

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՎԱՆԵՄՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2005

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА СОСТАВНОГО КЛИНА  
С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Агаларян О.Б., Таманян Г.Ю.

Հ. Ռ. Աղալարյան, Գ. Յ. Թամանյան

Երկայնական սահմի խնցիղ կամայական երկարությամբ և զորքով շառավղային ճար պարունակող քաղաքրյալ սեպի համար տարբեր եզրային պայմանների անկայությամբ

Աշխատանքը նվիրված է երկայնական սահմի պայմաններում տեղավորությունների և լարումների զայաի որոշմանը քաղաքրյալ մաթմնոմ, որը կազմված է երկու առածգական անվերջ սեպերից և միաչման փմի վրա պարունակում է շառավղային ճար՝ արտաքին երկաչմերի վրա դրված երեք տիպի պայմանների անկայությամբ: Ընդ որում, արտաքին մակերևույթից ճարի զաչարի պտնված հեռավորությունից կախված, ստազված ինտեչրալ հավասարումների լուծոմնների կատպաութը և հետապատությունը սպառոմ է ճարի դիրքի և երկարության քոլոր հնարավոր դեպքերը: Որոշված են միաչման զաչարի շրջակայքի չարվածադեֆորմաչիոն վիճակը քնութաչորող սահմապտոտիկական քանածները և համապատասխան եչակիրյան վորմակիչները:

O. B. Aghalaryan, G. Yu. Tamanyan

On the problem of longitudinal shear of compound wedge with the radial crack of unrestricted length under the different boundary conditions

In the article the problem of longitudinal shear of two wedges made from different materials that have arbitrary angles is considered. On the base of received solution are determined both, the behavior of stress field and the coefficients of stress concentration in depend on the values of external loads, wedges angles and boundary conditions.

Տալաք քոսաչառնա որքեմեկոնա և սսոնալա ադգիլոսկոյա մաթմնոմ, որը կազմված է երկու առածգական անվերջ սեպերից և միաչման փմի վրա պարունակում է շառավղային ճար՝ արտաքին երկաչմերի վրա դրված երեք տիպի պայմանների անկայությամբ: Ընդ որում, արտաքին մակերևույթից ճարի զաչարի պտնված հեռավորությունից կախված, ստազված ինտեչրալ հավասարումների լուծոմնների կատպաութը և հետապատությունը սպառոմ է ճարի դիրքի և երկարության քոլոր հնարավոր դեպքերը: Որոշված են միաչման զաչարի շրջակայքի չարվածադեֆորմաչիոն վիճակը քնութաչորող սահմապտոտիկական քանածները և համապատասխան եչակիրյան վորմակիչները:

В настоящей статье рассматривается задача продольного сдвига о двух клиньях, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Предполагается, что на общей грани составного клина содержится трещина произвольного расположения и длины. На внешних гранях принимаются три вида граничных условий: первый, когда обе грани свободны, второй, когда обе грани жестко защемлены, и третий, когда одна грань свободна, а вторая жестко защемлена. Для всех этих случаев внешние касательные нагрузки приложены к берегам трещины, которые равны по величине и противоположны по направлению. Задача решается при помощи интегрального преобразования Меллина и соответствующих интегральных уравнений. На основе полученного решения определяются как поведение поля напряжений, то есть показатель особенности напряжений в окрестностях угловой точки и в концах трещины, так и коэффициенты концентрации напряжений в зависимости от величин внешних нагрузок, углов раствора и граничных условий.

Из решенных краевых задач для составных тел отметим [1-4]. Необходимо подчеркнуть, что в случае приближения трещины к внешней поверхности решение соответствующего класса задач сталкивается с преодолением значительных математических трудностей [5].

1. Выберем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , начало

которой находится на вершине соединения клиньев, а ось  $(OZ)$  направлена вдоль оси составного тела. Тогда, по определению продольного сдвига, из компонент вектора перемещений не равны нулю лишь компоненты перемещения  $W_k = W_k(r, \varphi)$  ( $k=1,2$ ) для первого и второго клиньев соответственно, поэтому уравнение равновесия и условие совместности принимают вид:

$$\frac{\partial \tau_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rz}^{(k)}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\varphi z}^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)}}{r} = 0 \quad (1.1)$$

Эти уравнения необходимо решить со следующими граничными условиями: для первого случая

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, -\alpha_1) = 0; \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, \alpha_2) = 0 \quad \text{при} \quad (0 \leq r \leq \infty) \quad (1.2)$$

которые заменяются условиями  $W_1(r, -\alpha_1) = 0; W_2(r, \alpha_2) = 0$ , или  $W_1(r, -\alpha_1) = 0; \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, \alpha_2) = 0$  для второго и третьего случаев соответственно.  $\alpha_1$  — углы растворов клиньев. На общей грани имеем условия непрерывности составляющих напряжений и перемещений:

$$\begin{cases} W_1(r, 0) = W_2(r, 0) \\ \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, 0) \end{cases} \quad \text{при} \quad r \in (a, b) \quad (1.3)$$

На берегах трещины заданы внешние нагрузки  $\tau_0(r)$ , то есть

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, 0) = \tau_0(r), \quad r \in (a, b) \quad (1.4)$$

где  $a$  и  $b$  — координаты концов трещины.

Будем рассматривать первую граничную задачу, а для остальных задач приведем лишь окончательные результаты. Имея целью охватить случай произвольного расположения трещины на оси  $(O, z)$ , мысленно отделим клинья друг от друга, обозначив неизвестные касательные напряжения на интервалах  $[0, a]$  и  $[b, \infty)$  через  $\tau_1(r)$  и  $\tau_2(r)$  соответственно. Тогда построение решения первой краевой задачи для каждого клина при помощи интегрального преобразования Меллина [4] дает для неизвестных компонент перемещения следующие выражения:

$$W_k(r, \varphi) = \frac{(-1)^k c^{c+i\pi}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(\alpha_k + (-1)^k \varphi)}{s \sin \alpha_k s} \times \\ \times \left[ \int_0^a \tau_1(t) \chi^s dt + \int_b^\infty \tau_2(t) \chi^s dt + \int_a^b \tau_0(t) \chi^s dt \right] r^{-s} ds \quad (1.5)$$

здесь  $i$  — мнимая единица. Исходя из поведения поля напряжений в окрестности соединения и на бесконечности следует, что  $(c)$  находится в интервале  $(-1 + \delta < c < 0; \delta > 0)$ .

Используя условие равенства перемещений:  $W_1(r, 0) = W_2(r, 0)$  при  $r \in (a, b)$  приходим к уравнению относительно неизвестных касательных напряжений  $\tau_1(r)$  и  $\tau_2(r)$ . С целью преобразования полученного уравнения в удобную форму, преобразуем первое условие (1.3) следующим образом: продифференцируем его по  $r$  и введем неизвестную

функцию  $\varphi(r)$  следующим образом:

$$\gamma_n^{(1)} - \gamma_n^{(2)} = \varphi_1(r) = \begin{cases} \varphi_1(r): & r \in (a, b) \\ 0: & r \notin (a, b) \end{cases} \quad (1.6)$$

$$G_2 \tau_n^{(1)}(r, 0) - G_1 \tau_n^{(2)}(r, 0) = G_1 G_2 \varphi_1(r)$$

Тогда, применяя преобразование Меллина к граничной задаче (1.1) — (1.6) и после обратного преобразования, получим для  $\tau_1(r)$  следующие выражения:

$$\tau_1(r) = \int_a^b K_1(\zeta, r) \varphi_1(\zeta) d\zeta \quad (1.7)$$

$$\text{где } K_1(\zeta, r) = -\frac{2}{\pi(k_1 + 1)G_2 r} \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } \alpha_1 y \text{ sh } \alpha_2 y \sin\left(\ln \frac{r}{r}\right) y dy}{\text{sh}(\alpha_1 + \alpha_2)y + k_2 \text{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (1.8)$$

$k_1 = G_1/G_2$ ;  $k_2 = \frac{1-k_1}{1+k_1}$ ;  $G_1, G_2$  — модули сдвига материалов.

Подставляя (1.7) в уравнение равенства перемещений, после некоторых преобразований получим следующее уравнение относительно неизвестной функции  $\varphi_1(\zeta)$ :

$$\int_a^b [K_{11}(\zeta, r) + K_{12}(\zeta, r)] \varphi_1(\zeta) d\zeta = f_1(r) \quad (1.9)$$

$$\text{где } K_{11}(\zeta, r) = \int_0^a K_1(\zeta, t) dt \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)s}{s \sin(\alpha_1 s) \sin(\alpha_2 s)} \left(\frac{t}{r}\right)^s ds$$

$$K_{12}(\zeta, r) = \int_a^b K_1(\zeta, t) dt \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)s}{s \sin(\alpha_1 s) \sin(\alpha_2 s)} \left(\frac{t}{r}\right)^s ds \quad (1.10)$$

$$f_1(r) = -\int_a^b \tau_n(t) dt \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(1+k_1)\sin(\alpha_1 + \alpha_2)s - (1-k_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)s}{s(\cos(\alpha_1 - \alpha_2)s - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)s)} \left(\frac{t}{r}\right)^s ds$$

При выводе уравнения (1.9) существенно было использовано условие уравновешенности внешних нагрузок. Заметим, что если (а) достаточно велико, а (в) достаточно мало, то из условия (1.4) для определения  $\varphi_1$  получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\int_a^b K_1(\zeta, r) \varphi_1(\zeta) d\zeta = \tau_0(r) \quad (1.11)$$

где вид  $K_1(\zeta, r)$  дан в (1.8).

В общем случае, когда  $a \rightarrow 0$  не следует, что скачок перемещения в точке, соответствующей началу координат, принимает конечное ненулевое значение, подобно выходящей трещине. В действительности, исходя из непрерывного характера скачка перемещения, он принимает нулевое значение и соответствует тому случаю, когда на вершине клиньев действует сосредоточенная нагрузка. Этот случай является промежуточ-

ным между случаем, имеющим место при малых значениях параметра  $h$  и случаем, соответствующим наперед выходящему на внешнюю поверхность конца трещины, решение которого осуществляется иным путем [8], поскольку в этом случае метод интегральных преобразований не применим. Поэтому, необходимо подчеркнуть, что в рассматриваемом случае предельный переход ( $a \rightarrow 0$ ) невозможен, в то время как в (1.9) он очевиден. Таким образом, указанные два класса задач исчерпывают всевозможные положения трещины. Уравнение (1.9) решается с использованием метода Ньютона-Канторовича, а (1.11) — с помощью выделения сингулярной части ядра и последующим применением метода ортогональных многочленов Чебышева.

