sum_{k=1}^{m} \Delta_k \right) G, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Delta_k} |f(x)|^p \, dx < \frac{\delta^{2p}}{2^{p+1}} \quad (k = 1, 2, \cdots, m). \tag{2.4}$$

Очевидно, для этого достаточно разделить отрезок $[0, 1]$ на конечное число интервалов так, чтобы на каждом из них выполнялось неравенство (2.4), а потом из этих интервалов можно исключить те, пересечения которых с множеством G имеют меру нуль.

Зафиксируем натуральное число $n_1 \geqslant 1$. В силу леммы 1, где положено $\varepsilon_0 = \delta$ и вместо E_0 взято $E_0 \cdot \Delta_1$, можно определить на отрезке Δ_1 ограниченную функцию $f_1(x)$ и множество e_1, обладающие свойствами:

1°. $f_1(x) = 0$ при $x \overline{\in} e_1$, $e_1 \subset E_0 \cdot \Delta_1$ и $\operatorname{mes} e_1 \leqslant \delta \cdot |\Delta_1| < \varepsilon \cdot |\Delta_1|$*;

2°. $\displaystyle\int_{\Delta_1} |f_1(x)|^p \, dx \leqslant \frac{1}{\delta^{p-1}} \int_{\Delta_1} |f(x)|^p \, dx$;

3°. если $a_k^{(1)}$ определяется из равенства

$$a_k^{(1)} = \int_{\Delta_1} [f(x) - f_1(x)] \, \psi_k(x) \, dx = \int_{\Delta_1 G} [f(x) - f_1(x)] \, \psi_k(x) \, dx,$$

то

$$|a_k^{(1)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{при } k \leqslant n_1;$$

4°. $\displaystyle\| S_n^{(1)}(x) \|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$, при $n \leqslant n_1$, где

$$S_n^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Вне интервала Δ_1 полагаем $f_1(x) = 0$.

Условиям 3° и 4° можно удовлетворить в силу того, что n_1 фиксировано и по лемме 1 для фиксированного $\varepsilon_0 = \delta$ коэффициенты $a_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n_1$ можно сделать сколь угодно малыми.

Определим функцию $\Phi_1(x)$ следующим образом:

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in \Delta_1 G - e_1, \\ 0, & \text{при } x \in G - (\Delta_1 G - e_1). \end{cases}$$

Из определения функции $f_1(x)$ и коэффициентов $a_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ видно, что $a_k^{(1)}$ суть коэффициенты разложения по системе $\{\varphi_n(x)\}$ некоторой функции $Z_1(x) \in L_p(G)$, определяемой из равенства

---

* E_0 — множество, фигурирующее в формулировке леммы 2.

$$\chi_1(x)=\begin{cases} f(x)-f_1(x), \text{ при } x\in\Delta_1 G,\\ 0, \text{ при } x\in G-\Delta_1 G.\end{cases}$$

и совпадающей с $\Phi(x)$ всюду на $G-e_1$, в силу 1°.

Поэтому можно взять число $n_2>n_1$ настолько большим, чтобы выполнялись также следующие условия:

5°. $|a_k^{(1)}|\leq\frac{\varepsilon}{2^2}$, при $k>n_2$;

6°. $\|S_n^{(1)}(x)-\Phi_1(x)\|_{(G-e_1)}\leq\frac{\varepsilon}{2^2}$, при $n>n_2$.

Условиям 5° и 6° можно удовлетворить в силу свойства 1) нормированных базисов (см. стр. 38).

Снова употребляя лемму 1, на отрезке Δ_2 определяем функцию $f_2(x)$ и множество e_2, обладающие свойствами:

1°. $f_2(x)=0$ при $x\overline{\in}e_2$, $e_2\subset E_0\cdot\Delta_2$ и $\operatorname{mes} e_2\leq\delta\cdot|\Delta_2|<\varepsilon\cdot|\Delta_2|$;

2°. $\int\limits_{\Delta_2}|f_2(x)|^p dx\leq\frac{1}{\delta^{p-1}}\int\limits_{\Delta_2}|f(x)|^p dx$;

3°. если $a_k^{(2)}$ определяется из равенства

$$a_k^{(2)}=\int\limits_{\Delta_2}[f(x)-f_2(x)]\,\psi_k(x)\,dx=\int\limits_{\Delta_2 G}[f(x)-f_2(x)]\,\psi_k(x)\,dx,$$

то

$$|a_k^{(2)}|<\frac{\varepsilon}{2^3},\quad \text{при } k>n_2;$$

4°. $\|S_n^{(2)}(x)\|_G\leq\frac{\varepsilon}{2^3}$, при $n\leq n_2$, где

$$S_n^{(2)}(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k^{(2)}\varphi(x)\quad(n=1,2,\cdots).$$

Вне интервала Δ_2 полагаем $f_2(x)=0$.

Условиям 3° и 4° можно удовлетворить, ибо n_2 фиксировано, и в силу леммы 1 при фиксированном $\varepsilon_0=\delta$ коэффициенты $a_k^{(2)}$, $k=1,2,\cdots,n_2$ можно сделать сколь угодно малыми.

Положим

$$\Delta_2'=\Delta_1+\Delta_2\quad\text{и}\quad e_2'=e_1+e_2. \tag{2.5}$$

Функцию $\Phi_2(x)$ определим следующим образом:

$$\Phi_2(x)=\begin{cases} f(x), \text{ при } x\in\Delta_2' G-e_2',\\ 0, \text{ при } x\in G-(\Delta_2' G-e_2').\end{cases} \tag{2.6}$$

Из определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и коэффициентов $a_k^{(1)}$ и $a_k^{(2)}$ видно, что числа $a_k^{(1)}+a_k^{(2)}$ суть коэффициенты разложения по системе $\{\varphi_n(x)\}$, некоторой функции $\chi_2(x)\in L_p(G)$, определяемой из равенства

$$\chi_2(x) = \begin{cases} f(x) - [f_1(x) + f_2(x)], \text{ при } x \in \Delta_2' G, \\ 0, \quad \text{ при } x \in G - \Delta_2' G. \end{cases}$$

и совпадающей с $\Phi_2(x)$ всюду на множестве $G - e_2'$ в силу 1° (стр. 42). Поэтому можно взять $n_3 > n_2$ настолько большим, чтобы выполнялись также следующие условия:

5°. $|a_k^{(1)} + a_k^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{2^3}$, при $k > n_3$;

6°. $\| S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x) - \Phi_2(x) \|_{(G - e_2')} < \frac{\varepsilon}{2^3}$, при $n > n_3$,

где полагаем:

$$S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k^{(1)} + a_k^{(2)}) \varphi_k(x).$$

Пусть теперь функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k_0-1}(x)$, числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k_0-1}$ и множества $e_1, e_2, \ldots, e_{k_0-1}$ уже определены, где $f_i(x) \in L_p(G)$, $f_i(x) = 0$, при $x \in e_i$, $e_i \subset E_0 \cdot \Delta_i$ и,

$$\operatorname{mes} e_i \leqslant \delta \cdot |\Delta_i| < \varepsilon |\Delta_i|, \quad (i = 1, 2, \ldots, k_0 - 1, \quad k_0 \leqslant m).$$

Пусть множества Δ_i', e_i' и функции $\Phi_i(x)$ определены следующим образом:

$$\Delta_i' = \sum_{j=1}^{i} \Delta_j, e_i' = \sum_{j=1}^{i} e_j \quad (1 \leqslant i \leqslant k_0 - 1),$$

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} f(x), \text{ при } x \in \Delta_i' G - e_i'; \\ 0, \text{ при } x \in G - \Delta_i' G - e_i'. \end{cases} \tag{2.7}$$

Выберем число $n_{k_0} > n_{k_0-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись условия:

$$\text{A)} \left| \int\limits_{\Delta_{k_0-1}'} [f(x) - \sum_{i=1}^{k_0-1} f_i(x)] \psi_n(x)\, dx = \right| \sum_{i=1}^{k_0-1} \int\limits_{\Delta_i} [f(x) - f_i(x)] \psi_n(x)\, dx \Bigg| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{k_0-1} \int\limits_{\Delta_i G} [f(x) - f_i(x)] \psi_n(x)\, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{k_0-1} a_n^{(i)} \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k_0}}, \text{ при } n > n_k,$$

где

$$a_n^{(i)} = \int\limits_{\Delta_i G} [f(x) - f_i(x)] \psi_n(x)\, dx = \int\limits_{\Delta_i G} [f(x) - \sum_{j=1}^{k_0-1} f_j(x)] \psi_n(x)\, dx; \tag{2.8}$$

B) $\| S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x) + \ldots + S_n^{(k_0-1)}(x) - \Phi_{k_0-1}(x) \|_{(G - e_{k_0-1}')} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k_0}}$,

при $n > n_{k_0}$, где множества e_{k_0-1}', Δ_{k_0-1}' и $\Phi_{k_0-1}'(x)$ определяются из (2.6) и (2.7) при $i = k_0 - 1$, и

$$S_n^{(1)}(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)}\varphi_k(x). \tag{2.9}$$

Условию А) можно удовлетворить в силу того, что коэффициенты разложения по нормированному базису стремятся к нулю.

Условию В) можно удовлетворить в силу того, что

$$S_n^{(1)}(x)+S_n^{(2)}(x)+\ldots+S_n^{(k_0-1)}(x)$$

есть частная сумма разложения по базису $\{\varphi_n(x)\}$ некоторой функции $\chi_{k_0-1}(x)\in L_p(G)$, определяемой из равенства

$$\chi_{k_0-1}(x)=\begin{cases} f(x)-\sum_{i=1}^{k_0-1} f_i(x), \text{ при } x\in\Delta'_{k_0-1}G, \\ 0, \qquad \text{при } xG\in-\Delta'_{k_0-1}G, \end{cases}$$

и совпадающей с $\Phi_{k_0-1}(x)$ всюду на множестве $G-e'_{k_0-1}$. Теперь, после того как число n_{k_0}, удовлетворяющее условиям А) и В), выбрано, применяя лемму 1, определим ограниченную функцию $f_{k_0}(x)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

C) $f_{k_0}(x)=0$ при $x\overline{\in}e_{k_0}$, $e_{k_0}\subset\Delta_{k_0}E_0$ и $\operatorname{mes} e_{k_0}<\delta\cdot|\Delta_{k_0}|<\varepsilon|\Delta_{k_0}|$;

D) $\int\limits_{\Delta_{k_0}}\left|f_{k_0}(x)\right|^p dx<\frac{1}{\delta^{p-1}}\int\limits_{\Delta_{k_0}}\left|f(x)\right|^p dx;$

E) $|a_n^{(k_0)}|<\frac{\varepsilon}{2^{k_0+1}}$, при $n<n_{k_0}$,

где $$a_n^{(k_0)}=\int\limits_{\Delta_{k_0}G}[f(x)-f_{k_0}(x)]\psi_n(x)\,dx \quad (n=1, 2, \ldots);$$

F) $\| S_n^{(k_0)}(x)\|_G<\frac{\varepsilon}{2^{k_0+1}}$, при $n\leqslant n_{k_0}$,

где $$S_n^{(k_0)}(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(k_0)}\varphi_k(x) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Условию F) можно удовлетворить, ибо n_{k_0} фиксировано, и, в силу леммы 1 для фиксированного $\varepsilon_0=\delta$, коэффициенты $a_k^{(k_0)}$, $k=1, 2, \ldots, n_{k_0}$ можно сделать сколь угодно малыми.

Таким образом, функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ и числа $n_1<n_2<\ldots<n_m$ для каждого k_0, $2<k_0<m$ удовлетворяют условиям А), В), С), D), Е), F), при этом $f_k(x)=0$, при $x\overline{\in}e_k\subset E_0\cdot\Delta_k\subset\Delta_k G$.

Положим

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{m} f_k(x), \qquad F(x)=f(x)-\Phi(x), \quad (xG\in). \tag{2.9'}$$

$F(x)\in L_p(G)$, ибо $f(x)\in L_p(G)$ и $\Phi(x)$ ограничена.

Покажем, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям α), β), γ) леммы 2.

Условие α) выполнено, так как каждая из функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$ равна нулю вне e_k, $e_k \subset \Delta_k E_0 \subseteq \Delta_k G$, где $\operatorname{mes} e_k < \varepsilon \cdot |\Delta_k|$, и тогда $F(x)=f(x)$ всюду вне множества

$$e_0 = e_m' = \sum_{k=1}^{m} e_k \subset E_0, \ \operatorname{mes} e_0 < \sum_{k=1}^{m} \varepsilon \cdot |\Delta_k| < \varepsilon.$$

Проверим условия β) и γ). Для этого заметим, что, в силу (29′) и C) (стр. 44), имеет место равенство

$$\|F(x)\|_{\Delta_i G} = \Big(\int_{\Delta_i G} |F(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\Delta_i G} |f(x) - f_i(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Отсюда получаем:

$$\|F(x)\|_{\Delta_i G} < \delta, \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{2.10}$$

В самом деле, имеем:

$$\int_{\Delta_i G} |f(x) - f_i(x)|^p\,dx \leqslant 2^p \int_{\Delta_i G} (|f(x)|^p + |f_i(x)|^p)\,dx.$$

В силу (2.4) и в силу свойства D), где $k_0 = i$, получаем

$$\int_{\Delta_i G} |f(x)|^p dx < \frac{\delta^{2p}}{2^{p+1}}, \quad \int_{\Delta_i G} |f_i(x)|^p dx < \frac{1}{\delta^{p-1}} \int_{\Delta_i G} |f(x)|^p dx < \frac{\delta^{p+1}}{2^{p+1}}.$$

Следовательно, так как $\delta < 1$, будем иметь:

$$\|F(x)\|_{\Delta_i G} < \Big(\frac{\delta^{2p}}{2} + \frac{\delta^{p+1}}{2}\Big)^{1/p} < \delta.$$

Неравенство (2.10) доказано.

Из неравенства (2.10) следуют следующие два неравенства:

$$|a_n^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{2} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.11}$$

$$\|S_n^{(i)}(x)\|_G < \frac{\varepsilon}{2} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.12}$$

где

$$a_n^{(i)} = \int_{\Delta_i G} [f(x) - f_i(x)]\,\psi_n(x)\,dx = \int_{\Delta_i G} F(x)\,\psi_n(x)\,dx, \tag{2.13}$$

$$S_n^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \varphi_k(x), \tag{2.14}$$

ибо числа $a_n^{(i)}$ и функции $S_n^{(i)}(x)$ суть, соответственно, коэффициенты и частные суммы разложения некоторой функции по системе $\{\varphi_n(x)\}$, норма которой меньше δ (см. неравенства (2.1) и (2.2), стр. 40).

Теперь проверим условие β) леммы 2.

Так как интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ удовлетворяют условию (2.3), то можно написать

$$a_n = \int\limits_G F(x)\psi_n(x)\,dx = \int\limits_{(\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta_i)G} F(x)\psi_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Delta_i G} F(x)\psi_n(x)\,dx.$$

Отсюда, в силу (2.13), имеем:

$$a_n = \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}. \tag{2.15}$$

Пусть $n > n_m$. Можно написать:

$$|a_n| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{m-1} a_n^{(i)}\right| + |a_n^{(m)}|. \tag{2.16}$$

Для $n > n_m$ первое слагаемое в правой части неравенства (2.16) не превосходит $\frac{\varepsilon}{2^m}$, в силу свойства A), где положено $k_0 = m$. Далее, в силу (2.11), $|a_n^{(m)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для всех n.

Таким образом, будет:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon, \text{ для всех } n > n_m,$$

и свойство β) для указанных n доказано.

Пусть $n \leqslant n_m$. Допустим, что $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, где предполагается $n_0 = 0$.

Очевидно, можно написать

$$|a_n| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k-2} a_n^{(i)}\right| + |a_n^{(k-1)}| + \sum_{i=k}^{m} |a_n^{(i)}|, \tag{2.17}$$

где в случае $k = 1$ исчезают первое и второе слагаемые, а в случае $k = 2$ исчезает первое слагаемое. Первое слагаемое в правой части неравенства (2.17) не больше $\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$ по условию A), где положено $k_0 = k - 1$ (при $k = 1, 2$ оно равно нулю).

Второе слагаемое не больше $\frac{\varepsilon}{2}$, в силу (2.11).

Третье слагаемое не превосходит сумму:

$$\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

в силу условия Е), где, последовательно, полагаем

$$k_0 = k,\ k+1,\ \ldots,\ m.$$

Итак, будем иметь

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^k} \leqslant \varepsilon,$$

и условие β) леммы 2 имеет место также при $n \leqslant n_m$. Условие β) доказано.

Проверим условие γ).

В силу (2.14) и (2.15) можно написать

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} S_n^{(i)}(x). \tag{2.18}$$

Пусть натуральное число n таково, что $n > n_m$. Пусть $e \subset G - e_0$. Можно написать

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e + \| S_n^{(m)}(x) \|_e.$$

Отсюда, в силу (2.12), имеем:

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.19}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.19). Имеем:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{m-1}(x) \right\|_e + \| \Phi_{m-1}(x) - f(x) \|_e. \tag{2.20}$$

Из определения функции $\Phi_{m-1}(x)$ (см. (2.7) при $k_0 = m$) непосредственно видно, что $|\Phi_{m-1}(x) - f(x)|^p \leqslant |f(x)|^p$, при $x \in G$.

Следовательно,

$$\| \Phi_{m-1}(x) - f(x) \|_e \leqslant \| f(x) \|_e. \tag{2.21}$$

С другой стороны, так как $e \subset G - e_0$ и $e'_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} e_k \subset \sum_{k=1}^{m} e_k = e_0$, то $e \subset G - e'_{m-1}$, и в силу условия В), где положено $k_0 = m$, будем иметь:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{m-1}(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{m-1}(x) \right\|_{(G - e'_{m-1})} < \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{2.22}$$

Из (2.20), (2.21) и (2.22) следует:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m} + \| f(x) \|_e. \tag{2.23}$$

Отсюда, в силу (2.19), будем иметь:

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \varepsilon + \| f(x) \|_e. \tag{2.24}$$

Следовательно,

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon + 2 \| f(x) \|_e. \tag{2.25}$$

Итак, для $n > n_m$ свойство γ) выполняется.

Рассмотрим случай, когда $n \leqslant n_m$. Допустим, что $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, где предполагается $n_0 = 0$. Пусть $e \subset G - e_0$. Очевидно, при $k > 2$ можно написать

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e + \| S_n^{(k-1)}(x) \|_e + \\ + \sum_{i=k}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e. \tag{2.26}$$

Так как $n \leqslant n_k$, то в силу условия F), где последовательно полагается $k_0 = k, k+1, \ldots, m$, будем иметь:

$$\sum_{i=k}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e \leqslant \sum_{i=k}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_G \leqslant \sum_{i=k}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{2.27}$$

Далее, в силу (2.12), имеем:

$$\| S_n^{(k-1)}(x) \|_e \leqslant \| S_n^{(k-1)}(x) \|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.28}$$

Оценим теперь первое слагаемое правой части неравенства (2.26). Можно написать

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e = \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{k-2}(x) + \Phi_{k-2}(x) - f(x) \right\|_e.$$

Следовательно,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{i}(x) - \Phi_{k-2}(x) \right\|_e + \| \Phi_{k-2}(x) - f(x) \|_e. \tag{2.29}$$

Из определения функции $\Phi_{k-2}(x)$ (см. (2.7) непосредственно следует, что

$$| \Phi_{k-2}(x) - f(x) |^p \leqslant | f(x) |^p, \text{ для всех } x \in G.$$

Поэтому будем иметь:

$$\| \Phi_{k-2}(x) - f(x) \|_e \leqslant \| f(x) \|_e. \tag{2.30}$$

Далее, так как

$$e \subset G - e_0, \; e'_{k-2} = \sum_{i=1}^{k-2} e_i \subset \sum_{i=1}^{m} e_i = e_0,$$

то $e \subset G - e'_{k-2}$, и в силу условия B), где положено $k_0 = k - 1$, будем иметь

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{k-2}(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{k-2}(x) \right\|_{(G-e'_{k-2})} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tag{2.31}$$

ибо по условию $n > n_{k-1}$.

Из (2.29), (2.30) и (2.31) следует

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \| f(x) \|_e. \tag{2.32}$$

Сравнивая (2.26), (2.27), (2.28) и (2.32), получаем

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2^k} + \| f(x) \|_e < \varepsilon + \| f(x) \|_e. \tag{2.33}$$

Следовательно,

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon + 2 \| f(x) \|_e, \tag{2.34}$$

где $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $k > 2$.

В случае, когда $k = 1, 2$, соответственно имеем:

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \sum_{i=1}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon \quad (k = 1)$$

в силу условия F), где полагается последовательно $k_0 = 1, 2, \ldots, m$ и

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \| S_n^{(1)}(x) \|_e + \sum_{i=2}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon \quad (k = 2),$$

ибо первое слагаемое меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу неравенства (2.12); а второе слагаемое меньше, чем $\sum_{i=2}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, в силу условия F), где последовательно полагается $k_0 = 2, 3, \ldots, m$.

Отсюда видно, что неравенство (2.34) выполнено также тогда, когда $k = 1, 2$; $n_{k-1} < n \leqslant n_k$.

Таким образом, условие γ) леммы 2 также имеет место для любого n, где $1 \leqslant n \leqslant m$.

Выполнение условия γ) доказано. Тем самым лемма 2 полностью доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует лемма 3.

Лемма 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p > 1$.

