

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՄԵԴԵՎՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂԵՎՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՂԵԿՏՈՒԱԿԱՆ ԳՐԱԿԱՆԱԿԱՆ ԻՋԱՏԱԿ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2005

УДК 539.3

MATHEMATICAL SIMULATION OF COLLISION OF ARABIAN AND EUROASIAN PLATES ON THE BASE OF GPS DATA

Lenser A. Aghalovyan, Ruben S. Gevorgyan and Avetik V. Sahakyan*

Լ. Ա Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Ա. Վ. Սահակյան

Արաբական և Եվրասիական սալերի բախման գոտու մաթեմատիկական մոդելավորումը GPS տվյալների հիման վրա

Չգտագործելով առանգականության տեսության կարսոյի խնդրի մաթեմատիկական ճշգրիտ լուծումը չերոի համար, ստրամված են բանաձևեր՝ GPS ափսոձների տվյալների հիման վրա Արաբական և Եվրասիական սալերի բախման գոտուում լարումները և տեղափոխումները որոշելու համար, ընդունելով այդ տարածաչրքանի համար առանգականության տեսության յրբանակներում սիջինալվամ մոդելի կիրառելիությունը Կառուլվամ են լարումների ընձգորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների հասար համալստասիան գրաֆիկները: Կատարվամ է յարվամա-ընթորմալին վիճակի վերլուծությունը:

Агаловян А.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В.

Математическое моделирование зоны коллизии Аравийской и Евразийской плит на основе данных GPS

Прижения математически точное решение краевой задачи теории упругости для слоя выведены формулы для определения напряжений и перемещении зоны коллизии Аравийской и Евразийской плит, используя данные GPS и считая возможным применение усредненной модели региона по теории упругости Построены графики для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния.

Abstract

Applying the mathematically precise solution of the boundary value problem of elasticity theory for a layer [1,2], formulae for determining stresses and displacements of collision zone of Arabian and Euroasian plates applying GPS data and considering possible the application of the average model of region in the frame of elasticity theory are derived. Graphics for displacement vector are built. The analysis of stress-strain state is developed.

Key words: Arabian plate, Seismotectonics, GPS Observation

Introduction

It is known that the armenian mountainous area and the Caucasian region are situated between considered immovable Euroasian and slowly moving to the north (north-west) Arabian plates. In the collision zone during the time big stresses which bring to earthquakes, are accumulated. These phenomena attract the attention of the scientists-seismologists, geophysicists and mechanics. In paper [3] review of modern approaches, qualitative and quantitative analyses of collision zone state is brought. At the same time, using GPS (the Global Positioning System) data by the method of finite element a plane problem of elasticity theory for mathematical simulation of stress-strain state of collision zone taking it for an isotropic plate, is numerically solved.

In the present paper, applying mathematically precise boundary value problems of elasticity theory for a layer [1,2], stress-strain state of the collision zone is determined, taking into account that its facial surface is free from loads and in GPS bench-mark points displacements vector components are given.

The authors report in Asian Seismological Commission V General Assembly, October 18-21, Yerevan, Armenia.

The statement of the problem of elasticity theory and its precise mathematical solution.

Let us have a homogeneous isotropic plate with the width h occupying an area $\Omega = \{x, y, z : 0 \leq x, y \leq \ell, 0 \leq z \leq h; h \ll \ell\}$ (fig. 1).

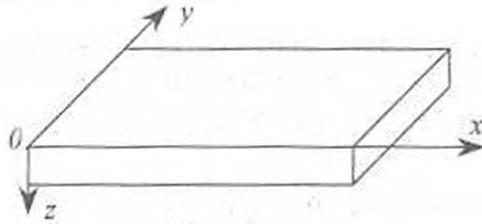


Fig. 1

(axis x is directed along the earth parallel, axis y is in the direction of north and axis z is directed along the radius into the depth of the earth).

On the earth surface $z = 0$ stresses are absent

$$\sigma_{jj}(x, y, 0) = 0 \quad j = x, y, z \quad (1)$$

and in the depth h (the opposite surface of the plate-layer) the displacements which are represented by the polynomials with yet unknown coefficients are given

$$U = U_x(x, y, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k a_{kr} x^k y^{k-r}$$

$$V(x, y) = U_y(x, y, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k b_{kr} x^k y^{k-r} \quad (2)$$

$$W(x, y) = U_z(x, y, h) = 0$$

It is required to determine the stresses tensor and displacements vector components inside the plate-layer, which would satisfy the equations of the three-dimensional problem of elasticity theory [4,5] (these equations are not shown) and on the surfaces $z = 0$ and $z = h$ would satisfy the boundary conditions (1) and (2).

The precise mathematical solution of the stated problem under any numerical values a_{kr}, b_{kr} are expressed by recurrent formulae [1,2], which have the following form for an isotropic plate-layer

$$\xi = x/\ell, \quad \eta = y/\ell, \quad \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/\ell$$

$$U = U_x/\ell, \quad V = U_y/\ell, \quad W = U_z/\ell \quad (3)$$

$$Q(x, y, z) = \varepsilon^r \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (4)$$

$$\chi_\sigma = -1, \quad \chi_\nu = 0$$

$$\sigma_{xx}^{(n)}(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_{xx}^{(n)}(\xi, \eta) + \sigma_{xx}^{(n)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{xx}^{(n)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^{(n-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(n-1)}}{\partial \eta} \right) d\zeta \quad (5)$$

$$\sigma_{yy}^{(n)}(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_{yy}^{(n)}(\xi, \eta) + \sigma_{yy}^{(n)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{yy}^{(n)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}^{(n-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(n-1)}}{\partial \eta} \right) d\zeta \quad (6)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)}(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_{zz}^{(n)}(\xi, \eta) + \sigma_{zz}^{(n)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{zz}^{(n-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_{xz}^{(n-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (7)$$

$$\sigma_{xx}^{(n)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{xx}^{(n)} + \frac{2G}{1-\nu} \left(\frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

$$\sigma_{yy}^{(n)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy}^{(n)} + \frac{2G}{1-\nu} \left(\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \xi} \right) \quad (9)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = G \left(\frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \xi} \right) \quad (10)$$

$$U^{(n)}(\xi, \eta, \zeta) = U_0^{(n)}(\xi, \eta) + \frac{\zeta}{G} \sigma_{xx}^{(n)} + U^{(n)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$U_0^{(n)} = \int_0^{\zeta} \left(\frac{1}{G} \sigma_{xx}^{(n)} - \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (11)$$

$$V^{(n)}(\xi, \eta, \zeta) = V_0^{(n)}(\xi, \eta) + \frac{\zeta}{G} \sigma_{yy}^{(n)} + V^{(n)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$V_0^{(n)} = \int_0^{\zeta} \left(\frac{1}{G} \sigma_{yy}^{(n)} - \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \eta} \right) d\zeta \quad (12)$$

$$W^{(n)}(\xi, \eta, \zeta) = W_0^{(n)}(\xi, \eta) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \sigma_{zz}^{(n)} + W^{(n)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$W_0^{(n)} = \int_0^{\zeta} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \sigma_{zz}^{(n)} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \eta} \right) \right) d\zeta \quad (13)$$

$$\sigma_{ij}^{(n)} = 0, \quad j = x, y, z; \quad U_0^{(n)} = U(\xi, \eta), \quad V^{(n)} = V(\xi, \eta), \quad W^{(n)} = 0 \quad (14)$$

Iteration process (4)-(14) in case of polynomial loading (2) after $n+1$ step terminates and reduces to a closed (precise) mathematical solution of the stated boundary value problem for a layer under any numerical values a_{ik}, b_{ik} .

Determination of stress-strain state of collision zone by GPS data

Taking into account that we have GPS data in 37 bench mark points in geographical coordinates [3], we pass to Cartesian coordinates presuming point #10 as the origin of the system (Table 1).

Table 1

N	GPS bench-mark point	longitude	latitude	GPS Data		Cartesian coordinates	
				U _x mm/year	U _y mm/year	x km	y km
1	KALZ	43.34	38.55	-5.3	12	535.4	183.3
2	GORI	46.37	39.51	3.3	9.6	808.9	290.0
3	IJEV	45.14	40.91	4	7.4	693.7	445.6
4	KRES	44.49	42.45	1.3	2.8	632.9	616.7
5	MATS	43.75	42.98	1.5	0.3	567.4	675.6
6	BEUG	42.79	44.01	-0.6	1	483.9	790.1
7	ZELB	41.56	43.79	0.5	0.8	378.3	765.6
8	AKTO	39.7	40.97	0.5	1.7	209.8	452.3
9	SINC	37.96	39.45	-18.3	9.9	47.9	283.4
10	GAZI	37.57	36.9	-8.5	12.3	0	0
11	KIZI	40.65	37.25	-6.9	16.1	287.2	38.9
12	NICII	44.53	41.83	1.1	5.8	637.7	547.8
13	ADYI	38.23	37.75	-7.6	13.4	64.9	94.4
14	KRCD	39.81	37.85	-7.6	13.9	210.9	105.6
15	MLTY	38.22	38.46	-12	10.9	67.1	173.3
16	KMAN	39.16	39.61	-19.6	9.1	157.0	301.1
17	MERC	40.25	39.73	-2.7	4.9	255.8	314.5
18	KRKI	41.79	38.75	-5.1	14.4	393.9	205.6
19	PATN	42.91	39.24	-2.5	8.7	495.9	260.0
20	ARGI	43.03	39.72	1.2	6.7	506.7	313.4
21	ERZU	41.3	39.97	-0.9	5	350.8	341.1
22	ISPI	40.81	40.44	0.2	2.5	307.5	393.4
23	OLTU	41.99	40.55	2.3	4.3	413.2	405.6
24	HOPA	41.34	41.37	-0.1	2.6	356.2	496.7
25	KARS	43.17	40.69	0.7	5.2	518.6	421.1
26	ARTI	43.95	40.61	2.2	7.2	588.3	412.2
27	MMOR	44.11	40.18	2.5	7	603.3	364.5
28	NSSP	44.5	40.23	3.6	8.1	638.2	370.0
29	GARN	44.74	40.15	2.5	9.1	659.9	361.1
30	JERM	45.66	39.84	4.6	10.1	743.6	326.7
31	NINO	43.89	41.54	0.9	4.2	581.7	515.6
32	VANI	42.47	42.02	1.6	4.1	456.3	568.9
33	SACH	43.4	42.35	2.6	4.8	537.7	605.6
34	INGU	42.06	42.72	0.9	2.7	420.6	646.7
35	BALK	43.35	43.06	-2	-0.4	532.7	684.5
36	ULKA	42.19	43.35	-0.9	-1.2	432.3	716.7
37	SIAT	42.67	43.74	0.3	1.7	473.7	760.1

The bench mark points and their displacements (multiplied by 10^3) in dimensionless coordinate system are shown (Fig. 2).

Calculating the stresses tensor components and displacements vector components by formulae (4)-(14) under $n = 7$, as the number of the unknown coefficients a_{ik}, b_{ik} coincide with the number of GPS data, we require that on daily surface of the collision zone (i.e. under $z = 0$) the displacements vector components U_x and U_y in the bench-mark points were equal to the corresponding values of GPS data.

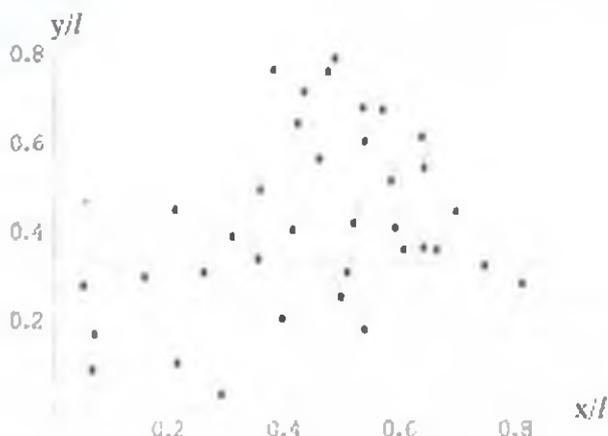


Fig. 2

We obtain a system from 36 linear algebraic equations relative to unknown coefficients a_{ik}, b_{ik} by the solution of which, functions (2) are uniquely determined.

$$U(\xi, \eta) =$$

$$\begin{aligned}
 & 3.51876 \times 10^{-5} - 0.000213862 \xi - 0.000244778 \eta + 0.000267046 \xi^2 - 0.000370990 \eta^2 - \\
 & 0.00114821 \xi \eta + 0.00129734 \xi^3 - 0.006194793 \xi^2 \eta + 0.0090719652 \xi \eta^2 - 0.000254709 \eta^3 - \\
 & 0.000787758 \xi^4 - 0.00449394 \xi^3 \eta + 0.00741794 \xi^2 \eta^2 + 0.00300291 \xi \eta^3 - 0.000732831 \eta^4 + \\
 & 0.000620365 \xi^5 - 0.0017512 \xi^4 \eta + 0.00211075 \xi^3 \eta^2 + 0.00202097 \xi^2 \eta^3 + 0.00070518 \xi \eta^4 - \\
 & 0.00148044 \eta^5 + 0.00243986 \xi^6 - 0.00941016 \xi^5 \eta + 0.00524678 \xi^4 \eta^2 + 0.00942423 \xi^3 \eta^3 - \\
 & 0.0087449 \xi^2 \eta^4 + 0.00440444 \xi \eta^5 + 0.0011717 \eta^6 + 0.00313988 \xi^7 - 0.0096448 \xi^6 \eta + \\
 & 0.00220122 \xi^5 \eta^2 + 0.009655 \xi^4 \eta^3 + 0.00765818 \xi^3 \eta^4 + 0.00115492 \xi^2 \eta^5 + 0.00510156 \xi \eta^6 + 0.00198784 \eta^7
 \end{aligned}$$

$$V(\xi, \eta) =$$

(15)

$$\begin{aligned}
 & 3.85638 \times 10^{-4} + 0.000053583 \xi - 0.000418385 \eta^2 - 0.00149779 \eta^3 - 0.0017153 \eta^4 + 0.000726678 \eta^5 - \\
 & 0.00239369 \eta^6 + 0.00106913 \eta^7 + 0.0000522178 \xi^2 + 0.000190163 \xi^3 + 0.000966174 \xi^4 - \\
 & 0.00731688 \xi^5 + 0.0165612 \xi^6 + 0.0122219 \xi^7 + 0.00266615 \eta^6 \xi + 0.000435682 \eta^7 \xi - \\
 & 0.00109834 \eta^8 \xi + 0.00460398 \eta^9 \xi^2 + 0.00449864 \eta^{10} \xi^3 + 0.00657357 \eta^{11} \xi^4 + 0.00570417 \eta^{12} \xi^5 - \\
 & 0.00164573 \eta^{13} \xi^6 + 0.00756846 \eta^{14} \xi^7 + 0.000986512 \eta^{15} \xi^8 + 0.0172764 \eta^{16} \xi^9 + 0.0049901 \eta^{17} \xi^{10} - \\
 & 0.00226691 \eta^{18} \xi^{11} + 0.0149408 \eta^{19} \xi^{12} + 0.0130193 \eta^{20} \xi^{13} + 0.00336324 \eta^{21} \xi^{14} + 0.0006254 \eta^{22} \xi^{15} - \\
 & 0.00873813 \eta^{23} \xi^{16} + 0.0075214 \eta^{24} \xi^{17} + 0.000624649 \eta^{25} \xi^{18} + 0.00103845 \eta^{26} \xi^{19} + 0.000263062 \eta^{27} \xi^{20}
 \end{aligned}$$

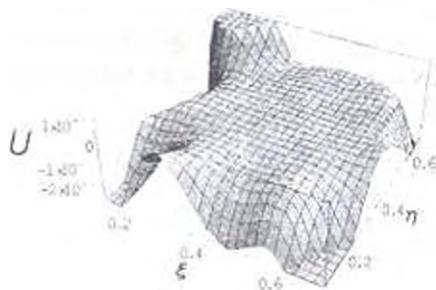


Fig. 3

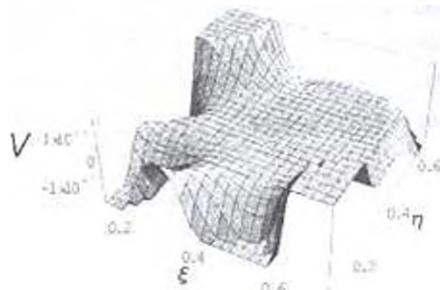


Fig. 4

Thus, the obtained solution (1)-(15) mathematically precisely satisfies the equations of elasticity theory and boundary conditions (1), (2), and in the bench-mark points the displacements values U_i, U_j coincide with the values of GPS data (Table 1).

The more the density of the bench-mark points will be the more precisely the obtained solution will express the true picture of the stress-strain state of the collision zone.

As we are not aware of the conditions on the border of the considered zone, for great exactness it is necessary to be restricted by the area inside this zone. It is proved by the authors [4,6], that in this case the effect influence of the denoted zone (boundary layer) on the stress-strain state inside plate-layer is negligibly small.

In fig. 3, fig. 4 the 3D plots of the tangential displacements U and V in the depth $z = \bar{h} = 10$ km are brought.

The full energy of the deformation chosen in the collision zone of the plate with the size of $700 \times 700 \times 10$ km determined by the formula

$$E_{det} = \frac{1}{4(1+\nu)G} \iiint_V [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(1-\nu)(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] dx dy dz \quad (16)$$

$0 \leq z \leq 10^4$ m, $0 \leq x, y \leq 7 \cdot 10^5$ m, $\nu = 0.2$, $G = 2.5 \cdot 10^{10}$ Pa
equal to

$$E_{det} = 3.7 \cdot 10^{22} \text{ erg} = 3.7 \cdot 10^{15} \text{ J}$$

Analytical solution (1)-(15) of the stated problem permits us to conduct other investigations as well when collaborating with geophysicists and seismologists.

The algorithm of the problem solution developed by the authors permits in the future to take into account in homogeneity and anisotropy of the collision zone, layered, the existence of reonomic layers, relief change of the area (variability \bar{h}), and also dependence of physical-mechanical constants from the depth of the layer [4,7,8]. We have opportunity to take into account the curvature of the region surface, i.e. to admit the region layer as part of the spherical surface [9]. Other the earthquake-hazard regions may be considered too.

In conclusion the authors kindly express their gratitude to prof. S. Balassanian who showed the importance of solution of such problem.

Acknowledgments

The authors express their gratitude to ISTC grant A-651 which made this investigation possible.

References

1. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of plates with general anisotropy// In Proceedings of the 4th Symposium on the Mechanics of Structures of Composite Materials// Novosibirsk. Nauka. 1984. p.105-110.
2. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S. On asymptotic solution for two-layered anisotropic plates. Applied Mathematics and Mechanics, 1986. v.50. issue 2. pp.271-278.
3. Haroutunyan A.G., Tonoyan V.S., Khachikyan A.S. Deformations distribution in the interaction zone of Arabian and Euroasian plates on the base of GPS data.// Proceeding of NAS of RA. Mechanics. 2003. N 3. p. 3-13.
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Moscow. Nauka. Physmathlit. 1997. 414p.
5. Leibenzon L.S. A course of elasticity theory. Moscow: OTZ, 1947. 464p.
6. Gevorgyan R.S. Asymptotics of boundary layer for a class of boundary value problems of anisotropic plates// Proceeding of AN Arm SSR. Mechanics. 1984. N 6. p. 3-15.
7. Gevorgyan R.S. "On Asymptotic Solution of Mixed Boundary Problems of Layered Plates, Consisting of Alternate Elastic and Rheological Layers" Journal "Izvestia NAN Armenii, Mekhanika", 1996. Vol.49, No 2, pp.67-78.
8. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S. and Khachatryan G.G. Mixed boundary-value problems for anisotropic plates of variable thickness. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. vol.60, No. 2, pp. 290-298.
9. Aghalovyan L.A. and Gevorgyan R.S., The asymptotic solution of nonclassical boundary-value problems for two-layer anisotropic thermoelastic shells// Izv.Akad. Nauk ArmSSR. Mekhanika. 1989. Vol. 42. N 3, pp. 28-36.

Institute of Mechanics
NAS Armenia

Received
7.06.2005

УДК. 539.9

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПЛАНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ
 ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

Ананян А.Ж.

Ա.Ժ.Անանյան

Թարակ կիսանվերայ սաղ-շերտի տեղայնագրված պլանար տատանումները

Դիտարկվում է կիսանվերայ սաղ-շերտ, որի եզրերը եռոյակապորեն անրակգված են Այն դեպքում, երբ վերջավոր եզրը ազատ է, տեղայնագրված տատանումների համախորտունը որոշող հավասարումը հանդիսանում է կիսասահարածությունում միջևի մակերևույթային ալիքների հախտասրան անուղղորդ եռույթը ուսումնասիրվում է այն դեպքի համար, երբ վերջավոր եզրում սգրված են ստոծգրվան սծրակգրան եզրային պայմանները որոշվում են տատանումների համախորտունները կոստգրված տոտնգրվան սծրակգրան բնորակըրը գրծակգրը: Ստաղգրված են տեղայնագրված ալիքների գոյության պայմաններ

A. J. Ananyan

Localized planar vibrations of thin semi-infinite plate-strip

The problem of semi-infinite plate-strip, two edges of which are jointly fixed is considered. In the case, when plate finite edge is free the equation determining the frequencies of localized vibrations becomes analogy of Rayleigh equation for the surface waves in half-space. The problem is investigated for the case, when on the finite edge the boundary condition of elastic fixing is given. Vibrations frequencies are determined in depend on rather characterizing an elastic fixing. The conditions of localized vibrations existence are received.

Рассматривается полубесконечная пластинка-полоса, две ее противоположные края которой шарнирно закреплены. В случае, когда конечный край пластинки свободен, уравнение, определяющее частоты локализованных колебаний является аналогом уравнения Рэлея для поверхностных волн в полупространстве. Задача исследуется для случая, когда на конечном краю заданы граничные условия упругого закрепления. Определяются частоты колебаний в зависимости от коэффициента, характеризующего упругое закрепление. Получены условия существования локализованных колебаний.

1. Пластинка из упругого анизотропного материала постоянной толщины в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$.

Уравнения планарных колебаний пластинки – уравнения обобщенного плоского напряженного состояния – имеют вид:

$$\begin{aligned} C_t^2 \Delta u + (C_t^2 - C_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_t^2 \Delta v + (C_t^2 - C_t^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u, v – перемещение по направлениям x, y , соответственно; Δ – двумерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad C_t^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \quad (1.2)$$

C_1 , C_2 — скорости продольных и поперечных волн, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки. Следует отметить, что уравнения распространения волн в задаче плоской деформации совпадают с уравнениями (1.1), но отличаются выражением для продольной скорости C_1 . Для задач плоской деформации

$$C_1^2 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}$$

Преобразование [1]

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

приводит систему (1.1) к автономным уравнениям

$$C_2^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad C_1^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Для задачи локализованных колебаний пластинки, по аналогии с поверхностными волнами Рэлея, требуется найти такие решения системы уравнений (1.1) или уравнений (1.4), которые удовлетворяли бы условиям затухания на бесконечности

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} u = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \pm \infty} v = 0 \quad (1.5)$$

или

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \varphi = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \psi = 0 \quad (1.6)$$

Рассматривается наиболее простой вариант задачи локализованных колебаний пластинки, когда на краях $y = 0, b$ заданы граничные условия Навье [2]

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

Согласно преобразованию (1.3), условия (1.7) записываются в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Обзор работ, где рассматриваются другие варианты граничных условий при $y = 0, b$, приводится в [3].

Решения уравнений (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.8) и условиям затухания (1.6), имеют вид

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t - \lambda_n \nu_1 x) \sin \lambda_n y \quad (1.9)$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t - \lambda_n \nu_2 x) \cos \lambda_n y$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \nu_1 = \sqrt{1 - \theta \eta_n}, \quad \nu_2 = \sqrt{1 - \eta_n} \quad (1.10)$$

$$\eta_n = \frac{\omega_n^2}{\lambda_n^2 C_1^2}, \quad \theta = \frac{C_1^2}{C_2^2} = \frac{1-\nu}{2}$$

Произвольные постоянные A_n и B_n должны определяться из граничных условий на кромке пластинки $x = 0$. Согласно условиям затухания (1.6) искомые параметры η_n , характеризующие частоты локализованных колебаний пластинки, должны удовлетворять условиям

$$0 \leq \eta_n \leq 1 \quad (1.11)$$

2. Пусть на кромке пластинки $x = 0$ заданы условия свободной границы

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

1. с. отсутствие нормальной и касательной нагрузок.

Согласно (1.3) условия (2.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка решений (1.9) в граничные условия (2.2) при $x = 0$ дает для определения произвольных постоянных A_n , B_n следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\nu_1^2 - \nu) A_n + (1 - \nu) \nu_2 B_n &= 0 \\ 2\nu_1 A_n + (\nu_2^2 + 1) B_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.3) с учетом обозначений (1.10) приводит к известному уравнению Рэлея

$$R(\eta_n) \equiv (2 - \eta_n)^2 - 4\nu_1 \nu_2 = 0 \quad (2.4)$$

Так как известно, что уравнение (2.4) всегда имеет действительный корень, удовлетворяющий условиям (1.11), то локализованные колебания у свободного края пластинки существуют. Обобщения уравнения (2.4) для анизотропной пластинки из материала с кубической симметрией приводятся в [4]. Планирные локализованные колебания ортотропной пластинки рассмотрены в [5].

Можно показать, что если на кромке $x = 0$ пластинки заданы условия либо закрепления, либо Папье, либо скользящего контакта, то локализованные колебания не существуют. Более сложные вопросы возникают при решении задач с условиями упругого закрепления кромки $x = 0$ [5]. Граничные условия для частного случая упругого закрепления кромки $x = 0$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.5)$$

что является обобщением условий свободного края (2.1). Здесь коэффициент α характеризует упругие свойства закрепления (стесненного перемещения по направлению оси Ox) [6].

Подстановка решений (1.9), с учетом преобразования (1.3) в граничные условия (2.5) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n , B_n .

$$\begin{aligned} (v_1^2 - v - \alpha \lambda_n^{-1} v_1) A_n + [(1 - v) v_2 - \alpha \lambda_n^{-1}] B_n &= 0 \\ 2v_1 A_n + (v_2^2 + 1) B_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Дисперсионное уравнение задачи получается из равенства нулю детерминанта системы (2.6)

$$R(\eta_n, \alpha) = (2 - \eta_n)^2 - 4v_1 v_2 + \lambda_n^{-1} \alpha v_1 \theta^{-1} \eta_n = 0 \quad (2.7)$$

В отличие от классического уравнения Рэлея, уравнение (2.7) определяет безразмерную фазовую скорость η_n в зависимости от λ_n , т. е. локализованные волны обладают дисперсионным свойством. Значение $\eta_n = 0$, как и для уравнения Рэлея, является корнем уравнения (2.7). Исключением корня $\eta_n = 0$ [7], уравнение (2.7) приводится к виду

$$R_1(\eta_n, \alpha) \equiv \eta_n - \frac{4(1 - \theta)v_2}{v_1 - v_2} + \lambda_n^{-1} \alpha v_1 \theta^{-1} = 0 \quad (2.8)$$

Функция R_1 на концах промежутка $0 < \eta_n < 1$ принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} R_1(0, \alpha) &\equiv -2(1 - \theta) - \lambda_n^{-1} \alpha \theta^{-1} \\ R_1(1, \alpha) &\equiv 1 + \lambda_n^{-1} \alpha \theta^{-1} \sqrt{1 - \theta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если функция R_1 на концах промежутка принимает значения разных знаков, то это достаточно, чтобы существовал действительный корень, удовлетворяющий условиям затухания (1.11). Из (2.9) следует что указанный корень существует, т. е. локализованные колебания имеют место, если

$$-\frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta}} < \frac{\alpha}{\lambda_n} < 2(1 - \theta)\nu \quad (2.10)$$

В табл. 1 приводятся значения безразмерной фазовой скорости η_n в зависимости от квадрата безразмерного коэффициента стеснения (пружины) $\frac{\alpha}{\lambda_n}$ при

$$\theta = \frac{1}{3}, \quad \nu = \frac{1}{3}$$

Таблица 1

α / λ_n	$(6,0)^{-1/2}$	0.3	0.1	0	0.1	0.3	0.4	0.43	4,0
η_n	1	0.9924	0.9214	0.8453	0.7332	0.3787	0.1280	0.0428	0

3. Другой вариант обобщения условий свободного края $x = 0$ (2.1) является введение стеснения перемещения по направлению оси oy

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v = 0 \quad (3.1)$$

Подставляя решение (1.9), с учетом преобразования (1.3) в граничные условия, (3.1) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n

$$\begin{aligned} (v_1^2 - \nu)A_n + (1 - \nu)v_2B_n &= 0 \\ (2v_1 - \beta\lambda_n^{-1})A_n + (v_2^2 + 1 - \beta\lambda_n^{-1}v_2)B_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из равенства нулю детерминанта системы (3.2) получается дисперсионное уравнение

$$R(\eta_n, \beta) \equiv (2 - \eta_n)^2 - 4v_1v_2 + \lambda_n^{-1}\beta v_2\eta_n = 0 \quad (3.3)$$

Здесь при $\beta = 0$ также получается известное уравнение Рэлея. Уравнение (3.3), аналогично предыдущему случаю, имеет корни $\eta_n = 0$.