С этой целью, проведя интегрирование по частям, с учетом условия  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , которые всегда достигнуты соответствующим выбором знаков перед слагаемыми в выражении введенной функции, получим

$$\int_a^b \varphi(t) t^s dt = -\frac{1}{s+1} \int_a^b t^{s+1} \varphi'(t) dt$$

После подстановки, принимая  $s = 0$ , имея значение интеграла [5]

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{th} Ay}{y} \cos(\nu y) dy = -\ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi \nu}{4A} \right|$$

Окончательно уравнение (1.11) запишется в виде

$$\frac{1}{\pi(1+k)} \int_a^b \left[ -\ln \left| t^{\frac{\pi}{2A}} - r^{\frac{\pi}{2A}} \right| + R(t, r) \right] t \varphi'(t) dt = \tau(r) \quad (1.12)$$

где

$$R(t, r) = K_1^{(1)}(r, t) + K_1^{(2)}(r, t) \quad (1.13)$$

$$K_1^{(1)}[t, r] = \int_0^{\pi} \left[ \frac{y}{1+y^2} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 y) \operatorname{sh}(\alpha_2 y)}{\operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2) y + k, \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) y} - \frac{\operatorname{th} Ay}{y} \right] \cos \left( \ln \frac{t}{r} \right) y dy \quad (1.14)$$

$$K_1^{(2)}(t, r) = -\frac{2t}{\pi r(1+k)} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+y^2} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 y) \operatorname{sh}(\alpha_2 y) \sin(\ln \gamma y) dy}{\operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2) y + k, \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) y}$$

$$A = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + k(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

При помощи замены переменных:

$$\xi = t^{c_0} - (a^{c_0} + b^{c_0})/2, \quad x = r^{c_0} - (a^{c_0} + b^{c_0})/2 \quad (1.15)$$

интегральное уравнение приводится к симметричному интервалу  $(-c, c)$ , то есть

$$\frac{1}{\pi(1+k)} \int_{-c}^c \left[ \ln \frac{1}{|x-\xi|} + R_1(\xi, x) \right] \varphi_1(\xi) d\xi = \tau_1(x) \quad (1.16)$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \frac{2A}{\pi} (\xi + d)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \varphi(\xi(r)) \cdot \tau_1(x) - G_2(x + d)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \tau(r(x))$$

$$R_1(\xi, x) = R[r(x), \xi(\xi)], \quad C_0 = \pi/2A$$

Разлагая искомое решение в ряд по собственным функциям сингулярного уравнения (1.10):

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \tau^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n\left(\frac{\xi}{c}\right) \quad (1.17)$$

и используя свойства ортогональных полиномов Чебышева первого рода, приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X_n$ :

$$X_n + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{(1)} X_m = B_n^{(1)} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (1.18)$$

где 
$$K_{mn}^{(1)} = \frac{2m}{\pi^2} \int_{-c}^c \int_{-c}^c \frac{R_1(\xi, x) T_n\left(\frac{\xi}{c}\right) T_m\left(\frac{x}{c}\right)}{\sqrt{c^2 - \xi^2} \sqrt{c^2 - x^2}} d\xi dx, \quad B_n^{(1)} = m \int_{-c}^c \frac{\tau_1(x) dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

При этом, условие  $\int \varphi(t) dt = 0$ , с учетом того, что скачок компонентов перемещения в концах трещины равен нулю, приводит к нулевому значению коэффициента  $X_0$ .

Квазиполная регулярность бесконечной системы доказывается аналогично [6, 7]. Решая последнюю систему и имея  $\varphi(t)$ , коэффициенты интенсивностей касательных напряжений, возникающих вне трещины, на ее продолжении определяются по выражениям:

$$K_{III}^{(1)}(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{r-a} \frac{\partial w_z(r, 0)}{\partial r}, \quad K_{III}^{(1)}(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow b} \sqrt{b-r} \frac{\partial w_z(r, 0)}{\partial r}$$

Далее для определения асимптотики компонент перемещения и напряжения в окрестности точки соединения, после использования обратного преобразования Меллина, теоремы о вычетах, леммы Жордана, получим:

$$W_1^{(1)}(r, \varphi) = K_{III}^{(1)} F_1(r, \varphi) r^{-\alpha_1}, \quad \tau_{\varphi}^{(1)}(r, \varphi) = K_{III}^{(1)} G_1 \frac{\partial F_1(r, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-\alpha_1 - 1}$$

$$\tau_{\varphi}^{(1)}(r, \varphi) = K_{III}^{(1)} G_1 F_1(r, \varphi) r^{-\alpha_1 - 1} \quad (1.19)$$

где

$$F_1(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{G_2 \cos(\alpha_1 + \varphi) s_1}{\sin(\alpha_1 s_1)} & \text{при } -\alpha_1 < \varphi < 0 \\ \frac{G_1 \cos(\alpha_2 + \varphi) s_1}{\sin(\alpha_2 s_1)} & \text{при } 0 < \varphi < \alpha_2 \end{cases} \quad (1.20)$$

$$K_{\text{III}}^{(1)} = \frac{\sin(\alpha_1 s_1) \sin(\alpha_2 s_1) \int \varphi_1(t) t^{\lambda} dt}{(G_1 + G_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) s_1 + (G_1 - G_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) s_1}$$

$s_1$  — первый отрицательный корень уравнения:

$$\Delta_1(s) = (k_1 + 1) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) s + (k_1 - 1) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) s = 0$$

Отметим, что последнее уравнение совпадает с уравнением, полученным в работе [2], где рассматривается задача о кручении составного призматического стержня. Эти задачи в асимптотическом смысле эквивалентны [8]. Приведем окончательные асимптотические выражения компонентов перемещения и напряжения второй и третьей задач в окрестности вершины соединения клиньев. Для второй задачи они имеют вид:

$$W_2^{(2)}(r, \varphi) = K_{\text{III}}^{(2)} F_2(r, \varphi) r^{-\lambda}, \quad \tau_{\varphi}^{(2)}(r, \varphi) = K_{\text{III}}^{(2)} G_1 \frac{\partial F_2(r, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-\lambda-1} \quad (1.21)$$

$$\tau_{\varphi}^{(2)}(r, \varphi) = K_{\text{III}}^{(2)} G_2 F_2(r, \varphi) r^{-\lambda-1}$$

где

$$F_2(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{G_2 \cos(\alpha_1 + \varphi) s_1}{\sin(\alpha_1 s_1)} & \text{при } -\alpha_1 < \varphi < 0 \\ -\frac{G_1 \cos(\alpha_2 + \varphi) s_1}{\sin(\alpha_2 s_1)} & \text{при } 0 < \varphi < \alpha_2 \end{cases}$$

$$K_{\text{III}}^{(2)} = \frac{2 \sin(\alpha_2 s_1) \cos(\alpha_1 s_1) \int \varphi_1(t) t^{\lambda} dt}{(G_1 + G_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) s_1 + (G_1 - G_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) s_1}$$

$s_1$  — первый отрицательный корень уравнения:

$$(k_1 + 1) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) s + (k_1 - 1) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) s = 0.$$

А для третьей задачи

$$W_3^{(3)}(r, \varphi) = K_{\text{III}}^{(3)} F_3(r, \varphi) r^{-\lambda}, \quad \tau_{\varphi}^{(3)}(r, \varphi) = K_{\text{III}}^{(3)} G_2 \frac{\partial F_3(r, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-\lambda-1} \quad (1.22)$$

$$\tau_{\varphi}^{(3)}(r, \varphi) = K_{\text{III}}^{(3)} G_1 F_3(r, \varphi) r^{-\lambda-1}$$

где

$$F_3(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{G_2 \cos(\alpha_1 + \varphi) s_1}{\sin(\alpha_1 s_1)} & \text{при } -\alpha_1 < \varphi < 0 \\ -\frac{G_1 \cos(\alpha_2 + \varphi) s_1}{\sin(\alpha_2 s_1)} & \text{при } 0 < \varphi < \alpha_2 \end{cases}$$

$$K_{\text{III}}^{(3)} = \frac{2 \sin(\alpha_2 s_1) \cos(\alpha_1 s_1) \int \varphi_3(t) t^{\lambda} dt}{(G_1 + G_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) s_1 + (G_1 - G_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) s_1}$$

$s_1$  — первый отрицательный корень уравнения:

$$(k_1 + 1)\cos(\alpha_1 + \alpha_2)s + (k_1 - 1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)s = 0 \quad (1.23)$$

В обоих случаях неизвестная функция  $\varphi_1(r)$  определяется или из соответствующих сингулярных уравнений, или из уравнений типа уравнения (1.9). Окончательный вид бесконечных алгебраических систем, а также коэффициентов интенсивности в концах трещины, для этих случаев не очень отличаются от соответствующих выражений для первой задачи. Вопросы, связанные с явлением малонапряженности для этих случаев, изучены в [9], где в частности, для третьего случая получено, что если  $G_1 < G_2$ , то каковы бы ни были значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi/2$ ), всегда можно выбрать такое значение параметра  $G_1/G_2$ , что в вершине соединения клиньев напряжения бесконечно увеличиваются. Такое явление для первой и второй краевой задачи не имеет места. Это означает, что прочность составного тела можно повысить, если численное значение модуля сдвига клина с защемленной гранью выбрать достаточно большим по сравнению с численным значением модуля второго клина. Проведя численный анализ полученных основных механических величин, можно определить количественное взаимоотношение коэффициентов интенсивности и показателя особенностей для различных серий физических и геометрических величин и на их основе сделать практические важные выводы для прочностных свойств составного тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Proc. fifth U.S. National Congress of Appl. Mech., 1966.
2. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1987.
3. Боджи Д.В. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов. // Прикладная механика. 1973. № 4.
4. Александров В. М. Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. 1986.
5. Мазья В.Г. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 1.
6. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1972. Т. 25. № 2. С. 15–36.
7. Акопян В.Н. Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, ослабленного трещинами. // Докл. НАН РА. 1992. Т. 93. № 4.
8. Агаларян О.Б. К задаче кручения осесимметричного упруго-пластического тела с трещиной. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1978. Т. 31. № 6. С. 36–41.
9. Агаларян О.Б. Всесоюзная конференция по неоднородным структурам. Тезисы докладов Львов. 1987.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
27.12.2001

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Баблоян А.А., Барсегян В.В., Геворкян Г.А., Манусаджян В.Р.

Ա. Հ. Բաբլոյան, Վ. Վ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորգյան, Վ. Ի. Մանուսայան

ՈՒՂՊԱՆԿՆԵՐԻ ԿՄՐՎԱԾՐՈՎ ԺԱՅՐԻ ՈՂՐԺԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԽՈՃՈՒՐ ՎԵՐՊԱՎՈՐ ՄԱՐՐԵՐԻ ԺՅՐՈՂԻ ԴՐ ԸՆԿՐՈՒՄԵՐԿԱՆ ԺԱՄԻՆ

Առաջարկվում է վերափոխ տարրերի ժյրոՂի ձևափոխված տարրերակ, որոձ ուղղանկյոն կտրվածքով ժղճրի ուղրձոն խնդիրնրի լոձոուր հանգելվոձ է ըառակոսային ծրաքավորոս խնդիրնրի:

A. H. Babloyan, V. V. Barsегyan, G. A. Gevorgyan, V. R. Manasajyan

A Modified Final Elements Method of Solving the Torsion of Bars with Rectangular Section

A modified final elements method is suggested where the problems of solving the torsion of bars with rectangular section are reduced to quadratic programming ones.