Пусть $f(x) \in L_p(G)$ — *не эквивалентная нулю функция, равная нулю вне некоторого множества* $E_0 \subset G$, $\operatorname{mes} E_0 < \operatorname{mes} G$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно определить функцию* $F(x) \in L_p(G)$ *и множество* e_0, *обладающие следующими свойствами:*

α) $F(x) = f(x)$, *при* $x \in G - e_0$, $e_0 \subset E_0$ *и* $\operatorname{mes} e_0 < \varepsilon$;

β) $|a_n| < \varepsilon$, для всех $n = 1, 2, \ldots$, где числа a_n суть коэффициенты разложения функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$;

γ) Для любого множества $e \subset G - E_0$,

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots, \text{ где}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x).$$

§ 3. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_m\}$, где

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < +\infty. \tag{3.1}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих базис в пространстве $L_p(G)$, $P > 1$ и $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, определенная на G.*

Пусть бесконечная матрица действительных чисел $\| a_{mk} \|$ и измеримые множества $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m \subset \ldots$, принадлежащие некоторому множеству E_0, $E_0 \subset G$, определены так, что имеют место условия:

a) Для любого фиксированного m, $a_{mk} \to 0$, при $k \to \infty$;

b) $|a_{mk}| < \varepsilon_m$ для всех $k = 1, 2, \ldots$;

c) для произвольного фиксированного m ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k} + \ldots + a_{mk}) \varphi_k(x)$$

сходится по мере на множестве E_m к $f(x)$, где

$$\operatorname{mes} E_m > \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon_m;$$

d) для произвольного фиксированного $m > 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \varphi_k(x) \right\|_{E_{m-1}} \leqslant \varepsilon_m \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{3.2}$$

сходится по мере к $f(x)$ на множестве E_0, где

$$a_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} \tag{3.3}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число.

Зафиксируем m_0 настолько большое, чтобы было

1) $\operatorname{mes} E_{m_0} > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{4}$,

2) $\sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1/p}$.

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{1k}+a_{2,k}+\ldots+a_{m_0k})\varphi_k(x)$ сходится по мере на множестве E_{m_0} к $f(x)$, то существует число $N(\varepsilon)$ настолько большое, что

$$\operatorname{mes} E_{(E_{m_0})}\left[\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2,k}+\ldots+a_{m_0k})\varphi_k(x)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right]<\frac{\varepsilon}{4}^{*},$$

для всех $n > N(\varepsilon)$.

Но так как $\operatorname{mes}(E_0 - E_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{4}$, то для $n > N(\varepsilon)$ на множестве E_0 будет иметь место:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2,k}+\ldots+a_{m_0k})\varphi_k(x)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right]<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Полагая

$$b_{m_0k}=\sum_{i=1}^{m_0} a_{ik}, \tag{3.6}$$

имеем

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n} b_{m_0k}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_{m_0k})\varphi_k(x), \tag{3.7}$$

где

$$a_k-b_{m_0k}=\sum_{i=m_0+1}^{\infty} a_{ik}.$$

Очевидно, для любого $n=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство:

$$\left\|\sum_{n=1}^{n}(a_k-b_{m_0k})\varphi_k(x)\right\|_{E_{m_0}} \leq \sum_{m=m_0+1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\varphi_k(x)\right\|_{E_{m_0}}. \tag{3.8}$$

* Если $\Phi(x)$ определена на G и $G_0 \subset G$, то через $E_{(G_0)}[\Phi(x) > \sigma]$ обозначаем множество тех точек из G_0, где $\Phi(x) > \sigma$, σ — произвольное число. Через $E[\Phi(x) > \sigma]$ обозначаем множество тех точек из всего множества G, где $\Phi(x) > \sigma$.

Учитывая, что $E_m \supset E_{m_0}$ при $m > m_0$ (см. стр. 50), в силу свойства d), где полагается $m = m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots$, будем иметь:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{m_k} \varphi_k(x) \right\|_{E_{m_0}} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{m_k} \varphi_k(x) \right\|_{E_{m-1}} < \varepsilon_m$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

Поэтому для любого n имеет место неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right\|_{E_{m_0}} \leqslant \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^{1/p},$$

т. е. имеем

$$\int\limits_{E_{m_0}} \left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi(x) \right|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{2^p} \cdot \frac{\varepsilon}{4} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда ясно, что множество тех точек из E_{m_0}, где

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2},$$

имеет меру меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{4}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Так как

$$\operatorname{mes}(E_0 - E_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{4},$$

то будем иметь

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Можно написать

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} [| S_n(x) - f(x) | > \varepsilon] =$$

$$= \operatorname{mes} E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} b_{m_0 k} \varphi_k(x) - f(x) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right| > \varepsilon \right] \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} b_{m_0 k} \varphi_k(x) - f(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right] +$$

$$+ \operatorname{mes} E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Отсюда, принимая во внимание (3.6), в силу (3.5) и (3.9) получаем для любого $n > N(\varepsilon)$:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}[|S_n(x)-f(x)|>\varepsilon]<\varepsilon. \tag{3.10}$$

Таким образом, мы доказали, что для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $N(\varepsilon)$ такое, что при $n>N(\varepsilon)$ будет иметь место условие (3.10), т. е. мы доказали, что ряд (3.2) сходится по мере на множестве E_0 к функции $f(x)$.

Легко видеть, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$. В самом деле, пусть $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число.

Возьмем m_0 настолько большое, чтобы было

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\varepsilon_m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из условия *a)* непосредственно видно, что при фиксированном m_0 можно взять число $N(\varepsilon)$ настолько большое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{m_0} a_{ik}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{при } k\geqslant N(\varepsilon).$$

Отсюда, а также учитывая равенство (3.3) и свойство b), получаем:

$$|a_k|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{m_0} a_{ik}\right|+\sum_{i=m_0+1}^{\infty}|a_{ik}|<\varepsilon.$$

Лемма 4 полностью доказана.

§ 4. Чтобы доказать теорему 1, докажем две теоремы, из которых теорема 1 легко следует.

Теорема 3. *Если $\{\varphi_k(x)\}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G\subset[0,1]$, $\operatorname{mes} G>0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L_p(G)$, $p>1$, то для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на G, существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

сходящийся к $f(x)$ по мере, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<+\infty. \tag{4.1}$$

Так как $f(x)$ почти везде конечна, то можно взять множество $E_1\subset G$ такое, что

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_1' > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_1}{2},$$

и чтобы функция $f(x)$ была ограничена на этом множестве.

Функцию $f_1(x)$ определим следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{ при } x \in E_1', \\ 0, \text{ при } x \in G - E_1'. \end{cases} \tag{4.2}$$

Очевидно $f_1(x) \in L_p(G)$. Применяя лемму 3, можем определить функцию $F_1(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами:

α) $F_1(x) = f_1(x)$, вне некоторого множества e_1, где

$$e_1 \subset E_1', \operatorname{mes} e_1 < \frac{\varepsilon_1}{2};$$

β) $|a_{1k}| < \varepsilon_1$, для всех $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{1k} = \int_G F_1(x) \psi_k(x)\, dx^*.$$

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к $F_1(x)$, и так как в силу (4.2) и α), $F_1(x) = f(x)$ на множестве $E_1 = E_1' - e_1$, то очевидно, он будет сходиться в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на множестве $E_1 = E_1' - e_1$ к $f(x)$, причем

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_1 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_1.$$

Возьмем функцию $f(x) - F_1(x)$. Так как эта функция почти везде конечна, то можно взять множество $e_2 \subset G - E_1$ такое, что

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes}(E_1 + e_2) > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_2}{2},$$

и чтобы функция $f(x) - F_1(x)$ была ограничена на e_2.

Функцию $f_2(x)$ определим следующим образом:

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - F_1(x), \text{ при } x \in e_2, \\ 0, \text{ при } x \in G - e_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Очевидно, $f_2(x) \in L_p(G)$ и $f_2(x) = 0$ на $E_1 \subset G - e_2$. Применяя лемму 3, мы можем определить функцию $f_2'(x) \in L_p(G)$ такую, что выполняются условия**:

---

* $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ суть функции, образующие биортогональную систему с системой $\{\varphi_k(x)\}$.

** В лемме 3 вместо E_0 взято e_2.

α) $f'_2(x) = f_2(x)$ всюду вне множества $e'_2 \subset e_2 \subset G - E_1$, где $\operatorname{mes} e'_2$ настолько мала, что множество $E_2 = E_1 + (e_2 - e'_2)$ имеет меру $\operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_2$;

β) $|a_{2,k}| < \varepsilon_2$ ($k = 1, 2, \ldots$), где

$$a_{2,k} = \int_G f'_2(x) \psi_k(x)\,dx;$$

γ) $\| S_{2,n}(x) \|_{E_1} \leqslant \varepsilon_2$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, где

$$S_{2,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_{2,k} \varphi_k(x).$$

В силу определения чисел a_{1k} и $a_{2,k}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к $F_1(x)$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} \varphi_k(x) \tag{4,4}$$

сходится в среднем порядка p на G к $f'_2(x)$.

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k}) \varphi_k(x) \tag{4.5}$$

сходится в среднем порядка p на G к функции

$$F_2(x) = F_1(x) + f'_2(x).$$

Легко видеть, что функция $F_2(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве $E_2 = E_1 + (e_2 - e'_2)$.

В самом деле, $F_1(x) = f(x)$ на множестве $E_1 = E'_1 - e_1$ в силу (4.2) и условия α). С другой стороны, $f'_2(x) = 0$ на E_1, ибо в силу (4.3) $f_2(x) = 0$ на $G - e_2$, $e_2 \subset G - E_1$ и так как, в силу α) $f'_2(x) = f_2(x)$, при $x \in G - e'_2$, где $e'_2 \subset e_2 \subset G - E_1$.

Следовательно, $F_2(x) = F_1(x) + f'_2(x) = f(x)$ при $x \in E_1$. Остается проверить, что $F_2(x) = f(x)$, при $x \in (e_2 - e'_2) \subset G - E_1$. Это следует из того, что в силу (4.3) и условия α) (стр. 54) $f'_2(x) = f(x) - F_1(x)$ при $x \in e_2 - e'_2$ и, следовательно, $F_2(x) = F_1(x) + f'_2(x) = f(x)$, при $x \in e_2 - e'_2$.

Итак, ряд (4.5) сходится в среднем порядка p на G к некоторой функции $F_2(x)$, совпадающей с $f(x)$ на множестве E_2.

Следовательно, ряд (4.5) сходится по мере на множестве E_2, $\operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_2$ к функции $f(x)$.

Пусть теперь для некоторого натурального m определены ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \varphi_k(x), \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} \varphi_k(x), \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \varphi_k(x)$$

такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1,k} + a_{2,k} + \ldots + a_{mk}) \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к некоторой функции $F_m(x)$, совпадающей с $f(x)$ на множестве $E_m \subset G$, где

$$\text{mes}\, G > \text{mes} E_m > \text{mes}\, G - \varepsilon_m.$$

Возьмем функцию $f(x) - F_m(x)$. Эта функция почти везде конечна на G, причем на E_m она равна нулю.

Возьмем множество $e_{m+1} \subset G - E_m$ такое, что

$$\text{mes}\, G > \text{mes}\,(E_m + e_{m+1}) > \text{mes}\, G - \frac{\varepsilon_{m+1}}{2},$$

и чтобы функция $f(x) - F_m(x)$ была ограничена на множестве e_{m+1}.

Определим функцию $f_{m+1}(x)$ следующим образом:

$$f_{m+1}(x) = \begin{cases} f(x) - F_m(x), \text{ при } x \in e_{m+1}, \\ 0, \text{ при } x \in G - e_{m+1}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Очевидно, $f_{m+1}(x) \in L_p(G)$ и $f_{m+1}(x) = 0$ на E_m. Применяя лемму 3 к функции $f_{m+1}(x)$, мы можем определить функцию $f'_{m+1}(x) \in L_p(G)$ так, чтобы выполнялись условия:

α) $f'_{m+1}(x) = f_{m+1}(x)$ всюду вне некоторого множества $e'_{m+1} \subset e_{m+1}$, где $\text{mes}\, e'_{m+1}$ настолько мала, что, обозначая через $E_{m+1} = E_m + (e_{m+1} - e'_{m+1})$, имеем:

$$\text{mes}\, G > \text{mes}\, E_{m+1} > \text{mes}\, G - \varepsilon_{m+1};$$

β) $|a_{m+1,k}| < \varepsilon_{m+1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{m+1,k} = \int_G f'_{m+1}(x) \psi_k(x)\, dx;$$

γ) $\| S_{m+1,n}(x) \|_{E_m} < \varepsilon_{m+1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ где

$$S_{n+1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k} \varphi_k(x).$$

Тогда $f'_{m+1}(x) = f_{m+1}(x) = f(x) - F_m(x)$ на множестве $e_{m+1} - e'_{m+1} = E_{m+1} - E_m$, а так как $e_{m+1} \subset G - E_m$, $E_m \subset G - e_{m+1} \subset G - e'_{m+1}$, то в силу α) и (4.6): $f'_{m+1}(x) = f_{m+1}(x) = 0$ на E_m.

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+1,k}\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к функции $f_{m+1}(x)$, равной нулю на E_m и равной $f(x)-F_m(x)$ на $E_{m+1}-E_m$, и так как, по предположению, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k}+a_{2,k}+\cdots+a_{mk})\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к функции $F_m(x)$, совпадающей с $f(x)$ на множестве E_m, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k}+a_{2,k}+\cdots+a_{mk}+a_{m+1,k})\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к некоторой функции $F_{m+1}(x)$, совпадающей с $f(x)$ на E_{m+1},

$$E_{m+1}\supset E_m,\ \operatorname{mes} E_{m+1} > \operatorname{mes} G-\varepsilon_{m+1}.$$

Далее заметим, что в силу нормированности системы $\{\varphi_n(x)\}$, имеем для любого m

$$\lim_{k\to\infty} a_{mk}=0.$$

Таким образом, доказано существование бесконечной матрицы $\|a_{mk}\|$ и множеств $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E_m\subset\ldots;\ E_m\subset G$, удовлетворяющих условиям леммы 4, где положено $E_0\equiv G$.

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x),$$

где

$$a_k=\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk}$$

сходится по мере на G к функции $f(x)$, причем

$$\lim_{k\to\infty} a_k=0.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G\subset[0,1]$, $\operatorname{mes} G>0$ и образующих нормированный базис в $L_p(G)$, $p>1$. Пусть $f(x)$ — измеримая функ-

ция, равная $+\infty$ *на множестве* $E_0 \subset G$ *и нулю на* $G - E_0$; *тогда существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящийся по мере на G *к* $f(x)$, *причем*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Возьмем функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in E_0, \\ 0, \text{ при } x \in G - E_0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \tag{4.8}$$

Применяя лемму 2, определим функцию $F_1(x) \in L_p(G)$, обладающую следующими свойствами:

α) $F_1(x) = \chi(x)$, всюду на $G - e_1$, где

$$e_1 \subset E_0, \ \operatorname{mes} e_1 < \frac{\varepsilon_1}{2};$$

β) $|a_{1k}| < \varepsilon_1$, для всех $k = 1, 2, \cdots$, где

$$a_{1k} = \int_G F_1(x)\, \psi_k(x)\, dx;$$

γ) для любого $e \subset G - e_1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \varphi_k(x) \right\|_e \leqslant \varepsilon_1 + 2\, \| \chi(x) \|_e = \varepsilon_1 + 2\, (\operatorname{mes} e \cdot E_0)^{1/p}$$

для всех $n = 1, 2, \cdots,$

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на $G - e_1$ к функции $\chi(x)$.

Так как

$$\operatorname{mes}[G - E_0(G - e_1)] \leqslant \operatorname{mes}(G - E_0) + \operatorname{mes}[G - (G - e_1)] \leqslant \operatorname{mes}(G - E_0) + \frac{\varepsilon_1}{2},$$

то будет

$$\operatorname{mes} E_0(G - e_1) > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{4.9}$$

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\varphi_k(x)$$

сходится по мере на множестве $E_0\,(G-e_1)$ к $\chi(x)$, т. е. к 1, то можно взять число n_1 настолько большое, что для точек множества $E_0(G-e_1)$ будем иметь при $n>n_1$

$$\operatorname{mes} E_{(E_0\cdot(G-e_1))}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\varphi_k(x)>\frac{1}{2}\right]>\operatorname{mes}[E_0\cdot(G-e_1)]-\frac{\varepsilon_1}{2}. \qquad (4.10)$$

Отсюда, принимая во внимание (4.9), получаем

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\varphi_k(x)>\frac{1}{2}\right]>\operatorname{mes} E_0-\varepsilon_1 \qquad (4.11)$$

при $n>n_1$.

Вновь применяя лемму 2, определим $F_2(x)\in L_p(G)$, обладающую следующими свойствами:

α) $F_2(x)=\chi(x)$, при $x\in G-e_2$, где

$$e_2\subset E_0,\ \operatorname{mes} e_2<\frac{\varepsilon_2}{2};$$

β) $|a_{2,k}|<\varepsilon_2$, при $k=1,2,\cdots$, где

$$a_{2,k}=\int_G F_2(x)\psi_k(x)\,dx;$$

γ) для любого множества $e\subset G-e_2$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\varphi_k(x)\right\|_e\leqslant\varepsilon_2+2\,\|\chi(x)\|_e=\varepsilon_2+2\,(\operatorname{mes} e\,E_0)^{1/p},$$

$$(n=1,2,\cdots);$$

δ) $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\varphi_k(x)\right\|_G\leqslant\varepsilon_2$ при $n\leqslant n_1$.

Условию δ) можно удовлетворить, так как число n_1 фиксировано, и в силу леммы 2 коэффициенты $a_{2,k}$ можно сделать сколь угодно малыми.

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на множестве $G-e_2$ к функции $\chi(x)$, где

$$\operatorname{mes}(G-e_2)>\operatorname{mes} G-\frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{mes}[(G-e_2)E_0] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{4.12}$$

Следовательно, можно взять число $n_2 > n_1$ настолько большое, что при $n \geqslant n_2$ будет иметь место неравенство

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\, \varphi_k(x) > \frac{1}{2}\right] > \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon_2. \tag{4.13}$$

Продолжая этот процесс, мы определим бесконечную матрицу действительных чисел $\| a_{ik} \|$ и последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, где $n_i < n_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots$ такие, что выполняются следующие условия:

A) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ik} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$;

B) $|a_{ik}| < \varepsilon_i$ $(k = 1, 2, \cdots;\ i = 1, 2, \cdots)$;

C) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к некоторой функции $F_i(x)$, совпадающей с $\chi(x)$ на $G - e_i$, где $e_i \subset E_0$ и $\operatorname{mes} e_i < \frac{\varepsilon_i}{2}$, причем выполняется неравенство:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \varphi_k(x) > \frac{1}{2}\right] > \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon_i, \text{ при } n \geqslant n_i;$$

D) если $e \subset G - e_i$, то для любого $n = 1, 2, \cdots$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_i + 2\, \| \chi(x) \|_e = \varepsilon_i + 2\,(\operatorname{mes} e \cdot E_0)^{1/p};$$

E) для любого $i > 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \varepsilon_i, \text{ при } n \leqslant n_{i-1}.$$

Возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi_k(x), \tag{4.14}$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}. \tag{4.15}$$

Докажем, что ряд (4.14) удовлетворяет условиям теоремы 4.

Сначала покажем, что ряд (4.14) сходится по мере на E_0 к $+\infty$, т. е. что для любых $M>0$ и $\varepsilon>0$ найдется целое число $N(M, \varepsilon)$ такое, что при $n>N(M,\varepsilon)$ имеет место

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) < M\right] < \varepsilon. \tag{4.16}$$

Итак, пусть $M>0$, $\varepsilon>0$ — произвольные числа. Зафиксируем i_0 настолько большое, чтобы было

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i < \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p. \tag{4.17}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k} \varphi_k(x), \tag{4.18}$$

где

$$b_{i,k} = \sum_{i=1}^{i_0} a_{ik}. \tag{4.19}$$

Так как i_0 фиксировано, то ряд (4.18) сходится в среднем порядка p на G к функции

$$\Phi_{i_0}(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_{i_0}(x),$$

ибо этот ряд есть разложение функции $\Phi_{i_0}(x)$ по базису $\{\varphi_n(x)\}$.

Из сходимости в среднем порядка p ряда (4.18) следует, что нормы частных сумм этого ряда равномерно ограничены. Следовательно, существует $M_0>0$ настолько большое, что

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \varphi_k(x) < -M_0\right] < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.20}$$

$$(n = 1, 2, \cdots).$$

Возьмем $N(M, \varepsilon) = n_{i_0+p_0}$, где

$$p_0 > 2(M + M_0) + 2 + 6\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p}. \tag{4.21}$$

Пусть $n \geqslant N(M, \varepsilon)$. Допустим, что $n_i \leqslant n < n_{i+1}$, $i \geqslant i_0 + p_0$.

Рассмотрим сумму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x). \tag{4.22}$$

Положим

$$c_{ik} = \sum_{s=i_0+1}^{i+1} a_{sk}. \tag{4.23}$$

В силу (4.15), (4.19) и (4.23) можно написать

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\varphi_k(x), \tag{4.24}$$

где

$$d_{ik}=a_k-(b_{i,k}+c_{ik})=\sum_{s=i+2}^{\infty}a_{sk}. \tag{4.25}$$

Возьмем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x).$$

Напишем ее в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x)=\sum_{s=i_0+1}^{i}\ \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k}\varphi_k(x). \tag{4.26}$$

Для каждой из сумм

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x),\ \ i_0+1\leqslant s\leqslant i$$

имеем, в силу условия C),

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)>\frac{1}{2}\right]>\operatorname{mes} E_0-\varepsilon_s, \tag{4.27}$$

ибо $n\geqslant n_i>n_{i-1}>\cdots>n_{i_0+1}$.

Отсюда следует:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{s=i_0+1}^{i}\ \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)>\frac{1}{2}(i-i_0)\right]>\operatorname{mes} E_0-\sum_{s=i_0+1}^{i}\varepsilon_s.$$

Из (4.17) и из того, что

$$i-i_0\geqslant p_0\geqslant 2(M+M_0)+2+6\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p},$$

получаем

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{s=i_0+1}^{i}\ \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)>M+M_0+1+3\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right]>$$

$$>\operatorname{mes} E_0-\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{p}. \tag{4.28}$$

С другой стороны, в силу условия D), (4.17) и включения $G\subset[0,1]$ имеем

$$\int\limits_{(G-e_{i+1})} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k}\varphi_k(x) \right|^p dx < 3^p,$$

где

$$\operatorname{mes}(G-e_{i+1}) > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_{i+1}}{2} > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon}{8},\ (i > i_0).$$

Поэтому множество тех точек из $G-e_{i+1}$, где

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k}\varphi_k(x) < -3\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p},$$

имеет меру меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{8}$.