Исключение корня $\eta_n = 0$ преобразует дисперсионное уравнение к виду

$$R_2(\eta_n, \beta) = \eta_n - \frac{4(1 - \theta)v_2}{v_1 + v_2} + \frac{\beta}{\lambda_n}v_2 = 0 \quad (3.4)$$

Из свойств функции $R_2(\eta_n, \beta)$

$$\begin{aligned} R_2(0, \beta) &\equiv -2(1 - \theta) + \beta\lambda_n^{-1} \\ R_2(1, \beta) &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

следует, что уравнение (3.4) имеет корень, удовлетворяющий условию затухания (1.11), если

$$\beta\lambda_n^{-1} < 2(1 - \theta) \quad (3.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новачкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Белубекян М. В. Об уравнениях теории пластины, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел». Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С. 67-88.
3. Городенкая Н. С., Грищенко В. Г. Анализ физических особенностей явления краевой резонанса в упругих телах. //Акустический вестник. 2004. № 1. С. 30-43.
4. Белубекян М. В., Енгибарян Н. А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластины с кубической симметрией. //Изв. РАН, МТИ. 1996. № 6. С.139-143.
5. Гулазарян Г. Р., Гулазарян Л. Г. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочке // В.сб.: Математический анализ и его приложения. Ереван: Изд-во «Мангаварж», 2002 Вып. 1, С. 50-67.
6. Вибрации в технике.(Справочник в 6 томах). Т. 1. Колебания линейных систем. (ред. В. В. Болотин). М.: Машиностроение, 1978. 352с.
7. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах.//В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван: Изд. НАН Армении. 1997. С.79-96.

Институт Механики
НАН РА

Поступила в редакцию
6.05.2005

УДК539.3

**ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ
ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ БЕСКОНЕЧНЫМ КУСОЧНО-
ОДНОРОДНЫМ СТРИНГЕРОМ**
Багдасарян Р.А.

Ռ.Ա. Բագդասարյան

Կտր առ կտր համասե վերադիրով ունեցազված կտր առ կտր համասե անվերջ սալի խնդիր

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու կիսասանվերջ սալերից կազմված կտր առ կտր համասե անվերջ սալի խնդիր, որը ունեցազված է սալի ելուրների բաժանման գծին փոփոխվող կտր առ կտր համասե անվերջ վերադիրով:

Վերադիրը կազմված է երկու միասեռակ կիսասանվերջ մասերից և ուսումնականության ուրիշ հաստատուն ունեցող սեկ վերջավոր մասից:

Սալը դեֆորմացվում է անվերջում կիրառված հորիզոնական ծգող լարմաների ազդեցության տակ: Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեպի լինակցալ խափասարման բովանակում և գոյա է տրվում, որ սալը կազմասարման բոլոր է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորությունների սերույթով:

Իտաազված է նաև ափսոսալուողի բանասև անվերջ հեռու կետերի կոնտակտային լարմանների համար:

R.A. Bagdasaryan

**Problem for Piece-homogeneous Infinite Plate, Reinforced by
Infinite Piece-homogeneous Stringer**

In the paper a problem of piece-homogeneous plate is considered, when the plate consists from two infinite plates, reinforced by infinite piece-homogeneous stringer, which is parallel to separation line of plate's material. Stringer consists from two same half infinite parts and one finite part with other elasticity modulus.

The plate is deformed under action of horizontal stretched stresses applied at infinity.

The problem is reduced to Fredholm's singular integral equation of second kind, which permit the solution by means of step-by-step approximation method.

The asymptotic formula is also obtained for contact stresses in infinite points.

В работе рассматривается задача для кусочно-однородной пластины, состоящая из двух полубесконечных пластин, усиленной бесконечным, кусочно-однородным стрингером, расположенным параллельно линии раздела материалов пластины.

Стрингер состоит из двух одинаковых полубесконечных частей и одной конечной части с другим модулем упругости.

Пластина деформируется под действием горизонтальных растягивающих напряжений приложенных на бесконечности.

Задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, допускающее решение методом итерационных приближений.

Получена также асимптотическая формула для контактных напряжений бесконечно удаленных точек.

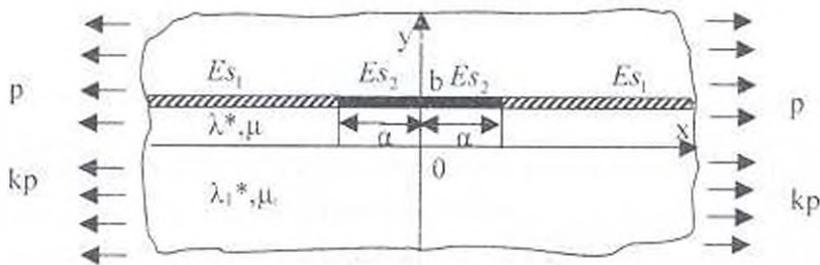
Пусть бесконечная кусочно-однородная пластина, состоящая из двух полубесконечных пластин с различными упругими постоянными, усилена бесконечным, кусочно-однородным стрингером, параллельным линии разнородности материалов пластины (фиг. 1).

Ось абсцисс совпадает с линией разнородности материалов. Стрингер, который состоит из двух одинаковых полубесконечных частей и одной конечной части с другим модулем упругости, находится на расстоянии b от оси абсцисс. Концы конечной части стрингера находятся на расстоянии a от оси ординат.

Пластина деформируется под действием растягивающих напряжений $\sigma_x = p$, приложенных на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$ при $y > 0$, а при $y < 0$ — под действием напряжений $k\rho$, где

$$k = \frac{\mu_1 \lambda^* + 2\mu \lambda_1^* + \mu_1}{\mu \lambda_1^* + 2\mu_1 \lambda^* + \mu}$$

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \lambda_1^* = \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$



Фиг.1

E, ν и E_1, ν_1 — модули упругости и коэффициенты Пуассона пластины соответственно при $\nu > 0$ и при $\nu < 0$.

Здесь, как и в [1], относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактных участков, а для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Задача заключается в определении контактных напряжений, действующих на контактных участках между стрингером и пластиной.

Поставленная задача решается методом, изложенным в [2], где рассматривается задача для упругой однородной плоскости с бесконечным включением, состоящим из трех различных кусков.

В силу вышесказанного, дифференциальные уравнения равновесия стрингера запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dx^2} &= \frac{\tau(x)}{E_s F_s} \quad \text{при } |x| > a \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} &= \frac{\tau(x)}{E_s F_s} \quad \text{при } |x| < a \end{aligned} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=a+0} &= \frac{X}{E_s F_s}, & \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=a+0} &= \frac{X}{E_s F_s} \\ \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=-a-0} &= \frac{X}{E_s F_s}, & \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=-a-0} &= \frac{X}{E_s F_s} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{du_x}{dx} \rightarrow \frac{p}{E_x} \text{ при } |x| \rightarrow \infty \quad (2')$$

где E_x и E_y — модули упругости стрингера соответственно при $|x| > a$ и при $|x| < a$, F_x — площадь поперечного сечения стрингера, $\tau(x) = d \cdot q(x)$, d — ширина стрингера, $q(x)$ — контактные касательные напряжения под стрингером, $u_x(x)$ — горизонтальные перемещения точек стрингера, X — нормальная сила поперечного сечения стрингера при $x = \pm a$.

Отметим, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию

$$X = - \int_{-a}^a \tau(s) ds = \frac{E_y F_y}{E_x} P \quad (3)$$

Чтобы уравнения (1) и граничные условия (2) записать одним уравнением на всей оси Ox ($-\infty < x < \infty$), введем функцию

$$U_x(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \frac{du_x}{dx} + [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \frac{du_x}{dx}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Из (1) и (2) для $U_x(x)$ получим

$$\frac{dU_x(x)}{dx} = \frac{X}{F_x} \frac{E_y - E_x}{E_x E_y} [\delta(x-a) - \delta(x+a)] + \frac{\tau_1(x)}{E_x F_x} + \frac{\tau_2(x)}{E_y F_y}, \quad (-\infty < x < \infty),$$

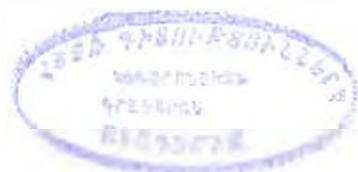
где $\delta(x)$ — функция Дирака.

$$\tau_1(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \tau(x), \quad \tau_2(x) = [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \tau(x)$$

С другой стороны, для перемещения точек пластины имеем [3]

$$u^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^{1/2}} + A_2 \frac{(y+b)^2}{(x-s)^2 + (y+b)^2} + \right. \\ \left. + A_3 \frac{yb[(y+b)^2 - (x-s)^2]}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^2} + A_4 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - A_5 \frac{(y-b)^2}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds + \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)} p x \quad (5)$$

$$v^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_1 \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y+b} + B_2 \frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2 + (y+b)^2} + \right. \\ \left. + B_3 \frac{yb(x-s)(y+b)}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^2} + B_4 \frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds - \frac{\lambda^*}{4\mu(\lambda^* + \mu)} p y \\ (-\infty < x < \infty; 0 \leq y < \infty; b > 0) \quad (6)$$



$$u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_0^y \left[C_1 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y-b)^2]^2} + C_2 \frac{b(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} - C_3 \frac{y(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right] \tau(s) ds + \frac{\lambda_1^2 + 2\mu_1}{4\mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)} \lambda_1 \rho x \quad (7)$$

$$v^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_0^y \left[D_1 \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y-b} + D_2 \frac{b(x-s)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} + D_3 \frac{y(x-s)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right] \tau(s) ds - \frac{\lambda_1^2}{4\mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)} k \rho y \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty; -\infty < y \leq 0; h > 0)$$

где h — толщина пластины, $u^{(1)}(x, y)$, $v^{(1)}(x, y)$ и $u^{(2)}(x, y)$, $v^{(2)}(x, y)$ — перемещения точек пластины при $y \geq 0$ и при $y \leq 0$ соответственно.

Для коэффициентов из (5) — (8) имеем

$$A_1 = \frac{\mu^2(\lambda_1^2 + 3\mu_1)(\lambda^2 + 2\mu)^2 + \mu^2 - \mu^2(\lambda^2 + 3\mu)[2\mu^2 + (\lambda_1^2 + \mu_1)(\lambda^2 + 3\mu)]}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)] [\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$A_2 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\lambda^2 + \mu)(\lambda^2 + 3\mu)}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad A_3 = \frac{\lambda^2 + 3\mu}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)}$$

$$A_4 = \frac{(\mu - \mu_1)(\lambda^2 + \mu)^2}{2\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad A_5 = \frac{\lambda^2 + \mu}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)}$$

$$B_1 = \frac{\mu^2(\lambda_1^2 + 3\mu_1) - \mu^2(\lambda^2 + 3\mu)}{2[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)] [\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$B_2 = \frac{(\mu - \mu_1)(\lambda^2 + \mu)(\lambda^2 + 3\mu)}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}$$

$$B_3 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\lambda^2 + \mu)^2}{\mu(\lambda^2 + 2\mu)[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad B_4 = \frac{\lambda^2 + \mu}{4\mu(\lambda^2 + 2\mu)}$$

$$C_1 = \frac{\mu(\lambda^2 + 2\mu)(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + 2\mu_1)(\lambda^2 + 3\mu)}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)] [\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$C_2 = \frac{\lambda^2 + \mu}{2[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad C_3 = \frac{\lambda_1^2 + \mu_1}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

$$D_1 = \frac{\mu^2(\lambda^2 + 3\mu) - \mu^2(\lambda_1^2 + 3\mu_1)}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda^2 + \mu)] [\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}$$

$$D_2 = \frac{\lambda^2 + \mu}{2[\mu_1(\lambda^2 + 3\mu) + \mu(\lambda^2 + \mu)]}, \quad D_3 = \frac{\lambda_1^2 + \mu_1}{2[\mu(\lambda_1^2 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^2 + \mu_1)]}$$

Из (5) определим $\frac{\partial u^{(1)}(x, b)}{\partial x}$

$$\frac{\partial u^{(1)}(x, b)}{\partial x} = U^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x-s)\tau(s)ds + \frac{\lambda^2 + 2\mu}{4\mu(\lambda^2 + \mu)} p. \quad (-\infty < x < \infty) \quad (9)$$

где

$$r(x) = -\frac{1}{\pi h} \left[A_1 \frac{x}{x^2 + 4b^2} + 8b^2 A_2 \frac{x}{(x^2 + 4b^2)^2} + 2b^2 A_3 \frac{x(12b^2 - x^2)}{(x^2 + 4b^2)^3} + A_4 \frac{1}{x} \right] \quad (10)$$

Учитывая также условия контакта

$$U_1(x) = \bar{U}^{(1)}(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11)$$

и применив к (4), (9) и (11) преобразование Фурье, соответственно получим

$$-i\sigma \bar{U}_1(\sigma) = \frac{X}{F_s} \frac{E_{v_1} - E_{v_2}}{E_s E_{v_1}} (e^{i\sigma a} - e^{-i\sigma a}) + \frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_s F_s} + \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{E_s F_s} \quad (12)$$

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma) = r(\sigma)\tau(\sigma) + \frac{\lambda^2 + 2\mu}{4\mu(\lambda^2 + \mu)} p\delta(\sigma), \quad U_1(\sigma) = \bar{U}^{(1)}(\sigma) \quad (13)$$

где

$$\bar{r}(\sigma) = \frac{1}{ih} \left[A_1 \operatorname{sgn} \sigma \cdot (A_1 \operatorname{sgn} \sigma + 2bA_2\sigma + b^2 A_3 \sigma^3 \operatorname{sgn} \sigma) e^{-2i\sigma b} \right] \quad (14)$$

при этом

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Сопоставлением формул (12) и (13) получим

$$\bar{\tau}_1(\sigma) = \frac{\Lambda(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} + g(\sigma) \quad (15)$$

где

$$\bar{q}(\sigma) = (C_1 |\sigma| + 2bC_2 \sigma^2 + b^2 C_3 |\sigma|^3) e^{-2i\sigma b} \quad (16)$$

$$\Lambda = \frac{h}{E_s F_s A_4}, \quad C_1 = \frac{A_1}{A_4}, \quad C_2 = \frac{A_2}{A_4}, \quad C_3 = \frac{A_3}{A_4}$$

$$\bar{g}(\sigma) = -2i \frac{\Lambda X(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \frac{\sin(a\sigma)}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} \quad (17)$$

Применив к (15) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x) = \frac{\Lambda(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}_2(\sigma) e^{-i\sigma x}}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma + g(x) \quad (18)$$

где

$$g(x) = \frac{i}{\pi} \frac{\Lambda X(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\sigma) e^{-i\sigma x}}{\Lambda + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma \quad (19)$$

Теперь покажем, что в точках $x = \pm a$ контактные напряжения имеют логарифмическую особенность [4].

Действительно, поскольку $\bar{\tau}(0) = 0$, следовательно,

$$\bar{\tau}_2(\sigma) = o\left[\frac{\sin(a\sigma)}{\sigma}\right] \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty$$

Учитывая также следующее соотношение:

$$A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma) = O(|\sigma|) \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty$$

из свойств интеграла Фурье получим, что первый член в выражении $\tau(x)$ — непрерывная функция, а $g(x)$ имеет логарифмическую особенность при $x \rightarrow \pm a$.

Далее, применяя теорему о свертке и полагая $|x| < a$, из соотношения (18) для определения $\tau(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = \frac{A(E_{v_1} - E_{v_2})}{E_{v_1}} \int_{-a}^a k(x-s)\tau(s)ds + g(x), \quad |x| < a \quad (20)$$

где
$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma \quad (21)$$

Отметим, что при $|x| \rightarrow 0$ $k(x)$ имеет логарифмическую особенность, поскольку знаменатель подынтегрального выражения в (21) имеет порядок $|\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Рассматривая уравнение (20) в пространстве суммируемых функций $L(-a, a)$ ее решение можно получить методом последовательных приближений при

$$\frac{A|E_{v_1} - E_{v_2}|}{E_{v_1}} \sup_{|x| < a} \int_{-a}^a k(x-s) dx < 1$$

Имея значения $\tau(x)$ при $|x| < a$, остальные ее значения получатся из соотношения (18).

Что касается постоянной X , то она определяется из условия (31).

Получим также асимптотическую формулу для $\tau(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Имея в виду разложение $\bar{\tau}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow 0$

$$\bar{\tau}(\sigma) = a_0\sigma + a_1\sigma|\sigma| + a_2\sigma^2 + a_3i\sigma^2|\sigma| + a_4\sigma^3 + o(\sigma^4)$$

где

$$a_0 = \frac{E_{v_1} - E_{v_2}}{E_{v_1}} [\bar{\tau}'_2(0) - 2iaX], \quad a_1 = -\frac{E_{v_1} - E_{v_2}}{E_{v_1}} (1 + c_1) [\bar{\tau}'_2(0) - 2iaX]$$

$$a_1 = \frac{E_2 - E_1}{AE_2} \left[\frac{4b}{A} (1+c_1)(c_2 - c_1) - b^2 (c_1 + 2c_2 - 4c_3) - \frac{(1+c_1)^2}{A^2} \left[\tau_2(0) - 2\lambda aX \right] - \frac{1+c_1}{A} \left[\tau_1(0) + \frac{2}{3} a^2 X \right] \right]$$

a_0, a_2 и a_4 – некоторые постоянные, в силу свойств интеграла Фурье [5] имеем

$$r(x) = \frac{2a_1}{\pi x} + \frac{24a_3}{\pi x} + O(|x|^{-3}), \quad |x| \rightarrow x \quad (22)$$

Автор выражает благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы в ходе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стериберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. П.М. Тр. Амер. общ. ниж. механика. 1966. Сер. Е. №4 С.124-135
2. Григорян Э.Х. Об одном подходе решения задач для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением // Учен. запiski ЕГУ, естеств. науки 1985. №2 С.35-40.
3. Багдасарян Р.А., Гукасян Г.О. Об одной задаче для кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным стрингером. // Межвуз. сб. научных трудов. 1991. Вып.8. С.316-321
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки и упругой полуплоскости. // Учен. запiski. ЕГУ, естеств. науки. 1979. №3. С.29-34.
5. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press. 1959. P.87.

Государственный инженерный университет Армении

Поступила в редакцию
8.07.2005

$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$ - вектор магнитного поля, причем для индуцированного поля считается $h_x = H_x H'_x$, $h_z = H_z H'_z$.

Для квазимонохроматической волны можно написать

$$u_x = \frac{1}{2} U_x(z) e^{i\tau - kx}; \quad u_z = \frac{1}{2} U_z(z) e^{i\tau - kx} \quad (1.1)$$

$$\tau = kx - \omega t; \quad H'_x = \frac{1}{2} H_x(z) e^{i\tau + kx}; \quad H'_z = \frac{1}{2} H_z(z) e^{i\tau + kx}$$

Уравнения движения магнитоупругой среды в линейной постановке имеют вид [1-3]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{h} \times \vec{H}_0)_x, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{h} \times \vec{H}_0)_z,$$

где ρ - плотность.

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_z = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + v_m \Delta \vec{h} \right) \quad (1.4)$$

Здесь σ - электропроводность, $v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ - магнитная вязкость, c - скорость света.

В поперечном магнитном поле уравнения (1.2)-(1.4) в переменных (1.1) дают

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 - \frac{h^2}{a^2} \\ \frac{b^2}{a^2} \frac{d^2 U_x}{dz^2} - k^2 U_x + \frac{a_1^2}{a^2} U_x + ik \zeta \frac{dU_x}{dz} &= \frac{a_1^2}{a^2} \left(\frac{dH_x}{dz} - ikH_x \right) \\ - i\omega H_x + v_m k^2 H_x - v_m \frac{d^2 H_x}{dz^2} &= - ik \zeta \frac{dU_x}{dz} \\ ik \zeta \frac{dU_x}{dz} + \frac{d^2 U_x}{dz^2} - \frac{h^2}{a^2} k^2 U_x + \frac{\omega^2}{a^2} U_x &= 0 \\ - i\omega H_z + v_m k^2 H_z - v_m \frac{d^2 H_z}{dz^2} &= - ikU_x, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}$, $a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $b^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

В пространственном подходе [6-8] решение можно искать в виде

$$U_x = A_1 \text{ch } v_1 z, \quad U_z = B_1 \text{sh } v_1 z, \quad H_x = C_1 \text{ch } v_1 z, \quad H_z = D_1 \text{sh } v_1 z \quad (1.6)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Из (1.5), (1.6) можно получить связь между всеми константами через B_1 в форме

$$C_{1,2,3} = -\frac{i\omega v_{1,2,3} B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, D_{1,2,3} = -\frac{i\omega k B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, X_{1,2,3} = -i\omega + v_m k^2 - v_m v_{1,2,3}^2,$$

$$ik \zeta B_{1,2,3} v_{1,2,3} + \left(v_{1,2,3}^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) A_{1,2,3} = 0 \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2} v_{1,2,3}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) B_{1,2,3} + ik \zeta A_{1,2,3} v_{1,2,3} = -\frac{a_i^2}{a^2} (C_{1,2,3} v_{1,2,3} - ik D_{1,2,3})$$

Из (1.7) для $\bar{v} = v_{1,2,3}(\omega)$ можно найти уравнение

$$\frac{b^2}{a^2} \bar{v}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2 \frac{\bar{v}^2 k^2}{\bar{v}^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} = -\frac{a_i^2}{a^2} \frac{\bar{v}^2 - k^2}{1 + i \frac{k^2 - \bar{v}^2}{\omega} v_m} \quad (1.8)$$

(1.8) является кубическим уравнением для \bar{v}^2 , решение которого достаточно громоздкое. Поэтому принимается $\frac{a_i^2}{b^2} \ll 1$ и разлагается решение по степеням $\frac{a_i^2}{b^2}$.

Тогда получится

$$v_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}, \quad v_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2}$$

$$v_1^2 = v_2^2 + \frac{a_i^2 k^2}{a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2 \theta} \right), \quad v_2^2 = v_1^2 - \frac{a_i^2 k^2}{a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{b^2 \theta} \right) + \frac{a_i^2 \omega^2}{b^4} \quad (1.9)$$

$$1 - \frac{k^2 - v_1^2}{\theta} = \frac{a_i^2 \zeta k^2 - \theta}{b^2 \theta}, \quad \theta = \frac{i\omega}{v_m}, \quad v_1^2 = k^2 - \theta$$

v_1^2 есть значение v , при $a_i^2 = 0$.

Для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для изгибных волн в пространственной постановке, нужно к (1.5) добавить граничные условия на поверхности пластины $z = \pm \frac{h}{2}$ с диэлектриком $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ и условия непрерывности \bar{h} . Вне пластины в диэлектрике индуцированное магнитное поле записывается в виде

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{2} (C_1^+ e^{i\theta_1} + kc), \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{2} (C_2^+ e^{i\theta_2} + kc), \quad \theta_1 = i\tau + kz \quad (1.10)$$

Используя также уравнение $\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial z} = 0$ и условия

$$z = \frac{h}{2}, \quad h_1 = \bar{h}_1, \quad h_2 = \bar{h}_2, \quad iC_1^+ = C_2^+, \quad C_1^+ e^{-i\theta_1} = C_1^+ \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2}, \quad C_2^+ e^{-i\theta_2} = D_1 \operatorname{sh} v_1 \frac{h}{2}$$

можно указанные граничные условия записать в виде

$$iC_1 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} = D_1 \operatorname{sh} v_1 \frac{h}{2}, \quad D_1 = -C_1 \frac{k}{v_1} i \quad (1.11)$$

$$C_1 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} = -kC_1 v_1^{-1} \operatorname{sh} v_1 \frac{h}{2}, \quad B_1 v_1 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} + i k A_1 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} = 0$$

$$A_j v_j \operatorname{sh} v_j \frac{h}{2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} i k B_j \operatorname{sh} v_j \frac{h}{2} = 0$$

где снова проведено суммирование по $j=1,2,3$

В (1.11) нужно подставить (1.7). Уравнение, полученное приравнявшем к нулю определителя системы (1.11), даст

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2} & 1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2} & 1 + \frac{k}{v_3} \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \\ \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 & \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 & \frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.12)$$

где

$$\Delta_j = v_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}, \quad X_j = 1 + i \frac{k^2 - v_j^2}{\omega} v_m, \quad \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\zeta v_j^2}{\Delta_j} \quad (1.13)$$

Уравнение (1.12) даст

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{X_3} \left(\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2} \Gamma_2 \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{v} - \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2} \Gamma_1 \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2}{v_1} \right) - \\ & - \left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 \right) \left(\frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 \frac{1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{X_1} - \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \frac{1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{X_2} \right) + \\ & + \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \left[\left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 \right) \frac{1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{X_1} - \left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 \right) \frac{1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{X_2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В силу (1.9)

$$X_1 = \frac{a^2 \zeta k^2 - \theta}{b^2 - \theta} \quad (1.15)$$

Тогда (1.14) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R a_0^2} b^2 \left\{ \left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 \right) \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 - \left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 \right) \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \right\} - \left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{X_1} \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 - \frac{1}{X_2} \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \right) + \frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \Gamma_3 \left(\frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2}{X_1} - \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{X_2} \right) = 0 \quad (1.16) \\ & R = -\frac{\zeta k^2 - \theta}{\theta} \left(1 + \frac{k}{v_3} \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

Разделим (1.16) на $\left(1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2}\right) \frac{\Gamma_1}{v_1} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}$, получим уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{Ra_1^2} b^2 \left[\frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}} - N \frac{v_1}{v_2} \frac{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_1}}{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2}} \right] + \left(1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_3}\right) \left(\frac{1}{X_1} \frac{v_1}{v_2} N \frac{1}{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{X_2} \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}} \frac{1}{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2}} \right) - \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_2 - \frac{v_1}{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}} \Gamma_1 \left(\frac{i}{X_1} - \frac{i}{X_2} \frac{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_1}}{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2}} \right) = 0 \quad (1.17) \end{aligned}$$

$$N = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

С учетом (1.13) в основных порядках получится

$$N \frac{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_1}}{1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2}} = 1 - \frac{\omega^4}{4b^4 k^4} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^2 a^2 k^2 \zeta} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^4 k^2 \zeta} \quad (1.18)$$

Исследуем общий случай произвольной электропроводности и произвольных θ , когда v_1, h конечные.