Предлагается модификация метода конечных элементов, при котором решения задач кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением сводятся к задачам квадратичного программирования.

С помощью вариационного исчисления задача кручения призматических стержней сводится к следующей задаче [3]: требуется найти функцию напряжения  $\Phi$ , для которой взятый по всей области двойной интеграл

$$\chi = \iint \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{G} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{G} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - 2\Theta\Phi \right] dx dy \quad (1)$$

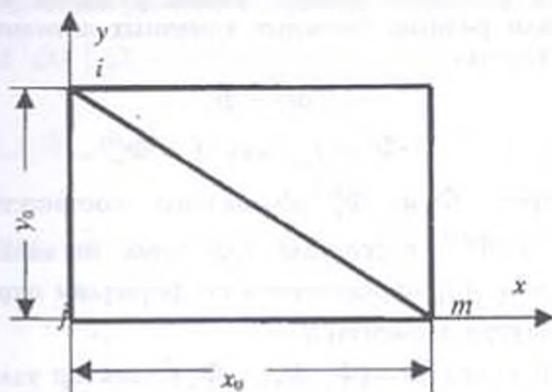
принимает минимальное значение, при условии, что  $\Phi$  удовлетворяет граничным условиям рассматриваемой частной задачи. Здесь,  $G(x, y)$  – модуль сдвига,  $\Theta$  – угол закручивания на единицу длины стержня.

Решение задачи кручения составного стержня с прямоугольным поперечным сечением решим с помощью элементов четырехугольной формы, составленной из двух треугольников.

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на  $s \in \bar{N} = \{1, 2, \dots, \bar{N}\}$  конечных элементов четырехугольной формы с узлами  $i, j, m, k$  (фиг. 1). Узловые значения функции  $\Phi$  для  $s$ -ого конечного элемента зададим вектором  $\Phi^s = (\Phi_i^s, \Phi_j^s, \Phi_m^s, \Phi_k^s)^T$ .

Обозначим через  $\chi^s$  величину функции (1) для  $s$ -ого элемента. Произведя интегрирование, выражение (1) перепишем в виде

$$\chi^s = \frac{1}{2} (\Phi^s)^T h^s \Phi^s + (\Phi^s)^T P^s, \quad (2)$$



Фиг. 1

где

$$h^s = \frac{1}{2G^s x_0 y_0} \begin{vmatrix} x_0^2 + y_0^2 & -y_0^2 & -x_0^2 & 0 \\ -y_0^2 & x_0^2 + y_0^2 & 0 & -x_0^2 \\ -x_0^2 & 0 & x_0^2 + y_0^2 & -y_0^2 \\ 0 & -x_0^2 & -y_0^2 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$P_s = -\frac{x_0 y_0 \Theta}{3} (1 \ 2 \ 2 \ 1)^T \quad (4)$$

Очевидно, что для функции (1) имеет место

$$\chi = \sum_{i=1}^n \chi_i^s = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} (\Phi^i)^T h^s \Phi^i + (\Phi^i)^T P_s \right) \quad (5)$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [4], для определения искомых векторов  $\Phi^s, s \in \{1, 2, \dots, n\}$  получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} (\Phi^i)^T h^s \Phi^i + (\Phi^i)^T P_s \right) \mid \text{условие совместности,} \right. \\ \left. \text{краевые условия} \right\} \quad (6)$$

Для определения касательных напряжений в треугольниках  $ijm$  и  $itm$  соответственно имеем

$$\tau^{i,jm} = (\tau_{xy}^{i,jm}, \tau_{yz}^{i,jm})^T = H^{i,jm} \Phi^{i,jm}, \quad \tau^{i,tm} = (\tau_{xy}^{i,tm}, \tau_{yz}^{i,tm})^T = H^{i,tm} \Phi^{i,tm} \quad (7)$$

где

$$H^{i,jm} = \begin{vmatrix} 0 & -y_0 & y_0 \\ x_0 & -x_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^{i,tm} = \begin{vmatrix} -y_0 & 0 & y_0 \\ 0 & -x_0 & x_0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\Phi^{i,jm} = (\Phi_1^i, \Phi_2^i, \Phi_3^i)^T, \quad \Phi^{i,tm} = (\Phi_1^i, \Phi_2^i, \Phi_3^i)^T$$



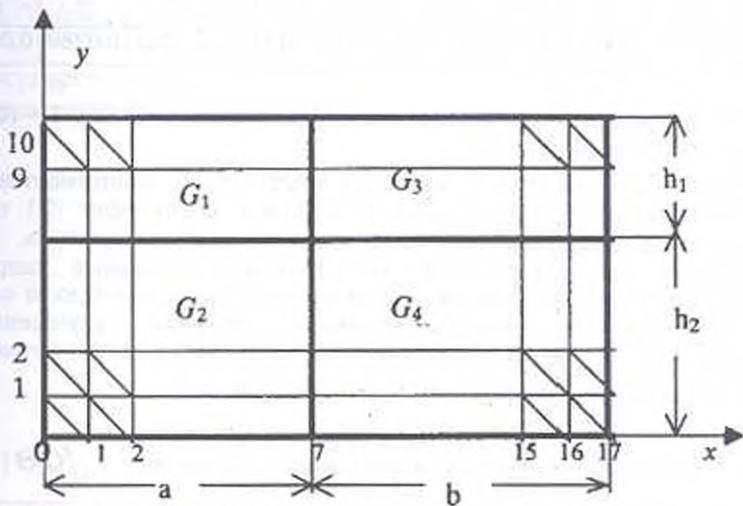
Поступая аналогично работе [2], задачу (14) представим в виде

$$\min \left\{ C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \mid AX = 0, \text{ граничные условия} \right\} \quad (17)$$

Здесь  $\bar{\Phi} = (\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \dots, \Phi_{2n-1})^T$ ;  $X = \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \end{pmatrix}$  и  $C = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$  — векторы — столбцы порядка  $2n-1$ ;  $D = \begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  — диагональная матрица порядка  $2n-1$ ;  $\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{d}_n \end{pmatrix}$  — диагональная матрица порядка  $n$ , где

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_i &= h_i^{(0)} - \sum_{j=1}^{i-1} (h_{ij}^{(0)})^2 - 1, i \in \bar{M} \\ \hat{d}_n &= h_n^{(0)} - \sum_{j=1}^{n-1} (h_{nj}^{(0)})^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$I$  — единичная матрица порядка  $n-1$ ;  $A = (A_1, A_2, \dots, A_{2n-1})$  — матрица коэффициентов системы уравнений (15) и (13), где  $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{n+j-1})^T$ .



Рассмотрим задачу кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением. Стержень состоит из четырех различных материалов, для которых  $G_1 = G$ ,  $G_2 = 1,5G$ ,  $G_3 = 2G$ ,  $G_4 = 3G$ . Рассмотрим случай, при котором значения величин  $a = 7$ ,  $b = 10$  и  $h_1 + h_2 = 10$ . Для решения задачи используем сегму  $10 \times 16$ , как это показано на фиг. 2.

Учитывая, что функция напряжений  $\Phi(x, y)$  на границе области принимает нулевое значение, граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi(i, 0) = 0, \quad \Phi(i, 10) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 17\}; \\ \Phi(0, i) = 0, \quad \Phi(17, i) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 9\}. \end{aligned}$$

Из остальных (ненулевых) узловых значений функции напряжения  $\Phi(x, y)$  составим искомый вектор

$$\Phi = (\Phi(1,1), \Phi(2,1), \dots, \Phi(16,1), \Phi(1,2), \Phi(2,2), \dots, \Phi(16,2), \dots, \Phi(1,9), \Phi(2,9), \dots, \Phi(16,9))^T \quad (19)$$

порядка 144, в соответствии с которым, используя формулы (4), (5) и (6), сформируем матрицу жесткости  $h$  и вектор  $P$  для всей области (они имеют порядок 144).

Для формирования матрицы жесткости  $h$  и вектора  $P$ , а также для проведения вычислений на языке C++ написана программа. Используя эту программу, вычислены узловые значения функции напряжения (19), а также значение жесткостей, задаваемых формулой

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^9 \Phi(i, j)}{Gn(a+b)(h_1 + h_2)} \quad (20)$$

в зависимости от соотношения величин  $h_1$  и  $h_2$ .

В табл. 1 приведено значение величин (20), для  $n = 198$ .

Таблица 1

$h_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h_2$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$C$	0,0598	0,0646	0,0789	0,0994	0,1170	0,1199	0,1042	0,0789	0,0562	0,0431

Отметим, что приведенные в табл.1 значения  $C$  на 5–10% меньше полученных по методу [1].

Как следует из табл. 1, значение жесткости  $C$  принимает наибольшее значение, если горизонтальная контактная линия (фиг. 2) проходит в непосредственной близости от середины поперечного сечения.

Исходя из соотношений (8), находим касательные напряжения в треугольниках. Осреднив два напряжения в треугольниках и отнеся их к центру тяжести четырехугольника, получим улучшенное поле напряжения. В табл. 2 и 3 приведены полученные таким путем значения касательных напряжения для случая  $h_1 = 5, h_2 = 5$ .

