ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ISSN 0002-3051

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

Հատոր
Том 77 № 2 2024
Volume

Технический редактор: **Геворкян Г.З.,** Ответственный секретарь: **Авдалян Ж.А.**

E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02	Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02	24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №2, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-3

УПРУГО-СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ КОНСТРУКЦИИ С МАГНИТНЫМ ЭКРАНОМ

Агаян К.Л., Атоян Л.А.

Ключевые слова: упруго-спиновые волны, ферромагнитное полупространство, ферромагнитный слой, магнитный экран.

Aghayan K.L., Atoyan L.A.

Elastic-spin waves in a two-phase ferromagnetic structure with a magnetic screen

Key words: elastic-spin waves, ferromagnetic half-space, ferromagnetic layer, magnetic screen.

This paper examines elastic-spin wave processes associated with reflection and refraction at the boundary of a ferromagnetic half-space and a ferromagnetic layer with a magnetic screen. The described structure is in a constant external magnetic field. The corresponding wave fields were found, and the dependence of the reflection and refraction coefficients on the intensity of the external magnetic field was studied. For a particular case, the corresponding graphs were constructed.

Աղայան Կ.Լ., Աթոյան Լ.Հ.

Առաձգասպինային ալիքներ մագնիսական էկրանով երկֆազ ֆերոմագնիսական կառուցվածքում

Բանալի բառեր՝ առաձգասպինային ալիքներ, ֆերոմագնիսական կիսատարածություն, ֆերոմագնիսական սալ, մագնիսական էկրան:

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են ֆերոմագնիսական կիսատարածության և մագնիսական էկրանով ֆերոմագնիսական շերտի միացման սահմանին առաձգասպինային ալիքների անդրադարձման և բեկման գործընթացները: Նկարագրված ֆերոմագնիսական կառուցվածքը գտնվում է մշտական արտաքին մագնիսական դաշտում: Գտնվել են համապատասխան ալիքային դաշտերը, ուսումնասիրվել են անդրադարձման և բեկման գործակիցների կախվածությունը արտաքին մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից: Մասնավոր դեպքում կառուցվել են համապատասխան գրաֆիկներ:

В данной работе рассматриваются упруго-спиновые волновые процессы, связанные с отражением и преломлением на границе ферромагнитного полупространства и ферромагнитного слоя с магнитным экраном. Описанная конструкция находится в постоянном внешнем магнитном поле. Найдены соответствующие волновые поля, а также исследована зависимость коэффициентов отражения и преломления от интенсивности внешнего магнитного поля. Для частного случая построены соответствующие графики.

1.Введение. Задачи магнитоупругого взаимодействия в магнитоупорядоченных средах привлекают все большее внимание исследователей в связи с ростом практического интереса к производству приборов и устройств спинтроники. Общая теория упруго-спиновых волн развивалась в работах [1-4], чисто спиновые волны исследовались в работах [3,4,9,14], в работах [5-8,10,12,13,15,16] рассматривались магнитоупругие волны.

В предлагаемой работе рассматриваются задачи отражения и преломления упруго-спиновых волн в ферромагнитной конструкции, представляющей собой ферромагнитное полупространство (подложка) и примыкающий к нему ферромагнитный слой с магнитным экраном на его поверхности (Фиг.1). Предполагается, что вся конструкция находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, направленном по оси Oz. Помимо упомянутых задач исследуются также зависимости амплитуд отраженной, преломленной и сопутствующих волн от интенсивности внешнего магнитного поля. Приведены соответствующие графики зависимостей.

2. Постановка задачи. Рассмотрим ферромагнитное полупространство, в декартовой системе координат $Oxyz$ занимающее область $(-\infty < x; z < \infty; y > 0)$, и примыкающий к нему ферромагнитный слой $(-\infty < x; z < \infty; -h < y < 0)$ с магнитным экраном на свободной поверхности (Фиг.1). Полагаем, что вся конструкция находится в постоянном внешнем магнитном поле $\vec{H}_0(0,0,H_0)$, направленном по оси $0z$. Вектор объёмной намагниченности насыщения ферромагнетика $\vec{M}_0(0,0,M_0)$ также направлен по оси $0z$. Предполагается, что из бесконечности на поверхность ферромагнитного полупространства под углом ϑ падает заданная сдвиговая плоская упруго-спиновая волна с парциальными компонентами:

$$w_I(x,y,t) = w_\infty(x,y)e^{-i\omega t} = W_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}$$

$$\mu_I(x,y,t) = \mu_\infty(x,y)e^{-i\omega t} = M_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}$$

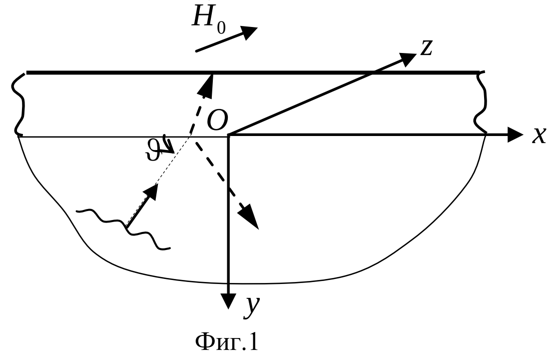
$$\nu_I(x,y,t) = \nu_\infty(x,y)e^{-i\omega t} = N_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}$$

$$\varphi_I(x,y,t) = \varphi_\infty(x,y)e^{-i\omega t} = \Phi_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}$$

$$q = k\sin\vartheta,\ p = k\cos\vartheta$$

где $w_\infty(x,y), \mu_\infty(x,y), \nu_\infty(x,y), \varphi_\infty(x,y)$ -амплитуды компонент упруго-спиновых волн, W_I, M_I, N_I, Φ_I -постоянные, p,q -компоненты волнового вектора $\vec{k}$, ω - круговая частота, $0 < \vartheta < \pi/2$ - угол скольжения падающих волн, t -время.

Задача рассматривается в рамках антиплоской деформации, т.е. у перемещений только z компонента отлична от нуля, т.е. $\vec{w}(0,0,w(x,y,t))$. Определяющая система уравнений, описывающая механические перемещения и движение плотности намагниченности в ферромагнитном теле представляется в виде [1-3, 6]:



Фиг.1

$$
\begin{aligned}
&w_{tt} = \bar{S}^2 \Delta w + B(\mu_x + \nu_y),\;\; \dot{\mu} = \omega_M (\varphi_y + \hat{b}\nu + Bw_y) \\
&\dot{\nu} = -\omega_M (\varphi_x + \hat{b}\mu + Bw_x),\;\; \Delta\varphi = \mu_x + \nu_y
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\omega_M = \gamma M_0, M_0 = \rho\mu_0$, ρ -плотность материала, γ -гиромагнитное отношение, $\vec{\mu}_0(\mu,\nu,0)$ массовая плотность насыщения намагниченности среды, $B = (b + \bar{f})\mu_0$, $\hat{b} = b + \dfrac{H_0}{M_0}; b, \bar{f}$ -магнитоупругие коэффициенты связи, $\bar{S}^2 = \dfrac{G}{\rho}, G$ -модуль сдвига, $\bar{S}$ - скорость упругой волны, φ -магнитный потенциал.

Граничные и контактные условия задаются в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x,y,t)\,|_{y=0} = \varphi_2(x,y,t)\,|_{y=0} \\
&w_1\,|_{y=0} = w_2\,|_{y=0} \\
&[\varphi_{1y} - \rho_1\nu_1]_{y=0} = [\varphi_{2y} - \rho_2\nu_2]_{y=0} \\
&[G_1 w_{1y} + B_1\rho_1\nu_1]_{y=0} = [G_2 w_{2y} + B_2\rho_2\nu_2]_{y=0} \\
&[\varphi_{2y} - \rho_2\nu_2]_{y=-h} = 0 \\
&w_2\,|_{y=-h} = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Выше индексы 1 и 2 относятся соответственно к подложке и полосе (что верно и впредь). Первое соотношение (2) это условие параллельности векторов магнитного поля на границе соприкосновения, второе - это условие равенства перемещений, третье - условие параллельности магнитных индукций, четвертое - условие равенства магнитоупругих напряжений, пятое - условие равенства нулю магнитной индукции на магнитном экране, шестое - условие закрепления. Рассмотрен также случай, когда вместо шестого условия (2) берется условие свободного края: $[G_2 w_{2y} + B_2\rho_2\nu_2]_{y=-h} = 0$.

Ставится задача определения волновых полей в рассматриваемой конструкции, а также установление зависимости амплитуд упруго-спиновых волн от величины внешнего магнитного поля.

3. Решение задачи. Решение системы (1) ищем в виде плоских гармонических волн:

$$
(w,\mu,\nu,\varphi) = (\tilde{W},\tilde{M},\tilde{N},\tilde{\Phi})e^{i\bar{q}y}e^{i(\bar{p}x-\omega t)} \tag{3}
$$

где $\tilde{W},\tilde{M},\tilde{N},\tilde{\Phi}$ -постоянные, $\bar{p},\bar{q}$ -компоненты волнового вектора упруго-спиновых волн, ω - круговая частота, t - время.

Подставив (3) в (1), получим следующую однородную систему уравнений для определения безразмерных амплитуд W, M, N, Φ:

$$
\begin{aligned}
&(\Omega^2 - kS^2)W + ipM + iqBN = 0 \\
&iqBW + i\Omega M + \hat{b}N + iq\Phi = 0 \\
&ipBW + \hat{b}M - i\Omega N + ip\Phi = 0 \\
&ipM + iqN + k^2\Phi = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где безразмерные величины определяются по формулам:

$$\tilde{W}=\sqrt{\lambda}W,\quad \tilde{M}=\mu_0 M,\quad \tilde{N}=\mu_0 N,\quad \tilde{\Phi}=\sqrt{\lambda}\Phi,\quad \bar{S}^2=\lambda\omega_M^2 S^2,$$

$$\bar{f}=\lambda\gamma^2\rho f,\quad \omega=\omega_M\Omega,\quad \bar{p}=\sqrt{\lambda}p,\quad \bar{q}=\sqrt{\lambda}q,\quad k^2=p^2+q^2$$

где λ -коэффициент обменного взаимодействия. Из (4) следуют характеристическое уравнение и соотношения между амплитудами парциальных волн:

$$k^2[(\Omega^2-k^2S^2)(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)-\hat{b}Bk^2]=0 \tag{5}$$

$$M=\frac{B(ip\hat{b}-q\Omega)}{\Omega^2-\Omega_{SV}^2}W;\quad N=\frac{B(p\Omega+iq\hat{b})}{\Omega^2-\Omega_{SV}^2}W;\quad \Phi=\frac{B\hat{b}}{\Omega^2-\Omega_{SV}^2}W \tag{6}$$

где $\Omega_{SV}^2=\hat{b}^2+\hat{b}$.

Из характеристического уравнения (5) для поперечных компонент волнового вектора получаем следующие соотношения:

$$q_{1,2}=\pm q_0 \tag{7}$$

$$q_{3,4}=\pm ip \tag{8}$$

$$q_0=\sqrt{\frac{\Omega^2(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)}{S^2(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}-p^2};\qquad \tilde{\Omega}_{SV}^2=\Omega_{SV}^2-\hat{b}BS^{-2} \tag{9}$$

В подложке решения $q_1=-q_{01}, q_2=q_{01}$ соответствуют падающей и отраженной волнам (q_{01}-это величина q_0 в подложке, а q_{02} - в слое), $q_3=ip$ соответствует сопутствующей, неоднородной волне в подложке, $q_4=-ip$ в подложке не имеет физического смысла.

Преломленной и сопутствующей волнам в слое соответствуют поперечные компоненты волнового вектора: $q_{5,6}=\pm q_{02}, q_{7,8}=\pm ip$.

Таким образом, упруго-спиновая волна в полупространстве представляется в виде совокупности парциальных волн:

$$\begin{gathered}\mu_1=\mu_I+\mu_R+\mu_{S1},\ \nu_1=\nu_I+\nu_R+\nu_{S1}\\ \varphi_1=\varphi_I+\varphi_R+\varphi_{S1},\ \ w_1=w_I+w_R+w_{S1}\end{gathered} \tag{10}$$

Решения в слое имеют вид:

$$\begin{gathered}\mu_2=\mu_T^{(1)}+\mu_T^{(2)}+\mu_{S2}^{(1)}+\mu_{S2}^{(2)},\ \nu_2=\nu_T^{(1)}+\nu_T^{(2)}+\nu_{S2}^{(1)}+\nu_{S2}^{(2)}\\ \varphi_2=\varphi_T^{(1)}+\varphi_T^{(2)}+\varphi_{S2}^{(1)}+\varphi_{S2}^{(2)},\ w_2=w_T^{(1)}+w_T^{(2)}+w_{S2}^{(1)}+w_{S2}^{(2)}\end{gathered} \tag{11}$$

Индексы $I,R,T,S1,S2$ относятся соответственно к падающей, отраженной, преломленной и сопутствующим волнам в подложке и слое.

Падающая волна в подложке имеет вид:

$$(\mu_I,\nu_I,\varphi_I,w_I)=(M_I,N_I,\Phi_I,W_I)e^{-iq_{01}y}e^{i(px-\omega t)} \tag{12}$$

Отраженная в подложке:

$$(\mu_R,\nu_R,\varphi_R,w_R)=(M_R,N_R,\Phi_R,W_R)e^{iq_{01}y}e^{i(px-\omega t)} \tag{13}$$

Сопутствующая в подложке:

$$(\mu_{S1},\nu_{S1},\varphi_{S1},w_{S1})=(M_{S1},N_{S1},\Phi_{S1},W_{S1})e^{-py}e^{i(px-\omega t)} \tag{14}$$

Преломленные волны в слое представлены в виде:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_T^{(1)},\nu_T^{(1)},\varphi_T^{(1)},w_T^{(1)})=(M_T^{(1)},N_T^{(1)},\Phi_T^{(1)},\mathrm{W}_T^{(1)})e^{-iq_{02}y}e^{i(px-\omega t)}\\
&(\mu_T^{(2)},\nu_T^{(2)},\varphi_T^{(2)},w_T^{(2)})=(M_T^{(2)},N_T^{(2)},\Phi_T^{(2)},\mathrm{W}_T^{(2)})e^{iq_{02}y}e^{i(px-\omega t)}\\
&(\mu_{S2}^{(1)},\nu_{S2}^{(1)},\varphi_{S2}^{(1)},w_{S2}^{(1)})=(M_{S2}^{(1)},N_{S2}^{(1)},\Phi_{S2}^{(1)},\mathrm{W}_{S2}^{(1)})e^{py}e^{i(px-\omega t)}\\
&(\mu_{S2}^{(2)},\nu_{S2}^{(2)},\varphi_{S2}^{(2)},w_{S2}^{(2)})=(M_{S2}^{(2)},N_{S2}^{(2)},\Phi_{S2}^{(2)},\mathrm{W}_{S2}^{(2)})e^{-py}e^{i(px-\omega t)}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Подставив (10) и (11) в граничные условия (2), относительно неизвестных амплитуд получим систему:

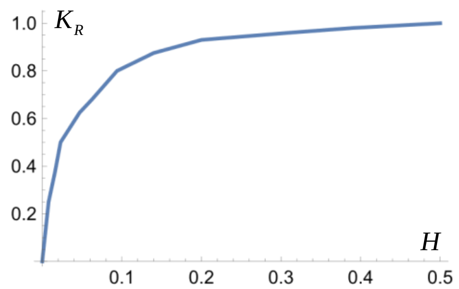
$$
\begin{aligned}
&\Phi_I+\Phi_R+\Phi_{S1}=\Phi_T^{(1)}+\Phi_T^{(2)}+\Phi_{S2}^{(1)}+\Phi_{S2}^{(2)};\\
&W_I+W_R+W_{S1}=W_T^{(1)}+W_T^{(2)}+W_{S2}^{(1)}+W_{S2}^{(2)};\\
&-iq_{01}\Phi_I+iq_{01}\Phi_R-p\Phi_{S1}-\rho_1(N_I+N_R+N_{S1})=-iq_{02}\Phi_T^{(1)}+iq_{02}\Phi_T^{(2)}+\\
&+p\Phi_{S2}^{(1)}-p\Phi_{S2}^{(2)}-p\Phi_{S2}^{(2)}-\rho_2(N_T^{(1)}+N_T^{(2)}+N_{S2}^{(1)}+N_{S2}^{(2)});\\
&G_1(-iq_{01}W_I+iq_{01}W_R-pW_{S1})+\rho_1B_1(N_I+N_R+N_{S1})=\\
&=G_2(-iq_{02}W_T^{(1)}+iq_{02}W_T^{(2)}+pW_{S2}^{(1)}-pW_{S2}^{(2)})+\\
&+\rho_2B_2(N_T^{(1)}+N_T^{(2)}+N_{S2}^{(1)}+N_{S2}^{(2)});\\
&(-iq_{02}\Phi_T^{(1)}e^{iq_{02}h}+iq_{02}\Phi_T^{(2)}e^{-iq_{02}h}+p\Phi_{S2}^{(1)}e^{-ph}-p\Phi_{S2}^{(2)}e^{ph})-\rho_2(N_T^{(1)}e^{iq_{02}h}+\\
&+N_T^{(2)}e^{-iq_{02}h}+N_{S2}^{(1)}e^{ph}+N_{S2}^{(2)}e^{-ph})=0;\\
&W_T^{(1)}e^{iq_{02}h}+W_T^{(2)}e^{-iq_{02}h}+W_{S2}^{(1)}e^{-ph}+W_{S2}^{(2)}e^{ph}=0;
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Далее, воспользовавшись соотношениями (6), выразим амплитуды парциальных волн через амплитуду перемещения и, введя обозначения: $K_R=\dfrac{W_R}{W_I}, K_{S1}=\dfrac{W_{S1}}{W_I}$, $K_T^{(1)}=\dfrac{W_T^{(1)}}{W_I}, K_T^{(2)}=\dfrac{W_T^{(2)}}{W_I}, K_{S2}^{(1)}=\dfrac{W_{S2}^{(1)}}{W_I}, K_{S2}^{(2)}=\dfrac{W_T^{(2)}}{W_I}$, мы получим неоднородную систему уравнений для определения неизвестных $K_R, K_{S1}, K_T^{(1)}, K_T^{(2)}, K_{S2}^{(1)}, K_{S2}^{(2)}$.

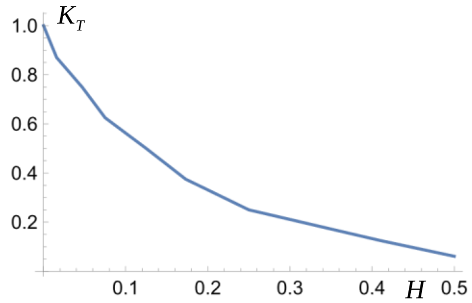
Решение этой системы приводит нас к определению волновых полей упруго-спиновых волн в рассматриваемой конструкции. Ввиду громоздкости, соответствующие вычисления здесь не приводятся.

Перейдем к нахождению зависимостей коэффициентов отраженных и преломленных волн от интенсивности внешнего постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$. Результаты численного исследования этих зависимостей приведены на фиг.2-5 для частного случая, когда и подложка, и слой собой представляют железо-иттриевый гранат (ЖИГ) при фиксированной частоте волны Ω=0.1 и фиксировнном угле падения. На фиг.2 и фиг. 3 изображены зависимости коэффициентов отраженной и преломленной волн от величины внешнего магнитного поля. На фиг. 4 и фиг.5 представлены зависимости коэффициентов сопутствующих волн в подложке и слое от интенсивности внешнего магнитного поля. Как видно из графиков величины отраженной, преломленной и сопутствующих волн сильно зависят от интенсивности внешнего магнитного поля.

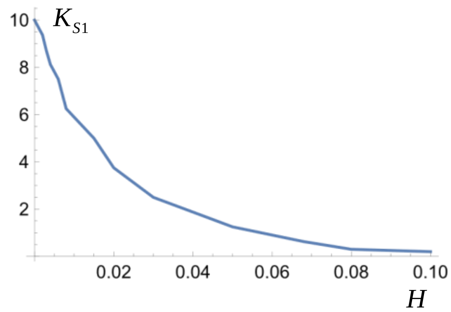
Резюмируя, можно утверждать, что с помощью внешнего магнитного поля возможно контролировать величину (энергию) отраженных, преломленных и сопутствующих волн в нашей конструкции.



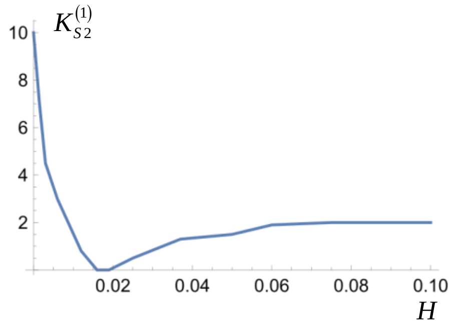
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

4. Заключение. Рассмотрена задача отражения и преломления упруго-спиновой волны в конструкции, где к ферромагнитному полупространству примыкает ферромагнитный слой с магнитным экраном. Вся конструкция находится во внешнем постоянном магнитном поле.

Найдены волновые поля в рассматриваемой конструкции, а также показано, что кроме отраженных и преломленных волн могут возникать еще сопутствующие неоднородные волны с экспоненциальным законом затухания вглубь полупространства.

В результате численного исследования выявлена сильная зависимость коэффициентов отражения и преломления от интенсивности внешнего магнитного поля. Это дает основание полагать, что изменением интенсивности магнитного поля можно контролировать величину отраженных и преломленных магнито-упругих волн. Для частного случая приведены графики зависимостей коэффициентов отраженной, преломленной и сопутствующих волн от величины внешнего магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991, 560 стр.
2. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. Москва: Наука, 1973 стр.591.
3. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.

4. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З. “Квазипериодические спиновые волны в одномерной ферромагнитной среде”. Proceed. of VIII Int. Conf. “The problems of dynamics of interaction of deformable media”, 22-25 Sept., 2014, Goris-Stepanakert, p.205-212.
5. Danoyan Z., Piliposian G, Hasanyan D. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves Rand. Complex Media 19(4), 567-584 (2009).
6. Hasanyan D.,Batra R. Antiplane Shear Waves in Two Contacting Ferromagnetic Half Spaces. J. Elast. (2011) 103, p.189-203.
7. Parekh J.P. Magneto elastic surface wave in ferrites // Electron. Lett. 1969, [Vol 5], №14, - P.322-323.
8. Bernardo L., Mills D.L., Reflection of magneto-elastic waves from ferromagnetic surfaces, Phys. Rev. B 22 (1980), pp. 4445 – 4449.
9. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Р., Атоян Л.А., Манукян Г.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства. Тр. VI межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформ. сред» 2008, Горис–Степанакерт, с.115-125.
10. Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А. Упруго–спиновые волны в слоистой среде ферромагнит–диэлектрик. Тр. IV межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Армения, Цахкадзор, 21-26 сент., 2015г., стр.185-189.
11. Kittel C. Interaction of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals. Phys. Rev. B110, 1958, 836-841.
12. Bagdasarian G.E., Hasanyan D.J. Magneto-elastic interaction between soft ferromagnetic-elastic half-plane with crack and constant magnetic field, Int. J. Solids Struct. 37,2000 y., p. 5371-5383.
13. Camley R.E., Maradudin A.A. Pure shear elastic surface wave guided by the interface between two semi-infinite magneto-elastic media. Appl. Phys. Lett. 38(8), 1981, 610-612.
14. Nikitov, S.A., Tailhades, Ph., Tsai, C.S. Spin waves in periodic magnetic structures-magnonic crystals. J.Magnet.Mater, v.23, 3, 2001, p.p.320-331.
15. Агаян К.Л., Атоян Л.А., Упруго-спиновые волны в ферромагнитном полупространстве с экраном, Изв. НАН Армении, Механика т.76, 2, 2023 г., с. 3-10.
16. Агаян К.Л., Атоян Л.А. Упруго-спиновые волны в ферромагнитной среде с экраном, Тезисы докладов 22-ой Международной конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, г. Ростов-на-Дону, 11-13 окт., 2023 г.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – д.ф.-м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович – к.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
E-mail: levous@mail.ru

Поступила в редакцию 25 января 2024г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №2, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-10

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ К ГРАНИЦЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: динамическая смешанная задача, трещина, штамп, стационарные колебания.