В уравнении (1.17) первое слагаемое после сокращения на $\frac{v_1}{v_2}$ будет в основном порядке с учетом (1.18).

$$\frac{-h^2}{Ra_1^2} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\omega^2 h^2}{a^2} \frac{1}{b^2} - 1 + \frac{\omega^4}{4b^4 k^4} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^2 a^2 k^2 \zeta} + \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^4 k^2 \zeta} \right) \quad (1.19)$$

Второе слагаемое в (1.17) после сокращения на $\frac{v_1}{v_2}$ с учетом

$$X_1 = 1 + \frac{i\omega}{a^2} v_m, \quad X_2 = 1 + \frac{i\omega}{b^2} v_m, \quad v_1^2 = k^2 - \theta, \quad 1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_1} = 2, \quad 1 + \frac{\zeta k^2}{\Delta_2} = 1 + \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{b^2}}$$

и (1.13), (1.15) будет

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\zeta k^2}{\zeta k^2 - \theta} \right) \left(\frac{\omega^2}{2b^2 k^2} + i\omega v_m \frac{\zeta}{b^2} \right) = \frac{\omega^2}{4b^2 \theta k^2} \frac{(2\zeta k^2 - \theta)^2}{\zeta k^2 - \theta} \quad (1.20)$$

Третье слагаемое в (1.17), поскольку

$$\Gamma_1 \approx -\frac{b^2 (2\zeta k^2 - \theta)}{a^2 (\zeta k^2 - \theta)}, \quad \Gamma_2 \approx -2 \frac{b^2}{a^2} \quad (1.21)$$

будет

$$-\frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \frac{h}{a^2} \frac{2\zeta k^2 - \theta}{\zeta k^2 - \theta} \frac{2}{h} \frac{a^2}{2b^2} \left(\frac{\omega^2}{2b^2 k^2} - \frac{\omega^2}{b^2 \theta} \zeta \right) \quad (1.22)$$

где $v_1 = \sqrt{k^2 - \theta}$. Тогда [1.17] примет вид

$$\left(1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2} \right) \frac{\theta b^2}{a_1^2 (\zeta k^2 - \theta)} - \left(\frac{\omega^2}{4b^4 k^4} - \frac{h^2 \zeta}{12b^2} - \frac{a_1^2}{4b^2 a^2 k^2 \zeta} - \frac{a_1^2}{4b^4 k^2 \zeta} \right) +$$

$$+ \frac{(2\zeta k^2 - \theta)(1 - \frac{2k^2\zeta}{\theta})}{4b^2k^2} \frac{1}{\zeta k^2 - \theta} - \frac{\text{th} \nu_3 \frac{h}{2}}{\nu_3} \frac{2\zeta k^2 - \theta}{\zeta k^2 - \theta} \frac{2}{4b^2k^2h} (1 - \frac{2k^2\zeta}{\theta}) = 0$$

или

$$\omega^2 = \frac{1}{3} \zeta k^2 k^2 b^2 - \frac{\omega_0^2 k^2}{\zeta} (\frac{b^2}{a^2} + 1) + \frac{(2\zeta k^2 - \theta)^2}{\theta^2 (1 + \frac{k}{\nu_3} \text{th} \nu_3 \frac{h}{2})} a_1^2 k^2 (1 - \frac{\text{th} \nu_3 \frac{h}{2}}{\nu_3} \frac{2}{h}) \quad (1.23)$$

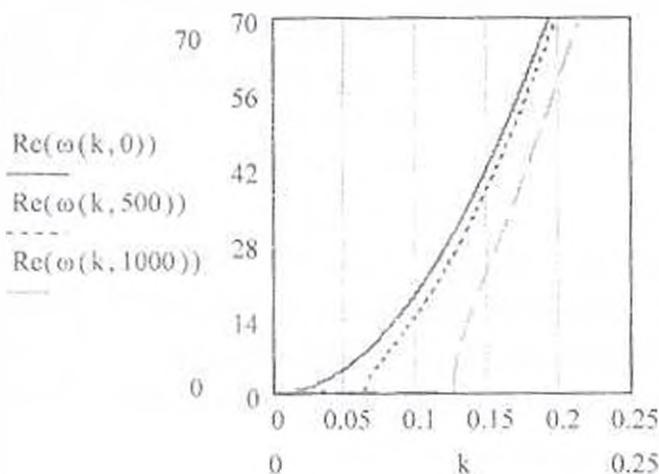
По формуле (1.23) проводятся вычисления на компьютере для типичных величин параметров

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}, \quad h = \frac{1}{10} \text{ см}, \quad \nu_3 = 10^7 \text{ см}^2/\text{сек}, \quad b = 4 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{сек}.$$

Данные взяты для алюминия и $\rho = 3 \text{ г/см}^3$.

Расчеты проведены для полей $H_1 = 0$, $H_0 = \frac{10^7}{2}$, $H_0 = 10^7$ гаусс.

Результаты приведены для действительной ω_1^0 части ω , $\omega = \omega_1^0 - i\omega_2^0$, в функции k на фиг. 1.



Фиг. 1

Как видно из фиг. 1, наличие магнитного поля H_0 приводит к уменьшению частоты $\omega_1^0(k)$. Этот вывод следует также для предельных случаев идеально проводящих пластин, для которых $\sigma = \infty$, $\theta = \infty$ и можно считать $\text{th} \nu_3 \frac{h}{2} \approx 1$, и конечно-проводящих пластин, для которых

$\text{th} \nu_3 \frac{h}{2} \approx \nu_3 \frac{h}{2}$. В этих случаях (1.23) дает

$$\omega_1^0 = \omega_0^0 - \frac{2a_1^2 k^2 b^2}{a^2 \zeta} \quad (1.24)$$

$$\omega_1^{02} = \omega_{10}^2 - \frac{a_1^2 k^2}{s} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (1.25)$$

соответственно.

Проведем теперь расчеты для поперечного поля по точным формулам. Удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$\frac{\omega}{\omega k} = \omega', \quad \frac{v_j}{k} = v_j', \quad j = 1, 2, 3, \quad \frac{\theta}{k^2} = \theta', \quad \theta' = i\omega' \frac{a}{k v_m} \quad (1.26)$$

По формуле (1.23) для безразмерных величин $\text{Re} \omega'$ проведены расчеты, результаты которых даны для $h = \frac{1}{10}$ см табл. 1. и для $h = \frac{1}{2}$ см

табл. 2, где $\alpha = \frac{a_1}{a}$.

Таблица 1

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.002345	0.005125	0.0056321	0.0068732	0.00742351
1/100	0.000012	0.000019	0.00002	0.00003	0.00004
1/10	0.00000187	0.000005	0.0000067	0.0000089	0.0000098

Таблица 2

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.01277546	0.02025456	0.02581241	0.0313427	0.03634652
1/100	0.000054252	0.000102554	0.00011457	0.000157568	0.00028879
1/10	0.00000534	0.00002645	0.000036576	0.000049661	0.00005712

Из (1.8) получится уравнение для $v_j'(\omega')$

$$\left(v_j'^2 - \frac{h^2}{a^2} + \omega'^2 \left(\frac{b^2}{a^2} v_j'^2 - 1 + \omega'^2 + \frac{v_j'^2 - 1}{1 - v_j'^2} \frac{a_1^2}{a^2} \right) + s^{-2} v_j'^2 \right) = 0 \quad (1.27)$$

Для $z_j = v_j'^2$ получается кубичное уравнение.

При $a_1 = 0$ в силу (1.23), (1.8) можно получить для частоты изгибных колебаний упругой пластины

$$\omega_0^2 = \frac{a b_0}{a k}, \quad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{s}{3}} \frac{h}{a} \lambda b \quad (1.28)$$

После нахождения v_j' можно решить уравнение для $\omega' = \omega'(k)$ согласно (1.12)



$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{v_1'} \operatorname{th} v_1' \frac{kh}{2} & 1 + \frac{1}{v_2'} \operatorname{th} v_2' \frac{kh}{2} & 1 + \frac{1}{v_3'} \operatorname{th} v_3' \frac{kh}{2} \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ 1 + \frac{\xi}{\Delta_1'} & 1 + \frac{\xi}{\Delta_2'} & 1 + \frac{\xi}{\Delta_3'} \\ \frac{\operatorname{th} v_1' \frac{kh}{2}}{v_1'} \Gamma_1' & \frac{\operatorname{th} v_2' \frac{kh}{2}}{v_2'} \Gamma_2' & \frac{\operatorname{th} v_3' \frac{kh}{2}}{v_3'} \Gamma_3' \end{vmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

где $X_j' = 1 - \frac{1 - v_j'^2}{\theta}$, $\Delta_j' = v_j'^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega^2$, $\Gamma_j' = 1 - 2 \frac{h^2}{a^2} - \xi \frac{v_j'^2}{\Delta_j'}$.

Результаты расчетов по (1.27), (1.29) для тех же параметров, что и выше, кроме Π_0 , для действительной части $\omega'(k)$ для $h = \frac{1}{10}$ см приведены в табл. 3, и для $h = \frac{1}{2}$ см табл. 4.

Таблица 3

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω_0'	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.00242809	0.00539412	0.00804649	0.0099884	0.0116025
1/100	0.000374367	0.00069921	0.0009127559	0.001076537	0.0012512
1/10	0.000233338	0.00030162	0.00034999	0.00036664	0.00039582

Таблица 4

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω_0'	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.0124451	0.02336412	0.04612432	0.0499253	0.0524355
1/100	0.0016744	0.00309798	0.00462425	0.00551142	0.00582452
1/10	0.0011342	0.00155421	0.0017541	0.00190024	0.0020142

В качестве нулевого приближения использованы значения ω' при $\alpha = \frac{1}{1000}$ из табл. 1 и 2, а далее процесс повторяется.

Результаты расчетов по (1.27), (1.29) приведены в табл. 3 и 4.

В работах [6-8] формулы (1.9) и далее настоящей статьи записаны с учетом слагаемых с множителем a^4 , причем из них следует вместо (1.24) дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - 2a_1^2 k^2 \frac{h^2}{a^2 \xi} + \frac{a_1^4 k^4}{\xi \omega^2} \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) \quad (1.30)$$

Отсюда видно, что $\omega^2 > 0$. Но для сравнительно небольших полей по-прежнему $\omega^2 < \omega_{00}^2$. Последнее неравенство, как видно из табл. 3, 4, имеет

место для действительной части частоты для произвольных полей.

По усредненной теории [8] имеет место

$$\omega^1 = \omega_{\text{ср}}^1 - \frac{2a_1^2 k^1}{h} \frac{1}{v_{\omega^1}^2} \omega^1 = \frac{\lambda_1 \frac{h}{2} \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{ch} \lambda_1 \frac{h}{2} + \frac{k}{\lambda_1} \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{h}{2}} \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{v_m}} \quad (1.31)$$

по которой проведены расчеты для $h = 1/10, 1/2$.

Таблица 5

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.0027214	0.00544308	0.0081643	0.0108858	0.0136081
1/100	0.0027212	0.0054426	0.0081631	0.0108848	0.013604
1/10	0.0026662	0.0053324	0.0080011	0.0106684	0.013335

Таблица 6

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ω	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.0125827	0.025245	0.0408219	0.0523123	0.0482345
1/100	0.0123158	0.025045	0.0402312	0.0521673	0.0475867
1/10	0.0011267	0.0049653	0.0098721	0.0154326	0.0223457

Сравнение показывает, что табл. 5 и 6 дают очень малый эффект, в то время как табл. 3 и 4, полученные по точной теории, дают сильное уменьшение частот за счет магнитного поля.

§2. Случай продольного поля

Пусть начальное магнитное поле H_0 направлено по оси x .

Повторяя выкладки, можно получить для произвольных σ

$$\omega^2 = \omega_{\text{ср}}^2 + a_1^2 k^2 \left(3 + 2 \frac{h^2}{a^4 \zeta^2} \right) - \left(1 + 2 \zeta \frac{k^2}{\theta} \right) \frac{k^3 a_1^2}{k + v_1^0 \operatorname{th} v_1^0 \frac{h}{2}} \left(1 + \frac{\zeta}{\theta b^2} a^2 k^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{2v_1^0 \operatorname{th} v_1^0 \frac{h}{2}}{k^2 h} + \zeta \frac{v_1^0 h^2}{a^2} + \frac{2v_1^0 \operatorname{th} v_1^0 \frac{h}{2} (1 - 2b^2/a^2)}{\zeta^2 k^2 + \theta b^2 / a^2} \right) \quad (2.1)$$

Результаты вычисления $\omega_1^1 = \operatorname{Re}(\omega(k, H_0))$ для данных §1 даны в табл. 7.

Таблица 7

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\operatorname{Re}(\omega(k, 0))$	19	75	170	302	471
$\operatorname{Re}(\omega(k, 500))$	22	79	174	306	475
$\operatorname{Re}(\omega(k, 1000))$	311	90	185	317	487

В случае $\sigma = \infty$ из (2.1) получится в основном порядке

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + \frac{2a_1^2 k}{h} \quad (2.2)$$

В этом случае решение по точному пространственному подходу совпадает с полученным по усредненному подходу на основе гипотезы Кирхгофа значением частоты [8].

В случае конечных σ , когда $\left|v_1\right| \frac{h}{2} \ll 1$, (2.1) дает

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + a_1^2 k^2 \left(1 + 2 \frac{b^2}{a^2 \zeta} - \frac{\theta}{k^2} \right) \quad (2.3)$$

Полученные дисперсионные соотношения позволяют рассмотреть вопрос устойчивости нелинейных волн модуляции в пластине.

§3. Нелинейные волны модуляции

В нелинейном приближении можно записать нелинейное дисперсионное соотношение в виде [4]

$$\omega = \omega_1^0 + i\omega_2^0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial A} \right)_{\omega_1^0} A^2 \quad (3.1)$$

где A есть амплитуда перемещения u , для нелинейной упругой пластины [4]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial A} \right)_{\omega_1^0} &= D_2 + iD_3, \quad D_2 = \frac{DD_1 e^{i\omega_1^0 t} k^3}{8\rho h \omega_1^0}, \quad D_3 = -D_4 \frac{\omega_1^0}{\omega_1^0} \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_4 = \frac{4h^2(1-\nu+\nu^2)^2}{45(1-\nu^2)} \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

γ_2 есть нелинейный коэффициент, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона [4].

Используя (3.1), можно получить методом медленно меняющейся амплитуды [4] уравнение модуляции и исследовать его на устойчивость. Для частоты волны модуляции Ω имеем [4]

$$i\Omega + iK \frac{d\omega_1^0}{dk} - \frac{3}{2} D_4 \Psi_0^2 = \sqrt{\left[\frac{3}{2} D_4 \Psi_0^2 \right]^2 - \Delta_0} \quad (3.3)$$

где K есть волновой вектор модуляционной волны, через Ψ_0 обозначено начальное значение амплитуды A_0

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2 + 2D_3 \Psi_0^2 \right) \quad (3.4)$$

Условие модуляционной устойчивости

$$\Omega = \Omega' + i\Omega'', \quad \Omega'' < 0 \quad (3.5)$$

Для идеально проводящей пластины $\sigma = \infty$, $D_3 = 0$ и условие устойчивости будет

$$\Delta_0 \geq 0 \quad (3.6)$$

В присутствии диссипации в случае $\gamma_2 < 0$ решение устойчиво, а для $\gamma_2 > 0$ неустойчиво. В случае $\Delta_0 < 0$ будет неустойчивость обоих решений.

Модуляционная устойчивость в адиабатическом приближении согласно (3.3) будет

$$\gamma_1 \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0 \quad (3.7)$$

Для случая магнитоупругой идеально проводящей пластины в продольном магнитном поле согласно (3.7), (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} > Dk^3(4 + 3\sqrt{2}) \\ \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} < Dk^3(4 + 3\sqrt{2}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

В нижней строке магнитное поле не влияет на устойчивость, а для верхнего знака оно меняет устойчивость на неустойчивость и наоборот.

Для поперечного магнитного поля в случае идеальной проводимости согласно (1.24) вместо (3.8) получится

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad h^2 k^2 \zeta^2 < \zeta \frac{a_1^2}{a^2} \\ \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0, \quad h^2 k^2 \zeta^2 > \zeta \frac{a_1^2}{a^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

И снова, так же, как и в (3.8), сильное магнитное поле меняет условие устойчивости на обратное.

Авторы благодарят Ю. Г. Санояна за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1997. 272 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит. 1996. 286с.
3. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость тороидальных упругих пластин. Ереван: Изд. НАН Армении. 1992. 124 с.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян А. А. Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине//Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. №1. С. 25-30
5. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем ЕГУ Изд. "Тигран Мец". 1999. 439 с.
6. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. Устойчивость нелинейных волн модуляции в магнитном поле для пространственной и осредненной задачи//Изв. РАН. МТТ. 2001. №5. С. 35-42.
7. Bagdoyev A. G., Vantsyan A. A. Theoretical and experimental investigations of waves in plate in magnetic field for space and averaged problems//Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. P.251-259.
8. Сафарян Ю. С. Исследование колебаний магнитоупругих пластин в пространственной и осредненной постановке//Информационные технологии и управление. 2001. №2. С. 17-49.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.02.2005

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Оганесян Р.Ж.

Ռ.Ճ. Յովհաննիսյան

Երկչերտ օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումները խառը եզրային պայմանների դեպքում

Լուծված է երկչերտ օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ շերտերից ծեփի ստորին մակերևույթը կոշտ ամրակցված է, իսկ ծրարի վերին մակերևույթն ազատ է, և շերտերի միջև տեղի ունեն լրով կոնտակտի պայմանները Որոշված են լարումների բեռնորրի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, սեփական տատանումների հաճախություններն ու տատանման ձևերը: Ցույց է տրված, որ տատանման ձևերը կշռով օրթոգոնալ են:

R.Zh. Hovhannisyán

Free vibrations of double-layer orthotropic plate under mixed-boundary conditions

The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on free vibration of double layer orthotropic plate is solved, when the lower bound of the second layer is rigidly fastened and the upper surface of the first layer is free. It is considered that full contact conditions exist between layers. The asymptotic forms for the components of stress tensor and displacement vector are found. The frequencies and forms of free vibrations are determined.

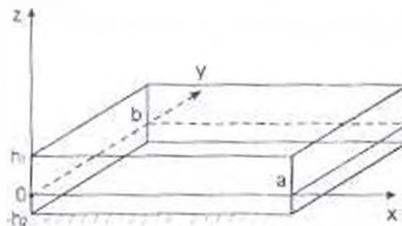
Решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки, когда нижняя грань второго слоя жестко закреплена, а верхняя поверхность первого слоя свободна. Считается, что между слоями имеют место условия полного контакта. Найдены асимптоты для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Определены частоты и формы собственных колебаний.

1. Для решения неклассических, с точки зрения теории пластин и оболочек, краевых задач особенно эффективным оказался асимптотический метод. Найдены решения новых классов статических и динамических краевых задач [1]. Обзор соответствующих работ проведен в [2]. Собственные колебания однослойной ортотропной пластинки рассмотрены в [3].

В работе рассматривается задача о собственных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки

$$D = \{(x, y, z): x \in [0, a], y \in [0, b], -h_2 \leq z \leq h_1, \max(h_1, h_2) \ll \min(a, b)\}$$

Предполагается, что нижняя грань нижнего слоя жестко закреплена, а верхняя грань верхнего слоя свободна, а между слоями имеют место условия полного контакта (фиг. 1).



Փիգ. 1

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz}^I - \sigma_{zz}^{II} - \sigma_{zz}^J = 0 \text{ при } z = -h_1 \quad (1.1)$$

$$u'' = v'' = w'' = 0 \quad \text{при } z = -h_2$$

и условия контакта:

$$\sigma'_{xz}(z=0) = \sigma''_{xz}(z=0), \quad \sigma'_{yz}(z=0) = \sigma''_{yz}(z=0), \quad \sigma'_{zz}(z=0) = \sigma''_{zz}(z=0)$$

$$u'(z=0) = u''(z=0), \quad v'(z=0) = v''(z=0), \quad w'(z=0) = w''(z=0) \quad (1.2)$$

Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки. Для этого необходимо найти ненулевое решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных среа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} - \rho_k \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} &= (x, y, z; u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} = a_{11}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} = a_{12}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)} \\ \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} = a_{13}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)} & \quad (1.3) \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} = a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}, \quad \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \quad \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} \\ k = I, II \end{aligned}$$

при граничных условиях (1.1) и условиях контакта (1.2). Здесь и в дальнейшем $k = I$ соответствует верхнему слою, а $k = II$ — нижнему. Искомые величины представим в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z, t) = \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z) \exp(i\omega t) \quad \alpha, \beta = x, y, z \\ (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) = (u_x^{(k)}, u_y^{(k)}, u_z^{(k)}) \exp(i\omega t) \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ω — искомая частота собственных колебаний. После подстановки (1.4) в (1.3) получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(k)}}{\partial z} - \rho_k \omega^2 u_x^{(k)} = 0 \quad (x, y, z; 1, 2, 3) \\ \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \quad (x, y, z; 1, 2, 3) \\ \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} = a_{46}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)}, \quad \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial z} = a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)}, \quad \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial z} = a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \\ k = I, II \end{aligned} \quad (1.5)$$

В (1.5) перейдем к безразмерным переменным и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h \\ U^{(k)} = u_x^{(k)}/l, \quad V^{(k)} = u_y^{(k)}/l, \quad W^{(k)} = u_z^{(k)}/h \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $h = \max(h_1, h_2)$, $l = \min(a, b)$ и $h \ll l$. В результате получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}^{(k)}}{\partial \zeta} - \rho_k(\omega \varepsilon)^2 U^{(k)} = 0 \quad (1, 2, 3; U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)})$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{21}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}, \quad \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} - a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{21}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} = a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)}, \quad \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)},$$

$$\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} = a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)}$$

$$\omega_k = h \omega, \quad k = I, II.$$

Решение этой сингулярно-возмущенной системы будем искать в виде следующего асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} \sigma_v^{(k)} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{(k,s)}, \\ (U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}) &= \varepsilon^s (U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}) \\ \omega_k^2 &= \varepsilon^s \omega_k^2, \quad k = I, II; \quad s = \overline{0, N} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что по нему (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений N . Подставим (1.8) в (1.7) и применим правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.8), получим следующую непротиворечивую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,s+1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \rho_1(\omega_{k,s})^2 U^{(k,s+1)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k,s+1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \rho_2(\omega_{k,s})^2 V^{(k,s+1)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s+1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \rho_3(\omega_{k,s})^2 W^{(k,s+1)} &= 0 \quad m = \overline{0, s} \\ \frac{\partial U^{(k,s+1)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s+1)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s+1)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s+1)} + \\ \frac{\partial V^{(k,s+1)}}{\partial \eta} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s+1)} - a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s+1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s+1)} \\ \frac{\partial W^{(k,s+1)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s+1)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s+1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s+1)} \\ \frac{\partial U^{(k,s+1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s+1)}}{\partial \xi} &= a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k,s+1)}, \quad \frac{\partial W^{(k,s+1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s+1)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s+1)} \\ \frac{\partial W^{(k,s+1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s+1)}}{\partial \xi} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k,s+1)} \quad k = I, II \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$Q^{(k,s)} = 0 \text{ при } s < 0.$$

В (1.9) все величины можно выразить через $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}$ по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(k,s)} &= -A_{23}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{22}^{(k)} &= -A_{33}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{33}^{(k)} &= -A_{11}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{12}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(k)}} \left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right] \\
\sigma_{23}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{44}^{(k)}} \left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right] \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(k)} &= \frac{a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{22}^{(k)} = \frac{a_{22}^{(k)} a_{33}^{(k)} - a_{23}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{33}^{(k)} = \frac{a_{33}^{(k)} a_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}} \\
A_{12}^{(k)} &= \frac{a_{33}^{(k)} a_{12}^{(k)} - a_{13}^{(k)} a_{23}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{13}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{23}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}}{\Delta^{(k)}} \\
\Delta^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} a_{33}^{(k)} + 2 a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{13}^{(k)2} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)2} a_{33}^{(k)} - a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)2} - a_{11}^{(k)} a_{12}^{(k)2}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Для определения функций $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, и $W^{(k,s)}$ получаются уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{33}^{(k)} \rho_k(\omega_m)^2 U^{(k,s-m)} &= R_U^{(k,s)} \\
\frac{\partial^2 V^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{22}^{(k)} \rho_k(\omega_m)^2 V^{(k,s-m)} &= R_V^{(k,s)} \quad m = 0, s \\
A_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \rho_k(\omega_m)^2 W^{(k,s-m)} &= R_W^{(k,s)} \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
R_U^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \zeta^2 \partial \zeta} - a_{44}^{(k)} \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\
R_V^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44}^{(k)} \left[\frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\
R_W^{(k,s)} &= -A_{23}^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - A_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Очевидно, что $R_U^{(k,0)} = R_V^{(k,0)} = R_W^{(k,0)} = 0$.

2. Для определения частот рассмотрим приближение $s = 0$. Уравнения (1.12) будут однородны и независимы, следовательно, их можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $U^{(k,0)}$, $V^{(k,0)}$, $W^{(k,0)}$:

$$\frac{d^2 U^{(k,0)}}{d\zeta^2} - a_{33}^{(k)} \rho_k(\omega_0)^2 U^{(k,0)} = 0, \quad \frac{d^2 V^{(k,0)}}{d\zeta^2} + a_{22}^{(k)} \rho_k(\omega_0)^2 V^{(k,0)} = 0$$

$$A_{11}^{(k)} \frac{d^2 W^{(k,0)}}{d\zeta^2} + \rho_k (\omega_0)^2 W^{(k,0)} = 0 \quad k = I, II \quad (2.1)$$

Решив эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} U^{(k,0)} &= C_{U1}^{(k,0)}(\xi, \eta) \cos \sqrt{a_{35}^{(k)}} \rho_k \omega_0 \zeta + C_{U2}^{(k,0)}(\xi, \eta) \sin \sqrt{a_{35}^{(k)}} \rho_k \omega_0 \zeta \\ V^{(k,0)} &= C_{V1}^{(k,0)}(\xi, \eta) \cos \sqrt{a_{44}^{(k)}} \rho_k \omega_0 \zeta + C_{V2}^{(k,0)}(\xi, \eta) \sin \sqrt{a_{44}^{(k)}} \rho_k \omega_0 \zeta \\ W^{(k,0)} &= C_{W1}^{(k,0)}(\xi, \eta) \cos \sqrt{\frac{\rho_k}{a_{11}^{(k)}}} \omega_0 \zeta + C_{W2}^{(k,0)}(\xi, \eta) \sin \sqrt{\frac{\rho_k}{a_{11}^{(k)}}} \omega_0 \zeta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сначала рассмотрим первое уравнение (2.1) и соответствующее ему решение из (2.2). Из граничных условий (1.1) будем иметь

$$\sigma_{33}^{(k,0)}(\zeta = \zeta_1) = 0, \quad \text{из (1.10)} \Rightarrow \frac{\partial U^{(k,0)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_1} = 0 \quad (2.3)$$

$$U^{(k,0)}(\zeta = -\zeta_2) = 0$$

где $\zeta_1 = k_1/h$, $\zeta_2 = k_2/b$. Подставив $U^{(k,0)}$ из (2.2) в (2.3) и удовлетворив условия контакта (1.2), получим

$$C_{U1}^{(I,0)} = C_{U1}^{(II,0)}, \quad C_{U2}^{(I,0)} = \sqrt{\frac{a_{35}^{II}}{a_{35}^{I}}} C_{U2}^{(II,0)} \quad (2.4)$$

а также алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_{U1}^{(I,0)} \sin \sqrt{a_{35}^I} \rho_I \omega_0 \zeta_1 - C_{U2}^{(I,0)} \cos \sqrt{a_{35}^I} \rho_I \omega_0 \zeta_1 = 0 \\ C_{U1}^{(II,0)} \cos \sqrt{a_{35}^{II}} \rho_{II} \omega_0 \zeta_2 - C_{U2}^{(II,0)} \sqrt{\frac{a_{35}^I}{a_{35}^{II}}} \sin \sqrt{a_{35}^{II}} \rho_{II} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель этой системы обращался в нуль. В результате получим следующее трансцендентное уравнение относительно ω_0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a_{35}^I \rho_I}{a_{35}^{II} \rho_{II}}} \sin \sqrt{a_{35}^I} \rho_I \omega_0 \zeta_1 \cdot \sin \sqrt{a_{35}^{II}} \rho_{II} \omega_0 \zeta_2 - \\ - \cos \sqrt{a_{35}^I} \rho_I \omega_0 \zeta_1 \cdot \cos \sqrt{a_{35}^{II}} \rho_{II} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Точно так же, удовлетворив остальным условиям (1.1) и (1.2), получим уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a_{44}^I \rho_I}{a_{44}^{II} \rho_{II}}} \sin \sqrt{a_{44}^I} \rho_I \omega_0 \zeta_1 \cdot \sin \sqrt{a_{44}^{II}} \rho_{II} \omega_0 \zeta_2 - \\ - \cos \sqrt{a_{44}^I} \rho_I \omega_0 \zeta_1 \cdot \cos \sqrt{a_{44}^{II}} \rho_{II} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{A_{11}^I \rho_I}{A_{11}^{II} \rho_{II}}} \sin \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_0 \zeta_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_0 \zeta_2 - \\ - \cos \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_0 \zeta_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Очевидно, что решения уравнения (2.6) не являются решениями уравнений (2.7) и (2.8), следовательно, определители систем алгебраических уравнений,

соответствующие $V^{(k,0)}$ и $W^{(k,0)}$, будут отличны от нуля. Что означает, что если $\omega_{n,0}$ является решением (2.6), то ему соответствует:

$$U^{(k,0)} \neq 0, \quad V^{(k,0)} = 0, \quad W^{(k,0)} = 0 \quad (2.9)$$

если же $\omega_{n,1}$ является решением (2.7), то ему соответствует:

$$U^{(k,0)} = 0, \quad V^{(k,0)} \neq 0, \quad W^{(k,0)} = 0 \quad (2.10)$$

а если $\omega_{n,0}$ является решением (2.8), то ему будет соответствовать:

$$U^{(k,0)} = 0, \quad V^{(k,0)} = 0, \quad W^{(k,0)} \neq 0 \quad (2.11)$$

Из вышесказанного следует, что в двухслойной пластинке возникают три типа собственных колебаний – два сдвиговых и одно продольное, частоты которых определяются соответственно из уравнений (2.6), (2.7) и (2.8).