Таблица 2 (значение касательного напряжения  $\tau_{xz}/G\Theta$ )

1.019	1.002	1.243	1.010	0.853	0.733	0.671	1.054	0.599	0.221	-0.13	-0.49	-0.85	-1.24	-1.00	-2.22	-3.01
4.874	4.308	3.597	2.995	2.315	2.142	1.894	2.924	1.721	0.642	-0.40	-1.45	-2.53	-3.87	-4.92	-6.39	-8.33
7.835	7.768	5.751	4.852	4.07	3.425	2.940	4.422	2.717	1.03	-0.67	-2.30	-4.10	-5.99	-7.95	-10.1	-12.6
10.42	9.067	7.787	6.59	5.484	4.541	4.00	5.843	3.865	1.43	-0.91	-3.20	-5.71	-8.19	-10.8	-13.5	-16.3
11.44	10.05	8.671	7.328	6.019	4.785	3.284	7.251	4.413	1.889	-1.0	-3.68	-6.4	-9.17	-12.0	-14.9	-17.7
10.10	8.977	7.750	6.545	5.338	4.056	2.424	8.939	4.883	1.558	-0.88	-3.5	-5.74	-8.21	-10.7	-13.3	-15.7
8.129	7.114	6.125	5.171	4.254	3.381	2.652	4.824	3.071	1.193	-0.7	-2.0	-4.52	-6.48	-8.48	-10.5	-12.8
6.086	5.228	4.481	3.764	3.125	2.583	2.137	3.475	2.184	0.844	-0.51	-1.88	-3.27	-4.70	-6.18	-7.8	-9.53
5.902	5.242	4.731	4.297	3.819	3.607	3.398	2.219	1.344	0.513	-0.31	-1.14	-1.99	-2.88	-3.88	-4.87	-6.2
1.377	1.109	0.922	0.774	0.649	0.55	0.495	0.787	0.481	0.174	-0.10	-0.38	-0.67	-0.96	-1.29	-1.67	-2.22

Таблица 3 (значение касательного напряжения  $\tau_{yz}$  / G $\Theta$ )

1.619	1.84	2.685	3.947	11.81	13.41	14.81	16.54	18.19	19.01	19.01	18.48	7.13	15.04	12.13	8.237	3.011
1.636	1.465	5.769	8.837	10.6	12.09	13.31	14.68	16.02	16.74	16.81	16.19	4.89	12.87	10.1	5.573	2.306
1.345	3.887	5.087	8.029	8.673	11.03	12.13	13.32	14.47	15.83	15.19	14.6	13.35	11.43	8.847	5.644	1.948
1.223	3.57	5.685	7.518	8.031	10.21	11.27	12.37	13.41	14.13	14.23	13.68	12.49	10.66	8.21	5.21	1.791
8.20	0.55	0.79	1.0	1.25	1.74	3.35	3.55	2.27	2.01	1.94	1.87	1.77	1.6	1.36	0.98	0.37
1.05	3.04	4.78	6.27	7.49	8.34	8.23	9.2	11.1	11.8	11.9	11.5	10.6	9.1	7.13	4.63	1.63
1.01	2.94	4.69	6.2	7.44	8.35	8.9	9.82	11.0	11.7	11.8	11.3	10.4	8.87	6.86	4.38	1.51
1.04	3.03	4.84	6.4	7.7	8.73	9.52	10.5	11.5	12.1	12.1	11.7	10.7	9.1	7.08	4.52	1.56
1.15	3.32	5.23	6.86	8.24	9.37	10.3	11.3	12.4	13.0	13.0	12.6	11.5	9.9	7.79	5.01	1.77
1.38	3.86	5.89	7.59	9.01	10.2	11.3	12.5	13.8	14.4	14.5	14.0	13.0	11.3	9.08	6.11	2.22

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А.А., Мкртчян А.М. Кручение стержней с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. №6. С. 3-16.
2. Геворкян Г.А., Манусаджян В.Р. Об одной модификации метода конечных элементов для решения двумерных задач теории поля // Изв. НАН Армении и государственного инженерного университета Армении. 2004. Т. LVII. №3. С. 422-428.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра. 1974. 240с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.

Ереванский государственный  
университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию  
10.02.2005

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА КРАЯХ  
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Григорян Э. Х., Мелкумян А. С.

Է. Խ. Գրիգորյան, Ա. Ա. Մելքույան

Սահրային հարթ ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում  
գույպենե կիսասանկերը մետաղական շերտերի եզրերից

Դիտարկվում է սահրային հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը փոքր հաստության կիսասանկերը մետաղական գույպենե շերտեր (լեկտրոդներ) պարունակող պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում: Խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Նիմանի խնդրի ֆունկցիոնալ հավասարումների լուծմանը: Խնդրի լուծումը ստացված է փակ տեսքով: Լուսամասերված են դաշտի ֆիզիկական մեծությունների ասիմպտոտիկ վարքերը կեկտրոդների զազաքների շրջակայքերում: Ստացվել են ասիմպտոտիկ բանաձևեր տեղափոխության և կեկտրական պոտենցիալի համար կեկտրոդների միջև հեռու տիրույթներում: Յույց է տրված, որ ալիքային դաշտը բաղկացած է սիմետրիկ և Եակասիմետրիկ խնդիրների դաշտերի գումարից, որոնցից յոթարանյոթը պարունակում է զԵպի կիսասանկերը ալիքատարի ներքո տարածվող լոկալիզացված ալիք: Մանրամասնությամբ ուսումնասիրված է այդ ալիքների ինյալես գոյության ծարրը, այնպես էլ նրանց տարածման արագությունների կախվածությունը կեկտրոդների միջև եղած հեռավորությունից և կեկտրամեխանիկական կապի գործակալից: Իերված են բվային հաշվարկներ:

E. Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan

Diffraction of shear plane wave in piezoelectric media on the edges of parallel semi-infinite metallic strips

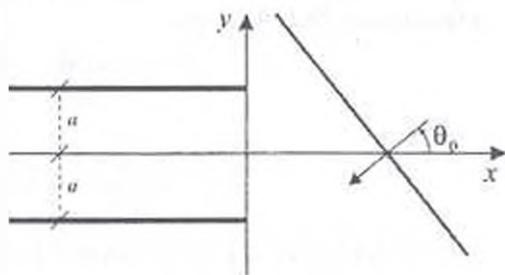
A problem of diffraction of shear plane wave in piezoelectric media containing parallel semi-infinite thin metallic strips (electrodes) is considered. The problem is reduced to solving functional equations of Riemann's problem of the theory of analytic functions. A closed form solution of the problem is obtained. Asymptotic behaviors of physical quantities in the neighborhoods of electrodes' tips are investigated. Asymptotic formulas for displacement and electric potential are obtained in the far field between the electrodes. It is shown that the wavefield consists of the sum of symmetric and anti-symmetric problems' wavefields, each of which contains a localized wave, which propagates into the semi-infinite waveguide. Both the questions of existence of these waves and the dependence of their wave speeds on the distance between the electrodes and on the electromechanical coupling coefficient are investigated in details. Numerical calculations are presented.

Рассматривается задача о дифракции сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве, содержащем параллельные полубесконечные металлические слои малой толщины (электроды). Задача сводится к решению функциональных уравнений задачи Римана теории аналитических функций. Решение задачи получено в замкнутом виде. Исследованы асимптотические поведения физических величин в окрестностях вершин электродов. Получены асимптотические формулы для перемещения и электрического потенциала в дальней зоне между электродами. Показано, что волновое поле состоит из суммы волновых полей симметричной и антисимметричной задач, каждая из которых содержит локализованную волну, распространяющуюся во внутрь полубесконечного волновода. Детально изучены как вопрос существования этих волн, так и зависимость их скоростей распространения от расстояния между электродами и от коэффициента электромеханической связи. Приведены численные расчеты.

1. Пусть из бесконечности распространяются сдвиговые плоские волны  $U_{11}e^{-i\omega t}$ ,  $\Phi_0 e^{-i\omega t}$ , где

$$U_0 = e^{-i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0)}, \quad \Phi_0 = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0)}$$

в пьезоэлектрическом пространстве класса 6mm гексагональной симметрии, причем, ось  $OZ$  совпадает с осью симметрии кристалла, содержащей параллельные металлические слои бесконечно малой толщины (фиг. 1). Задача заключается в определении волнового поля и в изучении волн, локализованных между электродами.



Фиг. 1.

В амплитудах задача сводится к решению уравнений [1]

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 U \quad (2)$$

со следующими контактными условиями на линии  $y = a$

$$\Phi(x, y)|_{y=a+0} = \Phi(x, y)|_{y=a-0} = p_+(x), \quad U(x, y)|_{y=a+0} = U(x, y)|_{y=a-0}$$

$$D_x(x, y)|_{y=a+0} - D_x(x, y)|_{y=a-0} = -\epsilon_{11} g_+(x), \quad \sigma_{yx}(x, y)|_{y=a+0} = \sigma_{yx}(x, y)|_{y=a-0}$$

и со следующими контактными условиями на линии  $y = -a$

$$\Phi(x, y)|_{y=-a+0} = \Phi(x, y)|_{y=-a-0} = q_-(x), \quad U(x, y)|_{y=-a+0} = U(x, y)|_{y=-a-0}$$

$$D_y(x, y)|_{y=-a+0} - D_y(x, y)|_{y=-a-0} = -\epsilon_{11} h_-(x),$$

$$\sigma_{yx}(x, y)|_{y=-a+0} = \sigma_{yx}(x, y)|_{y=-a-0}$$

где  $p_+(x) = q_-(x) = 0$  при  $x < 0$ , а  $g_-(x) = h_-(x) = 0$  при  $x > 0$ ,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $\bar{U}$  — амплитуда перемещений точек пространства,  $\Phi$  —

амплитуда электрического потенциала,  $\sigma_{yx} = \epsilon_{44} \frac{\partial U}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  — амплитуда

тангенциальных напряжений,  $D_y = e_{15} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  — амплитуда

компоненты вектора электрической индукции,  $\epsilon_{44}$  — упругая постоянная,

$e_{15}$  — пьезоэлектрический модуль,  $\epsilon_{11}$  — диэлектрическая проницаемость,

$k = \omega/c$  — волновое число,  $c = \sqrt{G/\rho}$  — скорость распространения упругой

волны в пьезоэлектрике,  $G = \epsilon_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$ ,  $\omega$  — частота колебаний.

Для решения поставленной задачи введем функции

$$w(x, y) = U(x, y) - U_0(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_0(x, y) \quad (3)$$

Очевидно, что функции  $w(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$  удовлетворяют уравнениям (1) – (2), но они уже должны удовлетворять и условиям уходящей волны. Применяя к уравнениям (1) – (2) преобразование Фурье, в силу вышесказанного будем иметь

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \gamma^2 \bar{w} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} = -\frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 \bar{w} \quad (5)$$

где  $\gamma^2(\sigma) = \sigma^2 - k^2$ , а  $\bar{w}(\sigma, y)$ ,  $\bar{\varphi}(\sigma, y)$  – преобразования Фурье функций  $w(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty.$$

Определим то решение уравнения (4), которое стремится к нулю при  $|y| \rightarrow \infty$ , когда  $|\sigma| > k$ , а при  $|\sigma| < k$  представляет уходящую волну. Такое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}(\sigma, y) = & \bar{U}(\sigma, y) - e^{-iky \sin \theta_0} 2\pi \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \\ = & \begin{cases} A(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)}, & y > a \\ A_0(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)} + C_0(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & -a < y < a \\ C(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & y < -a \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

где под  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$  понимается та ветвь этой функции, для которой имеет место условие  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ . В таком случае действительная ось будет обходить точку  $\sigma = -k$  сверху, а точку  $\sigma = k$  снизу [2]. Под  $\delta(\sigma)$  понимается известная функция Дирака.