Но так как

$$\operatorname{mes}(G-e_{i+1}) > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{2} > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{8},$$

то будем иметь

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k}\varphi_k(x) \geqslant -3\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{4}\,(i > i_0). \qquad (4.29)$$

Из (4.28) и (4.29), учитывая равенство (4.26), получаем:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x) > M + M_0 + 1\right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.30)$$

Из (4.20) и (4.30) следует:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x) > M + 1\right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{3}{4}\varepsilon. \qquad (4.31)$$

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\varphi_k(x).$$

Учитывая равенство (4.25), легко видеть, что справедливо неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \sum_{s=i+2}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x) \right\|_G. \qquad (4.32)$$

Так как $n < n_{i+1}$, то в силу условия E) имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \varepsilon_s\quad s \geqslant i+2.$$

Следовательно, из (4.17) и (4.32) получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \right\|_G < \sum_{s=i+2}^{\infty} \varepsilon_i < \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^p \quad (i \geqslant i_0). \tag{4.33}$$

т. е.

$$\int_G \left| \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \right|^p dx < \frac{\varepsilon}{8} \qquad (i \geqslant i_0).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{mes} E \left[\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \leqslant -1 \right] < \frac{\varepsilon}{4} \cdot$$

Следовательно, будем иметь

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} \left[\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) > -1 \right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{4} \cdot \tag{4.34}$$

Из (4.31) и (4.34), принимая во внимание (4.24), получаем:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} [S_n(x) > M] \geqslant \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon. \tag{4.35}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} [S_n(x) < M] < \varepsilon, \text{ при } n \geqslant N(M, \varepsilon) = i_0 + p_0.$$

Итак, мы доказали, что ряд (4.14) сходится по мере на множестве E_0 к $+\infty$.

Чтобы закончить доказательство теоремы 4, остается показать, что ряд (4.14) на множестве $G + E_0$ сходится по мере к нулю.

Для этого достаточно заметить, что построенная нами матрица $\| a_{ik} \|$ удовлетворяет условиям леммы 4 для функции $\chi(x)$, множества $G - E_0$ и последовательности множеств $\{E_m\}$, где $E_m = G - E_0$, $m = 1, 2, \ldots$.

В самом деле, условия a) и b) леммы 4 непосредственно следуют из условий A) и B) (стр. 60).

Условие c) леммы 4 следует из условия C) (стр. 60), ибо в силу (4.7) $\chi(x) = 0$ при $x \in G - E_0$.

Условие d) леммы 4 следует из условия D), где положено $e = G - E_0$, ибо $e_i \subset E_0$ для любого $i = 1, 2, \cdots$

Таким образом, ряд (4.14) сходится по мере на $G - E_0$ к нулю.

Коэффициенты этого ряда стремятся к нулю также в силу леммы 4.

Теорема 4) доказана.

Из теоремы 4 непосредственно следует

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ *и образующих нормированный базис в* $L_p(G)$, $p > 1$.

Пусть $f(x)$ — измеримая функция, равная $-\infty$ на множестве $E_0 \subset G$ и нулю на $G - E_0$.

Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящийся по мере на G к $f(x)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Теорема 1 является непосредственным следствием теорем 3, 4, 5.

Теперь докажем теорему 2.

Пусть $f_1(x) \in L_p(G)$ — не эквивалентная нулю функция, обращающаяся в нуль на множестве $E_1 \subset G$, где

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_1 > G - e_1, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1.$$

Применяя лемму 3, мы можем определить не эквивалентную нулю функцию $F_1(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами*:

α) $F_1(x) = f_1(x)$, при $x \in G - e_1$, где

$$e_1 \subset G - E_1, \ \operatorname{mes} e_1 < \varepsilon_1;$$

β) $|a_{1k}| < \varepsilon_1$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{1k} = \int_G F_1(x)\, \psi_k(x)\, dx.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\, \varphi(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к функции $F_1(x)$, обращающейся в нуль на множестве E_1.

Положим

$$0 < \delta \leq \max_k \{ |a_{1k}| \} \tag{4.36}$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ так, чтобы было:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k < \delta. \tag{4.37}$$

Применяя лемму 3 к функции $-F_1(x)$, найдем $f_2(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами:

α) $f_2(x) = -F_1(x)$, при $x \in G - e_2$, где

$$e_2 \subset G - E_1, \ \operatorname{mes} e_2 < \varepsilon_2;$$

* Для того, чтобы функция $F_1(x)$ была отлична от нуля на множестве положительной меры, достаточно взять в лемме 3

$$\varepsilon < \min\left\{ \varepsilon_1, \frac{1}{2} \operatorname{mes} E\,[f_1(x) \neq 0] \right\}.$$

β) $|a_{2,k}| < \varepsilon_2$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{2,k} = \int_G f_2(x)\,\psi_k(x)\,dx;$$

$$\gamma)\ \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\varphi_k(x) \right\|_{E_1} < \varepsilon_2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k})\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, к некоторой функции $F_2(x) \in L_p(G)$, обращающейся в нуль на множестве $E_2 = G - e_2$, где

$$E_2 \supset E_1,\ \operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_2.$$

Предположим теперь, что построены ряды.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\varphi_k(x),\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}\varphi_k(x), \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}\varphi_k(x),$$

обладающие тем свойством, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k} + \cdots + a_{mk})\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к некоторой функции $F_m(x)$, обращающейся в нуль на множестве E_m, где

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_m > \operatorname{mes} G - \varepsilon_m.$$

Применяя лемму 3 к функции $-F_m(x)$, мы можем определить функцию $f_{m+1}(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами:

α) $f_{m+1}(x) = -F_m(x)$, при $x \in G - e_{m+1}$, где

$$e_{m+1} \subset G - E_m,\ \operatorname{mes} e_{m+1} < \varepsilon_{m+1};$$

β) $|a_{m+1,k}| < \varepsilon_{m+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{m+1,k} = \int_G f_{m+1}(x)\,\psi_k(x)\,dx;$$

$$\gamma)\ \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k}\,\varphi_k(x) \right\|_{E_m} < \varepsilon_{m+1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k} + \cdots + a_{m+1,k})\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к некоторой функции $F_{m+1}(x) \in L_p(G)$, обращающейся в нуль на некотором множестве E_{m+1}, где

$$E_{m+1} \supset E_m, \ \operatorname{mes} E_{m+1} > \operatorname{mes} G - \varepsilon_{m+1}.$$

Таким образом, нами будут построены бесконечная матрица $\| a_{ik} \|$ и последовательность множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m \subset \ldots$, которые удовлетворяют условиям леммы 4, где положено $E_0 = G$ и $f(x) \equiv 0$.

Возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{4.38}$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}. \tag{4.39}$$

Тогда по лемме 4 ряд (4.38) сходится по мере на G к нулю и

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Из условий β) и из соотношений (4.36), (4.37) и (4.39) непосредственно видно, что не все a_n равны нулю.

Теорема 2 доказана.

Институт математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 5 XI 1956

Ա. Ա. Թալալյան

L_p ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶԻՍՆԵՐԻ ՇԱՐՔԵՐԸ ԸՍՏ ՉԱՓԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՎԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Թեորեմ 1. *Եթե G դրական չափի սահմանափակ բազմության վրա որոշված $\{\varphi_n(x)\}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը հանդիսանում է նորմավորված բազիս $L_p(G), p > 1$ տարածության մեջ, ապա G բազմության վրա որոշված ցանկացած $f(x)$* չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

* *$f(x)$ ֆունկցիան կարող է հավասարվել $+\infty$ կամ $-\infty$ դրական չափի բազմության վրա:*

շարք, որը G բազմության վրա ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, ընդ որում

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0։$$

Թեորեմ 2. *Եթե G դրական չափի սահմանափակ բազմության վրա որոշված $\{\varphi_n(x)\}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը հանդիսանում է բազիս $L_p(G)$, $p>1$ տարածության մեջ, ապա գոյություն ունի այնպիսի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

շարք, որը G բազմության վրա ըստ չափի զուգամիտում է զերոյի և որի ոչ բոլոր գործակիցներն են հավասար զերոյի, ընդ որում

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0։$$

Ըստ չափի զուգամիտությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

Սահմանում՝ *G դրական չափի բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}$ չափելի համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$ չափելի ֆունկցիային, եթե գոյություն ունեն $\{g_n(x)\}$ և $\{\alpha_n(x)\}$ չափելի ու համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների հաջորդականություններ այնպես, որ*

$$f_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x),$$

որտեղ

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

համարյա ամենուրեք G-ի վրա և $\{\alpha_n(x)\}$ հաջորդականությունը G-ի վրա ըստ չափի զուգամիտում է զերոյի։

Թեորեմ 1-ը ապացուցված է եղել Մենշովի կողմից այն մասնավոր դեպքում, երբ $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմը համընկնում է $\{\cos nx, \sin nx\}$ սիստեմի հետ [3]։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaczmarz* und *Steihaus*. Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwow (1935).
2. *Люстерник Л. А.* и *Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.
3. *Меньшов Д. Е.* О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды математического института им. В. А. Стеклова, XXXIII (1950). On convergence in measure of trigonometric series. *Men'sov D. E.* Amer. Math. Soc. Translation, № 105, 1954, 76 pp.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ X, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. А. Александрян

О корректности одной смешанной задачи и о спектральной эквивалентности связанных с нею двух операторов

В работе изучается некоторая система дифференциальных уравнений, которая в известном смысле является простейшей из систем типа С. Л. Соболева, т. е. систем не типа Ковалевской, для которых все же задача Коши поставлена корректно.

Такие системы встречаются в некоторых вопросах гидродинамики и были впервые изучены С. Л. Соболевым, который решил задачу Коши в явном виде для некоторых специальных случаев, путем построения соответствующих фундаментальных решений. Исследование этих формул, дающих решение задачи Коши, обнаружило некоторые специфические особенности качественных свойств решений таких систем. Эти специальные свойства выявляются сильнее, когда рассматривается не задача Коши, а смешанная задача, т. е. когда область изменения пространственных переменных имеет границу.

Наряду с упомянутой системой в работе рассматривается тесно связанное с нею уравнение четвертого порядка; указывается способ построения решения системы по данному решению уравнения четвертого порядка и наоборот.

Доказывается корректность постановки смешанной задачи как для системы, так и для уравнения четвертого порядка, путем сведения этих задач к решению задачи Коши для операторных уравнений в соответствующих функциональных пространствах.

Устанавливается спектральная эквивалентность операторов A и B, порожденных смешанной задачей соответственно для упомянутой системы и уравнения четвертого порядка. Указывается способ сведения построения резольвенты самосопряженного оператора A к решению задачи Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Для последней системы фундаментальное решение выписывается в явном виде.

Краткое содержание некоторых результатов работы было опубликовано автором в заметке [2], причем, как формулировки, так и доказательства этих результатов значительно упрощены. Результаты, не упомянутые в этой заметке, публикуются впервые.

1°. В этом пункте подробно излагается постановка задачи, а также устанавливается тесная связь между одной системой дифференциальных уравнений и уравнением четвертого порядка, упомянутых в введении.

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} = - V_x + \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \tag{1.3}$$

которая, очевидно, не является системой типа Ковалевской, однако можно показать, что задача Коши для системы (1) поставлена корректно и, более того, построить формулы, дающие решение задачи Коши в явном виде. Как уже говорилось выше, мы изучаем смешанную задачу для системы (1). Всюду в дальнейшем мы будем считать, что независимые переменные x, y (пространственные координаты) в системе (1) изменяются в некоторой ограниченной области D с гладкой границей Γ на плоскости XY, а $t>0$.

Вектор $\vec{V}(x, y, t)$ с компонентами V_x и V_y вместе со скалярной функцией $P(x, y, t)$ составляют решение системы (1), если они обладают соответствующими производными и обращают систему (1) в тождество по x, y, t в области их изменения.

Задача С. Л. Соболева, или, коротко, задача (С) для системы (1) состоит в отыскании такого решения, которое удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\vec{V}(x, y, t)\Big|_{t=0} = \vec{V}^{(0)}(x, y), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \vec{V}^{(1)}(x, y), \tag{2.2}$$

$$P(x, y, t)\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad \text{при всех } t>0. \tag{3}$$

Одновременно с системой (1) рассмотрим следующее уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Задача (C) для уравнения (4) состоит в отыскании такого решения, которое удовлетворяет условиям:

$$u\Big|_{t=0}=\psi_0(x,\ y), \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_1(x,\ y), \tag{5.2}$$

$$u(x,y,\ t)\Big|_{\Gamma}=0 \quad \text{при всех} \quad t>0. \tag{6}$$

Мы изучим вопросы существования, единственности и корректности указанных выше задач.

Заметим, прежде всего, что система (1) тесно связана с уравнением (4), а именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если гладкие $\vec{V}(x,\ y,\ t)$ *и* $P(x,\ y,\ t)$ *удовлетворяют системе (1) при условии (3), то* $P(x,\ y,\ t)$ *удовлетворяет уравнению (4) и при заданном* $\vec{V}(x,\ y,\ t)$ *определяется единственным образом. Обратно, если* $u=P(x,\ y,\ t)$ *удовлетворяет уравнению (4) и условию (3), то существует вектор* $\vec{V}(x,\ y,\ t)$, *который вместе с* $P(x,\ y,\ t)$ *составляет решение системы (1), причем разность любых двух таких векторов имеет компоненты вида* $V_x=a(y,\ t)$, $V_y=b(x,\ t)$.

Доказательство. Продифференцировав (1.1), (1.2) соответственно по x и y, почленно сложив, приняв во внимание (1.3), получим:

$$\Delta P=\frac{\partial V_x}{\partial x}, \tag{7}$$

т. е. $P(x,\ y,\ t)$ удовлетворяет при каждом фиксированном t уравнению Пуассона (7) и граничному условию (3); поэтому, в силу единственности решения задачи Дирихле, при заданном $\vec{V}(x,\ y,\ t)$ действительно определяется единственным образом.

Продифференцировав, далее (7), дважды по t и принимая во внимание (1.3) и (1.2), легко убеждаемся в справедливости первой части теоремы 1. Пусть теперь $P(x,\ y,\ t)$ удовлетворяет уравнению (4) и условию (3). Составим для данного $P(x,\ y,\ t)$ уравнение

$$\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=P(x,\ y,\ t), \tag{8}$$

которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Легко доказать, что при таком $P(x,\ y,\ t)$ уравнение (8) имеет решение $f(x,\ y,\ t)$, удовлетворяющее уравнению (4). Для этого достаточно написать общее решение уравнения (8), подставить его в уравнение (4) и подобрать четыре произвольные функции от x и y, входящие в общее решение уравнения (8), так, чтобы обратить уравнение (4) в тождество.

Пусть теперь $P(x, y, t)$ — такое решение уравнения (8), которое удовлетворяет уравнению (4); тогда, полагая $V_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2}$, $V_y = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}$, $P(x, y, t) = \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, непосредственно убеждаемся, что они образуют решение системы (1). Наконец, положив $P \equiv 0$, из (7) и (1.3) получаем $V_x = a(y, t)$, $V_y = b(x, t)$. Теорема 1 доказана.

2°. В этом пункте мы сведем решение задачи (С) как для системы (1), так и для уравнения (4) к решению задачи Коши для двух операторных уравнений в специальным образом построенных гильбертовых пространствах, причем удачный подбор скалярных произведений и операторов существенен для дальнейшего исследования. Попутно установим некоторые основные свойства упомянутых операторов.

Пусть $\widetilde{H}_A$ — гильбертово пространство комплексных вектор-функций $\vec{V}(x, y)$, компоненты которых $V_x(x, y)$ и $V_y(x, y)$ определены и суммируемы с квадратом модуля в области D, причем линейные операции обычные, а скалярное произведение задано формулой:

$$(\vec{V}, \vec{W}) = \iint\limits_D (V_x \cdot \overline{W}_x + V_y \cdot \overline{W}_y) dx dy. \tag{9}$$

Пусть Ω — линейное многообразие гладких соленоидальных векторов, т. е. $\vec{V}(x, y) \in \Omega$, если V_x и V_y имеют непрерывные производные всех порядков в замкнутой области $D + \Gamma$ и всюду в D $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$.

Замыкание Ω в скалярном произведении (9) обозначим через H_A. Это замыкание может быть описано следующим образом: $\vec{V} \in H_A$ тогда и только тогда, когда $\vec{V} \in \widetilde{H}_A$ и обобщенная дивергенция $\vec{V}(x, y)$ равна нулю, т. е. $(\vec{V}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$ для всех $\varphi(x, y) \in \Phi_0$, где Φ_0 — линейное многообразие бесконечно дифференцируемых в $D + \Gamma$ функций $\varphi(x, y)$, исчезающих вне некоторой области D_φ, такой, что $D_\varphi \subset D$.

В самом деле, если $\vec{V} \in H_A$, то существует последовательность $\vec{V}^{(\varepsilon)}(x, y) \in \Omega$ такая, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| \vec{V} - \vec{V}^{(\varepsilon)} \| = 0$. Интегрированием по частям легко получим, что $(\vec{V}^{(\varepsilon)}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_0$; поэтому $(\vec{V}, \operatorname{grad} \varphi) = (\vec{V} - \vec{V}^{(\varepsilon)}, \operatorname{grad} \varphi)$, откуда в силу неравенства Буняковского — Шварца $(\vec{V}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$, если $\varphi(x, y) \in \Phi_0$. Легко видеть также что, если $\vec{V} \in \tilde{H}_A$ и $(\vec{V}, \operatorname{grad}\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_0$, то найдется последовательность $\vec{V}^{(h)} \in \Omega$ такая, что $\lim\limits_{h \to 0} \| \vec{V} - \vec{V}^{(h)} \| = 0$, т. е. $\vec{V} \in H_A$.

Пусть теперь в плотном в H_A линейном многообразии Ω задан оператор A по формуле; $\vec{W} = A\vec{V}$, где

$$W_x = -V_x + \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{10.1}$$

$$W_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{10.2}$$

а $P(x, y)$ определяется при заданном $\vec{V} \in \Omega$ единственным образом из уравнения (7) и граничного условия (3), в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Семейство векторов $\vec{V}(x, y, t)$, зависящих от вещественного параметра t, будем называть траекторией в H_A, если при каждом фиксированном t $\vec{V}(x, y, t) \in H_A$. Производные траекторий по t условимся понимать в смысле сильной сходимости в H_A, т. е. если траектория дифференцируема в точке t, то

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{\vec{V}(x, y, t+h) - \vec{V}(x, y, t)}{h} \right\| = 0. \tag{11}$$

Легко видеть, что система (1) может быть записана в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = A\vec{V}, \tag{12}$$

а задача (C) сведется к отысканию дважды дифференцируемой траектории $\vec{V}(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению (12) и условиям (2.1) и (2.2).

Очевидно, оператор A от t не зависит. Поэтому уравнение (12) можно рассматривать как обыкновенное уравнение с „постоянными коэффициентами" в пространстве H_A.

Т е о р е м а 2. *Для всех $\vec{V} \in \Omega$ имеют место неравенства*

$$-(\vec{V}, \vec{V}) \leqslant (A\vec{V}, \vec{V}) \leqslant 0, \tag{13}$$

т. е. оператор A ограниченный, симметрический и отрицательно определенный на Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{V} \in \Omega$; тогда, очевидно

$$(A\vec{V}, \vec{V}) = \iint\limits_D \left\{ \left(-V_x + \frac{\partial P}{\partial x} \right) \overline{V}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \overline{V}_y \right\} dxdy =$$

$$= -\iint\limits_D |V_x|^2 dxdy - \iint\limits_D P(x, y) \cdot \overline{\operatorname{div} \vec{V}} dxdy$$

или, в силу того, что $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, получим

$$(A\vec{V},\ \vec{V}) = -\iint\limits_D |V_x|^2 dxdy.$$

Пусть теперь H_B—полное гильбертово пространство, которое получено в результате замыкания Φ_0 в метрике, порожденной скалярным произведением

$$(u,\ v)_B = \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\overline{\partial v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\overline{\partial v}}{\partial y}\right)dxdy = -\iint\limits_D \Delta u\cdot\bar{v}dxdy. \tag{14}$$

Пусть Δ^{-1} — оператор, обратный к оператору Лапласа при нулевых краевых условиях. Рассмотрим оператор

$$B = -\Delta^{-1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{15}$$

Т е о р е м а 2*. *Для всех* $u(x,\ y)\in\Phi_0$ имеют место неравенства

$$-(u,\ u)_B \leqslant (Bu,\ u)_B \leqslant 0, \tag{13*}$$

т. е. оператор B, *рассматриваемый на плотном в* H_B *линейном многообразии* Φ_0, *является ограниченным, симметрическим и отрицательно определенным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть $u\in\Phi_0$, тогда

$$(Bu,\ u)_B = -\iint\limits_D \Delta Bu\cdot\bar{u}dxdy = \iint\limits_D \frac{\partial^2 u}{\partial y_2}\cdot\overline{u(x,\ y)}dxdy = -\iint\limits_D \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 dxdy,$$

а с другой стороны $(u,\ u)_B = \iint\limits_D \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right\}dxdy$, поэтому теорема доказана.

3°. В этом пункте, опираясь на приведенные выше построения и теоремы 2 и 2*, мы докажем существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи (С) как для системы (1), так и для уравнения (4).

Заметим прежде всего, что, в силу упомянутых теорем, операторы A и B, заданные лишь на плотных соответственно в H_A и H_B линейных многообразиях Ω и Φ_0, продолжимы единственным образом на все H_A и H_B с сохранением упомянутых в этих теоремах свойств. Полученные таким образом самосопряженные операторы мы будем по-прежнему обозначать через A и B.