Собственные функции можно привести к следующему виду:

$$U^{(j,0)} = C_0^{(j,0)} \cos \left[\sqrt{a_{11}^I \rho_I} \omega_n (\zeta_1 - \zeta_1) \right], \quad U^{(j,0)} = C_0^{(j,0)} \sin \left[\sqrt{a_{11}^II \rho_{II}} \omega_n (\zeta_1 + \zeta_2) \right] \quad (2.12)$$

а уравнения (2.6) – (2.8) – к следующему стандартному виду:

$$\cos p \omega_{n,0} + r \cos q \omega_{n,0} = 0 \quad (2.13)$$

где для уравнения (2.6):

$$p = \sqrt{a_{11}^I \rho_I} \zeta_1 + \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}} \zeta_2, \quad q = \sqrt{a_{11}^I \rho_I} \zeta_1 - \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}} \zeta_2, \quad r = \frac{\sqrt{a_{11}^I \rho_I} - \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}}}{\sqrt{a_{11}^I \rho_I} + \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}}} \quad (2.14)$$

для уравнения (2.7):

$$p = \sqrt{a_{11}^I \rho_I} \zeta_1 + \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}} \zeta_2, \quad q = \sqrt{a_{11}^I \rho_I} \zeta_1 - \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}} \zeta_2, \quad r = \frac{\sqrt{a_{11}^I \rho_I} - \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}}}{\sqrt{a_{11}^I \rho_I} + \sqrt{a_{11}^II \rho_{II}}} \quad (2.15)$$

а для уравнения (2.8):

$$p = \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^II}} \zeta_2, \quad q = \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \zeta_1 - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^II}} \zeta_2, \quad r = \frac{\sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^II}} - \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}}}{\sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^II}} + \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}}} \quad (2.16)$$

Поскольку $r < 1$, трансцендентное уравнение (2.13) имеет вещественные корни. Приведем значения некоторых первых частот собственных колебаний для двухслойного пакета, состоящего из слоев стеклопластика СТЭТ и АСТТ [1], при различных соотношениях толщин. В табл. 1–3 приведены значения первых пяти частот, соответствующих уравнениям (2.6), (2.7) и (2.8), соответственно.

Таблица 1

	$\omega_1 \text{ с}^{-1}$	$\omega_2 \text{ с}^{-1}$	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	$\omega_4 \text{ с}^{-1}$	$\omega_5 \text{ с}^{-1}$
I слой – СТЭТ			II слой – АСТТ		
$h_1 = 0.2 \text{ м}, h_2 = 1 \text{ м}$	1448.46	4423.14	7536.17	10745.5	13998.2
$h_1 = 1 \text{ м}, h_2 = 0.2 \text{ м}$	1864.27	6165.98	10884.6	15255.1	18990.8
I слой – АСТТ			II слой – СТЭТ		
$h_1 = 0.2 \text{ м}, h_2 = 1 \text{ м}$	2359.71	6696.35	10426.7	14692.6	19408.7
$h_1 = 1 \text{ м}, h_2 = 0.2 \text{ м}$	1629.23	4867.78	8040.06	11091.3	14013.4

Таблица 2

	$\omega_1 \text{ с}^{-1}$	$\omega_2 \text{ с}^{-1}$	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	$\omega_4 \text{ с}^{-1}$	$\omega_5 \text{ с}^{-1}$
I слой – СТЭГ			II слой – АСТГ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	1448.36	4421.06	7529.34	10731.9	13975.7
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	1846.91	6058.82	10669.5	14991.5	18705.6
I слой – АСТГ			II слой – СТЭГ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	2306.52	6575.05	10274	14427	19030.5
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	1623.94	4850.83	8008.44	11043.1	13956.9

Таблица 3

	$\omega_1 \text{ с}^{-1}$	$\omega_2 \text{ с}^{-1}$	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	$\omega_4 \text{ с}^{-1}$	$\omega_5 \text{ с}^{-1}$
I слой – СТЭГ			II слой – АСТГ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	2008.12	6153.4	10521.4	15043.1	19646.1
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	2821.95	10561.7	18902.3	24967.9	31753.4
I слой – АСТГ			II слой – СТЭГ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	4252.44	11153	17133.9	25429.1	33258.8
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	2323.8	6958.55	11549.3	16046.5	20372.4

Докажем, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям ω_{nm} и ω_{0n} , ортогональны с весом $\sqrt{\rho_k}$ на интервале $[-\zeta_2, \zeta_1]$. Пусть в первом уравнении (2.1) $\omega_p = \omega_{nm}$, а $U^{(k,0)} = U_m^{(k,0)}$, тогда

$$\frac{d^2 U_m^{(k,0)}}{d\zeta^2} + a_{33}^{(k)} \rho_k (\omega_{nm})^2 U_m^{(k,0)} = 0 \quad k = I, II \quad (2.17)$$

Умножив обе части уравнения (2.17) на $U_n^{(k,0)}$ и рассматривая уравнение (2.17) для каждого слоя n отдельно, проинтегрируем обе части полученного уравнения в пределах $[-\zeta_2; 0]$, что соответствует второму слою и в пределах $[0; \zeta_1]$ для первого слоя. В результате будем иметь:

$$\int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(I,0)} \frac{d^2 U_m^{(II,0)}}{d\zeta^2} d\zeta + a_{33}^{(II)} \rho_{II} (\omega_{nm})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(II,0)} U_m^{(II,0)} d\zeta = 0$$

$$\int_0^{\zeta_1} U_n^{(II,0)} \frac{d^2 U_m^{(I,0)}}{d\zeta^2} d\zeta + a_{33}^{(I)} \rho_I (\omega_{nm})^2 \int_0^{\zeta_1} U_n^{(I,0)} U_m^{(I,0)} d\zeta = 0 \quad (2.18)$$

Произведя интегрирование, получим:

$$U_n^{(II,0)} \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} \Big|_{-\zeta_2}^0 - \int_{-\zeta_2}^0 \frac{dU_n^{(II,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} d\zeta + a_{33}^{(II)} \rho_{II} (\omega_{nm})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(II,0)} U_m^{(II,0)} d\zeta = 0$$

$$U_n^{(I,0)} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} \Big|_0^{\zeta_1} - \int_0^{\zeta_1} \frac{dU_n^{(I,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} d\zeta + a_{33}^{(I)} \rho_I (\omega_{nm})^2 \int_0^{\zeta_1} U_n^{(I,0)} U_m^{(I,0)} d\zeta = 0 \quad (2.19)$$

Суммируя уравнения (2.19), учитывая (2.3) и условия контакта (1.2), получим:

$$-\frac{1}{a_{33}^{(II)}} \int_{-\zeta_2}^0 \frac{dU_n^{(II,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{a_{33}^{(I)}} \int_0^{\zeta_1} \frac{dU_n^{(I,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} d\zeta +$$

$$+ \rho_{II}(\omega_{0m})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_m^{(II,m)} d\zeta + \rho_I(\omega_{0m})^2 \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_m^{(I,m)} d\zeta = 0 \quad (2.20)$$

Теперь, пусть в первом уравнении (2.1) $\omega_{0l} = \omega_{0n}$, а $U^{(k,0)} = U_n^{(k,0)}$, тогда, выполнив аналогичные действия, получим:

$$-\frac{1}{a_{\zeta_2}^2} \int_{-\zeta_2}^0 \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(II,m)}}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{a_{\zeta_1}^2} \int_0^{\zeta_1} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(I,m)}}{d\zeta} d\zeta + \rho_{II}(\omega_{0m})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_m^{(II,m)} d\zeta + \rho_I(\omega_{0m})^2 \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_m^{(I,m)} d\zeta = 0 \quad (2.21)$$

Из соотношения (2.20) вычтя (2.21), получим:

$$\left((\omega_{0m})^2 - (\omega_{0n})^2 \right) \left[\rho_{II} \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_m^{(II,m)} d\zeta + \rho_I \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_m^{(I,m)} d\zeta \right] = 0 \quad (2.22)$$

Введем новые функции:

$$\varphi_m = \begin{cases} \sqrt{\rho_I} U_m^{(I,0)}; & 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \sqrt{\rho_{II}} U_m^{(II,0)}; & -\zeta_2 \leq \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

тогда соотношение (2.22) запишется в виде:

$$\left((\omega_{0m})^2 - (\omega_{0n})^2 \right) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_m \varphi_n d\zeta = 0 \quad (2.24)$$

при $\omega_{0m} \neq \omega_{0n}$ из (2.24) следует:

$$\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_m \varphi_n d\zeta = 0 \quad (2.25)$$

то есть функции $\{\varphi_m\}$ составляют ортогональную систему на интервале $[-\zeta_2, \zeta_1]$.

3. О приближениях $s \geq 1$. Рассмотрим уравнения (1.12) при $s = 1$. Первое уравнение (1.12) при ω_{0m} , которая является решением уравнения (2.6), примет вид:

$$\frac{d^2 U_n^{(k,1)}}{a_{\zeta^2}^2} + a_{\zeta_1}^{(k)} \rho_k (\omega_{0m})^2 U_n^{(k,1-m)} = R_{\zeta_1}^{(k,1)} \quad m = 0, 1; \quad k = I, II \quad (3.1)$$

Решения $U_n^{(k,1)}$ представим в виде рядов по собственным функциям нулевого приближения $U_n^{(k,0)}$:

$$U_n^{(k,1)} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(k)} U_n^{(k,0)} \quad k = I, II \quad (3.2)$$

Эти решения удовлетворяют граничным условиям (1.1), соответствующим n и σ_{1n} . Подставив (3.2) в (3.1) и учитывая (2.1), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(k)} a_{\zeta_1}^{(k)} \rho_k \left((\omega_{0m})^2 - (\omega_{0n})^2 \right) U_n^{(k,0)} = -a_{\zeta_1}^{(k)} \rho_k (\omega_{0m})^2 U_n^{(k,0)} + R_{\zeta_1}^{(k,1)} \quad k = I, II \quad (3.3)$$

При $k = I$ уравнение (3.3), умножив на $U_n^{(I,0)}$ и проинтегрировав по ζ на интервале $[0, \zeta_1]$, получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(I)} \left((\omega_{0m})^2 - (\omega_{0n})^2 \right) \rho_I \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_n^{(I,0)} d\zeta = \dots \quad (3.4)$$

$$= -(\omega_{in})^2 \rho_I \int_0^{\zeta_2} U_n^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{33}^I} \int_0^{\zeta_2} R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta$$

а при $k = II$, умножив на $U_1^{(j,0)}$ и проинтегрировав по ζ на интервале $[-\zeta_2, 0]$, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} ((\omega_{in})^2 - (\omega_{im})^2) \rho_{II} \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta = \\ & = -(\omega_{in})^2 \rho_{II} \int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{33}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.5)$$

Удовлетворив условию контакта для $U_1^{(j,0)}$, будем иметь:

$$b_{nm}^I = b_{nm}^{II} = b_{nm} \quad (3.6)$$

Суммируя (3.4) и (3.5), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} ((\omega_{in})^2 - (\omega_{im})^2) \times \\ & \times \left[\int_{-\zeta_2}^0 \sqrt{\rho_{II}} U_m^{(j,0)} \sqrt{\rho_{II}} U_1^{(j,0)} d\zeta + \int_0^{\zeta_2} \sqrt{\rho_I} U_m^{(j,0)} \sqrt{\rho_I} U_1^{(j,0)} d\zeta \right] = \\ & = -(\omega_{in})^2 \left[\int_{-\zeta_2}^0 \sqrt{\rho_{II}} U_n^{(j,0)} \sqrt{\rho_{II}} U_1^{(j,0)} d\zeta + \int_0^{\zeta_2} \sqrt{\rho_I} U_n^{(j,0)} \sqrt{\rho_I} U_1^{(j,0)} d\zeta \right] + \\ & + \frac{1}{a_{33}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta - \frac{1}{a_{33}^I} \int_0^{\zeta_2} R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.7)$$

Учитывая (2.23), соотношение (3.7) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} ((\omega_{in})^2 - (\omega_{im})^2) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_2} \varphi_n \varphi_m d\zeta = -(\omega_{in})^2 \int_{-\zeta_2}^{\zeta_2} \varphi_n \varphi_n d\zeta + \\ & + \frac{1}{a_{33}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{33}^I} \int_0^{\zeta_2} R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.8)$$

А с учётом (2.25) будем иметь:

$$\begin{aligned} & b_{nj} ((\omega_{in})^2 - (\omega_{ij})^2) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_2} \varphi_j \varphi_j d\zeta = -(\omega_{in})^2 \int_{-\zeta_2}^{\zeta_2} \varphi_n \varphi_n d\zeta + \\ & + \frac{1}{a_{33}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{33}^I} \int_0^{\zeta_2} R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.9)$$

При $j = n$ из (3.9) следует:

$$(\omega_{in})^2 = \frac{\frac{1}{a_{33}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(j,0)} U_n^{(j,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{33}^I} \int_0^{\zeta_2} R_{U_n}^{(j,0)} U_n^{(j,0)} d\zeta}{\int_{-\zeta_2}^{\zeta_2} \varphi_n \varphi_n d\zeta} \quad (3.10)$$

а при $j \neq n$:

$$b_{nj} = \frac{\frac{1}{a_{33}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{33}^I} \int_0^{\zeta_2} R_{U_n}^{(j,0)} U_1^{(j,0)} d\zeta}{((\omega_{in})^2 - (\omega_{ij})^2) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_2} \varphi_j \varphi_j d\zeta} \quad (3.11)$$

Для определения b_{nn} введём следующую функцию:

$$\varphi_n^{(k)} = \begin{cases} \sqrt{\rho_1} U_n^{(k,1)}; & 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \sqrt{\rho_2} U_n^{(k,2)}; & -\zeta_2 \leq \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\|\varphi_n^{(k)}\| = \|\varphi_n\| = \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_n d\zeta$$

Нормируя функцию $\Phi_n = \varphi_n^{(0)} + \varepsilon \varphi_n^{(1)} + \dots$ и ограничиваясь первым приближением, будем иметь [4,5]:

$$\frac{1}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \left[\varphi_n^{(0)} + \varepsilon \varphi_n^{(1)} \right] d\zeta = 1 \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(0)} \varphi_n^{(0)} d\zeta + \frac{2\varepsilon}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} d\zeta + \frac{\varepsilon^2}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_n^{(1)} d\zeta = 1 \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует:

$$\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_n^{(1)} d\zeta = 0 \quad (3.15)$$

Подставив $\varphi_n^{(0)}$ и $\varphi_n^{(1)}$ из (3.12) в (3.15) и учитывая, что функции $\{\varphi_n^{(k)}\}$ ортогональны, получим, что $h_{nn} = 0$.

Из (3.13), учитывая (2.9), следует:

$$R_{\zeta_1}^{(k,1)} = 0, \quad k = I, II \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в (3.10) и (3.11), будем иметь:

$$\omega_{1n} = 0, \quad h_{nn} = 0 \quad (3.17)$$

Следовательно, приближение $s = 1$ даёт нулевое решение.

Теперь рассмотрим приближение $s = 2$. Первое уравнение (1.12), учитывая (3.17), примет вид:

$$\frac{d^2 U_n^{(k,2)}}{d\zeta^2} + a_{\zeta_1}^{(k,1)} \rho_1 (\omega_{1n})^2 U_n^{(k,2)} - a_{\zeta_2}^{(k,1)} \rho_2 (\omega_{2n})^2 U_n^{(k,2)} + R_{\zeta_1}^{(k,2)} = 0, \quad k = I, II \quad (3.18)$$

Решение снова поищем в виде:

$$U_n^{(k,2)} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(k,2)} U_n^{(m,2)}, \quad k = I, II \quad (3.19)$$

которое снова удовлетворяет граничным условиям. Повторив те же действия, получим:

$$(\omega_{2n})^2 = \frac{\frac{1}{a_{\zeta_1}^{(I,2)}} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} R_{\zeta_1}^{(I,2)} U_n^{(I,2)} d\zeta + \frac{1}{a_{\zeta_2}^{(I,2)}} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} R_{\zeta_2}^{(I,2)} U_n^{(I,2)} d\zeta}{\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_n d\zeta} \quad (3.20)$$

$$c_{nn} = \frac{\frac{1}{a_{\zeta_1}^{(I,2)}} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} R_{\zeta_1}^{(I,2)} U_n^{(I,2)} d\zeta + \frac{1}{a_{\zeta_2}^{(I,2)}} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} R_{\zeta_2}^{(I,2)} U_n^{(I,2)} d\zeta}{\left((\omega_{2n})^2 - (\omega_{1n})^2 \right) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_n d\zeta} \quad r \neq n \quad (3.21)$$

Для определения c_{nn} поступим так же, как в случае с h_{nn} , но нормируя функцию Φ_n , ограничимся вторым приближением, в результате получим, что $c_{nn} = 0$.

В формулах (3.20) и (3.21) участвует функция $R_{\zeta_1}^{(k,2)}$, которая имеет вид:

$$R_{0n}^{(k,2)} = (a_{55}^{(k)} A_{21}^{(k)} - 1) \frac{\partial^2 W_n^{(k,1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{33}^{(k)} A_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 U_n^{(k,2)}}{\partial \xi^2} - \frac{a_{55}^{(k)} \partial^2 U_n^{(k,0)}}{a_{00}^{(k)} \partial \eta^2} \quad (3.22)$$

где $W_n^{(k,1)}$ определяется из третьего уравнения (1.12), при $s = 1$, где ω_{0n} удовлетворяет уравнению (2.6):

$$A_{11}^{(k)} \frac{d^2 W_n^{(k,1)}}{d\zeta^2} + \rho_k (\omega_{0n})^2 W_n^{(k,1)} + \rho_k (\omega_{1n})^2 W_n^{(k,0)} = R_{0n}^{(k,1)} \quad k = I, II \quad (3.23)$$

Подставив $R_{0n}^{(k,1)}$ из (1.13) и ω_{1n} из (3.17), получим:

$$A_{11}^{(k)} \frac{d^2 W_n^{(k,1)}}{d\zeta^2} + \rho_k (\omega_{0n})^2 W_n^{(k,1)} = \left(A_{23}^{(k)} - \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \right) \frac{\partial^2 U_n^{(k,0)}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad k = I, II \quad (3.24)$$

При $k = I$ уравнение (3.24) примет вид:

$$A_{11}^I \frac{d^2 W_n^{(I,1)}}{d\zeta^2} + \rho_I (\omega_{0n})^2 W_n^{(I,1)} = \left(A_{23}^I - \frac{1}{a_{55}^I} \right) \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n} (C_U^{(I,0)})_z \cos \left[\sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n} (\zeta - \zeta_1) \right] \quad (3.25)$$

а при $k = II$:

$$A_{11}^{II} \frac{d^2 W_n^{(II,1)}}{d\zeta^2} + \rho_{II} (\omega_{0n})^2 W_n^{(II,1)} = \left(A_{23}^{II} - \frac{1}{a_{55}^{II}} \right) \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n} (C_U^{(II,0)})_z \sin \left[\sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n} (\zeta + \zeta_2) \right] \quad (3.26)$$

Решениями (3.25) и (3.26) будут:

$$W_n^{(I,1)} = C_{W1}^I \cos \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_{0n} \zeta + C_{W2}^I \sin \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_{0n} \zeta + A_{11}^I \cos \left[\sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n} (\zeta - \zeta_1) \right] \quad (3.27)$$

$$W_n^{(II,1)} = C_{W1}^{II} \cos \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_{0n} \zeta + C_{W2}^{II} \sin \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_{0n} \zeta - A_{11}^{II} \sin \left[\sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n} (\zeta + \zeta_2) \right] \quad (3.28)$$

где:

$$A_{0n}^I = \frac{(a_{55}^I A_{23}^I - 1) (C_U^{(I,0)})_z}{(1 - a_{55}^I A_{11}^I) \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n}}, \quad A_{0n}^{II} = \frac{(1 - a_{55}^{II} A_{21}^{II}) (C_U^{(II,0)})_z}{(1 - a_{55}^{II} A_{11}^{II}) \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n}} \quad (3.29)$$

Подчина решения (3.27) соответствующим граничным и контактным условиям:

$$\begin{aligned} W_n^{(I,1)}(\zeta = -\zeta_2) &= 0 \\ \sigma_{33n}^{(I,1)}(\zeta = \zeta_1) &= 0 \Rightarrow \left(A_{11}^I \frac{\partial W_n^{(I,1)}}{\partial \zeta} - A_{23}^I \frac{\partial U_n^{(I,0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta = \zeta_1} = 0 \\ W_n^{(II,1)}(\zeta = 0) &= W_n^{(II,1)}(\zeta = 0), \quad \sigma_{33n}^{(I,1)}(\zeta = 0) = \sigma_{33n}^{(II,1)}(\zeta = 0) \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \left(A_{11}^I \frac{\partial W_n^{(I,1)}}{\partial \xi} - A_{23}^I \frac{\partial U_n^{(I,0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = \left(A_{11}^{II} \frac{\partial W_n^{(II,1)}}{\partial \xi} - A_{23}^{II} \frac{\partial U_n^{(II,0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0}$$

из (3.29) и (3.30) определим четыре неизвестных $C_n^{(A)}$.

Итак, мы определили $\omega_{n,2n}$ и $U_n^{(A,2)}$, которые отличны от нуля. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} (\omega_{n,2n})^2 = (\omega_{0n})^2 + \varepsilon^2 (\omega_{n,2n})^2 \\ U_n^{(A,1)} = U_n^{(A,0)} + \varepsilon^2 U_n^{(A,2)} \end{cases} \quad (3.31)$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи. Этот процесс можно продолжить для любого приближения, но вряд ли будет представлять практический интерес. Из полученных результатов следует, что начальное приближение даёт достаточно точные для практических приложений значения для частот и форм собственных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаляян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
2. Агаляян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Международный научн. журнал Прикл. механика. 2002. Т. 38, №7. С. 3-24.
3. Агаляян Л. А., Огансян Р. Ж. Собственные колебания ортогогральных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56, №4. С. 18-28.
4. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Изд-во Мир, 1976. 456с.
5. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
8.04.2005

УДК 539.3

ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ ПРИ
СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СЖИМАЮЩЕЙ И
РАСТЯГИВАЮЩЕЙ НАГРУЗОК

ՇԻԼ-ԱԿՈՅԱՆ Է. Օ.

Է. Օ. Շիլ-Ակոյան

Մալի տեղայնագրված անկախությունը լոկալիզացիայի և ճգնաժամների միտամոտենակ ազդեցության դեպքում:

Ինտերկոմ է կիսանվերջ սալի տեղայնագրված անկախությունը լոկալիզացիայի, երբ այն
հավասարաչափ սեղմված է կիսանվերջ եզրի ուղղությամբ, և ճգնաժամ է վերջագր եզրերի մոտ
Սարկուլյաժիտ I որ, ճգնաժամ լոկալիզացիայի ազդեցության գոյության պայմանի
վրա, այլ բերում է կոլեկտիվական շարժան մեծացմանը

E.O. Shil-Akopyan

The Located Instability of the Plate at the Share Operation of
Compressing and Stretching Loadings

The problem of the located instability of the semi-infinite plate strip, which uniformly compressed on the
semi-infinite sides and stretched on final crimps is investigated

It is established, that the stretching loading does not influence on a condition of the existence of located
instability, but results to increase of the critical loading

Исследуется задача локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы,
равномерно сжатой по полубесконечным сторонам и растянутой по конечным краям

Установлено, что растягивающая нагрузка не влияет на условие существования
локализованной неустойчивости, но приводит к увеличению критической нагрузки

1. В статье [1], по аналогии с задачей локализованных колебаний пластинки [2], приведена постановка и решение задачи локализованной неустойчивости сжатой пластинки. В дальнейшем различным вопросам исследования локализованной неустойчивости были посвящены статьи [3-8]. В настоящей работе локализованная неустойчивость рассматривается при совместном действии сжимающей и растягивающей нагрузок.

Пусть прямоугольная пластинка-полоса в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $[0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h]$. Пластинка сжата по направлению Oy равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью P_0 , а по оси Ox растянута равномерно распределенной нагрузкой Q .

Уравнение статической устойчивости тонких пластины на основе теории Кирхгофа [4] имеет вид:

$$D\Delta^2 w + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

где D – жесткость на изгиб пластинки, w – прогиб, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, Δ – двухмерный оператор Лапласа.

$$D = \frac{2Ek^3}{3(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

Принимаем, что кромки пластинки $y = 0, b$ шарнирно закреплены, т.е. граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

В этом случае решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), представляется в следующем виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi/b, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

На свободной от ограничений на перемещения кромке пластинки $x = 0$ приложена растягивающая нагрузка Q и, следовательно, граничные условия будут иметь вид:

$$M_x = 0, \quad N_x = Q \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.5)$$

С учетом выражений для изгибающего момента M_x и обобщенной перерезывающей силы N_x , граничные условия (1.5) записываются следующим образом [9]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6)$$

$$D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = Q \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } x = 0$$

Если существует ненулевое (нетривиальное) решение уравнения устойчивости пластинки (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3) и (1.6) и следующему условию затухания на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (1.7)$$

то принято считать, что имеет место локализованная неустойчивость пластинки [1].

Подстановка (1.4) в уравнения (1.1) приводит к решению последовательных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2(1 + \beta_n^2)f_n'' + \lambda_n^4(1 - \alpha_n^2)f_n = 0 \quad (1.8)$$

где

$$\alpha_n^2 = P_n/D\lambda_n^2, \quad \beta_n^2 = Q/2\lambda_n^2 D \quad (1.9)$$

С учетом (1.4) граничные условия (1.6) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_n'' - \nu\lambda_n^2 f_n &= 0 \\ f_n''' - \lambda_n^2(2 - \nu + 2\beta_n^2)f_n' &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Условие затухания записывается так:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (1.11)$$

Таким образом, необходимо найти нетривиальные решения уравнений (1.8), удовлетворяющих граничным условиям (1.10) и условию затухания (1.11).

2. Нетрудно показать, что общие решения уравнений (1.8), удовлетворяющих условиям затухания (1.11), имеют вид:

$$f_n(x) = A_n e^{-\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x} \quad (2.1)$$

где

$$p_{1,2} = \left[1 + \beta_n^2 \pm \sqrt{\beta_n^2 (2 + \beta_n^2) + \alpha_n^2} \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

Далее необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \alpha_n^2 < 1 \quad (2.3)$$

Данная формула представляет собой условие существования локализованного решения.

