ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԵՐԻԱ
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Издается с 1947 г.

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան-19, Բարեկամության փող. 24գ
Адрес редакции: Ереван-19, ул. Барекамутян, 24г.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX, № 5, 1977 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

М. В. КАСЬЯН, Г. Б. БАГДАСАРЯН, А. М. АРЗУМАНЯН

ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СТРУЖКИ, КАК ПОКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАБАТЫВАЕМОСТИ

Известно, что при уменьшении скорости или увеличении глубины резания возможен переход от сливной стружки к стружке надлома с возникновением трещины у режущей кромки. Кроме того, как уже показано в работе [4], форма стружки, в основном, зависит от величин m и K.

Согласно [2] величина m определяется так:

$$m = \frac{\tau_р - \tau_{окт}}{\varepsilon_{ед} - \varepsilon_{окт}}. \quad (1)$$

где $\tau_{окт}$ — предел текучести на сдвиг ненаклепанного металла, который действует вдоль поверхности AB и равен октаэдрическому напряжению (рис. 1).

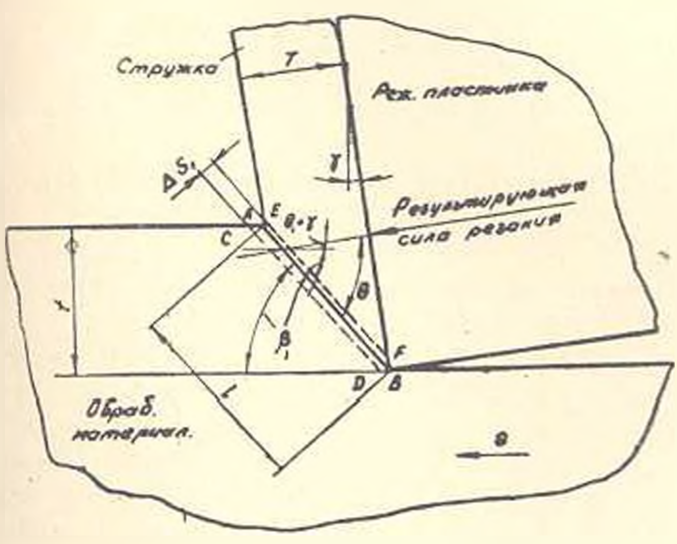

Рис. 1.

Величина касательного октаэдрического напряжения определяется по формуле:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2}.$$

При $\sigma_x = 0$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2},$$

где σ_z, σ_y — главные нормальные напряжения и определяются по [1]:

$$\sigma_z = \frac{P_z \cos\gamma}{ab\xi_b(\xi - \sin\gamma)};$$

$$\sigma_y = \frac{P_y \cos\gamma}{ab\xi_b(\xi - \sin\gamma)};$$

$$\xi = \xi_1\frac{b}{b_1}; \qquad \xi_b = \frac{b_1}{b};$$

τ_s — предел текучести на сдвиг наклепанного металла, действующий вдоль поверхности EF (рис. 1), и определяется по формуле:

$$\tau_s = K + \frac{K}{2};$$

K — предел текучести на сдвиг вдоль поверхности AB.

$$\varepsilon_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

— октаэдрический сдвиг [2];

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y); \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z); \qquad \varepsilon_3 = -\frac{1}{E}\mu(\sigma_z + \sigma_y);$$

$\varepsilon_{сд}$ — деформация сдвига, определяемая по формуле [3]:

$$\varepsilon_{сд} = \operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{tg}(\beta_1 - \gamma).$$

Кроме вышеуказанной формулы, $\tau_{окт}$ можно определить и по формуле

$$\tau_{окт} = K - \frac{K}{2}.$$

Подставляя значения τ_s и $\tau_{окт}$ в (1), получим

$$\frac{m}{K} = \frac{1}{\varepsilon_{сд} - \varepsilon_{окт}}. \tag{2}$$

Чем меньше эта величина, тем тоньше стружка и тем меньше ее объемная деформация. Следовательно, увеличивается стойкость резца, уменьшаются силы резания и вероятность трещинообразования в материале в зоне режущей кромки, при этом улучшается также чистота поверхности, и, по-видимому, отношение m/K можно считать характеристикой обрабатываемости. Но определить величину m/K при таких больших скоростях деформирования, которые существуют при резании, пока не представляется возможным [4]. Однако, в первом приближении можно допустить, что материалу, имеющему меньшую величину m/K, будет соответствовать меньшая объемная деформация при больших скоростях деформации. Этот показатель может являться проверкой оптимальности режимного поля, так как он связан с состоянием поверхности резания, а также со стойкостью инструмента.

Таким образом, отношение m/K можно считать новым критерием оптимизации режимов резания, наравне с объемной деформацией стружки.

Наша задача заключается не только в оптимизации процесса резания, но и в нахождении взаимосвязи между m/K и δ_u.

Исходя из этого, проведена серия опытов по факторному планированию экспериментов типа 3^3 для установления зависимостей:

$$\frac{m}{K} = f_1(v,\ s,\ t); \qquad \delta_u = f_2(v,\ s,\ t).$$

Значение полной объемной деформации δ_u определяется по формуле [2]:

$$\delta_u = \delta_{сж} + \varepsilon_0,$$

где $\delta_{сж}$ — определяется выражением [5]

$$\delta_{сж} = \sqrt{0{,}67\,(\delta_l^2 - \delta_a^2 + \delta_b^2)}\ .$$

где

$$\delta_l = \ln(1 + \Delta l); \qquad \Delta l = \frac{l}{l_1};$$

$$\delta_a = \ln(1 + \Delta a); \qquad \Delta a = \frac{a_1}{a};$$

$$\delta_b = \ln(1 + \Delta b); \qquad \Delta b = \frac{b_1}{b};$$

l — длина среза, *мм*; l_1 — длина стружки, *мм*; a_1 — толщина стружки, *мм*; b_1 — ширина стружки, *мм*; $\varepsilon_0 = 3\alpha\theta$ — температурная деформация стружки [6]; α — коэффициент температурного расширения материала, 1/*град*; θ — температура резания, *град*.

Опыты проводились при фрезеровании цветных металлов ЛС59-1 и Д16 режущими пластинками из СК. План проведения экспериментов и их результаты приведены в табл. 1, согласно которой и составляется математическая модель отношения m/K, а также полной объемной деформации δ_u в зависимости от режимов резания:

$$\frac{m}{K} = C_1 v^{x_1} s^{x_2} t^{x_3}; \qquad \delta_u = C_2 v^{x_4} s^{x_5} t^{x_6}. \tag{3}$$

При этом уравнения регрессии имеют вид:

$$\ln \frac{m}{K} = y_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 +$$

$$+ b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3;$$

$$\ln \sigma_u = y_2 = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_{12} x_1 x_2 + B_{13} x_1 x_3 +$$

$$+ B_{23} x_2 x_3 + B_{123} x_1 x_2 x_3. \qquad (4)$$

Для определения показателей степеней и коэффициентов уравнений (3) составляется матрица планирования с учетом того, что в матрице минимальному значению параметра соответствует «—1», среднему значению—«0», а максимальному—«+1».

Таблица 1

№ п/п	v, м/мин	s, мм/об	t, мм	Материал — ЛС 59—1				Материал — Д16			
				σ_u	m	K	m/K	σ_u	m	K	m/K
1	88	0,007	0,200	2,55	182,10	356,92	0,510	3,22	16,29	79,66	0,204
2	250	0,007	0,020	2,50	102,27	286,37	0,357	3,77	8,15	32,68	0,249
3	703	0,007	0,063	2,48	72,00	139,68	0,515	3,22	6,03	27,32	0,221
4	88	0,022	0,020	2,33	130,97	275,03	0,476	3,43	5,98	34,50	0,173
5	250	0,022	0,063	1,83	54,13	115,84	0,467	2,40	21,85	58,34	0,374
6	703	0,022	0,200	1,76	57,93	163,94	0,353	2,10	30,00	81,32	0,369
7	88	0,070	0,063	1,64	71,37	146,31	0,488	2,01	25,01	65,28	0,383
8	250	0,070	0,200	1,28	45,61	127,72	0,357	1,56	48,83	109,88	0,444
9	703	0,070	0,020	1,27	158,41	343,74	0,461	1,17	15,59	37,72	0,413

Определение коэффициентов полиномов (4) дает возможность с помощью уравнения преобразования [7]

$$x_i = \frac{2(\ln T_i - \ln T_{\max})}{\ln T_{\max} - \ln T_{\min}} + 1$$

составить таблицу 2, где приведены все значения неизвестных показателей и коэффициентов уравнений (3).

Таблица 2

Материал	C_1	C_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Д16	0,67	1,567	0,20	0,41	0,10	—0,10	—0,22	—0,05
ЛС59—1	0,59	1,221	0,17	0,35	0,12	—0,18	—0,18	—0,07

Применяя линейное программирование для уравнений (3) с учетом ограничения режимов резания, можно составить программу для ЭВМ и определить оптимальные значения режимного поля при обработке вышеупомянутых материалов.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 0,67 + 0,2z_1 + 0,41z_2 + 0,1z_3 \to \min \\
y_2 &= 1,567 - 0,1z_1 - 0,22z_2 - 0,05z_3 = \ln 1,0 \\
z_1 &\geqslant \ln 88 \\
z_1 &\leqslant \ln 703 \\
z_2 &\geqslant \ln 0,007 \\
z_2 &\leqslant \ln 0,07 \\
z_3 &\geqslant \ln 0,063 \\
z_3 &\leqslant \ln 0,2
\end{aligned}
$$

Аналогично можно составить программу и для материала ЛС59-1.

Решение систем линейных неравенств на ЭВМ дает оптимальные значения v, s, t, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

Материал	Оптимальные параметры режимов резания		
	v, *м/мин*	s, *мм/об*	t, *мм*
Д16	260	0,007	0,11
ЛС59-1	250	0,007	0,05

Подставляя в (3) оптимальные параметры режимов резания, получаем следующие взаимосвязи между m/K и ξ_u:

для ЛС59—1 $$\frac{m}{K} = 0,20\xi_u^{0,4};$$

для Д16 $$\frac{m}{K} = 0,13\xi_u^{0,4}, —$$

которые показывают, что чем меньше ξ_u, тем меньше отношение m/K, что и приводит к хорошей обрабатываемости.

Можно ожидать, что при обработке большие силы резания и большие толщины стружек будут соответствовать материалам, для которых значения величины m/K больше. С увеличением m/K увеличивается шероховатость поверхности (R_a), а это приводит к ухудшению качества обработанной поверхности, следовательно, величина m/K связана с R_a.

Таким образом, теория стружкообразования, учитывающая переменность m/K, позволяет качественно оценить влияние варьирования v, s, t на ξ_u или на форму образованной стружки.

Так как параметры m/K и ξ_u являются характеристиками свойств материала, то при оценке обрабатываемости этими параметрами не будет учтено влияние на обрабатываемость твердых включений и различных добавок, вводимых в Д16 и ЛС59-1 с целью улучшения обрабатываемости путем изменения условий трения на поверхности контакта резец-стружка. Но m/K, δ_v непосредственно связаны с процессом резания и следует ожидать, что они являются лучшими характеристиками обрабатываемости, чем твердость или сопротивление при разрыве.

Отсюда следует, что более полное представление об обрабатываемости материала дает m/K или δ_v. Большим значением m/K или δ_v соответствуют стружки надлома с большей толщиной и низким качеством обработанной поверхности. Если к тому же величина l большая,то тогда силы, действующие на резец, велики, что ведет к уменьшению стойкости резца. Меньшие значения параметров δ_v и m/K характерны для сливных стружек, меньших сил резания и хорошего качества обработанной поверхности.

Итак, вышеизложенное позволяет сделать вывод, что по объемной деформации можно судить об обрабатываемости.

ЕрПИ им. К Маркса

Поступила 22.IV.1977

Մ. Վ. ԿԱՍՅԱՆ, Հ. Բ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ա. Մ. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ

ՏԱՇԵՂԻ ԾԱՎԱԼԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ՈՐՊԵՍ ՄՇԱԿԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՄԱՆ ՑՈՒՑԱՆԻՇ

Ամփոփում

Հոդվածում ցույց է տրված, որ երբ փոքրանում է կտրման արագությունը կամ մեծանում է կտրման խորությունը հնարավոր է դառնում անընդհատ տաշեղի վերածումը ջարդոնային տաշեղի, առաջացնելով կոնտակտի շրջանում ճաքեր։ Բացի դրանից, ցույց է տրված, որ տաշեղի ձևը հիմնականում կախված է m և K մեծություններից։ Փորձերով հաստատված է, որ որքան փոքր է m/K հարաբերությունը, այնքան բարակ է տաշեղը և այնքան փոքր է նրա ծավալային դեֆորմացիան։ Հետևաբար, դրանից կախված, մեծանում է կտրիչի կայունությունը, կտրման ուժը և ճաքագոյացման հավանականությունը փոքրանում է և մակերևույթը ստացվում է անհամեմատ մաքուր։ Հեղինակները հանգում են այն եզրակացության, որ m/K հարաբերությունը կարելի է ընդունել որպես մշակելիության բնութագիր, ինչպես նաև նոր միջոց՝ կտրման օպտիմալ ռեժիմների որոշման համար։ Բացի դրանից, գտնված է փոխադարձ կապ ծավալային դեֆորմացիայի (δ_v) և m/K հարաբերության միջև, որը հնարավոր է դառնում գծային ծրագրավորման եղանակի օգտագործմամբ։

Այսպիսով հաստատվել է, որ տաշեղի ծավալային դեֆորմացիայի միջոցով կարելի է դատել կտրման մշակելիության մասին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лоладзе Т. Н.* Стружкообразование при резании металлов. Машгиз, 1952.
2. *Арутюнян Г. А., Багдасарян Г. Б.* Влияние скорости деформации на усадку снимаемого слоя при строгании. Сборник научных трудов ЕрПИ, том 24, 1972, изд-во «Айастан».

3. *Зорев Н. Н.* Вопросы механики процесса резания металлов. Машгиз, 1956.
4. *Enahoro H. F., Welsh M. I. M.* The relevance of the mechanics of metal cutting to machinability. Machinability. London. Iron and Steel Inst., 1967, 19—24. Discuss, 55—63.
5. *Беспрозванный И. М.* Основы теории резания металлов. Машгиз, 1948.
6. *Работнов А. Н.* Сопротивление материалов. Физматгиз, 1962.
7. *Касьян М. В., Багдасарян Г. Б., Арутюнян Г. А.* Методы планирования экспериментов в области резания металлов и математической обработки результатов. Изд. «Айастан», Ереван, 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա   XXX, № 5, 1977   Серия технических наук

ЭНЕРГЕТИКА

Г. Г. АДОНЦ

ИССЛЕДОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Уравнения установившегося режима электрической системы, записанные в приращениях параметров режима, имеют вид:

$$\Delta P_m = \sum_{\omega} \frac{\partial P_m}{\partial s_\omega} \Delta s_\omega + \sum_{\omega} \frac{\partial P_m}{\partial U_\omega} \Delta u_\omega;$$
$$\Delta Q_m = \sum_{\omega} \frac{\partial Q_m}{\partial s_\omega} \Delta s_\omega + \sum_{\omega} \frac{\partial Q_m}{\partial U_\omega} \Delta u_\omega, \quad (1)$$

где m — индекс узла системы;

ω — индекс узлов ветвей, исходящих из узла m;

$s_\omega = \sin \varphi_\omega$ — синус фазы комплексного напряжения узла ω;

U_ω — модуль того же напряжения;

Δs_ω, Δu_ω — приращения параметров режима в двух последовательных шагах итерации;

P_m, Q_m — активная и реактивная мощности узла m.

Первое из уравнений (1) записывается для узлов с искомыми параметрами s, второе — для узлов с искомыми параметрами U. Один из узлов схемы выделяется в качестве узла баланса мощностей, для которого задаются $s_б$ и $U_б$ и принимаются искомыми $P_б$ и $Q_б$.

Величины ΔP_m и ΔQ_m определяются по формулам:

$$\Delta P_m = P^*_m - P^i_m = P^*_m - U^2_m g_{mm} - U_m \sum_{\omega} U_\omega \alpha_{m\omega};$$
$$\Delta Q_m = Q^*_m - Q^i_m = Q^*_m - U^2_m b_{mm} - U_m \sum_{\omega} U_\omega \beta_{m\omega}, \quad (2)$$

где P^*_m, Q^*_m — заданные мощности узла m;

$$\alpha_{m\omega} = g_{m\omega} \cos(\varphi_m - \varphi_\omega) - b_{m\omega} \sin(\varphi_m - \varphi_\omega);$$
$$\beta_{m\omega} = g_{m\omega} \sin(\varphi_m - \varphi_\omega) + b_{m\omega} \cos(\varphi_m - \varphi_\omega); \quad (3)$$

где $g_{m\omega}$, $b_{m\omega}$ — активная и реактивная проводимости ветви между узлами m и ω;

i — индекс шага итерации.