Т е о р е м а 3. *При произвольных* $\vec{V}^{(0)}(x,\ y)$ и $\vec{V}^{(1)}(x,\ y)$ из H_A *существует единственная дважды непрерывно дифференцируемая по* t *траектория* $\vec{V}(x,\ y,\ t)$ *в* H_A, *которая удовлетворяет уравнению (12) и начальным условиям (2.1) и (2.2). Эта траектория непрерывно зависит от* $\vec{V}^{(0)}$ *и* $\vec{V}^{(1)}$ *в смысле сильной сходимости в* H_A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (2.1) и (2.2), пока формально, в виде степенного ряда

$$\vec{V}(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \vec{W}^{(k)}, \tag{16}$$

где коэффициенты $\vec{W}^{(k)} \in H_A$ подлежат определению.

Полагая, что указанные в (12) операции выполнимы почленно, получим без труда рекуррентные соотношения

$$\vec{W}^{(k+2)} = A\vec{W}^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots); \tag{17}$$

но из начальных условий очевидно имеем: $\vec{W}^{(0)} = \vec{V}^{(0)}$, $\vec{W}^{(1)} = \vec{V}^{(1)}$, поэтому из (17) коэффициенты $\vec{W}^{(k)}$ определяются однозначно, а именно

$$\vec{W}^{(2p)} = A^p \vec{V}^{(0)}, \tag{18.1}$$

$$\vec{W}^{(2p+1)} = A^p \vec{V}^{(1)}, \tag{18.2}$$

где $(p = 0, 1, 2, \cdots)$, а под нулевой степенью оператора A понимается тождественный оператор. Таким образом, ряд

$$\vec{V}(x, y, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2p}}{(2p)!} A^p \vec{V}^{(0)} + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A^p \vec{V}^{(1)} \right] \tag{19}$$

формально удовлетворяет как уравнению (12), так и условиям (2.1) и (2.2).

Рассмотрим теперь ряд, составленный из норм членов ряда (19):

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{|t|^{2p}}{(2p)!} \|A^p \vec{V}^{(0)}\| + \frac{|t|^{2p+1}}{(2p+1)!} \|A^p \vec{V}^{(1)}\| \right], \tag{19*}$$

который, в силу ограниченности оператора A, сходится при любом фиксированном t; поэтому легко видеть, что как ряд (19), так и ряды, получаемые из него, почленным дифференцированием по t или применением оператора A сколько угодно раз, сходятся по норме в пространстве H_A, а его сумма действительно является искомой траекторией. Кроме того, в силу (13), получим оценку:

$$\|\vec{V}(x, y, t)\| \leq e^{|t|} (\|\vec{V}^{(0)}\| + \|\vec{V}^{(1)}\|), \tag{20}$$

из которой непосредственно следует как единственность, так и непрерывная зависимость от начальных данных в смысле сильной сходимости в H_A.

Легко видеть, далее, что уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Bu, \tag{21}$$

где оператор B не зависит от t и является ограниченным в пространстве H_B, причем $\|B\| = 1$.

Поэтому решение задачи (C) для уравнения (4) сводится к нахождению дважды дифференцируемой траектории $u(x, y, t)$ в H_B, которая удовлетворяет уравнению (2.1) и начальным условиям (5.1) и (5.2).

Поступая совершенно так же, как в случае уравнения (12), легко доказать, что искомая траектория $u(x, y, t)$ представляется степенным рядом

$$u(x, y, t) = \sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2p}}{(2p)!} B^p\psi_0(x, y) + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} B^p\psi_1(x, y)\right], \tag{22}$$

причем ряды, полученные из (22) путем конечного числа почленных дифференцирований по t или применения оператора B, сходятся по норме в пространстве H_B. Кроме того, имеет место оценка

$$\|u(x, y, t)\|_B \leqslant e^{|t|}\{\|\psi_0\|_B + \|\psi_1\|_B\}, \tag{23}$$

т. е. верна следующая теорема.

Теорема 3. При любых $\psi_0(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ из H_B существует единственная дважды дифференцируемая по t траектория в H_B, которая удовлетворяет уравнению (21) и начальным условиям (5.1), (5.2).*

Эта траектория зависит непрерывно от начальных данных в смысле сильной сходимости в H_B.

Замечание. Построенные выше траектории $\vec{V}(x, y, t) \in H_A$ и $u(x, y, t) \in H_B$, очевидно, не всегда являются решением задачи (С) соответственно для системы (1) и уравнения (4) в классическом смысле, однако представляют собой решение этих задач в некотором обобщенном смысле.

Так, например, $u(x, y, t)$, определенная формулой (22), удовлетворяет при всех $t > 0$ следующему интегральному соотношению:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\right)_B = (u, B\varphi)_B \tag{21'}$$

для всех $\varphi(x, y)$, гладких в $\bar{D}$, исчезающих на Γ, которое эквивалентно уравнению (4) и граничному условию (3), если $u(x, y, t)$ гладкая в $\bar{D}$; а при $t = 0$ удовлетворяет начальным условиям (5.1), (5.2) в смысле равенства элементов H_B.

Легко видеть, далее, что оператор B — интегродифференциальный, определенный формулой:

$$Bu = \iint_D G(x, y, x_0, y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\, dx_0 dy_0,$$

где G — функция Грина оператора Лапласа при нулевых краевых условиях.

4°. В этом пункте мы докажем спектральную эквивалентность самосопряженных операторов A и B. Предварительно заметим, что верна следующая теорема.

Теорема 4. При любой области D числа $\lambda = -1$ и $\lambda =$

являются собственными значениями оператора A, причем соответствующие им собственные подпространства бесконечномерны.

Доказательство. В самом деле, записав уравнение $A\vec{V}=-\vec{V}$ в компонентах, получим $\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$ и $V_y\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$ или, в силу (3), $P=0$, $V_y=0$, откуда, в силу (7), $V_x\equiv a(y)$, т. е. если $\vec{V}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=-1$, то V_x зависит только от y, а $V_y=0$. Обратно, всякий такой вектор, не эквивалентный нулю, является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda=-1$, так как для такого вектора уравнение (7) превращается в уравнение Лапласа, и из (3) следует $P(x, y)\equiv 0$; поэтому уравнение $A\vec{V}=-\vec{V}$ удовлетворяется тождественно. Случай $\lambda=0$ разбирается также элементарно. Теорема доказана.

Ортогональную сумму собственных подпространств, соответствующих собственным значениям $\lambda=-1$ и $\lambda=0$, обозначим через $\overset{*}{H}_A$, и пусть $H_A=\overset{\circ}{H}_A\oplus\overset{*}{H}_A$; тогда верна следующая теорема.

Теорема 5. Собственные значения оператора A, рассматриваемого на подпространстве $\overset{\circ}{H}_A$, и оператора B, во всем пространстве H_B, совпадают вместе с их кратностями.

Доказательство. Из (13) и из теоремы 4 следует, что для всех λ вне интервала $(-1, 0)$ резольвента оператора A существует, и стало быть уравнение

$$(A-\lambda E)\vec{V}=0 \tag{24}$$

имеет в $\overset{\circ}{H}_A$ только тривиальное решение. Пусть теперь $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0\in(-1, 0)$, который предполагается пока гладким. Из уравнения (7) и граничного условия (3) легко следует, что при заданном гладком $\vec{V}\in\overset{\circ}{H}_A$ функция $P(x, y)$ определяется однозначно и, наоборот, при заданном $P(x, y)$ вектор $\vec{V}\in\overset{\circ}{H}_A$ определяется однозначно. Условимся связанные таким образом $\vec{V}$ и P называть соответствующими. Пусть теперь $P^{(0)}(x, y)$ соответствует собственному вектору $\vec{V}^{(0)}$; тогда, записав уравнение $A\vec{V}^{(0)}=\lambda_0\vec{V}^{(0)}$ в компонентах, получим

$$-V_x^{(0)}+\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x}=\lambda_0 V_x^{(0)}, \tag{24.1}$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y}=\lambda_0 V_y^{(0)}, \tag{24.2}$$

или, в силу (1.3),

$$\Delta P^{(0)}=\frac{1}{1+\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2},$$

откуда немедленно:

$$BP^{(0)}=\lambda_0 P^{(0)}. \tag{25}$$

Если бы $P^{(0)}\equiv 0$, то из $\vec{V}^{(0)}\in \overset{\circ}{H}_A$ имели бы $\vec{V}^{(0)}\equiv 0$. Таким образом, если $\vec{V}^{(0)}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0, то $P^{(0)}(x, y)$, соответствующая этому вектору, является собственной функцией оператора B, соответствующей этому же собственному значению. Пусть теперь $u=u_0(x, y)$ — гладкая функция такая, что $Bu_0=\lambda_0 u_0$, причем $u_0\neq 0$. Тогда, очевидно, $u_0(x, y)$ исчезает на границе и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1+\lambda_0}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0. \tag{26}$$

Составим вектор $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ с компонентами $V_x^{(0)}=\frac{1}{1+\lambda_0}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $V_y^{(0)}=\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial y}$. Очевидно, $\vec{V}^{(0)}(x, y)\in \overset{\circ}{H}_A$ и $\vec{V}^{(0)}\neq 0$. Найдем функцию $P_0(x, y)$, соответствующую вектору $\vec{V}^{(0)}$, т. е. решим уравнение Пуассона $\Delta u=\frac{1}{1+\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ при нулевых краевых условиях; тогда получим $P_0(x, y)=u_0(x, y)$. Теперь уже очевидно, что построенный выше вектор $\vec{V}^{(0)}(x, y)$ удовлетворяет соотношениям (24.1) и (24.2), т. е. если $u_0(x, y)$ — гладкая собственная функция оператора B, то вектор $\vec{V}^{(0)}$ с указанными выше компонентами является собственным вектором оператора A, соответствующим тому же собственному значению.

Пусть теперь $\vec{V}^{(0)}\in \overset{\circ}{H}_A$ — не гладкий собственный вектор и пусть $\vec{V}^{(n)}$ — последовательность гладких векторов из $\overset{\circ}{H}_A$ таких, что

$$\lim_{n\to 0}\|\vec{V}^{(0)}-\vec{V}^{(n)}\|=0.$$

Пусть, далее, функции $P^{(n)}(x, y)$ соответствуют гладким векторам $\vec{V}^{(n)}$; тогда последовательность $P^{(n)}(x, y)$ сходится в себе в метрике H_B, и в силу полноты H_B существует $P^{(0)}\in H_B$, к которой она сходится.

В самом деле, легко видеть, что если $P(x, y)$ соответствует вектору $\vec{V}\in \overset{\circ}{H}_A$, то имеет место оценка

$$\|P\|_B=\|\operatorname{grad} P\|=\|A\vec{V}+I\vec{V}\|\leqslant\|A\vec{V}\|+\|I\vec{V}\|\leqslant 2\|\vec{V}\|, \tag{27}$$

где $I\vec{V}$ — вектор с компонентами V_x и 0.

Обозначим $(A-\lambda_0 E)\vec{V}^{(n)}=\vec{W}^{(n)}$. Тогда, в силу ограниченности оператора A, компоненты $W_x^{(n)}$ и $W_y^{(n)}$ будут стремиться к нулю в $L_2(D)$. Поэтому, применяя неравенство Буняковского — Шварца, легко получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\lambda_0} \iint_D W_x^{(n)} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x}\, dxdy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_0} \iint_D W_y^{(n)} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial y}\, dxdy = 0$$

для всех гладких в $\bar{D}\varphi(x, y)$, исчезающих на Γ, откуда немедленно

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D \left[\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x} + \frac{1+\lambda_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial P^{(n)}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial y}\right] dxdy = 0,$$

а так как $\|P^{(n)} - P^{(0)}\| \to 0$, то

$$\iint_D \left[\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x} + \frac{1+\lambda_0}{\lambda_0} \cdot \frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial y}\right] dxdy = 0,$$

т. е. $(BP^{(0)} - \lambda_0 P^{(0)}, \varphi)_B = 0$ для всех $\varphi(x, y)$ из плотного в H_B линеала.

Аналогичные рассуждения позволяют освободиться в остальных пунктах доказательства теоремы от предположения гладкости $\vec{V}^{(0)}$ или $P^{(0)}$. Легко убедиться, далее, что линейно независимым собственным векторам оператора A соответствуют линейно независимые собственные функции оператора B и наоборот. Теорема 5 доказана.

Обозначим соответственно через $S(A)$, $S(B)$ совокупности точек спектра операторов A и B. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. $S(A) = S(B)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in S_A$; тогда, очевидно, существует последовательность гладких $\vec{V}^{(n)} \in \overset{*}{H}_A$ таких, что $\|\vec{V}^{(n)}\| = 1$, а $\lim\limits_{n\to 0} \|(A - \lambda_0 E)\vec{V}^{(n)}\| = 0$. Поэтому, если $P^{(n)} \in H_B$ соответствуют $\vec{V}^{(n)}$, то, как было показано выше,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D \left\{\lambda_0 \cdot \frac{\partial P^{(n)}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x} + (1+\lambda_0) \frac{\partial P^{(n)}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial y}\right\} dxdy = 0$$

для всех гладких $\varphi(x, y)$, исчезающих на Γ. Обозначим $BP^{(n)} - \lambda_0 P^{(n)} = Q^{(n)}(x, y)$; тогда, очевидно, $Q^{(n)}$ гладкая в $\bar{D}$ и исчезающая на Γ функция такая, что $\Delta Q^{(n)} = -\lambda_0 \dfrac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial x^2} - (1+\lambda_0) \dfrac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial y^2}$. Легко видеть, что

$$\|Q^{(n)}\|_B^2 = -\iint_D \Delta Q^{(n)} \cdot \overline{Q^{(n)}}\, dxdy = -\iint_D \left\{\lambda_0 \cdot \frac{\partial P^{(n)}}{dx} \cdot \frac{\overline{\partial Q^{(n)}}}{dx} + \right.$$

$$\left. + (1+\lambda_0) \frac{\partial P^{(n)}}{dy} \cdot \frac{\overline{\partial Q^{(n)}}}{dy}\right\} dxdy = -\lambda_0(1+\lambda_0) \iint_D \left(V_x^{(n)} \cdot \frac{\overline{\partial Q^{(n)}}}{dx} + \right.$$

$$+V_y^{(n)}\cdot\frac{\overline{\partial Q^{(n)}}}{\partial y}\Big)dxdy-\iint\limits_D\Big\{\lambda_0 W_x^{(n)}\cdot\frac{\overline{\partial Q^{(n)}}}{\partial x}+(1+\lambda_0)W_y^{(n)}\cdot\frac{\overline{\partial Q^{(n)}}}{\partial y}\Big\}dxdy,$$

откуда $\|Q^{(n)}\|_B\leqslant\|\vec{W}^{(n)}\|$, где, как и выше, $\vec{W}^{(n)}=(A-\lambda_0E)\vec{V}^{(n)}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\|BP^{(n)}-\lambda_0P^{(n)}\|=0$. Заметив, что $\|\vec{V}^{(n)}\|=1$, легко заключаем, что нормы $\|P^{(n)}\|_B$ не могут стремиться к нулю, следовательно $S(A)\subset S(B)$. Пусть теперь $\lambda_0\in S(B)$; тогда существует последовательность гладких функций $u_n(x, y)$, исчезающих на Г, таких, что $\|u_n\|_B=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|Bu_n-\lambda_0u_n\|=0$. Обозначим $Bu_n-\lambda_0u_n=v_n$; тогда, очевидно, $v_n(x, y)$ исчезает на Г и $\lambda_0\frac{\partial^2u_n}{\partial x^2}+(1+\lambda_0)\frac{\partial^2u_n}{\partial y^2}=-\Delta v_n$.

Составим вектор $\vec{V}^{(n)}(x, y)$ с компонентами $V_x^{(n)}=\frac{1}{1+\lambda_0}\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{1}{\lambda_0(1+\lambda_0)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial y}$, $V_y^{(n)}=\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial y}+\frac{1}{\lambda_0(1+\lambda_0)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial y}$, который принадлежит $\overset{\circ}{H}_A$, так как $\operatorname{div}\vec{V}^{(n)}=0$.

Пусть теперь $P^{(n)}(x, y)$ соответствует вектору $\vec{V}^{(n)}$, а $\vec{W}^{(n)}=(A-\lambda_0E)\vec{V}^{(n)}$. Легко видеть, что

$$W_x^{(n)}=\frac{\partial\sigma_n}{\partial x}-\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x},$$

$$W_y^{(n)}=\frac{\partial\sigma_n}{\partial y}-\frac{1}{1+\lambda_0}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial y},$$

где $\sigma_n(x, y)=P^{(n)}(x, y)-u_n(x, y)$. Так как $\|v_n\|_B\to0$, то остается доказать, что $\|\sigma_n\|_B\to0$. Оценим для этого квадрат нормы:

$$\|\sigma_n\|^2=-\iint\limits_D\Delta\sigma_n\cdot\bar{\sigma}_ndxdy=\iint\limits_D[\Delta u_n-\Delta P^{(n)}]\bar{\sigma}_ndxdy=$$

$$=-\iint\limits_D\Big[\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2v_n}{\partial x^2}+\frac{1}{1+\lambda_0}\frac{\partial^2v_n}{\partial y^2}\Big]\bar{\sigma}_ndxdy\leqslant$$

$$\leqslant\|\sigma_n\|_B\cdot\sqrt{\iint\limits_D\Big[\Big|\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x}\Big|^2+\Big|\frac{1}{1+\lambda_0}\frac{\partial v_n}{\partial y}\Big|^2\Big]dxdy},$$

откуда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\sigma_n(x, y)\|_B=0$. Наконец, если бы $\|\vec{V}^{(n)}\|\to0$, то из (27) следовало $\|P^{(n)}\|_B\to0$, что нелепо. Теорема 6 доказана.

5°. В этом пункте мы сведем построение резольвенты операторов A и B к решению первой краевой задачи для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Выпишем для нее фундаментальное решение в явном виде и выясним характер особенности этого решения, когда параметр λ стремится к точкам спектра.

Рассмотрим уравнение

$$(A-\lambda E)\vec{V}=\vec{W}, \tag{28}$$

где $\vec{W}$ — произвольный заданный вектор из Ω. Из (13) следует, что для всех λ вне отрезка $[-1, 0]$ существует ограниченный оператор $R_\lambda = (A-\lambda E)^{-1}$. Пусть $P(x, y)$ соответствует искомому вектору $\vec{V}\in H_A^*$; тогда из (28), в силу $\operatorname{div}\vec{V}=0$, получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{\partial W_x}{\partial x}+\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\partial W_y}{\partial y}. \tag{29}$$

Кроме того, из рассуждений предыдущего пункта следует, что для нахождения $\vec{V}$ достаточно найти $P(x, y)$, а так как λ, вообще говоря, комплексно, то следует искать $P(x, y)$ в виде $P=u_1+iu_2$. Поэтому уравнение (29) превратится в систему

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial u^2}+a_1\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-a_2\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=f_1(x, y), \tag{29.1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+a_2\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+a_1\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=f_2(x, y). \tag{29.2}$$

где положено $\frac{1+\lambda}{\lambda}=a_1+ia_2$, $\frac{\partial W_x}{\partial x}+\frac{1+\lambda}{\partial y}\frac{\partial W_y}{\partial y}=f_1+if_2$.

Таким образом, построение резольвенты оператора A свелось к отысканию пары функций $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, удовлетворяющих (29.1), (29.2) и исчезающих на Γ, т. е. к первой краевой задаче для этой системы, которая является частным случаем систем, подробно изученных М. И. Вишиком [3]. В этой работе указаны необходимые и достаточные условия, при которых первая краевая задача для этой системы разрешима единственным образом. Эти условия состоят в следующем: либо $a_2\neq 0$, либо $a_2=0$, но $a_1>0$. Легко видеть, что достаточность этих условий следует из неравенства (13), а необходимость вытекает из одного результата автора [4]: спектр оператора A при любой области D совпадает с отрезком $[-1, 0]$.

Рассмотрим систему (29.1), (29.2) снова как одно комплексное уравнение

$$\Delta_\mu u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\mu^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y),$$

где для удобства положено $\frac{1+\lambda}{\lambda}=-\mu^2$; поэтому условие $\lambda\,\overline{\in}\,[-1, 0]$ эквивалентно условию $Im\mu\neq 0$. Рассмотрим функцию $\gamma_\varepsilon(x, y, \mu)=\frac{1}{4\pi i\mu}\ln(y^2-\mu^2x^2+\varepsilon^2)$, где ε — вещественный параметр, который, в

силу условия $Im\mu \neq 0$, можно считать однозначной аналитической функ-цией x и y, причем легко сосчитать, что $\Delta_\lambda \gamma_\varepsilon = \frac{i\mu}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2}{(y^2-\mu^2x^2+\varepsilon^2)^2}$.
Легко убедиться, далее, что интеграл от $\Delta_\lambda \gamma_\varepsilon$ по всей плоскости су-ществует и не зависит от ε, а именно:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\lambda \gamma_\varepsilon (x, y, \mu) dx dy = 1.$$

Обозначим предельную функцию через $\gamma(x, y, \mu)$:

$$\gamma(x, y, \mu) = \frac{1}{4\pi i\mu} \lim_{\varepsilon \to 0} \ln (y^2 - \mu^2 x^2 + \varepsilon^2).$$

Тогда, очевидно, в силу условия $Im\mu \neq 0$, что $\gamma(x, y, \mu)$ определен всюду, кроме начала координат, и всюду, кроме начала, удовлетво-ряет однородному уравнению $\Delta_\lambda u = 0$. Легко видеть, далее, что, в всяком случае для всех непрерывных и финитных функций $v(x, y)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x, y) \Delta_\lambda \gamma_\varepsilon (x, y, \mu) dx dy = v(0, 0). \tag{30}$$

Таким образом, если δ_{M_0} — функционал Дирака, сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0)$, то функция $\gamma(x, y, x_0, y_0, \mu) = \frac{1}{4\pi i\mu} \ln [(y-y_0)^2 - \mu^2(x-x_0)^2]$ удовлетворяет уравнению $\Delta_\lambda u = \delta_{M_0}$ в смысле соотноше-ния (30) и, стало быть, является фундаментальным решением уравне-ния (29).