Теперь из (5)  $\bar{\varphi}$  определится в виде

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma, y) = & \bar{\Phi}(\sigma, y) - \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-iky \sin \theta_0} 2\pi \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \\ = & \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} \bar{w}(\sigma, y) + \begin{cases} B(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)}, & y > a \\ B_0(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)(y-a)} + D_0(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & -a < y < a \\ D(\sigma) e^{\gamma(\sigma)(y+a)}, & y < -a \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

Из (6) – (7) с использованием контактных условий, после применения к ним преобразования Фурье, будем иметь

$$A(\sigma) = \frac{\epsilon_{15} \bar{h}_-(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)2a} + \bar{g}_-(\sigma)}{2G \gamma(\sigma)}, \quad A_0(\sigma) = \frac{\epsilon_{15} \bar{h}_-(\sigma)}{2G \gamma(\sigma)} e^{-\gamma(\sigma)2a}$$

$$\begin{aligned}
 C(\sigma) &= \frac{\varepsilon_{13}}{2G} \frac{\bar{h}_-(\sigma) + \bar{g}_-(\sigma) e^{-\gamma(\sigma)2a}}{\gamma(\sigma)}, & C_{11}(\sigma) &= \frac{\varepsilon_{13}}{2G} \frac{\bar{g}_-(\sigma)}{\gamma(\sigma)} e^{-\gamma(\sigma)2a} \\
 B(\sigma) &= -\frac{\bar{h}_-(\sigma) e^{|\sigma|2a} + \bar{g}_-(\sigma)}{2|\sigma|}, & B_{11}(\sigma) &= -\frac{\bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|} e^{-|\sigma|2a} \\
 D(\sigma) &= -\frac{\bar{g}_-(\sigma) e^{-|\sigma|2a} + \bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|}, & D_{11}(\sigma) &= -\frac{\bar{g}_-(\sigma)}{2|\sigma|} e^{-|\sigma|2a}
 \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя  $A(\sigma)$ ,  $A_0(\sigma)$ ,  $B(\sigma)$ ,  $B_0(\sigma)$ ,  $C(\sigma)$ ,  $C_0(\sigma)$ ,  $D(\sigma)$  и  $D_0(\sigma)$  в (6)–(7) и используя условия контакта при  $y = \pm a$ , получим следующие краевые задачи Римана теории аналитических функций:

$$M\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}_-(\sigma) + \bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|} = 2\pi \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \cos(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) - \frac{\bar{p}_+(\sigma) + \bar{q}_+(\sigma)}{2} \quad (9)$$

$$N\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}_-(\sigma) - \bar{h}_-(\sigma)}{2|\sigma|} = -2\pi i \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \sin(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) - \frac{\bar{p}_+(\sigma) - \bar{q}_+(\sigma)}{2} \quad (10)$$

где  $-\infty < \sigma < \infty$ ,

$$M(\sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + e^{-|\sigma|2h} - k_e^2 |\sigma| \frac{1 + e^{-\eta(\sigma)2h}}{\eta(\sigma)} \right] \quad (11)$$

$$N(\sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 - e^{-|\sigma|2h} - k_e^2 |\sigma| \frac{1 - e^{-\eta(\sigma)2h}}{\eta(\sigma)} \right] \quad (12)$$

$$\eta(\sigma) = \gamma(k\sigma)/k = \sqrt{\sigma^2 - 1}, \quad h = ak \quad (13)$$

а  $k_e = \varepsilon_{13}/\sqrt{\varepsilon_{11}G} \in (0, 1)$  – коэффициент электромеханической связи.

Для решения краевых задач (9) и (10) сначала необходимо факторизовать функции  $M(\sigma)$  и  $N(\sigma)$ , данные выражениями (11) и (12). С этой целью, исследуя функции  $M(\sigma)$  и  $N(\sigma)$  на действительной прямой, приходим к следующей лемме:

**Лемма.** При любом значении коэффициента электромеханической связи  $k_e \in (0, 1)$  справедливы следующие утверждения:

а) при любом  $-h > 0$  существует одно и только одно значение  $\sigma_{0s} \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ , такое, что имеет место равенство  $M(\sigma_{0s}) = 0$ . Значение  $\sigma = \sigma_{0s}$  является простым нулем функции  $M(\sigma)$  и  $\sigma_{0s} > \sigma_0 = (1 - k_e^4)^{-1/2}$ . Значение  $\sigma_{0s}$  определяется из уравнения

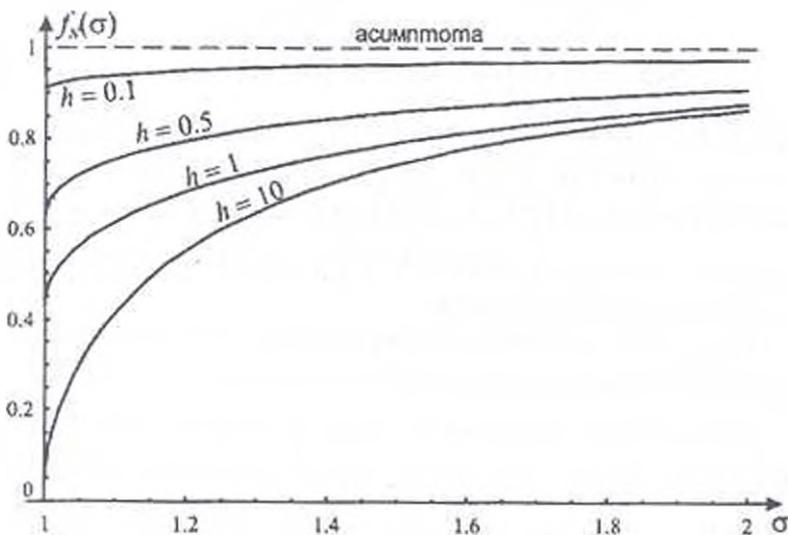
$$f_M(\sigma) \equiv \frac{\eta(\sigma)(1 + e^{-\sigma 2h})}{\sigma(1 + e^{-\eta(\sigma)2h})} = k_e^2, \quad \text{где функция } f_M(\sigma) \text{ является монотонно}$$

возрастающей на полупрямой  $\sigma \in [1, +\infty)$  а также  $f_M(\sigma) \in C[1, +\infty)$ ,  $f_M(1) = 0$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_M(\sigma) = 1$ .

б) только и только при  $h > h_0(k_v)$ , где значение  $h_0 > 0$  определяется единственным образом из уравнения  $f(h) \equiv (1 - e^{-2h}) / (2h) = k_v^2$  (отметим, что функция  $f(h)$  монотонно убывает на полупрямой  $h \in [0, +\infty)$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 1$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} f(h) = 0$ ,  $f(h) \in C[0, +\infty)$ ) существует такое значение  $\sigma_{0a} \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , что имеет место равенство  $N(\sigma_{0a}) = 0$ . Это значение  $\sigma = \sigma_{0a}$  определяется единственным образом, является простым нулем функции  $N(\sigma)$  и  $1 < \sigma_{0a} < \sigma_0 = (1 - k_v^4)^{-1/2}$

Значение  $\sigma_{0a}$  определяется из уравнения  $f_N(\sigma) \equiv \frac{\eta(\sigma)(1 - e^{-\sigma 2h})}{\sigma(1 - e^{-\eta(\sigma)2h})} = k_v^2$ ,

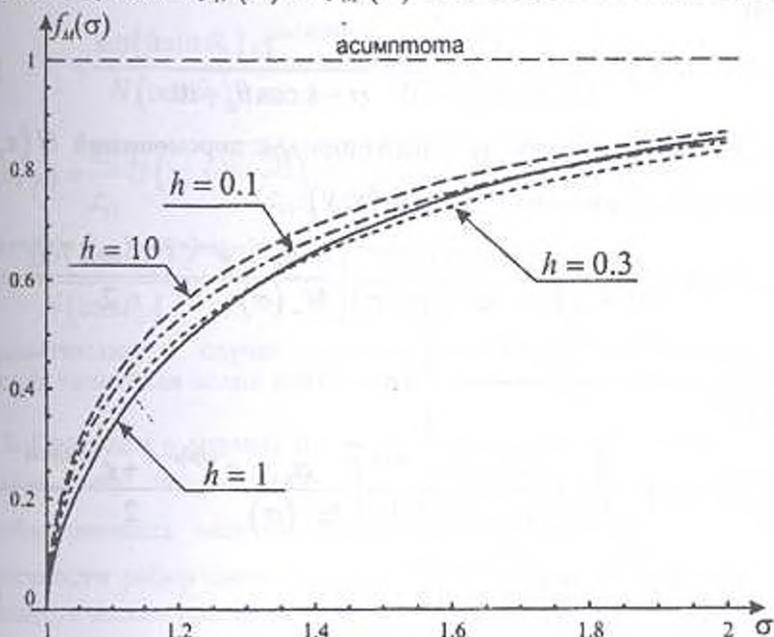
где функция  $f_N(\sigma)$  является монотонно возрастающей на полупрямой  $\sigma \in (1, +\infty)$  а также  $f_N(\sigma) \in C(1, +\infty)$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow 1+0} f_N(\sigma) = (1 - e^{-2h}) / (2h)$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_N(\sigma) = 1$ .



Фиг. 2. График функции  $f_N(\sigma)$  при разных значениях величины  $h$

Информация о монотонности функций  $f_M(\sigma)$ ,  $f_N(\sigma)$  и  $f(h)$  в соответствующих промежутках, приведенная в лемме, играет важную роль при численных расчетах и существенно упрощает нахождение

численных значений величин  $\sigma_{0s}$ ,  $\sigma_{0a}$  и  $h_a$ . На фиг. 2 и 3 приведены графики функций  $f_N(\sigma)$  и  $f_M(\sigma)$  при разных значениях величины  $h$ .



Фиг. 3. График функции  $f_M(\sigma)$  при разных значениях величины  $h$

Исходя из результатов леммы и пользуясь четностью функций  $M(\sigma)$  и  $N(\sigma)$ , имеем: для удовлетворения условию уходящей волны действительная ось при любом  $h$  должна обходить точку  $\sigma = -\sigma_{0s}$  сверху, а точку  $\sigma = \sigma_{0s}$  снизу, а при  $h > h_a(k_r)$  действительная ось, кроме того, должна еще обходить точку  $\sigma = -\sigma_{0a}$  сверху, а точку  $\sigma = \sigma_{0a}$  снизу.

Так как при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$  имеем

$$M(\sigma) \rightarrow (1 - k_c^2)/2, \quad \ln \left[ 2(1 - k_c^2)^{-1} M(\sigma) \right] = O(\sigma^{-2})$$

$$N(\sigma) \rightarrow (1 - k_c^2)/2, \quad \ln \left[ 2(1 - k_c^2)^{-1} N(\sigma) \right] = O(\sigma^{-2}) \quad (14)$$

то функции  $M(\sigma)$  и  $N(\sigma)$  можно факторизовать с помощью интегралов типа Коши или с применения прямых и обратных преобразований Фурье [3] — [5]. В результате имеем

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha), \quad N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha) \quad (15)$$

где функции  $M_+(\alpha)$ ,  $N_+(\alpha)$  регулярны при  $\text{Im} \alpha > 0$  и там не имеют нулей, а функции  $M_-(\alpha)$ ,  $N_-(\alpha)$  регулярны при  $\text{Im} \alpha < 0$  и там не имеют нулей.