Взамен уравнений (1) предлагаются [1] следующие уравнения установившегося режима электрической системы:

$$\Delta P_m = \sum_\omega \frac{\partial P_m}{\partial s_{m\omega}} \Delta s_{m\omega} + \sum_\omega \frac{\partial P_m}{\partial U_\omega} \Delta u_\omega;$$

$$\Delta Q_m = \sum_\omega \frac{\partial Q_m}{\partial s_{m\omega}} \Delta s_{m\omega} + \sum_\omega \frac{\partial Q_m}{\partial U_\omega} \Delta u_\omega; \tag{4}$$

$$\Delta F_k = \sum_\omega \frac{1}{c_{mj}} \Delta s_{mj} = 0,$$

где

$$s_{m\omega} = \sin(\psi_m - \psi_\omega); \quad \Delta s_{m\omega} = \sin(\psi_m - \psi_\omega)^{i+1} - \sin(\psi_m - \psi_\omega)^i;$$

k — индекс независимого контура схемы замещения системы. Число контуров, а следовательно, последних уравнений (4) равно числу ветвей схемы минус число узлов плюс единица, т. е.

$$k = b - y + 1 \tag{5}$$

(b, y — число ветвей и узлов схемы).

Целью статьи является изложение результатов исследований алгоритмов решения уравнений (1) и (4) методом Гаусса при использовании принципа Зейделя для случаев открытых (неэквивалентированных) схем и многополюсников (эквивалентированных схем).

Алгоритм решения уравнений (1) или (4) сводится к следующим процедурам:

а) по заданным P_m^*, Q_m^* и первым приближениям $U^{i=1}$, $s_\omega^{i=1}$ (или $s_{m\omega}^{i=1}$) вычисляются $\Delta P_m^{i=1}$, $\Delta Q_m^{i=1}$ и частные производные, входящие в уравнения;

б) решаются уравнения (1) относительно $\Delta s_\omega^{i=2}$, $\Delta u_\omega^{i=2}$ или уравнения (4) относительно $\Delta s_{m\omega}^{i=2}$, $\Delta u_\omega^{i=2}$;

в) по найденным $\Delta s^{i=2}$, $\Delta u^{i=2}$ и величинам $s^{i=1}$, $U^{i=1}$ определяются значения искомых переменных для второго шага итерации:

$$s_\omega^{i=2} = s_\omega^{i=1} + \Delta s_\omega^{i=2},$$

$$U_\omega^{i=2} = U_\omega^{i=1} + \Delta u_\omega^{i=2}, \tag{6}$$

$$s_{m\omega}^{i=2} = s_{m\omega}^{i=1} + \Delta s_{m\omega}^{i=2};$$

г) по полученным s и U вычисляются $\Delta P_m^{i=2}$, $\Delta Q_m^{i=2}$ и т. д.;

д) итерация завершается по достижению допустимых значений ΔP_m, ΔQ_m.

Задачами исследований являлись:

1. Установление возможности и порядка применения принципа Зейделя в процессе решения уравнений (1) и (4);

2. Установление возможности исключения из систем (1) и (4) отдельных слагаемых или группы слагаемых;

3. Обеспечение сходимости итерации при решении уравнений открытых и эквивалентных схем.

Введем следующие сокращенные формы записей:

$P'_s(s^i, U^i)$ — матрица частных производных $\frac{\partial P_m}{\partial s}$ и функции s^i и U^i, полученных в i-м шаге итерации;

$P'_u(s^i, U^i)$ — матрица частных производных $\frac{\partial P_m}{\partial U}$;

$Q'_u(s^i, U^i)$ — то же $\frac{\partial Q_m}{\partial U}$;

$Q'_s(s^i, U^i)$ — то же $\frac{\partial Q_m}{\partial s}$.

Для значений s и U в следующем шаге итерации используется верхний индекс $i+1$. Критериями завершения итерации служили достижения величин

$$\Delta P^i_m = 10^{-1}; \quad \Delta Q^i_m = 10^{-1}.$$

Принцип Зейделя был применен в нескольких вариантах решения уравнений (1) и (4).

Путем машинного эксперимента, выполненного на примере одной тестовой задачи — схемы замещения системы с 51 ветвью и 46 узлами—были получены следующие результаты.

Сходимость итерации с заданной точностью обеспечивается за 7 шагов в следующих четырех вариантах решения уравнений (4) методом Гаусса с использованием принципа Зейделя.

Вариант 1

$$\begin{aligned} P'_s(s^i, U^i)\Delta s^{i+1} &= \Delta P(s^i, U^i); \\ Q'_u(s^{i+1}, U^i)\Delta u^{i+1} &= \Delta Q(s^{i+1}, U^i). \end{aligned} \tag{7}$$

В этом варианте решается сначала система первых уравнений (1) или (4). По полученным Δs^{i+1} определяются s^{i+1}, которые затем используются при решении системы вторых уравнений (1) или (4). Третья строчка уравнений (4) решается совместно с первыми уравнениями. Из (7) видно, что в этом варианте решения пренебрегаются слагаемые $P'_u\Delta u$ и $Q'_s\Delta s$.

Вариант 3

$$\begin{aligned} P'_s(s^i, U^i)\Delta s^{i+1} &= \Delta P(s^i, U^i); \\ Q'_u(s^i, U^i)\Delta U^{i+1} &= \Delta Q(s^i, U^i) - Q'_s(s^i, U^i)\Delta s^{i+1}. \end{aligned} \tag{8}$$

В этом варианте, как и в 1-ом, сначала решаются уравнения группы ΔP, затем — группы ΔQ. Принцип Зейделя в этом варианте используется только при определении слагаемых $Q'_s(s^i, U^i)\Delta s^{i+1}$.

Вариант 9

$$
\begin{aligned}
&Q'_u(s^i, U^i)\,\Delta U^{i+1} = \Delta Q(s^i, U^i);\\
&P'_s(s^i, U^{i+1})\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i, U^{i+1}).
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Здесь принцип Зейделя используется в отношении вектора U, в отличие от 1-го варианта, в котором принцип Зейделя используется в отношении вектора S. Кроме того, в этом варианте пренебрегаются слагаемые $Q'_s\Delta s$ и $P'_u\Delta u$.

Вариант 14

$$
\begin{aligned}
&Q'_u(s^i, U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^i, U^i);\\
&P'_s(s^i, U^i)\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i, U^i) - P'_u(s^i, U^i)\,\Delta u^{i+1}.
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

В этом варианте принцип Зейделя используется в отношении вектора ΔU. Сходимость итерации с заданной точностью обеспечивается за 11 шагов в следующих вариантах решения уравнений (1) и (4).

Вариант 2

$$
\begin{aligned}
&P'_s(s^i, U^i)\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i, U^i);\\
&Q'_u(s^i, U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^i, U^i).
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Уравнения (11) отличаются от (7) тем, что в них не используется принцип Зейделя.

Вариант 5

$$
\begin{aligned}
&Q'_u(s^i, U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^i, U^i);\\
&P'_s(s^i, U^{i+1})\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i, U^{i+1}) - P'_u(s^i, U^{i+1})\,\Delta u^{i+1}.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

В уравнениях (12) используется принцип Зейделя в отношении вектора U. Пренебрегаются лишь слагаемые $Q'_s\Delta s$.

Вариант 15

$$
\begin{aligned}
&P'_s(s^i, U^i)\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i, U^i) - P'_u(s^i, U^i)\,\Delta u^i;\\
&Q'_u(s^{i+1}, U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^{i+1}, U^i).
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Здесь используется принцип Зейделя в отношении вектора s и пренебрегаются слагаемые $Q'_s\Delta s$.

Отметим варианты алгоритма, приводящие к расходимости итерации.

Вариант 7

$$
\begin{aligned}
&Q'_u(s^i, U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^i, U^i) - Q'_s(s^i, U^i)\,\Delta s^i;\\
&P'_s(s^i, U^{i+1})\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i, U^{i+1}) - P'_u(s^i, U^{i+1})\,\Delta u^{i+1}.
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Здесь принцип Зейделя используется в отношении вектора U. Слагаемые $Q'_u\Delta s$ и $P'_u\Delta u$ учитываются в расчетных уравнениях.

Вариант 16

$$P'_s(s^i,\ U^i)\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i,\ U^i) - P'_u(s^i,\ U^i)\,\Delta u^i;$$
$$Q'_u(s^{i+1},\ U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^{i+1},\ U^i) - Q'_s(s^{i+1},\ U^i)\,\Delta s^{i+1}. \qquad (15)$$

В приводимых ниже уравнениях варианта 18 сходимость итерации обеспечивается за 19 шагов.

$$P'_s(s^i,\ U^i)\,\Delta s^{i+1} = \Delta P(s^i,\ U^i) - P'_u(s^i,\ U^i)\,\Delta U^i;$$
$$Q'_u(s^i,\ U^i)\,\Delta u^{i+1} = \Delta Q(s^i,\ U^i) - Q'_s(s^i,\ U^i)\,\Delta s^{i+1}. \qquad (16)$$

В уравнениях (16) принцип Зейделя используется только в отношении вектора Δs.

Из всех исследованных 18 вариантов алгоритма для открытых схем наиболее эффективными оказались варианты: 1; 3; 9; 14,—представленные уравнениями (7) ÷ (10).

Были выполнены исследования тех же вариантов алгоритмов для эквивалентной схемы, полученной путем исключения сетевых узлов $n=46$ и доведенной до $n=28$ (общее число генераторных и нагрузочных узлов).

Наиболее эффективным в этом случае оказался вариант 1, представленный уравнениями (7).

Из сопоставления уравнений (1) и (4) видно, что уравнения (1) могут быть использованы для открытых и закрытых схем, а уравнения (4)—только для открытых схем.

Для обеспечения сходимости итерации при решении уравнений (1) рекомендуется применение методики поворота векторов комплексных напряжений всех узлов (включая узел баланса мощностей) после каждого шага итерации. Для этой цели используется формула:

$$s^{i+1,\Pi} = s^i_m c^i_{cp} - s^i_{cp} c^i_m, \qquad (17)$$

где

$$s^i_{cp} = \sin \psi^i_{cp}; \qquad \psi^i_{cp} = \frac{1}{2}(\psi^i_{max} + \psi^i_{min}); \qquad c = \sqrt{1-s^2};$$

i, $i+1$ — индексы шага итерации;

ψ^i_{max}, ψ^i_{min} — максимальное и минимальное значения фаз комплексных напряжений в i-м шаге итерации;

$i+1$, П — индекс величины s после поворота векторов;

m — индекс всех узлов схемы замещения системы.

Выводы

1. Взамен решения уравнений (1) и (4) рекомендуется решение уравнений (7) для эквивалентных схем и уравнений (7)÷(10) для открытых (неэквивалентных) схем.

2. В уравнениях (7)÷(10) используется принцип Зейделя в отношении векторов, соответственно, s; Δs; U; ΔU.

3. Для обеспечения сходимости итерации при решении уравнений эквивалентных схем рекомендуется процедура поворота векторов U по формуле (17).

АрмНИИЭ

Поступила 17.VI.1977

Հ. Տ. ԱԴՈՆՑ

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՌԵԺԻՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Հաստատուն ռեժիմների հավասարումները ներկայացվում են (1) և (4) տեսքով։

Այդ հավասարումների փոխարեն առաջարկվում է համարժեքացված սխեմաների համար լուծել (7) հավասարումը, իսկ բաց (ոչ համարժեքացված) սխեմաների համար՝ (7)÷(10) հավասարումները։ Դրանց լուծման համար օգտագործվում է Զեյդելի սկզբունքը s, Δs, U, ΔU-ի նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адонц Г.Т.* Метод расчета модулей и синусов разности фаз напряжений узлов схемы. Сборник «Исследование решения на ЦВМ уравнений установившегося режима электрических систем», АрмНИИЭ, 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX, № 5, 1977 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. ЗАДОЯН

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ О ПРИЖАТИИ СЛОЯ К ОСНОВАНИЮ ПРИ УЧЕТЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Приводится приложение вариационных методов теории ползучести и пластичности к плоской и осесимметричной задачам о прижатии сосредоточенной силой полосы из упруго-ползучего и пластически упрочняющегося материала к упруго-ползучему основанию. Контакт между слоем и основанием считается без сцепления с неизвестными и переменными во времени границами. Материал основания считается упруго-ползучим, подчиняющимся уравнениям наследственной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1]. Для слоя рассматриваются два случая: в первом—слой считается бетонным с двусторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями из линейно-упругих материалов, а во втором случае слой считается изготовленным из пластического материала со степенным законом упрочнения.

Вопросы контактных напряжений при ползучести и пластичности исследованы в работах [2—17] и др. В книгах [4, 12, 16] приведены библиография и анализ работ в области контактных напряжений при ползучести и пластичности.

В настоящей статье проявляется интерес преимущественно к прикладной стороне вопроса, а именно, к развитию приближенных методов расчета, в частности, приложению вариационных методов к решению контактных задач теории ползучести и пластичности. С целью изучения качественной стороны вопроса в работе принят параболический закон для прогиба слоя, хотя это приближение не позволяет полностью учитывать влияние изменения размеров контакта [18].

В монографии Ю. Н. Работнова [16] содержится развитие приближенных методов расчета, основанное на вариационных уравнениях для задачи об изгибе однородной балки на винклеровском основании с учетом наследственных свойств материалов. В монографии Т. Ш. Ширинкулова [12], наряду с герцовскими задачами, развита методика расчета бетонных плит на упруго-ползучем основании с использованием ортогональных полиномов. В статье Л. М. Гайтовой [17] дан вариационный метод расчета упруго-ползучей трехслойной плиты на упруго-ползучем винклеровском основании.

§ 1. Плоская задача

1°. Пусть слой шириной единица (балочная плита) и высотой h прижимается без сцепления сосредоточенной силой $P(t)$ к основанию, занимающему нижнюю полуплоскость (рис. 1). Материал основания (грунт, бетон и др.) обладает свойством наследственной ползучести [1]. Длину контакта, меняющуюся во времени, обозначим $2a(t)$, а реактивное давление $p(x,t)$.

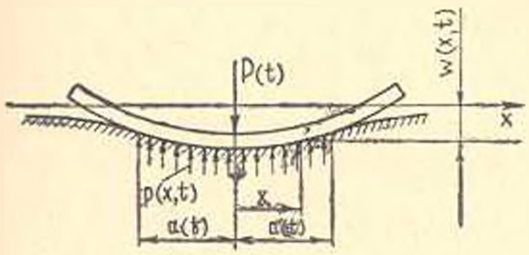

Рис. 1.

Перемещение основания в точках контакта определяется по формулам [10]:

$$w(x, t) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)} \left[\omega(x, t) + \int_{\tau_1}^{t} \omega(x, \tau) K_0(t, \tau)\, d\tau \right]; \qquad (1.1)$$

$$\omega(x, t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \ln \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi \qquad (1.2)$$

Здесь ν_0 и $E_0(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль мгновенной деформации основания;

$$K_0(t, \tau) = -E_0(t) \frac{\partial}{\partial\tau} \left\{ \frac{1}{E_0(\tau)} + \varphi_0(\tau) \left[1 - e^{-\gamma_0(t-\tau)}\right] \right\}; \qquad (1.3)$$

где $\varphi_0(\tau)$ — функция старения;

γ_0 — параметр, характеризующий ползучесть материала основания.

Для старого материала

$$\varphi_0(\tau) = C_0, \quad E_0(t) = E_0$$

и

$$K_0(t, \tau) = \lambda_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)}, \qquad \lambda_0 = \gamma_0 E_0 C_0. \qquad (1.4)$$

Реактивное давление из (1. 2) представится в виде [19]

$$p(x, t) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2(t) - x^2} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{a^2(t) - \xi^2}} \frac{d\omega(\xi, t)}{d\xi} \frac{d\xi}{\xi - x}. \qquad (1.5)$$

Имеем очевидное равенство

$$2\int\limits_0^{a(t)} p(\xi,\ t)\,d\xi = P(t). \tag{1.6}$$

Тогда, используя условие ограниченности напряжения на концах контакта, имеем

$$\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\partial w(\xi,\ t)}{\partial\xi}\,\frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2(t)-\xi^2}} = -\pi P(t). \tag{1.7}$$

Принимаем, что прогиб слоя (осадка основания) меняется по параболическому закону. Тогда можно положить

$$w(x,\ t) = v(t) - \psi(t)\,x^2, \tag{1.8}$$

где $v(t)$ и $\psi(t)$ — искомые функции времени.

Используя (1.8), из (1.5) и (1.7) находим

$$p(x,\ t) = \frac{2\psi(t)}{\pi}\sqrt{a^2(t)-x^2}, \tag{1.9}$$

где

$$\psi(t) = P(t)\,a^{-2}(t). \tag{1.10}$$

Вертикальное перемещение основания будет

$$w(x,\ t) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\,[v_*(t) - \psi_*(t)\,x^2], \tag{1.11}$$

где индексом * обозначен интегральный оператор Вольтерра

$$\psi_*(t) = \psi(t) + \int\limits_{\tau_1}^{t} \psi(\tau)\,K_0(t,\ \tau)\,d\tau. \tag{1.12}$$

Рассмотрим два вида слоя.