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A.

Forced vibrations of a semi-infinite plate with a system of collinear cracks parallel to the boundary

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, stamp, crack, vibrations.

Paper considers a generalized plane-stressed state of an elastic half-plane, which at a certain depth from the boundary contains collinear finite cracks parallel to the boundary and is deformed by an absolutely rigid, smooth stamp with a flat base, acting on a certain section of the boundary of the half-plane and under the influence of a vertical, harmonically varying during the time concentrated load. Using the method of discontinuous solutions for the equations of motion of the plane theory of elasticity for a half-plane with internal cracks, the governing system of singular integral equations of the problem was derived, the solution of which was constructed using the numerical-analytical method of mechanical quadrature. In case when there is only one crack, numerical calculations were carried out and patterns of changes in the moduli of contact stresses acting under the stamp, the angle of rotation of the stamp and the intensity coefficients of destructive stresses at the end points of the crack were revealed depending on the frequency of forced vibrations and the relative position of the crack and the stamp.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա.

Եզրին զուգահեռ համագիծ ճաքերի համակարգ պարունակող կիսաանվերջ սալի ստիպողական տատանումները

Հիմնաբառեր. դինամիկ խառը եզրային խնդիր, դրոշմ, ճաքեր, ստիպողական տատանումներ

Դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության ընդհանրացված հարթ լարված վիճակը, որը եզրագծից որոշակի խորության վրա պարունակում է եզրագծին զուգահեռ համագիծ վերջավոր ճաքեր և դեֆորմացվում է եզրագծի որոշակի տեղամասում գործող և ժամանակի ընթացքում ներդաշնակ փոփոխվող կենտրոնացած բեռի ազդեցության տակ գտնվող ողորկ, հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի օգնությամբ։ Ներքին ճաքեր պարունակող կիսահարթության համար առաձգականության տեսության շարժման հավասարումների խզվող լուծումների մեթոդի օգնությամբ ստացված է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը, որի լուծումները կառուցված են մեխանիկական քառակուսացման թվային-վերլուծական մեթոդով։ Այն դեպքում, երբ առկա է միայն մեկ ճաք, կատարվել են թվային հաշվարկներ և պարզվել են դրոշմի տակ գործող լարումների մոդուլների, դրոշմի պտտման անկյան և ճաքի ծայրակետերում քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցների փոփոխության օրինաչափությունները՝ կախված ստիպողական տատանումների հաճախականությունից ու ճեղքի և դրոշմի հարաբերական դիրքից։

Рассматривается обобщённое плоско-напряжённое состояние упругой полуплоскости, которая на некоторой глубине от границы содержит коллинеарные конечные трещины, параллельные границе, и деформируется под действием абсолютно жёсткого, гладкого штампа с плоским основанием, расположенного на некотором участке границы полуплоскости и находящегося под влиянием вертикальной, гармонически изменяющейся во времени, сосредоточенной нагрузки. Методом разрывных решений из уравнений движения плоской теории упругости для полуплоскости с внутренними трещинами выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. В случае, когда имеется только одна трещина проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения модулей контактных напряжений, действующих под штампом, угла поворота штампа и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от частоты вынужденных колебаний и взаиморасположения трещины и штампа.

Введение. Динамические смешанные и контактные задачи являются одним из развивающихся направлений математической теории упругости. Полученные здесь результаты важны как с теоретической, так и с практической точек зрения. Развитию этого направления посвящено огромное количество работ. Многие основополагающие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1-4]. Здесь разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами. Изучению динамических контактных и смешанных задач для однородных и составных плоскостей, полуплоскостей и полупространств с концентраторами напряжений различного типа посвящено много работ. Из них отметим работы [5-13], где рассмотрены некоторые плоские и пространственные динамические контактные и смешанные задачи. Приведём также работы [14-17], которые тесно связаны с рассматриваемой задачей. Одновременно нужно констатировать, что мало изучено взаимовлияние концентраторов напряжений различного типа, одновременно находящихся в массивных однородных или составных телах, что является весьма важной задачей как для сейсмологии, так и для сейсмоустойчивого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии.

В этой связи отметим работы [14-17], где изучены вынужденные колебания составного полупространства, составной плоскости с межфазными трещинами и включениями, а также однородной полуплоскости с жёстким включением и непосредственно связаны с настоящей работой.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Рассмотрим обобщённое плоско-напряжённое состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламе λ и μ, которая отнесена к декартовой системе координат Oxy, ось Ox которой параллельна границе полуплоскости и проходит на некоторой глубине h от границы. Пусть на линии $y=0$ на системе интервалов $L=\bigcup_{k=1}^{N}\left(a_k,b_k\right)$, состоящей из непересекающихся интервалов $\left(a_k,b_k\right)$, полуплоскость расслаблена параллельной к границе системой конечных трещин. Полагаем, что полубесконечная пластина деформируется под воздействием абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием, расположенного на интервале $\left[c,d\right]$ границы пластины и колеблющегося в вертикальном направлении под действием гармонической нормальной нагрузки $P_0e^{i\omega t}$. Принимается также, что между штампом и полуплоскостью имеет место гладкий контакт, т.е. тангенциальные контактные напряжения отсутствуют, ктоме того на берега трещин действуют равные и противоположно направленные нормальные нагрузки, независящие от времени и не допускающие закрытие трещин при деформировании пластины. В дальнейшем, используя линейность поставленной задачи, представим её в виде суммы двух задач, в первой из которых берега трещин будем считать свободными от напряжений, а во второй задаче будем полагать, что пластина деформируется под воздействием статических нагрузок интенсивности $q(x)$, приложенных к берегам трещин, а на отрезке $[c,d]$ границы полуплоскости присутствует абсолютно жёсткая накладка, ограничивающая вертикальные смещения. Для первой задачи полубесконечную пластину представим как составную, составленную из полосы высоты h и полуплоскости с линией раздела $y=0$ и, снабдив индексами 1 и 2 соответственно все характерные величины полосы и полуплоскости, поставленную задачу математически представим в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,h,t)=0 & x\notin(c,d); \\ v_1(x,h,t)=(\delta+\gamma x)e^{i\omega t} & x\in(c,d); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,h,t)=0 & (-\infty<x<\infty); \end{cases} \tag{1a}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0,t)=\sigma_y^{(2)}(x,0,t);\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0,t)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0,t) & (-\infty<x<\infty) \\ v_1(x,0,t)=v_2(x,0,t);\ u_1(x,0,t)=u_2(x,0,t) & x\notin L \end{cases} \tag{1b}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0,t)=\sigma_y^{(2)}(x,0,t)=0 & (x\in L) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0,t)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0,t)=0 & (x\in L) \end{cases} \tag{1c}$$

Здесь, и далее, $\sigma_y^{(j)}(x,y,t)\ (j=1,2)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y,t)\ (j=1,2)$ - нормальные и касательные напряжения, действующие в полосе и в полуплоскости соответственно, $v_j(x,y,t)\ (j=1,2)$ и $u_j(x,y,t)\ (j=1,2)$ – нормальные и горизонтальные смещения точек полосы и полуплоскости соответственно, удовлетворяющие уравнениям движения в смещениях, γ – угол поворота штампа, а δ – амплитуда колебаний штампа. Учитывая гармонический характер напряжённо-деформированного состояния, в (1) по формулам $f(x,y,t)=f(x,y)e^{i\omega t}$ перейдём к амплитудам и по формулам

$$u_1(x,0)-u_2(x,0)=u(x);\ v_1(x,0)-v_2(x,0)=v(x)\quad (x\in L) \tag{2}$$

введём в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности смещений точек берегов трещин $u(x)$, $v(x)$ и функцию амплитуды контактного давления $P(x)$. Затем рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1b), (2) и из условий (1.a), второе из условий которой заменено условием $\sigma_y^{(1)}(x,h)=-P(x)$

$x \in (c,d)$. Решив указанную вспомогательную задачу, построим разрывные решения уравнений Ламэ для полуплоскости с коллинеарными трещинами и выразим амплитуды компонент напряжений на линии полуплоскости $y=0$, а также нормальное смещение на линии $y=h$ через введённые функции. Для этого, решения уравнений движений, записанные для амплитуд смещений, представим в виде следующих интегралов Фурье:

$$\begin{gathered}
u_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-ik\left[A_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_1 y)+B_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_1 y)\right]+\right.\\
\left.+\chi_2\left[C_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_2 y)+D_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_2 y)\right]\right\}e^{-ikx}dk;\\
v_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\chi_1\left[A_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_1 y)+B_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_1 y)\right]+\right.\\
\left.+ik\left[C_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_2 y)+D_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_2 y)\right]\right\}e^{-ikx}dk;\\
u_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-ikA_1^{(2)}(k)e^{\chi_1 y}+\chi_2 C_1^{(2)}(k)e^{\chi_2 y}\right]e^{-ikx}dk;\\
v_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\chi_1 A_1^{(2)}(k)e^{\chi_1 y}+ikC_1^{(2)}(k)e^{\chi_2 y}\right]e^{-ikx}dk.
\end{gathered} \tag{3}$$

При этом компоненты амплитуд напряжений задаются формулами:

$$\begin{gathered}
\frac{\sigma_y^{(1)}(x,y)}{\mu}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(k^2+\chi_2^2\right)\left[A_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_1 y)+B_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_1 y)\right]+\right.\\
\left.+2ik\chi_2\left[C_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_2 y)+D_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_2 y)\right]\right\}e^{ikx}dk;\\
\frac{\sigma_y^{(2)}(x,y)}{\mu}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(k^2+\chi_2^2\right)A_1^{(2)}(k)e^{\chi_1 y}+2ik\chi_2 C_1^{(2)}(k)e^{\chi_2 y}\right]e^{ikx}dk;\\
\tau_{xy}^{(1)}(x,\mathrm{y})/\mu=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2ik\chi_1\left[A_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_1 y)+B_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_1 y)\right]-\right.\\
\left.-\left(k^2+\chi_2^2\right)\left[C_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_2 y)+D_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_2 y)\right]\right\}e^{ikx}dk;\\
\tau_{xy}^{(2)}(x,y)/\mu=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2ik\chi_1 A_1^{(2)}(k)e^{\chi_1 y}-\left(k^2+\chi_2^2\right)C_1^{(2)}(k)e^{\chi_2 y}\right]e^{ikx}dk,
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $A_1^{(j)}(k)$, $B_1^{(1)}(k)$, $C_1^{(j)}(k)$ и $D_1^{(1)}(k)$ $(j=1,2)$ – неизвестные постоянные, подлежащие определению,

$$\chi_j=\sqrt{k^2-\left(\frac{\omega}{c_j}\right)^2};\quad c_1=\sqrt{\frac{\lambda_*+2\mu}{\rho}};\quad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}};\quad \lambda_*=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)};$$

$$c_1^{\,2}=c_2^{\,2}/\theta;\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)};\qquad \theta=\frac{\mu}{\lambda_*+2\mu}=\frac{1-\nu}{2};\quad (j=1,2),$$

c_i $(j=1,2)$ – скорости распространения упругих, продольной и поперечной, волн в полуплоскости, а ν и E соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости материала полубесконечной пластины. При этом, выбраны те ветви функций $\chi_i(k)$ $(i=1,2)$, которые на бесконечности ведут себя как $|k|$ и, тем самым, обеспечивают затухание волн на бесконечности [18]. Далее, удовлетворив указанным выше условиям, для определения неизвестных коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}-2ik\chi_1\left(B_1^{(1)}(k)-A_1^{(2)}(k)\right)+\left(k^2+\chi_2^2\right)\left(C_1^{(1)}(k)-C_1^{(2)}(k)\right)=0\\ \left(k^2+\chi_2^2\right)\left[A_1^{(1)}(k)-A_1^{(2)}(k)\right]+2ik\chi_2\left[D_1^{(1)}(k)-C_1^{(2)}(k)\right]=0\\ -ikA_1^{(1)}(k)+\chi_2D_1^{(1)}(k)+ikA_1^{(2)}(k)-\chi_2C_1^{(2)}(k)=\bar{u}(k)\\ \chi_1B_1^{(1)}(k)+ikC_1^{(1)}(k)-\chi_1A_1^{(2)}(k)-ikC_1^{(2)}(k)=\bar{v}(k)\\ \left(k^2+\chi_2^2\right)\left[A_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_1h)+B_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_1h)\right]+\\ +2ik\chi_2\left[C_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_2h)+D_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_2h)\right]=-\bar{P}(k)/\mu;\\ -2ik\chi_1\left[A_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_1h)+B_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_1h)\right]+\\ +\left(k^2+\chi_2^2\right)\left[C_1^{(1)}(k)\operatorname{ch}(\chi_2h)+D_1^{(1)}(k)\operatorname{sh}(\chi_2h)\right]=0\end{cases}\tag{5}$$

где черточка над функциями означает образ Фурье, т.е.

$$\bar{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ikx}dx.$$

Решив полученную систему, неизвестные постоянные выразим через образы Фурье дислокаций компонентов смещений на трещинах и нормального контактного напряжения под штампом. Затем, выразим напряжения на берегах трещин и нормальное смещение под штампом через неизвестные дислокации смещений и контактные напряжения, действующие под штампом. Получим:

$$v_1'(x,h) = -\frac{1}{2\pi\mu(1-\theta)}\int_c^d \frac{P(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\mu}\int_c^d K_{1,1}(x-s)\,P(s)\,ds +$$

$$+\int_L K_{1,2}(x-s)\,v'(s)\,ds + \int_L K_{1,3}(x-s)\,u'(s)\,ds \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{\sigma_y^{(j)}(x,0)}{\mu} = \frac{(1-\theta)}{\pi}\int_L \frac{v'(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\mu}\int_c^d K_{2,1}(x-s)P(s)\,ds +$$

$$+\int_L K_{2,2}(x-s)\,v'(s)\,ds + \int_L K_{2,3}(x-s)\,u'(s)\,ds \quad (-\infty < x < \infty,\ j = 1,2) \tag{6}$$

$$\frac{\tau_{xy}^{(j)}(x,0)}{\mu} = \frac{(1-\theta)}{\pi}\int_L \frac{u'(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\mu}\int_c^d K_{3,1}(x-s)P(s)\,ds +$$

$$+\int_L K_{3,2}(x-s)\,v'(s)\,ds + \int_L K_{3,3}(x-s)\,u'(s)\,ds \quad (-\infty < x < \infty,\ j = 1,2)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{i,j}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R_{i,j}(k)\,c_{i+j}(k\,x)\,dk; \qquad c_{i+j}(k\,x) = \begin{cases} \cos kx & i+j = 2k-1 \\ \sin kx & i+j = 2k \end{cases},$$

$$R_{1,1}(k) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{\alpha_1\eta}{2R_2^-}\right); \qquad R_{1,3}(k) = R_{3,1}(k) = \frac{\alpha_1\beta\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1 hk} - \mathrm{e}^{-\alpha_2 hk}\right)}{R_2^-};$$

$$R_{1,2}(k) = -R_{2,1}(k) = \frac{\beta^2\mathrm{e}^{-\alpha_1 hk} - \alpha_1\alpha_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 hk}}{R_2^-};$$

$$R_{2,3}(k) = -R_{3,2}(k) = \frac{2\beta R_2^+\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1 hk} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha_2 hk}}\right)^2}{\eta R_2^-};$$

$$R_{2,2}(k) = R_{3,3}(k) =$$

$$= 2\left(\frac{-R_2^+\left(\beta^2\mathrm{e}^{-2\alpha_1 hk} + \alpha_1\alpha_2\mathrm{e}^{-2\alpha_2 hk}\right) + 4\alpha_1\alpha_2\beta^2\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)hk} + \left(R_2^-\right)^2}{\alpha_1\eta R_2^-} + \frac{1-\theta}{2}\right);$$

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda_* + 2\mu} = \frac{1-\nu}{2}; \quad \beta = 1 - \eta/2; \quad \alpha_1 = \sqrt{1-\theta\eta}; \quad \alpha_2 = \sqrt{1-\eta};$$

$$R_i^\pm = \beta^i \pm \alpha_1\alpha_2; \qquad \eta = \left(\omega / k\,c_2\right)^2$$

Теперь, используя представления (6), удовлетворим условиям на берегах трещины и под штампом, предварительно продифференцировав последнее. В итоге, для определения дислокаций компонент смещений и нормального контактного давления придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{2\pi\mu(1-\theta)}\int_c^d \frac{P(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\mu}\int_c^d K_{1,1}(x-s)P(s)\,ds+\int_L K_{1,2}(x-s)v'(s)\,ds+ \\
+\int_L K_{1,3}(x-s)u'(s)\,ds=\gamma \qquad (x\in(c,d)) \\
\frac{(1-\theta)}{\pi}\int_L \frac{v'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\mu}\int_c^d K_{2,1}(x-s)P(s)\,ds+\int_L K_{2,2}(x-s)v'(s)\,ds+ \\
+\int_L K_{2,3}(x-s)u'(s)\,ds=0 \qquad (x\in L,\ j=1,2) \\
\frac{(1-\theta)}{\pi}\int_L \frac{u'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\mu}\int_c^d K_{3,1}(x-s)P(s)\,ds+\int_L K_{3,2}(x-s)v'(s)\,ds+ \\
+\int_L K_{3,3}(x-s)u'(s)\,ds=0 \qquad (x\in L,\ j=1,2)
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Систему (7) рассмотрим при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений в концевых точках трещин, т.е. при условиях

$$
\begin{gathered}
\int_c^d P(x)\,dx=P_0; \qquad \int_c^d (x-x_0)P(x)\,dx=0; \\
\int_{a_k}^{b_k} u'(x)\,dx=0; \quad \int_{a_k}^{b_k} v'(x)\,dx=0; \quad \left(x_0=(d+c)/2;\ k=1,2\ldots N\right)
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Таким образом, решение первой задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (7) при условиях (8).

Определяющую систему уравнений для второй задачи можно получить из системы (7), взяв в ней $\omega=0$ и добавив в правой части второго уравнения член $-q(x)/\mu$. В итоге, для второй задачи получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{2\pi\mu(1-\theta)}\int_c^d \frac{P_s(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\mu}\int_c^d K_{1,1}^{(s)}(x-s)P_s(s)\,ds+\int_L K_{1,2}^{(s)}(x-s)v_s'(s)\,ds+ \\
+\int_L K_{1,3}^{(s)}(x-s)u_s'(s)\,ds=\gamma_s \qquad (x\in(c,d))
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{(1-\theta)}{\pi}\int_L \frac{v_s'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\mu}\int_c^d K_{2,1}^{(s)}(x-s)P_s(s)\,ds+\int_L K_{2,2}^{(s)}(x-s)v_s'(s)\,ds+\\
+\int_L K_{2,3}^{(s)}(x-s)u_s'(s)\,ds=-q(x)/\mu \qquad (x\in L,\ j=1,2)\\
\frac{(1-\theta)}{\pi}\int_L \frac{u_s'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\mu}\int_c^d K_{3,1}^{(s)}(x-s)P_s(s)\,ds+\int_L K_{3,2}^{(s)}(x-s)v_s'(s)\,ds+\\
+\int_L K_{3,3}^{(s)}(x-s)u_s'(s)\,ds=0 \qquad (x\in L,\ j=1,2)
\end{gathered}
\tag{9}
$$

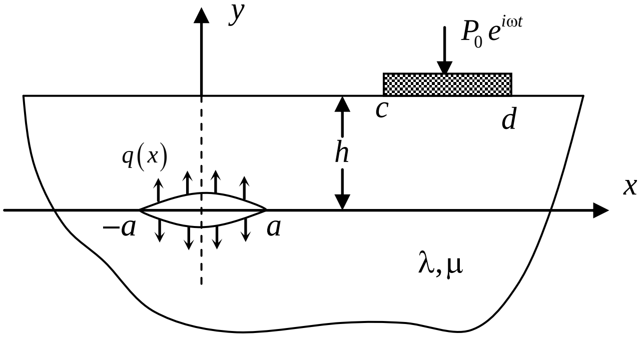
где $K_{i,j}^{(s)}(x)$ – значения ядер $K_{i,j}(x)$ при $\omega=0$, а $P_s(x),\ v_s'(x),\ u_s'(x)$ и γ_s соответственно нормальные контактные напряжения под накладкой, дислокации компонент смещений точек берегов трещины и угол поворота накладки во второй задаче.

Систему (9) нужно рассматривать при условиях

$$
\int_c^d P_s(x)\,dx=0;\ \int_c^d (x-x_0)P_s(x)\,dx=0;\ \int_{a_k}^{b_k} u_s'(x)\,dx=0;\ \int_{a_k}^{b_k} v_s'(x)\,dx=0. \tag{10}
$$

Решение определяющих систем уравнений

Нетрудно показать, что искомые функции, входящие в систему (7) и (9) в концевых точках интервалов интегрирования имеют обычную корневую особенность. Исходя из этого, решение систем (7) и (9) при условиях (8) и (10) можно построить как методом ортогональных многочленов Чебышева, сведя её к системе квази-вполне-регулярной системе бесконечных алгебраических уравнений, так и численно-аналитическим методом механических квадратур. В статье выбран второй путь и для простоты рассмотрен случай, когда полуплоскость расслаблена лишь одной трещиной на интервале $L=(-a,a)$ (Фиг.1).