Требование, чтобы решения (2.1) удовлетворяли граничным условиям (1.10), приводит к решению следующей системы однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n и B_n

$$(p_1^2 - \nu)A_n + (p_2^2 - \nu)B_n = 0 \quad (2.4)$$

$$p_1(p_1^2 - 2 + \nu - 2\beta_n^2)A_n + p_2(p_2^2 - 2 + \nu - 2\beta_n^2)B_n = 0$$

Система уравнений (2.4) имеет нетривиальное решение, если детерминант системы равен нулю, т.е.

$$k(\alpha_n) = p_2(p_1^2 - \nu)(p_2^2 - 2 + \nu - 2\beta_n^2) - p_1(p_2^2 - \nu)(p_1^2 - 2 + \nu - 2\beta_n^2) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) после некоторых преобразований приводится к виду:

$$k(\alpha_n) = (p_2 - p_1)k_1(\alpha_n) = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{где} \quad k_1(\alpha_n) = p_1^2 p_2^2 + 2(1 - \nu + \beta_n^2)p_1 p_2 - \nu^2 \quad (2.7)$$

Очевидно, что $p_1 = p_2$, если $\alpha_n = \beta_n$ и в этом случае система (2.4) имеет только нулевое решение. Следовательно, задача приводится к нахождению параметра критической нагрузки α_n из следующего уравнения:

$$k_1(\alpha_n) = 0 \quad (2.8)$$

Локализованная неустойчивость имеет место, если уравнение (2.8) имеет корни, удовлетворяющие условиям (2.3). Легко проверить, что функция $k_1(\alpha_n)$ в промежутке (2.3) имеет следующие свойства:

$$k_1(0) = (1 - \nu)(3 + \nu) + 2\beta_n^2 > 0 \quad (2.9)$$

$$k_1(1) = -\nu^2 < 0$$

Отсюда следует, что если $\nu \neq 0$, то уравнение (2.8) всегда имеет корни, удовлетворяющие условиям (2.3).

3. Параметр критической нагрузки, согласно (2.8), определяется следующим образом:

$$\alpha_n^2 = 1 - \nu^2 - 2(1 - \nu + \beta_n^2)^2 + 2(1 - \nu + \beta_n^2)^2 \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{(1 - \nu + \beta_n^2)^2}} \quad (3.1)$$

Очевидно, что при $\beta \gg 1$ $\alpha_n \rightarrow 1$.

В табл. 1 и 2 приводятся значения α_n^2 при различных значениях параметра сжимающей нагрузки и при $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.5$. Необходимо отметить, что минимальная критическая нагрузка получается при $n = 1$.

Таблица 1

$\nu_1 = 0.3$					
β_n^2	0	0,1	0,5	1,0	4
α_n^2	0,996	0,997	0,999	0,999	1

Таблица 2

$\nu_2 = 0.5$					
β_n^2	0	0,1	0,5	1,0	4
α_n^2	0,957	0,967	0,986	0,993	0,999

Из приведенных таблиц следует, что с увеличением растягивающей нагрузки критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости пластинки, увеличивается.

Для сравнительного анализа требуется также рассмотреть другие типы граничных условий при $x = 0$.

Пусть на краю $x = 0$ заданы условия скользящего контакта:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (3.2)$$

или с учетом (1.4),

$$f_n^I = 0, \quad f_n^{III} = 0 \quad (3.3)$$

Подстановка решений (2.1) в граничные условия (3.3) приводит к системе однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} p_1 A_n + p_2 B_n &= 0 \\ p_1^3 A_n + p_2^3 B_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из равенства нулю детерминанта системы (3.4)

$$p_1 p_2 (p_2^2 - p_1^2) = 0 \quad (3.5)$$

следует, что уравнение (3.5) не имеет корней, удовлетворяющих условию (2.3). Отсюда следует, что при граничных условиях скользящего контакта локализованная неустойчивость невозможна. Очевидно, что локализованная неустойчивость пластины невозможна также при условиях шарнирного закрепления и жесткого закрепления кромки пластинки $x = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд-во Ереванского Госуниверситета. 1997. С. 95 – 99.
2. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа. // Акуст. журн. 1960. Т.6. №1. С. 124–126.
3. Белубекян В. М. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки. // В сб.: Проблемы механики твердых деформируемых тел. Ереван: Изд-во “Гитутюн”, 2002. С.61–66.
4. Belubekyan V.M. On the problem of local buckling of a plate near its free edge. “Shell Structures: Theory and Applications”. The 7-th Conference, Gdansk University of Technology, Poland. 2002, P.55–56.
5. Белубекян В. М. К задаче устойчивости пластинки с учетом поперечных сдвигов. //Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С. 126–131.
6. Чил-Аколян Э.О. Задача локализованной неустойчивости двух прямоугольных пластинок, соединенных шарниром. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 2002. С.219-222.
7. Belubekyan M. V. On a Problem of the Located Instability of Compound Plate. // Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №3. С. 185-188.
8. Белубекян М. В., Чил-Аколян Э.О. К задаче локализованной неустойчивости прямоугольной пластинки со свободным краем. // Изв. НАН Армении. Механика 2004. Т.57. №2. С. 34-39.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
2.02.2015

УДК 539.5

НЕОДНОРОДНЫЕ ЩЕЛЕВЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ДВУХ
УПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ СО СВЕРХПРОВОДЯЩИМИ
ПОКРЫТИЯМИ

Казарян Р.А.

Ռ.Ա. Կազարյան

Ռենդաման ճեղքային ալիքներ գերհաղորդիչ ծածկույթով երկու
առնձգական կլաստարածությունների համակարգում

Իրազրկված է ճեղքային անհամասեռ մակերևութային ալիքների տարածման խնդիրը երկու
առնձգական կլաստարածությունների համակարգում, որտեղ ուտանձնակված են ճեղքով
էլեկտրական հոսանք։ Ստացված են հարկ ղեկորմագիտյալի ղեկորմ մակերևութային ալիքների լուսալին
արագությունների նկատմամբ բնութագրիչ հսկայարմամբը։ Ազգացուցված է էլեկտրամագիսական
փոխազդեկուրյան հետևանքով երկու կազակված մագիսատուտանձգական մակերևութային ալիքների
գոյուրյան հնարավորությունը։

R.A. Ghazaryan

Non-homogeneous Slit Waves in a System of Two Elastic Half-Spaces with Superconducting Films

Non-homogeneous slit waves propagation problem is studied in a system of two elastic half-spaces divided by slit. Half-space surfaces are covered by superconducting current-carrying films with electrical current. In the case of plane deformation the dispersion equations are obtained for surface waves phase velocity. Due to electromagnetic interaction the possibility of two coupled surface waves existence is shown.

Рассматривается задача распространения неоднородных поверхностных щелевых волн в системе двух упругих полупространств, разделенных щелью. Поверхности полупространств покрыты тонким сверхпроводящим слоем, по которому течет электрический ток. В случае плоской деформации получены характеристические уравнения относительно фазовой скорости поверхностных волн. Показано, что вследствие электромагнитного взаимодействия возможно существование двух связанных магнитоупругих поверхностных волн.

Вопросы распространения щелевых волн в системе двух идеально проводящих полупространств, разделенных вакуумной щелью при наличии внешнего постоянного магнитного поля, изучены в работе [1]. Для системы пьезоэлектрических сред с щелью аналогичные исследования приводятся в [2]. Щелевые сдвиговые волны и вопросы туннелирования магнитоупругих волн в магнетриксционных средах исследованы в [3-5].

Здесь рассматривается задача распространения неоднородных поверхностных щелевых волн в системе двух полупространств, разделенных щелью толщиной $2d$. Поверхности полупространств покрыты тонким сверхпроводящим слоем, по которому течет электрический ток. Электромагнитные свойства среды в области щели отождествляются со свойствами вакуума. Полупространства являются упругими изотропными средами.

Выберем прямоугольную декартовую систему координат так, чтобы координатная плоскость (x_1, x_2) была расположена в середине щели. Ось x_3 направлена в сторону верхней среды, которую отметим индексом $(s = 1)$.

Нижнюю среду отметим индексом ($s = 2$). Начальное распределение электрического тока (вектор плотности \vec{j}) и магнитного поля (вектор \vec{H}) определяются на основе уравнений Лондонов [6].

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \frac{4\pi\lambda^2}{c} \operatorname{rot}(\vec{j} + \dot{\vec{H}}) = 0, \quad \oint \vec{j} ds = J_{01} \quad (1)$$

В (1) c – электродинамическая постоянная, λ – лондоновская глубина проникновения, J_{01} – заданная линейная плотность сверхтока.

Из симметрии задачи ясно, что H_{01} и j_{01} не зависят от переменных x_1 и x_2 , а также, что

$$H_{01} = H_{02} = 0, \quad j_{02} = j_{03} = 0$$

Учитывая это, получим следующие исходные уравнения для определения распределения тока и магнитного поля:

$$j_{01} = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_{02}}{dx_1}, \quad \frac{d^2 H_{02}}{dx_1^2} - \frac{1}{\lambda^2} H_{02} = 0 \quad (2)$$

$$H_{02}^{(s)} = C_1^{(s)} e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + C_2^{(s)} e^{\frac{x_1}{\lambda}}, \quad j_{01}^{(s)} = -\frac{c}{4\pi\lambda} \left(-C_1^{(s)} e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + C_2^{(s)} e^{\frac{x_1}{\lambda}} \right), \quad (s=1,2)$$

В области ($s = 1$) должно быть $C_2^{(1)} = 0$, а в области ($s = 2$) – $C_1^{(2)} = 0$.

Из условия полного линейного тока

$$\int_d^{-\infty} j_{01}^{(1)} dx_1 = J_{01}, \quad \int_{-\infty}^{-d} j_{01}^{(2)} dx_1 = J_{01} \quad (3)$$

определим неизвестные коэффициенты и, подставляя их в предыдущие равенства, получим следующие выражения, определяющие начальные распределения тока и магнитного поля:

$$H_{02}^{(1)} = \frac{4\pi}{c} J_{01} e^{-\frac{1}{\lambda}(d-x_1)}, \quad j_{01}^{(1)} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{d-x_1}{\lambda}}, \quad x_1 \geq d$$

$$H_{02}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} J_{01} e^{-\frac{1}{\lambda}(d-x_1)}, \quad j_{01}^{(2)} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{d-x_1}{\lambda}}, \quad x_1 \leq -d \quad (4)$$

В области щели имеем

$$H_{02} = \frac{4\pi J_{01}}{c} = \text{const} \quad (5)$$

Из (4, 5) следует, что как ток, так и магнитное поле, распределены в тонких приповерхностных слоях толщины $\lambda \ll d$ (эффект Мейснера–Оксенфельда [6]). Практически, для всех известных сверхпроводников $\lambda \sim 10^{-4}$ см и в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ имеем, что магнитное поле не проникает в упругие среды.

В дальнейшем примем, что $H_{02}^{(1)} = H_{02}^{(2)} = 0$. В силу отсутствия в упругих средах магнитного поля на поверхностях полупространств $x_1 = \pm d$

действует начальная магнитная нагрузка, обусловленная разрывом тензора Максвелла \vec{T} [3, 7],

$$\hat{T}_s = \frac{1}{4\pi} \left(H_{0s} H_{0s} - \frac{1}{2} \delta_{ss} \vec{H}_0 \vec{H}_0 \right), \quad \hat{T}_{12} = -\frac{1}{8\pi} H_0^2, \quad (s=1,2)$$

$$\sigma_{12}^{(0,1)} = \hat{T}_{12} \quad \text{при} \quad x_2 = \pm d \quad (6)$$

Считая напряженное состояние в упругих средах одномерным, получим

$$\sigma_{12}^{(0,1)} = -\frac{H_0^2}{8\pi}$$

Вопрос распространения упругих волн изучим с учетом начального напряжения $\sigma_{12}^{(0,1)}$. Рассмотрим случай плоской деформации, когда упругие перемещения не зависят от координаты x_1 . Будем исходить из следующих линеаризованных динамических уравнений и граничных условий теории упругости с учетом начального напряженного состояния $\sigma_{12}^{(0,1)}$ [3, 7]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x_j} \right) = \rho_i U_i^{(1)} \quad (7)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} \cdot n_j^{(0)} + \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x_j} n_j^{(0)} = (T_{ij} - T_{ij}^{(1)}) n_j^{(0)} \quad (8)$$

$$s=1, 2; \quad U_1^{(1)} = 0, \quad U_2^{(1)} = U_2^{(1)}(x_2, x_1), \quad U_3^{(1)} = U_3^{(1)}(x_2, x_1)$$

В (7, 8) $\sigma_{ij}^{(0,1)}$ есть компоненты тензора упругих напряжений, $U_i^{(1)}$ - упругие перемещения, ρ_i - плотность материалов сред, $n_j^{(0)}$ - вектор внешней нормали к недеформированным поверхностям сред, T_{ij} - тензор Максвелла в области щели, $T_{ij}^{(1)}$ - тензор Максвелла в упругих средах. В силу того, что в упругой среде $H_0^{(1)} = 0$, имеем $T_{ij}^{(1)} = 0$.

Тензор Максвелла выражается через компоненты векторов магнитных полей возмущенного состояния \vec{h} и начального состояния \vec{H}_0 следующим образом [3, 7]:

$$T_{11} = \frac{1}{4\pi} (H_{01} h_1 + H_{02} h_2 - \delta_{11} H_{01} \cdot h_1)$$

$$T_{12} = -\frac{1}{4\pi} H_{02} h_2, \quad T_{13} = \frac{1}{4\pi} H_{02} h_3 \quad (9)$$

Примем, что в области щели $|x_1| \leq d$ вектор возмущенного магнитного поля удовлетворяет стационарным уравнениям Максвелла [7]

$$\text{rot } \vec{h} = 0, \quad \text{div } \vec{h} = 0 \quad (10)$$

На поверхностях $x_1 = \pm d$ имеем следующие граничные условия непроникновения магнитного поля в толщу сверхпроводника [7]:

$$(\hat{H}_0 + \hat{h}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (11)$$

где \hat{n} — вектор нормали к возмущенной поверхности

$$\hat{n} = \text{grad}(U_1 - x_2) = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \hat{x}_2 - \hat{x}_1$$

Напишем (11) в более подробном виде

$$(H_{01} \hat{x}_2 + h_1 \hat{x}_2 + h_2 \hat{x}_1) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \hat{x}_2 - \hat{x}_1 \right) = 0 \quad (12)$$

$$H_{02} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + h_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - h_1 = 0$$

Пренебрегая членом $h_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$, как малым более высокого порядка.

получим линеаризованное граничное условие при $x_2 = \pm d$

$$h_1 = H_{02} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad (13)$$

Уравнения и граничные условия (7, 8, 10, 13) вместе с законом Гука

$$\sigma_{ij}^{(s)} = 2\mu^{(s)} \varepsilon_{ij} + \lambda^{(s)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i^{(s)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(s)}}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 2, 3; s = 1, 2) \quad (14)$$

где $\mu^{(s)}$ и $\lambda^{(s)}$ — постоянные Ламе, полностью определяют поставленную задачу.

Приступим к решению задачи. Представим перемещения U^i и вектор \hat{h} в виде плоской неоднородной монохроматической волны

$$U^{(s)} = U_0^{(s)}(x_2) \cdot \exp i(kx_2 - \omega t); \quad \hat{h} = \hat{h}_0^{(s)}(x_2) \cdot \exp i(kx_2 - \omega t) \quad (15)$$

Имеем следующие решения для компонент вектора возмущенного магнитного поля \hat{h} :

$$h_1 = 0 \quad (16)$$

$$h_2 = \frac{ikH_{02}}{2} \left(\frac{\text{sh} kx_2}{\text{sh} kd} (U_{03}(d) - U_{03}(-d)) + \frac{\text{ch} kx_2}{\text{ch} kd} (U_{01}(d) + U_{01}(-d)) \right) \exp i(kx_2 - \omega t)$$

$$h_3 = -\frac{kH_{02}}{2} \left(\frac{\text{ch} kx_2}{\text{sh} kd} (U_{03}(d) - U_{03}(-d)) + \frac{\text{sh} kx_2}{\text{ch} kd} (U_{01}(d) + U_{01}(-d)) \right) \exp i(kx_2 - \omega t)$$

При $x_2 = \pm d$ для компонент тензора Максвелла имеем

$$T_{11}(d) = \frac{kH_{02}^2}{8\pi} \left[(U_{03}(d) - U_{03}(-d)) \text{cth} kd + (U_{01}(d) + U_{01}(-d)) \text{th} kd \right] \exp i(kx_2 - \omega t)$$

$$T_{33}(-d) = \frac{kH_{02}^2}{8\pi} \left[(U_{03}(d) - U_{03}(-d)) \text{cth} kd - (U_{01}(d) + U_{01}(-d)) \text{th} kd \right] \exp i(kx_2 - \omega t)$$

$$T_{32}(d) = \frac{ikH_{02}^2}{4} U_{03}(d) \exp i(kx_2 - \omega t) \quad (17)$$

$$T_{32}(-d) = \frac{ikH_{02}^2}{4} U_{03}(-d) \exp i(kx_1 - \omega t)$$

В дальнейшем удобно выразить вектор \vec{U} через скалярные потенциалы [7]

$$\vec{U}^{(i)} = \text{grad } \Phi^{(i)} + \text{rot} (\psi^{(i)} \vec{x}_1) \quad (18)$$

Для определения скалярных потенциалов получаются волновые уравнения

$$\left(2\lambda^{(i)} + \mu^{(i)} - \frac{H_{02}^2}{8\pi} \right) \Delta \Phi^{(i)} = \rho_{(i)} \ddot{\Phi}^{(i)}; \quad \left(\mu^{(i)} - \frac{H_{02}^2}{8\pi} \right) \Delta \psi^{(i)} = \rho_{(i)} \ddot{\psi}^{(i)} \quad (19)$$

Как известно, в сверхпроводниках значения магнитных полей ограничены определенными пределами, зависящими от материалов сверхпроводника. Здесь мы примем

$$\frac{3H_{02}^2}{8\pi} \ll \mu, \quad H_{02}^2 \ll \frac{4\pi E}{3(1+\nu)} \quad (20)$$

В силу принятого ограничения, в (19) не будем учитывать соответствующие слагаемые. Решение уравнений (19) будем искать в виде

$$\Phi^{(i)} = \Phi_0^{(i)}(x_1) \exp i(kx_1 - \omega t); \quad \psi^{(i)} = i\Psi_0^{(i)}(x_1) \exp i(kx_1 - \omega t) \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi_0^{(i)}}{dx_1^2} - k^2 v_{\alpha}^2 \Phi_0^{(i)} = 0; \quad \frac{d^2 \Psi_0^{(i)}}{dx_1^2} - k^2 v_{\beta}^2 \Psi_0^{(i)} = 0 \quad (22)$$

где $v_{\alpha}^2 = 1 - \frac{a^2}{a_{\alpha}^2}; \quad v_{\beta}^2 = 1 - \frac{a^2}{a_{\beta}^2}; \quad a = \frac{\omega}{k}$

Из общих решений уравнений (22) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуды при $x_1 \rightarrow \pm \infty$. Точнее,

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)}(x_1) &= A_1 \exp(-kv_{\alpha 1} x_1); & \Psi_0^{(1)}(x_1) &= B_1 \exp(-kv_{\beta 1} x_1) \\ \Phi_0^{(2)}(x_1) &= A_2 \exp(kv_{\alpha 2} x_1); & \Psi_0^{(2)}(x_1) &= B_2 \exp(kv_{\beta 2} x_1) \end{aligned} \quad (23)$$

где A_i, B_i ($i = 1, 2$) — произвольные постоянные, подлежащие определению.

Удовлетворяя граничным условиям (8) с учетом (17,18), получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно постоянных A_i, B_i . Приравняв к нулю определитель этой системы, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(R_1 - \tilde{\beta}_1 \text{th } kd)(R_2 - \tilde{\beta}_2 \text{cth } kd) + (R_1 - \tilde{\beta}_1 \text{cth } kd)(R_2 - \tilde{\beta}_2 \text{th } kd) = 0 \quad (24)$$

Здесь приняты обозначения

$$\beta_1 = \frac{H_{02}^2}{4\pi\rho_1 a_{\alpha 1}^2}, \quad \beta_2 = \frac{H_{02}^2}{4\pi\rho_2 a_{\alpha 2}^2}, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 v_{\alpha 1} (1 - v_{\alpha 1}^2), \quad \tilde{\beta}_2 = \beta_2 v_{\alpha 2} (1 - v_{\alpha 2}^2)$$

$$R_1 = (1 + v_{\alpha 1}^2)^2 - 4v_{\alpha 1} v_{\alpha 2}, \quad R_2 = (1 + v_{\alpha 2}^2)^2 - 4v_{\alpha 1} v_{\alpha 2}$$

При $H_{10} = 0$ уравнение (23) разделится на два отдельных уравнения $R_1 = 0$ и $R_2 = 0$, совпадающими с уравнением для поверхностных волн Рэлея.

При $kd \gg 1$ также имеем два отдельных уравнения.

$$(R_1 - \beta_1)(R_2 - \beta_2) = 0 \quad (25)$$

Последнее уравнение также разделится на два отдельных уравнения, определяющие поверхностные волны в средах

$$R_1 - \beta_1 = 0; \quad R_2 - \beta_2 = 0.$$

Так как принято ограничение, что $\beta_1 \ll 1$, то в этом случае, как показывает анализ, влияние малого магнитного поля несущественно.

В случае тонкой трещины, когда $kd < 1$, влияние малого магнитного поля может быть существенным.

Подробно исследуем случай, когда материалы сред идентичны. В этом случае имеем, что $R_1 = R_2 = R$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

Из (24) получим следующее уравнение:

$$(R - \beta \tanh kd)(R - \beta \coth kd) = 0$$

или $F_1(z) \cdot F_2(z) = 0$,

$$\text{где } F_m(z) = \left(2 - \frac{z^2}{a_1^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_1^2}}\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_2^2}} - \alpha_m \sqrt{1 - \frac{z^2}{a_2^2}} \frac{z^2}{a_1^2}, \quad m = 1, 2 \quad (26)$$

$$\alpha_1 = \beta_0 \tanh kd, \quad \alpha_2 = \beta_0 \coth kd, \quad \beta_0 = \frac{H_0^2}{4\pi r a_1^2}, \quad z = \frac{\omega}{k}$$

Установим необходимое и достаточное условие существования поверхностной волны. Исследование проведем для уравнения $F_m(z) = 0$ ($m = 1, 2$) на основе метода, развитого в работе [8].

Функция $F_m(z)$ в комплексной плоскости представляет собой многозначную функцию переменной z . С целью униформизации построим соответствующую поверхность Римана. Для этого проведем купюры между точками разветвления $\pm a_1$, $\pm a_2$. Разрезы проведем между точками $+a_1$ и $-a_1$, а точки $\pm a_2$ соединим по действительной оси через бесконечно удаленную точку. Исследование проведем на первом листе Римана, на котором выражения радикалов $\sqrt{1 - z^2/a_1^2}$ и $\sqrt{1 - z^2/a_2^2}$ при $z = 0$ положительны.

Проведем полуокружность в нижней полуплоскости достаточно большого радиуса. Эта полуокружность с вещественной осью определяет замкнутую область, изучение которой является достаточным, так как в этой области на первом листе Римана имеем

$$\text{Im}(\omega) < 0, \quad \text{Re}\left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_1^2}}\right) > 0, \quad \text{Re}\left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_2^2}}\right) > 0$$

Разлагая функцию $F_n(z)$ по степеням z , для малых вещественных значений z имеем

$$F_n(z) \approx -2z^2 \left(\frac{1 + \alpha_m/2}{a_i^2} - \frac{1}{a_i^2} \right) < 0$$

Будем двигаться вдоль вещественной оси справа налево и следить за изменением аргумента функции $F_n(z)$.

При $z > a_i$ $F_n(z) = P_1(z) + iQ_1(z)$,

где $P_1(z) = \left(2 - \frac{z^2}{a_i^2} \right)^2 + 4 \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1}$, $Q_1(z) = -\alpha_m \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1} \cdot \frac{z^2}{a_i^2}$

Так как $P_1(z) > 0$, а $Q_1(z) < 0$, то в этом интервале $-\frac{\pi}{2} < \arg F_n(z) < 0$ при $z \rightarrow \infty$ вдоль действительной оси $\arg F_n(z) \rightarrow 0$.

Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \arg F_n(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctg \frac{Q_1(z)}{P_1(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-\alpha_m \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1} \cdot \frac{z^2}{a_i^2}}{\left(2 - \frac{z^2}{a_i^2} \right)^2 + 4 \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1}} = 0$$

В интервале (a_i, a_i) имеем $F_n(z) = P_2(z) + iQ_2(z)$, где

$$Q_2(z) = -4 \sqrt{\frac{z^2}{a_i^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{z^2}{a_i^2}}, \quad P_2(z) = \left(2 - \frac{z^2}{a_i^2} \right)^2 - \alpha_m \sqrt{1 - \frac{z^2}{a_i^2}} \cdot \frac{z^2}{a_i^2}$$

В этом интервале имеем $-\pi < \arg F_n(z) < 0$, так как $Q_2(z) < 0$.

В интервале $(0, a_i)$ функция $F_n(z)$ действительна и имеет вид (26).
Допустим, что

$$F_n(a_i) = 1 - \alpha_m \sqrt{1 - a_i^2/a_i^2} > 0 \quad (27)$$

Так как в окрестности точки $z = 0$ $F_n(z) < 0$, то в этом интервале действительный корень обязательно существует. Пусть этот корень единственный. Тогда приращение аргумента в интервале $(0, a_i)$ будет равняться $-\pi$. При обходе точки $z = 0$ оно изменится на -2π , так как функция $F_n(z)$ в точке $z = 0$ имеет порядок z^2 .

В интервале $(-\infty, 0)$ в силу симметрии приращение аргумента равняется $-\pi$. При $z \rightarrow \infty$ $F_n(z)$ имеет порядок z^2 и, следовательно, при обходе по нижней полуокружности аргумент $F_n(z)$ принимает приращение $+4\pi$. Окончательно, полное приращение аргумента по замкнутому контуру равно $-\pi - 2\pi - \pi + 4\pi = 0$.

Так как функция $F_m(z)$ не имеет полюсов, то это означает, что в нижней полуплоскости функция $F_m(z)$ не имеет корней.

Если допустим, что в интервале $(0, a_1)$ функция имеет больше одного корня, то число корней должно быть нечетным. Пусть $F_m(z)$ имеет в интервале $(0, a_1)$ $(2p+1)$ корней. Тогда, повторяя все предыдущие рассуждения, для полного приращения аргумента функции $F_m(z)$ получим $-(2p+1)\pi - 2\pi - (2p+1)\pi + 4\pi < 0$.

Это противоречит тому, что функция $F_m(z)$ не имеет полюсов.

Таким образом, доказано, что при условии (27) в интервале $(0, a_1)$ существует только один действительный корень, а в нижней полуплоскости $F_m(z)$ корней не имеет.

Рассмотрим случай

$$F_m(a_1) = 1 - \alpha_m \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{a_1^2}} < 0$$

Тогда приращение аргумента в интервале (a_1, ∞) равняется $-\pi$. В интервале $(0, a_1)$ или вовсе нет корней, или их — четное число. Пусть в интервале $(0, a_1)$ функция $F_m(z)$ не имеет корней. Тогда полное приращение аргумента функции $F_m(z)$ при обходе по замкнутому контуру будет равняться $-\pi - 2\pi - \pi + 4\pi = 0$, то есть в нижней полуплоскости тоже нет корней.

Пусть число корней $2n$. Тогда полное приращение аргумента будет

$$-\pi - 2n\pi - 2\pi - 2n\pi - \pi + 4\pi = -4n\pi < 0$$

Это невозможно, так как $F_m(z)$ не имеет полюсов.

Таким образом, условие $F_m(a_1) > 0$ представляет собой необходимое и достаточное условие существования единственного действительного корня в интервале $(0, a_1)$.

Уравнение (26) имеет два корня, если $F_1(a_1) > 0$, $F_2(a_1) > 0$, то есть, если

$$\begin{cases} 1 - \beta_0 \operatorname{th} \left[kd \sqrt{1 - a_1^2 / a_1^2} \right] > 0 \\ 1 - \beta_0 \operatorname{cth} \left[kd \sqrt{1 - a_1^2 / a_1^2} \right] > 0 \end{cases} \quad (28)$$

Так как $\beta_0 \ll 1$, то первое условие (48) всегда выполняется и, следовательно, уравнение (26) всегда имеет один корень. В случае тонкой щели $kd < 1$ в зависимости от значений интенсивности магнитного поля (тока) возможно существование и второй поверхностной волны. При $kd \gg 1$ первое и второе уравнения системы (28) практически совпадают и в этом

случае мы имеем поверхностную волну, скорость которой совпадает со скоростью волны Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1984. С. 70-74.
2. Балакирев М.К., Гилнзский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
3. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999, 440с.
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Саноян Л.А. Туннелирование сдвиговых волн через зазор между двумя магнитоупругими полупространствами // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1989. Т.42. №4. С.30-36.
5. Саноян Л.А. Щелевые волны в магнитоупругих средах. //Уч. записки ЕГУ.1989.С.33-41.
6. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982. 238с.
7. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
8. Гоголадзе В.Г. Отражения и преломления упругих волн; общая теория граничных волн Рэлея. //Тр. Сейсмологического института АН СССР. 1947. № 125. С. 1-42.