2°. Исследуем случай, когда слой изготовлен из бетона с симметричными тонкими усиливающими покрытиями. Толщина усиливающих слоев (Δ) по сравнению с толщиной бетонного слоя (h) считается малой.

Зависимость между изгибающим моментом и кривизной слоя имеет вид [20]

$$M(x,\ t) = B(t)\,\varkappa(x,\ t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} B_0(\tau)\,\varkappa(x,\ \tau)\,R(t,\ \tau)\,d\tau, \tag{1.13}$$

где

$$\varkappa(x, t) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad B(t) = B_0(t)\,\mu(t);$$

$$B_0(t) = \frac{E(t)\,h^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad \mu(t) = 1 + 6\,\frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2}\,\frac{E_1\Delta}{E(t)\,h}; \tag{1.14}$$

E_1 и ν_1 — модуль упругости и коэффициент Пауссона материала усиливающих слоев; $E(t)$ — модуль мгновенной деформации бетона:

$$R(t, \tau) = \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\varphi(\tau)\,E(\varphi) - \frac{N(\tau)}{E(\tau)}\int_{\tau}^{t} E(\xi)\exp\left[-\int_{\tau}^{\xi}\eta(z)\,dz\right]d\xi, \tag{1.15}$$

где

$$N(\tau) = \eta^2(\tau) - \gamma\eta(\tau) + \gamma\eta'(\tau); \qquad \eta(\tau) = \gamma\,[1 + \varphi(\tau)\,E(\tau)].$$

В случае старого бетона

$$\varphi(\tau) = C \quad \text{и} \quad E(t) = E,$$

тогда

$$R(t, \tau) = \lambda e^{-\eta(t-\tau)}; \qquad \lambda = \gamma EC; \qquad \eta = \gamma(1 + EC). \tag{1.16}$$

Напряжения в верхнем и нижнем покрытиях выражаются через кривизны соответственно формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1(x, t)\\ \sigma_2(x, t)\end{matrix}\right\} = \pm\frac{E_1 h}{2(1-\nu_1^2)}\,\varkappa(x, t). \tag{1.17}$$

Напряжение в бетонной части слоя определяется по формуле

$$\sigma(x, z, t) = \frac{E(t)\,z}{1-\nu^2}\,\varkappa(x, t) - \int_{\tau_0}^{t}\frac{E(\tau)\,z}{1-\nu^2}\,\varkappa(x, \tau)\,R(t, \tau)\,d\tau. \tag{1.18}$$

Согласно принципу возможных перемещений будем иметь

$$a\left[B\varkappa - \int_{\tau_1}^{t} B\varkappa R(t, \tau)\,d\tau\right]\delta\varkappa - \int_{0}^{a(t)} p(x, t)\,[\delta w(0, t) - \delta w(x, t)]\,dx = 0. \tag{1.19}$$

Здесь использовано равенство (1.6).

Подставляя (1.9) и (1.11) в (1.19) и производя выкладки, приходим к уравнению

$$\psi_*(t) - \int_{\tau_1}^{t}\psi_*(\tau)\,R_1(t, \tau)\,d\tau = \frac{P^{-\frac{1}{2}}(t)}{B_*(t)}\,\psi^{-\frac{1}{2}}(t), \tag{1.20}$$

где

$$R_1(t, \tau) = \frac{E_0(t)}{E_0(\tau)}\,\frac{E(\tau)}{E(t)}\,\frac{R(t, \tau)}{\mu(t)}; \qquad B_*(t) = \frac{64(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\,B(t). \tag{1.21}$$

Учитывая выражения (1.12), из (1.20), применяя формулу о преобразовании двойного интеграла, приходим к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\psi(t)+\int_{\tau_1}^{t}\psi(\tau)K_*(t,\tau)\,d\tau=\frac{P^{1/3}(t)}{B_*(t)}\,\psi^{-1/3}(t), \tag{1.22}$$

где

$$K_*(t,\tau)=K_0(t,\tau)-R_1(t,\tau)-\int_{\tau}^{t}K_0(\xi,\tau)R_1(t,\xi)\,d\xi. \tag{1.23}$$

Для старых материалов

$$K_*(t,\tau)=Ae^{-\eta(t-\tau)}+A_0e^{-\gamma_0(t-\tau)}, \tag{1.24}$$

где

$$A=\frac{\lambda(\gamma_0-\eta)}{\mu(\eta-\gamma_0)};\qquad A_0=\gamma_0\left[1-\frac{\lambda}{\mu(\eta-\gamma_0)}\right].$$

Для постоянной силы, вводя обозначения:

$$a(t)=a_0f(t);\qquad a_0=h\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}\,\frac{1-\nu_0^2}{1-\nu^2}\,\frac{E}{E_0}\,\mu} \tag{1.25}$$

и исключая $\psi(t)$ при помощи соотношения (1.10), приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$f^{-2}(t)+\int_{\tau_1}^{t}f^{-2}(\tau)K_*(t,\tau)\,d\tau=f(t). \tag{1.26}$$

Отсюда имеем $f(\tau_1)=1$. Предельным переходом при $t\to\infty$ из (1.26) находим

$$f_*=\sqrt[3]{1+\frac{A}{\eta}+\frac{A_0}{\gamma_0}}. \tag{1.27}$$

Здесь и далее через f_* и a_* обозначены их значения при $t\to\infty$.

Уравнение (1.26) приводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f(2+f^3)f''=6f'^2-bf'-m, \tag{1.28}$$

где

$$\begin{aligned} b&=f\,[2(\gamma_0+\eta+A+A_0)+(\gamma_0+\eta)f^3];\\ m&=f^2(\gamma_0\eta+\eta A_0+\gamma_0A-\gamma_0\eta f^3). \end{aligned} \tag{1.29}$$

При помощи подстановки

$$t - \tau_1 = \int_1^f X(x)\,dx \tag{1.30}$$

уравнение (1.28) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$f(2 + f^3)X' + mX^2 - bX + 6 = 0 \tag{1.31}$$

с начальным условием

$$X(1) = 3(\gamma_0 + A + A_0)^{-1}. \tag{1.32}$$

При помощи (1.30)—(1.31) легко получить численное решение задачи.

При одинаковых реологических свойствах слоя и основания $A=0$, и интегральное уравнение (1.26) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$(2 + f^3)f' = (\gamma_0 + A_0 - \gamma_0 f^3)f, \tag{1.33}$$

решение которого при условии $f(\tau_1) = 1$ будет

$$t - \tau_1 = -\frac{1}{\gamma_0}\ln\left\{f\left[\frac{f_*^3 - f^3}{f^3(f_*^3 - 1)}\right]^{\frac{2}{3f_*^3}+\frac{1}{3}}\right\}, \tag{1.34}$$

где

$$f_* = \sqrt[3]{1 + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)EC}.$$

В случае чисто-упругого основания $A_0=0$, $A=-\lambda/\mu$, и приходим к решению (1.34), причем в этом решении нужно принять

$$f_* = \sqrt[3]{1 - \frac{EC}{(1 + EC)\mu}}. \tag{1.35}$$

По формуле (1.34) построены графики $\frac{a(t)}{a_0}$ для рассмотренных двух случаев, которые приведены на рис. 2. Численные значения параметров здесь и далее следующие: $E_0 = 2\cdot10^5$ $кГ/см^2$, $C_0 = 0{,}9\cdot10^{-4}$ $см^2/кГ$, $\gamma_0 = 0{,}026\ \frac{1}{день}$, $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{20}$.

Анализ полученных формул показывает, что при одинаковых свойствах ползучести основания и слоя длина контакта при постоянной силе в течение времени возрастает, а при отсутствии свойства ползучести основания—уменьшается.

3°. Предположим, что слой изготовлен из пластического материла со степенным законом упрочнения. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной балки принимаем в виде

$$M = D\kappa^{\frac{1}{n}}, \qquad D = \frac{D_0 h^{2+\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}, \tag{1.36}$$

D_0 — параметр, характеризующий материал, $n > 1$.

Вариационное уравнение задачи будет

$$aD\kappa^{\frac{1}{n}}\delta\kappa - \int_0^{a(t)} p(x, t)\,[\delta w(0, t) - \delta w(x, t)]\,dx = 0. \tag{1.37}$$

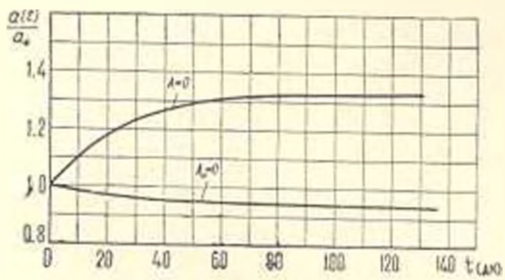

Рис. 2.

Подставляя (1.9) и (1.11) в (1.37) и делая необходимые выкладки, получим

$$\varphi(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varphi(\tau) K_0(t, \tau)\,d\tau = \frac{P^{\frac{3n}{2}}(t)}{D_*(t)}\,\varphi^{-\frac{n}{2}}(t), \tag{1.38}$$

где

$$D_*(t) = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\left(\frac{16nD_0}{2n+1}\right)^n h^{2n+1}. \tag{1.39}$$

Для постоянной силы и старого материала, исключая $\varphi(t)$, из (1.38) приходим к интегральному уравнению

$$f^{-2}(t) + \int_{\tau_1}^{t} f^{-2}(\tau) K_0(t, \tau)\,d\tau = f^n(t), \tag{1.40}$$

причем $f(t) = a(t)/a_0$, где

$$a_0 = h\left[\frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}\right]^{\frac{1}{n+2}}\left(\frac{16nD_0}{2n+1}\right)^{\frac{n}{n+2}}\left(\frac{h}{P}\right)^{\frac{n-1}{n+2}}. \tag{1.41}$$

Предельным переходом из (1.40) находим

$$f_* = (1 + E_0 C_0)^{\frac{1}{n+2}}. \tag{1.42}$$

Уравнение (1.40) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$(2 + nf^{n+2})f' = \gamma f - \gamma_0 f^{n+2}, \tag{1.43}$$

решение которого будет

$$t - \tau_1 = \frac{1}{\gamma_0} \ln \left[f^2 \left(\frac{f_*^n - 1}{f_*^n - f^n} \right)^{\frac{f_*^n + 1}{2}} \right]. \tag{1.44}$$

На рис. 3 приведены графики функции $a(t)/a_0$ для различных значений n и параметров п·2°.

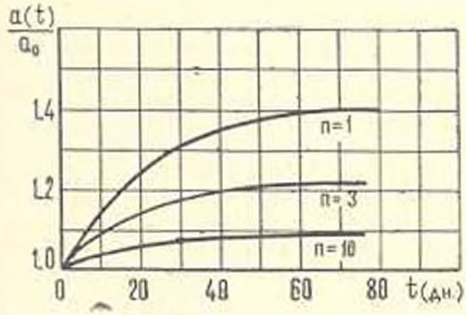

Рис. 3.

Можно поставить обратную задачу: определить закон изменения во времени $P(t)$ при условии $a(t) = \text{const}$. Тогда для старого материала, исключая из (1.38) $\psi(t)$, приходим к уравнению

$$q(t) + \int_{\tau_1}^{t} q(\tau) K_0(t, \tau) d\tau = q^n(t), \tag{1.45}$$

причем $q(t) = P(t)/P(\tau_1)$. Предельным переходом при $t \to \infty$ из (1.45) находим

$$q_* = (1 + E_0 C_0)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.46}$$

Интегральное уравнение (1.45) приводится к дифференциальному уравнению

$$(1 - nq^{n-1}) q' = \gamma_0 q^n - \gamma_0 q, \tag{1.47}$$

решение которого при начальном условии $q(\tau_1) = 1$ имеет вид

$$t-\tau_1=-\frac{1}{\gamma_0}\ln\left[q\left(\frac{q_*^{n-1}-q^{n-1}}{q_*^{n-1}-1}\right)^{\frac{nq_*^{n-1}-1}{n-1}}\right]. \qquad (1.48)$$

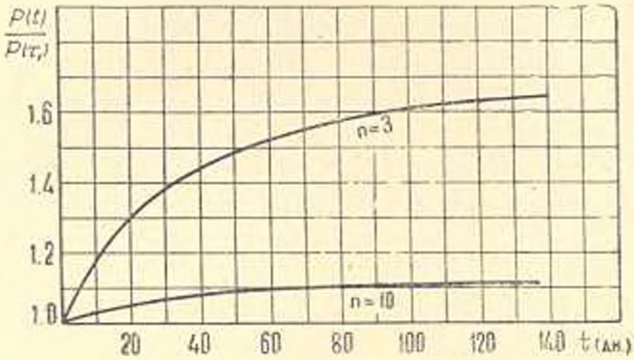

Рис. 4.

Таким образом, если внешняя сила возрастает во времени по закону (1.48), то длина контакта остается постоянной $a(t)=a_0$ (рис. 4).

§ 2. Осесимметричная задача

1°. Пусть тонкая круглая плита прижимается сосредоточенной, приложенной в центре плиты, силой $P(t)$ к основанию, занимающему нижнее полупространство (рис. 5). Контакт между слоем и основанием считаем без сцепления с радиусом круговой области контакте $a(t)$.

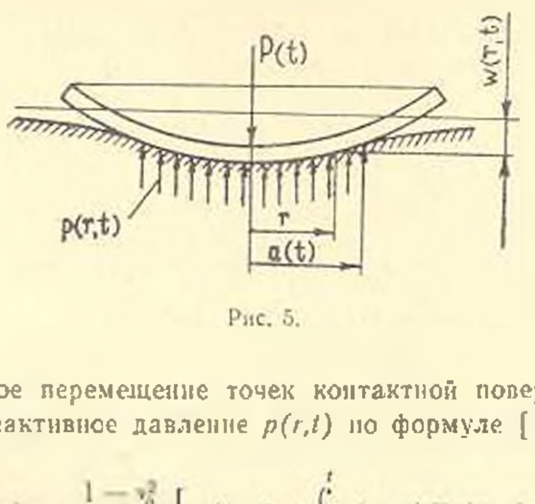

Рис. 5.

Вертикальное перемещение точек контактной поверхности выражается через реактивное давление $p(r,t)$ по формуле [10]

$$w(r,t)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0(t)}\left[\omega(r,t)+\int_{\tau_1}^{t}\omega(r,\tau)K_0(t,\tau)d\tau\right]. \qquad (2.1)$$

$$w(r, t) = \iint\limits_{\Omega} \frac{p(\xi, t)\,\xi d\xi d\theta}{\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta}}, \qquad 0 < r < a(t) \tag{2.2}$$

где Ω—область контакта.

Реактивное давление можно представить в виде [19]

$$p(r, t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_r^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\frac{\partial F(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi, \tag{2.2}$$

$$F(r, t) = \frac{2}{\pi}\left[w(0, t) + r\int\limits_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}\frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi\right]. \tag{2.3}$$

Реактивное давление удовлетворяет условию

$$2\pi\int\limits_0^{a(t)} p(r, t)\, r dr = P(t). \tag{2.4}$$

Учитывая ограниченность напряжения на границе контактной области, будем иметь:

$$F[a(t), t] = 0; \qquad \int\limits_0^{a(t)} F(\xi, t)\, d\xi = P(t). \tag{2.5}$$

Вводим предположение, что прогиб плиты меняется по параболическому закону. Тогда можно принять

$$w(r, t) = v(t) - \psi(t) r^2, \tag{2.6}$$

где $v(t)$ и $\psi(t)$ — искомые функции времени.

Из (2.3) и (2.5) получим

$$F(r, t) = \frac{2}{\pi}\left[v(t) - 2\psi(t) r^2\right]. \tag{2.7}$$

Далее, подставляя (2.7) в (2.2) и производя необходимые выкладки, получим

$$p(r, t) = \frac{4}{\pi}\psi(t)\sqrt{a^2(t) - r^2}. \tag{2.8}$$

Используя условия (2.5), находим:

$$v(t) = \frac{3\pi}{4}\frac{P(t)}{a(t)}; \qquad \psi(t) = \frac{3\pi}{8}\frac{P(t)}{a^3(t)}. \tag{2.9}$$

Выражение прогиба плиты будет

$$w(r, t) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0(t)}\left[v_0(t) - \psi_0(t) r^2\right]. \tag{2.10}$$

причем индекс *, как и в предыдущем параграфе, означает оператор Вольтерра (1.12).

2°. Рассмотрим случай, когда плита трехслойная с симметричными тонкими усиливающими покрытиями. Материал покрытия считаем линейно-упругим, средний слой — бетон, подчиняющийся соотношениям теории ползучести Маслова-Арутюняна [1].