Фиг.1

При помощи замены переменных $s=c_0+d_0\xi$, где $c_0=(d+c)/2$, $d_0=(d-c)/2$, в первых уравнениях систем (7) и (9) и $s=a\xi$ в остальных двух уравнениях систем (7) и (9) перейдём на интервал (-1,1). Тогда, введя обозначения

$$\varphi_1(\eta)=P(c_0+d_0\eta)/\mu;\quad \varphi_2(\eta)=v'(a\eta);\ \varphi_3(\eta)=u'(a\eta);$$

$$\varphi_1^{(s)}(\eta)=P_s(c_0+d_0\eta)/\mu;\quad \varphi_2^{(s)}(\eta)=v_s'(a\eta);\ \varphi_3^{(s)}(\eta)=u_s'(a\eta);$$

$$K_{1,1}^{*}(\eta,\xi)=d_0K_{1,1}(d_0(\eta-\xi));K_{1,1}^{(s)*}(\eta,\xi)=d_0K_{1,1}^{(s)}(d_0(\eta-\xi));\ \ (i=2,3);$$

$$K_{1,j}^{*}(\eta,\xi)=aK_{1,j}(d_0\eta-a\xi+c_0);\ K_{1,\mathrm{j}}^{(s)*}(\eta,\xi)=aK_{1,j}^{*}(d_0\eta-a\xi+c_0)\ (j=2,3);$$

$$K_{i,j}^{*}(\eta,\xi)=aK_{i,j}(a(\eta-\xi));K_{i,j}^{(s)*}(\eta,\xi)=aK_{\mathrm{i,j}}^{(s)}(a(\eta-\xi))\ (i,j=2,3);$$

$$K_{\mathrm{i},1}^{*}(\eta,\xi)=d_0K_{\mathrm{i},1}(a\eta-d_0\xi-c_0);\ K_{\mathrm{i},1}^{(s)*}(\eta,\xi)=d_0K_{\mathrm{i},1}^{(s)}(a\eta-d_0\xi-c_0)\ (i=2,3);$$

$$q_1=q_1^{(s)}=-\frac{1}{2(1-\theta)};\quad q_j=q_j^{(s)}=(1-\theta);\quad f_1(\eta)=\gamma;\quad f_2(\eta)=f_3(\eta)=0,$$

$$f_1^{(s)}(\eta)=\gamma_s;\quad f_2^{(s)}(\eta)=-q(a\eta)/\mu;\quad f_3^{(s)}(\eta)=0;\ \ (j=2,3)$$

системы (7) и (9) запишем соответственно в виде:

$$\frac{q_i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+\sum_{j=1}^{3}\int_{-1}^{1}K_{i,j}^{*}(\eta,\xi)\varphi_j(\xi)d\xi=f_i(\eta)\ \ (i=1,2,3)$$
$$(-1<\eta<1) \tag{11}$$

$$\frac{q_i^{(s)}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i^{(s)}(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+\sum_{j=1}^{3}\int_{-1}^{1}K_{i,j}^{(s)*}(\eta,\xi)\varphi_j^{(s)}(\xi)d\xi=f_i^{(s)}(\eta)$$
$$(i=1,2,3;\ -1<\eta<1) \tag{12}$$

При этом, условия (8) и (10) соответственно примут вид:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)d\xi=P_0^{*};\ \int_{-1}^{1}\xi\varphi_1(\xi)d\xi=0;\ \int_{-1}^{1}\varphi_2(\xi)d\xi=0;\ \int_{-1}^{1}\varphi_3(\xi)d\xi=0;$$
$$(P_0^{*}=P_0/\mu d_0) \tag{13}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1^{(s)}(\xi)d\xi=0;\ \int_{-1}^{1}\xi\varphi_1^{(s)}(\xi)d\xi=0;\ \int_{-1}^{1}\varphi_2^{(s)}(\xi)d\xi=0;\ \int_{-1}^{1}\varphi_3^{(s)}(\xi)d\xi=0; \tag{14}$$

Таким образом, решение поставленной задачи в случае одной трещины свелось к решению систем сингулярных интегральных уравнений (11) и (12) при условиях (13) и (14) соответственно. Чтобы построить решения систем (11) и (12) численно-аналитическим методом механических квадратур искомые функции представим в следующем виде:

$$\varphi_j(\eta)=\frac{\varphi_j^*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}};\ \varphi_j^{(s)}(\eta)=\frac{\varphi_j^{(s)*}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\quad (j=1,2,3), \tag{15}$$

где функции $\varphi_j^*(\eta),\varphi_j^{(s)*}(\eta)$ $(j=1,2,3)$ – ограниченные, гладкие функции на замкнутом интервале $[-1,1]$. Подставляя эти выражения функций $\varphi_j(\eta)$, и $\varphi_j^{(s)}(\eta)$ соответственно в системы (12), (13) и в условия (14), (15), по обычной процедуре [19], для определения значений функций $\varphi_j^*(\eta)$, $\varphi_j^{(s)*}(\eta)$ $(j=1,2,3)$ в узлах ξ_i $(i=1,2,....n)$, являющихся корнями многочлена Чебышева первого рода, придём к системам алгебраических уравнений. После решения полученной системы можно восстановить функции $\varphi_j(\eta)$, $\varphi_j^{(s)}(\eta)$ и определить все необходимые физико-механические величины, представляющие интерес. В частности, безразмерные раскрытия трещины определятся по формулам :

$$v_*(\eta)=v(a\eta)/a=\int_{-1}^{\eta}\varphi_2(\xi)d\xi;\ \ v_s^*(\eta)=v_s(a\eta)/a=\int_{-1}^{\eta}\varphi_2^{(s)}(\xi)d\xi.$$

Значит, безразмерное раскрытие трещины, когда полуплоскость находится под влиянием как статических, так и динамических нагрузок, определяется формулой:

$$W(\eta,t)=v_*(\eta)e^{i\omega t}+v_s^*(\eta)$$

Приведём также формулу для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Для этого используем последние две формулы (6) для напряжений. При помощи замены переменных $\{s,x\}=a\{\xi,\eta\}$ и $\{s,x\}=a_0+b_0\{\xi,\eta\}$ формулируем их на интервале $(-1,1)$ и рассмотрим случай, когда η находится вне интервала $(-1,1)$. Тогда, используя значение интеграла [20]

$$\int_{-a}^{a}\frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)}=-\frac{\pi\,\mathrm{sign}\,x}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad (|x|>a)$$

для приведённых компонент разрушающих напряжения получим выражения:

$$\sigma_*(\eta) = \frac{\sigma_y^{(j)}(a\eta,0)}{\mu} = -\frac{(1-\theta)\operatorname{sign}(\eta)\varphi_2^*(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_1(\eta) \quad (|\eta|>1,\ j=1,2)$$

$$\tau_*(\eta) = \frac{\tau_{xy}^{(j)}(a\eta,0)}{\mu} = -\frac{(1-\theta)\operatorname{sign}(\eta)\varphi_3^*(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_2(\eta) \quad (|\eta|>1,\ j=1,2),$$

где функции $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ – ограниченные функции в концевых точках трещины ± 1 .

Отсюда, для модулей динамических коэффициентов интенсивности напряжений получим выражения:

$$K_I(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t\to\pm 1\pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|}\sigma_*(t) = \mp\sqrt{\pi}(1-\theta)\varphi_2^*(\pm 1);$$

$$K_{II}(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t\to\pm 1\pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|}\tau_*(t) = \mp\sqrt{\pi}(1-\theta)\varphi_3^*(\pm 1).$$

Аналогичным образом, в случае второй задачи для статических коэффициентов интенсивности придём к формулам:

$$K_I^{(s)}(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t\to\pm 1\pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|}\sigma_*^{(s)}(\eta) = \mp\sqrt{\pi}(1-\theta)\varphi_2^{(s)*}(\pm 1);$$

$$K_{II}^{(s)}(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t\to\pm 1\pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|}\tau_*^{(s)}(\eta) = \mp\sqrt{\pi}(1-\theta)\varphi_3^{(s)*}(\pm 1).$$

Следовательно, в общем случае, когда полуплоскость находится под влиянием как статических, так и динамических нагрузок, для коэффициентов интенсивности получим формулы:

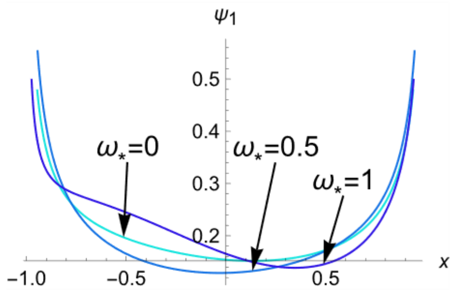
$$K_I^*(\pm 1,t) = \mp\sqrt{\pi}(1-\theta)\left[\varphi_2^*(\pm 1)e^{i\omega t} + \varphi_2^{(s)*}(\pm 1)\right];$$

$$K_{II}^*(\pm 1,t) = \mp\sqrt{\pi}(1-\theta)\left[\varphi_3^*(\pm 1)e^{i\omega t} + \varphi_3^{(s)*}(\pm 1)\right].$$

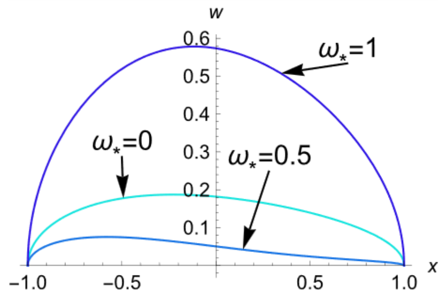
Численные расчеты

В указанном частном случае, когда на берега трещины действует равномерная распределенная нагрузка интенсивности q_0, проведены численные расчеты и определены закономерности изменения действительных частей амплитуд приведённых контактных напряжений, действующих под штампом, $\psi_1(x) = \varphi_1^{(s)}(x) + \operatorname{Re}\varphi_1(x)$, раскрытия трещины $w(x) = v_s^*(x) + \operatorname{Re} v_*(x)$, приведённого угла поворота штампа $\gamma_* = |\gamma|$ и безразмерных динамических коэффициентов интенсивности $\left|K_I^*(\pm 1)\right|$ и $\left|K_I^*(\pm 1)\right|$, в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний $\omega_* = \omega / ac_2$, взаиморасположения штампа и трещины, описывающегося приведённым параметром $k_0 = c_0 / a$ и от приведённой глубины трещин $h_* = h / a$ в моменты времени $t_k = 2\pi k / \omega \ (k = 1, 2, ..)$. При этом считается, что ширина штампа равна $2a$, $q(x) = q_0 = const$, $\nu = 0.3$, $q_0 / \mu = 0.2$, $P_0^* = P_0 / \mu a = 0.5$.

На Фиг. 2 и Фиг. 3 соответственно приведены графики действительных частей амплитуд нормальных контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний ω_*, когда $h_* = 1.8$, $k_0 = 1$.



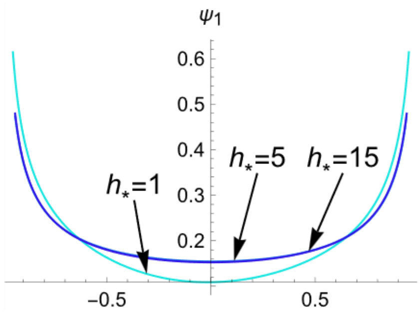
Фиг.2



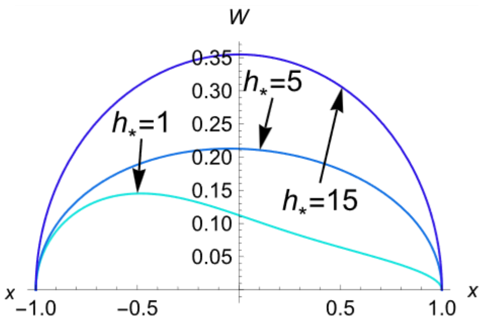
Фиг.3

Видно, что амплитуда нормальных контактных напряжений мало зависит от приведённой частоты вынужденных колебаний, а раскрытие трещины при увеличении частоты вынужденных колебаний колеблется вокруг состояния равновесия.

На Фиг. 4 и Фиг. 5 соответственно приведены графики действительных частей амплитуд нормальных контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от приведённого расстояния трещины от границы полуплоскости h_*, когда $\omega_* = 0.3$, $k_0 = 1$.



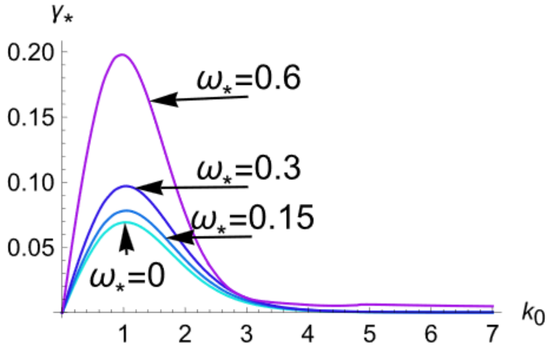
Фиг.4



Фиг.5

Из них явствует, что как амплитуды нормальных контактных напряжений, так и раскрытие трещины с увеличением глубины трещины в центральной части соответственно штампа и трещины возрастают и стремятся к определённому пределу, соответствующую случаю, когда штамп и трещина не влияют друг на друга.

На Фиг. 6 приведены графики абсолютной величины угла поворота штампа в зависимости от расстояния штампа от начала координат при некоторых значениях частоты вынужденных колебаний ω_*, когда $h_* = 1.8$ и статическая нагрузка на берега трещины отсутствует.



Фиг.6

Как и следовало ожидать, при увеличении частоты вынужденных колебаний в зависимости от k_0 угол поворота сначала возрастает, а затем убывает, стремясь к нулю. Причём, чем больше частота вынужденных колебаний, тем больше максимальный угол поворота штампа.

Таблица 1.Модули динамических коэффициентов интенсивности

ω_*	0.3	0.5	1	2	5
$\lvert K_I(1)\rvert$	0.3422	0.4720	0.2277	0.1221	0.1310
$\lvert K_I(-1)\rvert$	0.2894	0.4175	0.2945	0.0403	0.0917
$\lvert K_{II}(1)\rvert$	0.0111	0.0180	0.0120	0.0413	0.0383
$\lvert K_{II}(-1)\rvert$	0.0876	0.1081	0.0450	0.0751	0.0467

В Таблице 1 приведены значения модулей приведённых динамических коэффициентов интенсивности в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний ω_*, когда $h_* = 1.8$, $k_0 = 1$ и статические нагрузки на берегах трещины отсутствуют.

Заключение

Таким образом, изучены вынужденные колебания упругой полубесконечной пластины с параллельной к границе системой коллинеарных трещин, деформируемой при помощи абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием, действующего на границе пластины и находящегося под влиянием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки и статических нагрузок, действующих на берегах трещин. В случае, когда имеется только одна трещина проведены численные расчёты и выявлены закономерности изменения модулей контактных напряжений, действующих под штампом, угла поворота штампа и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от частоты вынужденных колебаний, приведённого расстояния трещины от границы, а также от взаиморасположения трещины и штампа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 21T-2C257

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Н.Н., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Бабешко В.А. Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
3. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости // НАН РА Ереван, 1998, 274с.
4. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
5. Развитие теории контактных задач в СССР.- М.: Наука, 1976.- 493с.
6. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел //ДАН СССР. 1989. Т.207. No2. С.324–327.
7. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. No3. С.5–9
8. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. No5, С.625–628.
9. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3.С.500–507.
10. Буряк В.Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №6, с. 155-159.
11. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №5, с. 101-116.
12. Зильберглейт А.С., Златина И.Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства. Изв. АН АрмССР, 1978, т.31, №3, с. 18-30.
13. Brock, L.M., Georgiadis, H.G., 1994. Dynamic frictional indentation of an elastic half-plane by a rigid punch. J. Elasticity 35, 223-249.
14. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. Труды V Межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 1-7 октября, 2005.p.56-60.
15. Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Влияние колеблющегося на границе упругой полуплоскости жёсткого штампа на напряженное состояние

вокруг внутреннего жёсткого тонкого включения, Труды XX межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 29-33.

16. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами. Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
17. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Даштоян Л.Л. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными трещинами и включениями под воздействием динамических нагрузок// Известия НАН РА, Механика, т.73, № 3, 2020г, с. 3-23.
18. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279с.
19. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук., проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА,
тел.: (37491) 350222, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,
тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 20 мая 2024г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №2, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-25

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПАНЕЛИ УМЕРЕННЫХ РАЗМЕРОВ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И РАСТЯНУТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие и растягивающие силы, аэроупругая устойчивость, сверхзвуковая дивергенция и флаттер, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитическое решение

Martirosyan S.R.

Supersonic flutter of a moderate sized panel with a free edge, initially loaded in two directions: compressed along the gas flow and stretched in the perpendicular direction

Key words: rectangular plate, initial compressive and tensile forces, aeroelastic stability, supersonic flutter, supersonic divergence, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic plate of a moderate sized, initially loaded in two directions: compressed along supersonic the gas flow and stretched in the perpendicular direction, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability is obtained. An accurate assessment of the influence of initially loading forces on the stability of the system is given.

Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գազի հոսքի ուղղությամբ նախապես սեղմված և ուղղահայաց ուղղությամբ ձգված մեկ ազատ եզրով միջին չափերի ուղղանկյուն սալի գերձայնային ֆլատերի մասին

Հիմնաբառեր՝ ուղղանկյուն սալ, սեղմող և ձգող ուժեր, առաձգական կայունություն, գերձայնային ֆլատեր և դիվերգենցիա, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում շրջհոսման ուղղությամբ նախնական սեղմված և միաժամանակ ուղղահայաց ուղղությամբ ձգված մեկ ազատ եզրով առաձգական բարակ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» դինամիկ համակարգի չգրգռված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է նախնական ուժերի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния тонкой упругой прямоугольной пластинки умеренных размеров, нагруженной по двум направлениям сжимающими и растягивающими силами, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы “пластинка–поток” в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на свободный край пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Дана точная оценка влиянию первоначальных усилий на устойчивость системы.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1 – 4].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния прямоугольной пластинки умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении: прямоугольная пластинка первоначально нагружена сжимающими силами по потоку газа и растягивающими – в перпендикулярном направлении; сверхзвуковой поток газа набегает на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [12, 14].

Показано, что невозмущённое состояние равновесия системы теряет как статическую устойчивость, так и динамическую, соответственно, в виде эйлеровой, а также, не эйлеровой дивергенции панели, и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [11].

Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих сил на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы, в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

Данная статья является обобщением работы [14] и продолжением [16].

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \in (0.193; 2.9)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8].

Будем полагать, что первоначально, до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих $N_x = 2h\sigma_x$ и растягивающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, распределённых равномерно по кромкам пластинки $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 5].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6, 7]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp, сжимающими усилиями σ_x и σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$, где $(\sigma_x)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания [1, 13, 14]; $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [9].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» в предположении малости интенсивности $m\,\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 6–8,16]:

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ w = w\left(x, y, t\right); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 8,16]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}\,, \tag{1.2}$$

$$D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+N_x\frac{\partial w}{\partial x}=-m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x=0;$$

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=a \text{ и } w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=b; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V\in(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.}),\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85; \tag{1.4}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x<(\sigma_x)_{cr.},\ \sigma_y<(\sigma_y)_{pr.} \tag{1.5}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x,y,t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5). Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае прямоугольных пластинок умеренных размеров [1, 2, 12, 14]:

$$\gamma=ab^{-1}\in(0.193;2.9), \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

В работе [12] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma\in[0,\infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки $(\sigma_x=\sigma_y=0)$. В работе [14] исследована исходная задача устойчивости, при условии $\sigma_x\neq 0,\ \sigma_y=0$. Показано, что сжимающие усилия σ_x приводят к существенному понижению устойчивости системы. В работе [15] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma\in[0,\infty]$ в статической постановке $(m_c=0, I_c=0)$ по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её существенных параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции. В работе [16] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для $\gamma\leq 0.193$.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний [1, 2, 12,16]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda<0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$) [10]. Критическая скорость потока газа V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda=0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [15, 16]:

$$r^4-2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+(1+\beta_y^2)=0\,, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\in(a_0^2\rho_0M_0D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0M_{2\cos m.}D^{-1}\mu_n^{-3})\,; \tag{2.3}$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты напряжений усилий σ_x и σ_y соответственно, характеризующие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2=1/2\cdot N_x\,D^{-1}\mu_n^{-2}=h\sigma_xD^{-1}\mu_n^{-2}<(\beta_x^2)_{cr.},\ (\beta_x^2)_{cr.}=h(\sigma_x)_{cr.}D^{-1}\mu_n^{-2}\,; \tag{2.4}$$

$$\beta_y^2=N_yD^{-1}\mu_n^{-2}=2h\sigma_yD^{-1}\mu_n^{-2}<(\beta_y^2)_{pr.},\ (\beta_y^2)_{pr.}=2h(\sigma_y)_{pr.}D^{-1}\mu_n^{-2}\,;$$

согласно условиям (1.4) , (1.5) и обозначению (2.3).

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов или, соответственно,

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)=0\,, \tag{2.5}$$

$$\left(r^2-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)=0\,. \tag{2.6}$$

где $q\in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения [15, 16}:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,. \tag{2.7}$$

Согласно обозначению (2.3) ясно, что параметр q характеризует скорость потока газа V при фиксированных значениях остальных параметров системы [12–16]. В силу условия (1.4), имеем: $q\in(q(a_0M_0),q(a_0M_{2\cos m.}))$.

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2) можно показать, что [15, 16]

$$q=q(V)\in\left(q_0,\ q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right)\subseteq\left(q\left(a_0M_0\right),q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right), \tag{2.8}$$

$$q_0=\left((\beta_x^2-1)+2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3(1+\beta_y^2)}\right)\Big/3,\ \beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr}\ ,\ \beta_y^2<(\beta_y^2)_{pr}\,.$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания $\left(V=0\right)$ для $\gamma \in \left(0.193; 2.9\right)$ при $n=1$, $\beta_y^2 = 0$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} [13, 14]:

$$F_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right) = \sqrt{0.5\beta_x^2}\left(4-2\beta_x^2-\left(1+\nu\right)^2\right)sh\left(2\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right) -$$

$$-\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\left(2\beta_x^2-\left(1-\nu\right)^2\right)\sin\left(2\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right) = 0, \qquad \beta_x^2 \in \left(0,2\right).$$

Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.2	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.540
0.3	1.0178	0.8839	0.8293	0.7459	0.6040
0.5	1.2447	1.0869	1.0215	0.6391	0.5122
0.8	1.4541	1.2744	1.1993	1.0835	0.8828
1.0	1.4039	1.2497	1.1829	1.0774	0.8887
2.0	1.3681	1.2189	1.1550	1.0547	0.8749
$\geq$ 2.9	1.3672	1.2188	1.1550	1.0547	0.8750

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4} \in W$ с положительной вещественной частью, являющихся решением квадратных уравнений (2.5) и (2.6) соответственно:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0; \quad (2.9)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (2.10)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot\sin(\mu_n y). \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \gamma \in \left(0, 0.193\right]. \quad (2.12)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.4), из выражения (2.12) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 \Big/ \left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ следует [14–16]:

$V(q)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi$,

когда $V(q_0) \geq a_0\rho_0$;

$V(q)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi$, когда $V(q_0) < a_0\rho_0$;

$$\Psi = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85. \tag{2.13}$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in \left[0.006, 0.015\right]$ в выражения (2.13) получаем интервалы $d\left(2ha^{-1}, \nu\right) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для стальных пластинок (табл. 2) [14].

Таблица 2.

ν / $2ha^{-1}$	0.125	0.3	0.5
0,006	(54.81, 1311.78)	(50.52, 1208.98)	(41.63, 996.35)
0,007	(34.45, 811.07)	(32.00, 753.37)	(26.15, 615.52)
0,008	(23.12, 544.34)	(21.48, 505.62)	(17,55, 413.10)
0,009	(16.22, 381.76)	(15.06, 354.59)	(12.31, 289.71)
0.010	(11.84, 283.45)	(10.91, 261.25)	(8.99, 215.32)
0.011	(8.89, 209.40)	(8.09, 190.36)	(6.75, 158.91)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.32, 151.20)	(5.20, 124.60)
0,013	(5,39, 126.87)	(5.01, 117.84)	(4.09, 96.28)
0,014	(4.31, 101.46)	(4.00, 94.24)	(3.27, 76.99)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.23, 77.33)	(2.67, 63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.4) для $\gamma \in \left(0.193, 2.9\right)$**.**

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ [16]:

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0, \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3},\ \chi_n = I_c D^{-1} b(\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0,\ \chi_n > 0, \tag{3.2}$$

δ_n и γ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.3}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma\right)B_1B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.4}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})+(q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\exp\left(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma\right)\right]\cdot$$

$$\cdot B_1B_2 + 2B_2\left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1-\beta_y^2}\right)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+2B_1((2q-1)(q+1)-\beta_y^2-q\beta_x^2)\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) +$$

$$+2\left[B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+(q+1-\beta_x^2)(q-1-\beta_y^2-q\beta_x^2)\,\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.5}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)B_1B_2 -$$

$$-4(q+1-\beta_x^2)B_1B_2\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) +$$

$$+2(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4-2\beta_y^2)\,\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.6}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-\right.$$

$$\left.-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2(q+1)\nu-\left(1-\nu\right)^2-2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma +$$

$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\right.\right.$$
$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$
$$+\left(q-1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\beta_y^2-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-q\beta_x^2)\nu+$$
$$\left.+(\mathrm{q}+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$
$$\left.+2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)^3(q^2-1-\beta_y^2)}\,B_1\,\mathrm{ch}\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$
$$+2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+\right.\right.$$
$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$
$$-\left(q-1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\beta_y^2+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-q\beta_x^2)\nu-$$
$$\left.-(\mathrm{q}+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\left(q^2-1-\beta_y^2\right)}\cdot$$
$$\left.\cdot(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4-2\beta_y^2)\cdot\mathrm{sh}\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);$$
$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1+\beta_x^2)},\ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Здесь, так же, как и в [16], при всех допустимых значениях параметра $q=q(V)$ (2.8) и коэффициентов напряжений $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr.}$ (табл. 1) и $\beta_y^2<(\beta_y^2)_{pr.}$

$$B_1=B_1(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\ B_2=B_2(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\ A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\ \ \gamma\in\left(0.193,2.9\right). \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_c a^2\right)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде [16]

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0,\ \delta_n>0,\ \chi_n>0,\ k_n>0. \quad (3.11)$$

Будем полагать, что при всех n

$$k_n<20. \quad (3.12)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2=\beta_y^2=0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [12].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.3) при ограничениях (1.4) и (1.5) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы “пластинка–поток” в пространстве её «существенных» параметров $\Im = \left\{ q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n \right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическую систему «пластинка–поток». Значения остальных параметров системы принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [12,14,16], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(A_3 < 0, \Delta > 0\right)$, $\Im_2\left(k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0\right)$ и $\Im_3\left(A_3 > 0, \Delta < 0\right)$; Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4 k_n A_0 A_3 . \qquad (4.1)$$

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области $\Im_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, характеризующее более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию; а в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер: пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [14, 16].