Ереванский государственный
колледж информатики

Поступила в редакцию
3.10.2005

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ С ПОСТОЯННОЙ
СКОРОСТЬЮ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ
Меакумян А. С.

Ա. Ս. Մեաքումյան

Պիեզոէլեկտրական միջավայրում կիսանվերջ ճարի դինամիկական
ցրացածուժը հաստատուն արագությամբ

Չվազիվալիարրուական ստուգորոյրամբ ուսումնասիրված է սիւեզոէլեկտրական միջավայրում կիսանվերջ ճարի հաստատուն արագությամբ դինամիկական տարածման խօշորր Վիւնըր-Հոփփի մեթոտի կիրառմամբ խնդիրը լուծված է փակ ճեղով: Մուտմնասիրված են թարոսները և կեկտրական գալստի ինդուկտիոյի ինտենսիտոյրան գործակիւղները կարվածոյրոյնները ճարի տարածման արագորթոնեղ և կեկտրամեխանիկական կոպի գործակիւղ: Ազազուված է, որ երբ ճարի տարածման արագորթոնը ծգտում է Բլոյստեյն-Գուլեուի մակերևոյրալին ալիքի տարածման արագորթոնը, թարոսների ինտենսիտոյրան գործակիւղը ծգտում է գրոտի Յուլզ է սրված նաև կեկտրամեխանիկական կոպի գործակի կարերը աղբեղոյրներ մեխանիկական ենեղիւն կեկտրականի փոխակերտոս փոս Թերվոս են թվալին ուսումնասիրոյրոյններ:

A. S. Meakumyan

Dynamic propagation of a semi-infinite crack with constant
speed in piezoelectric medium

In quasi-hyperbolic approximation the problem of dynamic propagation of a semi-infinite crack with constant speed in piezoelectric medium is investigated. Adopting the Wiener-Hopf method the problem is solved in closed form. Dependences of the dynamic stress intensity factor and the dynamic electric displacement intensity factor on crack propagation speed and on electromechanical coupling coefficient are investigated. It is proved that when the crack propagation speed tends to the Bleustein-Gulyaev surface wave speed, the dynamic stress intensity factor tends to zero. The important impact of the electromechanical coupling coefficient on the transformation of mechanical energy to electrical one is also shown. Numerical analysis is presented.

В квазигиперболическом приближении исследована задача динамического распространения полубесконечной трещины с постоянной скоростью в пьезоэлектрическом пространстве. Применением метода Винера-Хопфа задача решена в замкнутой форме. Изучены зависимости коэффициентов интенсивности напряжения и электрической индукции от скорости распространения трещины и от коэффициента электромеханической связи. Доказано, что когда скорость распространения трещины стремится к скорости распространения поверхностной волны Блестейна-Гулева, коэффициент интенсивности напряжения стремится к нулю. Показано также важное влияние коэффициента электромеханической связи на преобразование механической энергии в электрическую. Приведены численные исследования.

1. Задачи динамического распространения трещин представляют особый интерес. Плоские и антиплоские задачи о распространении трещин в разных структурах, в том числе при наличии внешних полей, анизотропии и неоднородности, были рассмотрены в работах [1]-[6]. В данной работе рассматривается задача динамического распространения полубесконечной трещины в пьезоэлектрическом пространстве с постоянной скоростью в квазигиперболическом приближении.

Рассмотрим пьезоэлектрическое пространство класса бпм гексагональной симметрии с осью симметрии кристалла OZ в декартовой

системе координат $OXYZ$. В пьезоэлектрическом пространстве имеется полубесконечная трещина, расположенная в полуплоскости $y = 0, x < 0, -\infty < z < \infty$, которая в момент времени $t = 0$ начинает распространяться с постоянной скоростью v . Причиной для начала распространения трещины могут служить как волны дифрагируемые вершиной трещины, так и разные статические силовые воздействия.

Скорость распространения трещины будем считать меньшим скорости распространения поверхностной волны Блюштейна-Гуляева.

Воспользуемся квазигиперболическим приближением для антиплоской задачи пьезоэлектрического материала класса $6mm$, при котором имеем представления [7]

$$\vec{u} = (0, 0, w(x, y, t)) \quad (1)$$

$$\vec{E} = \left(-\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y}, 0 \right) \quad (2)$$

следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c_x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

а также соотношения:

$$\sigma_{xx} = \bar{c}_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} = \bar{c}_{11} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{13} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$D_x = e_{31} (1 - C_x) \frac{\partial w}{\partial x} - \epsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

$$D_y = e_{31} (1 - C_x) \frac{\partial w}{\partial y} - \epsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (8)$$

где

$c_x = \lambda^{-1} = 1/\sqrt{\epsilon_{11} \mu_0}$ - скорость распространения акустической волны,

$c_y = s_1^{-1} = \sqrt{\epsilon_{33}/\rho}$ - скорость распространения электрической волны,

$k_x = e_{31} \sqrt{C_x / (\epsilon_{11} \bar{c}_{11})}$ - коэффициент электромеханической связи при квазигиперболическом приближении.

далее

$$C_x = c_x^2 / (c_x^2 - c_y^2), \quad \bar{c}_{11} = c_{11} + (e_{13}^2 / \epsilon_{11}), \quad \bar{c}_{33} = c_{33} \left[1 - (1 - C_x) e_{13}^2 / (c_{11} \epsilon_{11}) \right]$$

и введена функция

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) - e_{13} C_x / \bar{c}_{11} w(x, y, t) \quad (9)$$

которая распространяет известное обозначение Блюштейна на случай квазигиперболического приближения

Исходя из линейности задачи и считая, что соответствующая задача для нераспространяющейся трещины уже решена, имеем, что достаточно решить задачу динамического распространения трещины, на берегах которой в каждый момент времени $t > 0$ на открывшийся участок трещины $y = 0$, $x \in [0, l]$ действуют заданные напряжения $\Lambda(x)$, как показано на фиг. 1.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (3)-(4) со следующими граничными условиями:

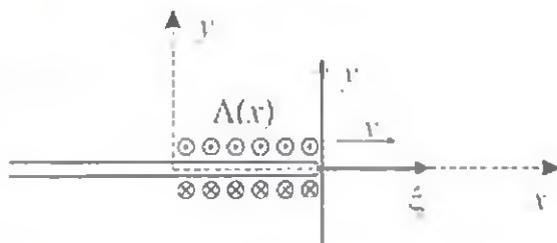
$$\sigma_{xz}(x, +0, t) = \sigma_{xz}(x, -0, t) = -\Lambda(x)H(x)H(l-x) \text{ при } x < l \quad (10)$$

$$w(x, +0, t) - w(x, -0, t) = 0 \text{ при } x > l \quad (11)$$

$$D_y(x, +0, t) = D_y(x, -0, t) \quad (12)$$

$$\varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) \quad (13)$$

где $H(t)$ — известная функция Хевисайда.



Фиг. 1

С целью работать с функциями, которые равны нулю в положительной или отрицательной полуосях (для того, чтобы в дальнейшем был применим метод Винера-Хопфа), в (3)-(13) сделаем замену переменной по закону

$$\xi = x - vt \quad (14)$$

в результате чего система уравнений (3)-(14) преобразуется к виду

$$b_1^2(v) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2vx^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

$$b_1^2(v) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2vx^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial t} - x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

где введены функции

$$u(\xi, y, t) \equiv w(\xi + vt, y, t) = w(x, y, t) \quad (17)$$

$$\phi(\xi, y, t) \equiv \varphi(\xi + vt, y, t) = \varphi(x, y, t) \quad (18)$$

$$b_1(v) = \sqrt{1 - v^2 s_1^2} \quad (19)$$

$$b_2(v) = \sqrt{1 - v^2 s_2^2} \quad (20)$$

Производя замену переменной по закону (14) в соотношениях (5)-(9) и в условиях контакта (10)-(13), после чего производя одностороннее преобразование Лапласа по времени и двухстороннее преобразование Лапласа по координате x согласно формулам

$$f^*(\xi, p) = \int_0^{\infty} f(\xi, t) e^{-pt} dt \quad (21)$$

$$f(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f^*(\xi, p) e^{pt} dp \quad (22)$$

$$\hat{f}^*(\zeta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, p) e^{i\zeta x} dx \quad (23)$$

$$f^*(\xi, p) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \hat{f}^*(\zeta, p) e^{i\zeta \xi} d\zeta \quad (24)$$

после некоторых упрощений будем иметь следующую систему преобразованных уравнений:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}^*}{\partial y^2} - p^2 [s_1^2 - 2vs_1^2 \zeta - b_1^2(v) \zeta^2] \hat{u}^* = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}^*}{\partial y^2} - p^2 [s_2^2 - 2vs_2^2 \zeta - b_2^2(v) \zeta^2] \hat{\phi}^* = 0 \quad (26)$$

со следующими условиями контакта на плоскости $y = 0$:

$$\hat{e}_{11} \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{13} \frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv} \frac{1}{\zeta - v^{-1}} + \hat{\sigma}^*(\zeta, p) \quad (27)$$

$$\hat{u}^*(\zeta, +0, p) - \hat{u}^*(\zeta, -0, p) = \hat{u}^*(\zeta, p) \quad (28)$$

$$\hat{\phi}^*(\zeta, +0, p) - \hat{\phi}^*(\zeta, -0, p) = -\frac{e_{13}}{e_{33}} \epsilon^* \hat{u}^*(\zeta, p) \quad (29)$$

$$\frac{\partial \hat{u}^*}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (31)$$

где введена функция

$$\tilde{\Lambda}(z) = \int_0^{\infty} \Lambda(u) e^{-zu} du \quad (32)$$

являющаяся преобразованием Лапласа функции $\Lambda(\lambda)$, представляющая напряжения, действующие на берегах распространяющейся трещины.

Решая уравнения (25)–(26), удовлетворяя условиям уходящей волны и пользуясь симметрией задачи, получаем

$$\hat{u}^*(\zeta, y, p) = \operatorname{sgn}(y) A(\zeta) e^{-a(\zeta)|y|} \quad (33)$$

$$\hat{\phi}^*(\zeta, y, p) = \operatorname{sgn}(y) B(\zeta) e^{-e(\zeta)|y|} \quad (34)$$

где введены следующие функции:

$$a(\zeta) = \sqrt{s_1^2 - 2vs_1^2 \zeta - b_1^2(v) \zeta^2} \quad (35)$$

$$e(\zeta) = \sqrt{s_2^2 - 2vs_2^2 \zeta - b_2^2(v) \zeta^2} \quad (36)$$

Однозначная ветвь функции $a(\zeta)$ определяется разрезами $\text{Im} \zeta = 0$, $\text{Re} \zeta \geq \frac{1}{c_1 + v}$ и $\text{Im} \zeta = 0$, $\text{Re} \zeta \leq -\frac{1}{c_1 - v}$ и значением $a(0) = s_1$.

Аналогично, однозначная ветвь функции $e(\zeta)$ определяется разрезами $\text{Im} \zeta = 0$, $\text{Re} \zeta \geq \frac{1}{c_1 + v}$ и $\text{Im} \zeta = 0$, $\text{Re} \zeta \leq -\frac{1}{c_1 - v}$ и значением $e(0) = s_1$ (фиг. 2). При данных определениях выполняются условия

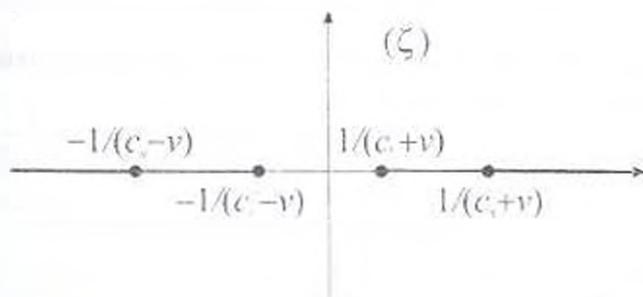
$$\text{Re}[a(\zeta)] \geq 0 \quad (37)$$

$$\text{Re}[e(\zeta)] \geq 0 \quad (38)$$

Из (35) и (36) также следует, что

$$a(-\zeta) = a\left(\zeta - \frac{2v}{c_1^2 - v^2}\right) \neq a(\zeta) \quad (39)$$

$$e(-\zeta) = e\left(\zeta - \frac{2v}{c_1^2 - v^2}\right) \neq e(\zeta) \quad (40)$$



Фиг. 2. Точки ветвления и разрезы в комплексной плоскости ζ .

Подставляя выражения (33), (34) в преобразованные граничные условия (27)-(31), получаем выражения

$$A(\zeta) = \frac{\tilde{u}^*(\zeta, p)}{2} \quad (41)$$

$$B(\zeta) = -\frac{\epsilon_{11} c_1}{\epsilon_{11}} \frac{\tilde{u}^*(\zeta, p)}{2} \quad (42)$$

а также следующее уравнение Винера-Хопфа [8]

$$-\tilde{c}_{44} [1 - k_c^2 b_1 b_1^{-1}] K(\zeta) a(\zeta) \frac{\tilde{u}^*(\zeta, p)}{2} p = \frac{\tilde{\lambda}(p/v)}{p v} \frac{1}{\zeta - v^{-1}} \tilde{\sigma}_1^*(\zeta, p) \quad (43)$$

где обозначено

$$K(\zeta) = \frac{1}{1 - k_1^2 h_1 b_1^{-1}} \frac{a(\zeta) - k_1^2 c(\zeta)}{u(\zeta)} \quad (44)$$

Для того, чтобы с помощью интегралов типа Коши факторизовать функцию (44), перейдем от функции $K(\zeta)$ к новой функции $I(\zeta)$ согласно следующему равенству:

$$K(\zeta) = \left[\frac{(c_{\infty} + v)^{-1} - \zeta}{(c_1 + v)^{-1} - \zeta} \right] \left[\frac{(c_{\infty} - v)^{-1} + \zeta}{(c_1 - v)^{-1} + \zeta} \right] I(\zeta) \quad (45)$$

где

$$c_{\infty} = \sqrt{\frac{1 - k^2}{s_1^2 - k_1^2 s_1^2}} < c_1 \quad (46)$$

представляет собой скорость распространения поверхностной волны Покостейна-Гуляева в квазигиперболическом приближении.

Важно отметить, что новая функция $I(\zeta)$ в отличие от функции $K(\zeta)$ в комплексной плоскости ζ разрезы $\text{Im} \zeta = 0$, $\text{Re} \zeta \in \left[-\frac{1}{c_1 - v}, \frac{1}{c_1 - v} \right]$ и $\text{Im} \zeta = 0$, $\text{Re} \zeta \in \left[\frac{1}{c_1 + v}, \frac{1}{c_1 + v} \right]$ нулей не имеет.

С помощью интегралов типа Коши [9] факторизуя функцию $I(\zeta)$, которая согласно (44) и (45) имеет вид

$$I(\zeta) = \frac{1 - k_1^2 h_1 b_1^{-1} a(\zeta)}{u(\zeta) + k_1^2 a(\zeta)} \quad (47)$$

получаем следующие выражения для $I_+(\zeta)$ и $I_-(\zeta)$:

$$I_+(\zeta; v) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{c_1 - v}}^{\frac{1}{c_1 + v}} \arctan \left[k \frac{b(v) \sqrt{\sigma - (c - v)} \sqrt{\sigma - (c + v)}}{b(v) \sqrt{(c - v)^2 - \sigma} \sqrt{(c + v)^2 + \sigma}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma + \zeta} \right\} \quad (48)$$

$$I_-(\zeta; v) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{c_1 + v}}^{\frac{1}{c_1 - v}} \arctan \left[k \frac{b(v) \sqrt{\sigma + (c - v)} \sqrt{\sigma - (c + v)}}{b(v) \sqrt{(c - v)^2 + \sigma} \sqrt{(c + v)^2 - \sigma}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \right\} \quad (49)$$

где скорость распространения трещины v является параметром.

Из равенств (45), (48) и (49) получаем следующую факторизацию функции $K(\zeta)$:

$$K(\zeta) = K_+(\zeta) K_-(\zeta) \quad (50)$$

где

$$K_+(\zeta) = \frac{(c_{\infty} - v)^{-1} + \zeta}{(c_1 - v)^{-1} + \zeta} I_+(\zeta) \quad (51)$$

$$K_-(\zeta) = \frac{(c_{\text{огр}} + v)^{-1} - \zeta}{(c_s + v)^{-1} - \zeta} I_-(\zeta) \quad (52)$$

Производя замену переменных интегрирования в выражениях (48) и (49) по формулам

$$\sigma = \frac{\eta}{1 - v\eta} \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{\eta}{1 + v\eta} \quad (53)$$

соответственно, после некоторых преобразований получаем следующие более простые выражения для $I_+(\zeta; v)$ и $I_-(\zeta; v)$:

$$I_+(\zeta; v) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\eta} \arctan \left[k_v^2 \frac{\sqrt{\eta^2 - s_c^2}}{\sqrt{s_c^2 - \eta^2}} \right] \frac{1}{1 - v\eta} \frac{d\eta}{(1 - \zeta v)\eta + \zeta} \right] \quad (54)$$

$$I_-(\zeta; v) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\eta} \arctan \left[k_c^2 \frac{\sqrt{\eta^2 - s_c^2}}{\sqrt{s_c^2 - \eta^2}} \right] \frac{1}{1 + v\eta} \frac{d\eta}{(1 - \zeta v)\eta - \zeta} \right] \quad (55)$$

Подставляя результат факторизации (50), (51)-(52), (54)-(55) в уравнение Винера-Хопфа (43) и устрояя простой полюс в правой части уравнения, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & -\tilde{e}_{\text{огр}}[b, -k^2 b] K_-(\zeta) a(\zeta) \frac{\tilde{u}^+(\zeta, p)}{2} p - \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv} \frac{1}{(\zeta - v^{-1})} \frac{1}{K_-(v^{-1}) a(v^{-1})} = \\ & = \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{pv} \frac{1}{(\zeta - v^{-1})} \left(\frac{1}{K_+(\zeta) a(\zeta)} - \frac{1}{K_-(v^{-1}) a(v^{-1})} \right) + \frac{\tilde{\sigma}^+(\zeta, p)}{K_+(\zeta) a(\zeta)} \quad (56) \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\frac{\tilde{u}^+(\zeta, p)}{2} = \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p^2} \frac{1 - v s_{\text{огр}}}{\sqrt{1 - v s_c}} \frac{1}{I_+(v^{-1})} \frac{1}{\tilde{e}_{\text{огр}}[b, -k^2 b]} \frac{1}{v|\zeta - v^{-1}|} \frac{1}{K_+(\zeta) a(\zeta)} \quad (57)$$

$$\tilde{\sigma}^+(\zeta, p) = \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p} \frac{1}{v|\zeta - v^{-1}|} \left[1 - \frac{K_+(\zeta) a(\zeta)}{K_-(v^{-1}) a(v^{-1})} \right] \quad (58)$$

Подставляя (57) в (41)-(42), (33)-(34) и обращая двухстороннее преобразование Лапласа по ξ согласно формуле обращения (24), получим

$$u^+(\xi, y, p) = -\frac{k(v) \text{sgn}(y)}{\tilde{e}_{\text{огр}}[b, -k^2 b] \sqrt{v}} \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{p} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i0}^{\infty + i0} \frac{e^{-\xi(\zeta - v^{-1})} d\zeta}{(\zeta - v^{-1}) K_+(\zeta) a(\zeta)} \quad (59)$$

$$\tilde{\varphi}^+(\xi, y, p) = \frac{e_{\text{огр}}}{\tilde{e}_{\text{огр}} \tilde{e}_{\text{огр}}[b, -k^2 b] \sqrt{v}} \frac{k(v) C \text{sgn}(y)}{p} \frac{\tilde{\Lambda}(p/v)}{2\pi i} \int_{-\infty - i0}^{\infty + i0} \frac{e^{-\xi(\zeta - v^{-1})} d\zeta}{(\zeta - v^{-1}) K_+(\zeta) a(\zeta)} \quad (60)$$

где введена функция

$$k(v) = \frac{1 - v s_{\text{огр}}}{\sqrt{1 - v s_c}} \frac{1}{I_+(v^{-1})} \quad (61)$$

После обращения преобразований Лапласа по времени в полученных выражениях (59) и (60) окончательно имеем

$$w(x, y, t) = \frac{k(v)}{\epsilon_{33} (b_1 - k^2 b_2) \sqrt{v}} \int_0^t F(v\eta) \Omega_w(x - vt, y, t - \eta; v) d\eta \quad (62)$$

$$\psi(x, y, t) = \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{31} \epsilon_{33} (b_1 - k^2 b_2) \sqrt{v}} \int_0^t F(v\eta) \Omega_v(x - vt, y, t - \eta; v) d\eta \quad (63)$$

где введены следующие функции:

$$\begin{aligned} \Omega_w(\xi, y, \tau; v) &= L_{p \rightarrow \tau}^{-1} \left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i} \int_{\zeta - v^{-1}i}^{\zeta + v^{-1}i} \frac{e^{-\tau(\zeta v^{-1} - i)}}{(\zeta - v^{-1}) K_-(\zeta) a_-(\zeta)} d\zeta \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{p - v^{-1}i}^{p + v^{-1}i} \left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i} \int_{\zeta - v^{-1}i}^{\zeta + v^{-1}i} \frac{e^{-\tau(\zeta v^{-1} - i)}}{(\zeta - v^{-1}) K_-(\zeta) a_-(\zeta)} d\zeta \right] e^{p\tau} dp \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Omega_v(\xi, y, \tau; v) &= L_{p \rightarrow \tau}^{-1} \left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i} \int_{\zeta - v^{-1}i}^{\zeta + v^{-1}i} \frac{e^{-\tau(\zeta v^{-1} - i)}}{(\zeta - v^{-1}) K_-(\zeta) a_-(\zeta)} d\zeta \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{p - v^{-1}i}^{p + v^{-1}i} \left[\frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi i} \int_{\zeta - v^{-1}i}^{\zeta + v^{-1}i} \frac{e^{-\tau(\zeta v^{-1} - i)}}{(\zeta - v^{-1}) K_-(\zeta) a_-(\zeta)} d\zeta \right] e^{p\tau} dp \end{aligned} \quad (65)$$

$$F(t) = \int_a^t \Lambda(x) dx \quad (66)$$

В выражениях (64) и (65) $L_{p \rightarrow \tau}^{-1}[\]$ — оператор обратного преобразования Лапласа по t — определенный выражением (22).

2. Перейдем к исследованию коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции. Из полученных представлений (59) и (60) для функций $w(\xi, y, p)$ и $\psi(\xi, y, p)$ после соответствующих вычислений получаем следующее выражение для интенсивности напряжений:

$$K_\sigma(t, v) = F_\sigma(v) S(vt) \quad (67)$$

и следующее выражение для интенсивности электрической индукции:

$$K_D(t, v) = \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{31} (1 - k^2)} F_D(v) S(vt) \quad (68)$$

где

$$F_\sigma(v) = \frac{1 - v s_{33}}{\sqrt{1 - v s_{33}}} \frac{1}{I_1 |v^{-1}|} \quad (69)$$

$$F_D(v) = (1 - k_c^2) \frac{(1 - C_f) b_s(v) + C_f b_r(v)}{I_s(v^{-1}) \sqrt{1 - v s_v}} \frac{1 - v s_{bge}}{b_s(v) - k_c^2 b_r(v)} =$$

$$= \frac{1}{1 + k_c^2} \frac{(1 - C_f) b_s(v) + C_f b_r(v)}{I_s(v^{-1}) \sqrt{1 - v s_v}} \frac{b_s(v) + k_c^2 b_r(v)}{1 + v s_{bge}} \quad (70)$$

$$S(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^h \frac{\Lambda(x)}{\sqrt{h-x}} dx \quad (71)$$

Обозначая отношение скоростей акустической и электрической волн в пьезоэлектрике через ρ ,

$$\rho = c_s / c_e \quad (72)$$

после соответствующих вычислений получаем, что

$$\frac{c_{bge}}{c_s} = \sqrt{\frac{1 - k_c^4}{1 - k_c^4 \rho^2}} \quad (73)$$

$$b_r(v) = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_{bge}}\right)^2 \frac{1 - k_c^4}{1 - k_c^4 \rho^2} \rho^2} \quad (74)$$

$$b_s(v) = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_{bge}}\right)^2 \frac{1 - k_c^4}{1 - k_c^4 \rho^2}} \quad (75)$$

Далее из (72) – (75), (54) – (55) и (69) – (70) приходим к заключению, что величины F_s и F_D , определенные выше, зависят от трех основных безразмерных величин данной задачи

- отношение скорости распространения трещины к одному из скоростей распространения волн в пьезоэлектрическом пространстве (то есть отношение скорости распространения трещины к скорости распространения акустической, электрической или поверхностной волны).
- коэффициент электромеханической связи.
- отношение скоростей распространения двух волн в пьезоэлектрическом пространстве.

то есть

$$F_{\sigma} = F_{\sigma} \left(\frac{v}{c_{bgr}}, k_e, \frac{c_s}{c_l} \right) \quad (76)$$

$$F_D = F_D \left(\frac{v}{c_{bgr}}, k_e, \frac{c_s}{c_l} \right) \quad (77)$$

Из (67), (68) и (76), (77) следует, что как интенсивность напряжений, так и интенсивность электрической индукции имеют следующую структуру: каждый из них является произведением двух функций, первая из которых зависит от скорости распространения трещины и от свойства пьезоэлектрика и не зависит от сил, действующих на берегах трещины и от расстояния l , пройденного вершиной трещины, а вторая функция, наоборот, зависит только от расстояния l , пройденного вершиной трещины, и от сил $\Lambda(x)$, действующих на берегах трещины.

Далее, из выражений (67)-(71) получают следующие предельные равенства, характеризующие интенсивность напряжений

$$\lim_{k_e \rightarrow 0} F_{\sigma}(v) = \sqrt{1 - v^2} \quad (78)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} F'_{\sigma}(v) = 1 \quad (79)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} F_{\sigma}(v) = 0 \quad (80)$$

и следующие предельные равенства, характеризующие интенсивность электрической индукции.

$$\lim_{k_e \rightarrow 0} \frac{e_{15}}{\bar{e}_{44}} F_D(v) = 0 \quad (81)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} F'_D(v) = 1 \quad (82)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} F_D(v) = \frac{[1 - C_f] b_1(c_{bgr}) + C_f b_1(c_{bgr}) b_2(c_{bgr}) + k_e^2 b_1(c_{bgr})}{I_1(s_{bgr}) \sqrt{1 - c_{bgr}^2} \cdot 2|1 + k_e^2|} = 0 \quad (83)$$

Равенства (78), (81), представляющие случай, когда коэффициент электроупругости стремится к нулю, и выражения (67), (68), восстанавливают результат, полученный ранее Костровым [5] для динамического распространения трещины в чисто упругом теле.

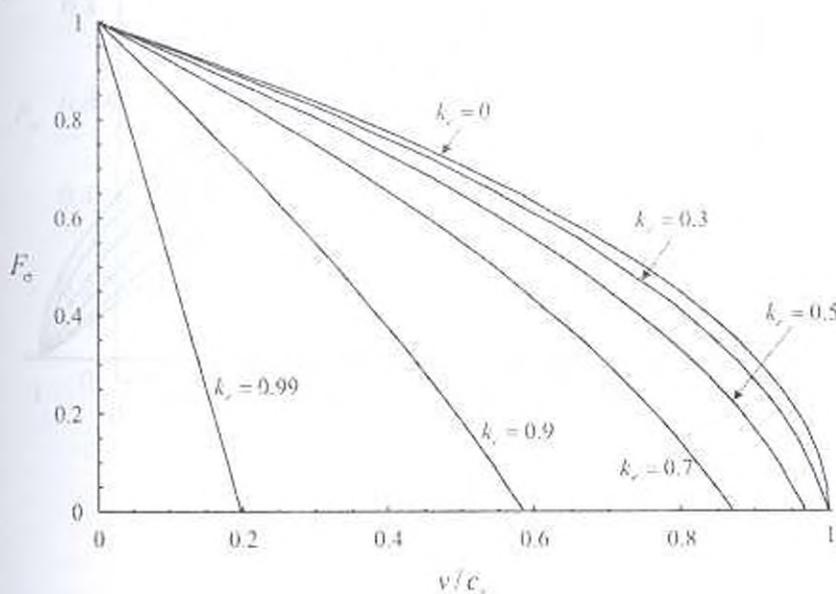
Равенства (79) и (82), полученные, когда $v \rightarrow 0$, представляют случай, когда трещина распространяется с бесконечно малой скоростью. В этом случае как вся задача, так и выражения коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции намного упрощаются.