Подставляя выражения (15) в функциональные уравнения (9), (10) и решая их с рассуждениями, изложенными в [4]–[5], где используются прямое и обратное преобразования Фурье обобщенных функций, а также тождество [6]

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0} \quad (16)$$

в результате получаем следующие выражения для перемещений  $U(x, y)$  и для потенциала электрического поля  $\Phi(x, y)$ :

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \frac{e_{15}}{4G\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i0} e^{-i\sigma x}}{(\sigma - \cos \theta_0) \eta(\sigma)} \left[ \frac{\alpha_0}{M_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} + e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} - \frac{\beta_0}{N_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} - e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} \right] d\sigma \quad (17)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(x, y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i0} e^{-i\sigma x}}{(\sigma - \cos \theta_0) |\sigma|} \left[ \frac{\alpha_0}{M_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} + e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} - \frac{\beta_0}{N_-(\sigma)} \frac{e^{-\pi|\sigma|y-d} - e^{-\pi(\sigma|y+d)}}{2} \right] d\sigma \quad (18)$$

где сделаны следующие обозначения:

$$\alpha_0 = \frac{2e_{15} \sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\varepsilon_{11} i M_+(\cos \theta_0)} \cos(h \sin \theta_0), \quad \beta_0 = \frac{2e_{15} \sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\varepsilon_{11} N_+(\cos \theta_0)} \sin(h \sin \theta_0). \quad (19)$$

Как в выражении (17), так и в (18) первое слагаемое подынтегрального выражения (с коэффициентом  $\alpha_0/M_-(\sigma)$ ) представляет решение симметричной части задачи, а второе слагаемое подынтегрального выражения (с коэффициентом  $\beta_0/N_-(\sigma)$ ) представляет решение антисимметричной части задачи.

В случае бесконечного слоя функциональные уравнения (9) и (10) примут следующий вид:

$$M\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}(\sigma) + \bar{h}(\sigma)}{2|\sigma|} = 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cos(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \quad (19)$$

$$N\left(\frac{\sigma}{k}\right) \frac{\bar{g}(\sigma) - \bar{h}(\sigma)}{2|\sigma|} = -2\pi i \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \sin(ka \sin \theta_0) \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \quad (20)$$

откуда

$$\bar{g}(\sigma) + \bar{h}(\sigma) = 4\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k \cos \theta_0 \frac{\cos(ka \sin \theta_0)}{M(\cos \theta_0)} \delta(\sigma - k \cos \theta_0)$$

$$\bar{g}(\sigma) - \bar{h}(\sigma) = -4\pi i \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k \cos \theta_0 \frac{\sin(ka \sin \theta_0)}{N(\cos \theta_0)} \delta(\sigma - k \cos \theta_0)$$

следовательно,

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \frac{i|\cos\theta_0|}{\sin\theta_0} k_c^2 \left( \frac{\cos(h\sin\theta_0)}{M(\cos\theta_0)} \frac{e^{i\sin(\theta_0)|y-d|} + e^{i\sin(\theta_0)|y+d|}}{2} + \frac{\sin(h\sin\theta_0)}{N(\cos\theta_0)} \frac{e^{i\sin(\theta_0)k|y-d|} - e^{i\sin(\theta_0)k|y+d|}}{2i} \right) e^{-ikx\cos\theta_0} \quad (21)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} U(x, y) - \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} \left( \frac{\cos(h\sin\theta_0)}{M(\cos\theta_0)} \frac{e^{-k|\cos\theta_0||y-d|} + e^{-k|\cos\theta_0||y+d|}}{2} + \frac{\sin(h\sin\theta_0)}{N(\cos\theta_0)} \frac{e^{-k|\cos\theta_0||y-d|} - e^{-k|\cos\theta_0||y+d|}}{2i} \right) e^{-ikx\cos\theta_0} \quad (22)$$

следовательно, в случае наличия бесконечных электрических слоев плоская сдвиговая волна локализованную волну не возмущает.

2. Перейдем к анализу полученного решения. Из выражений (17) – (18) следует, что напряжение  $\sigma_{\theta_0}$  ограничено в окрестностях ребер полубесконечных электрических слоев, а величины  $\epsilon_{\theta_0}$ ,  $D_{\theta_0}$  и  $E_{\theta_0}$  в окрестности ребер слоев  $y = a, x < 0$  и  $y = -a, x < 0$  имеют следующие асимптотические поведения:

$$E_{\theta_0} = \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{4} \sqrt{1-k_r^2} \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{ix/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (23)$$

$$\epsilon_{\theta_0} = \frac{\epsilon_{13}}{8\epsilon_{11}} \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{\sqrt{1-k_r^2}} \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{ix/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (24)$$

$$D_{\theta_0} = \frac{\epsilon_{11}}{4} \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{\sqrt{1-k_r^2}} \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{ix/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (25)$$

где  $r$  и  $\theta$  являются локальными полярными координатами с полюсом в точке  $x=0, y=\pm a$  ( $r = \sqrt{x^2 + (y \mp a)^2}$ ,  $\cos\theta = x/r$ ,  $\sin\theta = (y \mp a)/r$ ). В полученных выражениях верхний знак соответствует верхнему электрическому слою, а нижний знак соответствует нижнему электроду.

Применяя метод Лайтхилла [7] к выражениям (17)–(18), можно получить следующие асимптотические поведения решений в слое  $|y| \leq a$ :

при  $kx \rightarrow +\infty$

$$U(x, y) = U_0(x, y) - \frac{\epsilon_{13}}{2G} \frac{\alpha_0}{(1 + \cos\theta_0) M_-(-1)} \frac{e^{k(x-a/4)}}{\sqrt{2\pi kx}} + O((kx)^{-3/2}) \quad (26)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{11}} U(x, y) +$$

$$+ \frac{e^{-i\pi/4} \alpha_0}{2\sqrt{\pi} \cos \theta_0} \left[ (kx)^{-1/2} + \frac{i c_0 (1 + e^{2h}) - 2hi}{2 \cdot 2\pi} (kx)^{-1/2} \ln(kx) \right] + O\left((kx)^{-3/2}\right) \quad (27)$$

при  $kx \rightarrow -\infty$

$$U(x, y) = U_0(x, y) +$$

$$+ \frac{ie_{15}}{2G} \left[ \begin{array}{l} \frac{e^{i\pi/4} \sqrt{\cos \theta_0 - i0}}{\sin \theta_0} \left[ i\alpha_0 \frac{\cos[ky \sin \theta_0]}{M_-(\cos \theta_0)} - \beta_0 \frac{\sin[ky \sin \theta_0]}{N_-(\cos \theta_0)} \right] e^{-ikx \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \\ -\frac{\alpha_0}{k^2} M_+(1) e^{-ikx}, \theta_0 = 0 \end{array} \right] +$$

$$+ \alpha_0 \frac{\sqrt{\sigma_{0a}} e^{-\pi \sigma_{0a} h} M_+(\sigma_{0a}) \cosh[\eta(\sigma_{0a}) ky]}{\sigma_{0a} - \cos \theta_0} \left( d[M(s)\eta(s)]/ds \right) \Big|_{s=\sigma_{0a}} e^{-ikx \sigma_{0a}} +$$

$$+ \left[ -\beta_0 \frac{\sqrt{\sigma_{0a}} e^{-\pi \sigma_{0a} h} N_+(\sigma_{0a}) \sinh[\eta(\sigma_{0a}) ky]}{\sigma_{0a} - \cos \theta_0} \left( d[N(s)\eta(s)]/ds \right) \Big|_{s=\sigma_{0a}} e^{-ikx \sigma_{0a}}, h > h_a \right] +$$

$$+ \left[ \frac{e^{-i\pi/4} e^{i\pi/4} \alpha_0}{2\sqrt{\pi} \cos \theta_0} \cos(ky) (k|x|)^{-3/2} + O\left((k|x|)^{-2}\right) \right] +$$

$$+ \left[ \begin{array}{l} \frac{i e^{i(k|x| - \pi/4)} \alpha_0 M_+(1)}{2 \sqrt{2\pi} k^2} \frac{1 + e^{-2h}}{1 - \cos \theta_0} (k|x|)^{-3/2} + O\left((k|x|)^{-1/2}\right), \theta_0 \neq 0 \\ \frac{e^{i(k|x| - \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k|x|}} \frac{1 + e^{-2h}}{k^2} \alpha_0 M_+(1) + O\left((k|x|)^{-1/2}\right), \theta_0 = 0 \end{array} \right] \quad (28)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(x, y) - \frac{i \alpha_0 \cosh[\sigma_{0a} ky]}{2(\sigma_{0a} - \cos \theta_0) \sqrt{\sigma_{0a}}} \frac{M_+(\sigma_{0a})}{M'(\sigma_{0a})} e^{-\sigma_{0a} h - ikx \sigma_{0a}} -$$

$$- \left[ \frac{i}{2\sqrt{\cos \theta_0 + i0}} \left[ \alpha_0 \frac{\cosh[\cos \theta_0 ky]}{M_-(\cos \theta_0)} - \beta_0 \frac{\sinh[|\cos \theta_0| ky]}{N_-(\cos \theta_0)} \right] e^{-i\cos \theta_0 h - ikx \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \right] +$$

$$+ \left[ \frac{i \beta_0 \sinh[\sigma_{0a} ky]}{2(\sigma_{0a} - \cos \theta_0) \sqrt{\sigma_{0a}}} \frac{N_+(\sigma_{0a})}{N'(\sigma_{0a})} e^{-\sigma_{0a} h - ikx \sigma_{0a}}, h > h_a \right] + O\left((k|x|)^{-1/2}\right) \quad (29)$$

Как видно из полученных асимптотических выражений, в слое  $|y| \leq a$  между электродами в отрицательном направлении оси  $x$  распространяются две волны, соответствующие симметричной и антисимметричной частям решения задачи. Обозначим их скорости через  $c_s = c_s(h, k_s)$  (симметричная часть) и  $c_a = c_a(h, k_a)$  (антисимметричная

часть). Проводя соответствующий анализ зависимостей  $c_s$  и  $c_a$  от величин  $h = ak > 0$  и  $k_e = \epsilon_{12} / \sqrt{\epsilon_{11} G} \in (0, 1)$ , получаем следующие результаты, где через  $c_{loc}$  обозначена скорость локализованной волны в случае наличия одного электрода [5], а  $c = \omega/k$  – скорость распространения падающей волны:

- Волна симметричной части задачи, распространяющаяся со скоростью  $c_s$ , всегда присутствует и  $c_s < c_{loc}$ .