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия апериодической и колебательной неустойчивости соответственно [10, 11]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3 = 0$ в предположении (3.12) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta = 0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условий $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. Критические скорости $\left\{V_{cr.div}\right\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$. При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области $\Im_1$ в область $\Im_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.12).

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, либо области $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер. Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, либо области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае изогнутая по форме пластинка – «выпученная». Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

Критические скорости $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой искомых значений параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ в формулу (2.12).

Заметим, что в случае больших значений k_n, примерно $k_n \geq 20$, при скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ переход из левой части комплексной плоскости собственных значений λ_k системы в правую часть происходит через точку $\lambda_\infty = \pm\infty$, вызывающий «жёсткое» изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к неустойчивости: имеет место апериодическая неустойчивость [1, 2].

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n)\} \in \Im$ для $\gamma \in \left(0.193, 2.9\right)$, параметризованных надлежащим

образом. В таблицах 3 – 12 проиллюстрированы численные результаты наиболее представительных из этого семейства кривых.

Численные расчеты показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы критические скорости дивергенции и флаттера являются монотонно возрастающими функциями от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n=1$.

Несмотря на зависимость качественных и количественных характеристик поведения невозмущённого состояния равновесия системы от параметра γ, тем не менее можно выделить интервалы $\gamma \in (0.193, 0.33) \cup [0.33, 0.74) \cup [0.74, 2.9)$, в которых качественные характеристики системы, примерно, одинаковы, в отличие от количественных характеристик, существенно зависящих от γ.

Заметим, что указанные интервалы параметра γ такие же, как и в [14]. Тем самым, силы растяжения N_y не оказывают существенного влияния на качественные характеристики системы.

Для наглядной иллюстрации динамики системы для каждого интервала параметра γ составим цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5). Формы представления этих цепочек существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок [14, 16].

5.1. Из сопоставления численных результатов с данными таблицы 2 следует, что для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ невозмущённое состояние равновесия системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) устойчиво только для $2ha^{-1} > 0.013$ при всех ν, когда $\beta_x^2 < 0.4$, $\beta_y^2 \geq 3$ (табл. 3).

Цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$(\Im_0) \to \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div}} \Im_1 \text{ при } k_1 \in (0, 0.07); \tag{5.1}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div}} \Im_1 \text{ при } k_1 \in [0.07, 0.5);$$

$$\Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div}} \Im_1 \text{ при } k_1 \geq 0.5.$$

Здесь, в соответствии с обозначением (3.10), $k_1 = I_c \pi^2 \gamma^2 \left(m_c a^2\right)^{-1}$.

Справедливо равенство: $V_0 = V_{1,2}$ – приведённые скорости $V_0 D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ и

Таблица 3. Значения $V^{(1)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
3	4.736	4.326	3.960	3.534	3.149	–
5	5.831	5.430	5.024	4.612	–	–

Таблица 4. Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1.2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	90.441	89.288	88.138	86.991	85.847	84.735
1	90.420	89.264	88.123	86.976	85.829	84.714
3	90.402	89.242	88.092	86.954	85.801	84.697
5	90.376	89.218	88.064	86.928	85.776	84.671

Таблица 5. Значения $V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$, $\nu = 0,3$ и $k_1 = 0.1;1;10$.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	236.900	236.957	237.893	238.264	238.634	239.002
5	230.233	230.855	231.476	232.014	232.469	232.921

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	267.531	266.118	264.620	263.124	261.713	260.219
5	262.667	261.262	259.857	258.368	256.965	255.564

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	202.500	201.137	199.853	198.570	197.288	195.961
5	198.133	196.856	195.580	194.305	193.077	191.835

Таблица 6. Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$, $\nu = 0,3$ и $k_1 = 0.1;1;10$.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	110.414	108.351	106.235	104.132	102.104	100.088
5	115.434	113.065	110.840	108.499	106.428	104.241

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	104.448	103.425	102.403	101.506	100.611	99.716
5	101.076	100.199	99.309	98.421	97.533	96.646

β_x^2 \ β_y^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	144.337	143.332	142.398	141.324	140.321	139.388
5	140.169	139.172	138.247	137.232	136.327	135.361

$V_{1.2}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ исчисляются подстановкой второго корня уравнения $A_3=0$ в формулу (2.12). При этом при малых $k_1\in\left[0.07,0.5\right)$ имеет место переход от покоя к автоколебаниям, а при умеренных $k_1\in\left[0.5,20\right)$ – начинает совершать автоколебания «изогнутая» пластинка.

В таблицах 3 – 7 приведены численные результаты для $\gamma=0.3$ при $\nu=0.3$. Критические скорости $V_{crdiv}^{(1)}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, $V_{crdiv}^{(2)}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ и $V_0^{*}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, в отличие от $V_0D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, $V_{1.2}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ и $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, которые возрастают, примерно, на 6% и 4.2– 6.5% в пластинах из материалов с большим ν соответственно.

Таблица 7. Значения $V_{crdiv}^{(2)}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ при $\gamma=0.3$ и $\nu=0,3$.

β_x^2 \ β_y^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	477.213	475.639	474.081	472.512	470.938	469.376
1	477.190	475.621	474.053	472.481	470.910	469.338
3	477.159	475.593	474.031	472.452	470.882	469.308
5	477.113	475.548	473.986	472.406	470.833	469.252

Критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ является медленно убывающей функцией от β_y^2: убывает на 3%; а от k_1 – возрастающей функцией: на промежутке $k_1\in\left[0.5,10\right]$ возрастает на 30–40%. Тем самым, вибрации, соответствующие умеренным значениям k_1, приводят к повышению устойчивости системы [17].

Из сопоставления данных таблиц 3–7 с данными таблицы 2 следует, что менее устойчивыми являются невозмущённое состояние равновесия систем с пластинками относительной толщины $2ha^{-1}<0.009$.

В целом, силы растяжения N_y в интервале $\gamma\in\left(0.193,0.33\right)$ оказывают на устойчивость системы незначительное влияние, в отличие от параметра k_1.

5.2. Невозмущённое состояние равновесия системы в интервале $\gamma \in [0.33, 0.74)$ будучи неустойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $\beta_x^2 < 0.6$ и $\beta_y^2 < 3$ (эйлерова дивергенция панели), когда $2ha^{-1} \le 0.012$, с ростом $\beta_y^2 \in [0,5]$ становится устойчивым. В частности, когда $\beta_y^2 \ge 3$, невозмущённое состояние равновесия системы с пластинками относительной толщины $2ha^{-1} \ge 0.009$ становится устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $\beta_x^2 < 0.6$. Цепочки переходов из одной области пространства параметров в другую при $\beta_x^2 < 0.6$ и $\beta_y^2 \le 5$ будут вида:

$$(\Im_0)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1,\ k_1 \in (0, 0.37); \quad (5.2)$$

$$(\Im_0)\xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.fl}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1,\ k_1 \in [0.37, 1.0];$$

$$(\Im_0)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_{1,2}}\Im_2\xrightarrow{V_{cr.fl}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1,\ k_1 \in (1, 20).$$

Таблица 8. Значения $V_{crdiv}^{(1)}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0.3$

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0,4	0.5
0	11.707	10.460	9.235	8.027	6.843	5.689
1	16.539	15.151	13.793	12.461	11.152	9.862
3	27.100	25.413	23.767	22.118	20.504	18.913
5	39.486	37.442	35.273	33.103	31.146	29.188

Таблица 9.Значения $V_0D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1.2}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0.3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	120.296	116.867	113.442	110.027	107.339	104.179
1	119.728	116.471	113.215	109.967	106.726	103.872
3	117.566	114.713	111.873	108.990	106.158	103.303
5	113.440	111.074	108.795	106.443	104.098	101.760

Таблица 10. Значения $V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0,3$ и $k_1 = 0.5;1;10$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	245.569	246.482	247.384	247.806	247.859	247.912
3	–	–	190.809	201.516	206.025	210.090

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	276.090	274.388	272.605	270.720	268.761	266.724
5	204.625	207.242	208.837	209.821	210.332	210.552

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	233.761	230.492	227.094	223.656	220.360	216.891
5	167.291	166.690	165.384	163.962	162.456	160.884

Здесь, по аналогии с предыдущим случаем (разд. 5.1), когда $k_1 < 0.37$, флаттер отсутствует: имеет место потеря устойчивости только в виде эйлеровой дивергенции панели при скоростях $V \geq V_{crdiv}^{(1)}$ и $V \geq V_{crdiv}^{(2)}$ соответственно. При малых $k_1 \in \left[0.37, 1.0\right]$ система переходит от покоя к автоколебаниям, в отличие от умеренных $k_1 \in \left(1, 20\right)$.

Таблица 11.Значения $V_{cr.\,fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0,3$ и $k_1 = 0.5;1;10$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	140.256	134.283	128.577	123.121	117.938	112.808
1	149.945	143.186	136.127	130.333	124.496	118.960
3	–	–	173.388	155.259	147.470	139.390

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	121.884	118.032	114.211	110.603	107.022	102.338
1	123.972	120.177	116.261	112.414	108.710	104.999
3	134.044	129.769	125.331	120.932	116.843	112.826
5	162.079	154.278	147.422	141.482	136.017	130.769

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	144.577	141.665	138.958	136.258	133.563	130.875
1	136.979	134.305	131.834	129.367	126.712	124.064
3	120.703	118.314	115.932	113.555	111.165	108.819
5	122.567	118.926	115.512	112.230	109.062	105.905

Соответственно, при скоростях $V \geq V_{crfl}$, когда $k_1 \in [0.37, 1.0]$, начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1 \in (1, 20)$ – «изогнутая» пластинка. При этом, также, $V_0 = V_{1,2}$ при всех $\beta_x^2 < 0.6$ и $\beta_y^2 \leq 5$. В таблицах 8 – 12 приведены значения критических скоростей для $\gamma = 0,5$ при $\nu = 0.3$. При этом, начиная с $k_1 = 0.37$, при скоростях $V \geq V_{cr.fl.}$ система теряет динамическую устойчивость в виде флаттера для $2ha^{-1} \leq 0.012$ при всех β_x^2, когда $\beta_y^2 < 1$. При $\beta_y^2 > 3$, когда $2ha^{-1} > 0.012$, флаттер отсутствует.

Критические скорости $V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ и $V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ – монотонно убывающие функции от β_x^2 и ν: на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.5]$ убывают в 1.35 – 2 раза и на 4 – 5% соответственно; а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν – в 1.8–2.5 раз и в 1.07 – 1.2 раза соответственно.

Таблица 12. Значения $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.5$ и $\nu = 0.3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	458.565	455.073	451.564	448.037	444.493	440.936
1	458.117	454.552	450.970	447.375	443.764	440.141
3	457.331	453.608	449.853	446.059	442.324	438.618
5	456.674	452.876	448.908	445.000	441.095	437.192

При этом, в отличие от $V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, которая является возрастающей функцией от параметра $\beta_y^2 \in [0, 5]$ – возрастает примерно 3.37-5.13 раз, $V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ является медленно убывающей функцией от β_y^2: с ростом β_y^2 убывает на 0.4–0.9 %.

Критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ является монотонно убывающей функцией от параметра β_x^2 и возрастающей функцией от коэффициента Пуассона ν: при всех $k_1 \geq 0.37$ на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.5]$ убывает примерно в 1.12 – 1.3 раза, а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν возрастает в 1.2 раза. При значениях $k_1 \in [0.37, 1]$ и $\beta_y^2 \in [0, 3]$ критическая скорость флаттера является возрастающей функцией от β_y^2 – возрастает в 1.27–1.32 раза; а при $k_1 > 1$ – убывает с ростом $\beta_y^2 \in [0, 5]$ примерно на 6.5–10.5%. При этом, в интервале $k_1 \in (1, 10]$ $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ возрастает на 9–10%.

Из сравнения данных соответствующих таблиц подразделов 5.1 и 5.2 следует, что с увеличением параметра γ силы растяжения N_y, направленные перпендикулярно потоку газа, существенно повышают устойчивость системы, вопреки наличию сжимающих сил N_x, направленных по потоку, приводящих, соответственно, к понижению устойчивости [14]. Однако, при этом, влияние параметра k_1 на повышение устойчивости системы уменьшается в 3– 4 раза, в сравнении с системой с удлинёнными пластинками (подразд. 5.1).

5.3. Поскольку $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ в интервале $\gamma \in [0.74, 2.9)$ при всех допустимых значениях остальных параметров системы «пластинка–поток», то её невозмущённое состояние равновесия теряет устойчивость только в виде эйлеровой дивергенции: неэйлерова дивергенция и панельный флаттер отсутствуют [14, 15]. Однако, в этом случае, гиперповерхность $\gamma_{gr} = \gamma_{gr}\left(\beta_x^2, \beta_y^2, \nu\right)$ разграничивает область эйлеровой дивергенции $\Im_1$ на подобласти: $\Im_1 = \Im_{11} \cup \Im_{12}$ – дивергенции панели $\Im_{11}\left(\gamma \in \left[0.74, \gamma_{gr}\right)\right)$ и локализованной дивергенции $\Im_{12}\left(\gamma \geq \gamma_{gr}\right)$.

Результаты численных исследований показали, что функция $\gamma_{gr} = \gamma_{gr}\left(\beta_x^2, \beta_y^2, \nu\right)$ (табл. 13) зависит от параметра β_y^2 и коэффициента Пуассона ν исчезающе мало.

Таблица 13.

β_x^2	0	0.1	0.2	≥ 0.3
γ_{gr}	1.96	2.4	2.8	2.9

Из данных таблицы 13 следует, что с ростом коэффициента напряжения $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr}$ значение γ_{gr} увеличивается примерно в 1.48 раз: граница γ_{gr} смещается в направлении больших γ, приводя к расширению подобласти $\Im_{11}$ и, соответственно, к сужению подобласти $\Im_{12}$ – к понижению устойчивости системы, в отличие от сил растяжения N_x, при которых граница γ_{gr} смещается в направлении малых γ [18].

Так как, начиная с $\gamma = 0.84$ дисперсионное уравнение $A_3 = 0$ имеет не более, чем один корень, то будем исследовать область $\Im_{11}$ в интервалах $\gamma = [0.74, 0.84)$ и $\gamma = \left[0.84, \gamma_{gr.}\right)$. В интервале $\gamma \in [0.74, 0.84)$ цепочки переходов будут вида:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1; \qquad (5.3)$$

$\beta_y^2 < 1.5; \nu \leq 0.3$; $0.007 < 2ha^{-1} \leq 0.009$;

$\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1$; $\beta_y^2 \in [1.5, 3); \nu > 0.3$ и $\Im_0$, $\beta_y^2 \geq 3; \nu > 0.3$; $2ha^{-1} > 0.009$;

$\Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div}} \Im_1 ; \beta_y^2 < 1.5; \nu \le 0.3$; $2ha^{-1} \in [0.006, 0.007]$;

$\Im_1 ; \beta_y^2 \ge 1,5; \nu > 0.3$; $2ha^{-1} \in [0.006, 0.007]$.

Таблица 14. Значения $V^{(1)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.8$ и $\nu = 0,3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	54.093	49.004	43.921	39.197	34.584	29.856
1	107.257	97.775	88.990	80.242	72.161	63.807
3	375.314	361.089	345.497	329.917	312.752	293.925
5	417.171	399.736	380.073	360.619	339.815	308.461

А в интервале $\gamma = \left[0.84, \gamma_{gr.}\right)$ –

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1,\ 2ha^{-1} \le 0.009 \ \text{и}\ \Im_0,\ 2ha^{-1} > 0.009. \tag{5.4}$$

Таблица 15. Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.8$ и $\nu = 0,3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	250.777	234.723	221.343	216.872	210.537	204.618
1	219.366	214.192	208.806	203.210	197.462	191.580

В таблицах 14 – 17 приведены значения критических скоростей для $\gamma = 0.8$ при $\nu = 0.3$ и для $\gamma = 1$ при $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$ соответственно.

Таблица 16. Значения $V^{(2)}_{cr.div} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.8$ и $\nu = 0,3$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	343.647	345.431	345.546	344.529	342.665	340.129
1	344.892	339.837	334.680	329.465	324.149	318.729

Критическая скорость $V^{(1)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ является убывающей функцией от ν: убывает примерно в 2.3 раза.

Таблица 17. Значения $V_{cr.div}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma=1$ и $\nu=0.125;0,3;0.5$.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	522.740 128.462 72.910	506.388 115.774 65.077	490.124 104.280 56.517	469.102 92.384 47.653	455.466 80.251 39.661	439.495 69.202 –
1	592.488 295.612 143.619	566.764 269.217 129.548	541.048 241.762 115.928	515.368 213.717 102.414	489.685 186.062 88.967	463.364 159.697 75.842
3	754.524 473.813 281.094	715.579 442.934 257.906	676.257 412.397 235.600	638.897 381.082 212.291	600.608 348.720 190.330	561.452 315.159 168.057
5	959.343 606.834 395.191	903.029 572.723 369.591	849.086 536.490 341.487	797.455 501.202 313.694	746.531 464.420 286.144	696.314 428.245 259.080

Критические скорости дивергенции панели являются, в основном, монотонно убывающими функциями от коэффициента напряжения β_x^2, а также, от коэффициента Пуассона ν.

Из данных таблиц 14 – 17 и из представлений (5.3) и (5.4) следует, что менее устойчивы системы с большим коэффициентом Пуассона ν и с меньшей $2ha^{-1}$. При меньших β_x^2 и больших β_y^2 с ростом γ устойчивость системы повышается.

При определённом соотношении сжимающих N_x и растягивающих N_y сил, имеет место эффект их «взаимной компенсации», наиболее ярко проявленный в случае пластинок, у которых $\gamma \geq 0.33$ (табл. 18).

Таблица 18.

γ	0.4	0.5	0.8	1.0	$\geq \gamma_{gr.}$
$\left(\beta_{xc}^2;\,\beta_{yc}^2\right)$	$(0.1;\,0.079)$	$(0.1;\,0.060)$	$(0.1;\,0.050)$	$(0.1;\,0.051)$	$(0.1;\,0.063)$
$\left(\beta_{xc}^2;\,\beta_{yc}^2\right)$	$(0.5;\,0.360)$	$(0.5;\,0.286)$	$(0.5;\,0.248)$	$(0.5;\,0.300)$	$(0.5;\,0.380)$

При $\beta_x^2 \leq \beta_{xc}^2$ и $\beta_y^2 > \beta_{yc}^2$ существенное влияние оказывают силы растяжения N_y: с ростом N_y устойчивость системы повышается; а при $\beta_x^2 > \beta_{xc}^2$ и $\beta_y^2 \leq \beta_{yc}^2$ – сжимающие силы N_x, с ростом которых устойчивость системы понижается.

Следует отметить, что на структуру разбиения параметрического пространства системы на области устойчивости и неустойчивости влияют силы, направленные по потоку газа, в отличие от сил, направленных перпендикулярно к потоку, которые влияют лишь на значения критической скорости. В данной постановке – это первоначальные сжимающие силы N_x и растягивающие силы N_y соответственно.

6. Основные результаты и заключение. В статье получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжимающими силами по потоку газа и силами растяжения, перпендикулярными к потоку, в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на свободный край, при наличии на нём сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости: эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели, панельного флаттера и локализованной дивергенции.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при малых значениях отношения интенсивностей приложенных инерционных моментов поворота и масс потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока газа, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям. А при умеренных значениях отношения – имеем переход из области неэйлеровой дивергенции в область флаттерных колебаний, при котором начинает колебаться «изогнутая» пластинка.

Найдено соотношение первоначально приложенных сжимающих и растягивающих сил, при котором происходит взаимная компенсация их влияния на устойчивость системы.

В целом, можно утверждать, что в отличие от достаточно удлинённых пластинок, в случае пластинок умеренных размеров влияние первоначальных сил растяжения, приложенных наряду с сжимающими силами, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы значимо: растягивающие силы приводят к существенному повышению устойчивости.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.

6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
8. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
14. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки умеренных размеров со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (3), с.47 – 63. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.3-47.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в направлении, перпендикулярном скорости потока газа // Труды VIII международной научной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”; 1-5 октября, Цахкадзор–2023 (Армения), с. 176–180.
16. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (1), с. 40-55.
17. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. 1956. Т.110 (3).
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (4), с. 52–73.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 2
40 мая 2024г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №2, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-47

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ФЛАТТЕРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А.

Ключевые слова: Линейный сверхзвуковой флаттер, критическая скорость.

Mikilyan M.A., Hambartsumyan H.H., Vardanyan I.A.
Effect of magnetic field on the critical speed of supersonic flutter of a dielectric plate

Keywords: Linear supersonic flatter, Critical speed.
This paper devotes to the investigation of the critical magnetoaeroelastic behavior of dielectric rectangular isotropic plates, described by constitutive equations. The resulting magnetoaeroelastic stability and dynamic models help determine the total perturbed pressure caused by the free-stream flow of perfectly conducting supersonic gas and the magnetic field, as well as the critical flutter velocity. The analytical description presented here is a generalization of the well-known formula obtained on the basis of the "piston theory" in the classical theory of gas dynamics in the case of magnetohydrodynamic flow around elastic shells. Along with analytical solutions, parametric studies are presented on the influence of the magnetic field on the flutter boundary.