Отделяя вещественную и мнимую части, получим фундамен-тальное решение системы (29.1), (29.2). Полученные фундаментальные решения позволяют построить соответствующую функцию Грина и доказать, что R_λ является интегральным оператором типа Карлемана, однако здесь мы этого делать не будем.

Заметим теперь, что когда λ стремится к точкам спектра, т. е. $Im\mu \to 0$, то в пределе уравнение (29) становится вещественным и ги-перболическим, а его фундаментальное решение получает вид:

$$\gamma(x, y, x_0, y_0 \mu) = Re \frac{1}{4\pi i\mu} \ln [(y-y_0)^2 - \mu^2(x-x_0)^2] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu} \arg \{[(y-y_0) - \mu(x-x_0)][(y-y_0) + \mu(x-x_0)]\}.$$

Таким образом, в предельном случае, $Im\mu = 0$ фундаментальное решение обращается в кусочно постоянную функцию и представляет собой линейную комбинацию характеристических функций полупло-скостей, определяемых характеристиками уравнения (29), проходящими через точку M_0.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Поступило 24 XII 195

Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան

ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԿՈՌԵԿՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ԵՐԿՈՒ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՀԱՄԱՐԺԵՔՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է դիֆերենցիալ հավասարումների մի սիստեմ, որը որոշ իմաստով պարզագույնն է այն սիստեմներից, որոնց համար Կոշու խնդիրը կոռեկտ է դրված, չնայած որ նրանք Պետրովսկու տիպի չեն։ Այդպիսի սիստեմներ ծագում են, օրինակ, հիդրոմեխանիկայի որոշ հարցերում և առաջին անգամ ուսումնասիրվել են Ս. Լ. Սոբոլևի կողմից, որը կառուցել է Կոշու խնդրի բացահայտ լուծումը մի այդպիսի սիստեմի համար։ Սոբոլևի ֆորմուլաների հետազոտումը ցույց տվեց այդպիսի սիստեմների որակական հատկությունների հետաքրքիր առանձնահատկություններ, որոնք ավելի ցայտուն են դառնում, երբ ուսումնասիրվում է խառը խնդիրը, այսինքն, երբ տարածական փոփոխականների փոփոխման տիրույթն ունի եզրագիծ։

Հոդվածում ապացուցված է խառը խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը մեր սիստեմի համար, և այդ խնդրից ծագող երկու օպերատորների սպեկտրալ համարժեքությունը։ Բացի դրանից, ապացուցված է, որ օպերատորների ռեզոլվենտների կառուցումը բերվում է մասնական ածանցյալներով հավասարումների մի սիստեմի համար առաջին եզրային խնդրի լուծմանը, որի ֆունդամենտալ լուծումը տրված է բացահայտ տեսքով։ Նշված են նաև վերջին խնդրի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ սիստեմի գործակիցների տերմիններով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Известия АН СССР, сер. матем., 18, 3—50 (1954).
2. *Александрян Р. А.* ДАН СССР, 73, 4 (1950).
3. *Вишик М. И.* Матем. сборник, 29(71), 3 (1951).
4. *Александрян Р. А.* Успехи матем. наук, 9, 3(61) (1954).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ X, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u+cu$ в трехмерном пространстве

Введение

Изучению оператора $-y''+cy$, рассматриваемого на прямой, при вещественной функции $c(x)$, посвящено много исследований, главным образом в связи с приложениями в квантовой механике. Уже в случае пространств двух и трех измерений оператор $-\Delta u+cu$ при вещественной функции $c(Q)$ значительно меньше исследован. И только в последнее время появилось несколько работ, посвященных изучению этого оператора в случае, когда $c(Q)$ — комплексная функция. Отметим здесь исследования М. В. Келдыша [1], в которых, однако, оператор рассматривается в ограниченной области пространства, а также две работы М. А. Наймарка ([2] и [3]), в которых изучается оператор $-y''+cy$ на полупрямой, с несамосопряженными граничными условиями, при различных предположениях относительно комплексной функции $c(x)$. Оператор $-\Delta u+cu$ рассмотрен также в одной заметке И. М. Гельфанда [4].

Предлагаемая работа, по характеру затронутых в ней вопросов, близка к указанным исследованиям М. А. Наймарка [2] и И. М. Гельфанда и представляет часть диссертации автора, выполненной в 1954 г. под руководством И. М. Гельфанда. Ради удобства изложения мы здесь ограничиваемся случаем трехмерного пространства, хотя большая часть результатов справедлива и в случаях пространств любой размерности.

В работе изучается вопрос о спектре несамосопряженного дифференциального оператора $Tu=-\Delta u+cu$ в гильбертовом пространстве $L_2(E)$ функций, суммируемых с квадратом и определенных на всем трехмерном эвклидовом пространстве E. Предполагается, что $c(Q)$ — комплексная функция, принадлежащая $L_2(E)$.

В основном результаты получены путем сведения задачи о собственных значениях рассматриваемого оператора к аналогичной задаче для некоторого интегрального уравнения.

Показано, прежде всего, что оператор T не может иметь остаточного спектра и что непрерывный спектр его совпадает с положительной полуосью. Кроме того, весь спектр лежит внутри некоторой параболы. Далее, резольвента оператора T есть интегральный оператор, ядро которого $H(M, Q; \lambda)$ типа Карлемана и, более того, имеет место следующая оценка:

$$\int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dM < L(\lambda), \qquad \int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dQ < L(\lambda),$$

где функция $L(\lambda)$, принимающая конечные значения, зависит только от λ. Что касается дискретного спектра, то он оказывается ограниченным. Кроме того, если $c(Q)$ достаточно мало, в известном смысле, то дискретный спектр оператора T может состоять лишь из конечного числа точек. При более жестких условиях дискретного спектра вообще нет, что вполне соответствует известным положениям квантовой механики.

Для получения указанных результатов нам будет необходимо пользоваться некоторыми вспомогательными леммами, доказательству которых посвящен § 1.

§ 1. Вспомогательные предложения

Функцию $f(Q)$, заданную в трехмерном пространстве E, будем называть финитной, если она неограниченно дифференцируема и обращается в нуль вне некоторого (нефиксированного) компакта. Под $-\Delta$ мы будем понимать гипермаксимальный оператор, являющийся замыканием в пространстве $L_2(E)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на множестве всех финитных функций. Область определения его обозначим Ω.

Нетрудно показать, что Ω фактически совпадает с совокупностью всех функций, имеющих суммируемый с квадратом обобщенный лапласиан в смысле С. Л. Соболева.

Обозначим через B_λ резольвенту оператора $-\Delta u$. Известно, что оператор B_λ интегральный, именно

$$B_\lambda f(M) = \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q)\, dQ \qquad (Im \sqrt{\lambda} > 0), \tag{1}$$

где положено

$$\Phi_\lambda(r) = \frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}, \tag{2}$$

причем $\sqrt{\lambda}$ в формуле (1) выбирается из верхней полуплоскости, а r_{MQ} обозначает расстояние между точками M и Q.

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться введенными здесь обозначениями.

Перейдем теперь к доказательству необходимых в дальнейшем вспомогательных предложений.

Лемма 1. Если $Im\lambda < 0$, то

$$\int_E \frac{e^{i\lambda r_{MQ_1}}\, e^{i\lambda r_{Q_1Q}}}{r_{MQ_1}\, r_{Q_1Q}}\, dQ_1 = \frac{2\pi i}{\lambda} e^{i\lambda r_{MQ}}.$$

Доказательство. Как мы отмечали выше, резольвента B_λ оператора $-\Delta u$ есть интегральный оператор с ядром $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$. Рассмотрим теперь оператор B_λ^2. Очевидно, что при $Im\sqrt{\lambda} = \tau > 0$

$$\int_E \left|\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1})\right| \left\{\int_E \left|\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{Q_1Q}) f(Q)\right| dQ\right\} dQ_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_E \Phi_{i\tau}(r_{MQ_1}) \left\{\int_E \Phi_{i\tau}(r_{Q_1Q})\, |f(Q)|\, dQ\right\} dQ_1$$

и, дважды пользуясь ограниченностью оператора B_λ, убеждаемся в том, что интеграл в правой части представляет функцию, суммируемую с квадратом и, следовательно, конечную почти для всех M. Следовательно, для таких M можно, в силу теоремы Фубини, менять порядок интегрирования в

$$B_\lambda^2 f(M) = \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1}) \left\{\int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{Q_1Q}) f(Q)\, dQ\right\} dQ_1.$$

А это показывает, что

$$\int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1})\, \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{Q_1Q})\, dQ_1 \tag{3}$$

есть ядро оператора B_λ^2. С другой стороны, хорошо известно, что

$$B_\lambda^2 = \frac{d}{d\lambda} B_\lambda, \tag{4}$$

где дифференцирование надо понимать в смысле сильной сходимости операторов. Из (3) легко видеть, что лемма будет доказана, если мы покажем, что ядро оператора $\frac{d}{d\lambda} B_\lambda$ получается формальным дифференцированием ядра оператора B_λ.

Для доказательства последнего утверждения положим, для краткости,

$$F_\lambda(r) = \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r) \qquad (Im\sqrt{\lambda} > 0),$$

$$\Psi_\lambda(r) = \frac{\partial}{\partial\lambda} F_\lambda(r) = \frac{i}{8\pi\sqrt{\lambda}}\, e^{i\sqrt{\lambda} r}. \tag{5}$$

Имеем в этих обозначениях

$$B_\lambda f(M) = \int_E F_\lambda(r_{MQ})\, f(Q)\, dQ. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение оператор

$$R_\lambda f(M)=\int\limits_E \Psi_\lambda(r_{MQ})f(Q)\,dQ,$$

где Ψ_λ определено формулой (5). Согласно замечанию, сделанному выше, лемма будет доказана, если мы обнаружим, что $R_\lambda=B_\lambda^2$.

Проверим прежде всего, что R — ограниченный оператор. В самом деле, применим неравенство Буняковского

$$|R_\lambda f(M)|^2\leqslant\int\limits_E|\Psi_\lambda(r_{MQ})|\,dQ\cdot\int\limits_E|\Psi_\lambda(r_{MQ})|\cdot|f(Q)|^2dQ$$

и заметим, что первый множитель в правой части не зависит от M, ибо интегрирование ведется по всему пространству. Пользуясь теоремой Фубини, находим

$$\int\limits_E|R_\lambda f(M)|^2dM\leqslant\Big(\int\limits_E|\Psi_\lambda(r_{MQ})|\,dQ\Big)^2\cdot\int\limits_E|f(Q)|^2dQ,$$

что и требовалось.

Теперь имеем, пользуясь неравенством Буняковского,

$$\left|\left\{\frac{B_{\lambda+\mu}-B_\lambda}{\mu}-R_\lambda\right\}f(M)\right|^2\leqslant M_{\lambda,\mu}\cdot\int\limits_E\left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r_{MQ})-F_\lambda(r_{MQ})}{\mu}-\right.$$

$$\left.-\Psi_\lambda(r_{MQ})\right|\cdot|f(Q)|^2dQ,$$

где положено

$$M_{\lambda,\mu}=\int\limits_E\left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r_{MQ})-F_\lambda(r_{MQ})}{\mu}-\Psi_\lambda(r_{MQ})\right|dD. \tag{7}$$

Заметив, что $M_{\lambda,\mu}$ есть число, не зависящее от выбора точки M, и интегрируя обе части последнего неравенства, придем, пользуясь теоремой Фубини, к следующему неравенству:

$$\left\|\frac{B_{\lambda+\mu}-B_\lambda}{\mu}-R_\lambda\right\|\leqslant M_{\lambda,\mu}. \tag{8}$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\lim_{\mu\to0}M_{\lambda,\mu}=0. \tag{9}$$

Действительно, это будет означать, что $R_\lambda=\dfrac{d}{d\lambda}B_\lambda$. Но в таком случае должны совпадать ядра операторов R_λ и $\dfrac{d}{d\lambda}B_\lambda$ или, что то же самое, в силу (4) ядра операторов R_λ и B_λ^2, а последнее утверждение доказывает лемму, как это отмечалось выше.

Переходя к доказательству (9), будем считать μ настолько малым ми, чтобы точки $\sqrt{\lambda+\mu}$ лежали в верхней полуплоскости. Пользуясь очевидным соотношением

$$\frac{F_{\lambda+\mu}(r)-F_\lambda(r)}{\mu}-\Psi_\lambda(r)=\frac{1}{\mu}\int\limits_{\lambda}^{\lambda+\mu}[\Psi_\zeta(r)-\Psi_\lambda(r)]\,d\zeta,$$

немедленно получаем оценку

$$\left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r)-F_\lambda(r)}{\mu}-\Psi_\lambda(r)\right|\leqslant 2\sup_{\zeta\in\Delta_{\lambda,\mu}}|\Psi_\zeta(r)|, \tag{10}$$

где через $\Delta_{\lambda,\mu}$ мы обозначили отрезок, соединяющий точки $\lambda+\mu$ и λ. Но очевидно, что для достаточно малых μ, например таких, что

$$Im\sqrt{\zeta}>\frac{Im\sqrt{\lambda}}{2},\quad |\sqrt{\zeta}|>\frac{|\sqrt{\lambda}|}{2},$$

будем иметь

$$|\Psi_\zeta(r)|\leqslant\frac{e^{-\frac{Im\sqrt{\lambda}}{2}r}}{4\pi|\sqrt{\lambda}|},$$

откуда, в силу (10), функция

$$\left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r)-F_\lambda(r)}{\mu}-\Psi_\lambda(r)\right|\cdot r^2$$

не превосходит некоторой суммируемой функции, независимо от μ. Но в таком случае можно перейти к пределу под знаком интеграла в

$$M_{\lambda,\mu}=4\pi\int\limits_0^\infty\left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r)-F_\lambda(r)}{\mu}-\Psi_\lambda(r)\right|\cdot r^2dr,$$

и, в силу самого определения (5) функции Ψ_λ, получим

$$\lim_{\mu\to 0}M_{\lambda,\mu}=0,$$

что и требовалось.

В дальнейшем мы существенно используем одно предложение, которое, ради удобства изложения, целесообразно представить в виде следующих трех лемм.

Лемма 2. Пусть даны в трехмерном пространстве два выпуклых компакта G_1 и G_2. Тогда при заданном $\varepsilon>0$ существует такое число $L=L(G_1,G_2;\varepsilon)$, что для всех λ из верхней полуплоскости, $Im\lambda\geqslant 0$, при $|\lambda|>L$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_D e^{ikr_{MQ}}e^{ikr_{QP}}\,dQ\right|<\varepsilon$$

независимо от выбора выпуклой области $D\subset G_1$ и точек M и P из G_2.

Доказательство. Предположим сначала, что точки M и P не совпадают. Очевидно, значение оцениваемого интеграла не изменится, если прямую MP принять за ось абсцисс с началом отсчета в середине отрезка MP и каким-нибудь образом построенными осями Oy и Oz. Теперь перейдем к другой системе координат. Для этого, обозначив через $2c$ расстояние r_{MQ} между точками M и P, построим систему эллипсоидов

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2+z^2}{r^2-c^2}=1. \tag{11}$$

За новые независимые переменные примем x, r, φ, где x, r, φ связаны с x, y, z соотношениями

$$x=x$$

$$y=\frac{\sqrt{(r^2-c^2)(r^2-x^2)}}{r}\cos\varphi,$$

$$z=\frac{\sqrt{(r^2-c^2)(r^2-x^2)}}{r}\sin\varphi \qquad (0\leqslant\varphi<2\pi).$$

Ясно, что точка Q с координатами x, r, φ лежит на эллипсоиде (11), и поэтому

$$r_{MQ}+r_{MP}=2r \qquad (Q=\{x, r, \varphi\}). \tag{12}$$

С другой стороны, якобиан рассматриваемого преобразования, как это нетрудно подсчитать, равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x, r, \varphi)}=\frac{r^4-c^2x^2}{r^3}. \tag{13}$$

Теперь обозначим через R диаметр области $G_1\cup G_2$, а через $\chi_D^*(x, r, \varphi)$ — характеристическую функцию области D. Тогда на основании вышесказанного ясно, что

$$\int\limits_D e^{i\lambda r_{MQ}}e^{i\lambda r_{QP}}dQ=\int\limits_0^R e^{2i\lambda r}\left(\int\limits_{x=-R}^{R}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{r^4-c^2x^2}{r^3}\chi_D(x, r, \varphi)\,dxd\varphi\right)dr. \tag{14}$$

Заметим следующее. Пусть $G(M, P; \delta)$ обозначает прямой цилиндр, основанием которого служит квадрат со стороной, равной 2δ, и ось которого проходит через точки M и P. Ясно, что можно выбрать δ столь малым, чтобы объем области $G_1\cap G(M, P; \delta)$ не превосходил $\frac{\varepsilon}{2}$, независимо от выбора M и P из G_2. С другой стороны, любую выпуклую область $D\subset G_1$ можно представить в виде суммы области $D\cap G(M, P; \delta)$ и не более четырех выпуклых областей, лежащих вне $G(M, P; \delta)$. И так как при указанном выборе числа δ должно, очевидно, выполняться неравенство

$$\left|\int\limits_{D\cap G(M, P; \delta)} e^{i\lambda r_{MQ}}e^{i\lambda r_{QP}}dQ\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

то, очевидно, достаточно ограничиться доказательством леммы в том частном случае, когда область D лежит вне $G(M, P; \delta)$.

Итак, можем предположить, что в (14) через D обозначена произвольная выпуклая подобласть области G_1, расстояние которой до прямой, соединяющей M и P, не меньше числа δ, зависящего только от области G_1, но не от выбора точек M и P.

Пусть теперь D_x есть сечение области D плоскостью, параллельной плоскости (y, z) и проходящей через точку x, лежащую на оси MP, с абсциссой, равной x. Кроме того, обозначим через H какое-нибудь число, такое, что длина границы произвольного плоского сечения области G_1 не превосходит H. Ясно, что этим же числом H оценивается длина границы произвольного плоского сечения области D. Теперь на границе области D_x выберем произвольное число точек $a_1, \cdots, a_s$ и обозначим через $\delta\varphi_i$ угол, образуемый двумя лучами, выходящими из точки x и проходящими через точки a_i и a_{i+1}. Тогда, поскольку расстояние области D_x от точки x не меньше δ, то ясно, что

$$\sum_{i=1}^{s-1} |\delta\varphi_i| < \frac{\pi}{2\delta} H. \tag{15}$$

Положим теперь

$$\Phi_r(x) = \int_0^{2\pi} \chi_D(x, r, \varphi)\, d\varphi. \tag{16}$$

Из (15) немедленно получаем, при любом выборе чисел $r_1, \cdots, r_{k+1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi_{r_{k+1}}(x) - \Phi_{r_k}(x)| < \frac{\pi}{2\delta} H. \tag{17}$$

Далее, рассмотрим интеграл

$$I_r = \int_{-R}^{R} x^2 \Phi_r(x)\, dx.$$

В силу (17), при любом выборе чисел $r_1, \cdots, r_{n+1}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |I_{r_{k+1}} - I_{r_k}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{-R}^{R} x^2 |\Phi_{r_{k+1}}(x) - \Phi_{r_k}(x)|\, dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} x^2 \left(\sum_{k=1}^{n} |\Phi_{r_{k+1}}(x) - \Phi_{r_k}(x)| \right) dx < \frac{\pi}{3\delta} R^3 H.$$

Итак, функция I_r имеет ограниченную вариацию, не превосходящую числа $\frac{\pi}{3\delta} R^3 H$. Аналогично убедимся в том, что вариация интеграла

$$\int_{-R}^{R} \Phi_r(x)\, dx$$

не превосходит $\frac{\pi}{\delta} HR$. С другой стороны, поскольку расстояние области D от оси MP не меньше δ, то ясно, что $r \geqslant \delta$. Но тогда понятно, на основании вышесказанного, что функция

$$\Psi(r) = \int_{-R}^{R} \frac{r^4 - c^2 x^2}{r^3} \Phi_r(x)\, dx \tag{18}$$

имеет ограниченную вариацию, не превосходящую некоторое число $V(R, \delta)$, не зависящее ни от выбора области D, ни от выбора точек M и P.

Сравнив (14), (16) и (18), можем написать

$$\int_D e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}} dQ = \int_0^R e^{2i\lambda r} \Psi(r)\, dr. \tag{19}$$

Но очевидно, что

$$\int_0^R e^{2i\lambda r} \Psi(r)\, dr = \int_0^R \Psi(r)\, d\left(\frac{e^{2i\lambda r}}{2i\lambda}\right) = \frac{\Psi(r)\, e^{2i\lambda r}}{2i\lambda}\Bigg|_0^R - \frac{1}{2i\lambda} \int_0^R e^{2i\lambda r}\, d\Psi(r),$$

и, как известно,

$$\left| \int_0^R e^{2i\lambda r}\, d\Psi(r) \right| \leqslant Var\{\Psi(r)\} \leqslant V(R, \delta).$$

А это, вместе с (19), доказывает лемму, поскольку $\Psi(r)$ ограничена некоторым числом, не зависящим от выбора области D и точек M и P. Однако при доказательстве мы предполагали, что M и P не совпадают. Пусть теперь $P = M$. Тогда, выбрав какую-нибудь последовательность точек $P_n \to P$, $P_n \in G_2$, отличных от P, будем, очевидно, иметь

$$\int_D e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}} dQ = \lim_{n \to \infty} \int_D e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP_n}} dQ.$$

откуда, на основании доказанного, вытекает справедливость леммы.

Лемма 3. Пусть G — произвольный выпуклый компакт в E. Тогда при заданном $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $L = L(G; \varepsilon)$, что для всех λ из верхней полуплоскости, $Im\lambda \geqslant 0$, при $|\lambda| > L$, выполняется неравенство

$$\left| \int_D \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} dQ \right| < \varepsilon,$$

независимо от выбора выпуклой подобласти D компакта G и точек M и P из E.