Из условий статики элемента плиты и соотношения между напряжениями и деформациями следуют зависимости между компонентами изгибающих моментов и кривизн средней поверхности плиты

$$M_r = B\varkappa_r + B_1\varkappa_\theta - \int_{\tau_1}^{t} B_0 (\varkappa_r + \nu\varkappa_\theta) R(t, \tau) d\tau, \tag{2.11}$$

где

$$\varkappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \qquad \varkappa_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}; \qquad B_1 = \nu B_0 + \nu_1 \frac{E_1 \Delta h^2}{2(1-\nu_1^2)}; \tag{2.12}$$

а B и B_0 определяются по формулам (1.14).

Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$a^2 (M_r \delta\varkappa_r + M_\theta \delta\varkappa_\theta) - 2\int_0^{a(t)} p(r, t) [\delta w(0, t) - \delta w(r, t)] r dr = 0. \tag{2.13}$$

Здесь использовано равенство (2.4). Используя выражения прогиба (2.10), реактивного давления (2.8) и соотношения (2.11), из (2.13) приходим к уравнению

$$\varphi_*(t) - \int_{\tau_1}^{t} \varphi_*(\tau) R_1(t, \tau) d\tau = \frac{P(t)}{Q(t)}, \tag{2.14}$$

где

$$R_1(t, \tau) = \frac{E_0(t)}{E_0(\tau)} \frac{E(\tau)}{E(t)} \frac{R(t, \tau)}{\mu_1(t)}; \qquad \mu_1(t) = 1 + 6\frac{1-\nu}{1-\nu_1}\frac{E_1\Delta}{E(t) h};$$

$$Q(t) = \frac{5}{3}\frac{1-\nu_0^2}{1-\nu}\frac{E(t)}{E_0(t)} \mu_1(t) h^3. \tag{2.15}$$

Применяя формулу Дирихле о преобразовании двойного интеграла и исключая $\psi(t)$ из (2.14), получим интегральное уравнение

$$P(t) a^{-3}(t) + \int_{\tau_1}^{t} P(\tau) a^{-3}(\tau) K_*(t, \tau) d\tau = \frac{P(t)}{Q_*(t)}, \tag{2.16}$$

где

$$Q_*(t) = \frac{3\pi}{8} Q(t);$$

$$K_*(t, \tau) = K_0(t, \tau) - R_1(t, \tau) - \int_{\tau_1}^{t} K_0(\xi, \tau) R_1(t, \xi) d\xi. \tag{2.17}$$

Для старых материалов $K_*(t, \tau)$ имеет вид (1.21), но в выражениях A и A_0 следует μ заменить через μ_1. Вводим оообозначение

$$a(t) = a_0 \sqrt[3]{f(t)},$$

где

$$a_0 = h \sqrt[3]{\frac{5\pi}{8} \frac{1-\nu_0^2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_0} \tau_1} \tag{2.18}$$

—начальный радиус контактной области.

Если через a_0' обозначить значение этой величины, полученное Р. А. Вейцманом [21] точным методом для однородных упругих материалов плиты и основания, то при $\mu_1 = 1$ будем иметь

$$\frac{a_0}{a_0'} \approx 0{,}78 \sqrt[3]{1+\nu} \tag{2.19}$$

что при $\nu = 0{,}4$ дает значение $a_0/a_0' \approx 0{,}88$.

Далее, принимая $P(t) = \mathrm{const}$, из (2.16) приходим к линейному интегральному уравнению

$$f(t) + \int_{\tau_1}^{t} f(\tau) K_*(t, \tau) d\tau = 1, \tag{2.20}$$

которое приводится к дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$f'' + s_1 f' + s_2 f = \gamma_0 \gamma_1, \tag{2.21}$$

где

$$s_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + A_0 + A; \qquad s_2 = \gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1 A_0 + \gamma_0 A,$$

с начальными условиями:

$$f(\tau_1) = 1; \qquad f'(\tau_1) = -A_0 - A. \tag{2.22}$$

Если положить $s_1^2 - 4s_2 > 0$ и ввести обозначения

$$\alpha = \frac{s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}{2}; \qquad \beta = \frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}{2}, \tag{2.23}$$

решение уравнения (2.21) при начальных условиях (2.22) будет

$$f(t) = \frac{\gamma_0\gamma_1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(A_0 + A - \beta + \frac{\gamma_0\gamma_1}{\alpha}\right)e^{-\alpha(t-\tau_0)} - \right.$$

$$\left. - \left(A_0 + A - \alpha + \frac{\gamma_0\gamma_1}{\beta}\right)e^{-\beta(t-\tau_0)}\right]. \tag{2.24}$$

При $t \to \infty$ получаем

$$a_* = a_0 \sqrt[3]{1 + \frac{A}{\gamma_1} + \frac{A_0}{\gamma_0}}. \tag{2.25}$$

Отсюда легко заметить, что при одинаковых реологических свойствах основания и бетонного слоя плиты ($A=0$) радиус контактной области возрастает во времени, а в случае отсутствия у материала основания свойств ползучести ($A_0=0$, $A=-\lambda/\mu$) радиус этой области уменьшается во времени.

3°. Пусть круглая тонкая плита изготовлена из пластического материала со степенным законом упрочнения. Между интенсивностями изгибающих моментов и кривизн принимаем зависимость

$$M_0 = D\varkappa_0^{\frac{1}{n}}, \tag{2.26}$$

где

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2}; \qquad \varkappa_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\varkappa_r^2 + \varkappa_r\varkappa_\theta + \varkappa_\theta^2}.$$

Вариационное уравнение рассматриваемой задачи будет

$$a^2 D\varkappa_0^{\frac{1}{n}}\delta\varkappa_0 - 2\int_0^{a(t)} p(r, t)\left[\delta w(0, t) - \delta w(r, t)\right] r dr = 0. \tag{2.27}$$

Используя выражения прогиба плиты (2.10) и реактивного давления (2.8), из (2.27) получаем

$$\varphi(t) + \int_{\tau_0}^{t} \varphi(\tau) K_0(t, \tau)\, d\tau = \frac{P^n(t)}{H(t)}, \tag{2.28}$$

где

$$H(t) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\left(\frac{5\pi n D_0}{2n+1}\right)^n h^{2n+1}. \tag{2.29}$$

Исключая $\varphi(t)$ при помощи (2.9) и обозначая $H_*(t) = \frac{3\pi}{8}H(t)$, из (2.28) приходим к уравнению

$$P(t)\, a^{-3}(t) + \int_{\tau_0}^{t} P(\tau)\, a^{-3}(\tau) K_0(t, \tau)\, d\tau = \frac{P^n(t)}{H_*(t)}. \tag{2.30}$$

Для старого материала основания и постоянной силы, обозначая

$$a(t) = a_0 / \sqrt[3]{f(t)},$$

где

$$a_0 = h \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{1-\nu_1^2}{E_0(t)}} \left(\frac{5-nD_0}{2n+1}\right)^{\frac{n}{3}} \left(\frac{h^2}{P}\right)^{\frac{n-1}{3}}, \tag{2.31}$$

получим интегральное уравнение

$$f(t) + \int_{\tau_1}^{t} f(\tau) K_0(t, \tau)\, d\tau = 1, \tag{2.32}$$

решение которого будет

$$f(t) = \frac{1}{1+E_0C_0}\left[1 + E_0C_0 e^{-\gamma(1+E_0C_0)(t-\tau_1)}\right]. \tag{2.33}$$

Предельное значение радиуса области контакта при $t = \infty$ будет

$$a_* = a_0 \sqrt[3]{1+E_0C_0}. \tag{2.34}$$

На рис. 6 показан график функции $a(t)/a_0$ построенный по формуле (2.33) при прежних значениях параметров.

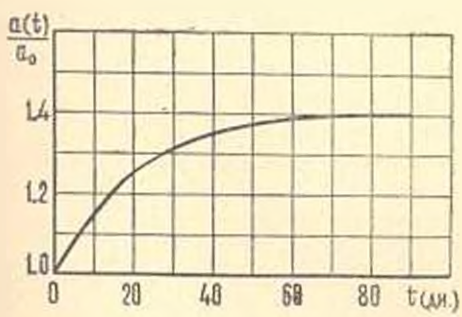

Рис. 6.

Обратная задача здесь не отличается от задачи, рассмотренной в плоском случае. Действительно, для старого бетона, принимая в (2.30) $a(t) = \text{const}$ и исключая H_*, для искомого закона изменения $q(t) = P(t)/P(\tau_1)$ приходим к тому же уравнению (1.45).

Институт механики
АН АрмССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՀԻՄՆԱՏԱԿԻՆ ՍԵՂՄՎԱԾ ՇԵՐՏԻ ՄԻ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌԱԾ ՆՅՈՒԹԻ ՌԵՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է սողքի և պլաստիկության տեսության վարիացիոն մեթոդների կիրառումը առաձգա-սողուն ու պլաստիկորեն ամրացող նյութից շերտը կենտրոնացված ուժով առաձգա-մածուցիկ հիմնատակին սեղմելիս հարթ և առանցքասիմետրիկ խնդիրները լուծելու համար։ Շերտի և հիմնատակի կոնտակտը ընդունվում է առանց շաղկապման՝ անհայտ ու ժամանակի ընթացքում փոփոխական սահմաններով։ Հիմնատակի նյութը ընդունվում է առաձգա-սողուն, որը ենթարկվում է սողքի ժառանգական տեսության Մասլով-Հարությունյանի հավասարումներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О температурных напряжениях в прямоугольных блоках. Изв. АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, т. 8, № 4, 1955.
3. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, в. 5, 1959.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкции. «Наука», М., 1966.
5. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. «Наука», М., 1977.
6. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 2, 1959.
7. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. «Мир», т. 2, М., 1969.
8. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. Стройиздат, М., 1968.
9. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Высшая школа, М., 1969.
10. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, в. 6, 1956.
11. *Розовский М. И.* О влиянии реологических свойств основания и лежащих на нем полосы и круглой плиты на показатели их гибкости. Сб. «Реологические вопросы механики горных пород», изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1964.
12. *Ширинкулов Т. Ш.* Методы расчета конструкции на сплошном основании с учетом ползучести. Изд-во «ФАН», УзбССР, Ташкент, 1969.
13. *Какосимиди Н. Ф.* Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. 13, № 6, 1960.
14. *Lee E. H., Radok J. R. M.* The contact problem for visco-elastic bodies. J. Appl. Mech. № 3, v. 27, 1960.
15. *Задоян М. А.* Термонапряженное состояние бетонных блоков с учетом ползучести материала. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 10, № 5, 1957.
16. Развитие теории контактных задач в СССР. АН СССР, инст. пробл. механики, «Наука», М., 1976.
17. *Гойтова Л. М.* Расчет на изгиб упруго-ползучей железобетонной плиты на упруго-ползучем основании. Изв. АН АрмССР, серия техн. наук, т. 29, № 1, 1976.

18. *Белоконь А. В., Ворович И. И.* Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления. Изв. АН СССР, МТТ, № 6, 1973.
19. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гоcиздат, М., 1949
20. *Задоян М. А.* О применении вариационных методов теории ползучести при расчете статически-неопределимых железобетонных конструкций. Изв. АН АрмССР, серия техн. наук, т. 27, № 1, 1974.
21. *Вейцман Р. А.* О контакте без сцепления между пластинок и упругим полупространством. Прикладная механика (перевод с английского) (Trans. ASME), серия Е, т. 36, № 2, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX. № 5, 1977 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

С. А. АНАНЯН, А. К. АНАНЯН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАПАСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ИХ КАЧЕСТВА ПОД ВЛИЯНИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В статье излагаются гидродинамические основы определения эксплуатационных запасов подземных вод и способов их рационального использования для различных нужд. Излагается также методика прогноза изменения качества подземных вод под влиянием поверхностных загрязняющих источников. К этим задачам можно отнести также гидродинамические методы расчета пополнения подземных вод в межгорных впадинах.

Перечисленные выше задачи решаются применительно к межгорным впадинам на примере Араратской равнины.

Араратская равнина в геологическом и гидрогеологическом отношениях является сравнительно хорошо изученной межгорной впадиной, которая в сельскохозяйственном отношении имеет большое значение. Этим и объясняется, что Арартская равнина исследовалась и исследуется многими организациями и специалистами, результаты этих исследований опубликованы [1, 2] или оформлены в виде отчетов, которыми мы широко пользовались при решении перечисленных выше задач. Учитывая это обстоятельство, в статье геологические и гидрогеологические вопросы освещаются мало, несмотря на то, что эти характеристики являются основой всех наших исследований.

Араратская равнина представляет собой горный артезианский бассейн и служит естественным резервуаром подземных вод, поступающих с обрамляющих ее гор. В результате тектонических процессов по всей ширине поймы р. Аракс образовался порог у горы Дагна, который подобно плотине преграждает сток за ее пределами. Подземные воды Араратской равнины формируются, в основном, в предгорной и нагорной частях бассейна и среднего течения р. Аракс. Глубинные воды транспортируются на равнину преимущественно по древней погребенной речной сети и геоструктурным понижениям, заполненным лавовыми породами. Подземное водохранилище Араратской равнины заполнено напорными и грунтовыми водами, которые, не имея свободного оттока за пределы этого водохранилища, почти полностью разгружаются в него.

Циркуляция подземных вод происходит, в основном, по базальтам, андезито-базальтам и другим лавовым и валуно-галечниковым породам, залегающим в нижних горизонтах четвертичного комплекса.

Поверху лавовых пород залегает рыхлообломочный комплекс с мощными глинистыми пластами, которые создают условия для образования напора подземных вод в толще четвертичного комплекса. На периферийных частях равнины, где мощность озерно-речного комплекса уменьшается и залегают грубообломочные грунты, наблюдается выход мощных родников. Подземные воды над озерными глинами образуют второй водоносный слой, который характеризуется весьма пестрым литологическим составом и невыдержанным направлением. Подземные воды первого и второго водоносных слоев гидравлически связаны. Перемешивание возможно через многочисленные забои вертикальных скважин, и, кроме того, свободная связь между водоносными слоями существует в периферийных зонах озерных глин. Верхний покровный слой Араратской равнины представлен, в основном, аллювиальными суглинистыми отложениями. Грунтовые воды залегают на глубине 0,5—3,0 *м* от поверхности земли. Напорные воды подземного слоя постоянно подпитывают грунтовые воды.

Из сказанного видно, что в гидрогеологическом отношении Араратская равнина представляет собой сложную систему гидравлически связанных между собой слоев: верхний покровный слой с напорным питанием грунтовых вод, нижний слабонапорный водоносный слой, отделенный от артезианского водоносного слоя озерными глинами. Гидрогеологическая особенность Араратской равнины заключается еще в том, что все поверхностные водоисточники, которые образовались на территории равнины и прилегающих к ней районов, гидравлически связаны с указанными выше водоносными слоями, что необходимо учитывать при расчетах эксплуатационных запасов. При расчете гидродинамическим методом эксплуатационных запасов подземных вод и при разработке способов их эксплуатации необходимо не только точно схематизировать сложные гидрогеологические условия местности, но и одновременно необходимо отъем воды произвести по режимам потребителей (орошения, водоснабжения и т. д.), не нарушая при этом естественных режимов родников и других водоисточников.

Сложность задачи заключается еще и в том, что при отъемах воды из подземного водохранилища нельзя допускать перемешивания сильно минерализованных вод покровного слоя на засоленных участках почвы с нижележащими водоносными слоями.

Принципы схематизации гидрогеологических условий местности, установления граничных и начальных условий, выбор типа водозаборных сооружений и рациональной схемы их размещения для создания математической модели Араратской равнины нами опубликованы в работах [3÷4]. Поэтому на этом мы не останавливаемся и переходим к математической формулировке задачи.

Для описания фильтрационных процессов в трех, между собой гидравлически связанных, водоносных слоях, будем пользоваться дифференциальными уравнениями фильтрации. Эти уравнения для нашей задачи можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{h}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+k_0\frac{H-h}{h-T}\pm q=\mu_0\frac{\partial h}{\partial t}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1m_1\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1m_1\frac{\partial H_1}{\partial y}\right)-k_0\frac{H-h}{h-T}+$$

$$+k_3\frac{H_1-H_2}{m_2}=\mu_1\frac{\partial H}{\partial t}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2m_2\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2m_2\frac{\partial H_2}{\partial y}\right)-k_3\frac{H_1-H_2}{m_3}=\mu_2\frac{\partial H_2}{\partial t}; \qquad (3)$$

$$T=m_1+m_2+m_3, \qquad (4)$$

где x, y — координаты точки; плоскость xOy совмещена с плоскостью водоупора; t — время; h — высота залегания уровня грунтовых вод в первом водоносном слое, считая от координатной плоскости; H_1 и H_2 — пьезометрические напоры в соответствующих водоносных слоях; k_0, k_1, k_2 — коэффициенты фильтрации соответствующих водоносных слоев; q — скорость инфильтрации или испарения в покровном слое; μ_0, μ_1 и μ_2 — коэффициенты водоотдачи и упругоемкости соответствующих водоносных слоев; m_1, m_2 и m_3 — мощности соответствующих водоносных слоев.