Միկիլյան Մ.Ա., Համբարձումյան Հ.Հ., Վարդանյան Ի.Ա.
Մագնիսական դաշտի ազդեցությունը դիէլեկտրիկ սալի գերձայնային ֆլատերի կրիտիկական արագության վրա

Բանալի բառեր: Գծային գերձայնային ֆլատեր, կրիտիկական արագություն
Աշխատանքը նվիրված է դիէլեկտրիկ ուղղանկյուն իզոտրոպ սալի մագնիսա-աէրո-առաձգական վարքի ուսումնասիրությանը: Կառուցված մագնիսա-աէրո-առաձգական կայունության և դինամիկ մոդելները օգնում են որոշել ընդհանուր աէրոառաձգական ճնշումը, որն առաջանում է իզոտրոպ սալի վրա մագնիսական դաշտի առկայությամբ իդեալական հաղորդիչ գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվելիս, որոշված է նաև ֆլատերի կրիտիկական արագությունը: Այստեղ ներկայացված անալիտիկ ներկայացումը «մխոցային տեսության» հայտնի բանաձևի ընդհանրացումն է, որը ստացվել է մագնիսահիդրոդինամիկական շրջհոսման դեպքում գազային դինամիկայի դասական տեսության հիման վրա: Անալիտիկ լուծումների հետ զուգահեռ կատարված են պարամետրական հետազոտություններ՝ պարզաբանելու մագնիսական դաշտի ազդեցությունը ֆլատերի սահմանի վրա:

В данной работе изложены взгляды авторов на критическое магнитоаэроупругое поведение диэлектрических прямоугольных изотропных пластин, описываемое определяющими уравнениями. Полученные в результате магнитоаэроупругая устойчивость и динамические модели помогают определить полное возмущенное давление, вызванное набегающим потоком идеально проводящего сверхзвукового газа и магнитным полем, а также критическую скорость флаттера. Представленное здесь аналитическое описание является обобщением известной формулы, полученной на основе «поршневой теории» в классической теории газодинамики в случае магнитогидродинамического обтекания упругих оболочек. Наряду с аналитическими решениями приводятся параметрические исследования о влиянии магнитного поля на границу флаттера.

Введение

Магнитная гидродинамика тонких тел в сверхзвуковом потоке в настоящее время представляет большой исследовательский интерес. Во многих областях физики, механики, техники возникает необходимость изучения движения электропроводящих жидкостей и газов. Это характерно для астрофизики [1], высокоскоростной аэродинамики [2,3], при разработке магнитогидродинамических генераторов электрической энергии [4-7], электромагнитных насосов для перекачки жидких металлов [8-10], плазменных ускорителей, управляемых термоядерных реакций [10,11] и т. д.

Поток газа обладает свойством проводника электричества только тогда, когда находится в ионизированном состоянии. Если ионизированный газ поместить в электромагнитное поле, в нем генерируются электрические токи вместе с соответствующей электромагнитной силой, и это действительно влияет на его движение. Известно, что при протекании электрического тока по проводнику создается собственное магнитное поле, изменяющее внешнее (наложенное на проводник) магнитное поле. В данном исследовании важно отметить, что когда таким проводником является жидкий металл или ионизированный газ, не только электромагнитные силы влияют на их движение, но также и движение таких сред влияет на электромагнитное поле. Между электропроводящими жидкостями и газами и электромагнитным полем происходит сложное взаимодействие. Математически это означает, что в рамках континуальной модели возникает сложная задача совместного решения системы уравнений гидроаэромеханики и уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Взаимодействие проводящего газа с упругим тонким телом в присутствии магнитного поля приводит к явлению динамической структурной неустойчивости, известному также как аэромагнитный флаттер. Это явление необходимо изучать и его нельзя игнорировать при проектировании современных технологических устройств.

Аэромагнитный флаттер активно исследуется в наши дни, однако многие важные аспекты этого явления еще предстоит изучить. В данной работе представлено изучение линейного флаттера изотропной диэлектрической пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в продольном магнитном поле. Предполагается, что текущая жидкость является невязкой, нетеплопроводной и имеет бесконечную проводимость. Впервые представлено аналитическое выражение аэродинамического давления с учетом приложенного магнитного поля. На основе линейной задачи аэромагнитного флаттера получены условия устойчивости и найдена соответствующая граница устойчивости. В результате аналитического описания исследовано влияние магнитного поля на критическую скорость при различных геометрических параметрах и различных параметрах магнитного поля. Исследовано также влияние числа мод на критическую скорость флаттера. Показано, что магнитное поле сужает область устойчивости и уменьшает границу устойчивости установившихся флаттерных колебаний прямоугольной пластины.

1. Модель магнитоаэроупругой устойчивости.

Рассмотрим упругую прямоугольную пластину $(0<x_1<a,\ 0<x_2<b)$ постоянной толщины h в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3, при этом срединная поверхность недеформированной пластины совпадает с координатной плоскостью $x_1 0 x_2$. С одной стороны $(x_3 > h/2)$ пластину обтекает сверхзвуковой поток идеально проводящего газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси $0x_1$. Пластина колеблется в постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0 (H_{01}, 0, 0)$.

2. Аэродинамическое давление с учетом магнитного поля

При движении проводящей жидкой (или газообразной) сплошной среды в магнитном поле в ней индуцируются электрические токи. На токи в магнитном поле действуют силы, существенно влияющие на движение среды. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле, создавая дополнительное электромагнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидромеханических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений электромагнитного поля и уравнений движения жидкости [12]. Не вдаваясь в подробности, приведем здесь основные уравнения магнитной гидродинамики, необходимые при исследовании задачи.

Уравнения поля:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0, \\ &\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho_e \end{aligned} \tag{1}$$

Закон Ома:

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right) + \rho_e \vec{v}. \tag{2}$$

В гидродинамические уравнения входят, прежде всего, скалярное уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \tag{3}$$

и векторное уравнение импульса, которое в случае невязкой жидкости имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad p} + \frac{1}{\rho}\rho_e\vec{E}_c + \frac{1}{\rho}\vec{f}. \tag{4}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\vec{E}_c = \vec{E} + c^{-1}(\vec{v}\times\vec{H})$ – напряженность электрического поля в собственной системе координат, p – давление в жидкости, $\vec{f}$ – плотность объемных электромагнитных сил, которая имеет вид:

$$\vec{f} = \frac{1}{c}\left(\vec{J}\times\vec{H}\right) + \rho_e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right). \qquad (5)$$

К этим уравнениям мы должны присоединить также уравнение состояния, которое для политропных сред записывается следующим образом

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{æ}, \qquad (6)$$

где p_0 и ρ_0 – соответственно давление и плотность неподвижного газа (жидкости), æ – показатель политропы.

В дальнейшем будем рассматривать невязкую, нетеплопроводную жидкость с бесконечной проводимостью, исключив наряду с вязкостью и теплопроводностью диссипативные эффекты, связанные с электропроводностью, значительно упрощая этим уравнения магнитной гидродинамики. В случае бесконечно проводящей среды из закона Ома (2) следует, что напряженность электрического поля $\vec{E}_c$ в собственной системе координат равна нулю, так как плотность тока проводимости должна быть конечной. Поэтому поле $\vec{E}$ определяется через векторы скорости $\vec{v}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по формуле

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\left(\vec{v}\times\vec{H}\right). \qquad (7)$$

Согласно уравнению Максвелла для плотности тока $\vec{J}$ имеем:

$$\frac{4\pi}{c}\vec{J} = \operatorname{rot}\vec{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}\times\vec{H}\right). \qquad (8)$$

В магнитной гидродинамике зачастую пренебрегают током смещения относительно токов проводимости и вместо (8) принимают

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H}. \qquad (9)$$

Плотность заряда ρ_e с использованием (1) и (7) определяется через $\vec{v}$ и $\vec{H}$ по формуле

$$\rho_e = -\frac{1}{4\pi c}\operatorname{div}\left(\vec{v}\times\vec{H}\right). \qquad (10)$$

Можно заметить из той формулы, что ρ_e в обычных условиях мало, поэтому в уравнениях движения пренебрегают членом $\rho_e\vec{E}$ по сравнению с членом $c^{-1}\left(\vec{J}\times\vec{H}\right)$.

В силу изложенного для определения напряженности $\vec{H}$ магнитного поля в среде с бесконечной проводимостью из уравнений Максвелла (1) вытекают следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\vec{v} \times \vec{H}\right), \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \tag{11}$$

Таким образом, уравнения, описывающие движение идеально проводящей жидкости (или газа) в магнитном поле и поведение магнитного поля при отсутствии диссипативных эффектов, согласно (3)-(11) имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0, \qquad p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{æ}, \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\right)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p + \frac{1}{4\pi\rho}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)\times\vec{H}, \\
\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\vec{v} \times \vec{H}\right), \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

К системе (12) нужно добавить граничные условия

$$v^k N_k = \left(\frac{\partial u^k}{\partial t} + v_i \nabla_i u^k\right) N_k, \tag{13}$$

где N_k – компоненты вектора внешней нормали к деформированной поверхности тела.

Так как мы предполагаем, что движение возмущенного газа одномерно (все величины зависят только от координаты x_3 и времени t) уравнения магнитной гидродинамики имеют следующий вид [12]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v_3\right)}{\partial x_3} = 0, \quad p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{æ}, \; \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{4\pi\rho}\left(H_1\frac{\partial H_1}{\partial x_3} + H_2\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right) = 0, \\
\frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(H_1 v_3 - H_3 v_1\right) = 0, \; \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(H_2 v_3 - H_3 v_2\right) = 0, \\
\frac{\partial H_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Из последних двух уравнений системы (14) и из выражения невозмущенного магнитного поля следует, что

$$H_3 = 0. \tag{15}$$

Мы ищем такие решения системы (14), для которых все величины являются функциями только плотности $\rho\left(x_3, t\right)$, т. е.:

$$Q\left(x_3, t\right) = Q\left(\rho\right) \tag{16}$$

где Q - любая из компонент векторов v и $\vec{H}$, а также давления p. Этим решениям соответствуют движения, которые называются простыми волнами или волнами Римана.

В силу (16) систему уравнений (14) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(v_3+\rho\frac{dv_3}{d\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0,\quad \frac{dp}{d\rho}=a_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{æ-1},$$

$$\frac{dH_1}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{d\left(H_1v_3\right)}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0,$$

$$\frac{dH_2}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{d\left(H_2v_3\right)}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0, \tag{17}$$

$$\frac{dv_3}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left[v_3\frac{dv_3}{d\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}+\frac{1}{4\pi\rho}\left(H_1\frac{dH_1}{d\rho}+H_2\frac{dH_2}{d\rho}\right)\right]=0,$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right)\frac{dv_1}{d\rho}=0,\quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right)\frac{dv_2}{d\rho}=0.$$

где $a_0^2=æp_0/\rho_0$ – скорость звука в невозмущенном потоке.

Из первого уравнения системы (17) в силу условия $dv_3/d\rho\neq 0$ следует, что $\partial\rho/\partial t+v_3\,\partial\rho/\partial x_3\neq 0$. Тогда из последних уравнений системы (17) в силу того, что вектор скорости невозмущенного потока $\nu_*\left(U,0,0\right)$ параллелен оси $0x_1$, имеем

$$v_1=U,\quad v_2=0. \tag{18}$$

Очевидно, что остальные уравнения системы (17) согласовываются между собой при выполнении равенств:

$$\rho\frac{dH_1}{d\rho}=H_1,\quad \rho\frac{dH_2}{d\rho}=H_2,$$

$$\rho\left(\frac{dv_3}{d\rho}\right)^2=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}+\frac{1}{8\pi\rho}\frac{d\left(H_1^2+H_2^2\right)}{d\rho}. \tag{19}$$

При интегрировании первых двух уравнений системы (19) и учитывая, что в невозмущенном состоянии $H_1=H_{01},\ H_2=H_{02}$, получим

$$H_1=H_{01}\frac{\rho}{\rho_0},\quad H_2=H_{02}\frac{\rho}{\rho_0}. \tag{20}$$

Подставляя (20) и значение $dp/d\rho$ из (17) в последнее уравнение системы (19), для определения v_3 получим следующее нелинейное уравнение:

$$\left(\frac{dv_3}{d\rho}\right)^2=\frac{a_0^2}{\rho^2}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{æ-1}+\lambda^2\frac{\rho}{\rho_0}\right], \tag{21}$$

где

$$\lambda^2=\frac{V_A^2}{a_0^2},\quad V_A^2=\frac{H_{01}^2+H_{02}^2}{4\pi\rho_0},$$

V_A – величина, численно равная скорости распространения электромагнитных волн Альфвена.

Далее решаем уравнение (21) относительно v_3 , удовлетворяя условию непроницаемости

$$v_3=v_3^0=\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x_1}\qquad \text{для}\quad x_3=h, \tag{22}$$

которое получается из (7.2.5) (где v_3^0 – нормальная составляющая скорости частиц газа на поверхности пластины, w – прогиб пластины) и находим ρ как функцию от возмущений обтекаемой поверхности. Подставляя найденное значение ρ в уравнение состояния газа $p=p_0\left(\rho/\rho_0\right)^{æ}$, можем определить аэродинамическое давление в зависимости от нормальных скоростей точек поверхности пластины. В частности, при $\lambda=0$ (то есть при отсутствии магнитного поля) из (21) получаем известную формулу [13]

$$p=p_0\left(1+\frac{æ-1}{2}\frac{v_3^0}{a_0}\right)^{\frac{2æ}{æ-1}}. \tag{23}$$

Полученное выражение для давления будем использовать при решении задачи устойчивости какв линейной, так и в нелинейной постановке на основе линеаризованных уравнений устойчивости или уравнений гибких пластин, не содержащих членов с прогибом и их производных в степени выше третьей. Поэтому решение уравнения (21) ищем, разлагая его в ряд и ограничиваясь членами не выше третьей степени. В результате получим

$$\begin{aligned} v_3=&\frac{a_0\sqrt{1+\lambda^2}}{æ}\frac{p'}{p_0}-\frac{a_0}{4æ^2}\frac{1+æ+(2æ-1)\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{p'}{p_0}\right)^2+\\ &+\frac{a_0}{12æ^2\sqrt{1+\lambda^2}}\left\{(æ+1)(2æ+1)+(3æ-1)(2æ-1)\lambda^2-\right.\\ &\left.-\frac{\left[æ+1+(2æ-1)\lambda^2\right]^2}{2(1+\lambda^2)}\right\}\left(\frac{p'}{p_0}\right)^3+\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

где $p'=p-p_0=-\delta p$ – возмущение давления.

Из (24) тем же способом можно найти обратную функцию, которая в пределах принятой точности имеет следующий вид

$$p = p_0\left\{1+\frac{æ}{\sqrt{1+\lambda^2}}\frac{v_3}{a_0}+\frac{æ\left[1+æ+(2æ-1)\lambda^2\right]}{4\left(1+\lambda^2\right)^2}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{æ\left[1+æ+6(æ-1)\lambda^2+(æ-1)(2æ-1)\lambda^4\right]}{12\left(1+\lambda^2\right)^3\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)^2+\ldots\right\}. \tag{25}$$

При отсутствии магнитного поля $(\lambda = 0)$ из (25) получаем:

$$p = p_0\left[1+æ\frac{v_3}{a_0}+\frac{æ(1+æ)}{4}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)^2+\frac{æ(1+æ)}{12}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)^3+\ldots\right],$$

Данное выражение совпадает с разложением выражения (23) в ряд и успешно применяется при исследовании вопросов нелинейного флаттера пластин и оболочек в отсутствие магнитного поля [14-16].

Определим теперь поверхностное давление, обусловленное скачком компонент электродинамического тензора напряжений Максвелла на поверхности $x_3 = h$ пластины. Оно, согласно поверхностному условию непрерывности тензора напряжений, выражается следующей формулой

$$q = T_{33}^{(e)+} - T_{33}^{+} \tag{26}$$

где $T_{33}^{(e)+}$ и T_{33}^{+} – значения при $x_3 = h$ компонент максвелловского тензора напряжений в газе и в пластине соответственно,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{H}\vec{H}\right).$$

Подставляя (15) и (20) в (26), получим

$$q = \frac{H_{01}^2 + H_{02}^2}{8\pi}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]. \tag{27}$$

Используя уравнения состояния и формулу (25), определяем величину ρ/ρ_0 , и из (27) находим следующее выражение для q :

$$q = -æp_0\lambda^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)+\frac{5-æ+3\lambda^2}{4\left(1+\lambda^2\right)^2}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(2æ+3)\lambda^4+\left(10-æ^2\right)\lambda^2+æ^2-2æ+9}{12\left(1+\lambda^2\right)^3\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{v_3}{a_0}\right)^3+\ldots\right\}. \tag{28}$$

Таким образом, с помощью плоских сечений мы получаем окончательные формулы (25) и (28), определяющие действующие на пластину силы, обусловленные обтекающим потоком и магнитным полем.

Подставляя (22) в (25) и (28), получаем формулу полного возмущенного давления, возникающего из-за набегающего потока идеально проводящего газа и магнитного поля в случае одностороннего обтекания:

$$
\begin{aligned}
Z = q + \delta p = -æ p_0 \sqrt{1+\lambda^2} \Bigg\{ & \frac{1}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + \\
& + \frac{æ + 1 + (æ+4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4\left(1+\lambda^2\right)^2\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{1}{a_0^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \\
& + \Big[æ + 1 + (æ+1)(æ+3)\lambda^2 + \left(æ^2 - 3æ + 11\right)\lambda^4 + \\
& + (2æ+3)\lambda^6\Big] \frac{1}{12\left(1+\lambda^2\right)^4} \frac{1}{a_0^3}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^3 \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Из выражения (29) в первом приближении получаем следующую формулу [13,17-18]:

$$
Z = -\frac{æ p_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x_1}\right), \tag{30}
$$

являющуюся обобщением известной формулы для давления [13], полученной на основе поршневой теории классической газодинамики, в случае магнитогидродинамического обтекания тонких тел.

Теперь мы можем перейти к постановке двухмерной задачи магнитоаэроупругой устойчивости пластины.

3. Нелинейная задача магнитоаэроупругой устойчивости

Для исследования магнитоаэроупругой устойчивости рассматриваемой пластины мы принимаем следующие предположения:

а) Гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [19]

$$
u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1},
$$

$$
u_2(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, t) - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2},
$$

$$
u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t)
$$

б) нормальные перемещения гибкой пластины сравнимы с толщиной пластины [20];

в) для рассчета аэродинамического давления будет использована формула (29).

На основе этих предположений нелинейные аэроупругие основные уравнения принимают следующий вид [14-16,18]:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2=0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} & D\Delta^2 w-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+ \\ & \quad +\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æ p_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+æ p_\infty\sqrt{1+\lambda^2}\Bigg[M\frac{\partial w}{\partial x_1}+ \\ & \quad +\frac{æ+1+(æ+4)\lambda^2+3\lambda^4}{4\left(1+\lambda^2\right)^2\sqrt{1+\lambda^2}}M^2\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+ \\ & \quad +\Big[æ+1+(æ+1)(æ+3)\lambda^2+\left(æ^2-3æ+11\right)\lambda^4+ \\ & \quad +(2æ+3)\lambda^6\Big]\Big/12\left(1+\lambda^2\right)^4 M^3\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^3\Bigg]=0, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)},\quad M=\frac{U}{a_0},$$

и $w(x_1,x_2,t)$ - прогиб пластины вне плоскости, M - число Маха при невозмущенном потоке, ρ_0 - плотность материала пластины, ε - коэффициент линейного затухания и $F=F(x_1,x_2,t)$ - функция напряжений.

Для исследования вопросов устойчивости рассматриваемой системы нужно к системе уравнений (31) и (32) присоединить граничные условия. Мы рассмотри случай свободного опирания краев прямоугольной пластины, подразумевающий свободное перемещение пластины в плоскости $\left(0\le x_1\le a,\ 0\le x_2\le b\right)$. Следовательно, согласно [17], рассматриваются следующие граничные условия:

при $x_1=0,\ x_1=a$

$$w=0,\quad M_{11}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=0, \tag{33}$$

$$T_{11}^0=0,\ T_{12}^0=0 \tag{34}$$

при $x_2=0,\ x_2=b$

$$w=0,\quad M_{22}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)=0, \tag{35}$$

$$T_{22}^0 = 0,\ T_{21}^0 = 0 \tag{36}$$

где $T_{11}^0,\ T_{22}^0,\ T_{12}^0$ – усредненные значения силы на краях пластины.

4. Линейный анализ

Приближенное решение уравнения (32), удовлетворяющее условиям (33) и (35), будем искать в виде [17]

$$w(x_1, x_2, t) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \sin \lambda_i x_1 \right) \sin \mu_m x_2; \quad \lambda_i = i\pi/a,\ \mu_m = m\pi/b, \tag{37}$$

Подставив (36) в (31), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции F, которое решаем методом неопределенных коэффициентов и находим функцию напряжений, которую подставляем в уравнение (32). Далее, с помощью метода Бубнова-Галеркина, в случае двухчленной аппроксимации относительно неизвестных функций $z_1 = f_1(t)/h,\ z_2 = f_2(t)/h$ получаем следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [14-16]:

В случае двухчленной апроксимации $(n = 2)$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_1}{d\tau} + z_1 - \frac{2}{3}\sqrt{1+\lambda^2}\, k\nu z_2 = 0 \\ &\frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_2}{d\tau} + \gamma_2^2 z_2 + \frac{2}{3}\sqrt{1+\lambda^2}\, k\nu z_2 = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$, введены обозначения

$$k = \frac{4æp}{\rho_0 \omega_1^2 h^2},\ \omega_i^2 = \frac{D}{\rho h}\left(\lambda_i^2 + \mu_m^2\right)^2, \qquad \gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1}.$$

$$\nu = M\frac{h}{a}, \quad \chi = \frac{\varepsilon}{\omega_1} + p_\infty æ\sqrt{1+\lambda^2},$$

ν – приведенный параметр скорости, χ – приведенный параметр демпфирования, ω_i – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулами.

В случае четырехчленной аппроксимации $(n = 4)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2z_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dz_1}{d\tau}+z_1-\frac{2}{3}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_2-\frac{4}{15}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_4=0,\\
&\frac{d^2z_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dz_2}{d\tau}+\gamma_2^2z_2+\frac{2}{3}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_1-\frac{6}{5}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_3=0,\\
&\frac{d^2z_3}{d\tau^2}+\chi\frac{dz_3}{d\tau}+\gamma_3^2z_3+\frac{6}{5}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_2-\frac{12}{7}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_4=0,\\
&\frac{d^2z_4}{d\tau^2}+\chi\frac{dz_4}{d\tau}+\gamma_4^2z_4+\frac{4}{15}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_1+\frac{12}{7}k\nu\sqrt{1+\lambda^2}z_3=0.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Таким образом мы свели задачу устойчивости гидроупругой системы в первом приближении к изучению поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (31)-(32) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра ν).

5. Решение линейной задачи. Условия устойчивости и граница устойчивости.

Представляя решение системы уравнений (38) и (39) в следующем виде

$$z_i=y_ie^{p\tau}\qquad \left(i=1,2,3,4\right) \tag{40}$$

для системы (38) получаем следующее характеристическое уравнение относительно λ:

$$p^4+2\chi p^3+\left(\gamma_2^2+1+\chi^2\right)p^2+\chi\left(\gamma_2^2+1\right)p+\gamma_2^2+\frac{4}{9}k^2\nu^2\left(1+\lambda^2\right)=0. \tag{41}$$

Невозмущенная форма пластины устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны. Таким образом условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [20], запишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
&\chi>0,\quad \chi\left(1+\gamma_2^2\right)>0,\\
&\left(\gamma_2^2-1\right)^2+2\chi^2\left(1+\gamma_2^2\right)-\frac{16}{9}k^2\nu^2\left(1+\lambda^2\right)>0.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Первые два неравенства, требующие, чтобы внутреннее и аэродинамическое затухание были положительными, выполняются всегда. Третье неравенство означает, что в случае малых значений ν все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w\equiv 0$ асимптотически устойчиво относительно малых возмущений. Значение параметра $\nu=\nu_{cr}$, при котором два характеристических показателя становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим и соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластины:

$$\nu_{cr}=\frac{3}{4}\frac{\gamma_2^2-1}{k\sqrt{1+\lambda^2}}\sqrt{1+\frac{2\chi^2\left(\gamma_2^2+1\right)}{\left(\gamma_2^2-1\right)^2}} \qquad (43)$$

Принимая $\nu=\nu_{cr}$, из характеристического уравнения найдем следующее значение θ_{cr} частоты колебания оболочки при линейном флаттере $\left(p_{cr}=\pm i\theta_{cr}\right)$

$$\theta_{cr}^2=\frac{1}{2}\left(\gamma_2^2+1\right). \qquad (44)$$

Формулы, аналогичные (43) и (44), получены многими авторами и являются первыми приближениями для ν_{cr} и θ_{cr}.