- При любом фиксированном  $k_e \in (0, 1)$  существует такое число  $h_s^{min} > 0$ , что  $c_s(h)$  монотонно убывает в интервале  $h \in (0, h_s^{min})$ , достигает своего минимума при  $h = h_s^{min}$ , монотонно возрастает в интервале  $h \in (h_s^{min}, \infty)$  и  $\lim_{h \rightarrow 0} c_s(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} c_s(h) = c_{loc}$ . Значение  $h_s^{min}$  и соответствующее значение минимальной скорости  $c_s^{min}$  определяются выражениями  $h_s^{min} = (\sigma + \eta(\sigma)) \ln(1/k_e)$ ,  $c_s^{min} = c/\sigma$ , где  $\sigma$  является единственным корнем уравнения

$$\eta(\sigma) - k_e^2 \sigma + (\eta(\sigma) - \sigma) e^{-\sigma(\eta(\sigma) + \sigma) \ln k_e^{-2}} = 0 \text{ в интервале } \sigma \in (1, +\infty).$$

- $\lim_{k_e \rightarrow 0} h_s^{min}(k_e) = \infty$

- Отношение  $c_s^{min}(k_e)/c_{loc}(k_e)$  монотонно убывает в интервале  $k_e \in (0, 1)$ . При этом нижняя грань отношения

$r_{s/loc} = \inf_{k_e \in (0, 1)} [c_s^{min}(k_e)/c_{loc}(k_e)]$  является единственным положительным корнем уравнения  $e^{-1/r^2} = x^{-2} - 1$  и численно приблизительно равна 0.884.

- При любом фиксированном  $k_e \in (0, 1)$  волна со скоростью  $c_a$  присутствует только и только при  $h > h_a(k_e)$ , где  $h_a$  является единственным положительным корнем уравнения  $1 - e^{-2h} = k_e^2 2h$ .

Волновая скорость  $c_a(h)$  монотонно убывает в интервале  $h \in (h_a, \infty)$  и

$$\lim_{h \rightarrow h_a, +0} c_a(h) = c, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} c_a(h) = c_{loc}, \text{ так что } c_{loc} < c_a < c.$$

- При любом фиксированном  $h > 0$  волновая скорость  $c_s(k_e)$  монотонно убывает в интервале  $k_e \in (0, 1)$  и  $\lim_{k_e \rightarrow 0} c_s(k_e) = c$ .

$$\lim_{k_e \rightarrow 1} c_s(k_e) = 0.$$

• При любом фиксированном  $h > 0$  волна со скоростью  $c_s$  присутствует только и только при  $k_s^2 > \frac{1 - e^{-2h}}{2h}$ . Волновая скорость

$c_s(k_s)$  монотонно убывает в интервале  $k_s \in \left(\frac{1 - e^{-2h}}{2h}, 1\right)$  и

$$\lim_{k_s \rightarrow \frac{1 - e^{-2h}}{2h}} c_s(k_s) = c, \quad \lim_{k_s \rightarrow 1} c_s(k_s) = 0.$$

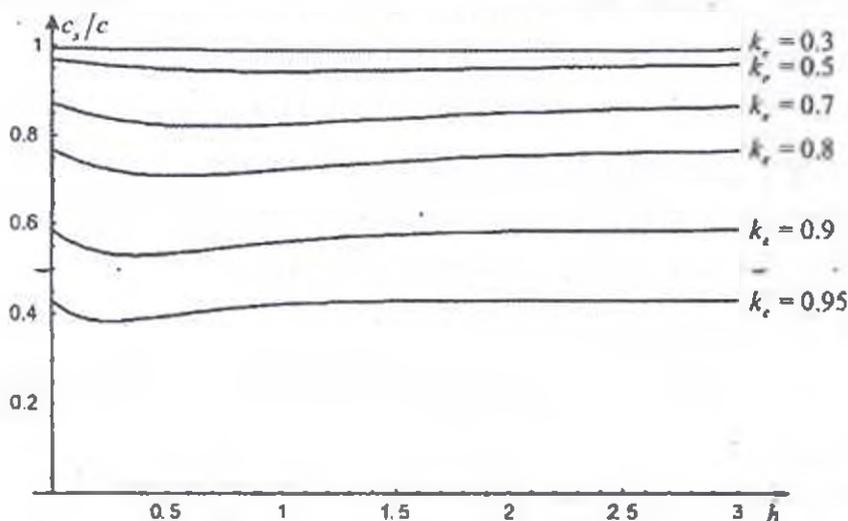
• Точные грани, между которыми отношения  $c_s/c_{loc}$  и  $c_a/c_{loc}$  могут изменяться независимо от пьезоэлектрического материала и независимо от расстояния между электродами, являются соответственно  $(r_{s/loc}, 1)$  и  $(1, \infty)$ , где величина  $r_{s/loc}$  была введена выше и  $r_{s/loc} = 0.884$ .

• При любых  $k_s \in (0, 1)$  и  $h > 0$  имеет место следующая цепь неравенств:  $c_s^{min}(k_s) \leq c_s(h, k_s) < c_{loc}(k_s) < c_a(h, k_s) < c$ , где  $c_a(h, k_s)$  присутствует только при  $h > h_a(k_s)$ .

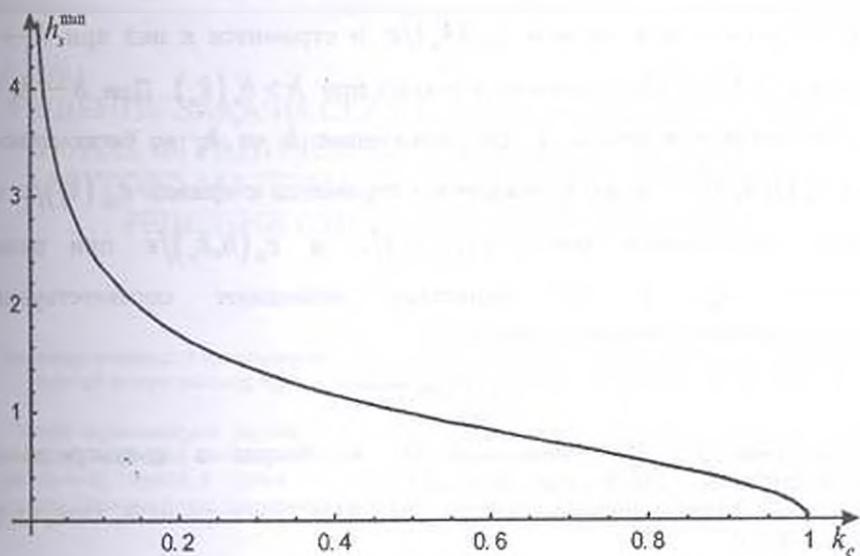
На фиг. 4 представлена зависимость  $c_s/c$  от  $h$  при разных значениях  $k_s$ , где видно, что  $c_s/c$  имеет минимум в некоторой точке  $h_s^{min}$ .

На фиг. 5 представлена кривая зависимости величины  $h_s^{min}$  от  $k_s$ , где еще раз подтверждается, что  $h_s^{min}(k_s) \rightarrow \infty$  при  $k_s \rightarrow 0$ .

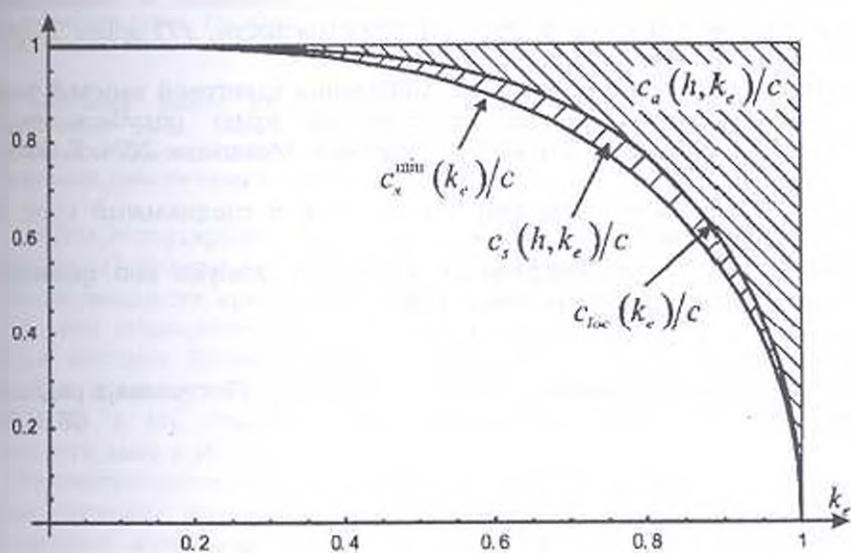
На фиг. 6 представлены кривые отношений  $c_s^{min}(k_s)/c$  и  $c_{loc}(k_s)/c$  в зависимости от коэффициента электромеханической связи  $k_s$ , а также заштрихованы области изменения отношений  $c_s(h, k_s)/c$  и  $c_a(h, k_s)/c$ .



Фиг. 4. Зависимость  $c_s/c$  от  $h$  при разных значениях  $k_s$



Фиг. 5. Зависимость  $h_5^{\min}$  от коэффициента электромеханической связи



Фиг. 6. Области изменения волновых скоростей

Фиксируя любое значение коэффициента электромеханической связи, исследуем поведение точек  $c_s(h, k_e)/c$  и  $c_a(h, k_e)/c$  в зависимости от  $h$  (фиг. 6). Как следует из вышеприведенного анализа, точка  $c_s(h, k_e)/c$  при  $h \rightarrow 0$  стремится к кривой  $c_{loc}(k_e)/c$ . При увеличении значения  $h$  от нуля до бесконечности точка  $c_s(h, k_e)/c$  сначала опускается от кривой

$c_{ик}(k_e)/c$  к кривой  $c_{ик}^{прн}(k_e)/c$ , достигает ее при  $h = h_a^{прн}$ , после чего опять поднимается к кривой  $c_{ик}(k_e)/c$  и стремится к ней при  $h \rightarrow \infty$ . Точка же  $c_o(h, k_e)/c$  появляется только при  $h > h_a(k_e)$ . При  $h \rightarrow h_a + 0$  она стремится к единице, а при увеличении  $h$  от  $h_a$  до бесконечности точка  $c_o(h, k_e)/c$  только опускается и стремится к кривой  $c_{ик}(k_e)/c$  при  $h \rightarrow \infty$ . Тем самым, точки  $c_s(h, k_e)/c$  и  $c_o(h, k_e)/c$  при разных значениях  $k_e$  и  $h$  полностью заполняют соответствующие заштрихованные области на фиг. 6.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, 1982. 239 с.
2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ. – мат. литературы, 1963. 640 с.
4. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно – однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, N 3, С. 29 – 34.
5. Григорян Э. Х., Мелкумян А. С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 58. N 4. С. 43 – 52.
6. Шилов Г. Е. Математический анализ, второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
7. Lighthill M. J., An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press, 1959.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26.01.2005

УДК 539.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ПРЯМЫХ  
УГЛОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ИЗ  
ДРУГОГО МАТЕРИАЛА, ПУТЕМ ЭФФЕКТИВНОГО  
РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ВИНЕРА-ХОПФА

Мартirosյան А. Н.