Начальные условия для уравнения (1) определяются высотой стояния уровня грунтовых вод, которые задаются в виде карты гидроизогипс. Начальные условия для напорных водоносных слоев (2) — (3) задаются в виде гидроизонез (линия одинаковых напоров). Граничные условия для дифференциальных уравнений (1)—(3) определяются гидрогеологическими условиями местности (на основании геологической и геофизической разведки).

В условиях Араратской равнины в зависимости от гидрогеологических условий приняты граничные условия перво о, второго и третьего рядов. Граничные условия первого ряда приняты на тех участках контура области фильтрации, где наблюдается поступление воды (при постоянном напоре) из области формирования в подземное водохранилище Араратской равнины, а также на местах выхода родников или других водоисточников, включая реки и водоемы, которые гидравлически связаны с водоносными слоями. Граничные условия второго ряда приняты на тех участках контура области фильтрации, где практически не наблюдается поступление воды из области формирования в Араратскую равнину (безводные участки). Граничные условия третьего ряда приняты на участках конуса выноса речных долин.

Дифференциальные уравнения (1) — (3) нами решаются конечно-разностным методом с переменными коэффициентами на трех универсальных сеточных моделях (УСМ-1), работающих в параллельном режиме с цифровой машиной Наири-2. Принципиальная электрическая блок-схема расчета приведена в [3,5]. Сопротивления R_x, R_y, R_z блок-схемы определяются из аналогии, которая существует между уравчениями фильтрации и Кирхгофа для электрического поля. Правые части (нестационарные члены) дифференциальных уравнений (1)—(3) моделируются временным сопротивлением R_t по методу Либмана [6].

После каждого шага по времени значение потенциала на свободных концах временных сопротивлений задается из карты гидропьезоизогипс, которая получена по расчету в предыдущих моментах времени. Инфильтрационные процессы в верхнем покровном слое и расходы водозаборных сооружений моделируются силой тока по аналогии, существующей между фильтрацией и силой тока по законам Ома и Дарси. Более подробное описание методики решения дифференциальных уравнений фильтрации в двухслойной фильтрирующей среде приведено в [3].

В результате решения дифференциальных уравнений (1) — (3) получаем значения напоров после каждого шага по времени в соответствующих точках области фильтрации.

По полученным картам гидроизогипс нетрудно определить эксплуатационные запасы подземных вод и скорости фильтрации.

Эксплуатационные запасы подземных вод по известным значениям напоров, полученным при определенной схеме расположения скважин и определенном режиме их работы, оцениваются следующим образом.

Задается высота стояния уровня грунтовых вод, т. е. глубина осушения, считая от поверхности почвы, выше которой их подъем не допускается. Например, на рассоленных землях Араратской равнины эта высота принята равной 3 *м*, исходя из условия недопущения вторичных процессов засоления. Естественная высота стояния уровня грунтовых вод в условиях Араратской равнины в среднем достигает 2 *м*.

Уровень грунтовых вод снижается при откачках и наоборот—повышается (восстанавливается) при их частичном или полном прекращении. Закономерность снижения и повышения уровня грунтовых вод определяется по картам гидроизогипс для каждого периода времени в отдельности. Небольшая высота снижения уровня грунтовых вод (или продолжительность откачки) определяется высотой, при которой по прекращению откачки начинается подъем уровня грунтовых вод, и в течение определенного времени их уровень достигает начальной глубины осушения. Разумеется, суммарное время откачки и восстановления должны равняться годовому периоду времени. Только при этих условиях процесс сработки и наполнения определенной емкости подземного резервуара из года в год может происходить по периодическому закону (т. е. не произойдет истощения запасов подземных вод).

Из сказанного видно, что эксплуатационные запасы подземных вод определяются объемом воды, который после частичного или полного прекращения работы скважин поступает из области формирования в область отъема в течение времени, необходимого для подъема уровня воды до отметки осушения.

Условия непрерывного поступления подземных вод из области формирования в область отбора математически сформулированы в граничных и начальных условиях задачи.

На рис. 1. приведены результаты расчетов, выполненные по описанному выше методу на площади 17 тыс. га Октемберянского района, при работе 250 скважин по определенному режиму и определенной схеме их расположения; на рис. 1 ступенчатым графиком показан режим отбора (расход, время и число одновременно работающих скважин).

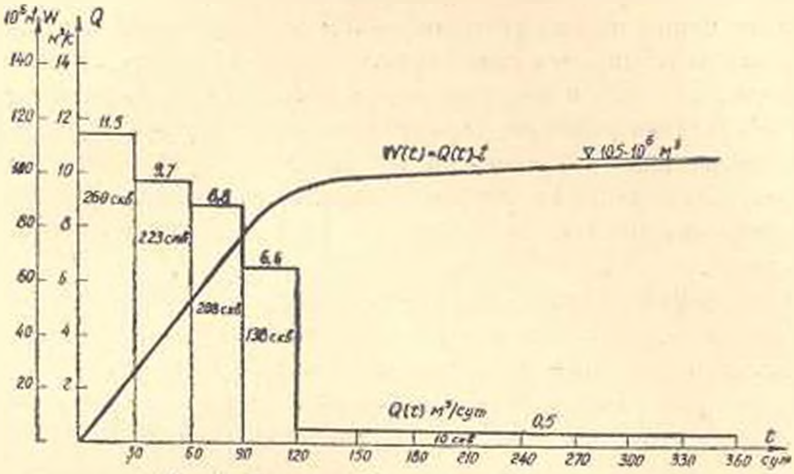

Рис. 1. Подземный сток и график откачки.

Непрерывной кривой показан сток подземных вод. Из кривой стока видно, что эксплуатационный запас подземных вод на площади 17 тыс. га равняется 105 мл. $м^3$ в год. Этот объем является дополнительным источником воды для орошения.

По изложенному методу можно разрешить и другие задачи. Например, задаваясь различными схемами и режимами работы скважин, можно определить более экономичные варианты водозаборных сооружений.

При помощи дифференциальных уравнений (1) — (3) методом математического моделирования можно разрешить также вопросы динамики подземных вод при пополнении динамических запасов. В зависимости от принятой схемы пополнения нетрудно математически сформулировать начальные и граничные условия решения дифференциальных уравнений (1) — (3).

Вторая задача, которая связана с проблемой сохранения качества или защиты подземных вод от загрязнения поверхностными источниками, в настоящее время приобретает большое практическое значение. В частности, будем рассматривать задачу изменения минерализации подземных вод в различных водоносных слоях при капитальных промывках засоленных земель в покровном слое.

Как известно, капитальные промывки засоленных земель обычно производятся оросительной водой. Эта вода, просачиваясь в толщу почвогрунта из отдельных чеков*, по пути движения растворяет соли. Раст-

* Чеки—это небольшие обвалованные участки поля, которые при орошении наполняются водой (глубиной от 20 до 30 *см*) в течение всего процесса промывки.

воренные соли при инфильтрационных процессах перемешиваются с нижними водоносными слоями, а затем дренажными устройствами перехватываются и подаются на поверхность земли. Как было сказано выше, при установлении эксплуатационных запасов подземных вод отъем (откачку) необходимо произвести таким образом, чтобы качество воды в водоносных слоях чувствительно не изменялось.

Вторая задача, связанная с проблемой загрязнения подземных вод, поступающих с поверхностных слоев засоленной почвы в более глубокие слои при капитальных промывках, на фоне вертикального дренажа решается при помощи дифференциальных уравнений массопереноса. Для решения этой задачи пространственную задачу массопереноса приближенно заменяем планово-пространственной задачей. Перенос солей только в вертикальном направлении приближенно описывается дифференциальным уравнением физико-химической гидродинамики [7]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial(vC)}{\partial z}+\beta(C_н-C)=n\frac{\partial c}{\partial t}. \qquad (5)$$

Для уравнения (5) принимаем следующие начальные и граничные условия:

при $t=0$

$$C=\varphi(z); \qquad (6)$$

при $t>0$

$$z=0;\quad D\frac{\partial C}{\partial z}=v(C_0-C);\qquad z=T;\quad \frac{\partial C}{\partial z}=0. \qquad (7)$$

Плановая задача массопереноса в двухслойной фильтрирующей среде может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial(v_xC_1)}{\partial x}-\frac{\partial(v_yC_1)}{\partial y}+$$
$$+v_z\frac{C_1^{I}-C_1^{II}}{m}+\beta(C_н-C)=n_1\frac{\partial C_1}{\partial t}; \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial(v_xC_2)}{\partial x}-\frac{\partial(v_yC_2)}{\partial y}-$$
$$-v_zD\frac{C_1^{I}-C_1^{II}}{m}=n_2\frac{\partial C_2}{\partial t}. \qquad (9)$$

Дифференциальные уравнения (8) и (9) решаем при следующих начальных и граничных условиях:

при $t=0$

$$C_1=\varphi_1(x,\ y);\qquad C_2=\varphi_2(x,\ y); \qquad (10)$$

при $t>0$ на контуре

$$C_1=C_2=C^{\circ}. \qquad (11)$$

В уравнениях (5) ÷ (11) приняты следующие обозначения:

$C_н$ — концентрация предельного насыщения;

$C(z, t)$ — концентрация грунтовых вод в любой точке по глубине;

$C_1(x, y, t)$ и $C_2(x, y, t)$ — осредненные по высоте значения концентрации грунтовых вод в покровном и подстилающем водоносном слоях;

v_x, v_y и v_z — скорость фильтрации по направлению осей координат;

$D(x, y)$ и n — коэффициент конвективной диффузии и пористости и соответствующих водоносных слоях;

β — коэффициент скорости растворения;

m — мощность водоносного слоя и покровной толще (глубина воды в покровной толще, считая от подошвы покровного слоя).

Сопряжение осредненных значений функций $C_1(x, y, t)$ и $C_2(x, y, t)$ контактной плоскости двух водоносных слоев осуществляется некоторой непрерывной кривой для соблюдения условия непрерывности процесса массопереноса.

Решение планово-пространственной задачи массопереноса осуществляется в следующей последовательности:

1) Решаем дифференциальное уравнение (5). Результаты решения представлены в виде семейства кривых $C(z, t)$ (рис. 2).

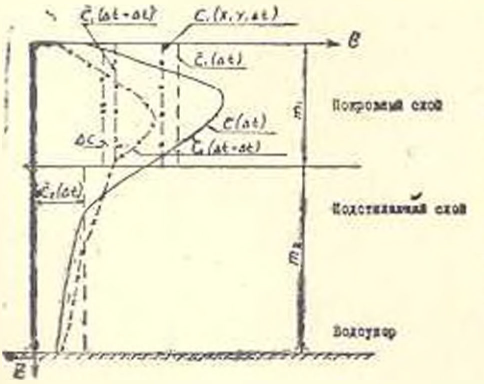

Рис. 2. Схематизация профильной задачи для формулировки начальных условий.

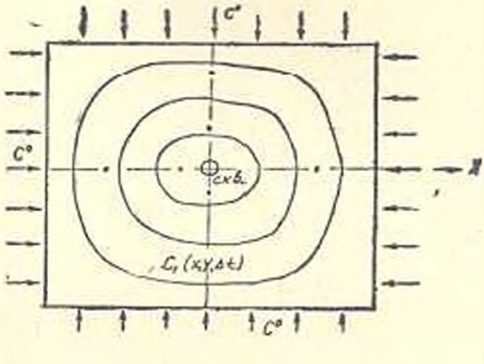

Рис. 3. Схематизация начальных условий планово-пространственной задачи.

2) Осредняем $\overline{C}(z, \Delta t)$ по высоте (разные в различных зонах фильтрации). На рис. 2 эти эпюры показаны пунктирными линиями.

3) Осредненные по высоте концентрации $\overline{C}_1(\Delta t)$ и $\overline{C}_2(\Delta t)$ принимаем в качестве начальных условий для решения первого шага по времени плановой задачи массопереноса. Граничные условия для дифференциальных уравнений (8) и (9) могут быть приняты любые.

4) Результаты решения системы дифференциальных уравнений (8) и (9) представляем в виде изолиний одинаковой концентрации для верхнего и нижнего водоносных слоев в отдельности (рис. 3).

5) Полученные из плановой задачи значения концентраций $C_1(x, y, \Delta t)$ и $C_2(x, y, \Delta t)$ наносим на рис. 2 (пунктир с точкой).

Разумеется, что значения $C_1(x, y, \Delta t)$ и $C_2(x, y, \Delta t)$, полученные из решения плановой задачи, будут несколько меньше заданных (начальных) значений $\overline{C}_1(\Delta t)$ и $\overline{C}_2(\Delta t)$. Это так и должно быть, ибо из контура области фильтрации поступает вода с меньшей концентрацией.

Ординаты осредненной эпюры концентраций $\overline{C}_1(\Delta t + \Delta t)$ и $\overline{C}_2(\Delta t + \Delta t)$, полученные после второго шага по времени решения профильной задачи, уменьшаем на величину, равную

$$\Delta C = [\overline{C}_1(\Delta t + \Delta t) - [\overline{C}(\Delta t) - C_1(x,\ y,\ \Delta t)]], \tag{12}$$

где $\overline{C}(\Delta t)$ — ордината осредненной эпюры концентрации, полученной из решения профильной задачи после первого шага по времени; $C_1(x, y, \Delta t)$ — ордината эпюры концентрации, полученная из решения плановой задачи после первого шага по времени при начальном условии $\overline{C}_1(\Delta t)$.

Новое значение концентрации, равное $[\overline{C}(\Delta + \Delta t) - \Delta C]$, принимаем в качестве начального условия для решения плановой задачи для второго шага по времени.

Аналогичным образом расчеты продолжаем для $i\Delta t$-го шага по времени. Процесс можно считать завершенным тогда, когда концентрация грунтовых вод в верхнем водоносном слое достигнет допустимого предела.

Необходимо отметить, что при принятой схеме решения профильной задачи полученные результаты после каждого шага по времени не корректируются; т. е. не вносятся поправки после решения в соответствующем шаге по времени плановой задачи.

Надо предполагать, что это допущение — неучет обратной связи между плановой и профильной задачами — не может чувствительно отразиться на общие результаты расчетов. Во всяком случае, то упрощение, которое получается заменой решения весьма сложной пространственной задачи решением планово-пространственной задачи, в практическом отношении более целесообразно.

Дифференциальные уравнения массопереноса с соответствующими начальными и граничными условиями решаем на универсальной сеточной модели машины УСМ-1, работающей в параллельном режиме с цифровой машины Наири-2. Аналогом концентрации подземных вод C в фильтрационном потоке является потенциал U в электрическом поле.

Аналогом расхода солей в фильтрационном потоке является сила тока в электрическом поле. Используя эту аналогию, из дифференциального уравнения массопереноса и уравнения плотности электрического тока (закон Кирхгофа) нетрудно получить соответственно гидравлические и электрические сопротивления для составления электрической блок-схемы расчета.

Конечно-разностное выражение дифференциального уравнения (5) после преобразований можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{C_1-C_2}{\Phi_1}+\frac{C_3-C_2}{\Phi_2}+\frac{\overline{C}_3-C_1}{\Phi_3}+\frac{C_2^k-C_2}{\Phi_4}+\frac{C_н-C_2}{\Phi_5}=\frac{C_2^t-C_2^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_2-C_3}{\Phi_2}+\frac{C_4-C_3}{\Phi_6}+\frac{\overline{C}_4-C_2}{\Phi_7}+\frac{C_3^k-C_3}{\Phi_8}+\frac{C_н-C_3}{\Phi_5}=\frac{C_3^t-C_3^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_3-C_4}{\Phi_6}+\frac{C_5-C_4}{\Phi_9}+\frac{\overline{C}_5-C_4}{\Phi_{10}}+\frac{C_4^k-C_4}{\Phi_{11}}+\frac{C_н-C_4}{\Phi_5}=\frac{C_4^t-C_4^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

где

$$\Phi_1=\frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y};\qquad \Phi_2=\frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{3}{2}\Delta z\right)\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_3=\frac{2\Delta z}{\left(\frac{\partial D}{\partial z}-v\right)\Big|_{z=z_2}\Delta x\Delta y};\qquad \Phi_4=\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=z_2}\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_5=\frac{1}{3\Delta x\Delta y};\qquad \Phi_t=\frac{\Delta t}{n\Delta x\Delta y};\qquad \Phi_6=\frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{5}{2}\Delta z\right)\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_7=\frac{2\Delta z}{\left(\frac{\partial D}{\partial z}-v\right)_{z=z_3}\Delta x\Delta y};\qquad \Phi_8=\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=z_3}\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_9=\frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{7}{2}\Delta z\right)\Delta x\Delta y};\qquad \Phi_{10}=\frac{2\Delta z}{\left(\frac{\partial D}{\partial z}-v\right)_{z=z_4}\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_{11}=\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=z_4}\Delta x\Delta y};$$

при $\frac{\partial D}{\partial z}-v>0$ $\overline{C}_3=C_2$; при $\frac{\partial D}{\partial z}-v<0$ $\overline{C}_3=2C_1-C_3$.