Неравенства (42) дают возможность построить области устойчивости на плоскости (ν,λ).

Аналогично вышеописанному процессу, подставляя (40) в систему (39), получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
&p^8+4\chi p^7+p^6\left(1+6\chi^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2\right)+\chi p^5\left(4\chi^2+3\left(1+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2\right)\right)+\\
&\quad+p^4\left[\chi^2\left(3+\chi^2\right)+\left(1+3\chi^2\right)\left(\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2\right)+\gamma_2^2\gamma_3^2+\gamma_2^2\gamma_4^2+\gamma_3^2\gamma_4^2\right]+\\
&\quad+p^3\chi\left[\chi^2+\left(2+\chi^2\right)\left(\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2\right)+2\left(\gamma_2^2\gamma_3^2+\gamma_2^2\gamma_4^2+\gamma_3^2\gamma_4^2\right)\right]+\\
&\quad+p^2\left[\chi^2\left(\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2\right)+\left(1+\chi^2\right)\left(\gamma_2^2\gamma_3^2+\gamma_2^2\gamma_4^2+\gamma_3^2\gamma_4^2)+\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2\right)\right]+\\
&\quad+p\chi\left[\gamma_2^2\gamma_3^2+\gamma_2^2\gamma_4^2+\gamma_3^2\gamma_4^2+\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2\right]+\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2+\\
&\quad+\left(\frac{2}{105}\sqrt{1+\lambda^2}k\nu\right)^2\left[p\left(p+\chi\right)\left(12069+13490p\left(p+\chi\right)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+8296\gamma_2^2+1421\gamma_3^2+5194\gamma_4^2+\left(\frac{384}{5}\sqrt{1+\lambda^2}k\nu\right)^2\right]=0.
\end{aligned}$$

В этом случае, также на основе теоремы Гурвица, получены соответствующие условия устойчивости. Эти выражения довольно громоздки и здесь мы их не приводим. Условия устойчивости в обоих случаях решаются численно для определения критического значения параметра скорости ν и соответствующей границы. Использованы следующие параметры для материала Зеродур [21]: $E=9.03\cdot10^{10}\,Н/м^2$, $\mu=0.24$, $\rho=2.53\cdot10^3\,кг/м^3$, $h/a=1/100$ и численные решения изображены на рис. 2.

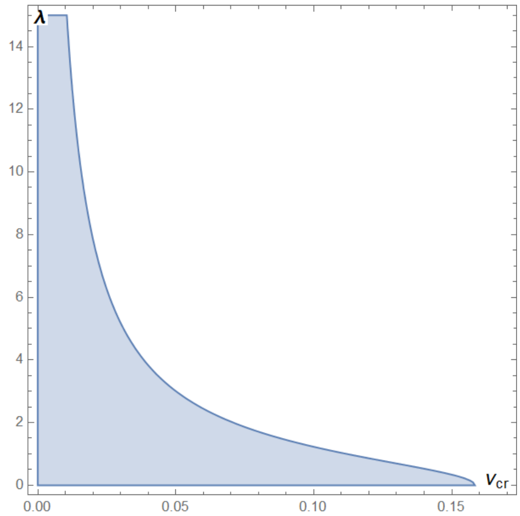


Рис. 2. Область устойчивости и граница устойчивости при $n = 4$.

Для остальных значений n характер области устойчивости не меняется, отличаясь от приведенного на рис.2 только количественно. На основе уравнения (43) и полученных условий устойчивости (для нескольких n) значения критической скорости ν_{cr} посчитаны и представлены в Таблице 1, наглядно показывая, что критическая скорость для выбранных значений λ пропорциональна ~ $1/\lambda$

Таблица 1. Значения приведенной критической скорости при h/a=1/100, b/a=3

λ	n=2	n=4	n=6
0	0.138981	0.158394	0.159627
10	0.0138441	0.0157608	0.0158834
50	0.00237919	0.00316724	0.0031919
100	0.00138976	0.00158386	0.00159619

Результаты, представленные в таблице 1 и на рис. 2, показывают, что: а) в присутствии магнитного поля критическая скорость уменьшается, б) магнитное поле сужает область устойчивости и существенно снижает границу устойчивости установившихся флаттерных колебаний прямоугольной пластины.

Для наглядности приведем некоторые значения из таблицы 1 в системе отсчета SI. Например, если $\nu_{cr} = 0.0138441$, то соответствующее значение скорости обтекающего потока равно $U_{cr} = 1669.6$ км/ч.

На рис. 3 показано, как изменяется критическая скорость в зависимости от числа m окружных волн также при фиксированных $h/a = 1/100$ и нескольких значениях b/a. Чем больше число окружных волн, тем больше значение критической скорости флаттерных колебаний магнитоаэроупругой системы.

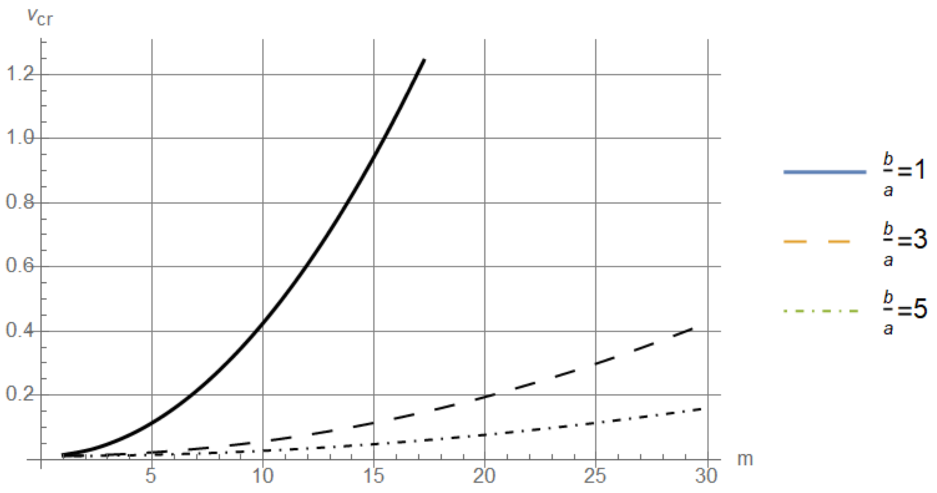


Рис. 3. Зависимость приведенной критической скорости потока от числа m окружных волн $h/a = 1/100$ и при разных значениях параметра b/a.

Перейдем к исследованию зависимости критической скорости флаттера от соотношения сторон исследуемой пластины при $\lambda = 10$. Результаты представлены на рис. 4. Показано, что при заданной относительной толщине h/a пластины, чем выше значение b/a пластины, тем меньше значение критической скорости флаттера.

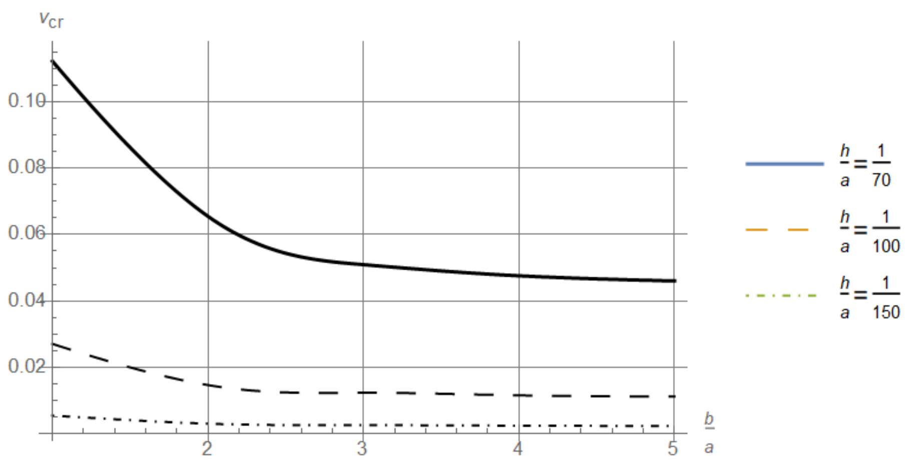


Рис. 4. Приведенная критическая скорость флаттера как функция относительно соотношения сторон b/a при разных значениях h/a пластины

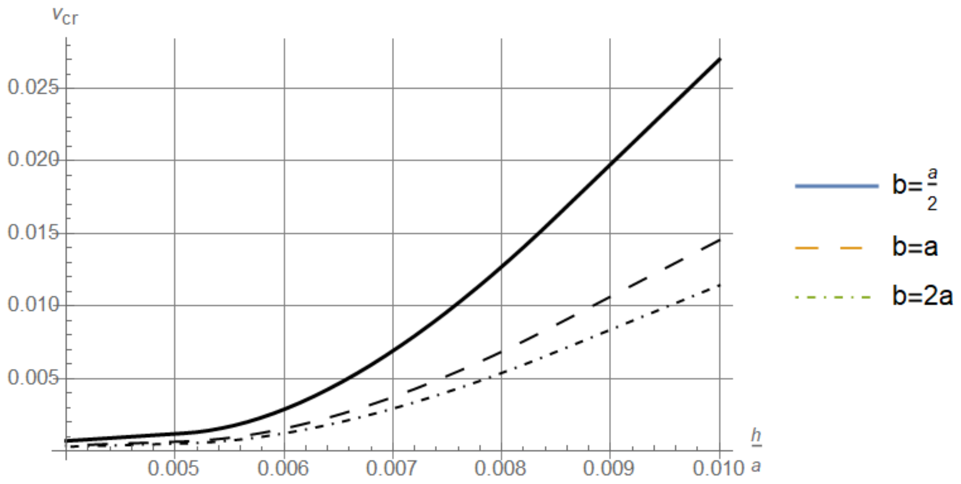


Рис. 5. Приведенная критическая скорость флаттера как функция относительно толщины h/a .

Зависимость критической скорости флаттера от относительной толщины пластины исследована численно, результаты представлены на рис. 5 для $\lambda = 10$. Результаты показывают, что чем тоньше пластина, тем меньше значение критической скорости флаттера, то есть панель становится нестабильной на более низких скоростях, когда подвергается воздействию магнитного поля.

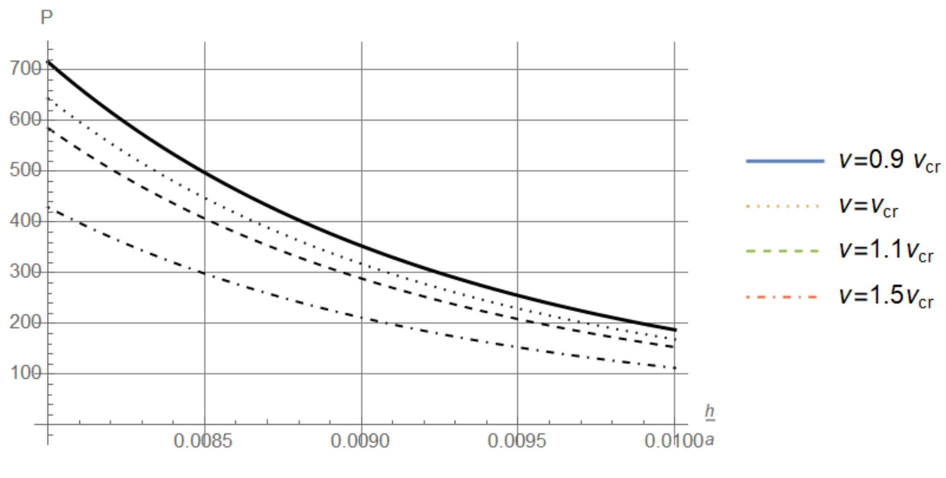


Рис. 6. Зависимость аэродинамического давления от относительной толщины h/a при $\lambda = 100, \quad b = a$.

Изменение динамического давления $P = p_\infty a^3 / MD$ в зависимости от относительной толщины пластины представлено на рис. 6 для нескольких значений скорости потока и при $m=2$. На рис. 6 показано, что более тонкая пластина подвергается воздействию более высоких значений аэродинамического давления. При этом величина аэродинамического давления обратно пропорциональна скорости потока, а величина аэродинамического давления (определяемого при определенных геометрических параметрах и фиксированной скорости потока) с учетом магнитного поля примерно в λ раз больше соответствующего значения аэродинамического давления, определяемого с помощью классической формулы.

Зависимость динамического давления от соотношения сторон пластины представлена на рис. 7 для разных значений скорости потока и при $m=2$

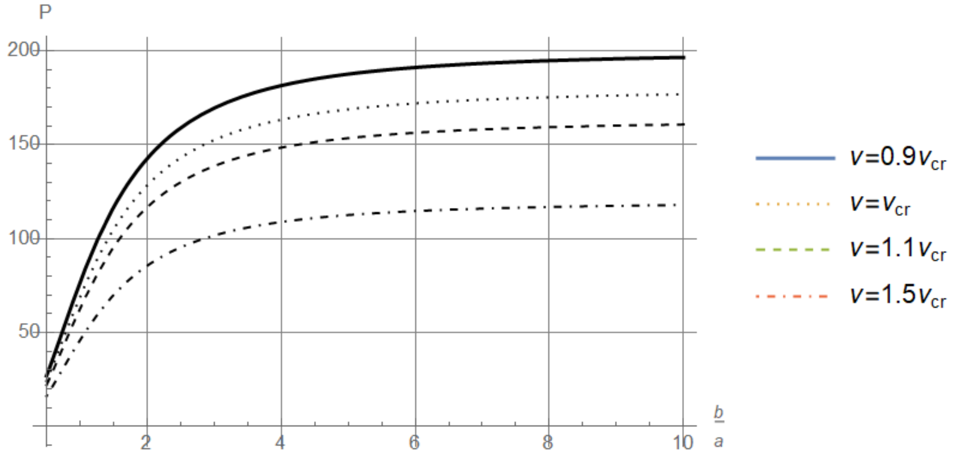


Рис. 7. Зависимость аэродинамического давления от значения b/a в случае $\lambda=100, \quad a=100h$.

На рис. 7 показано, что при фиксированной толщине пластины, чем больше b/a, тем больше значение аэродинамического давления. Также в этом случае аэродинамическое давление и скорость потока обратно пропорциональны друг другу. Влияние магнитного поля на величину аэродинамического давления представлено на рис. 8, из которого видно, что чем больше b/a, тем сильнее влияние магнитного поля.

Также исследована зависимость аэродинамического давления от числа волн, результаты графически представлены на рис. 9. Он показывает, что аэродинамическое давление монотонно убывает при увеличении числа полуволн. С увеличением скорости потока происходит значительное уменьшение величины аэродинамического давления при том же числе полуволн.

Влияние магнитного поля на эту зависимость дополнительно изучается, результаты представлены на рис. 10. Он показывает, что магнитное поле увеличивает аэродинамическое давление для того же числа полуволн и при фиксированных значениях геометрических параметров пластины. Следует отметить, что магнитное поле не меняет поведение рассматриваемой зависимости, а лишь изменяет количественные значения давления.

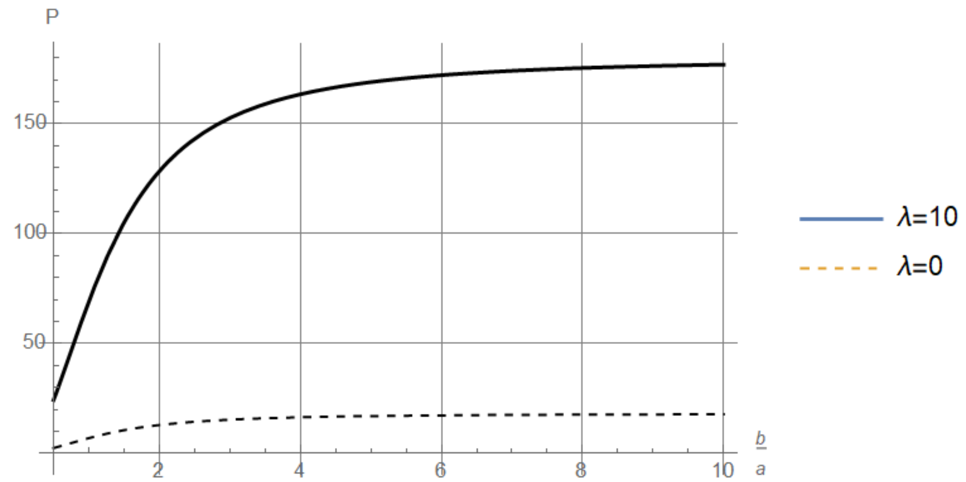


Рис. 8. Зависимость аэродинамического давления от величины b/a критической скорости флаттера $a = 100h,\ b = a$ при влиянии магнитного поля и в его отсутствие.

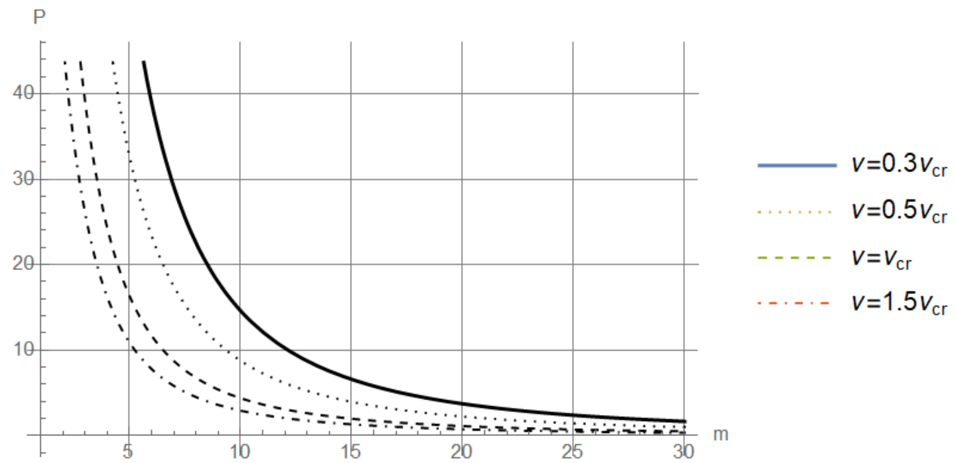


Рис. 9. Зависимость аэродинамического давления от числа полуволн при $a = 100h,\ b = a,\ \lambda = 100$.

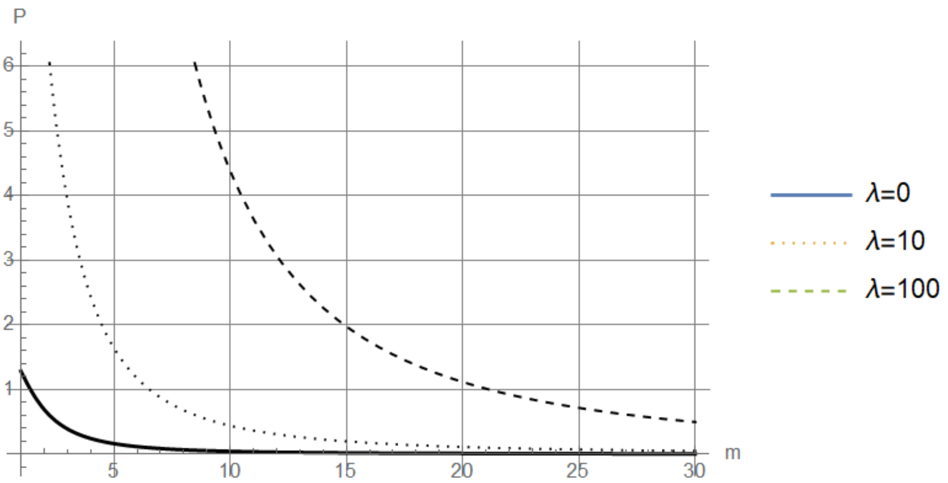


Рис. 10. Влияние магнитного поля на зависимость аэродинамического давления от количества полуволн при $a = 100h,\ b = a$.

Выводы

В данной работе аналитически рассчитано полное возмущенное давление, вызванное набегающим потоком идеально проводящего газа и магнитным полем в случае одностороннего обтекания.

Численные исследования показали:

- в присутствии магнитного поля критическая скорость флаттера уменьшается,
- магнитное поле сужает область устойчивости, то есть уменьшает границу устойчивости прямоугольной пластины,
- чем больше число окружных волн, тем больше значение критической скорости флаттера рассматриваемой магнитоаэроупругой системы,
- чем больше значение соотношения сторон пластины, тем меньше значение критической скорости флаттера,
- чем тоньше пластина, тем меньше значение критической скорости флаттера магнитоаэроупругой системы,
- чем тоньше пластина, тем больше значение аэродинамического давления. При этом величина аэродинамического давления обратно пропорциональна скорости потока. Величина аэродинамического давления, определенная при фиксированных геометрических параметрах и скорости потока, а также с учетом наличия магнитного поля, выше по сравнению с соответствующим значением аэродинамического давления, определенным по классической формуле без учета магнитного поля,
- при фиксированной толщине пластины, чем больше соотношение сторон пластины, тем больше значение аэродинамического давления. Как и в предыдущем случае, величина аэродинамического давления и скорость потока обратно пропорциональны,
- чем больше соотношение сторон пластины, тем сильнее влияние магнитного поля,
- аэродинамическое давление монотонно уменьшается с увеличением числа

полуволн и уменьшается с увеличением скорости потока,
- магнитное поле увеличивает аэродинамическое давление при одном и том же числе полуволн для пластины.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-2C257.

Литература

1. Ganiev, Y.C., Gordeev, V.P., Krasilnikov, A.V., Lagutin, V.I., Otmennikov, V.N., and Panasenko, Aerodynamic Drag Reduction by Plasma and Hot-Gas Injection, J. Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 14, No. 1, 2000, pp. 10–17.
2. Malmuth N.D., Fomin, V.M., Maslov, A.A, Formichev, V.P., Shashkin, A.P., Korotaeva, T.A., Shipyuk, A.N., and Pozdnyakov, G.A., Influence of a Counterflow Plasma Jet on Supersonic Blunt Body Pressures, AIAA 99–4883, the Third Weakly Ionized Gases Workshop, Norfolk VA, Nov. 1999.
3. Scortecci F., Paganucci F., d’Agostino L., M. Andrenucci, “A New Hypersonic High Enthalpy Wind Tunnel”, AIAA 97-3017, July 1997.
4. Resler, R. L., and Sears, W. R., “The Prospects for Magneto-Aerodynamics,” Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 4, 1958, pp. 235-245, 258.
5. A. Cristofolini et al., “Experimental Investigation on the MHD Interaction around a Sharp Cone in an Ionized Argon Flow”, AIAA-2006-3075, 37th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, San Francisco, California, June 2006
6. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Analysis of Magnetoplasmadynamic Interaction in the Boundary Layer of a Hypersonic Vehicle”, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 41, No. 4, 2004.
7. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Magnetohydrodynamics Interaction in the Shock Layer of a Wedge in a Hypersonic Flow”, IEEE Transaction on Plasma Science, vol. 34, no. 5, October 2006
8. Faraday M. Experimental Researches in Electricity, vols. i. and ii, Richard and John Edward Taylor, London, 1839.
9. Alfven H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. Nature, 1942, volume 150, pp. 405–406.
10. Scortecci F., Paganucci F., d'Agostino L., “Experimental Investigation of Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions Over an Artificially Heated Model in Hypersonic Flow”, AIAA 98-1571, April 1998.
11. Klimov A.I., Koblov A.N., Mishin G.I, Serov Yu. L., and Yavor, I.P., Shock Wave Propagation in a Glow Discharge, Sov. Tech. Phys Lett. Vol. 8, No. 4, 1982, pp. 192–194.
12. Bagdasaryan G., Mikilyan M. Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells. Springer, 2016, -286p.
13. Ashley H. and Zartarian C. Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1118.
14. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012

15. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Marzocca P. “On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post-Critical Flight Conditions,” Journal of Aerospace Engineering, 2014, vol. 27, No. 2: pp. 369-377.
16. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. Nonlinear LCO “amplitude–frequency” characteristics for plates fluttering at supersonic speeds. International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 77, December 2015, Pages 51–60.
17. Bolotin V. V. Non-Conservative Problems of Theory of Elastic Stability, M.: Fizmatgiz, Moscow, 1961.
18. Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate.” AIAA Journal, Vol. 4, No. 7, 1966, pp. 1267-1275. doi: 10.2514/3.3658; Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II.” AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1856-1862. doi:10.2514/3.4316.
19. Vlasov V. Z. The General Theory of Shells, Gostekhizdat, Moscow, 1949.
20. Volmir S. Non-linear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 1972.
21. Russell R. Zerodur. OPTI521, 2011.