Доказательство. Ясно, что при данном $\varepsilon > 0$ можно указать такую ограниченную выпуклую область G_2, что если хотя бы одна из точек M и P лежит вне G_2, то модуль оцениваемого интеграла меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому достаточно ограничиться доказательством леммы в предположении, что точки M и P меняются в области G_2. Далее, пусть $G(M, P; \delta)$ обозначает прямой цилиндр, основанием которого служит квадрат, со стороной, равной 2δ, и ось которого проходит через точки M и P. Очевидно, можно выбрать число $\delta > 0$ настолько малым, чтобы, независимо от выбора точек M и P из G_2, выполнялось неравенство

$$\int\limits_{G \cap G(M, P; \delta)} \frac{dQ}{r_{MQ} r_{QP}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

С другой стороны, поскольку каждую выпуклую область $D \subset G$ можно представить в виде суммы области $D \cap G(M, P; \delta)$ и не более четырех выпуклых областей, то ясно, что достаточно ограничиться доказательством леммы в предположении, что $D \cap G(M, P; \delta) = 0$.

Теперь зафиксируем точки M и P и рассмотрим произвольную область $\Delta \subset G$ такую, что $\Delta \cap G(M, P; \delta) = 0$. Найдем колебание ω_Δ функции $\frac{1}{r_{MQ} r_{QP}}$ в Δ. Очевидно,

$$\omega_\Delta = \frac{1}{r_{MQ_2} r_{Q_2P}} - \frac{1}{r_{MQ_1} r_{Q_1P}},$$

где Q_1 и Q_2 — определенные точки из Δ. Но если через d обозначить диаметр области Δ, то можно написать

$$r_{MQ_1} = r_{MQ_2} + d_M, \quad r_{Q_1P} = r_{Q_2P} + d_P, \quad \text{где} \quad |d_M| \leqslant d, \quad |d_P| \leqslant d.$$

Поэтому, если через R обозначить диаметр G_2, то

$$\omega_\Delta = \frac{r_{MQ_2} \cdot d_P + r_{Q_2P} \cdot d_M + d_M d_P}{r_{MQ_1} r_{Q_1P} r_{MQ_2} r_{Q_2P}} = \frac{r_{MQ_2} \cdot d_P + r_{Q_1P} \cdot d_M}{r_{MQ_1} r_{Q_1P} r_{MQ_2} r_{Q_2P}} \leqslant d \frac{2R}{\delta^4}.$$

Пусть теперь область D разложена на произвольное число неперекрывающихся областей Δ_k, а ω_{Δ_k} — колебание функции $\frac{1}{r_{MQ} r_{QP}}$ в Δ_k. Согласно предыдущей оценке

$$\sum \omega_{\Delta_k} \cdot \operatorname{mes} \Delta_k < d \frac{2R}{\delta^4} \operatorname{mes} D \leqslant d \frac{2R}{\delta^4} \operatorname{mes} G. \tag{20}$$

Далее, обозначив через m_i нижнюю грань функции $\frac{1}{r_{MQ} r_{QP}}$ в Δ_i, получим

$$\int\limits_D \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} dQ =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}} \left\{ \frac{1}{r_{MQ} r_{QP}} - m_k \right\} dQ + \sum_{k=1}^{n} m_k \int\limits_{\Delta_k} e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}} dQ,$$

откуда

$$\left|\int\limits_D \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ}\, r_{QP}}\, dQ\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_{\Delta_k} \cdot \operatorname{mes}\Delta_k + \sum_{k=1}^{n} m_k \left|\int\limits_{\Delta_k} e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}\, dQ\right|. \quad (21)$$

С другой стороны, можно указать такое число $N(\varepsilon)$, что любую выпуклую область $D \subset G$ можно разложить не более чем на $N(\varepsilon)$ областей с диаметрами, не превосходящими числа d, где d подчинено неравенству

$$d \cdot \frac{2R}{\delta^4} \operatorname{mes} G < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь, заметив, что $m_i < \frac{1}{\delta^2}$ и учитывая (20), находим из (21)

$$\left|\int\limits_D \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}}\, dQ\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=1}^{n} \left|\int\limits_{\Delta_k} e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}\, dQ\right| \quad (n \leqslant N(\varepsilon)).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться предыдущей леммой.

Лемма 4. *Пусть $f(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда при заданном $\varepsilon > 0$ можно указать такое $L = L(\varepsilon)$, что для всех λ из верхней полуплоскости, $Im\lambda \geqslant 0$, при $|\lambda| > L(\varepsilon)$, удовлетворяется неравенство*

$$\left|\int\limits_E \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ}\, r_{QP}} f(Q)\, dQ\right| < \varepsilon,$$

равномерно относительно выбора точек M и P из E.

Доказательство. Пусть $|f(Q)| < A$. Поскольку, кроме этого, $f(Q)$ суммируема с квадратом, то можно, как известно, указать последовательность $f_n(Q)$ непрерывных во всем пространстве E функций, обращающихся в нуль вне некоторого (нефиксированного) компакта, и таких, что

$$|f_n(Q)| < A, \quad \lim_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0. \quad (22)$$

Обозначим теперь через $K_\delta(M, P)$ совокупность двух шаров с центрами в точках M и P и с радиусами, равными δ. Легко установить следующие два элементарных неравенства:

$$\int\limits_{E-K_\delta(M,P)} \frac{dQ}{r_{MQ}^2 \cdot r_{QP}^2} \leqslant \int\limits_{E-K_\delta(M,P)} \left(\frac{1}{r_{MQ}^4} + \frac{1}{r_{QP}^4}\right) dQ \leqslant 2 \int\limits_{r>\delta} \frac{dQ}{r^4} = \frac{8\pi}{\delta}$$

и

$$\int\limits_{K_\delta(M,P)} \frac{dQ}{r_{MQ}\, r_{QP}} \leqslant \int\limits_{K_\delta(M,P)} \left(\frac{1}{r_{MQ}^2} + \frac{1}{r_{QP}^2}\right) dQ <$$

$$< \int\limits_{r_{MQ} \geq \delta} \frac{dQ}{r_{MQ}^2} + \int\limits_{r_{PQ} \geq \delta} \frac{dQ}{r_{QP}^2} = 16\pi\delta.$$

Отсюда получаем

$$\left| \int\limits_{K_\delta(M,P)} \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} [f(Q) - f_n(Q)]\, dQ \right| < 2A \cdot 16\pi\delta, \tag{23}$$

$$\left| \int\limits_{E - K_\delta(M,P)} \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} [f(Q) - f_n(Q)]\, dQ \right| \leqslant \sqrt{\frac{8\pi}{\delta}} \| f - f_n \|. \tag{24}$$

Теперь положим

$$\int\limits_E \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} f(Q)\, dQ = \int\limits_E \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} f_n(Q)\, dQ + I_n(M, P; \lambda). \tag{25}$$

Из (23) и (24) видим, что можно указать такую функцию $f_{n_0}(Q)$, для которой, независимо от λ из верхней полуплоскости, выполняется неравенство

$$| I_{n_0}(M, P; \lambda) | < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

С другой стороны, согласно нашему выбору последовательности $f_n(Q)$, можем указать такой выпуклый компакт G, вне которого $f_{n_0}(Q)$ обращается в нуль. Итак,

$$\int\limits_E \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} f_{n_0}(Q)\, dQ = \int\limits_G \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} f_{n_0}(Q)\, dQ. \tag{27}$$

Далее, поскольку G — компакт, то легко видеть существование такой постоянной B, что, независимо от выбора точек M и P из E, выполняется неравенство

$$\int\limits_G \frac{dQ}{r_{MQ} r_{QP}} < B. \tag{28}$$

Пусть теперь G разбито на некоторое число N выпуклых областей Δ_k, и пусть Q_k обозначает какую-нибудь точку из области Δ_k. Тогда

$$\int\limits_G \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} f_{n_0}(Q)\, dQ =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Delta_k} \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} [f_{n_0}(Q) - f_{n_0}(Q_k)]\, dQ + \sum_{k=1}^{N} f_{n_0}(Q_k) \int\limits_{\Delta_k} \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}}\, dQ.$$

Но, в силу непрерывности $f_{n_0}(Q)$, можно предполагать, что указанное разбиение G на области Δ_k произведено таким образом, что колебание функции $f_{n_0}(Q)$ на каждой области Δ_k меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3B}$. В таком случае из последнего равенства, приняв во внимание (28), найдем, что независимо от λ, $Im\lambda \geqslant 0$, имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_G \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ} r_{QP}} f_{n_0}(Q)\, dQ \right| < \frac{\varepsilon}{2} + A \sum_{k=0}^{N} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ}\, r_{QP}}\, dQ \right|.$$

Далее, на основании предыдущей леммы, заключаем, что для всех достаточно больших λ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_G \frac{e^{i\lambda r_{MQ}} e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ}\, r_{QP}} f_{n_0}(Q)\, dQ \right| < \frac{2}{3} \varepsilon.$$

Для завершения доказательства остается в (25) положить $n = n_0$ и принять во внимание (26).

Переходя к доказательству следующей леммы, сделаем одно замечание. Пусть $K_\delta(M)$ обозначает шар радиуса δ с центром в точке M. Тогда нетрудно видеть, что при любом выборе точек M и P справедлива оценка

$$\int\limits_{K_\delta(M)} \frac{dQ}{r_{PQ}^{\alpha}} \leqslant \int\limits_{r<\delta} \frac{dQ}{r^{\alpha}} = 4\pi \int\limits_0^{\delta} r^{2-\alpha} dr = \frac{4\pi}{3-\alpha} \delta^{3-\alpha} \quad (\alpha < 3), \qquad (29)$$

ибо оцениваемый интеграл принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда M совпадает с P.

Лемма 5. Пусть задана ограниченная функция $c(Q)$, $|c(Q)| \leqslant A$. Тогда, если положить

$$K_\lambda(M, Q) = \int\limits_E \Phi_\lambda(r_{MQ_1}) \Phi_\lambda(r_{Q_1Q})\, c(Q_1)\, dQ_1,$$

то $K_\lambda(M, Q)$ — ограниченная и непрерывная функция по совокупности переменных M и Q при $Im\lambda > 0$.

Доказательство. Ограниченность есть тривиальное следствие леммы 1. Для доказательства непрерывности обозначим через K_δ совокупность двух шаров радиуса δ с центрами соответственно в точках M и Q и оценим разность

$$K_\lambda(M, Q) - K_\lambda(P, S) = \int\limits_E \{\Phi_\lambda(r_{MQ_1}) \Phi_\lambda(r_{Q_1Q}) - \Phi_\lambda(r_{PQ_1}) \Phi_\lambda(r_{Q_1S})\} c(Q_1)\, dQ_1.$$

Пользуясь (29), без труда находим

$$\left| \int\limits_{K_\delta} \{\Phi_\lambda(r_{MQ_1}) \Phi_\lambda(r_{Q_1Q}) - \Phi_\lambda(r_{PQ_1}) \Phi_\lambda(r_{Q_1S})\} c(Q_1)\, dQ_1 \right| \leqslant$$

$$< \frac{A}{16\pi^2}\int\limits_{K_\delta}\left\{\frac{1}{r^2_{MQ_1}}+\frac{1}{r^2_{Q_1Q}}+\frac{1}{r^2_{PQ_1}}+\frac{1}{r^2_{Q_1S}}\right\}dQ_1 \leqslant \frac{A}{\pi}\delta. \qquad (30)$$

Будем теперь считать, что $r_{PM}\leqslant\frac{\delta}{2}$, $r_{SQ}\leqslant\frac{\delta}{2}$, и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{E-K_\delta}\{\Phi_\lambda(r_{MQ_1})\Phi_\lambda(r_{Q_1Q})-\Phi_\lambda(r_{PQ_1})\Phi_\lambda(r_{Q_1S})\}\,c(Q_1)\,dQ_1. \qquad (31)$$

После простых вычислений найдем, что подинтегральная функция в (31) не превосходит

$$A\frac{(1+e^{\tau\delta})}{2\pi^2\delta^2}e^{-\tau r_{MQ_1}}e^{-\tau r_{Q_1Q}},$$

и в силу того, что последняя функция суммируема и не зависит от P и S, заключаем, что можно перейти к пределу в (31) под знаком интеграла. А это и доказывает лемму, если принять во внимание оценку (30).

§ 2. Спектр оператора $-\Delta u + cu$ в трехмерном пространстве

Как уже отмечалось в начале § 1, через Ω мы будем обозначать область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на всем трехмерном пространстве E. Кроме того, мы всегда будем предполагать, что комплексная функция $c(Q)$ суммируема с квадратом на E. При этих предположениях оператор $Tu = -\Delta u + cu$ естественно изучать на области Ω. Как указывалось в введении, мы ставим задачу охарактеризовать спектр оператора $Tu = -\Delta u + cu$.

Прежде всего мы отметим одно свойство собственных функций рассматриваемого оператора.

Теорема 1. *Пусть $c(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда, если $u(Q)$ есть какая-нибудь собственная функция оператора $-\Delta u - cu$, то $\Delta u(Q)$ суммируема и*

$$\int\limits_E \Delta u(Q)\,dQ = 0.$$

Доказательство. Покажем сперва, что $u(Q)$ суммируема. В самом деле, по условию $u \in \Omega$ и удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u - cu = \lambda^2 u. \qquad (32)$$

Отсюда, применяя к обеим частям резольвенту B_λ оператора $-\Delta u$, получим

$$u(M) = B_{\lambda^2}(cu) = \int\limits_E \Phi_\lambda(r_{MQ})\,c(Q)\,u(Q)\,dQ \qquad (Im\,\lambda > 0). \qquad (33)$$

Поэтому, заметив, что $\int\limits_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})|\,dQ$ не зависит от точки M, находим, интегрируя обе части неравенства

$$|u(M)| \leqslant \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})| \cdot |c(Q)\, u(Q)|\, dQ,$$

и пользуясь теоремой Фубини, что

$$\int_E |u(M)|\, dM \leqslant \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})|\, dM \cdot \int_E |c(Q)\, u(Q)|\, dQ,$$

откуда и следует суммируемость $u(Q)$, ибо $c(Q)\, u(Q)$, очевидно, суммируема. Теперь из (32) следует суммируемость $\Delta u(Q)$, и лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\int_E c(Q)\, u(Q)\, dQ = -\lambda^2 \int_E u(Q)\, dQ.$$

Переходя к доказательству этого, проинтегрируем обе части (33) и воспользуемся теоремой Фубини, условия применимости которой здесь выполнены

$$\int_E u(M)\, dM = \int_E \Phi_\lambda(r_{MQ})\, dM \cdot \int_E c(Q)\, u(Q)\, dQ.$$

Но, переходя к полярным координатам, получаем

$$\int_E \Phi_\lambda(r_{MQ})\, dM = 4\pi \int_0^\infty \Phi_\lambda(r)\, r^2 dr = \int_0^\infty e^{i\lambda r}\, r dr = -\frac{1}{\lambda^2}.$$

А это вместе с предыдущим равенством и доказывает теорему.

Теперь перейдем к изучению резольвенты $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора $Tu = -\Delta u + cu$. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 6. Обозначим через $B_\lambda c$ оператор, состоящий в том, что функция $u(Q)$ сперва умножается на функцию $c(Q)$ и затем к результату применяется резольвента B_λ оператора $-\Delta u$. Тогда оператор $B_\lambda c$ вполне непрерывен, при условии, что $c(Q)$ суммируема с квадратом.

Доказательство. Действительно, ясно, что $B_\lambda c$ есть интегральный оператор с ядром $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\, c(Q)$, где $Im\sqrt{\lambda} > 0$. Поэтому лемма будет доказана, если мы покажем, что это ядро типа Гильберта—Шмидта. Но, в самом деле, поскольку $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ суммируема с квадратом, то, пользуясь теоремой Фубини, получим

$$\int_E \int_E |\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\, c(Q)|^2\, dM dQ = \int_E |\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|^2\, dM \cdot \int_E |c(Q)|^2 dQ < \infty,$$

так как первый множитель в правой части не зависит от выбора точки Q.

Теорема 2. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Тогда оператор $Tu = -\Delta u + cu$ не имеет остаточного *спектра и его резольвента есть интегральный оператор, ядро которого $H(M, Q; \lambda)$ типа Карлемана, причем*

$$\int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dM < L(\lambda), \quad \int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dQ < L(\lambda),$$

где функция $L(\lambda)$, принимающая конечные значения, зависит только от λ.

Доказательство. Ниже мы покажем, что непрерывный спектр рассматриваемого оператора совпадает с положительной полуосью (теорема 3). Поэтому предположим, что λ^2 не лежит на положительной полуоси и не является собственным значением оператора T. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(M) - \int_E \Phi_\lambda(r_{MQ}) c(Q) u(Q)\, dQ = \int_E \Phi_\lambda(r_{MQ}) f(Q)\, dQ \quad (Im\lambda > 0), \tag{34}$$

где $f(Q)$ — произвольная функция из $L_2(E)$. В силу сделанных предположений соответствующее однородное уравнение (33) имеет лишь тривиальное решение. С другой стороны, оператор $\int_E \Phi_\lambda(r_{MQ}) c(Q) u(Q) dQ$ вполне непрерывен на основании леммы 6. Поэтому к уравнению (34) применимы теоремы Фредгольма. Итак, уравнение (34) при сделанных предположениях всегда имеет, и притом единственное, решение. Но очевидно, что такое решение удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u + cu - \lambda^2 u = f,$$

ибо $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ есть ядро резольвенты B_λ оператора $-\Delta u$. Таким образом, мы убедились в том, что оператор $(T - \lambda^2 E)^{-1}$ определен на всем пространстве. Поскольку, кроме того, он замкнут, в силу очевидной замкнутости T, то $(T - \lambda^2 E)^{-1}$ непрерывен, и, следовательно, остаточного спектра нет. Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $f(Q)$ и $g(Q)$ — произвольные функции из $L_2(E)$. Положив

$$u = R_\lambda g, \qquad v = R_\lambda f, \tag{35}$$

будем иметь

$$-\Delta u + cu - \lambda u = g; \quad -\Delta v + cv - \lambda v = f. \tag{36}$$

Из этих уравнений получаем

$$\int_E (gR_\lambda f - fR_\lambda g)\, dQ = \int_E (gv - fu)\, dQ = \int_E (u\Delta v - v\Delta u)\, dQ,$$

и так как $u(Q)$ и $v(Q)$ принадлежат области определения Ω гипермаксимального оператора $-\Delta u$, то

$$\int_E f \cdot R_\lambda g dQ = \int_E gR_\lambda f dQ. \tag{37}$$

Но, применяя к обеим частям первого из уравнений (36) резольвенту B_λ оператора $-\Delta u$, получим, очевидно,

$$u(M) = -\int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) c(Q) u(Q) dQ + \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) g(Q) dQ, \tag{38}$$

где $\sqrt{\lambda}$ выбирается так, что $Im\sqrt{\lambda} > 0$.

Условимся теперь в следующем. Под $R_\lambda[\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)]$ мы будем понимать значение в точке Q функции, полученной путем применения оператора R_λ к $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP})c(P)$, рассматриваемой как функция переменной P при фиксированном значении M. Приняв это обозначение, из (38) получим, пользуясь первым из определений (35) и равенством (37),

$$[R_\lambda g](M) = -\int_E g(Q) R_\lambda [\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) c(Q)] dQ + \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) g(Q) dQ.$$

Таким образом, ядро $H(M, Q; \lambda)$ оператора R_λ можно записать так:

$$H(M, Q; \lambda) = \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) - R_\lambda [\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) c(Q)] . \tag{39}$$

Отсюда уже вытекает, что $H(M, Q; \lambda)$ — типа Карлемана. В самом деле, поскольку $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ и $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)$ суммируемы с квадратом по переменной Q, то очевидно, что для любой фиксированной точки M

$$\int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dQ < \infty. \tag{4 }$$

С другой стороны, при каждом фиксированном Q имеем

$$R_\lambda [\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) c(Q)] = \int_E H(Q, P; \lambda) \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP}) c(P) dP.$$

Пользуясь неравенством Буняковского, получаем отсюда

$$|R_\lambda [\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) c(Q)]|^2 \leqslant \int_E |H(Q, P; \lambda)|^2 dP \cdot \int_E |\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP}) c(P)|^2 dP.$$

Заметив теперь, что интеграл $\int_E |\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP})|^2 dM$ не зависит от выбора точки P и, интегрируя обе части предыдущего неравенства и пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$\int_E |R_\lambda [\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) c(Q)]|^2 dM \leqslant \int_E |H(Q, P; \lambda)|^2 dP \times$$

$$\times \int_E |\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP})|^2 dM \cdot \int_E |c(P)|^2 dP, \tag{41}$$

откуда, в силу (39) и (40), следует, что для каждой фиксированной точки Q

$$\int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dM < \infty.$$

Чтобы доказать теорему в полном объеме, положим, при фиксированных M и λ,

$$u(Q) = R_\lambda[\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)]$$

и заметим, что $u(Q)$ должно удовлетворять уравнению

$$-\Delta u(Q) + c(Q)u(Q) - \lambda u(Q) = \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q).$$

Применяя к обеим частям этого уравнения резольвенту B_λ оператора $-\Delta u$, видим, что $u(Q)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(Q) = \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{QP})\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP})c(P)\,dP - \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{QP})c(P)u(P)\,dP,$$

или, что то же самое,

$$(E + A)\{R_\lambda[\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)]\} = K_\lambda(M, Q), \tag{42}$$

где точка M рассматривается как параметр, A — интегральный оператор с ядром $\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{QP})c(P)$, E — единичный оператор и

$$K_\lambda(M, Q) = \int_E \Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MP})\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{PQ})c(P)\,dP.$$

Однако совершенно очевидно, что оператор $E + A$ имеет обратный, в том смысле, что из условия $(E + A)u = 0$ вытекает $u = 0$. Действительно, в противном случае λ было бы собственным значением, что противоречит предположению. Далее оператор A вполне непрерывен согласно лемме 6. Поэтому, как известно, оператор $(E + A)^{-1}$ ограничен. Пусть h — его норма, т. е.

$$\|(E + A)^{-1}f\| \leqslant h\|f\|. \tag{43}$$

С другой стороны, из (42) следует

$$R_\lambda[\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)] = (E + A)^{-1}\{K_\lambda(M, Q)\}, \tag{44}$$

где точка M фигурирует как параметр.

