

Г.Д. АКОПДЖАНЫН, В.С. САФАРЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦЕПНЫХ СХЕМ

Исследованы зависимости передаточных функций и обобщенных параметров, характеризующих цепные схемы, от числа каскадно включенных в схеме четырехполюсников. Выявлены некоторые новые свойства указанных, а также характеристических сопротивлений цепных схем.

Ключевые слова: цепная схема, передаточная функция, четырехполюсник, характеристическое сопротивление.

Известно, что параметрами, характеризующими пассивные четырехполюсники (рис. 1), служат сопротивления Z_a, Z_{ab}, Z_b, Z_{ba} , где Z_a, Z_{ab} (Z_b, Z_{ba}) - входные сопротивления со стороны зажимов 1-1' (2-2') при холостом ходе и коротком замыкании на зажимах 2-2' (1-1').

Известно также, что из названных параметров только три независимы, поскольку между ними существует связь [1,2]:

$$Z_a Z_{ba} = Z_b Z_{ab} = d.$$

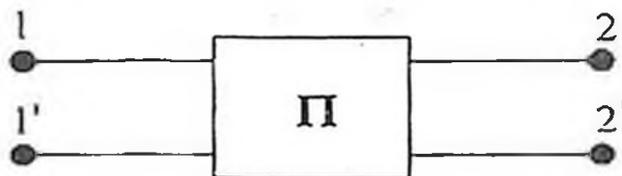


Рис. 1

Цепную схему (рис. 2), состоящую из каскадно подключенных одинаковых пассивных четырехполюсников, в целом можно рассматривать как эквивалентный четырехполюсник и характеризовать его тремя независимыми параметрами, имея в виду, что

$$Z_{na} Z_{nba} = Z_{nb} Z_{nab}.$$

В данном выражении величины те же, что и выше, а индекс n указывает на количество четырехполюсников в цепной схеме.

В настоящей статье проводится анализ цепных схем, состоящих, в общем случае, из несимметричных, но одинаковых пассивных четырехполюсников, с точки зрения выявления новых свойств характеризующих их параметров. Ставятся задачи получения зависимостей этих параметров от числа n четырехполюсников, входящих в состав цепной схемы, и параметров только одного четырехполюсника (Z_a, Z_b, Z_{ab}, Z_{ba}), а также нахождения

общей формулы для определения передаточных функций по напряжению от выхода любого i - го звена к входу цепной схемы, работающей в режиме холостого хода.

Для решения поставленных задач воспользуемся рекуррентными соотношениями [3]:

$$\begin{aligned} Z_{na} &= \frac{Z_{(n-1)a} Z_a + Z_{ab} Z_b}{Z_{(n-1)a} + Z_b}, & Z_{nab} &= \frac{Z_{(n-1)ab} Z_a + Z_{ab} Z_b}{Z_{(n-1)ab} + Z_b}, \\ Z_{nb} &= \frac{Z_{(n-1)b} Z_b + Z_{ba} Z_a}{Z_{(n-1)b} + Z_a}, & Z_{nba} &= \frac{Z_{(n-1)ba} Z_b + Z_{ba} Z_a}{Z_{(n-1)ba} + Z_a}. \end{aligned} \quad (1)$$

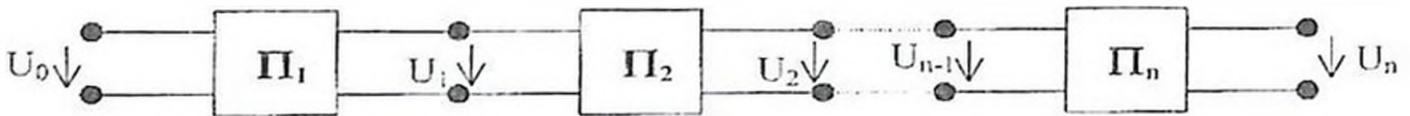


Рис. 2

Предварительно докажем некоторые инвариантные соотношения, имеющие место между параметрами, характеризующими цепную схему.

1. Докажем, что

$$Z_{na} - Z_{nb} = Z_a - Z_b, \quad (2)$$

т.е. эта разность не зависит от числа n четырехполюсников, входящих в состав цепной схемы.