Сведения об авторах:

Микилян Марине Александровна – Кандидат физ-мат наук, Доцент, Ведущий научный сотрудник Института Механики НАН РА, Российско-Армянский Университет, Тел: (37491)191129, E-mail: mikilyan@sci.am

Амбарцумян Асмик Гамлетовна – Заместитель Директора Института Математики и Информатики Российско-Армянского Университета, Внештатный научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел: (37455)036776, E-mail: hasmik.hambartsumyan@rau.am

Варданян Ирэн Арменовна – Внештатный научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел: (37455)344473, E-mail: irena_123@bk.ru

Поступила в редакцию 16 апреля 2024г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №2, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-68

Reflection and refraction of multi-component electro-magneto-elastic waves from the interface of two *6mm* class piezoelectrics with different polarization of the medium*)

Ara S. Avetisyan, K.B. Ghazaryan

The work is dedicated to the memory of our teacher: Professor Mels Belubekyan

Keywords: piezoelectric texture, waves reflection, waves refraction, multi-component waves, electro-magneto-elastic waves, plane deformation problem, non-acoustic contact.

Ара С. Аветисян, К.Б. Казарян

Отражение и преломление многокомпонентных электро-магнито-упругих волн от границы раздела двух пьезоэлектриков класса *6mm* с различной поляризацией среды

Ключевые слова: пьезоэлектрическая текстура, отражение волны, преломление волны, многокомпонентная волна, электромагнитная упругая волна, задача плоского деформирования, не акустический контакт.

Рассмотрено отражение и преломление многокомпонентных медленных электро-магнито-упругих волн от границы раздела граничащих изотропной и анизотропной пьезоэлектрических полуплоскостей класса *6mm* с различной поляризацией среды. В случае естественной поляризации кристалла, в плоскости изотропии полное электро-магнито-упругое поле распадается на пятикомпонентное электро-магнито-упругое поле плоской деформации и на четырехкомпонентное электро-магнито-упругое поле антиплоской деформации. При этом медленные упругие волны плоской деформации сопровождаются только медленной поперечно поляризованной волной электрического поля, а медленные упругие сдвиговые волны сопровождаются поляризованной в заданной плоскости медленной волной электрического поля. В случае другой поляризации кристалла в плоскости анизотропии также суммарное электро-магнито-упругое поле разделяется на пятикомпонентное электро-магнито-упругое поле плоской деформации и четырехкомпонентное электро-магнито-упругое поле антиплоской деформации. Но, при этом медленные упругие плоские волны деформации сопровождаются медленной волной электрического поля, поляризованной в заданной плоскости, а медленные упругие сдвиговые волны –медленной поперечно поляризованной волной электрического поля.

На поверхности не акустического контакта раздела разно поляризированных пьезоэлектрических полупространств, генерированное в одном из полупространств пьезоэлектрика многокомпонентное электро-магнито-упругое поле одного из типов трансформируется в гибрид многокомпонентных электро-магнито-упругих волн плоской и антиплоской деформаций.

Արա Ս. Ավետիսյան, Կ.Բ. Ղազարյան

Բազմաբաղադրիչ էլեկտրա-մագնիսա-առաձգական ալիքների արդրադարձումը և բեկումը միջավայրի տարբեր բևեռացումով *6mm* դասի երկու պիեզոէլեկտրիկների միջերեսից

Հիմնաբառեր. պիեզոէլեկտրական կառուցվածք, ալիքի անդրադարձում, ալիքի բեկում, բազմաբաղադրիչ ալիք, էլեկտրամագնիսական առաձգական ալիք, հարթ դեֆորմացիայի խնդիր, ոչ ակուստիկ հիփում:

Դիտարկված է բազմաբաղադրիչ դանդաղ էլեկտրա-մագնիսա-առաձգական ալիքների անդրադարձումը և բեկումը *6mm* դասի իզոտրոպ և անիզոտրոպ պիեզոէլեկտրական կիսահարթությունների միջերեսից՝ միջավայրի տարբեր բևեռացումների դեպքում: Պյեզոբյուրեղի բնական բևեռացման դեպքում, իզոտրոպային հարթությունում ընդհանուր էլեկտրամագնիսական առաձգական դաշտը տրոհվում է հարթ դեֆորմացիայի հինգ-բաղադրիչ էլեկտրամագնիսաառաձգական դաշտի և հակահարթ դեֆորմացիայի չորս-բաղադրիչ էլեկտրամագնիսաառաձգական դաշտի: Այս դեպքում դանդաղ առաձգական հարթ դեֆորմացիայի ալիքները ուղեկցվում են լայնակի բևեռացված դանդաղ էլեկտրական դաշտի ալիքով, իսկ դանդաղ հակահարթ դեֆորմացիայի ալիքները ուղեկցվում են տվյալ հարթությունում բևեռացված դանդաղ էլեկտրական դաշտի ալիքով: Անիզոտրոպային հարթությունում, բյուրեղի ըստ այլ առանցքի բևեռացման դեպքում, ընդհանուր էլեկտրամագնիսական առաձգական դաշտը նույնպես տրոհվում է հարթ դեֆորմացիայի հինգ-բաղադրիչ էլեկտրամագնիսաառաձգական դաշտի և հակահարթ դեֆորմացիայի չորս-բաղադրիչ էլեկտրամագնիսաառաձգական դաշտի: Բայց, այս դեպքում, դանդաղ առաձգական հարթ դեֆորմացիայի ալիքներր ուղեկցվում են լայնակի բևեռացված դանդաղ էլեկտրական դաշտի ալիքով, իսկ դանդաղ հակահարթ դեֆորմացիայի ալիքները ուղեկցվում են տվյալ հարթությունում բևեռացված դանդաղ էլեկտրական դաշտի ալիքով:

Տարբեր բևեռացվածությամբ պիեզոէլեկտրական կիսատարածությունների միջև ոչ ակուստիկ հպման մակերևույթի վրա դրանցից մեկում գեներացված մեկ տեսակի էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքը փոխակերպվում է հարթ և հակահարթ դեֆորմացիաների բազմաբաղադրիչ էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքների հիբրիդի:

The reflection and refraction of multicomponent slow electro-magneto-elastic waves from the interface between isotropic and anisotropic piezoelectric half-planes of class ***6mm*** with different polarization of the medium is considered. In the case of natural polarization of the crystal, in the isotropy plane, the total electro-magneto-elastic field is divided into a five-component electro-magneto-elastic field of plane strain and a four-component electro-magneto-elastic field of antiplane strain. In this case, slow elastic plane deformation waves are accompanied only by a slow transversely polarized electric field wave, and slow elastic shear waves are accompanied by a slow electric field wave polarized in a given plane. In the case of a different polarization of the crystal in the anisotropy plane, the total electro-magneto-elastic field is also divided into a five-component electro-magneto-elastic field of plane strain and a four-component electro-magneto-elastic field of antiplane strain. But, in this case, slow elastic plane deformation waves are accompanied by a slow electric field wave, polarized in a given plane, and slow elastic shear waves are accompanied by a slow transversely polarized electric field wave.

On the surface of the non-acoustic contact between differently polarized piezoelectric half-spaces, a multicomponent electro-magneto-elastic field of one type generated in one of the piezoelectric half-spaces is transformed into a hybrid of multicomponent electro-magneto-elastic waves of plane and antiplane deformations.

Introduction

Back in 1949, the propagation of plane waves in the isotropy plane of an infinite piezoelectric medium was studied, in which the electromagnetic and elastic modes are coupled, and the multicomponent electro-magneto-elastic wave has five phase velocities for both electromagnetic and acoustic waves [1]. Slower electromagnetic waves represent field changes that accompany elastic waves, and fast elastic waves are mechanical deformations that accompany an electromagnetic wave. The piezoelectric effect contributes to the reflection of electromagnetic waves at the interface. This introduces a small correction to the familiar expressions for reflection coefficients. This correction can be used to determine piezoelectric constants, provided that the reflection coefficients and other constants involved can be accurately measured.

Also, at certain frequencies the crystal can be brought into resonance. With the resonance of an elastic wave, an almost perfect reflection of the incident electromagnetic wave occurs.

Considering this fundamental principle and based on the lattice dynamics model, the propagation of a Rayleigh-type surface wave in a micropolar piezoelectric medium [2] and the features of the propagation of a bending wave in one-dimensional phononic crystals were studied. [3], propagation of electromagnetic waves in nanocomposite materials consisting of chiral nano inclusions [4], interphase shear-horizontal acoustic waves along the boundary of two half-spaces, which are piezoelectric crystals of cubic symmetry [5], generation and propagation of ultrasonic waves in a single-layer piezoelectric graphene nanoribbon [6].

There is extensive literature on the reflection and refraction of electro elastic waves at the interface of the layered structure of piezoelectrics [6÷22]. Previously, different authors considered both the problems of reflection and refraction of multicomponent electroacoustic waves from the surface of a homogeneous piezoelectric half-space with different electromechanical conditions on it [6÷9], and the problems of reflection and refraction of such waves from the interface of two different piezoelectrics under different electromechanical contact conditions [10÷17]. Solutions to problems of reflection and refraction of electroacoustic waves are also known for cases of complete electromechanical contact or without acoustic contact of two piezoelectric half-spaces of different symmetry classes [18÷22].

The proposed work examines the propagation of a three-component electroelastic wave (the case of an electroactive antiplane deformation ***SH*** wave) considering the accompanying transversely polarized magnetic field. The possibility of converting a transversely polarized magnetic field into a transversal transversely polarized electric field and vice versa will be demonstrated.

1. Basic relations of electro-magneto-elasticity for piezoelectrics of class 6mm at different polarizations of the piezocrystal

The physical and mechanical constants describing the properties of a homogeneous piezoelectric medium: elastic rigidity, piezoelectric coefficients, dielectric constant and magnetic field permeability form a generalized electro-magneto-elastic tensor of piezoelectric materials $\left(\hat{\gamma}_{jn}\right)_{12\times12}=\left(\hat{c}_{ij}\right)_{6\times6}\cup\left(\hat{e}_{mn}\right)_{3\times6}\cup\left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times3}\cup\left(\hat{\mu}_{ik}\right)_{3\times3}$. In wave processes in which temperature changes can be neglected, the material equations of state for a piezo dielectric medium are presented in a significantly simplified form

$$\sigma_{ij}(u_{nm},E_k,H_n)=c_{ijnk}u_{nk}-e_{ijm}E_m\,,\qquad D_m(u_{nm},E_k)=e_{mnk}u_{nk}+\varepsilon_{mk}E_k\,,$$
$$B_m(H_n)=\mu_{mn}H_n \tag{1.1}$$

When formulating the equations of motion of a medium for piezoelectric materials, mass forces of an electromagnetic nature arising as a result of the interaction of induced currents with an electromagnetic field are usually not considered. Therefore, the equations of motion of the medium take the well-known simple form

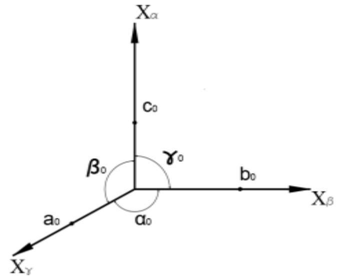
$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j=\rho\left(\partial^2u_i/\partial t^2\right). \tag{1.2}$$

In the absence of free electric charges and conduction current, the electromagnetic field in these media is described by Maxwell's dynamic equations

$$\in_{ijk}\left(\partial E_j/\partial x_k\right)+\partial B_i/\partial t=0\,,\quad \in_{ijk}\left(\partial H_j/\partial x_k\right)-\partial D_i/\partial t=0\,,$$
$$\partial B_j/\partial x_j=0\,,\quad \partial D_n/\partial x_n=0\,. \tag{1.3}$$

In equations (1.3), the components of the Levi-Civitan tensor $\in_{ijk}=[\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k]$ is defined as a mixed product of the basis vectors of the piezo texture $\{\vec{e}_k\}$.

Physic mechanical constants of the material and the generalized linear tensor of electro-magneto-elasticity as a whole, for each piezo texture, are determined in accordance with the geometric scheme of piezo textures, according to the rules for installing crystals according to the syngonies and the rules for choosing crystallographic axes $0x_1x_2x_3$ in them (Fig. 1) [21, 22].



$0x_1,\ 0x_2 \rightleftarrows m$,
$0x_3 \rightleftarrows p_6$
$\alpha_0 = \pi/2$,
$\beta_0 = \pi/2$,
$\gamma_0 = \pi/3$,
$a_0 = b_0 \neq c_0$

Fig. 1. *Geometric scheme of piezo texture class 6mm of hexagonal symmetry with a choice of crystallographic coordinate axes, angles and unit vectors*

Piezoelectrics of the ***6mm*** class have transversally isotropic textures, and three significantly different axial polarizations are possible in them:

i) the case of natural polarization, when the axis of crystalline polarization $0x_3 \rightleftarrows \vec{p}_6$ is combined with the axis $0z$ of the Cartesian coordinate system,

ii) the case when the axis of crystal polarization $0x_3 \rightleftarrows \vec{p}_6$ lies in the isotropy plane of the crystal (for clarity, we assume $\vec{p}_6 \,||\, 0x$).

iii) the case when the axis of crystal polarization $0x_3 \rightleftarrows \vec{p}_6$ lies in the plane of isotropy of the crystal (for clarity, we assume $\vec{p}_6 \,||\, 0y$).

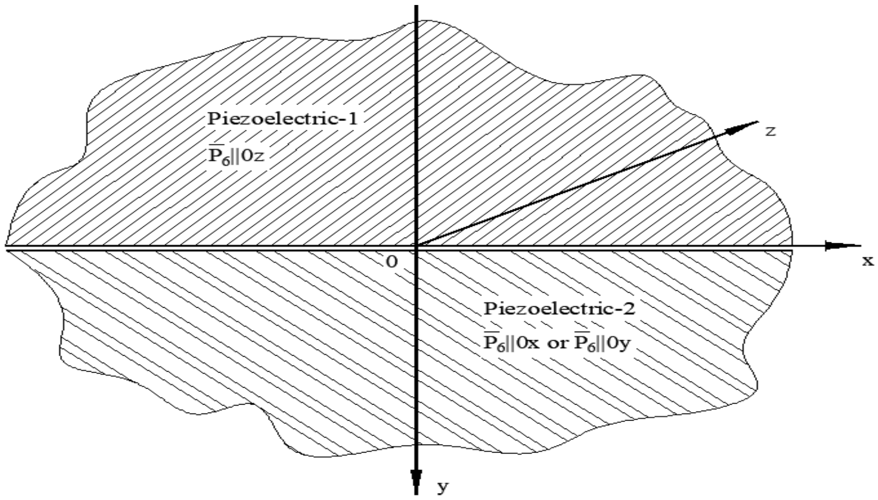


Fig. 2. *Composite space of two differently polarized piezoelectrics of class 6mm*

To study the reflection and breaking of an electro-magneto-elastic wave from the contact surface of a two-layer piezoelectric space, we assign it to a single Cartesian coordinate system $0xyz$ so that the components of the half-space in it border the coordinate plane $0zx$ and the coordinate axis $0y$ perpendicular to this plane (Fig. 2). As follows from the geometric diagram of the ***6mm*** class piezo texture with the choice of crystallographic coordinate axes and angles (Fig. 1), the last two axial polarizations make an angle between themselves $\pi/2 \to 90^0$.

In the case of the direction of the axis of crystal polarization $\vec{p}_6 \,||\, 0x_3$, along the coordinate axis $0z$ lying in the isotropy plane of the piezocrystal of the Cartesian system, the coordinate systems $0x_1x_2x_3 \rightleftarrows 0xyz$ coincide, and therefore the planes $0x_1x_2 \leftrightarrow 0xy$ coincide. The functional connections of the material, the equations of motion of the elastic medium and the equations of electrodynamics, for the separated problems of plane and antiplane deformations in the anisotropy plane $0x_1x_2 \leftrightarrow 0xy$, subject to $\partial[*]/\partial z = 0$, will respectively be written in the form:

a) Functional connections between the medium and the electro-magneto-elasticity equation in the plane deformation problem

$$\sigma_{xx} = c_{11}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} - e_{13}E_z, \quad \sigma_{yy} = c_{12}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + c_{11}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} - e_{13}E_z,$$
$$\sigma_{xy} = 2\left(c_{11} - e_{12}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

$$D_z = e_{13}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) + \varepsilon_3 E_z, \qquad B_x = \mu_1 H_x, \qquad B_y = \mu_2 H_y \tag{1.5}$$

Considering (1.4) and (1.5) as well as two-dimensional equations

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{1.7}$$

the equations of the electroactive plane strain problem are reduced to the form

$$c_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} + \frac{c_{11} + c_{12}}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} - e_{13}\frac{\partial E_z}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$$
$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + c_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} + \frac{c_{11} + c_{12}}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x \partial y} - e_{13}\frac{\partial E_z}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1.8}$$
$$\Delta E_z = \mu_1\varepsilon_3\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \mu_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial E_z}{\partial x},$$

b) Functional connections between the medium and the equation in the anti-plane deformation problem

$$\sigma_{zx}=c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}-e_{15}E_x,\qquad \sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}-e_{15}E_y$$
$$D_x=e_{15}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}+\varepsilon_1 E_x,\qquad D_y=e_{15}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}+\varepsilon_1 E_y \tag{1.9}$$

$$\tilde{c}_{t1}^2\Delta \mathrm{w}=\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2},\qquad \Delta H_z=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z}{\partial x}-\frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x\partial t},\qquad \frac{\partial E_y}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y\partial t} \tag{1.11}$$

In the first equation (1.10) the elastic shear wave velocity $\tilde{c}_{t1}=\sqrt{(1+\chi^2)c_{44}/\rho}$ appears.

According to the obtained relations (1.4) ÷ (1.11), in the isotropy plane of the piezocrystal-1 $0x_1x_2 \leftrightarrow 0xy$ (Fig. 2), the total electro-magneto-elastic field into $\{\mathrm{u}(x,y,t);\ \mathrm{v}(x,y,t);\ 0;\ 0;\ 0;\ E_z(x,y,t);\ H_x(x,y,t);\ H_y(x,y,t);\ 0\}$ a five-component electro-elastic field of plane strain and into a four-component electro-magneto-elastic field $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}(x,y,t);\ E_x(x,y,t);\ E_y(x,y,t);\ 0;\ 0;\ 0;\ H_z(x,y,t)\}$ anti-plane deformation is divided. Moreover, according to the identified structures of multicomponent waves, slow elastic plane strain waves (waves with the speed of sound) are accompanied only by $\Delta E_z(x,y,t)=\mu_1\varepsilon_3\frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial t^2}+\mu_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}(x,y,t)}{\partial y}\right)$ a slow transversely polarized electric field wave. Fast magnetic fields are generated by slow electrical waves $[\partial H_x(x,y,t)/\partial t]=-\mu_1^{-1}\cdot[\partial E_z(x,y,t)/\partial y]$ and $[\partial H_y(x,y,t)/\partial t]=\mu_1^{-1}\cdot[\partial E_z(x,y,t)/\partial x]$

According to the identified structures of multicomponent waves, slow elastic waves of antiplane deformation are accompanied only by a slow electric field wave $\partial E_x(x,y,t)=-(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot(\partial \mathrm{w}(x,y,t)/\partial x)$ and $\partial E_y(x,y,t)=-(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot(\partial \mathrm{w}(x,y,t)/\partial y)$ polarized in a given plane. . Also, fast electric field are generated by fast magnetic waves $[\partial E_x(x,y,t)/\partial t]=\varepsilon_1^{-1}\cdot[\partial H_z(x,y,t)/\partial x]$ and $[\partial E_y(x,y,t)/\partial t]=-\varepsilon_1^{-1}\cdot[\partial H_z(x,y,t)/\partial y]$.

In the case of the direction of the axis of crystal polarization $\vec{p}_6 \parallel 0x_3$, along the coordinate axis $0x$ lying in the isotropy plane of the piezocrystal of the Cartesian system, the coordinate systems $0x_1x_2x_3 \rightleftarrows 0yzx$ coincide, and therefore the planes $0x_3x_1 \leftrightarrow 0xy$ coincide. The functional connections of the material, the equations of motion of the elastic medium and the equations of electrodynamics, for the separated problems of plane and antiplane deformations in the anisotropy plane $0x_3x_1 \leftrightarrow 0xy$, subject to $\partial[*]/\partial z=0$, will respectively be written in the form:

a) Functional connections between the medium and the electro-magneto-elasticity equation in the plane deformation problem

$$\sigma_{xx}=c_{33}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+c_{13}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-e_{33}E_x, \qquad \sigma_{yy}=c_{13}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+c_{11}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-e_{31}E_x,$$
$$\sigma_{xy}=c_{44}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)-e_{15}E_y \tag{1.12}$$

$$D_x=e_{15}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)+\varepsilon_1 E_x\ , \quad D_y=e_{31}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+e_{33}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+\varepsilon_3 E_y, \quad B_z=\mu_1 H_z, \tag{1.13}$$

Considering (1.12) and (1.13) as well as two-dimensional equations

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu_1\frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial D_y}{\partial t}, \tag{1.15}$$

the equations of the electroactive plane strain problem are reduced to the form

$$c_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y}-e_{33}\frac{\partial E_x}{\partial x}-e_{15}\frac{\partial E_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$$
$$c_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x \partial y}-e_{15}\frac{\partial E_y}{\partial x}-e_{31}\frac{\partial E_x}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1.16}$$
$$e_{15}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+e_{31}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+(e_{33}+e_{15})\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x \partial y}+\varepsilon_1\frac{\partial E_x}{\partial x}+\varepsilon_3\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$$

$$\mu_1\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}, \qquad \mu_1\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}\right). \tag{1.17}$$

b) Functional connections between the medium and the equation in the anti-plane deformation problem

$$\sigma_{xz}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}, \qquad \sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}-e_{15}E_z,$$
$$D_z=e_{15}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}+\varepsilon_1 E_z, \qquad B_x=\mu_3 H_x, \qquad B_y=\mu_1 H_y \tag{1.18}$$

$$c_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}+\left(c_{11}-c_{12}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2}-e_{15}\frac{\partial E_z}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}\cdot\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2 \partial t}+\frac{1}{\varepsilon_1\mu_1}\cdot\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2 \partial t}-\frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial x \partial t^2} \tag{1.19}$$

According to the obtained relations (1.12) ÷ (1.19), in the anisotropy plane of the piezocrystal-2 $0x_3x_1 \leftrightarrow 0xy$ (Fig. 2), the total electro-magneto-elastic field is divided into a five-component electro-magneto-elastic field of plane strain $\{\mathrm{u}(x,y,t);\ \mathrm{v}(x,y,t);\ 0;\ E_x(x,y,t);\ E_y(x,y,t);\ 0;\ 0;\ 0;\ H_z(x,y,t)\}$ and into a two-component electro-elastic field $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}(x,y,t);\ 0;\ 0;\ E_z(x,y,t)\}$ antiplane deformation field, as well as a two-component plane magnetic field $\{H_x(x,y,t);\ H_y(x,y,t);\ 0\}$. Slow elastic plane waves of deformation (waves with the speed of sound) are accompanied by a slow electric field wave polarized in a given plane (1.16) and a transversely polarized magnetic field wave $\mu_1[\partial H_z(x,y,t)/\partial t]=[\partial E_x(x,y,t)/\partial y]-[\partial E_y(x,y,t)/\partial x]$. Slow elastic waves of antiplane deformation (waves with the speed of sound) are accompanied only by a fast electric transversely polarized wave (1.19).