Теперь заметим следующее. Если $|c(Q)| \leqslant \alpha$ и $Im\sqrt{\lambda} = \tau > 0$, то из леммы 1 вытекает

$$|K_\lambda(M, Q)| \leqslant \frac{2\pi\alpha}{\tau} e^{-\tau r_{MQ}}$$

и поэтому, независимо от выбора точки M, выполняется неравенство

$$\int_E |K_\lambda(M, Q)|^2\,dQ < L_1,$$

где L_1 — некоторая постоянная. Таким образом, (43) и (44) показывают, что, независимо от выбора точки M,

$$\int_E |R_\lambda[\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)]|^2\,dQ \leqslant h^2 L_1.$$

Положив

$$\int\limits_E |\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|^2 dQ = L_2,$$

найдем из (39), что, независимо от выбора точки M, выполняется неравенство

$$\int\limits_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dQ \leqslant 2(h^2 L_1 + L_2). \tag{45}$$

Далее, пользуясь неравенством (41), получаем

$$\int\limits_E |R_\lambda[\Phi_{\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})c(Q)]|^2 dM \leqslant 2\|c\|^2(h^2 L_1 + L_2) L_2,$$

откуда и на основании (39)

$$\int\limits_F |H(M, Q; \lambda)|^2 dM \leqslant 2\{L_2 + 2\|c\|^2(h^2 L_1 + L_2) L_2\}.$$

Но это неравенство, вместе с (45), доказывает теорему.

Отметим одно следствие доказанной теоремы, обобщающее лемму 6.

Лемма 7. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом, и пусть R_λ есть резольвента оператора $Tu = -\Delta u + cu$. Если $p(Q) \in L_2(E)$ и ограничена, то под $R_\lambda p$ будем понимать оператор, состоящий в том, что функция $u(Q)$ сперва умножается на $p(Q)$, а затем к результату применяется оператор R_λ. Тогда оператор $R_\lambda p$ вполне непрерывен при каждом значении λ, не принадлежащем спектру оператора T.

Доказательство. Совершенно очевидно, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\arg\lambda \neq 0$. В таком случае, согласно доказанной теореме, имеем

$$\int\limits_E\int\limits_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dM dQ = \int\limits_E |p(Q)|^2 \left\{\int\limits_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dM\right\} dQ \leqslant$$

$$\leqslant L(\lambda)\int\limits_E |p(Q)|^2 dQ < \infty. \tag{46}$$

Но, очевидно, $H(M, Q; \lambda)p(Q)$ является ядром оператора $R_\lambda p$, и полученное неравенство показывает, что оно типа Гильберта — Шмидта. Следовательно, $R_\lambda p$ вполне непрерывен, что и требовалось доказать.

Теперь мы можем перейти к изучению спектра рассматриваемого оператора. Идея доказательства приводимой ниже теоремы принадлежит И. М. Гельфанду [4].

Теорема 3. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Тогда непрерывный спектр оператора $Tu = -\Delta u + cu$ совпадает с положительной полуосью.

Доказательство. В самом деле, допустим противное. Пусть $\lambda_0 > 0$ и существует резольвента оператора T

$$R_{\lambda_\nu} = (T - \lambda_\nu E)^{-1}.$$

Рассмотрим уравнение

$$Tu - cu - \lambda u = f, \qquad u \in \Omega,$$

где f — произвольная функция из $L_2(E)$. Имеем $Tu - \lambda u = cu + f$, откуда

$$u = R_\lambda cu + R_\lambda f,$$

или

$$(E - R_\lambda c)\, u = R_\lambda f,$$

где E — единичный оператор, а оператор $R_\lambda c$ означает, что функция $u(Q)$ сперва умножается на $c(Q)$, а затем к результату применяется оператор R_λ. Теперь воспользуемся следующим замечанием М. В. Келдыша [4].

Пусть $A(\lambda)$ — вполне непрерывный оператор, аналитически зависящий от параметра в некоторой области D комплексной плоскости. Тогда для уравнения $(E + A(\lambda))\, u = f$ имеют место основные факты теории Фредгольма, а именно, соответствующее однородное уравнение имеет лишь конечное число линейно-независимых решений, имеется обычная связь между решениями самого уравнения и сопряженного с ним уравнения, и внутри области аналитичности D нет предельных точек для точек спектра данного уравнения.

В нашем случае $R_\lambda c$ существует в некоторой окрестности точки λ_0 и является вполне непрерывным оператором согласно лемме 7. Воспользуемся теоремой Фредгольма. Пусть $\lambda > 0$ лежит в указанной окрестности. Поскольку уравнение

$$(E - R_\lambda c)\, u = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, то и сопряженное уравнение обладает этим свойством, и поэтому уравнение (46), а следовательно, и равносильное ему уравнение

$$Tu = \lambda u + cu + f,$$

имеет единственное решение при любой функции $f \in L_2(E)$. Следовательно, поскольку $Tu = -\Delta u + cu$, уравнение $-\Delta u - \lambda u = f$ имеет единственное решение из Ω при любой функции $f \in L_2(E)$. Но это значит, что оператор $(-\Delta - \lambda E)^{-1}$ существует и определен на всем пространстве $L_2(E)$. Следовательно, он непрерывен, в силу замкнутости оператора $-\Delta u$. Таким образом, $\lambda > 0$ является регулярной точкой оператора $-\Delta u$, чего быть не может.

Лемма 8. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Тогда, если $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $K_\lambda(M, Q)$ определена формулой

$$K_\lambda(M, Q) = \int_E \Phi_\lambda(r_{MQ_1})\, \Phi_\lambda(r_{Q_1 Q})\, c(Q_1)\, dQ_1, \tag{47}$$

то
$$\int_E\int_E |K_\lambda(M, Q)\, c(Q)|^2 dM dQ < \infty.$$

Доказательство. Действительно, если $|c(Q)| \leq A$, то из леммы 1 непосредственно вытекает
$$|K_\lambda(M, Q)| \leq A \frac{e^{-\tau r_{MQ}}}{8\pi|\lambda|}.$$

Но в таком случае очевидно
$$\int_E\int_E |K_\lambda(M, Q)\, c(Q)|^2 dM dQ \leq \frac{A^2}{64\pi^2|\lambda|^2} \int_E\int_E e^{-2\tau r_{MQ}} |c(Q)|^2 dQ dM =$$
$$= \frac{A^2}{64\pi^2|\lambda|^2} \int_E e^{-2\tau r_{MQ}} dQ \cdot \int_E |c(Q)|^2 dQ < \infty,$$
что и доказывает лемму.

Теперь мы займемся дискретным спектром оператора $Tu = -\Delta u + cu$. Поскольку, согласно теореме 3, точки положительной полуоси принадлежат непрерывному спектру оператора T, то мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого особо, что рассматриваемые точки не лежат на положительной полуоси.

Теорема 4. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства
$$|c(Q) e^{\varepsilon r_Q}| \leq A, \qquad \int_E |c(Q) e^{\varepsilon r_Q}| dQ = B < \infty,$$
где через r_Q обозначено расстояние от начала координат до точки Q, а A и B — некоторые постоянные. Тогда собственные значения оператора $Tu = -\Delta u - cu$ не имеют предельных точек на конечном расстоянии.

Доказательство. Предположим, что $\lambda^2 \neq 0$ есть собственное значение оператора $-\Delta u - cu$, т. е. пусть $-\Delta u - cu = \lambda^2 u$, где $u \in \Omega$. В силу наложенных на $c(Q)$ ограничений ясно, что не только $u(Q)$, но и $c(Q)\,u(Q)$ суммируемо с квадратом. В таком случае, применяя к обеим частям резольвенту B_λ, оператора $-\Delta u$, получим, очевидно,
$$u(M) = \int_E \Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)\, u(Q)\, dQ \qquad (Im\lambda > 0). \tag{48}$$

Итерируя это интегральное уравнение, получим, как легко видеть,
$$u(M) = \int_E K_\lambda(M, Q)\, c(Q)\, u(Q)\, dQ \qquad (Im\lambda > 0), \tag{49}$$
где $K_\lambda(M, Q)$ определено формулой (47) и является ограниченной и непрерывной функцией, согласно лемме 5.

Таким образом, ясно, что собственные значения интересующего нас оператора могут быть определены следующим образом. Собственные значения оператора T суть такие комплексные числа $\lambda^2 \neq 0$, для которых интегральные уравнения (48) или (49) имеют нетривиальные решения при $Im\lambda > 0$. Введя в (49) параметр μ и рассматривая вспомогательное уравнение

$$u(M) = \mu \int_E K_\lambda(M, Q)\, c(Q)\, u(Q)\, dQ, \tag{50}$$

замечаем, что, при каждом фиксированном значении λ из верхней полуплоскости, это есть однородное интегральное уравнение типа Фредгольма, обращающееся при $\mu = 1$ в исходное уравнение (49). Кроме того, согласно лемме 8, ядро уравнения (50) — типа Гильберта — Шмидта. Таким образом, при фиксированном λ, $Im\lambda > 0$ уравнение (50) имеет нетривиальные решения лишь в том случае, когда удовлетворяется условие

$$D(\lambda; \mu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu^k}{k!} d_k(\lambda) = 0, \tag{51}$$

где положено

$$d_k(\lambda) = \underbrace{\int_E \cdots \int_E}_{k \text{ раз}} \begin{vmatrix} K_\lambda(Q_1, Q_1)\, c(Q_1), & \cdots, & K_\lambda(Q_1, Q_k)\, c(Q_k) \\ K_\lambda(Q_2, Q_1)\, c(Q_1), & \cdots, & K_\lambda(Q_2, Q_k)\, c(Q_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_\lambda(Q_k, Q_1)\, c(Q_1), & \cdots, & K_\lambda(Q_k, Q_k)\, c(Q_k) \end{vmatrix} dQ_1 \cdots dQ_k \tag{52}$$

Теперь ясно, что задача о собственных значениях оператора T сводится к задаче о нулях функции

$$D(\lambda; 1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{d_k(\lambda)}{k!}, \tag{53}$$

лежащих в верхней полуплоскости. Именно, если $D(\lambda; 1) = 0$ и $Im\lambda > 0$, то λ^2 есть собственное значение оператора $-\Delta u - cu$ и обратно.

Переходя к вопросу о распределении нулей функции $D(\lambda; 1)$, лежащих в верхней полуплоскости, будем рассматривать эту функцию в несколько большей области, а именно в полуплоскости $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$, где ε — то же самое, что и в формулировке настоящей теоремы.

Начнем с оценки $K_\lambda(M, Q)$, считая, что $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$. Пользуясь формулами (47) и (2), после элементарных преобразований находим

$$|K_\lambda(M, Q)| < e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M + r_Q)} \int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ_1}}\, e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{Q_1 Q}}}{4\pi r_{MQ_1} \cdot 4\pi r_{Q_1 Q}}\, e^{\varepsilon r_{Q_1}}\, |c(Q_1)|\, dQ_1.$$

Теперь из условия теоремы $|c(Q)\,e^{\varepsilon r_Q}| \leqslant A$ и леммы 1 вытекает

$$|K_\lambda(M, Q)| \leqslant \frac{A}{2\pi\varepsilon}\, e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M + r_Q)}. \tag{54}$$

Переходя к оценке $d_k(\lambda)$, обозначим через α_k подинтегральную функцию в (52) и представим α_k в форме

$$\alpha_k = e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_{Q_1} + \cdots + r_{Q_k})} \cdot c(Q_1) \cdots c(Q_k) \cdot \Delta_k, \tag{55}$$

где положено

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} K_\lambda(Q_1, Q_1)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_1}}, & \cdots, & K_\lambda(Q_1, Q_k)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_k}} \\ K_\lambda(Q_2, Q_1)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_1}}, & \cdots, & K_\lambda(G_2, Q_k)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_\lambda(Q_k, Q_1)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_1}}, & \cdots, & K_\lambda(Q_k, Q_k)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_k}} \end{vmatrix}.$$

Поскольку из (54) следует

$$\left| K_\lambda(Q_i, K_j)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_j}} \right|^2 \leqslant \frac{A^2}{4\pi^2\varepsilon^2}\, e^{\varepsilon r_{Q_i}},$$

то теорема Адамара дает

$$|\Delta_k|^2 \leqslant \prod_{k=1}^{k} \left(k \frac{A^2}{4\pi^2\varepsilon^2} e^{\varepsilon r_{Q_i}} \right) = \left(\frac{A^2 k}{4\pi^2\varepsilon^2} \right)^k e^{\varepsilon (r_{Q_1} + \cdots + r_{Q_k})}.$$

Теперь из (55) вытекает

$$|\alpha_k| \leqslant \left(\frac{A\sqrt{k}}{2\pi\varepsilon} \right)^k e^{\varepsilon (r_{k_1} + \cdots + r_{Q_k})} |c(Q_1) \cdots c(Q_k)|.$$

Но, по условию, $\int\limits_E e^{\varepsilon r_Q} |c(Q)|\, dQ = B < \infty$. Поэтому

$$|d_k(\lambda)| = \left| \int\limits_E \cdots \int\limits_E \alpha_k\, dQ_1 \cdots dQ_k \right| \leqslant \left(\frac{AB\sqrt{k}}{2\pi\varepsilon} \right)^k. \tag{56}$$

Таким образом, если $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$, то ряд (53) мажорируется рядом

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{AB\sqrt{k}}{2\pi\varepsilon} \right)^k,$$

который сходится, как в этом нетрудно убедиться, применяя, например, признак Даламбера. Итак, доказана абсолютная и равномерная сходимость ряда (53) в области $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$. Остается лишь заметить, что каждая из функций $d_k(\lambda)$ аналитична в указанной области, и поэтому нули аналитической функции $D(\lambda; 1)$ не могут иметь предельных точек на конечном расстоянии, расположенных в верхней полуплоскости, что и доказывает теорему, как это было отмечено выше.

Теорема 5. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема. Тогда дискретный спектр оператора $Tu = -\Delta u - cu$ ограничен.

Доказательство. Действительно, пусть λ^2 есть собственное значение оператора T. Тогда, как мы знаем, соответствующая собственная функция удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(M) = \int_E K_\lambda(M, Q)\, c(Q)\, u(Q)\, dQ,$$

где ядро $K_\lambda(M, Q)$ определяется формулой (47). Легко видеть, что $u(Q)$ — ограниченная функция. Положив теперь $U = \sup|u(Q)|$, получим из предыдущего равенства

$$U \leqslant U\cdot\sup|K_\lambda(M, Q)|\cdot\int_E |c(Q)|\, dQ,$$

что невозможно при больших λ, как это следует из леммы 4.

Заметим, что доказанная теорема является обобщением одного результата М. А. Неймарка [2].

Теорема 6. Если при некотором $\varepsilon > 0$ $c(Q)$ удовлетворяет условиям

$$|c(Q)\, e^{\varepsilon r_Q}| \leqslant a < \infty, \qquad \int_E |c(Q)\, e^{\varepsilon r_Q}|\, dQ < \infty,$$

то дискретный спектр оператора $Tu = -\Delta u - cu$ состоит из конечного числа точек.

Доказательство. Действительно, это непосредственное следствие теорем 4 и 5.

Теперь мы покажем, что если функция $c(Q)$ достаточно мала в известном смысле, то оператор T может совсем не иметь дискретного спектра. Для формулировки соответствующей теоремы введем постоянную L, которая в неявном виде определяется с помощью следующего ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}} L^k}{k!} = 1. \tag{57}$$

Теорема 7. Пусть функция $c(Q)$ подчинена одному из следующих двух условий:

I. $c(Q)$ ограничена и суммируема

$$|c(Q)| \leqslant A, \qquad \int_E |c(Q)|\, dQ = B < \infty;$$

II. при некотором $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$|c(Q)e^{\varepsilon r_Q}| \leqslant \alpha, \qquad \int\limits_E |c(Q)e^{\varepsilon r_Q}|\,dQ = \beta < \infty.$$

Тогда, если в первом случае выполняется условие

$$(A+B)B < \pi L, \tag{58}$$

а во втором

$$\alpha\beta < 4\pi L\cdot\varepsilon, \tag{59}$$

где L — постоянная, определяемая из (57), то оператор $Tu = -\Delta u - cu$ не имеет дискретного спектра.

Доказательство. Доказательство почти совпадает с доказаством теоремы 4 с некоторыми незначительными изменениями. Прежде всего мы будем оценивать функцию $D(\lambda; 1)$ только в верхней полуплоскости и докажем, что при выполнении условий теоремы, $D(\lambda; 1)$ не имеет ни одного нуля в верхней полуплоскости, а это и означает, как мы знаем, что оператор T не имеет дискретного спектра. Оценим ядро

$$K_\lambda(M, P) = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_E \frac{e^{i\lambda r_{MQ}}e^{i\lambda r_{QP}}}{r_{MQ}r_{QP}}\,c(Q)\,dQ.$$

Предположим сперва, что выполнено первое условие, и пусть (VM, P) есть совокупность двух шаров радиуса 1 с центрами в точках M и P. Тогда, на основании (29),

$$\int\limits_{V(M,P)} \frac{|c(Q)|}{r_{MQ}r_{QP}}\,dQ \leqslant A\left(\int\limits_{V(M,P)} \frac{dQ}{r^2_{MQ}} + \int\limits_{V(M,Q)} \frac{dQ}{r^2_{QP}}\right) < 4\cdot 4\pi A,$$

$$\int\limits_{E-V(M,P)} \frac{|c(Q)|}{r_{MQ}r_{PQ}}\,dQ \leqslant \int\limits_E |c(Q)|\,dQ = B.$$

Поэтому, так как $Im\lambda > 0$,

$$|K_\lambda(M, P)| < \frac{A+B}{\pi}. \tag{60}$$

Далее, переходя ко второму случаю, точно таким же путем, как была получена оценка (54), найдем

$$|K_\lambda(M, P)| \leqslant \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon}\,e^{-\frac{\varepsilon}{2}(r_M + r_Q)}. \tag{61}$$

Теперь оценим определитель

$$a_k(\lambda) = \begin{vmatrix} K_\lambda(Q_1, Q_1)\,c(Q_1), \cdots, K_\lambda(Q_1, Q_k)\,c(Q_k) \\ K_\lambda(Q_2, Q_1)\,c(Q_1), \cdots, K_\lambda(Q_2, Q_k)\,c(Q_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_\lambda(Q_k, Q_1)\,c(Q_1), \cdots, K_\lambda(Q_k, Q_k)\,c(Q_k) \end{vmatrix}.$$

В первом случае, на основании (60), получим

$$|\alpha_k(\lambda)|\leqslant\left(\sqrt{k}\,\frac{A+B}{\pi}\right)^k|c(Q_1)\cdots c(Q_k)|. \qquad (62)$$

А во втором случае, точно так же, как из (54) была получена оценка для $\alpha_k(\lambda)$, найдем

$$|\alpha_k(\lambda)|<\left(\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon}\sqrt{k}\right)^k e^{\varepsilon(r_{Q_1}+\cdots+r_{Q_k})}|c(Q_1)\cdots c(Q_k)|. \qquad (63)$$

Поэтому для интеграла

$$d_k(\lambda)=\int\limits_E\cdots\int\limits_E\alpha_k(\lambda)\,dQ_1\cdots dQ_k$$

получим в первом случае оценку

$$|d_k(\lambda)|\leqslant\left(\sqrt{k}\,\frac{(A+B)B}{\pi}\right)^k,$$

а во втором случае

$$|d_k(\lambda)|\leqslant\left(\sqrt{k}\,\frac{\alpha\beta}{4\pi\varepsilon}\right)^k.$$

Таким образом, если выполняются условия теоремы, то в обоих случаях

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{d_k(\lambda)}{k!}\right|<1,$$

как это следует из (57). Поэтому $D(\lambda;1)\neq0$, и теорема доказана.

Очевидно, если $c(Q)$ сосредоточена в малой области пространства, то второй признак отсутствия спектра может оказаться гораздо удобнее первого.

В заключение приведем следующую теорему, обобщающую один результат Карлемана.

Теорема 8. Если $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом, то весь спектр оператора $Tu=-\Delta u-cu$ лежит внутри параболы

$$\eta^2=4\alpha^2(\xi+\alpha^2),\ \textit{где}\ \alpha=\frac{\|c\|^2}{8\pi}.$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda^2\neq0$ есть собственное значение, т. е. $-\Delta u-cu=\lambda^2u$. Как мы знаем, собственная функция $u(M)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$u(M)=\int\limits_E\Phi_\lambda(r_{MQ})\,c(Q)\,u(Q)\,dQ \qquad (Im\lambda>0). \qquad (64)$$

Будем считать, что $u(Q)$ нормировано, т. е. $\|u\|=1$. Тогда, применяя к (64) неравенство Буняковского, получаем

$$|u(M)|^2\leqslant\int\limits_E|\Phi_\lambda(r_{MQ})\,c(Q)|^2\,dQ. \qquad (65)$$

Теперь, снова применяя к (64) неравенство Буняковского и учитывая (65), находим

$$|u(M)|^2 \leqslant \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)|^2 dQ \cdot \int_E \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)|^2 dQ dM. \tag{66}$$

Заметив, что если $\lambda = \delta + i\tau$, $(\tau > 0)$, то

$$\int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})|^2 dQ = \int_E^{\infty} \frac{e^{-2\tau r}}{16\pi^2 r^2}\, 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\tau},$$

получим, на основании теоремы Фубини

$$\int_E \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)|^2\, dQ dM = \frac{1}{8\pi\tau} \int_E |c(Q)|^2 dQ = \frac{\|c\|^2}{8\pi\tau}.$$

Поэтому (66) дает

$$|u(M)|^2 \leqslant \frac{\|c\|^2}{8\pi\tau} \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)|^2 dQ.$$

Но теперь очевидно, что, повторяя эти оценки k раз, получим

$$|u(M)|^2 \leqslant \left(\frac{\|c\|^2}{8\pi\tau}\right)^k \int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)|^2 dQ.$$

Однако, как легко видеть, функция $\int_E |\Phi_\lambda(r_{MQ})\, c(Q)|^2 dQ$ суммируема и, следовательно, конечна почти для всех M. Устремляя для таких M индекс k к бесконечности в последнем неравенстве и допуская при этом, что $\|c\|^2 < 8\pi\tau$, найдем, очевидно, что $u(M)$ почти всюду есть нуль. Но это противоречит определению собственной функции, и поэтому должно быть

$$\|c\|^2 \geqslant 9\pi\tau. \tag{67}$$

Теперь заметим, что если положить $\xi = Re\lambda^2$, $\eta = Im\lambda^2$, где $\lambda = \delta + i\tau$, то, как легко проверить,

$$\eta^2 = 4\tau^2(\tau^2 + \xi).$$

Поэтому неравенство (67) доказывает теорему.