Аналогичным образом можно составить конечно-разностные уравнения для остальных узловых точек сетки. Нетрудно заметить, что при этом число неизвестных будет равняться числу уравнений, куда входят также известные значения искомой функции или ее производных на верхней и нижней точках сетки. В правые части этих уравнений входят также извесные значения искомой функции (в любой узловой точке сетки) в момент времени $t - i\Delta t$. Например, для первого шага по времени значение $C^{t-\Delta t}$ определяется из начальной эпюры распределения функции $C(z, 0)$. Для второго шага расчета значение $C^{t-2\Delta t}$ определяется (берется) из первого шага расчета и т. д.

При расчетах заданными величинами являются вертикальные скорости (v), коэффициент конвективной диффузии (D), концентрация предельного насыщения ($C_н$), коэффициенты скорости растворения (β) и пористости грунта (n). Из конечно-разностных уравнений нетрудно также заметить, что условно обозначенная функция C^k будет равняться нулю, если $v > 0$. Если $v < 0$, то значение C^k необходимо взять равным $2C_i$ (i — значение искомой функции в соответствующих точках сетки).

Используя аналогию, которая существует между изменением концентрации жидкости в фильтрационном потоке и изменением потенциала в электрическом поле, из уравнения Кирхгофа, написанного для каждой узловой точки сетки аналогично конечно-разностным уравнениям массопереноса (12), нетрудно получить расчетные зависимости для электрических сопротивлений:

$$R_1 = \alpha_R \Phi_1; \quad R_2 = \alpha_R \Phi_2; \quad R_3 = \alpha_R \Phi_3; \quad R_4 = \alpha_R \Phi_4; \\ R_5 = \alpha_R \Phi_5; \quad R_t = \alpha_R \Phi_t. \tag{14}$$

Значения Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 и Φ_t приведены выше.
Принципиальная электрическая блок-схема расчета приведена на рис. 4. Из изложенного видно, что задача решается методом итерации.

Число дополнительных сопротивлений, подключенных в каждом узле блок-схемы (рис. 4), можно несколько уменьшить, если задача будет решаться по следующей методике [8, 9].

Представим конечно-разностные уравнения массопереноса в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_2}{\Phi_2} = \frac{C_2^t - [C_2]^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_2 - C_3}{\Phi_2} + \frac{C_4 - C_3}{\Phi_3} = \frac{C_3^t - [C_3]^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_3 - C_4}{\Phi_3} + \frac{C_5 - C_4}{\Phi_4} = \frac{C_4^t - [C_4]^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&[C_2]^{t-\Delta t} = C^{t-\Delta t} + \left[\left(\frac{\partial D}{\partial z} - v\right)\Big|_{z=z_2} \frac{C_3 - C_1}{2\Delta z} - C_2 \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=z_2} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \beta(C_н - C_2)\right] \frac{\Delta t}{n};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x \Delta y}; \qquad \Phi_2 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{3}{2}\Delta z\right)\Delta x \Delta y};$$

$$\Phi_3 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{5}{2}\Delta z\right)\Delta z \Delta y}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n\Delta x \Delta y}. \tag{16}$$

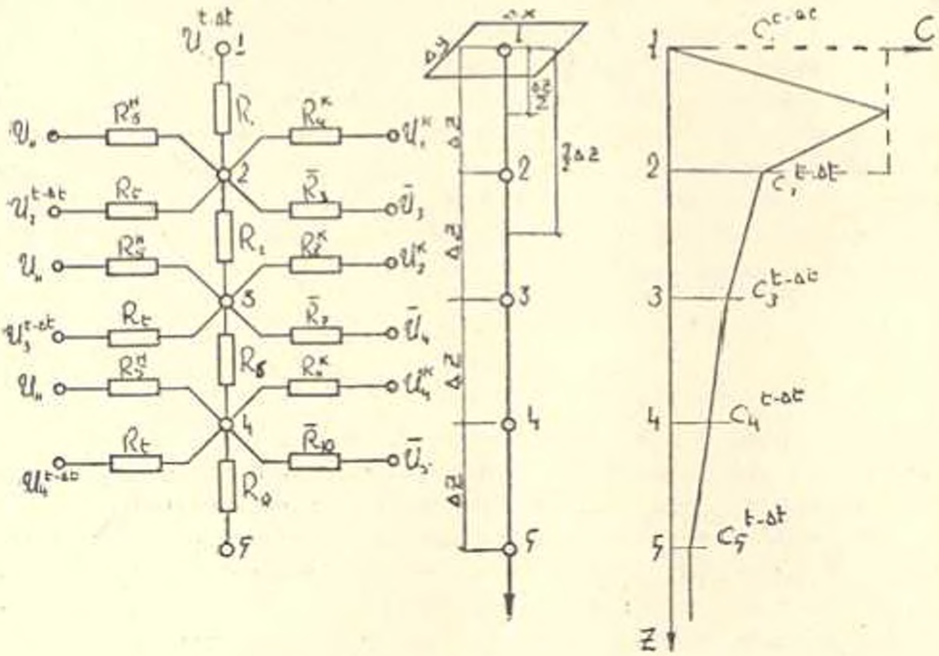

Рис. 4. Блок-схема профильной задачи по уравнениям (13).

Принципиальная электрическая блок-схема расчета для решения конечно-разностных уравнений (15) представлена на рис. 5. Из этой блок-схемы видно, что задача по второй методике также решается методом итерации, но число дополнительных сопротивлений, подключенных в каждом узле, уменьшается вдвое. Второй метод решения более универсальный.

При постоянных значениях коэффициента конвективной диффузии (D) и скоростей (V) конечно-разностное уравнение массопереноса удобно представить в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_2}{\Phi_2} + \frac{C_n - C_2}{\Phi_3} = \frac{C_2^t - C_2^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_2 - C_3}{\Phi_1} + \frac{C_4 - C_3}{\Phi_2} + \frac{C_n - C_3}{\Phi_3} = \frac{C_3^t - C_3^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_3 - C_4}{\Phi_1} + \frac{C_5 - C_4}{\Phi_2} + \frac{C_n - C_4}{\Phi_3} = \frac{C_4^t - C_4^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right\} \qquad (17)
$$

где

$$
\Phi_1 = \frac{1}{\dfrac{\Delta z}{D\Delta x\Delta y} + \dfrac{2}{v\Delta x\Delta y}}; \qquad \Phi_2 = \frac{1}{\dfrac{\Delta z}{D\Delta x\Delta y} - \dfrac{2}{v\Delta x\Delta y}};
$$

$$
\Phi_3 = \frac{1}{\beta\Delta x\Delta y\Delta z}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n\Delta x\Delta y\Delta z}.
$$

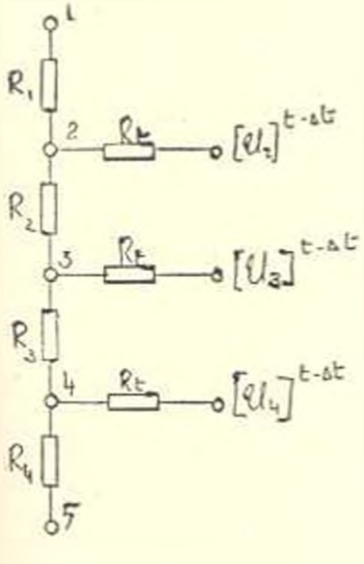

Рис. 5. Блок-схема профильной задачи по уравнениям (15).

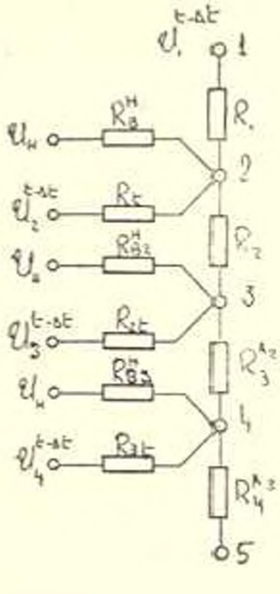

Рис. 6. Блок-схема профильной задачи по уравнениям (19).

Для составления электрической блок-схемы расчета необходимо, чтобы сопротивление от узла *2* к узлу *3* равнялось сопротивлению от узла *3* к узлу *2*. Эти условия должны быть удовлетворены для любого узла сетки, т. е. от узла (n — 1) к узлу n и от узла n к узлу n — 1. Конечно, все сказанное не относится к дополнительным сопротивлениям, подключенным в каждом узле сетки и моделирующим процессы растворения и нестационарности.

Чтобы преодолеть указанные выше трудности [11], достаточно все члены конечно-разностных уравнений помножить на некоторую постоянную величину, значение которой для каждой строки системы уравнений (17) определяется формулой

$$k_n = \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)^{n-1}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3 \ldots) \tag{18}$$

где n — номера строк конечно-разностных уравнений (17).

После осуществления этих преобразований получим расчетные формулы сопротивлений для любого узла сетки электрической блок-схемы с одновременно удовлетворяющимися условиями одинаковости гидравлических (Φ) или электрических (R) сопротивлений между узлами $n-1-n$, $n-1-n$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_2}{\Phi_2} + \frac{C_n - C_2}{\Phi_3} = \frac{C_2^t - C_2^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_2 - C_3}{\Phi_2} + \frac{C_4 - C_3}{A_2} + \frac{C_n - C_3}{B_2} = \frac{C_3^t - C_3^{t-\Delta t}}{\Phi_{2t}};\\
&\frac{C_3 - C_4}{A_2} + \frac{C_5 - C_4}{A_3} + \frac{C_n - C_4}{B_3} = \frac{C_4^t - C_4^{t-\Delta t}}{\Phi_{3t}};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right| \tag{19}$$

где

$$A_n = \frac{\Phi_2^n}{\Phi_1^{n-1}}; \quad B_n = \Phi_n\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^{n-1}; \quad \Phi_{nt} = \Phi_t\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^{n-1};$$

$$R_n^A = \varkappa_R A_n; \quad R_n^B = \varkappa_R B_n; \quad R_{nt} = \varkappa_R \Phi_{nt}. \tag{20}$$

Из изложенного нетрудно заметить, что решение дифференциального уравнения (5) с постоянными коэффициентами D, V, β, n при любых начальных и граничных условиях на универсальной сеточной модели решается без итерации.

Для иллюстрации реализации изложенного выше метода решим один частный пример при следующих исходных данных:

$$v = 0{,}03\ \frac{м}{сут}; \quad D = 0{,}075\ \frac{м^2}{сут}; \quad \beta = 0{,}018\ \frac{1}{сут};$$

$$n = 0{,}4; \quad \Delta z = 0{,}5\ м; \quad \Delta x = \Delta y = 100\ м; \quad \Delta t = 10\ сут.$$

На рис. 6 приведена электрическая блок-схема расчета. Численные значения сопротивления подсчитаны по формулам (20). Результаты расчетов приведены в табл. 1 и на рис. 7, где на координатной системе C—Z представлены изменения концентрации подземных вод по глубине после определенного шага Δt расчета по времени.

Таблица 1

Узлы, i	R_i^A	R^*_{Bi}	R_{ii}	Узлы, i	R_i^A	R^*_{Bi}	R_{ii}
1—2	30,5	250,0	500,0	8—9	119,0	975,8	1951,6
2—3	37,0	303,7	607,4	9—10	144,6	1185,4	2370,7
3—4	45,0	368,9	737,8	10—11	175,6	1439,9	2879,8
4—5	54,7	448,1	896,3	11—12	213,4	1749,1	3493,3
5—6	66,4	544,4	1088,7	12—13	259,3	2124,8	4249,5
6—7	80,4	661,3	1322,5	13—14	314,4	2581,1	5132,1
7—8	98,0	803,3	1606,6				

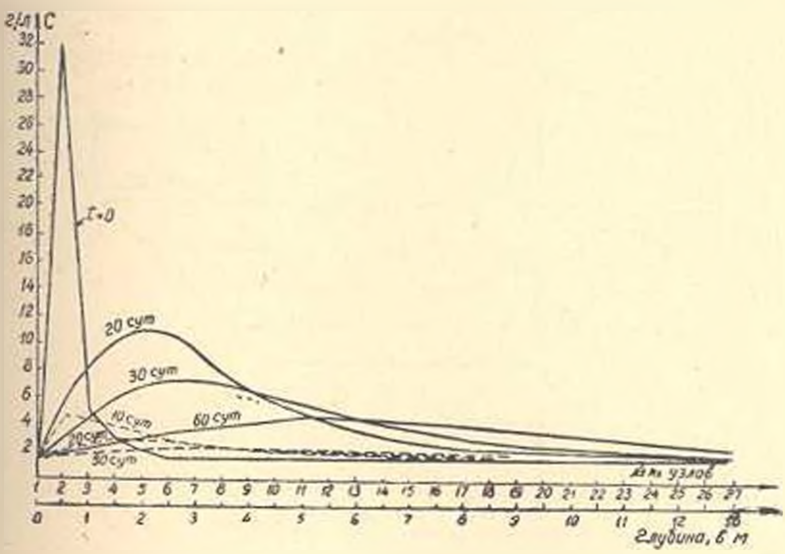

Рис. 7. Кривые $C(z, t)$, полученные из уравнения (5):
——— при $\beta = 0{,}018$ 1/*сут*; - - - - при $\beta = 0$.

При расчете принято, что подача воды с поверхности земли в грунт с концентрацией $C_0 = 1{,}5$ *г/л* осуществляется с постоянной интенсивностью, т. е. капитальная промывка засоленных земель производится непрерывно.

В заключение решения профильной задачи отметим, что в дифференциальных уравнениях массопереноса слабым местом является член, выражающий процесс растворения солей. В литературе в последнее время появился ряд предложений по этому вопросу.

Изложенная методика позволяет реализовать решение дифференциальных уравнений массопереноса при любых законах процесса растворения и обсорции. Для этого целесообразно в узловые точки электрической блок-схемы подавать ток (с соответствующим знаком) пропорционально солевому расходу растворения.

Перейдем к методике решения задачи массопереноса в двухслойной фильтрующей среде на фоне вертикального дренажа на сеточной модели УСМ-1 [11].

Будем считать, что значения скоростей определены из системы дифференциальных уравнений фильтрации по изложенной выше методике. Будем считать также, что заданы коэффициенты конвективной диффузии скоростей растворения, пористости грунтов и мощности соответствующих водоносных слоев.

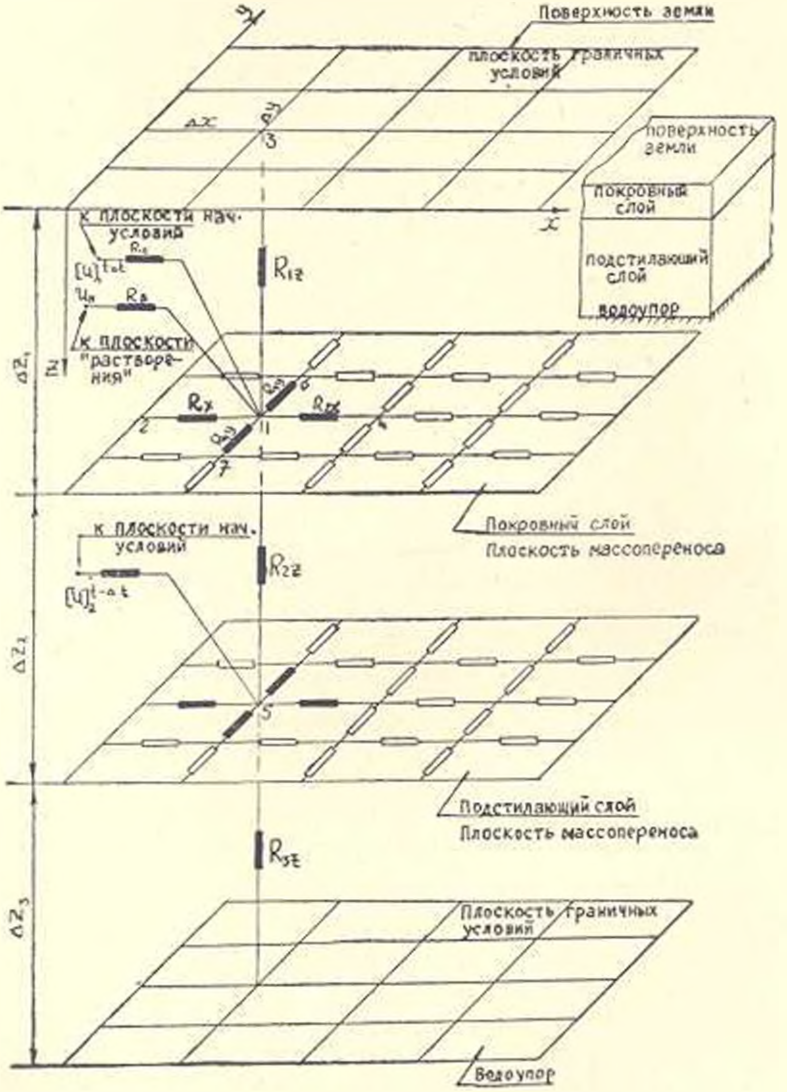

Рис. 8. Блок-схема расчета пространственной задачи массопереноса.