In the case of the direction of the axis of crystal polarization $\vec{p}_6 \,||\, 0x_3$, along the coordinate axis $0y$ lying in the isotropy plane of the piezocrystal of the Cartesian system, the coordinate systems $0x_1x_2x_3 \rightleftarrows 0zxy$ coincide, and therefore the planes $0x_2x_3 \leftrightarrow 0xy$ coincide. The functional connections of the material, the equations of motion of the elastic medium and the equations of electrodynamics, for the separated problems of plane and antiplane deformations in the anisotropy plane $0x_3x_1 \leftrightarrow 0xy$, subject to $\partial[*]/\partial z=0$, will respectively be written in the form:

a) Functional connections between the medium and the electro-magneto-elasticity equation in the plane deformation problem

$$\sigma_{xx}=c_{11}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+c_{13}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-e_{13}E_y,\qquad \sigma_{yy}=c_{13}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+c_{33}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-e_{33}E_y,$$
$$\sigma_{xy}=c_{44}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)-e_{15}E_x \tag{1.20}$$

$$D_x=e_{15}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)+\varepsilon_1E_x\ ,\qquad D_y=e_{13}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+e_{33}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\varepsilon_3E_y,\qquad B_z=\mu_1H_z, \tag{1.21}$$

$$c_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}-e_{13}\frac{\partial E_y}{\partial x}-e_{15}\frac{\partial E_x}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$$
$$c_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+c_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x\partial y}-e_{15}\frac{\partial E_x}{\partial x}-e_{33}\frac{\partial E_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1.22}$$
$$e_{15}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+e_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+(e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x\partial y}+\varepsilon_1\frac{\partial E_x}{\partial x}+\varepsilon_3\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$$

$$\mu_1\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x},\qquad \mu_1\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{\partial^2 H_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}\right) \tag{1.23}$$

b) Functional connections between the medium and the equation in the anti-plane deformation problem

$$\sigma_{xz} = c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} - e_{15}E_z\ ; \quad \sigma_{zy} = \left(c_{11} - c_{12}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}, \qquad D_z = e_{15}\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon_1 E_z. \tag{1.24}$$

$$\begin{gathered} c_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + (c_{11} - c_{12})\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} - e_{15}\frac{\partial E_z}{\partial x} \quad = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}\frac{\partial E_z}{\partial y^2 \partial t} + \frac{1}{\varepsilon_1\mu_1}\frac{\partial E_z}{\partial x^2 \partial t} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x \partial t^2} \end{gathered} \tag{1.25}$$

According to the obtained relations (1.20) ÷ (1.25), as in the previous case, in the anisotropy plane of the piezocrystal-2 $0x_2x_3 \leftrightarrow 0xy$ (Fig. 2), the total electro-magneto-elastic field is divided into a five-component electromagnetoelastic field of plane strain and into a two-component electroelastic field, a field of antiplane strains, and also two-component plane magnetic field. Here too, slow elastic plane strain waves (waves with the speed of sound) are accompanied by a slow electric field wave polarized in a given plane (1.22) and a transversely polarized magnetic field wave . Slow elastic waves of antiplane deformation (waves with the speed of sound) are accompanied only by a fast electric transversely polarized wave (1.25).

It is interesting to note that both in the case of natural polarization of a piezoelectric, a plane strain wave is accompanied by a magnetic plane wave polarized in this plane and a transversely polarized electric field wave, and in other cases of polarization of a piezoelectric, an antiplane strain wave is accompanied by them. Just as in the case of natural polarization of a piezoelectric, an antiplane deformation wave is accompanied by an electric plane wave polarized in this plane and a transversely polarized magnetic field wave, so in other cases of polarization of a piezoelectric, a plane deformation wave is accompanied by them. From the above it follows that in the case of complete contact of differently polarized piezoelectric half-spaces (Fig. 2), the generation of an elastic wave of one type in one of the half-spaces after reflection and refraction from the interface is transformed into a complete package of electro-magneto-elastic waves in both half-spaces. In the case of non-acoustic contact of differently polarized piezoelectric half-spaces (Fig. 2), the generation of an elastic wave of one type in one of the half-spaces, after reflection and refraction from the interface, is transformed into an identical wave packet in its half-space and into an electro-magneto-elastic wave packet with another elastic component in the adjacent half-space.

2. Reflection and refraction of shear electro-magneto-elastic waves from the interface of differently polarized piezoelectric half-spaces

For simplicity of calculations, as an example, we consider the reflection and refraction of a shear electro-magneto-elastic wave from the interface of a non-acoustic contact of two differently polarized piezoelectric half-spaces of class ***6mm*** of hexagonal symmetry with different natural polarizations.

The two-layer piezoelectric space is assigned to the Cartesian coordinate system $0xyz$ so that the components of the half-space in it are bordered by the coordinate plane $0zx$, and the coordinate axis $0y$ is perpendicular to this plane. The half-space $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y \le 0,\ -\infty < z < \infty$ polarized along the axis $0z$, is occupied by a piezo active elastic medium of class ***6mm*** Piezoelectric - 1, and the half-space $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty, -\infty < z < \infty$, polarized along the axis $0y$, is occupied by a piezo active elastic medium of class ***6mm*** Piezoelectric - 2 (Fig. 3).

From the half-space Piezoelectric - 1 at an angle α_0, an elastic shear wave is applied to the interface of non-acoustic contact media $y = 0$

$$\mathrm{w}_{01}(x.y,t) = A\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x - k_{12}y)] \tag{2.1}$$

According to the system of equations (1.10) and (1.11), the wave signal will be accompanied by a plane polarized electric wave $\{E_{01}(x.y,t),\ E_{02}(x.y,t),\ 0\}$

$$\begin{aligned} E_{0x}(x.y,t) &= ik_{11}\,(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot A\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x - k_{12}y)] \\ E_{0y}(x.y,t) &= -ik_{12}\,(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot A\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x - k_{12}y)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

A transversely polarized slow magnetic wave together with a wave signal $\mathrm{w}_{01}(x.y,t)$ is not induced. According to the first equation (1.10), the direction cosines will be equal

$$k_{11} = k_1\cdot\sin\alpha_0,\qquad k_{12} = k_1\cdot\cos\alpha_0,\qquad k_1^2 = \omega^2/\tilde{c}_{t1}^2 \tag{2.3}$$

A similar electroelastic wave is reflected from a mechanically free surface deep into the half-space of Piezoelectric – 1

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_{11}(x.y,t) &= B\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x + k_{12}y)] \\ E_{1x}(x.y,t) &= ik_{11}\,(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot B\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x + k_{12}y)] \\ E_{1y}(x.y,t) &= -ik_{12}\,(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot B\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x + k_{12}y)] \end{aligned} \tag{2.4}$$

The complete electro elastic wave in the half-space Piezoelectric – 1 is accept the form

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_1(x.y,t) &= \left[A\cdot\exp[(-ik_{12}y)] + B\cdot\exp(ik_{12}y)\right]\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x)] \\ E_x^{(1)}(x.y,t) &= ik_{11}\,(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot\left[A\cdot\exp[(-ik_{12}y)] + B\cdot\exp(ik_{12}y)\right]\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x)] \\ E_y^{(2)}(x.y,t) &= -ik_{12}\,(e_{15}/\varepsilon_1)\cdot\left[A\cdot\exp[(-ik_{12}y)] + B\cdot\exp(ik_{12}y)\right]\cdot\exp[i(\omega t - k_{11}x)] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Non-acoustic contact at the interface of piezoelectric half-spaces is realized under the following contact conditions

$$\begin{aligned} &\sigma_{yz}^{(1)}(x.0,t) = 0, \qquad \sigma_{yy}^{(2)}(x.0,t) = 0, \qquad \sigma_{xy}^{(2)}(x.0,t) = 0, \\ &E_x^{(1)}(x.0,t) = E_x^{(2)}(x.0,t), \qquad D_y^{(1)}(x.0,t) = D_y^{(2)}(x.0,t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

Under conditions of acoustic-free contact (2.9), electromechanical stresses $\sigma_{yz}^{(1)}(x.0,t) = 0$, $\sigma_{yy}^{(2)}(x.0,t) = 0$, $\sigma_{xy}^{(2)}(x.0,t) = 0$ and electric field displacements $D_y^{(1)}(x.0,t)$, $D_y^{(2)}(x.0,t)$ are presented in the form of material relations (1.9), (1.20) and (1.21)

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x.0,t)=c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}_1(x.0,t)}{\partial y}-e_{15}E_y^{(1)}(x.0,t),$$
$$\sigma_{yy}^{(2)}(x.0,t)=c_{13}\frac{\partial \mathrm{u}_2(x.0,t)}{\partial x}+c_{33}\frac{\partial \mathrm{v}_2(x.0,t)}{\partial y}-e_{33}E_y^{(2)}(x.0,t),$$
$$\sigma_{xy}^{(2)}(x.0,t)=c_{44}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_2(x.0,t)}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_2(x.0,t)}{\partial x}\right)-e_{15}E_x^{(2)}(x.0,t), \tag{2.7}$$
$$D_y^{(1)}(x.0,t)=e_{15}\frac{\partial \mathrm{w}_1(x.0,t)}{\partial y}+\varepsilon_1 E_y^{(1)}(x.0,t),$$
$$D_y^{(2)}(x.0,t)=e_{13}\frac{\partial \mathrm{u}_2(x.0,t)}{\partial x}+e_{33}\frac{\partial \mathrm{v}_2(x.0,t)}{\partial y}+\varepsilon_3 E_y^{(2)}(x.0,t),$$

According to the system of equations (1.22) and (1.23), a slow electroelastic wave is induced in the half-space Piezoelectric – 2

$$\begin{aligned}
&\mathrm{u}_2(x.y,t)=C_u\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+a_vC_v\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+\\
&+b_{ux}C_{e2x}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+b_{uy}C_{e2y}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]\\
&\mathrm{v}_2(x.y,t)=a_uC_u\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+C_v\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+\\
&+b_{vx}C_{e2x}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+b_{vy}C_{e2y}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]\\
&E_x^{(2)}(x.y,t)=a_{2x}C_u\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+b_{2x}C_v\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+\\
&+C_{e2x}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+b_{2x}C_{e2y}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]\\
&E_y^{(2)}(x.y,t)=a_{2y}C_u\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+b_{2y}C_v\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+\\
&+b_{2y}C_{e2x}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]+C_{e2y}\cdot\exp[i(\omega t-k_{21}x-k_{22}y)]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

In which normalizing factors are determined from the following systems of algebraic equations

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} -(c_{13}+c_{44})k_{21}k_{22} & -k_{22}e_{15} & k_{21}e_{13}\\ c_{44}k_{21}^2+c_{33}k_{22}^2-\rho\omega^2 & k_{21}e_{15} & -k_{22}e_{33}\\ e_{15}k_{21}^2+e_{33}k_{22}^2 & -k_{21}\varepsilon_1 & k_{22}\varepsilon_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_u\\ a_{2x}\\ a_{2y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}k_{21}^2+c_{44}k_{22}^2-\rho\omega^2\\ (c_{13}+c_{44})k_{21}k_{22}\\ (e_{15}+e_{31})k_{21}k_{22}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} k_{21}^2c_{11}+k_{22}^2c_{44}-\omega^2\rho & k_{22}e_{15} & k_{21}e_{13}\\ k_{21}k_{22}(c_{13}+c_{44}) & k_{21}e_{15} & k_{22}e_{33}\\ k_{21}k_{22}(e_{15}+e_{31}) & -k_{21}\varepsilon_1 & -k_{22}\varepsilon_3 b_{2y} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_v\\ b_{2x}\\ b_{2y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{21}k_{22}(c_{13}+c_{44})\\ k_{21}^2c_{44}+k_{22}^2c_{33}-\omega^2\rho\\ k_{21}^2e_{15}+k_{22}^2e_{33}\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$
\begin{pmatrix} k_{21}^2 c_{11} + k_{22}^2 c_{44} - \rho\omega^2 & k_{21}k_{22}(c_{13}+c_{44}) & -k_{21}e_{13} \\ k_{21}^2 c_{44} + k_{22}^2 c_{33} - \omega^2\rho & k_{21}k_{22}(c_{13}+c_{44}) & -k_{22}e_{33} \\ k_{21}^2 e_{15} + k_{22}^2 e_{33} & k_{21}k_{22}(e_{15}+e_{31}) & k_{22}\varepsilon_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{ux} \\ b_{vx} \\ b_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{22}e_{15} \\ k_{21}e_{15} \\ k_{21}\varepsilon_1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} k_{21}^2 c_{11} + k_{22}^2 c_{44} - \omega^2\rho & k_{21}k_{22}(c_{13}+c_{44}) & -k_{22}e_{15} \\ k_{21}k_{22}(c_{13}+c_{44}) & k_{21}^2 c_{44} + k_{22}^2 c_{33} - \omega^2\rho & -k_{21}e_{15} \\ k_{21}k_{22}(e_{15}+e_{31}) & k_{21}^2 e_{15} + k_{22}^2 e_{33} & k_{21}\varepsilon_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{uy} \\ b_{vy} \\ b_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{21}e_{13} \\ k_{22}e_{33} \\ -k_{22}\varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{2.10}
$$

A slow magnetic wave of transverse polarization together with electroelastic wave transformation is not induced.

Fast magnetoelastic waves accompanying slow electroacoustic waves, determined from equations (1.10), (1.11) and (1.23), are infinitesimal (of the order of $\simeq 10^{-5}$) and are not taken into account in problems of electro-magneto-elasticity in quasi-static elasticity.

In a refracted multicomponent wave (2.8), the direction cosines are represented as

$$
k_{21} = k_2 \cdot \sin\beta, \quad k_{22} = k_2 \cdot \cos\beta, \quad k_2^2 = \omega^2 / \tilde{c}_{l2}^2 \tag{2.11}
$$

The speed $\tilde{c}_{l2}(k_2, \omega)$ of a slow electroactive plane strain wave (***P***&***SV***) is determined from the characteristic equation of the system (2.12) and (2.13).

Substituting the relations of electroelastic waves (2.5) and (2.8) into the boundary conditions (2.6), taking into account representations (2.7), (2.9) and (2.10), we find the amplitudes both of reflected $B(A,\alpha_0)$ and refracted $C_{\mathrm{u}}(A,\alpha_0)$, $C_{\mathrm{v}}(A,\alpha_0)$, $C_{e2x}(A,\alpha_0)$, $C_{e2y}(A,\alpha_0)$ multicomponent waves in the corresponding half-spaces.

The angle of transformed waves is found based on the same flow of the hybrid in the direction $0x$: $k_{11} = k_{21}$. From which it turns out

$$
\sin\beta = (\tilde{c}_{l2} / \tilde{c}_{t1}) \cdot \sin\alpha_0 \tag{2.12}
$$

The study of the behavior of a refracted wave and a wave hybrid as a whole comes down to a numerical analysis of the behavior of the amplitude functions both of reflected $B(A,\alpha_0)$ and refracted $C_{\mathrm{u}}(A,\alpha_0)$, $C_{\mathrm{v}}(A,\alpha_0)$, $C_{e2x}(A,\alpha_0)$, $C_{e2y}(A,\alpha_0)$ multicomponent waves in the corresponding half-spaces and the refraction angle function

$$
\beta\big((c_{44}/c_{11}), \alpha_0\big) = \arcsin\big[(\tilde{c}_{l2}/\tilde{c}_{t1}) \cdot \sin\alpha_0\big]. \tag{2.13}
$$

An analysis of this kind was carried out in [15,16,17,19] and others, in the problem of the emergence of a hybrid during the propagation of an electroelastic shear wave.

Conclusions.

In the sagittal planes of differently polarized piezoelectric half-spaces of a 6mm class piezoelectric, heterogeneous multicomponent electro-magneto-elastic waves are formed.

On the surface of the non-acoustic contact between differently polarized piezoelectric half-spaces, a multicomponent electro-magneto-elastic field of one type generated in one of the piezoelectric half-spaces is transformed into a hybrid of multicomponent electro-magneto-elastic waves of plane and antiplane deformations.

References

1. Kyame J.J., Wave Propagation in Piezoelectric Crystals. The Journal of the Acoustical Society of America, (1949), vol.21(3), pp.159-167, https://doi.org/10.1121/1.1906490
2. Wu H., Kuang Y., Propagation Characteristics of Flexural Wave in One-Dimensional Phononic Crystals Based on Lattice Dynamics Model, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, (2022), vol.10 No.5, https://doi.org/10.4236/jamp.2022.105100 ,
3. Hillion P., Wave Propagation in Nanocomposite Materials, Journal of Electromagnetic Analysis and Applications, (2010), vol.2, No.7, https://doi.org/10.4236/jemaa.2010.27053,
4. Zakharenko A. A., New Interfacial Shear-Horizontal Waves in Piezoelectric Cubic Crystals, Journal of Electromagnetic Analysis and Applications, (2010), vol.2, No.11, https://doi.org/10.4236/jemaa.2010.211083,
5. Rabiu M., Mensah S. Y., Abukari S. S., Amekpewu M., Sefa-Ntiri B., Twum A., Generation and Propagation of Ultrasonic Waves in Piezoelectric Graphene Nanoribbon, Open Journal of Acoustics, (2013), vol.3 No.3A, https://doi.org/10.4236/oja.2013.33A007,
6. Белубекян М.В., Гараков В.Г., Отражение нормально падающей сдвиговой электроупругой волны от плоской границы раздела двух пьезоактивных сред. Докл. НАН Армении, 2013, т.113, N 4. с. 364-369.
7. Avetisyan Ara S., Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites, Advanced Structured Materials, (2023), vol.182, Springer Cham., p. 225, https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4 ,
8. Singh B., Yadav A.K. and Kaushal S., Effect of Impedance Boundary on Reflection of Plane Waves from free Surface of a Rotating Thermoelastic Solid Half Space, Research J. Engineering and Tech., (2017), vol. 8(4), pp. 405-413,

   https://doi.org/10.5958/2321-581X.2017.00071.X
9. Singh B., Reflection of Elastic Waves from Plane Surface of a Half-space with Impedance Boundary Conditions, Geosciences Research, (2017), Vol. 2, No. 4, pp. 242-253, https://dx.doi.org/10.22606/gr.2017.24004 ,
10. Rajneesh Chattopadhyay A., Reflection and refraction of waves at the interface of an isotropic medium over a highly anisotropic medium, *Acta Geophysics.* (2006), Vol.**54**, pp. 239–249, https://doi.org/10.2478/s11600-006-0022-y ,
11. Klenow B., Nisewonger A., Batra R.C., Brown A., Reflection and transmission of plane waves at an interface between two fluids, Computers & Fluids (2007), vol. 36, pp. 1298–1306, https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.03.014 ,
12. Pang Y., Wang Y.-S., Liu Jin-Xi, Fang D.-N., Reflection and refraction of plane waves at the interface between piezoelectric and piezomagnetic media, International Journal of Engineering Sciences, (2008), vol. 46, Iss. 11, pp. 1098-1110, https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.04.006 ,
13. Rajneesh Kumar, Rajeev Kumar, "Reflection and refraction of elastic waves at the interface of an elastic half-space and initially stressed thermoelastic with voids half-

space", Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, (2012), vol. 8 Iss: 3 pp. 355 – 379, http://dx.doi.org/10.1108/15736101211269159 ,

14. Vinh P.C., Tuan T.T., Tung D.X., Kieu N.T., Reflection and transmission of SH waves at a very rough interface and its band gaps, Journal of Sound and Vibration, (2017), vol. 411, pp. 422-434, https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.08.046 ,
15. Ghazaryan K.B., Papyan A.A., and Ohanyan S.K., "Reflection, refraction, and transmission of SH waves at a micropolar layer separating two elastic media." Journal of Physics: Conference Series, (2018), vol. 991, No. 1, IOP Publishing,.
16. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Galichyan T.A., Reflection and Transmission of Electro-Elastic Waves at Plane Non-Acoustic Contact Interface of Two Different Piezoelectric Half-Spaces, Materials Int. Scientific-Practical. conf. “Multiferroics: preparation, properties, application” Vitebsk, (2019), / ed. Rubanik V.V., 92-95 p., http://doi.org/10.26201/ISSP.2019.45.557/MFerro.37
17. Джилавян С.А., Саргсян А.С., Дифракция плоской волны сдвига в составном пьезоэлектрическом пространстве. Известия НАН РА. Механика 2019, 72(1), с.35-48, http://doi.org/10.33018/72.1.3,
18. Sahu S.A., Nirval S., Mondal S., Reflection and transmission of quasi-plane waves at the interface of piezoelectric semiconductors with initial stresses, Appl. Math. and Mech. (Engl. Ed.), (2020), vol. 41(1), pp. 1-18, https://doi.org/10.1007/s10483-021-2738-9 ,
19. Singh B., Sangwan A., Singh J., Reflection and Transmission of Plane Wave at an Interface Between Two Rotating Micropolar Piezoelectric Solid Half-Spaces, Archives of Acoustics, (2021), vol. 46, No. 4, pp. 623–635, https://doi.org/10.24425/aoa.2021.138155 ,
20. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., and Mkrtchyan M.H., Formation of a hybrid of electroacoustic wavesin piezoelectric layered composites, J. Phys.: Conf. Ser. (2022), vol. ***2231*** 012025, https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012025 ,
21. Kumar S., Pal P.C., and Majhi S., “Reflection and transmission of SH-waves at a corrugated interface between two semi-infinite anisotropic magnetoelastic half-spaces,” *Waves Random Complex Media* (2023), vol. **27** (2), pp.339–358 https://doi.org/10.1080/17455030.2016.1245454 ,
22. Akshaya A., Kumar S. & Hemalatha K., Behaviour of Transverse Wave at an Imperfectly Corrugated Interface of a Functionally Graded Structure. *Phys. Wave Phen.* (2024), vol. **32**, pp.117–134, https://doi.org/10.3103/S1541308X24700067 ,

Information about authors:

Avetisyan Ara S. - Chief Researcher, Department of Dynamics of Deformable Systems and Associated Fields, Institute of Mechanics of NAS RA

Ghazaryan K.B. - Chief Researcher, Department of Dynamics of Deformable Systems and Associated Fields, Institute of Mechanics of NAS RA

Received 11 June, 2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №2, 2024 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77 №2

CONTENTS 2024, v. 77 №2

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2024, h.77, №2

Сдано в производство 27.03.2024 г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 3 3/8
Заказ № 1301. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

Сдано в производство 26.06.2024 г.
Формат 70 х 100 $^1/_{16}$. Печ. лист – 4.25
Заказ № 1321. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24