Воспользуемся соотношениями (1) и для доказательства применим метод математической индукции. Покажем, что выражение (2) имеет место при $n = 2$:

$$Z_{2a} - Z_{2b} = \frac{Z_a^2 + d}{Z_a + Z_b} - \frac{Z_b^2 + d}{Z_b + Z_a} = \frac{Z_a^2 - Z_b^2}{Z_a + Z_b} = Z_a - Z_b.$$

Полагая, что (2) имеет место при $n - 1$, для n получим

$$\begin{aligned} Z_{na} - Z_{nb} &= \frac{Z_{(n-1)a} Z_a + d}{Z_{(n-1)a} + Z_b} - \frac{Z_{(n-1)b} Z_b + d}{Z_{(n-1)b} + Z_a} = \frac{Z_{(n-1)a} Z_a + d}{Z_{(n-1)a} + Z_b} - \frac{Z_{(n-1)b} Z_b + d}{Z_{(n-1)b} + Z_a} = \\ &= \frac{Z_{(n-1)a} Z_a - Z_{(n-1)b} Z_b}{Z_{(n-1)a} + Z_b} = \frac{(Z_{(n-1)a} - Z_{(n-1)b} + Z_{(n-1)b}) Z_a - Z_{(n-1)b} Z_b}{Z_{(n-1)a} + Z_b} = \\ &= \frac{(Z_a - Z_b) Z_a + Z_{(n-1)b} (Z_a - Z_b)}{Z_{(n-1)a} + Z_b} = Z_a - Z_b. \end{aligned}$$

Что и следовало доказать.

2. Докажем, что

$$Z_{nab} Z_{nb} = Z_{ab} Z_b$$

или, что то же самое,

$$Z_{nba} Z_{na} = Z_{ba} Z_a,$$

(3)

т.е. указанные произведения сопротивлений цепной схемы не зависят от числа звеньев, имеющих в ней.

Вновь воспользуемся соотношениями (1) и применим метод математической индукции. Покажем, что выражение (3) имеет место при $n = 2$:

$$\begin{aligned} Z_{2ab} Z_{2b} &= \frac{Z_{ab} Z_b + Z_{ab} Z_a}{Z_{ab} + Z_b} \cdot \frac{Z_{ba} Z_a + Z_b^2}{Z_a + Z_b} = \frac{Z_{ab}}{Z_b + Z_{ab}} (Z_{ba} Z_a + Z_b^2) = \\ &= \frac{Z_{ab}}{Z_b + Z_{ab}} Z_b (Z_{ab} + Z_b) = Z_{ab} Z_b = d. \end{aligned}$$

Полагая, что условие (3) выполняется при $n-1$, покажем, что оно будет иметь место также при n :

$$\begin{aligned} Z_{nab} Z_{nb} &= \frac{d + Z_{(n-1)ab} Z_a}{Z_b + Z_{(n-1)ab}} \cdot \frac{d + Z_{(n-1)b} Z_b}{Z_a + Z_{(n-1)b}} = \\ &= \frac{d^2 + dZ_{(n-1)b} Z_b + dZ_{(n-1)ab} Z_a + dZ_a Z_b}{Z_a Z_b + Z_b Z_{(n-1)b} + Z_a Z_{(n-1)ab} + d} = d = Z_{ab} Z_b, \end{aligned}$$

что и следовало доказать.

3. Докажем что

$$Z_{nc_1} Z_{nc_2} = Z_{c_1} Z_{c_2} = d, \quad (4)$$

т.е. произведение характеристических сопротивлений цепной схемы не зависит от числа n ее звеньев.

Известно [2], что

$$Z_{nc_1} = \sqrt{Z_{na} Z_{nab}} \quad \text{и} \quad Z_{nc_2} = \sqrt{Z_{nb} Z_{nba}}.$$

С учетом последнего выражения и (3) получим соотношение (4).

Перейдем к определению сопротивлений и передаточных функций цепной схемы. Для этого воспользуемся соотношением

$$K_u = \left(\frac{Z_b - Z_{ba}}{Z_a} \right)^{\frac{1}{2}},$$

определяющим коэффициент передачи по напряжению четырехполюсника в режиме холостого хода [3].

Объединив первые i ($1, \dots, i$) и отдельно остальные $n - i$ ($i + 1, \dots, n$) четырехполюсники эквивалентными четырехполюсниками, приведем схему цепной схемы к каскадному соединению двух четырехполюсников (рис. 3). Определим коэффициент передачи по напряжению для схемы на рис. 3, рассматривая ее как один четырехполюсник с входными зажимами $o o'$ и выходными - $i i'$ [4]:

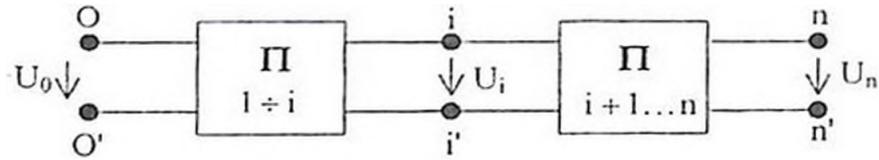


Рис. 3

$$K_{iu}^2 = \frac{U_i^2}{U_0^2} = \frac{Z_{(n-i)a}}{Z_{na}} \left(\frac{Z_{ib}}{Z_{ib} + Z_{(n-i)a}} - \frac{Z_{iba}}{Z_{iba} + Z_{(n-i)a}} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда $n \rightarrow \infty$:

$$K_{iu}^2 = \frac{Z_{ib}}{Z_{ib} + Z_{za}} - \frac{Z_{iba}}{Z_{iba} + Z_{za}} = \frac{Z_{ib}}{Z_{ib} + Z_{za}} - \frac{\frac{d}{Z_{ia}}}{\frac{d}{Z_{ia}} + Z_{za}}.$$

Учитывая, что при $n \rightarrow \infty$ все четырехполюсники, составляющие цепную схему, находятся в одинаковых условиях, коэффициенты передач по напряжению каждого из них будут иметь одно и то же значение K_u . Следовательно,

$$K_{iu} = K_u^i.$$

Обозначив K_u^2 через C , будем иметь

$$C^i = \frac{Z_{ib}}{Z_{ib} + Z_{za}} - \frac{d}{d + Z_{ia} Z_{za}}. \quad (6)$$

Решая совместно (3) и (6) относительно Z_{ia} и Z_{ib} , получим

$$Z_{ia} = \frac{Z_{za}^2 + dC^i}{Z_{za}(1 - C^i)}, \quad Z_{ib} = \frac{Z_{zb}^2 + dC^i}{Z_{zb}(1 - C^i)}, \quad (7)$$

$$Z_{iab} = \frac{d}{Z_{ib}} = \frac{Z_{zb}d(1 - C^i)}{Z_{zb}^2 + dC^i}, \quad Z_{iba} = \frac{d}{Z_{ia}} = \frac{Z_{za}d(1 - C^i)}{Z_{za}^2 + dC^i}.$$

В этих выражениях

$$Z_{za} = \frac{1}{2}(Z_a - Z_b) + \sqrt{\frac{1}{4}(Z_a - Z_b)^2 + d} = Z_{zab},$$

$$Z_{zb} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a) + \sqrt{\frac{1}{4}(Z_b - Z_a)^2 + d} = Z_{zab}.$$

Отметим еще одно инвариантное соотношение для цепных схем с различным числом звеньев - это разность проводимостей (при к.з.) цепной схемы:

$$Y_{nab} - Y_{nba} = Y_{ab} - Y_{ba}, \quad (8)$$

что просто доказывается из соответствующих равенств (7).

На рис. 4 приведены графики зависимостей сопротивлений цепной схемы (при постоянном токе) от числа звеньев, а на рис. 5 - те же зависимости для характеристических сопротивлений цепной схемы.