Дифференциальные уравнения (8) и (9) в конечно-разностном виде, например, для узлов 1; 2; 3 и 4 сетки, (рис. 9) можно представить в следующем виде:

$$\frac{C_2 - C_1}{\dfrac{1}{D(-\Delta x,\ y_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}} + \frac{C_3 - C_1}{\dfrac{1}{D(\Delta x,\ y)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}} + \frac{C_4 - C_1}{\dfrac{1}{D(-\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}} +$$

$$+ \frac{C_5 - C_1}{\dfrac{1}{D(\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}} + \frac{C_n - C_1}{\dfrac{1}{\beta\Delta x\Delta y}} + \frac{0 - C_1}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right)\Big|_{x_1,\ y_1}\Delta x\Delta y}} +$$

$$+ \frac{C_1^{I} - C_1^{II}}{\dfrac{m}{v_z\Delta x\Delta y}} = \frac{C_1^{t} - C_1^{t-\Delta t}}{\dfrac{\Delta t}{n\Delta x\Delta x}}; \tag{21}$$

. . . .

Конечно-разностные уравнения для моделирования массопереноса удобно представить в таком виде, как обычно записывается уравнение Кирхгофа для плотностей электрического поля, т. е.

$$\frac{C_2 - C_1}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_1}{\Phi_2} + \frac{C_4 - C_1}{\Phi_3} + \frac{C_5 - C_1}{\Phi_4} + \frac{\overline{C}_n - C_1}{\Phi_n} +$$

$$+ \frac{C_1^{I} - C_1^{II}}{\Phi_z} = \frac{C_1^{t} - C_1^{t-\Delta t}}{\Phi_t} \tag{22}$$

. . . .

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{D(-\Delta x,\ y_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}; \qquad \Phi_2 = \frac{1}{D(\Delta x,\ y_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}};$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{D(-\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}; \qquad \Phi_4 = \frac{1}{D(\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}};$$

$$\Phi_n = \frac{1}{(A + \beta)\Delta x\Delta y}; \qquad \overline{C}_n = \frac{\beta C_n}{A + \beta}; \qquad A = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{x,\ y}; \tag{23}$$

$$\Phi_z = \frac{m}{v_z\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n\Delta x\Delta y}.$$

Необходимо отметить, что в процессах массопереноса гидравлическая связь между двумя водоносными слоями в приведенных выше уравнениях описывается выражением

$$\frac{C_1^{I} - C_1^{II}}{\Phi_z}, \tag{24}$$

где C_1^{I} и C_1^{II} — концентрации грунтовых вод в соответствующих точках верхней и нижней сетки. Аналогичные конечно-разностные уравнения можно составить и для любого узла сетки.

Связь между гидравлическими (Ф) и электрическими (R) сопротивлениями устанавливается из условия подобия, которое существует между уравнениями массопереноса и Кирхгофа. Принципиальная электрическая блок-схема расчета представлена на рис. 9. Электрические сопротивления подсчитываются по формулам (23).

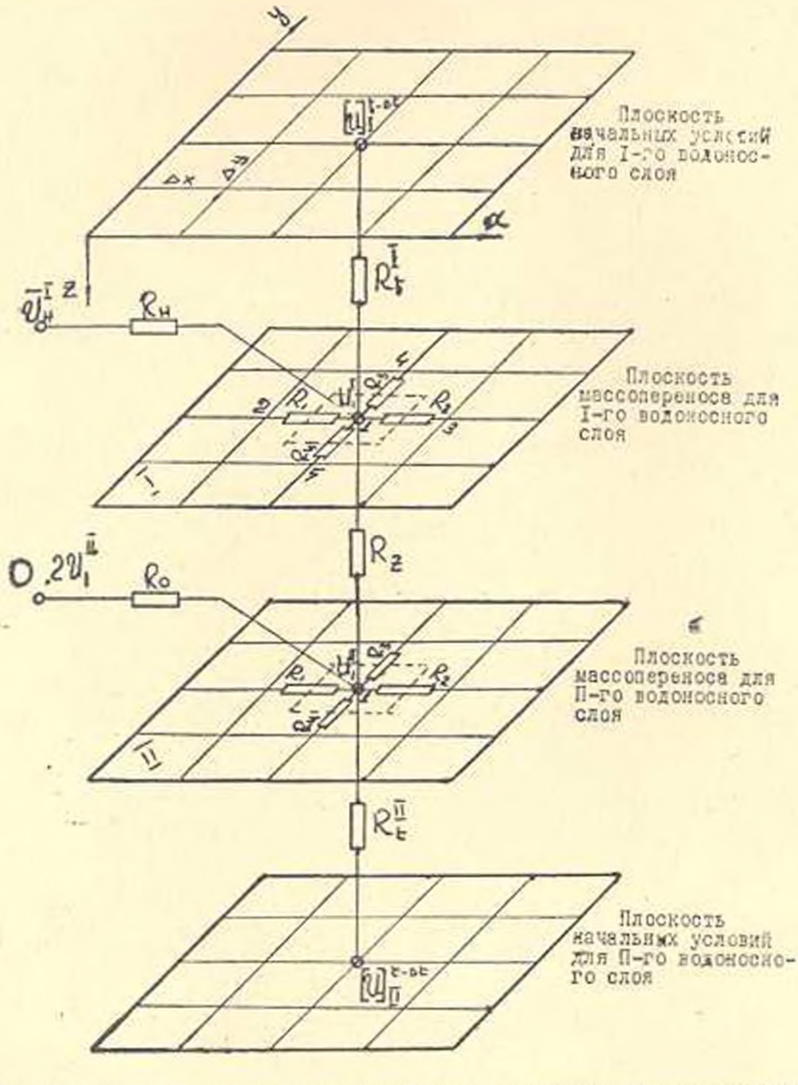

Рис. 9. Блок-схема планово-пространственной задачи по уравнениям (23).

Начальные условия решения конечно-разностных уравнений массопереноса после каждого шага расчета по времени определяются из профильной задачи по изложенному выше методу. Граничные условия можно принимать любые. Из изложенного видно, что задача в целом решается методом итерации. Значение неизвестной функции C_1 (или потенциала в соответствующих точках сетки) определяется методом подбора.

В заключение необходимо изложить более точную методику решения пространственной задачи массопереноса, которая на аналоговой машине УСМ-1 осуществляется следующим образом.

Дифференциальное уравнение массопереноса, начальные и граничные условия для пространственной задачи можно представить так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial C}{\partial z}\right)-\frac{\partial(v_x C)}{\partial x}-\frac{\partial(v_y C)}{\partial y}-$$

$$-\frac{\partial(v_z C)}{\partial z}+\beta(C_n-C)=n\frac{\partial C}{\partial t}; \quad (25)$$

при $t=0$

$$C(x,\ y,\ z,\ t)=C(x,\ y,\ z,\ 0); \quad (26)$$

при $t>0$

$$z=0;\quad C(x,\ y,\ z,\ t)=C_0(x,\ y,\ t);\quad z=T;\quad \frac{\partial C}{\partial z}=0; \quad (27)$$

на боковых контурах

$$C(x,\ y,\ z,\ t)=C^0(x_0,\ y_0,\ z,\ t). \quad (28)$$

В конечно-разностном виде дифференциальное уравнение (25), например, для узла 1 (рис. 8) можно представить так:

$$\overline{D}_2\frac{\Delta y\Delta z}{\Delta x}(C_2-C_1)+\overline{D}_4\frac{\Delta y\Delta z}{\Delta x}(C_4-C_1)+\overline{D}_6\frac{\Delta x\Delta z}{\Delta y}(C_6-C_1)+$$

$$+\overline{D}_7\frac{\Delta x\Delta z}{\Delta y}(C_7-C_1)+\overline{D}_3\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta z}(C_3-C_1)+\overline{D}_5\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta z}(C_5-C_1)+$$

$$+\beta(C_n-C_1)\Delta x\Delta y\Delta z=\left(\overline{v}_x\frac{C_4-C_2}{2\Delta x}+\overline{v}_y\frac{C_6-C_7}{2\Delta y}+\right.$$

$$\left.+\overline{v}_z\frac{C_3-C_5}{2\Delta z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=n\frac{C_1^t-[C_1]^{t-\Delta t}}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z, \quad (29)$$

где $\overline{D}_i$ и $\overline{v}_i$ — средние значения коэффициента конвективной диффузии и скоростей фильтрации между соответствующими узловыми точками сетки. Уравнение (29) удобно представить в виде уравнения Кирхгофа:

$$\frac{C_2-C_1}{\Phi_{1x}}+\frac{C_4-C_1}{\Phi_{2x}}+\frac{C_6-C_1}{\Phi_{1y}}+\frac{C_7-C_1}{\Phi_{2y}}+\frac{C_3-C_1}{\Phi_{1z}}+\frac{C_5-C_1}{\Phi_{2z}}+$$

$$+\frac{C_n-C_1}{\Phi_\beta}=\frac{C_1^t-[C_1]^{t-\Delta t}}{\Phi_t}, \quad (30)$$

где

$$|C_1|^{t-\Delta t} = C^{t-\Delta t} + \left(\bar{v}_x \frac{C_4 - C_2}{2\Delta x} + \bar{v}_y \frac{C_6 - C_5}{2\Delta y} + \bar{v}_z \frac{C_7 - C_3}{2\Delta z}\right) \frac{\Delta t}{n} \Delta x \Delta y \Delta z;$$

$$\Phi_{1x} = \frac{\Delta x}{\overline{D}_2 \Delta y \Delta z}; \quad \Phi_{2x} = \frac{\Delta x}{\overline{D}_4 \Delta y \Delta z}; \quad \Phi_{1y} = \frac{\Delta y}{\overline{D}_6 \Delta x \Delta z};$$

$$\Phi_{2y} = \frac{\Delta y}{\overline{D}_5 \Delta x \Delta z}; \quad \Phi_{1z} = \frac{\Delta z}{\overline{D}_3 \Delta x \Delta y}; \quad \Phi_{2z} = \frac{\Delta z}{D_7 \Delta x \Delta y}; \tag{31}$$

$$\Phi_t = \frac{\Delta t}{n \Delta x \Delta y \Delta z}; \quad \Phi_3 = \frac{1}{\beta \Delta x \Delta y \Delta z}.$$

По принятым масштабным коэффициентам α_R, α_U и α_t электрические сопротивления R_x, R_y, R_z и R_t вычисляются по формулам:

$$R_x = \alpha_R \Phi_x; \quad R_y = \alpha_R \Phi_y; \quad R_z = \alpha_R \Phi_z; \quad R_t = \alpha_R \Phi_t.$$

На рис. 8 приведена принципиальная блок-схема расчета. Чтобы не затемнять чертеж, на рис. 8 сопротивление показано для одного узла. В действительности все узлы сетки будут иметь различные сопротивления в зависимости от численных значений коэффициентов конвективной диффузии, скоростей фильтрации и шага Δx, Δy, Δz. На рис. 9 не показаны сеточные плоскости, моделирующие начальные условия массопереноса в покровном и подстилающем слоях, а также сеточная плоскость, моделирующая процесс растворения солей из твердой фазы в жидкую.

Все узловые точки сетки плоскости начальных условий и растворения через сопротивления R_{1t}, R_{2t}, R_3 соединены с соответствующими узловыми точками сетки покровного и подстилающего слоев, моделирующими процессы массопереноса.

При решении пространственной задачи, кроме граничных условий на контуре плоскости x, y, необходимо задаваться также граничными условиями на плоскостях, перпендикулярных оси z. Поэтому при решении пространственной задачи число коммутационных досок (число плоскостей) необходимо брать на две единицы больше (по сравнению с плоско-пространственной задачей)

При решении конкретной задачи на плоскости $z = 0$ задавалось значение концентрации оросительной воды.

На нижней плоскости, т. е. $z = T$, задавалось условие $\frac{\partial C}{\partial z} = 0$.

По изложенному методу нами решена одна типовая задача. Результаты решения будут опубликованы отдельно.

Необходимо только отметить, что процесс итерации [это связано с моделированием правой части уравнения (30)] при решении пространственной задачи несколько осложняется, а точность расчета, наоборот, несколько повышается.

Из изложенного видно, что только методом математического моделирования можно учитывать любые сложные условия местности. Например, при решении конкретной задачи нами учтены изменения в пространстве мощностей водоносных слоев, коэффициентов фильтрации, конвективной диффузии, скоростей фильтрации и т. д.

Отметим, что результаты расчетов дали возможность определить во времени и в пространстве изменения минерализации подземных вод в двухслойной фильтрующей среде при капитальных промывках засоленных земель в покровной толще. Полученные результаты позволили также прогнозировать изменения во времени и в пространстве минерализации подземных вод в подстилающем слое, а также определить изменения во времени минерализации откаченных вод из скважины. Эти результаты использованы для разработки технологии капитальных промывок на больших орошаемых площадях.

ЕрПИ им. К. Маркса Поступило 26.IX.1977.

Ս. Ա. ԱՆԱՆՅԱՆ, Ա. Կ. ԱՆԱՆՅԱՆ

ՍՏՈՐԵՐԿՐՅԱ ՋՐԵՐԻ ՊԱՇԱՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐԱԿԻ ՓՈՓՈԽՈՒՄԸ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀՈՍՔԵՐԻՑ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է ֆիլտրացիայի մասսատեղափոխման դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մեթոդները անալոգային մեքենաների օգնությամբ։ Լուծված են մի շարք խնդիրներ, որոնք վերաբերվում են Արարատյան դաշտավայրի ստորերկրյա ջրերի պաշարների որոշմանը և աղուտների օգտագործման հարցերին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оганезов Г. Г.* Подземные воды Араратской равнины. Арм. гос. изд-во. Ереван. 1958.
2. Гидрогеология СССР, том. XI. Армянская ССР. Изд-во «Недра», М., 1968.
3. *Ананян А. К.* Дренаж при освоении содовых солончаков Араратской равнины. Изд-во «Колос», М., 1972.
4. *Ананян А. К., Венгржанович Р. А.* О математической модели для исследования комплекса вопросов по динамике подземных вод. «Водные ресурсы», № 3, изд-во АН СССР, М., 1974.
5. Инструкция по проектированию оросительных систем. Часть VIII: Дренаж на орошаемых землях. М., 1975.
6. *Либман.* Новый метод электрической аналогии для решения нестационарных задач теплопроводности. Механика 3(43), сб. переводов и обзоров иностранной периодической лит-ры, М., 1957.

7. *Веригин Н. Н., Шертунов Б. С., Шапинская Г. Н.* К расчету промывания засоленных почв. Труды координационного совещания по гидротехнике, вып. 35, изд-во «Энергия», М., 1967.
8. *Ганявин Г. Г., Крашин И. И.* Моделирование процессов массо- и теплопереноса в подземных водах на аналогово-цифровом вычислительном комплексе. Материалы межведомственного совещания по мелиоративной гидрологии и инж. геологии, ММСМГиИГ, вып. 1, ч. I, М., 1972.
9. *Лившиц В. М., Романец Б. Н., Чертков Л. М.* К вопросу прогнозирования засоленности почвогрунтов орошаемых массивов методом математического моделирования, ММСМГиИГ, вып. 1, ч. I, М., 1962.
10. *Трофимов В. В., Трофимова О. Ф.* Моделирование перемещения солей в почвогрунтах, содержащих тупиковые поры, методом Либмана. ММСМГиИГ вып. 1, ч. I, М., 1962.
11. *Николаев Н. С., Козлов Э. С., Полгородник Н. П.* Аналоговая математическая машина УСМ-1. М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX, № 5, 1977 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

Р. М. РАФАЭЛЯН, Р. С. АВЕТИСЯН

К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В НАГНЕТАТЕЛЬНОМ ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ОТКЛЮЧЕНИИ ПРИВОДА НАСОСА

В практике проектирования нагнетательных трубопроводов часто возникает необходимость оперативной оценки величин возможных скоростей и давлений, возникающих при отключении привода насоса.

Известно, что переходные процессы, возникающие в этом случае в системе насос-трубопровод, описываются уравнениями следующего вида:

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda|v|}{8\delta}v\right];\\
&-\frac{\partial P}{\partial t} = \rho c^2\frac{\partial v}{\partial x};\\
&J\frac{d\omega}{dt} = M_д - M_c,
\end{aligned}
\right|
\qquad (1)
$$

где P — приведенное давление; V — средняя по сечению скорость жидкости; ρ — плотность жидкости; c — скорость распространения волны возмущения; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; δ — гидравлический радиус потока; J — момент инерции; ω — угловая скорость; $M_д$ и M_c — движущий момент и момент сопротивления.

Решение системы (1) связано со значительными трудностями.

Как указывается в [1] при расчете переходных процессов в коротких водоводах $\left(\frac{T_a}{t_ф} > 1\right.$, где T_a — постоянная времени насосного агрегата; $t_ф$ — фаза гидравлического удара$\left.\right)$ при отсутствии обратного клапана можно пренебречь влиянием упругости стенок трубопровода и жидкости. Это допущение существенно упрощает процесс расчета.