В заключение приношу благодарность Израилю Моисеевичу Гельфанду, под руководством которого выполнялась работа.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 5 XI 1956

Ռ. Մ. Մարտիրոսյան

$-\Delta u + cu$ ՈՉ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ ԵՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Այս աշխատության մեջ ուսումնասիրվում են եռաչափ էվկլիդյան տարածության մեջ ամենուրեք որոշված և քառակուսու հետ մեկտեղ հան-

քառագումարելի ֆունկցիաների $L_2(E)$ Հիլբերտյան տարածության մեջ $Tu = -\Delta u + cu$ ոչ ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրին վերաբերող հարցեր. ենթադրվում է, որ $c(Q)$-ն $L_2(E)$-ին պատկանող կոմպլեքս ֆունկցիա է։ Բնական է, որ օպերատորը դիտվում է այն $\Omega \subset L_2(E)$ տիրույթի վրա, որը հանդիսանում է $-\Delta u$ հիպերմաքսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթը։ Վերջինս, ինչպես հայտնի է, նշանակում է, որ Ω-ն հանդիսանում է $-\Delta u$ օպերատորի փակման որոշման տիրույթը, դիտված բոլոր ֆինիտ ֆունկցիաների բազմության վրա, կամ, որ նույնն է, Ω-ն համընկնում է բոլոր այն ֆունկցիաների բազմությանը, որոնք ունեն քառակուսու հետ միասին հանրագումարելի, Սոբոլևի իմաստով ընդհանրացված լապլասյան։

Արդյունքները հիմնականում ստացվել են, դիտարկվող օպերատորի սեփական արժեքների վերաբերյալ խնդիրը ինչ-որ ինտեգրալ հավասարման համար անալոգ խնդրին բերելու ճանապարհով։

Նախ և առաջ ցույց է տրված, որ T օպերատորը չի կարող ունենալ մնացորդային սպեկտր և որ նրա անընդհատ սպեկտրը համընկնում է դրական կիսաառանցքին։ Բացի դրանից, ամբողջ սպեկտրն ընկած է ինչ-որ պարաբոլի ներսը։

Այնուհետև T օպերատորի ռեզոլվենտը հանդիսանում է ինտեգրալ օպերատոր, որի $H(M, Q; \lambda)$ կորիզը Կառլեմանի տիպի է, և, բացի դրանից, տեղի ունի հետևյալ գնահատականը՝

$$\int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dM < L(\lambda), \qquad \int_E |H(M, Q; \lambda)|^2 dQ < L(\lambda),$$

որտեղ $L(\lambda)$ ֆունկցիան ընդունում է վերջավոր արժեքներ և կախված է միայն λ-ից։ Ինչ վերաբերվում է դիսկրետ սպեկտրին, ապա պարզվում է, որ նա սահմանափակ է. Բացի դրանից, եթե անվերջության մեջ $c(Q)$-ն բավականաչափ արագ է նվազում, ապա դիսկրետ սպեկտրը կարող է կազմված լինել միայն վերջավոր թվով կետերից։

Ավելի խիստ պայմանների դեպքում, եթե $c(Q)$-ն հայտնի իմաստով բավականաչափ փոքր է, T օպերատորը չունի դիսկրետ սպեկտր։

Մեկ և երկու չափանի տարածությունների մեջ անալոգը չունեցող վերջին պնդումը լրիվ համապատասխանում է կվանտային մեխանիկայի հայտնի դրույթին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, новая серия, 77, 1 (1951).
2. *Наймарк М. А.* О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, новая серия, 85, 1 (1952).
3. *Наймарк М. А.* О разложении по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, новая серия, 89, 2 (1953).
4. *Гельфанд И. М.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов. Успехи матем. наук, VII, 6 (1952).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ X, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Х. Арутюнян, М. М. Джрбашян, Р. А. Александрян

Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную

Известно, что ряд задач математической физики, как, например, задача о распространении звуковых волн в поступательно движущемся потоке жидкости, а также в пористой среде, или же задача о продольных колебаниях упругих стержней при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости деформаций, приводится к интегрированию гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную, т. е. уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}, \tag{1}$$

где a — постоянная.

В настоящей заметке приводится решение так называемой смешанной задачи для уравнения (1), которая состоит в отыскании функции $u(x, t)$ в области $t>0$, $0<x<l$, которая удовлетворяет уравнению (1) и следующим начальным и краевым условиям:

$$u\Big|_{t=0}=f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x). \tag{2}$$

$$u(0, t)=u(l, t)=0. \tag{3}$$

Применение метода, близкого к методу Фурье для решения этой задачи, порождает некоторую краевую задачу на собственные значения, причем собственные функции оказываются не ортогональными в обычном смысле, но обладают некоторым свойством, которое естественно называть обобщенной ортогональностью.

Это свойство аналогично интересному свойству, впервые обнаруженному А. Ф. Папковичем [1] для уравнения четвертого порядка, и позволяет из начальных условий (2) определить единственным образом остающиеся неопределенными коэффициенты разложений совершенно так же, как в классическом случае уравнения колебания струны.

Отметим также, что построения П. Ф. Папковича, основанные на возможности одновременного разложения двух произвольных функций в специальные ряды по собственным функциям, были затем обоснованы в работе Г. А. Гринберга [2].

В первой части настоящей заметки приводится формальное построение решения смешанной задачи (1), (2), (3) в предположении, что соответствующие разложения по системе собственных функций справедливы, а во второй части доказывается, что при определенных условиях, налагаемых на начальные функции $f(x)$ и $g(x)$, указанные разложения справедливы, и построенное в виде ряда формальное решение является действительным решением поставленной задачи.

1°. *Построение решения.* Ищем решение смешанной задачи (1), (2), (3), формально, в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{(k)} a_k e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x), \tag{4}$$

где система функций $\{\varphi_k(x)\}$, последовательность чисел $\{\lambda_k\}$ и коэффициенты $\{a_k\}$ подлежат определению.

Легко видеть, что если система функций $\{\varphi_k(x)\}$ и последовательность чисел $\{\lambda_k\}$ суть соответственно собственные функции и собственные числа следующей граничной задачи

$$y'' - 2ai\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \tag{5}$$

$$y(0) = y(l) = 0, \tag{6}$$

то ряд (4) формально удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (3) при произвольных комплексных значениях коэффициентов $\{a_k\}$.

Вся совокупность собственных чисел и собственных функций граничной задачи (5), (6) может быть выписана в явном виде, а именно:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l\sqrt{1+a^2}}; \tag{7}$$

$$\varphi_k(x) = e^{ia\lambda_k x} \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{e^{ir_1\lambda_k x} - e^{-ir_2\lambda_k x}}{2i}, \tag{8}$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$,

$$r_1 = \sqrt{1+a^2} + a, \qquad r_2 = \sqrt{1+a^2} - a.$$

Таким образом, для формального построения решения задачи (1), (2), (3) остается лишь выбрать коэффициенты $\{a_k\}$ так, чтобы ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x), \tag{4'}$$

где последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k(x)\}$ определены по формулам (7) и (8), удовлетворяя также и начальным условиям (2). С этой целью покажем сначала, что система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^l \varphi_n(x)\{(\lambda_k+\lambda_n)\overline{\varphi_k(x)}+2ai\overline{\varphi'_k(x)}\}dx=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \pi\sqrt{1+a^2}n, & k=n,\end{cases} \tag{9}$$

при $k,\ n=\pm 1,\ \pm 2,\cdots$

Свойство системы $\{\varphi_k(x)\}$, выражаемое интегральным соотношением (9), естественно называть обобщенной ортогональностью.

Для доказательства первой формулы (9) заметим, что из определения собственных функций следует, что имеют место тождества:

$$\varphi''_n(x)-2ai\lambda_n\varphi'_n(x)+\lambda_n^2\varphi_n(x)=0, \tag{10}$$

$$\overline{\varphi''_k(x)}+2ai\lambda_k\overline{\varphi'_k(x)}+\lambda_k^2\overline{\varphi_k(x)}=0, \tag{10'}$$

при $n,\ k=\pm 1,\ \pm 2,\cdots$

Умножая (10) на $\overline{\varphi_k(x)}$, (10′) на $\varphi_n(x)$, вычитая первый результат из второго, интегрируя полученное тождество от 0 до l и, наконец, преобразуя некоторые слагаемые интегрированием по частям при учете граничных условий (6), легко получим

$$(\lambda_k-\lambda_n)\int_0^l \varphi_n(x)[(\lambda_n+\lambda_k)\overline{\varphi_k(x)}+2ai\overline{\varphi'_k(x)}]\,dx=0. \tag{11}$$

Из (11) немедленно следует первая из формул (9).

Далее, из (8) имеем

$$2\lambda_n\overline{\varphi_n(x)}+2ai\overline{\varphi'_n(x)}=$$

$$=2\lambda_n(1+a^2)e^{-i\lambda_n x}\sin\frac{\pi nx}{l}+\frac{2\pi ani}{l}e^{-i\lambda_n x}\cos\frac{\pi nx}{l},$$

откуда получим

$$\int_0^l \varphi_n(x)[2\lambda_n\overline{\varphi_n(x)}+2ai\overline{\varphi'_n(x)}]dx=$$

$$=2\lambda_n(1+a^2)\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{in\pi a}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi nx}{l}\,dx=$$

$$=\lambda_n(1+a^2)l=\pi n\sqrt{1+a^2},$$

т. е. вторую из формул (9).

Теперь покажем, что, пользуясь формулами (9) обобщенной ортогональности, мы можем определить коэффициенты $\{a_k\}$ в (4′) так, чтобы функция $u(x,\ t)$ удовлетворяла также начальным условиям (2).

В самом деле, из (4′) следует, что начальные условия (2) формально удовлетворяются, если имеют место одновременные разложения

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\varphi_n(x), \tag{12}$$

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i\lambda_n a_n\varphi_n(x) \tag{12'}$$

на интервале $(0, l)$.

Полагая, пока лишь формально, что разложения вида (12) и (12′) возможны, покажем, что при равномерной сходимости обоих рядов на отрезке $[0, l]$ коэффициенты $\{a_n\}$ определяются единственным образом через функции $f(x)$ и $g(x)$.

В самом деле, из (12) и (12′) непосредственно следует

$$f(x)[\lambda_k\overline{\varphi_k(x)}+2ai\overline{\varphi_k'(x)}]-ig(x)\overline{\varphi_k(x)}=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\varphi_n(x)[(\lambda_n+\lambda_k)\overline{\varphi_k(x)}+2ai\overline{\varphi_k'(x)}], \tag{13}$$

где $k=\pm 1, \pm 2, \cdots$

Интегрируя (13) и принимая во внимание формулы (9), получим

$$a_k=\frac{1}{\pi k\sqrt{1+a^2}}\int_0^l\{f(t)[\lambda_k\overline{\varphi_k(t)}+2ai\overline{\varphi_k'(t)}]-ig(t)\overline{\varphi_k(t)}\}dt, \tag{14}$$

$$(k=\pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Теперь очевидно, что если в ряде (4′) числа $\{\lambda_k\}$, функции $\{\varphi_k(x)\}$ и коэффициенты $\{a_k\}$ определяются соответственно по формулам (7), (8), (14), то его сумма $u(x, t)$ формально удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (3) и начальным условиям (2).

В следующем пункте доказывается законность вышеприведенных формальных построений.

2°. *Обоснование метода.* В этом пункте сначала докажем, что если $f(x)$ и $g(x)$ суть независимые друг от друга достаточно гладкие функции, то одновременные разложения (12) и (12′) действительно возможны.

Теорема. *Пусть $f(x)$—дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, l]$, удовлетворяющая граничным условиям (3), а функция $g(x)$ лишь непрерывно дифференцируема на том же отрезке.*

Если в рядах (12) и (12′) коэффициенты $\{a_k\}$ определены по формулам (14), то ряды эти сходятся, притом равномерно в любом подинтервале, а их суммы равны соответственно $f(x)$ и $g(x)$.

Доказательство. Введем обозначения

$$S_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}a_k\varphi_k(x);\qquad T_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}i\lambda_k a_k\varphi_k(x);$$

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi k\sqrt{1+a^2}}\int_0^l f(t)\,[\lambda_k\overline{\varphi_k(t)}+2ai\overline{\varphi_k'(t)}]dt; \tag{15}$$

$$a_k(g)=\frac{1}{\pi ki\sqrt{1+a^2}}\int_0^l g(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt; \tag{16}$$

$$S_N(x,f)=\sum_{k=-N}^{N}a_k(f)\varphi_k(x);\quad S_N(x,g)=\sum_{k=-N}^{N}a_k(g)\varphi_k(x);$$

$$T_N(x,f)=\sum_{k=-N}^{N}i\lambda_k a_k(f)\varphi_k(x);\quad T_N(x,g)=\sum_{k=-N}^{N}i\lambda_k a_k(g)\varphi_k(x).$$

Очевидно, что

$$a_k=a_k(f)+a_k(g);\quad S_N(x)=S_N(x,f)+S_N(x,g);$$
$$T_N(x)=T_N(x,f)+T_N(x,g),$$

и теорема будет доказана, если мы покажем, что при сделанных в теореме предположениях относительно функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x,f)=f(x);\qquad \lim_{N\to\infty}S_N(x,g)=0; \tag{17}$$

$$\lim_{N\to\infty}T_N(x,g)=g(x);\qquad \lim_{N\to\infty}T_N(x,f)=0; \tag{17'}$$

при этом равномерно внутри отрезка $[0,l]$.

Положим в дальнейшем $l=\pi$, что, разумеется, не ограничивает общности. Подставляя значение $a_k(f)$ в $S_N(x,f)$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$S_N(x,f)=\frac{1}{\pi(1+a^2)}\int_0^\pi f(t)\left\{\sum_{k=-N}^{N}\varphi_k(x)\frac{\lambda_k\overline{\varphi_k(t)}+2ai\overline{\varphi_k'(t)}}{k}\right\}dt.$$

Подставляя здесь выражение для $\varphi_k(t)$ через показательные функции и проделав элементарные преобразования, будем иметь

$$S_N(x,f)=\frac{1}{4\pi(1+a^2)}\int_0^\pi f(t)\left[(1+2ar_1)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}+\right.$$

$$+(1-2ar_2)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}-$$

$$
-(1+2ar_1)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1t+r_2x}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1t+r_2x}{2\sqrt{1+a^2}}}-
$$

$$
-(1-2ar_2)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1x+r_2t}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1x+r_2t}{2\sqrt{1+a^2}}}\Bigg\}dt.
$$

Заметим теперь, что при фиксированном $x\in(0,\pi)$ выражения r_2x+r_1t и r_1x+r_2t не обращаются в нуль ни при одном значении t из промежутка $[0,\pi]$; поэтому, в силу теоремы Римана—Лебега, при $N\to\infty$ получим

$$
S_N(x,f)=\frac{1}{4\pi(1+a^2)}\int_0^\pi f(t)\Bigg\{(1+2ar_1)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}+
$$

$$
+(1-2ar_2)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}\Bigg\}dt+o(1), \tag{18}
$$

притом равномерно относительно x в любом отрезке, лежащем внутри $(0,\pi)$.

Еще раз применив теорему Римана — Лебега. мы можем в формуле (18) заменить выражения

$$
\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}},\quad \sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}
$$

через

$$
\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}},\qquad \frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}.
$$

тогда получим при $N\to+\infty$

$$
S_N(x,f)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+a^2}}\int_0^\pi f(t)\Bigg\{\left(\frac{1}{r_1}+2a\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{x-t}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{r_2}-2a\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}{x-t}\Bigg\}dt+o(1)
$$

равномерно относительно x в любом отрезке, лежащем внутри $(0,\pi)$.

Но по условию $f'(t)$ непрерывна; поэтому по известной теореме теории рядов Фурье будем иметь

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x, f) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)f(x) = f(x),$$

при этом равномерно внутри $(0, \pi)$, т. е. первое из соотношений (17) доказано.

Докажем теперь первое из соотношений (17′). Принимая во внимание (16), меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь

$$T_N(x, g) = \frac{1}{\pi(1+a^2)}\int_0^\pi g(t)\left\{\sum_{k=-N}^{N}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}\right\}dt$$

или, подставляя выражения φ_k через показательные функции и проделав элементарные преобразования, получим

$$T_N(x, g) = \frac{1}{4\pi(1+a^2)}\int_0^\pi g(t)\left\{\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin\frac{r_2(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}}\right\}dt + o(1), \quad N\to\infty,$$

где мы уже воспользовались сделанным выше замечанием и теоремой Римана — Лебега. Далее, заменив опять знаменатели ядер через соответствующие аргументы, получим

$$T_N(x, g) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+a^2}}\int_0^\pi g(t)\left\{\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{x-t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_2}\cdot\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{x-t}\right\}dt + o(1), \quad N\to\infty. \qquad (19)$$

Из (19), в силу непрерывности $g'(t)$, будем иметь:

$$\lim_{N\to\infty} T_N(x, g) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)g(x) = g(x),$$

притом равномерно внутри $(0, \pi)$, т. е. первое из соотношений (17′) также доказано.

Для доказательства вторых соотношений из (17) и (17′) преобразуем выражения коэффициентов $a_k(f)$ и $a_k(g)$ путем интегрирования по частям.

Пусть $G'(x) \equiv g(x)$; тогда легко видеть, что

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi k i \sqrt{1+a^2}} \int_0^\pi \overline{\varphi_k(t)}\, dG(t) = -\frac{1}{\pi k i \sqrt{1+a^2}} \int_0^\pi G(t) \overline{\varphi_k'(t)}\, dt.$$

Наконец, пользуясь тождеством (10′) и тем, что по условию теоремы $f(x)$ исчезает на концах промежутка, будем иметь:

$$a_k(f) = -\frac{1}{\pi k^2} \int_0^\pi f(t) \overline{\varphi_k''(t)}\, dt = \frac{1}{\pi k^2} \int_0^\pi f'(t) \overline{\varphi_k'(t)}\, dt.$$

Подставляя теперь эти выражения $a_k(g)$ и $a_k(f)$ соответственно в $S_N(x, g)$ и $T_N(x, f)$, получим

$$S_N(x, g) = \frac{i}{\pi \sqrt{1+a^2}} \int_0^\pi G(t) \left\{ \sum_{k=-N}^{N} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k'(t)}}{k} \right\} dt, \tag{20}$$

$$T_N(x, f) = \frac{i}{\pi \sqrt{1+a^2}} \int_0^\pi f'(t) \left\{ \sum_{k=-N}^{N} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k'(t)}}{k} \right\} dt. \tag{21}$$

Таким образом, интеграл (21) получается из интеграла (20) заменой функции $G(t)$ на $f'(t)$; поэтому нам достаточно доказать лишь, что $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x, g) = 0$.

Подставляя значение функции в (20), получим

$$S_N(x, g) = \frac{1}{4\pi(1+a^2)} \int_0^\pi G(t) \left\{ r_1 \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_1(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin \frac{r_1(x-t)}{2\sqrt{1+a^2}}} - \right.$$

$$\left. - r_2 \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}}{\sin \frac{r_2(x-t)}{\sqrt{1+a^2}}} \right\} dt + 0(1), \quad N\to\infty,$$

применяя теорему Римана — Лебега. Далее, поступив так же, как и выше, получим

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x, g) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}} [G(x) - G(x)] = 0,$$

притом равномерно относительно x внутри $(0, \pi)$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим теперь, что из выражений коэффициентов $a_k(f)$ и $a_k(g)$ легко следует, что если $f(x)$ и $g(x)$ имеют кусочно непрерывные производные соответственно до четвертого и третьего порядков и удовлетворяют условиям:

$$f(0)=f''(0)=f'''(0)=f(l)=f''(l)=f'''(l),$$
$$g(0)=g'(0)=g''(0)=g(l)=g'(l)=g''(l),$$

то $a_k=0\left(\frac{1}{k^4}\right)$

Таким образом, во всяком случае тогда, когда начальные данные $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют перечисленным условиям, числовой ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 |a_k|$$

сходится, и, стало быть, построенная по формуле (4') функция $u(x, t)$ является решением задачи (1), (2), (3) в классическом смысле.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20 XII 1956

Ն. Խ. Հարությունյան, Մ. Մ. Ջրբաշյան, Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան

ԽԱՌԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԻՊԵՐԲՈԼԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հայտնի է, որ մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք խնդիրներ, օրինակ՝ համընթաց շարժվող հեղուկի հոսանքի մեջ, ինչպես նաև ծակոտկեն միջավայրում ձայնային ալիքների տարածման խնդիրը, կամ առաձգական ձողերի երկայնական տատանումների խնդիրը դեֆորմացիաների արագությանը համեմատական դիմադրության ուժերի առկայության դեպքում, բերվում են խառն ածանցյալ պարունակող հիպերբոլիկ հավասարման ինտեգրման, այսինքն հետևյալ տեսքի հավասարման՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \tag{1}$$

որտեղ a*-ն հաստատուն է։*

Ներկա հոդվածում բերվում է (1) հավասարման համար, այսպես կոչված, խառը խնդրի լուծումը, այսինքն $t>0$, $0<x<l$ *տիրույթում կառուցվում է այնպիսի* $u(x, t)$ *ֆունկցիա, որը բավարարում է (1) հավասարմանը և հետևյալ սկզբնական ու եզրային պայմաններին՝*

$$u\Big|_{t=0}=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x),$$
$$u(0, t)=u(l, t)=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля, II (1941).
2. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем, Прикл. матем. и механика, XVII (1953).