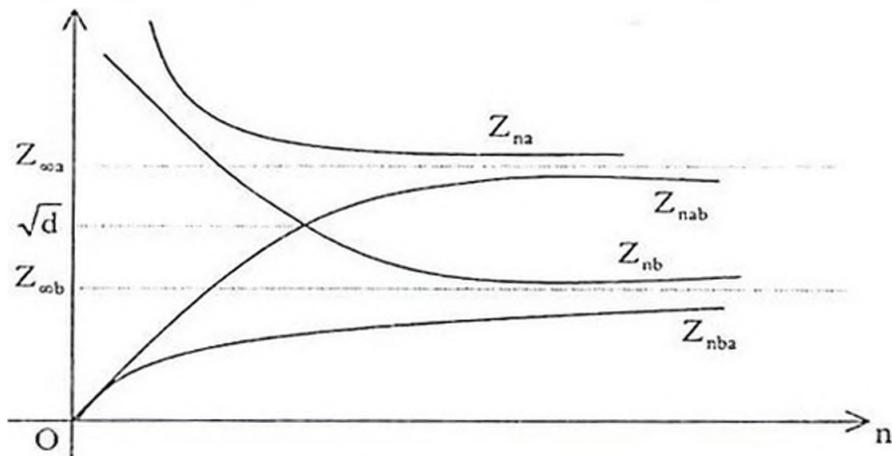


Рис. 4

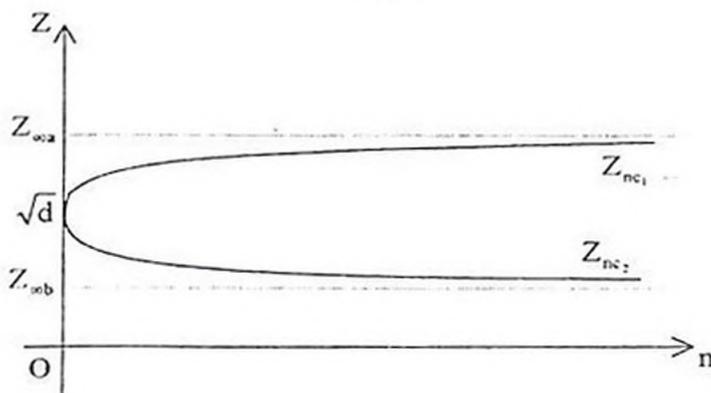


Рис. 5

Подставляя значения соотношений (7) в (5), после алгебраических преобразований получаем выражение функции передачи по напряжению цепной схемы, работающей в режиме холостого хода:

$$K_{iu} = \frac{Z_{\infty a} + Z_{\infty b} C^{n-i}}{Z_{\infty a} + Z_{\infty b} C^n} C^{\frac{i}{2}}. \quad (9)$$

Что касается характеристических сопротивлений цепной схемы, то зависимости их от числа n ее звеньев будут иметь вид

$$\begin{aligned} Z_{nc1}^2 = Z_{na} Z_{nab} &= \frac{Z_{\infty b}^2 (Z_{\infty a}^2 + dC^n)}{Z_{\infty b}^2 + dC^n}, \\ Z_{nc2}^2 = Z_{nb} Z_{nba} &= \frac{Z_{\infty a}^2 (Z_{\infty b}^2 + dC^n)}{Z_{\infty a}^2 + dC^n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что

$$Z_{nc1} Z_{nc2} = d.$$

Пользуясь равенствами (6) и (7) для симметричной цепной схемы ($Z_a = Z_b, Z_{ab} = Z_{ba}$), нетрудно получить

$$C = \frac{Z_a - Z_{ca}}{Z_a + Z_{ca}}, \quad Z_{ia} = Z_{ib} = \frac{1 + C^i}{1 - C^i} Z_{ca}, \quad Z_{iab} = Z_{iba} = \frac{1 - C^i}{1 + C^i} Z_{ca},$$

а из (9):

$$K_{iu} = \frac{1 + C^{n-i}}{1 + C^n} C^{\frac{i}{2}}.$$

Таким образом, получены соотношения, определяющие новые свойства величин, характеризующих цепные схемы, состоящие, в общем случае, из несимметричных пассивных четырехполюсников, а также соотношения, определяющие зависимости обобщенных параметров цепной схемы от числа звеньев (7), и функция передачи по напряжению с любых i -ых пар зажимов к входным зажимам цепной схемы (9). Учет результатов, полученных в работе, приведет к упрощению расчета цепных схем, а следовательно, к расчету и исследованию длинных линий электропередач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. - М. - СПб, 2004. - 4 - е изд, том 2. - 573 с.
2. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч. I. - М.: Госэнергоиздат, 1962. - 280 с.
3. Беллерт С., Возняcki Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. - М.: Мир, 1972. - 332 с.
4. Акопджанян Г.Д., Сафарян В.С. К исследованию однородных цепных схем // Изв. НАН и ГИУА. Сер. ТН. - 2003. - Т.56, N^o 2. - С 301-305.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 28.07.2005.

Գ.Դ. ՆԱԿՈՐՋԱՆՅԱՆ, Վ.Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ ՇՂԹԱՅԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐԻ ՄՈՒՏԵԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇ ՎԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Շղթայական սխեմաների փոխանցման ֆունկցիաների ընդհանրացված պարամետրերի ուսումնասիրությունը, դրանց կախումը սխեման կազմող քառաբևեռների թվից որոշելիս հայտնաբերվեցին այդ պարամետրերի և սխեմայի բնութագրիչ դիմադրությունների նոր հատկություններ:

Առանցքային բառեր. շղթայական սխեմա, փոխանցման ֆունկցիա, քառաբևեռ, բնութագրիչ դիմադրություն:

G.D. HAKOPJANYAN, V.S. SAFARYAN SOME FEATURES OF CHAIN CIRCUIT INPUT PARAMETERS

Dependences of transfer functions and generalized parameters characterizing the chain circuit on a number of chain four-terminal network included into the circuit are studied. Some new properties of indicated and characteristic impedance of the chain circuit are revealed.

Keywords: chain circuit, transfer function, quadropole, characteristic resistance.