В этом случае уравнения движения несжимаемой жидкости в системе представляются в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dq}{d\tau} = Aq^2 + Bq\eta + C\eta^2 + D; \\ &\frac{T_a}{T_l}\cdot\frac{d\eta}{d\tau} = A_1q^2 + B_1q\eta + C_1\eta^2; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $q = \frac{Q}{Q_0}$; $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$; $\xi = \frac{P}{P_0}$; $\tau = \frac{t}{T_l}$; T_l — постоянная времени трубопровода; Q_0, ω_0, P_0 — значения расхода, угловой скорости и давления при установившемся режиме работы насоса.

Изменение давления у насоса в насосном, тормозном и турбинном режимах дается соотношением:

$$\xi = A_0\eta^2 + B_0\eta q + C_0q^2 + D_0. \qquad (3)$$

Постоянные коэффициенты, входящие в уравнения (2) и (3), определяются для каждого режима с помощью четырех квадрантных характеристик:

$$\frac{H}{n^2} = f_1\left(\frac{Q}{n}\right); \qquad \frac{H}{Q^2} = f_2\left(\frac{n}{Q}\right);$$

$$\frac{M}{n^2} = f_3\left(\frac{Q}{n}\right); \qquad \frac{M}{Q^2} = f_4\left(\frac{n}{Q}\right)$$

путем аппроксимации последних параболическими кривыми.

В работе [2] доказывается, что после отключения электропитания привода насоса изменение числа оборотов рабочего колеса до подхода к насосу отраженных волн гидравлического удара может быть определено по зависимости

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{T_a}{t + T_a}. \qquad (4)$$

Однако с учетом допущения о несжимаемости стенок трубопровода и жидкости полагаем соотношение (4) действительным до момента наступления тормозного режима.

Используя формулу (4) для исключения неизвестной функции $\eta(\tau)$ из первого уравнения системы (2), получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq}{d\tau} = Aq^2 + \frac{BT_a}{T_a + T_l\tau}q + \frac{CT_a^2}{(T_a + T_l\tau)^2} + D. \qquad (5)$$

Уравнение (5) решается методом последовательных приближений [3]. Заменяя уравнение (5) интегральным уравнением

$$q_n = 1 + \int_0^\tau \left\{Aq_{n-1}^2 + \frac{BT_a}{T_a + T_l\tau}q_{n-1} + \frac{CT_a^2}{(T_a + T_l\tau)^2} + D\right\}d\tau, \qquad (6)$$

для первого приближения удовлетворяющим начальному условию

$$\tau = 0 \qquad q = q_0 = 1,$$

получим

$$q = 1 + (A + D)\tau + \frac{BT_a}{T_l} \ln \frac{T_a + T_l\tau}{T_a} + \frac{CT_a\tau}{T_a + T_l\tau}. \tag{7}$$

Аналогично определяются второе и последующие приближения. Отметим, что сопоставление результатов расчета по уравнению (7) с точными решениями (1) на ЭВМ показало практическую приемлемость первого приближения.

Уравнение (7) определяет изменение скорости жидкости в трубопроводе в насосном режиме и может служить для оценки влияния постоянных системы T_l и T_a на переходный процесс.

Определяя из (4) и (7) η и q для соответствующих моментов времени и подставляя их значения в (3), вычисляется давление до наступления тормозного режима.

В тормозном режиме переходный процесс рассчитывается по рекуррентным формулам, полученным из (2) и (3) путем перехода к конечным разностям:

$$q_n = (Aq_{n-1}^2 + Bq_{n-1}\eta_{n-1} + C\eta_{n-1}^2 + D)\,\Delta\tau + q_{n-1};$$

$$\eta_n = \frac{T_l}{T_a}(A_1 q_{n-1}^2 + B_1\eta_{n-1}q_{n-1} + C_1\eta_{n-1}^2)\,\Delta\tau + \eta_{n-1}; \tag{8}$$

$$\xi_n = A_0\eta_n^2 + B_0\eta_n q_n + C_0\eta_n^2 + D_0.$$

В турбинном режиме, в случае неизменного статического напора установки, имеет место затухающее периодическое изменение во времени угловой скорости и расхода, что вызывает колебание давления.

Изменения расхода $Q(t)$ и угловой скорости $\omega(t)$ в турбинном режиме расчитываются по уравнениям:

$$\begin{aligned} Q - Q_* &= e^{\alpha t}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t); \\ \omega - \omega_* &= e^{\alpha t}(C_3 \cos \Omega t + C_4 \sin \Omega t); \end{aligned} \tag{9}$$

где α и Ω — действительная и мнимая части корней характеристического уравнения, соответствующего (2);

ω_*, Q_* — предельные значения $\omega(t)$ и $Q(t)$ при $t \to \infty$, способ определения которых приводится в [5].

На рис. 1 представлены результаты некоторых расчетов, выполненных по уравнениям (1) на ЭВМ методом характеристик и по уравнениям (7), (8) и (9) вручную.

Сопоставление приведенных результатов показывает практическую приемлемость излагаемых соотношений для расчетов переходных процессов, вызванных отключением привода насоса в коротких водоводах.

Значения η_1 и q_1 при которых давление $\xi(\tau)$ достигает экстремальных величин, определяются из (3) при условии $\frac{d\xi}{d\tau} = 0$.

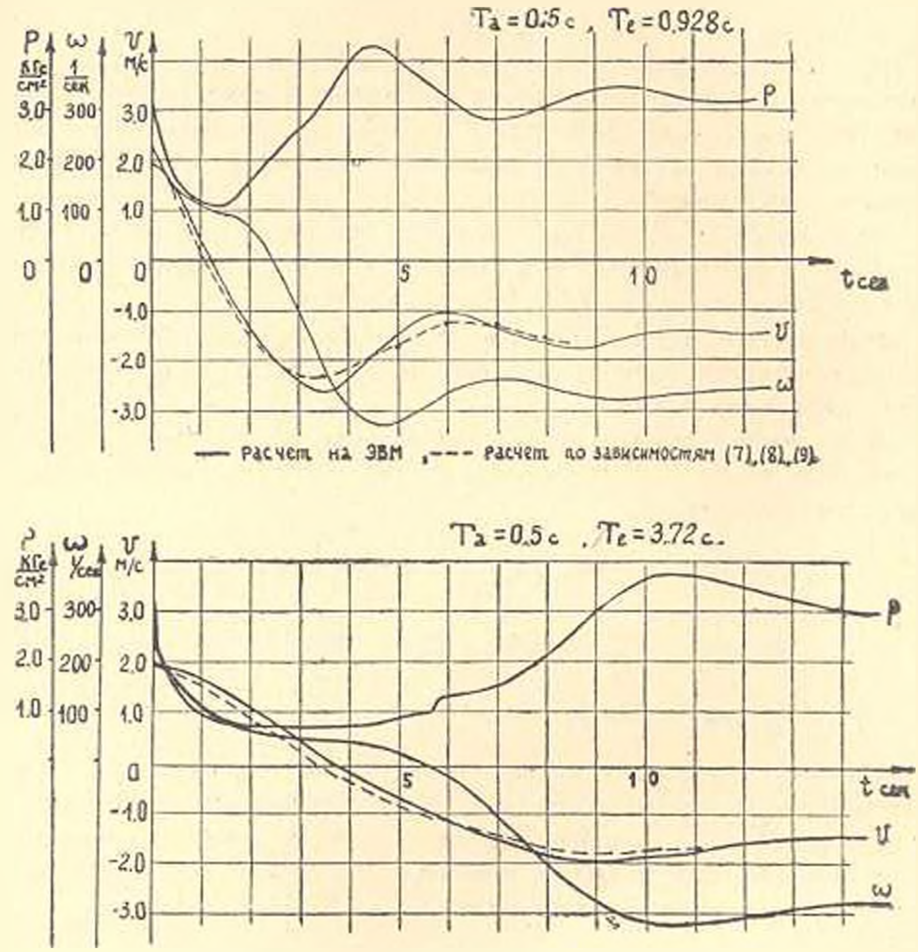

Рис. 1. Графики переходного процесса насоса 4К-12.

Вычислив производную функции $\xi(\tau)$ и используя выражение $\frac{d\eta}{d\tau}$ и $\frac{dq}{d\tau}$, из системы (2) получим, что значения η_1 и q_1 при которых функция $\xi(\tau)$ достигает экстремумов, связаны соотношением:

$$\left(2A_0C_1\frac{T_l}{T_a} + B_0C\right)\eta_1^3 + \left(2A_0B_1\frac{T_l}{T_a} + B_0C_1\frac{T_l}{T_a} + B_0B + 2C_0C\right)q\eta_1^2 +$$

$$+\left(2A_0A_1\frac{T_l}{T_a} + B_0B_1\frac{T_l}{T_a} + B_0A + 2BC_0\right)q^2\eta + \left(B_0A_1\frac{T_l}{T_a} + 2AC_0\right)q^3 +$$

$$+ B_0D\eta + 2C_0Dq = 0. \qquad (10)$$

В параметрическом представлении $\eta = uq$ соотношение (11) примет вид:

$$q = -\sqrt{\frac{-2C_0D - B_0Du}{Mu^3 + Nu^2 + Pu + R}}, \qquad (11)$$

где u — параметр;

$$M = 2A_0C_1\frac{T_l}{T_a} + B_0C; \quad N = 2A_0B_1\frac{T_l}{T_a} + B_0C_1\frac{T_l}{T_a} + B_0B + 2C_0C;$$

$$P = 2A_0A_1\frac{T_l}{T_a} + B_0B_1\frac{T_l}{T_a} + B_0A + 2BC_0; \quad R = B_0A_1\frac{T_l}{T_a} + 2AC_0.$$

На основании полученных зависимостей (3) и (11) построена номограмма для определения угловой скорости и расхода, соответствующих экстремальным давлениям в турбинном режиме (рис. 2). Приведенной кривой $\eta = f(q)$ принадлежит разделяющая точка F с координатами η_* и q_*, являющаяся особой точкой типа устойчивого фокуса системы дифференциальных уравнений (2).

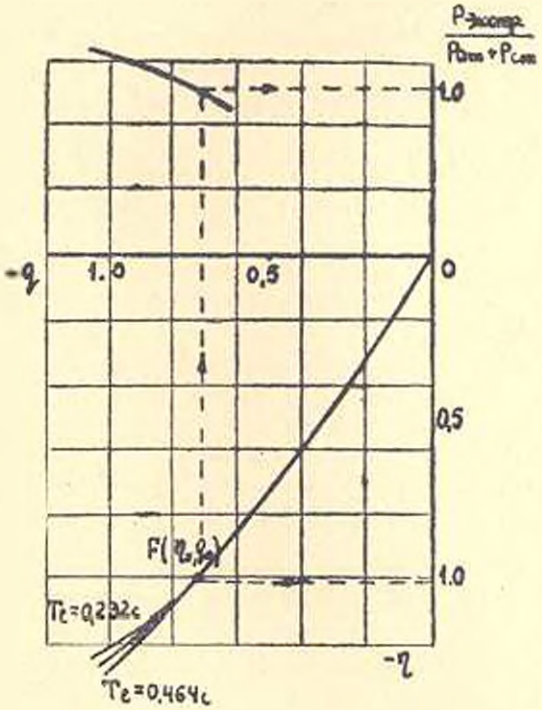

Рис. 2. Номограмма экстремальных давлений.

В турбинном режиме точки кривой с координатами $\eta_i > \eta_*$ и $q > q_*$ соответствуют максимальным давлениям, а $\eta_i < \eta_*$ и $q < q_*$ — минимальным давлениям в трубопроводе.

Как показала серия расчетов на ЭВМ при различных T_a и T_i, максимальные и минимальные давления близки по фазе с соответствующими значениями угловой скорости.

Это позволяет, исходя из величины разгонных оборотов насоса в зависимости от быстроходности n_s [4], используя номограмму, определить значение q и экстремальное давление $P_{экстр}$ в трубопроводе.

Институт водных проблем и гидротехники
ММиВХ АрмССР

Поступило 25.IV.1977

Ռ. Մ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ, Ռ. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՄՂԻՉ ԽՈՂՈՎԱԿԱՇԱՐՈՒՄ ՊՈՄՊԻ ՀԱՂՈՐԴԱԿԻ ԱՆՋԱՏՄԱՆ ԱՆՑՈՂԻԿ ՊՐՈՑԵՍԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Պոմպային կայանների հիդրոմեխանիկական սարքավորումների ընտրման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում գնահատել հնարավոր ճնշումների և արագությունների մեծությունները անցողիկ պրոցեսում։

Մղիչ կարճ խողովակաշարում հետադարձ փականի բացակայության դեպքում այդ մեծությունների հաշվարկի համար հոդվածում առաջարկվում են պարզեցված կախումներ։

Ջրանիվային ռեժիմում առաջացած մաքսիմալ և մինիմալ ճնշումները որոշելու համար բերվում է նոմոգրամ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герасимов Г. Г.* Расчет и исследования процессов в насосных установках с короткими водоводами. Диссертационная работа, Ровно, 1973.
2. *Мошнин Л. Ф., Тимофеева Е. Т.* Указания по защите водоводов от гидравлического удара. М., Госстройиздат, 1961 (ВОДГЕО).
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1959.
4. *Находкин Б. И.* Круговая характеристика насоса. «Гидротехника и мелиорация» № 6, 1956.
5. *Рафаэлян Р. М.* Исследование неустановившегося движения в системе насос—трубопровод. «Известия АН АрмССР, серия технич. наук», т. XXVIII, № 6, 1975.

УДК 621.911:621.91.025

Объемная деформация стружки, как показатель определения обрабатываемости. Касьян М. В., Багдасарян Г. Б., Арзуманян А. М. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXX, № 5, 1977, 5—11.

Показано, что при уменьшении скорости или увеличении глубины резания возможен переход от сливной стружки к стружке надлома с возникновением трещины у режущей кромки. Кроме того, показано, что форма стружки в основном зависит от величины m и K.

Опытами установлено, что чем меньше отношение m/K, тем тоньше стружка и тем меньше ее объемная деформация. Следовательно, увеличивается стойкость резца, уменьшаются силы резания и вероятность трещинообразования в материале в зоне контакта, при этом улучшается чистота поверхности и, по-видимому, отношение m/K можно считать характеристикой обрабатываемости.

Авторы предлагают отношение m/K считать новым критерием оптимизации режимов резания наравне с объемной деформацией стружки. Кроме того, установлено, что между объемной деформацией δ_u и отношением m/K есть определенная взаимосвязь. Методом линейного программирования определены оптимальные значения v, s, t, а также взаимосвязь между δ_u и m/K. Установлено, что по объемной деформации стружки можно судить об обрабатываемости резания.

Илл. 1. Табл. 3. Библ. 7 назв.

УДК 621.311—50

Исследования алгоритмов решения уравнений установившегося режима электрической системы. Адонц Г. Г. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXX, № 5, 1977, 12—17.

Рекомендуются решения уравнений установившегося режима эквивалентных и открытых (неэквивалентных) схем.

Библ. 1 назв.

УДК 620.1:539.376

Об одной вариационной задаче о прижатии слоя к основанию при учете реологических свойств материала. Задоян М. А. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXX, № 5, 1977, 18—33.

Приводится приложение вариационных методов теории ползучести и пластичности к плоской и осесимметричной задачам о прижатии сосредоточенной силой полосы из упруго-ползучего и пластически упрочняющегося материала к упруго-ползучему основанию. Контакт между слоем и основанием считается без сцепления с неизвестными и переменными во времени границами. Материал основания считается упруго-ползучим, подчиняющимся уравнениям наследственной теории ползучести Маслова—Арутюняна.

Илл. 4. Библ. 20 назв.

УДК 556.3

Гидродинамические методы определения эксплуатационных запасов подземных вод с учетом изменения их качества под влиянием поверхностных вод. Ананян С. А., Ананян А. К. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXX, № 5, 1977, 34—54.

Излагаются гидродинамические основы определения эксплуатационных запасов подземных вод и способов их рационального использования для различных нужд, а также методика прогноза изменения качества подземных вод под влиянием поверхностных загрязняющих источников. К этим задачам отнесены гидродинамические методы расчета пополнения подземных вод в межгорных впадинах. Перечисленные задачи решены применительно к межгорным впадинам на примере Араратской равнины АрмССР.

Илл. 9. Табл. 1. Библ. 11 назв.

УДК 532.595.2.001.24

К расчету переходного процесса в нагнетательном трубопроводе при отключении привода насоса. Рафаэлян Р. М., Аветисян Р. С. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXX, № 5, 1977, 55—60.

При выборе гидромеханического оборудования насосных станций часто возникает необходимость оценки величин возможных давлений и скоростей воды в переходном процессе. В работе предлагаются упрощенные зависимости для расчета этих величин при отсутствии обратного клапана на коротком нагнетательном трубопроводе. Приводится номограмма для определения максимальных и минимальных давлений, возникающих в турбинном режиме.

Илл. 2. Библ. 5 назв.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