Последние предельные равенства (80) и (83) показывают, что когда скорость распространения трещины приближается к скорости поверхностной волны Блюстейна-Гуляева, коэффициент интенсивности напряжений стремится к нулю, а коэффициент интенсивности электрической индукции имеет конечный предел, отличный от нуля. Это обстоятельство можно объяснить трансформацией акустической энергии в электрическую энергию.

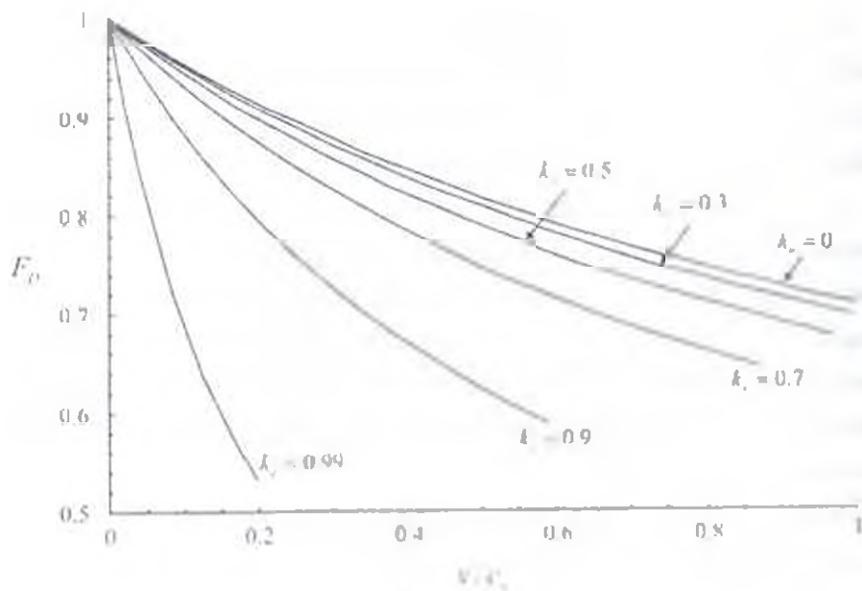
Приведем теперь численные расчеты, показывающие зависимости коэффициентов интенсивностей от отношений v/c_s , v/c_{∞} и от коэффициента электромеханической связи k_e (фиг. 3 — фиг. 9)

Во время численных расчетов, следуя [1] [10], принималось

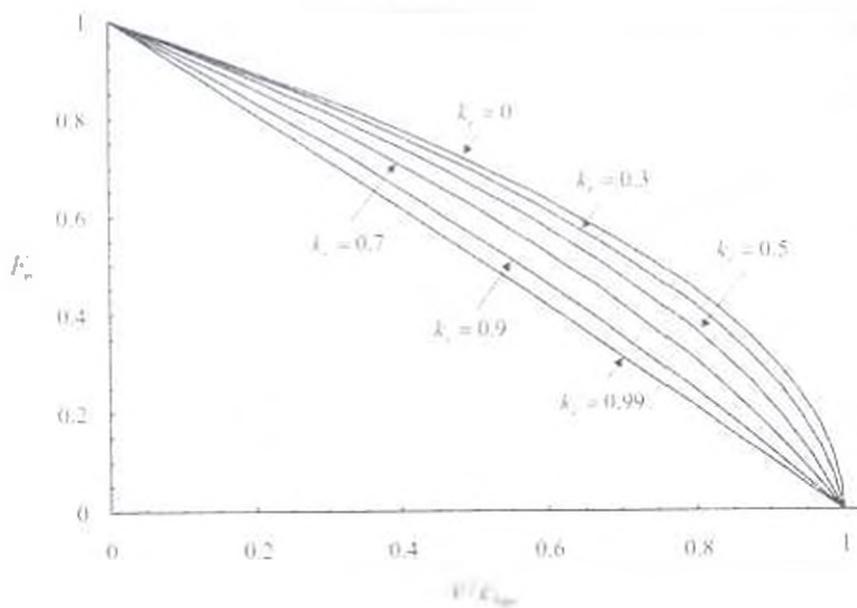
$$\frac{s_T}{s_s} = 0.0001.$$



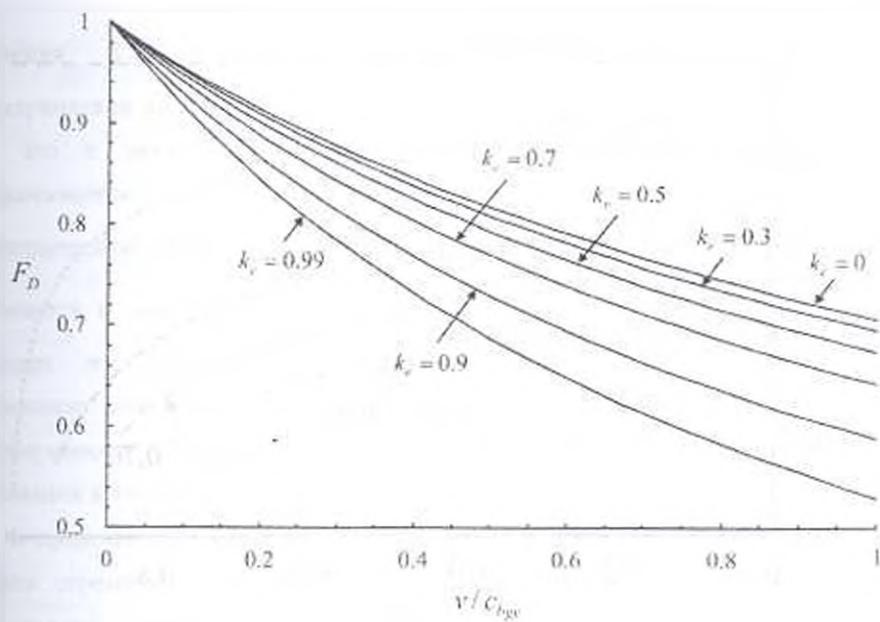
Фиг. 3



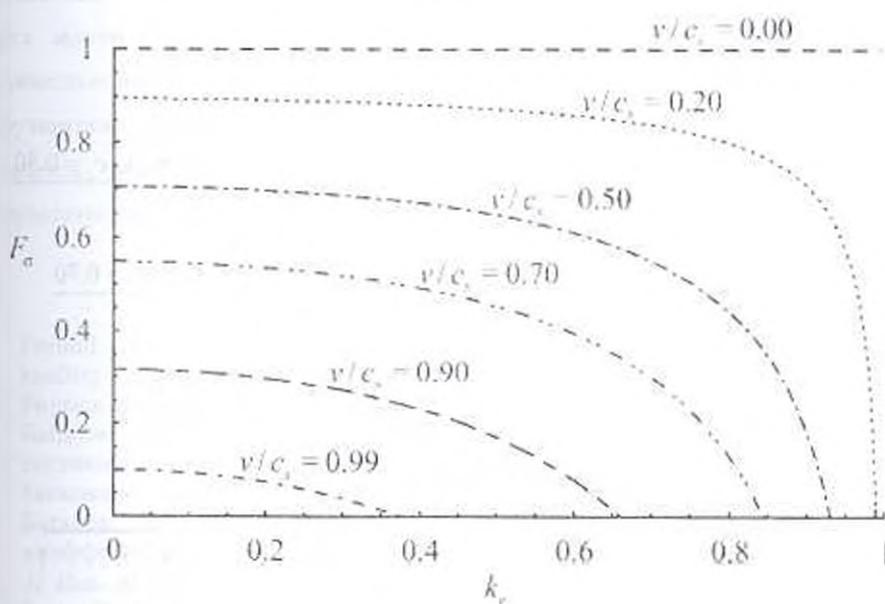
Фиг. 4



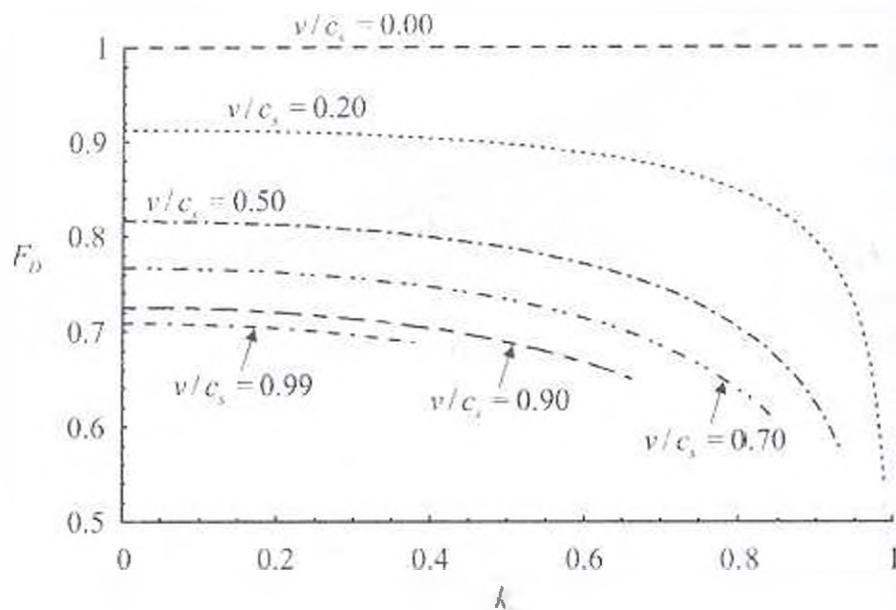
Фиг. 5



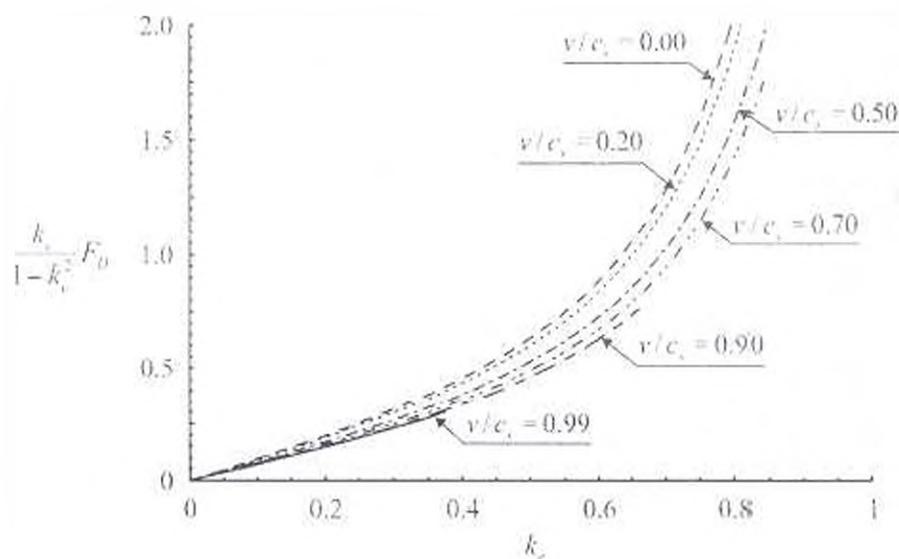
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Из графиков на фиг. 7 и фиг. 9 следует, что с увеличением коэффициента электромеханической связи k_v функция $K_{\sigma}/S(\nu)$, определяющая коэффициент интенсивности напряжений, уменьшается, а

функция $K_{II}/S(v)$, определяющая коэффициент интенсивности электрической индукции, увеличивается. Это обстоятельство указывает на то, что с увеличением коэффициента электромеханической связи увеличивается преобразование энергии из механической в электрическую. Заметим также, что когда k_p , монотонно увеличиваясь, стремится к значению, при котором $c_{33}(k_p) = v$, из фиг. 7 и фиг. 9 следует, что функция, определяющая интенсивность напряжений, монотонно уменьшаясь, стремится к нулю, а функция, определяющая интенсивность электрической индукции, монотонно увеличиваясь, стремится к некоторому конечному значению.

В предельном случае, когда скорость распространения электрической волны стремится к бесконечности, из приведенных здесь результатов получаются соответствующие результаты для квазистатической постановки задачи. Частный квазистатический случай исследованной здесь задачи был рассмотрен Ли и Матага в работе [11], где имеются количественные и качественные противоречия с приведенными здесь результатами. Доказательство того, что результаты Ли и Матага [11] являются неправильными, а также соответствующие правильные результаты, опубликованы в работе [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Freund L.B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading – I. Constant rate of extension. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, № 20, 1972, pp. 129-140.
2. Багдоев А.Г., Мовсисян А.А. К распространению трещины в составном анизотропном пространстве. // *Изв. АН Арм. ССР. Механика*, 1991, Т. 44, № 5, С. 3–7.
3. Багдоев А.Г., Мовсисян А.А. О влиянии магнитного поля на коэффициент интенсивности напряжений для движущейся трещины. // *Изв. АН Арм. ССР. Механика*, 1991, Т. 44, № 3, С. 3–6.
4. Leise, T., Walton, J. A general method for solving dynamically accelerating multiple co-linear cracks. // *International Journal of Fracture*, N 111, 2001, pp. 1–16.
5. Kostrov V.V. Unsteady propagation of longitudinal shear cracks. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, N 30, 1966, pp. 1241-1248.
6. Leise, T.L. A general solution method for an anti-plane shear crack dynamically accelerating along a bimaterial interface. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, N 53, 2005, pp. 639–653.

7. Li, S. Transient wave propagation in piezoelectric half space. // *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP)*, N 51, 2000, pp. 236–266.
8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд иностранной литературы. 1962. 280 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
10. Li S. The Electromagneto-acoustic surface wave in a piezoelectric medium: the Bleistein-Gulyaev mode. // *Journal of Applied Physics*, 1996, N 80(9), pp. 5264–5269.
11. Li S, Mataga P.A. Dynamic Crack Propagation in Piezoelectric Materials – Part I. Electrode Solution. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, N 44, 1996, pp. 1799–1830.
12. Melkumyan A. Comments on “Dynamic crack propagation in piezoelectric materials –Part I. Electrode solution” by Shaofan Li, Peter A. Mataga [J. Mech. Phys. Solids 44 (1996) 1799–1830]. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 53, Issue 8, 2005, pp. 1918-1925.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
7.07.2005

УДК 531.36

СВЯЗЬ K_A^ω - УСТОЙЧИВОСТИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ
 УСТОЙЧИВОСТЬЮ

Аванян В.Т., Аванян М. В.

Վ.Տ. Ավանյան, Մ. Վ. Ավանյան

K_A^ω կայունության և էքսպոնենցիալ կայունության փոխադարձ կապը

Այսատարածում դիտարկվել է էքսպոնենցիալ կայունության և K_A^ω կայունության կապը ստացվել է, որ ա) գծային հաստատու ավտոնոմ համակարգի տրիվիալ լուծման ասիմպտոտիկ K_A^ω կայունությունից հետևում է նրա էքսպոնենցիալ կայունությունը, բ) երբ ոչ ավտոնոմ համակարգի տրիվիալ լուծում ասիմպտոտիկ K_A^ω կայուն է, և գոյություն ունի ասիմպտոտիկ K_A^ω կայունության մասին բերնի [1] պայմաններին բավարարող հերմիտյան δL , ապա այդ համակարգի տրիվիալ լուծումն էքսպոնենցիալ կայուն է:

V. T. Avanyan, M. V. Avanyan

The connection between the K_A^ω - stability and the exponential stability

There was considered the connection between the K_A^ω - stability and the exponential stability in this work. There were received, that a) the exponential stability of the trivial solution of the linear homogeneous autonomous system followed from its asymptotic K_A^ω - stability, b) the trivial solution of the non-homogeneous system was exponentially stable, if the solution of the non-homogeneous system was asymptotically K_A^ω - stable and if it had the hermitian form, which satisfied to the conditions of the theorem of the asymptotic K_A^ω - stability.

В работе рассматривается связь экспоненциальной устойчивости с K_A^ω устойчивостью. Получено а) из асимптотической K_A^ω устойчивости тривиального решения линейной однородной автономной системы следует ее экспоненциальная устойчивость, б) если тривиальное решение неавтономной системы асимптотически K_A^ω устойчиво и существует эрмитова форма, удовлетворяющая условиям теоремы об асимптотической K_A^ω -устойчивости, то тривиальное решение этой системы экспоненциально устойчиво.

Пусть тривиальное решение однородной линейной системы

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

с постоянной матрицей A асимптотически K_A^ω -устойчиво при $t \rightarrow +\infty$, тогда эта система экспоненциально устойчива, т. е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво.

Действительно, как известно [3], для асимптотической K_A^ω -устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения [1] необходимые и достаточные условия совпадают. Этим условием является отрицательность всех действительных частей

характеристических корней матрицы A . Но при этих условиях [4] тривиальное решение уравнения (1) экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, при асимптотической K_A^∞ -устойчивости тривиального решения уравнения (1) существуют две положительные постоянные Q и p , не зависящие от выбора решения $x(t) = x(t; t_0, x_0) \neq 0$ этого уравнения и такие, что для любого решения $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq Q \|x(t_0)\| \exp(-p(t-t_0)) \quad (t > t_0) \quad (2)$$

где начальный момент t_0 произволен.

А для любого другого решения $\xi(t)$ линейной однородной системы (1) в силу того, что разность $x(t) - \xi(t)$ также является решением этой системы, будет выполняться неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq Q \|x(t_0) - \xi(t_0)\| \exp(-p(t-t_0)) \quad (3)$$

Таким образом, получили, что если линейная однородная система (1) асимптотически K_A^∞ -устойчива, то каждое ее решение экспоненциально устойчиво.

Для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической устойчивости по Ляпунову ее тривиального решения, вообще говоря, не следует экспоненциальная устойчивость. Так как из K_A^∞ -устойчивости невозмущенного процесса всегда следует ее устойчивость по Ляпунову [3], поэтому для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической K_A^∞ -устойчивости ее тривиального решения также вообще говоря, не следует ее экспоненциальная устойчивость.

Пусть уравнение возмущенного процесса имеет вид

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) = 0 \quad (4)$$

где

$$X(t, x) \in C^{(0,1)}(\mathcal{D}_t^* \times \mathcal{M}_x^n) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_t^* = \{t < t < \infty\} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда для тривиального решения неавтономной системы (4) одновременно имеет место и асимптотическая K_A^∞ -устойчивость, и экспоненциальная устойчивость при $t \rightarrow +\infty$.

Для этого докажем следующее утверждение при $\omega(t) \geq 1$, $t \in [t_0, \infty)$.

Теорема 1. Если в области (5) существует положительно определенная эрмитова форма

$$V(x) = (Bx, x) \quad (6)$$

с постоянной матрицей B , производная которой $V'(x)$ по времени t в силу системы (4) в области (5) является отрицательно определенной эрмитовой формой

$$V(x) \leq -(Mx, x) = W(x) < 0, \|x\| \neq 0 \quad (7)$$

с постоянной матрицей M . то тривиальное решение системы (4) (т. е. невозмущенный процесс) одновременно и асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво и экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Пусть существует форма (6) со свойством (7) и $\omega(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$. Тогда по лемме в [1] положительно определенную матрицу B представим в виде

$$B = K^{-1*} K^{-1} \quad (K = K_1 \cdots K_n)$$

где K_j ($j = 1, \dots, n$)- столбцы матрицы K имеют одинаковую эрмитову норму

$$\|K_j\| = \sqrt{n^{-1} Sp B^{-1}} = \alpha > 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (8)$$

При этом матрица $G = \alpha^{-1} K$ принадлежит классу K_{Δ}^1 - $n \times n$ -матриц над полем комплексных чисел а функция

$$V_1(x) = (G^{-1}x, G^{-1}x) = \alpha^2 (K^{-1}x, K^{-1}x) = \alpha^2 V(x) \quad (9)$$

будет удовлетворять всем условиям теоремы об асимптотической K_{Δ}^1 -устойчивости [1] (из $\alpha(t) = \text{const}$, $\omega(t) \equiv 1$ следует $\alpha(t)/\alpha(t_0) = \omega(t)/\omega(t_0) = 1$).

Но так как при $\omega(t) \geq 1$ из асимптотической K_{Δ}^1 -устойчивости всегда следует асимптотическая K_{Δ}^{ω} -устойчивость, то тривиальное решение системы (4) асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

При данных условиях экспоненциальную устойчивость при $t \rightarrow +\infty$ тривиального решения системы (4) доказал Красовский Н. П. [4]. Не будет лишним, если мы это сделаем, используя при этом результаты, полученные в [2].

Так как матрица M положительно определенная, то по лемме [1], аналогично формуле (8), будем иметь

$$\sqrt{n^{-1} Sp M^{-1}} = \beta \quad (10)$$

С учетом (8) и (10) для собственных значений матриц B и M по формуле (1.13) в [2] будем иметь

$$n^{-1} \alpha^{-2} \leq \lambda_i(B) \leq n \alpha^2 m_1^{-2} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11)$$

$$n^{-1} \beta^{-2} \leq \lambda_i(M) \leq n \beta^2 m_2^{-2} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

где положительные числа m_1 и m_2 определяются по формуле (1.19) в [2] следующим образом:

$$m_1 = (\sqrt{n} \alpha)^{n-1}, \quad m_2 = (\sqrt{n} \beta)^{n-1}$$

В силу неравенств (11) и (12) соответственно имеем

$$n^{-1} \alpha^{-2} \|x\|^2 \leq V(x) \leq n \alpha^2 m_1^{-2} \|x\|^2 \quad (13)$$

$$n^{-1} \beta^{-2} \|x\|^2 \leq -W(x) \leq n \beta^2 m_2^{-2} \|x\|^2 \quad (14)$$

С учетом (7) из неравенства (14) имеем

$$n^{-1} \beta^{-2} \|x\|^2 \leq -\frac{dV}{dt} \leq n \beta^2 m_2^{-2} \|x\|^2 \quad (15)$$

Из (13) имеем неравенство

$$m_1^2 n^{-1} \alpha^{-2} V(x) \leq \|x\|^2 \leq n \alpha^2 V(x) \quad (16)$$

в силу которого следует неравенство

$$-n \alpha^2 V(x) \leq -\|x\|^2 \leq -m_1^2 n^{-1} \alpha^{-2} V(x)$$

Учитывая это, из (15) получим

$$\frac{dV}{V} \leq -\frac{m_1^2}{n^2 \alpha^2 \beta^2} dt \quad (17)$$

Интегрируя неравенство (17), при $t \geq t_0$ будем иметь

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) \exp[-n^{-2} \alpha^{-2} \beta^{-2} m_1^2 (t - t_0)]$$

С учетом последнего неравенства из (16) получаем

$$\|x(t)\|^2 \leq n \alpha^2 V(x(t_0)) \exp[-n^{-2} \alpha^{-2} \beta^{-2} m_1^2 (t - t_0)] \quad \text{при } t \geq t_0$$

или так как из (13) следует

$$V(x(t_0)) \leq n \alpha^2 m_1^{-2} \|x_0\|^2$$

то можем записать

$$\|x(t)\|^2 \leq n^2 \alpha^4 m_1^{-2} \|x(t_0)\|^2 \exp[-n^{-2} \alpha^{-2} \beta^{-2} m_1^2 (t - t_0)]$$

Откуда при $t \geq t_0$ имеем

$$\|x(t)\| \leq Q \|x(t_0)\| \exp[-p(t - t_0)] \quad (18)$$

где $Q = \frac{n \alpha^2}{m_1}$, $p = \frac{m_1^2}{2n^2 \alpha^2 \beta^2}$, а $\|x(t_0)\|$ — достаточно мала.

Выполнение неравенства (18) означает экспоненциальная устойчивость тривиального решения системы (4).

Теорема доказана.

Таким образом, когда $\omega(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$ при выполнении условий (6) и (7) тривиальное решение неавтономной системы (4) (т. е. невозмущенный процесс) одновременно и асимптотически K_Δ^m -устойчиво, и экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Следующая теорема показывает, когда из асимптотической K_Δ^m -устойчивости тривиального решения неавтономной системы (4) следует ее экспоненциальная устойчивость.

Теорема 2. Если в области (5) функция $X(t, x)$ обладает ограниченными частными производными по координатам вектора x , тривиальное

решение уравнения (4) асимптотически K_x^* -устойчиво при $t \rightarrow +\infty$ и существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы об асимптотической K_x^* -устойчивости [1], то тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены, т. е. в уравнении (4) функция $X(t, x)$ обладает ограниченным частным производным по координатам вектора x в области (5) и существует положительно определенная эрмитова форма

$$V(t, x) = (B(t)x, x) \quad (B(t) = G^{-1}(t)KG^{-1}(t)) \quad (19)$$

где

$$n^{-1} \text{Sp} B^{-1}(t) = \omega^2(t) \leq \omega_0^2 < \infty \text{ на } [t_0, \infty)$$

полная производная которой по времени t , составленная в силу уравнения (4), является отрицательно определенной эрмитовой формой в области (5)

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{(1,2,1)} = (B(t)x, x) + (\text{grad} V, X) \quad (20)$$

В [2] при $t \in [t_0, \infty)$ доказаны неравенства

$$n^{-1} \omega_0^{-2} \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq n \omega_0^2 m^{-2} \|x\|^2 \quad (21)$$

$$\|B(t)\| \leq n \omega_0^2 m^{-2} \quad (22)$$

Так как $\text{grad} V = 2B(t)x$, то в силу (22) имеем

$$\|\text{grad} V\| \leq 2n \omega_0^2 m^{-2} \|x\|, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (23)$$

Поскольку из ограниченности частных производных функции $X(t, x)$ по координатам вектора x в \mathbb{R}_n^+ следует выполнение условия Липшица

$$\|X(t, x) - X(t, y)\| \leq M \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+$$

то при $y = 0$ с учетом $X(t, 0) = 0$ имеем на $[t_0, \infty)$

$$\|X(t, x)\| \leq M \|x\| \quad (24)$$

Из неравенств (23) и (24) соответственно следует, что на $[t_0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} \leq \frac{2n \omega_0^2}{m^2} \|x\|, \quad X_i(t, x) \leq M \|x\| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

Для первого слагаемого в правой части (20) имеем на $[t_0, \infty)$ неравенство

$$\lambda_{\min}(B(t)) \|x\|^2 \leq (B(t)x, x) \leq \lambda_{\max}(B(t)) \|x\|^2 \quad (26)$$

где $\lambda_{\min}(\dot{B}(t))$ и $\lambda_{\max}(\dot{B}(t))$ — соответственно минимальные и максимальные характеристические корни матрицы $\dot{B}(t)$ в точке $t \in [t_0, \infty)$. С учетом неравенства (25) и (26), из (20) в области (5) получаем неравенство

$$\dot{V}(t, x)_{(3.2.1)} \leq \left[\lambda_{\max}(\dot{B}(t)) + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \right] \|x\|^2 \quad (27)$$

Так как функция $V(t, x)$ в области (5) удовлетворяет всем условиям теоремы об асимптотической K_A^* -устойчивости, а именно — функция $\dot{V}(t, x)_{(3.2.1)}$ отрицательно определенная, то из (27) в области (5) следует неравенство

$$\dot{V}(t, x)_{(3.2.1)} \leq -c \|x\|^2 \quad (0 < c = \text{const}) \quad (28)$$

т. е.

$$\lambda_{\max}(\dot{B}(t)) + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \leq -c$$

или

$$\lambda_{\max}(\dot{B}(t)) \leq -\left(c + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \right) \quad t \in [t_0, \infty) \quad (29)$$

В силу неравенств (21), (23) и (28) тривиальное решение уравнения (4) (невозмущенный процесс) экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$, потому что, как известно [1], если функция $X(t, x)$ непрерывна по t и x , имеет непрерывные и ограниченные частные производные по координатам вектора x , то для существования функции $\Gamma(t, x)$, удовлетворяющей условиям (21), (23), (28), необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение уравнения (4) (т. е. невозмущенный процесс) было экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

Заметим, что для выполнения неравенства (28) на $[t_0, \infty)$ достаточно, чтобы на $[t_0, \infty)$ выполнялось неравенство (29), т. е. все собственные значения матрицы $\dot{B}(t)$ были меньше некоторого отрицательного числа на $[t_0, \infty)$, т. е.

$$\lambda_i(\dot{B}(t)) < -\left(c + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

Из (30) следует, что на $[t_0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\text{Sp} \dot{B}(t) \leq -n \left(c + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \right) \quad (31)$$

хотя из (31), вообще говоря, не следует (30). Интегрируя неравенство (31) в пределах $[t_0, t]$ ($t \in [t_0, \infty)$), получим

$$\frac{\text{Sp} \dot{B}(t) - \text{Sp} \dot{B}(t_0)}{t - t_0} \leq -n \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) \quad (32)$$

Таким образом, получили, что если от асимптотической K_A^* -устойчивости тривиального решения уравнения (4) следует его

экспоненциальная устойчивость при $t \rightarrow +\infty$, то след матрицы $B(t)$ функции Ляпунова этого уравнения на $[t_0, \infty)$ удовлетворяет соотношению (32). Этот факт можно считать свойством матрицы функции Ляпунова в данном случае.

Затем неравенство (32) можем записать в форме

$$\frac{\frac{1}{n} SpB(t) - \frac{1}{n} SpB(t_0)}{t - t_0} \leq - \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

или

$$\frac{\omega^2(t) - \omega^2(t_0)}{t - t_0} \leq - \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

Если функция $\omega(t)$ дифференцируема на $[t_0, \infty)$, то по теореме Лагранжа:

$$\frac{\omega^2(t) - \omega^2(t_0)}{t - t_0} = 2\omega(t_1)\omega'(t_1), \quad t_0 < t_1 < t$$

с учетом которого имеем

$$2\omega(t_1)\omega'(t_1) \leq - \left(c + 2n^2 m^{-2} \omega_0^2 M \right)$$

В силу произвольности интервала $[t_0, t)$ на $[t_0, \infty)$ имеем

$$\omega'(t) \leq - \frac{1}{2\omega(t)} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

Из неравенства $0 < \omega(t) \leq \omega_0 < \infty$ на $[t_0, \infty)$ имеем

$$\frac{1}{2\omega_0} \leq \frac{1}{2\omega(t)}$$

откуда

$$- \frac{1}{2\omega(t)} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) \leq - \frac{1}{2\omega_0} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

С учетом последнего неравенства можем записать

$$\omega'(t) \leq - \frac{1}{2\omega_0} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) < 0 \quad \text{на } [t_0, \infty) \quad (33)$$

Из (33) следует, что положительная функция $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ монотонно убывает.

Таким образом, получили, что если из асимптотической K_S^* -устойчивости невозмущенного процесса следует его экспоненциальная устойчивость, то положительная функция $\omega(t)$ убывает на $[t_0, \infty)$, т.е. монотонное убывание функции $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ необходимо, но не

достаточно, чтобы из асимптотической K_A^α -устойчивости невозмущенного процесса следовала его экспоненциальная устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. // Тематический сб. науч. трудов МАИ. 1975. Вып. 339. С. 5-11.
2. Аванян В. Т., Аванян М. В. Об обратимости основных теорем о K_A^α -устойчивости. // Вестник "МАНЕБ" 2004. Т. 9. № 8. С. 237-240.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. // ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С. 844-849.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

Ереванский Государственный
университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
14.11.2003

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
 РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Барсегян В. В., Геворкян Г. А.

Վ. Վ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորկյան

Պոտենցիալի տեսության երկչափ խնդիրների լուծման վերաբերյալ
 տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ

Առաջարկվում է բառակցություն՝ վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ, որում
 պոտենցիալի տեսության երկչափ խնդիրների լուծումը հանգեցվում է շտապկուսային ծրագրավորման
 խնդրի:

V. V. Barsегyan, G. A. Gevorgyan

A Modified Finite-Element Method for Solving Two-Dimensional Potential Theory Problems

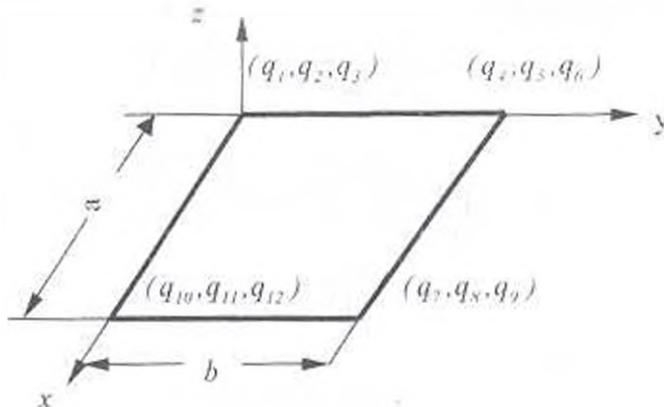
A modified finite-element method is proposed where two-dimensional potential theory problems solutions
 are reduced to quadratic programming

Предлагается модификация метода конечных элементов четырехугольной формы, при котором
 решения двумерных задач теории потенциала сводятся к решению квадратичного программирования

С помощью вариационного исчисления задачи теории потенциала
 сводятся к следующей задаче[3] – требуется найти неизвестную функцию
 Φ , для которой взятый по всей области двойной интеграл

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ h_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + h_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - \Omega \Phi \right] dx dy \quad (1)$$

принимает минимальное значение при условии, что Φ удовлетворяет
 граничным условиям рассматриваемой частной задачи. h_x , h_y и Ω –
 известные функции от x и y .



Փիգ. 1

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на
 $s \in \bar{N} = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Узловые

значения функции Φ для s -ого конечного элемента (фиг.1) зададим вектором $q_s = (q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{s12})^T$. Значения функции Φ элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 12 неизвестных параметров:

$$\Phi^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \Psi_i(x, y) \quad (2)$$

Тогда, при $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ для функции Эрмита $\Psi_i(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 \\ \Psi_2(\xi, \eta) &= b(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \Psi_3(\xi, \eta) = b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3) \\ \Psi_4(\xi, \eta) &= a(\xi - \xi\eta - 2\xi^2 + 2\xi^2\eta + \xi^3 - \xi^3\eta) \\ \Psi_5(\xi, \eta) &= 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi\eta^3 + 2\xi^3\eta \\ \Psi_6(\xi, \eta) &= b(-\eta^3 + \eta^3 + \xi\eta^2 - \xi\eta^3) \\ \Psi_7(\xi, \eta) &= a(\xi\eta - 2\xi^2\eta + \xi^3\eta) \\ \Psi_8(\xi, \eta) &= -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3; \Psi_9(\xi, \eta) = a(-\xi^3\eta + \xi^3\eta) \\ \Psi_{10}(\xi, \eta) &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 - 3\xi^2\eta \\ \Psi_{11}(\xi, \eta) &= b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \Psi_{12}(\xi, \eta) = a(-\xi^2 + \xi^3 + \xi^2\eta - \xi^3\eta) \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты вектора $f_s = (\Phi^s, \frac{\partial \Phi^s}{\partial x}, \frac{\partial \Phi^s}{\partial y})^T$ внутри s -ого элемента соответственно определяются формулой (2) и формулами

$$\frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \frac{\partial \Psi_i(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \frac{\partial \Psi_i(x, y)}{\partial y} \quad (4)$$

Подставляя значения $\Phi^s(x, y)$ из выражения (3) в (1), функцию χ^s представим в виде

$$\chi^s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} k_{ij}^s q_i^s q_j^s - \sum_{i=1}^{12} q_i^s P_i^s \quad (5)$$

где

$$k_{ij}^s = \iint_{a,b} \left(h_x \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + h_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (6)$$

$$P_i^s = \iint_{a,b} \Omega(x, y) \Psi_i^s dx dy \quad (7)$$

Обозначим

$$k^s = h_x \|\tilde{k}_x^s\| + h_y \|\tilde{k}_y^s\| \quad (8)$$

тогда, с учетом соотношений (3) и принимая h_x, h_y за постоянные величины внутри элемента, исходя из (6) для ненулевых значений компонентов $\tilde{k}_x^s, \tilde{k}_y^s$ матриц, имеем

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{44}^i &= \bar{k}_{77}^i = \bar{k}_{11}^i = \bar{k}_{10,10}^i = \frac{46}{105} \frac{b}{a}; & \bar{k}_{31}^i &= \bar{k}_{11,1}^i = \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{14}^i = \frac{1}{30} b; \\
\bar{k}_{42}^i &= \bar{k}_{11,4}^i = \frac{1}{45} ab; & \bar{k}_{31}^i &= \bar{k}_{34}^i = \bar{k}_{12,10}^i = \bar{k}_{36}^i = \frac{11}{210} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{74}^i &= \bar{k}_{10,4}^i = -\frac{46}{105} \frac{b}{a} \\
\bar{k}_{41}^i &= \bar{k}_{10,2}^i = \frac{17}{105} \frac{b}{a}; & \bar{k}_{31}^i &= \bar{k}_{31}^i = \bar{k}_{42}^i = \bar{k}_{11,4}^i = \frac{1}{60} b; & \bar{k}_{71}^i &= \bar{k}_{10,4}^i = -\frac{17}{105} \frac{b}{a} \\
\bar{k}_{61}^i &= \bar{k}_{10,6}^i = \bar{k}_{73}^i = \bar{k}_{12,4}^i = -\frac{13}{420} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{91}^i &= \bar{k}_{41}^i = \bar{k}_{10,6}^i = \bar{k}_{12,2}^i = \frac{13}{420} \frac{b^2}{a} \\
\bar{k}_{12,1}^i &= \bar{k}_{64}^i = \bar{k}_{10,1}^i = \bar{k}_{97}^i = -\frac{11}{210} \frac{b^2}{a}; & \bar{k}_{72}^i &= \bar{k}_{44}^i = \bar{k}_{36}^i = \bar{k}_{11,11}^i = \frac{2}{45} ab \\
\bar{k}_{12}^i &= \bar{k}_{11,3}^i = -\frac{1}{180} ab; & \bar{k}_{10,2}^i &= \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{11,10}^i = -\frac{1}{30} b \\
\bar{k}_{11,2}^i &= \bar{k}_{85}^i = -\frac{1}{90} ab; & \bar{k}_{11}^i &= \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{65}^i = \bar{k}_{12,11}^i = \frac{1}{105} \frac{b^4}{a} \\
\bar{k}_{81}^i &= \bar{k}_{72,9}^i = -\frac{1}{140} \frac{b^4}{a}; & \bar{k}_{91}^i &= \bar{k}_{12,6}^i = \frac{1}{140} \frac{b^4}{a}; & \bar{k}_{12,1}^i &= \bar{k}_{10}^i = -\frac{1}{105} \frac{b^4}{a} \\
\bar{k}_{72}^i &= \bar{k}_{10,4}^i = \bar{k}_{10,6}^i = \bar{k}_{11,2}^i = -\frac{1}{60} b; & \bar{k}_{11}^i &= \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{77}^i = \bar{k}_{10,10}^i = \frac{46}{105} \frac{a}{b} \\
\bar{k}_{31}^i &= \bar{k}_{34}^i = \bar{k}_{10,2}^i = \bar{k}_{11,1}^i = \frac{11}{210} \frac{a^2}{b}; & \bar{k}_{12}^i &= \bar{k}_{11,3}^i = -\frac{1}{105} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{31}^i &= \bar{k}_{61}^i = \bar{k}_{10,9}^i = \bar{k}_{12,10}^i = \frac{1}{30} a; & \bar{k}_{41}^i &= \bar{k}_{42}^i = \bar{k}_{67}^i = \bar{k}_{11,10}^i = -\frac{11}{210} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{71}^i &= \bar{k}_{10,4}^i = -\frac{17}{105} \frac{a}{b}; & \bar{k}_{81}^i &= \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{11,4}^i = \bar{k}_{10,2}^i = \frac{13}{420} \frac{a^2}{b} \\
\bar{k}_{91}^i &= \bar{k}_{12,1}^i = \bar{k}_{10,3}^i = \bar{k}_{10,6}^i = \frac{1}{60} a; & \bar{k}_{10,1}^i &= \bar{k}_{14}^i = \frac{17}{105} \frac{a}{b} \\
\bar{k}_{11,1}^i &= \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{72}^i = \bar{k}_{10,4}^i = -\frac{13}{420} \frac{a^2}{b}; & \bar{k}_{12}^i &= \bar{k}_{11}^i = \bar{k}_{65}^i = \bar{k}_{11,11}^i = \frac{1}{105} \frac{a^4}{b} \\
\bar{k}_{12}^i &= \bar{k}_{11,3}^i = \frac{1}{140} \frac{a^4}{b}; & \bar{k}_{11,2}^i &= \bar{k}_{85}^i = -\frac{1}{140} \frac{a^4}{b}; & \bar{k}_{10}^i &= \bar{k}_{65}^i = \bar{k}_{65}^i = \bar{k}_{12,12}^i = \frac{2}{45} ab \\
\bar{k}_{41}^i &= \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{97}^i = \bar{k}_{12,2}^i = -\frac{1}{30} a; & \bar{k}_{61}^i &= \bar{k}_{12,9}^i = -\frac{1}{90} ab; & \bar{k}_{11}^i &= \bar{k}_{12,2}^i = -\frac{1}{180} ab \\
\bar{k}_{12,1}^i &= \bar{k}_{96}^i = \frac{1}{45} ab; & \bar{k}_{71}^i &= \bar{k}_{10}^i = \bar{k}_{14}^i = \bar{k}_{12,4}^i = -\frac{1}{60} a; & \bar{k}_{41}^i &= \bar{k}_{10,2}^i = -\frac{46}{105} \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Обозначим через

$$P^i = (P_1^i, P_2^i, \dots, P_{12}^i)^T \quad (9)$$

вектор узловых нагрузок и принимая Ω за постоянную величину внутри элемента, исходя из (7), имеем

$$P^s = \frac{\Omega ab}{4} \left(1, \frac{a}{6}, \frac{b}{6}, 1, \frac{a}{6}, -\frac{b}{6}, 1, -\frac{a}{6}, -\frac{b}{6}, 1, -\frac{a}{6}, \frac{b}{6} \right)^T$$

С учетом введенных обозначений [8] и [9] функцию (5) представим в виде

$$\chi^s = \frac{1}{2} (q^s)^T k^s q^s - (q^s)^T P^s \quad (10)$$

Учитывая, что рассматриваемая двумерная область представлена в виде совокупности n конечных элементов прямоугольной формы, для функционала (1) имеем

$$\chi = \sum_{s=1}^n \chi^s = \sum_{s=1}^n \left[\frac{1}{2} (q^s)^T k_s q_s - (q^s)^T P^s \right] \quad (11)$$

Пусть n – общее число узлов всей области, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ – вектор узловых функций, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$ – вектор внутренних распределенных нагрузок, связанных с заданной функцией Ω , $K = \|K_s\|$ – матрица жесткости для всей области. Тогда, как следует из соотношения (11)

$$\chi = \frac{1}{2} q^T K q - q^T P$$

Как известно [3], функция Φ^1 , задаваемая формулой (2), обеспечивает непрерывность функции Φ , но не обеспечивает совместности наклона нормали вдоль границы разделов элементов. Для обеспечения непрерывности на границах разделов элементов введем дополнительные точки, на которых будет задано условие непрерывности. Возьмем эти точки в центре сторон конечных элементов. Тогда условия непрерывности в смежном сечении вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го конечных элементов задаются соотношениями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{a}{2}, b \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \left(\frac{a}{2}, 0 \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(a, \frac{b}{2} \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \left(0, \frac{b}{2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(a, \frac{b}{2} \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \left(0, \frac{b}{2} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(\frac{a}{2}, b \right) = \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) \quad (13)$$

Используя формулы (4), найдем в центрах сторон смежных сечений вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го конечных элементов значения $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ и, подставляя их в условие непрерывности (12), (13) для смежных сечений ij , параллельных осям x и y (фиг. 2 и 3), получим, что условия непрерывности (12) тождественно удовлетворяются. Условия (13) примут вид

$$\begin{aligned} -q_1^{s+1} + 2q_1^s - q_1^{s+1} + q_1^{s+1} - 2q_1^s + q_1^{s+1} &= 0 \\ -q_2^{s+1} + 2q_2^s - q_2^{s+1} + q_2^{s+1} - 2q_2^s + q_2^{s+1} &= 0 \end{aligned}$$

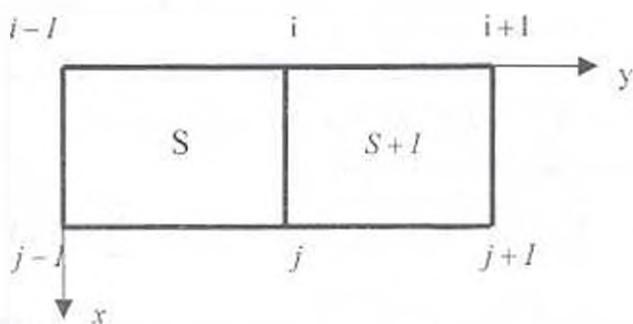
Обозначим через \bar{m} и \bar{m} соответственно, количество смежных сечений, параллельных осям x и y . Перепишем эти условия непрерывности в виде системы уравнений, имеем:

$$Hq = 0 \quad (14)$$

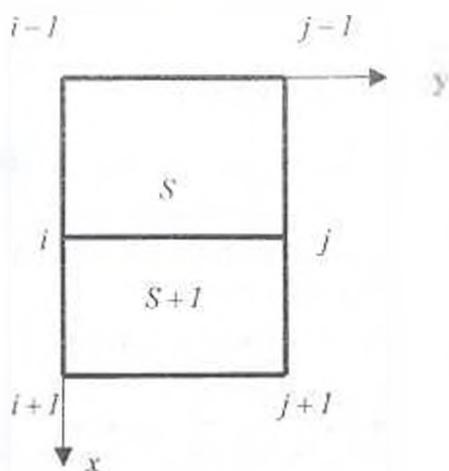
где H — матрица порядка $m \times 3n$, $m = \bar{m} - \bar{m}$.

Таким образом, сформулированная с помощью вариационного исчисления задача об определении минимального значения функционала (1) с учетом граничных условий сводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} q' K q - q' P \mid Hq = 0, \text{ граничные условия} \right\} \quad (15)$$



Фиг.2



Фиг.3

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} q_1^1 + K_{12}^{(01)} q_1^2 + K_{13}^{(10)} q_1^3 + \dots + K_{2(3n-2)}^{(01)} q_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(01)} q_n^2 + K_{2(3n)}^{(01)} q_n^3 &= -z_1 \\ q_1^2 + K_{23}^{(11)} q_1^3 + K_{24}^{(12)} q_2^1 + \dots + K_{2(3n-2)}^{(11)} q_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(11)} q_n^2 + K_{2(3n)}^{(11)} q_n^3 &= -z_2 \\ q_1^3 + K_{24}^{(21)} q_2^1 + K_{25}^{(22)} q_2^2 + \dots + K_{2(3n-2)}^{(21)} q_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(21)} q_n^2 + K_{2(3n)}^{(21)} q_n^3 &= -z_3 \\ \dots & \\ q_n^1 + K_{(3n-1)(3n)}^{(3n-2)} q_n^2 &= -z_{3n-1} \end{aligned} \right\} (16)$$

найдем произведение узловых перемещений. Подставив их в выражение (10), определим

$$\chi = \frac{1}{2} (q^T \hat{D} q + z^T \bar{I} z) - q^T P \quad (17)$$

где $\hat{D} = \|\hat{d}_v\|$ — диагональная матрица порядка $3n$, \bar{I} — единичная матрица порядка $3n-1$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_{3n-1})^T$:

$$K_b^{(0i)} = -K_{ij}, i \in M = \{1, 2, \dots, 3n\}; K_{1j}^{(0i)} = -K_{1j}, j \in \{2, 3, \dots, 3n\}$$

$$K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{(i-1)j}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \bar{M} = \{1, 2, \dots, 3n-1\},$$

$$i \in \{r, \dots, 3n\}, j \in \{r+1, \dots, 3n\}$$

$$\hat{d}_v = K_{ii}^{(0i)} - \sum_{j=1}^{i-1} (K_{ij}^{(1i)})^2 - 1, i \in \bar{M}; \hat{d}_{(3n-1)(3n)} = K_{(3n-1)(3n)}^{(01)} - \sum_{i=1}^{3n-1} (K_{i(3n)}^{(3n-1)})^2$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$ векторы-столбцы порядка $6n-1$,

$D = \|d_q\| = \begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & \bar{I} \end{pmatrix}$ — диагональная матрица порядка $6n-1$, тогда

выражение (17) примет вид

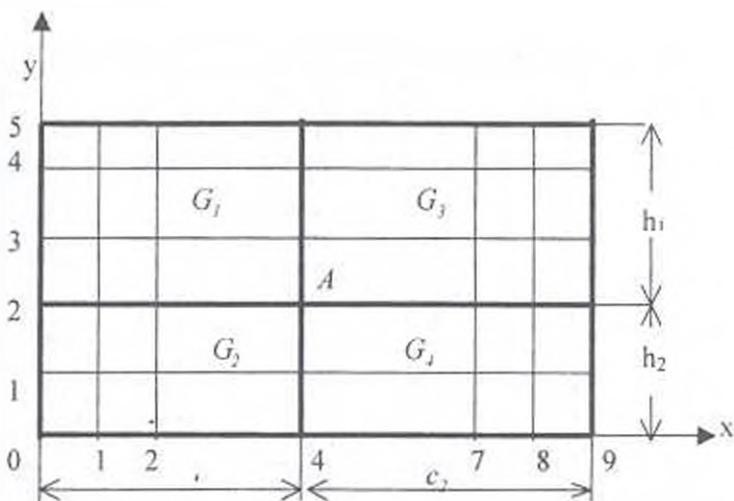
$$\chi = \frac{1}{2} X^T D X - C^T X$$

Обозначим через $A = (A_1, A_2, \dots, A_{6n-1})$ матрицу коэффициентов системы уравнений (14) и (16), где $A_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{(6n-1)i})^T$. Тогда, взамен задачи (15), для определения искомого вектора X получаем следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \left\{ C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \mid AX = 0, \text{ граничные условия} \right\} \quad (18)$$

Алгоритм решения задачи (18) приведен в [2].

В качестве примера рассмотрим задачу кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением. Стержень состоит из четырех различных материалов, для которых $G_1 = G$, $G_2 = 1.5G$, $G_3 = 2G$, $G_4 = 3G$. Рассмотрим случай, при котором значения величин $c_1 = 8$, $c_2 = 10$ и $h_1 = 6$, $h_2 = 4$. Для решения задачи используем сегму 9×5 , как это показано на фиг. 4.



Фиг. 4

Учитывая, что функция напряжения $\Phi(x, y)$ и ее производные на границе области принимают нулевые значения, граничные условия принимают вид

$$\Phi(i, 0) = 0, \quad \Phi(i, 5) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(i, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(i, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(i, 5) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(i, 5) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$\Phi(0, i) = 0, \quad \Phi(9, i) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, i) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(9, i) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(9, i) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

Из остальных (ненулевых) узловых значений функции напряжения $\Phi(x, y)$ и ее производных составим искомый вектор

$$\Phi = (\Phi(1, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(1, 1), \dots, \Phi(8, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(8, 1),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(8, 1), \dots, \Phi(8, 5), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(8, 5), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(8, 5))'$$

порядка 96, в соответствии с которым сформируем матрицу жесткости K и вектор P для всей области (они имеют порядок 96). Используя формулы (14) и (15), составим матрицу H порядка 76×96 .

Для формирования матриц K и H , а также вектора P написана программа на языке $C++$. С использованием этой программы вычислены узловые значения функции напряжения $\Phi(x, y)$ и ее производные как без учета, так и с учетом условий непрерывности (14). Результаты вычисления приведены в таблице.

Таблица

Узловы- ые точки	Без учета условий непрерывности			С учетом условия непрерывности		
	$\frac{I}{G\Omega} \Phi$	$\frac{I}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$\frac{I}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$\frac{I}{G\Omega} \Phi$	$\frac{I}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$\frac{I}{G\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$
(1,1)	5,47138	-1,07288	1,53547	5,39658	-0,0014618	-0,00349697
(2,1)	8,45944	-2,98851	1,93878	8,19551	-0,00578593	-0,00219558
(3,1)	10,3409	-1,35945	-0,0488687	9,83763	-0,0082692	-0,00147366
(4,1)	12,1714	-3,71379	1,30935	11,5018	-0,00297101	-0,00130549
(5,1)	14,8915	-3,89703	0,518999	14,1383	0,00571915	-0,00057849
(6,1)	15,1935	-1,0365	0,350644	14,4425	0,0121126	0,000384003
(7,1)	13,4942	-3,38453	-1,27966	12,9212	0,0131587	0,00182721
(8,1)	9,15736	-1,8583	-2,04921	8,96637	0,00842532	0,00334576
(1,2)	8,56299	0,192798	2,06399	8,29507	-0,0209431	-0,00646522
(2,2)	12,4095	0,824383	1,57654	11,761	-0,0410703	-0,00452899
(3,2)	15,4306	-0,611287	1,51656	14,411	-0,0547577	-0,0032087
(4,2)	18,1188	-1,04225	1,93676	16,8288	-0,0563389	-0,00189062
(5,2)	21,7314	-0,907023	0,856662	20,1625	-0,0492724	0,00114435
(6,2)	22,0555	-0,906719	-0,5936	20,5169	-0,0380523	0,00450134
(7,2)	19,1384	-0,592981	-2,15786	17,9633	-0,0253794	0,00752448
(8,2)	12,1624	-0,0937138	-3,49364	11,7178	0,0126091	0,0081816
(1,3)	8,16861	0,380364	2,21983	7,94828	-0,068224	-0,0108953
(2,3)	12,1455	0,6608	1,72053	11,5848	-0,128795	-0,0127538
(3,3)	15,2051	0,780233	1,36031	14,3418	-0,171569	-0,0137733
(4,3)	17,9444	0,838222	1,57201	16,7248	-0,188656	-0,0138354
(5,3)	21,3571	1,02112	0,699133	19,0845	-0,181831	-0,00965259
(6,3)	21,5742	1,0662	-0,689929	20,164	-0,155245	-0,00346038
(7,3)	18,5577	0,929735	-2,28301	17,5117	-0,112927	0,00357048
(8,3)	11,6033	0,572016	-3,60309	11,2342	-0,0594204	0,00783021
(1,4)	5,65366	0,53424	1,1493	5,60782	-0,0873083	-0,00894384
(2,4)	9,27194	1,06486	1,31035	9,03533	-0,164215	-0,0115512
(3,4)	11,7022	1,34853	1,12701	11,2928	-0,214215	-0,0130801
(4,4)	13,8804	1,44568	2,4196	13,2062	-0,243649	-0,0136087
(5,4)	16,4382	1,67264	0,842973	15,7295	-0,237672	-0,010419
(6,4)	19,6152	1,7108	-0,384169	15,921	-0,204917	-0,00550582
(7,4)	14,3336	1,4348	-1,45919	13,8345	-0,17088	0,00012946
(8,4)	9,09453	0,823803	-2,05532	8,94821	-0,074266	0,0003715

Составляя соответствующие значения, приведенные в таблице с учетом условия непрерывности и без ее учета, заметим, что различие значений функции напряжения не превышает 10 процентов, а различие в значениях касательных напряжений $\left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right\}$ несопоставимо. Следовательно, определение значений касательных напряжений без учета условий непрерывности приводит к неверному результату.

Известно [1], что при $G_2 G_3 - G_1 G_4 = 0$ функция $\Phi(x, y)$ является аналитической по всей области, и напряжения не имеют особенностей. Вышеприведенный пример расчета относится к этому случаю. В дальнейшем в других работах нами будет рассмотрен случай

$$G_2 G_3 - G_1 G_4 \neq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Кручение стержня с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. № 6. С. 3-16.
2. Геворкян Г.А. Об одном методе расчета усилий в элементах ферм. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №. 2. С. 56-62.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра. 1974. 240 с.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
23.06.2005