Ա. Ն. Մարտիրոսյան

Այս ճյուղերից բաղկացած առանձնապես կիսահարթորյալ մեծերով սահմանափակված ուղիղ անկյունների  
թափման խնդրի լուծումը Վիներ-Հոպֆի համակարգի էֆֆեկտիվ լուծման ճանապարհով:

Ներկա աշխատանքում բերված է այլ առանձնապես կիսահարթորյալ կիսահարթորյալ ստորին  
մակերևույթի երկկանգով սահմանափակված առանձնապես ուղիղ անկյունների թափման դիֆրակցիայի  
խնդրի լուծումը: Տրվում է Վիներ-Հոպֆի համակարգի էֆֆեկտիվ լուծումը և  
հավաքարժ թեմերով ճանապարհորդան ճիշտացված լուծումը բերվում է Ամբոնով-Ստրուկի տեսքով:

A. N. Martirosyan

The solution of problem of impact direct elastic coah bounded by halfplane from another material by the  
effective method of Wiener-Hopf

In present paper the solution of problem of impact of direct angles bounded with halfplanes of other elastic  
constants materials is done. The effective solution of Wiener-Hopf system and reversion of integral transformant  
in form of Sommariv-Sobolev is carried out.

В настоящей работе дано решение задачи соударения упругих прямых углов  
ограниченных вдоль нижней поверхности полуплоскостью с другими упругими  
постоянными. Дается эффективное решение системы Винера-Хопфа в обращении  
интегральных трансформант в форме Смирнова-Соболева.

Задача о соударении углов при наличии свободной границы методом  
Смирнова-Соболева решена в [1]. Соударение углов и полуполос при  
наличии жидкости, граничащей с ними, изучено в [2,3].

Задачи соударения тел с преградой решались в [4], а при наличии  
опоры методом Винера-Хопфа и обращения интегральных преобразо-  
ваний с приведением решения к форме Смирнова-Соболева решения  
получены в [5]. Решение ряда смешанных граничных задач теории  
упругости дано в [6-10].

Рассматривается задача соударения упругих прямых углов с одинако-  
выми упругими модулями, снизу ограниченных упругой полуплоскостью  
из другого материала, причем на части границы их раздела имеются  
жесткие опоры. Выберем ось  $x$  по нижней границе углов, начало  
координат  $O$  на границе опоры,  $x < 0$ ,  $y = 0$  есть заданная полу-  
бесконечная опора. До соударения принимается, что прямые углы  
скользят по нижней полуплоскости, поэтому ее можно считать неподвиж-  
ной. После соударения в одномерном случае между волнами перемещение  
равно нулю, поэтому после соударения в двухмерном случае между  
волнами перемещение равно его возмущенному значению  $U$ . Вместе с  
тем, в одномерном случае между волнами нормальное напряжение равно

$$K \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{KV_0}{a} H(at - |x|), \quad x' = x + 1, \quad t \geq 0, \quad \text{где } \pm V_0 \text{ - скорость тел до}$$

соударения,  $H(t)$  – единичная функция, поэтому полное нормальное напряжение в двумерной области между волнами равно  $\sigma_{yy} + K \frac{\partial u_0}{\partial x}$ .

После соударения между волнами верхняя и нижняя полуплоскости сцеплены. Граничные условия можно записать в виде ( $y=0$ ).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy} &= \rho \left( K \frac{\partial U}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial y} + K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \rho_1 \left( K_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = \sigma_{1yy} \\ \sigma_{yx} &= \rho b^2 \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \rho_1 b_1^2 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = \sigma_{1yx} \end{aligned} \right\} x > 0 \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1, V = V_1 \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, V = V_1 = 0 \end{aligned} \right\} x < 0$$

$$U, U_1, V, V_1 = 0(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (\text{условие на ребре})$$

где  $K = a^2 - 2b^2$ ,  $a$ ,  $b$  и  $\rho$  – скорости продольных и поперечных волн и плотность,  $U + u_0$ ,  $V$  – компоненты смещения вдоль оси  $x, y$  в углах,  $u_0$  – решение одномерной задачи о соударении полуплоскостей, индекс 1 относится к нижней полуплоскости,  $U_1, V_1$  – компоненты перемещения в нижней полуплоскости.

Решение уравнений теории упругости при нулевых начальных условиях для  $U, V, U_1, V_1$  и граничных условиях (1.1) ищется в виде преобразований Лапласа по времени  $t$  и Фурье по  $x$ . Для преобразований Лапласа можно записать

$$\bar{U}, \bar{V} = \sum_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_n, B_n \exp(i\bar{\alpha}x + i\bar{\gamma}_n y) d\bar{\alpha} \quad (1.2)$$

$$\bar{U}_1, \bar{V}_1 = \sum_1^{\infty} C_n, D_n \exp(i\bar{\alpha}x + i\beta_n y) d\bar{\alpha}$$

где согласно уравнениям движения

$$B_n = \frac{a^2 \bar{\gamma}_1^2 - b^2 \bar{\gamma}_2^2}{(a^2 - b^2) \alpha \bar{\gamma}_n} A_n, \quad D_n = \frac{a_1^2 \bar{\beta}_1^2 - b_1^2 \bar{\beta}_2^2}{(a_1^2 - b_1^2) \alpha \bar{\beta}_n} C_n$$

$$\bar{\gamma}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \alpha^2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \alpha^2}, \quad \bar{\beta}_1 = -\sqrt{\frac{\omega^2}{a_1^2} - \alpha^2}, \quad \bar{\beta}_2 = -\sqrt{\frac{\omega^2}{b_1^2} - \alpha^2}$$

где  $s = i\omega$  – параметр преобразования Лапласа.

Вводя еще функции от  $\bar{\alpha}$ , аналитические в верхней и нижней полуплоскости

$$\Omega^*(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\sigma_{yy} - \sigma_{1yy})|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx$$

$$U^+(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{u} - \bar{u}_1) \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx \quad (1.3)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{xy} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{1,xy} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx$$

$$V^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{V} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{V}_1 \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx$$

можно из (1.1), учитывая что преобразования для  $\frac{\partial u_0}{\partial x}$  имеют вид [5]

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = -\frac{V_0 e^{i\omega t/a} a^{-1}}{2\pi(\bar{\alpha} - \omega/a)\omega}, \quad \ell \geq 0 \quad (1.4)$$

где две черточки обозначают преобразования Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ , получить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{i\chi b^2 A_1}{\bar{\alpha}} - 2b^2 i\bar{\alpha} A_2 + K \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} &= \frac{\rho_1}{\rho} \left( \frac{i\chi_1 b^2 C_1}{\alpha} - 2b_1^2 i\chi_2 \right) + \frac{\Omega^*}{\rho} \\ \rho b^2 (2i\gamma_1 A_1 + \frac{i\chi A_2}{\bar{\gamma}_2}) &= -\sigma_{xy}^- = \rho_1 b_1^2 \left( 2i\bar{\beta}_1 C_1 + \frac{i\chi_1}{\beta_2} C_2 \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$A_1 + A_2 - C_1 - C_2 = U^+, \quad \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}} A_1 - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}_2} A_2 = V^- = \frac{\beta_1}{\alpha} C_1 - \frac{\bar{\alpha}}{\beta_2} C_2$$

где  $\chi = \frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2$ .

Решая полученные системы уравнения относительно  $A_1, A_2, C_1, C_2$ , можно получить систему Винера-Хопфа

$$\begin{aligned} g_0 V^- \gamma_1^- + g_1 \frac{\sigma_{xy}^-}{\rho \gamma_1^-} &= \gamma_1^+ U^+ \\ f g_1 V^- \gamma_1^- + g_2 \frac{\sigma_{xy}^-}{\rho \gamma_1^-} - \frac{K}{\gamma_1^-} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} &= -\frac{\Omega^*}{\rho \gamma_1^-} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Систему уравнений (1.6) можно записать в матричной форме задачи Гильберта [13,11]

$$\Phi^+ = G\Phi^- + g \quad (1.7)$$

$$\text{где } \Phi^+ = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ U^+ \\ -\frac{\Omega^*}{\rho \gamma_1^-} \end{pmatrix}, \quad \Phi^- = \begin{pmatrix} V^- \gamma_1^- \\ \frac{\sigma_{xy}^-}{\rho \gamma_1^-} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ g_1 f & g_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{K}{\gamma_1^-} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$g_0 = \left[ (\chi - 2\gamma_1 \gamma_2) \frac{b^2 \bar{\alpha}}{\gamma_1 \omega^2} - (\chi_1 - 2\beta_1 \beta_2) \frac{\bar{\alpha} b_1^2}{\beta_1 \omega^2} \right] \frac{\gamma_1^+}{\gamma_1^-}, \quad g_2 = \frac{(\gamma_1^-)^2}{(\gamma_1^+)^2} g_0$$

$$g_1 = \left[ \frac{(\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}^2) \frac{\rho}{\rho_1 i \omega^2 \beta_1} - \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\alpha}^2}{\gamma_1 \omega^2 i} \right] \gamma_1, \quad R(\alpha) = 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 + \chi^2$$

$$g_1 f = \left[ -\frac{i b^4 R(\alpha)}{\gamma_1 \omega^2} + \frac{i b_1^4 \rho_1 R_1(\alpha)}{\rho \beta_1 \omega^2} \right] \frac{1}{\gamma_1}, \quad R_1(\alpha) = 4\alpha^2 \beta_1 \beta_2 + \chi_1^2$$

Решение задачи (1.7), ограниченное на бесконечности, дано в [13] в виде

$$\Phi(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X^-(\zeta))^{-1} g(\zeta) d\zeta}{\zeta - \alpha} \quad (1.8)$$

где матриц-функции  $X(\bar{\alpha})$  удовлетворяют однородным уравнениям

$$X^-(\alpha) = G(\alpha) X^-(\alpha), \quad G(\alpha) = X^-(\alpha) (X^-(\alpha))^{-1} \quad (1.9)$$

Как показано в [13], уравнение для  $X(\alpha)$  можно записать в виде системы Фредгольма

$$X^-(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\alpha) G(\zeta) - E(\zeta)}{\zeta - \alpha} X^-(\zeta) d\zeta = \gamma(\alpha) \quad (1.10)$$

где  $\gamma(\alpha)$  есть асимптотическое поведение  $X(\bar{\alpha})$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Уравнение (1.10) с учетом (1.7) имеет вид

$$X^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} y_{11}(\zeta) & y_{12}(\zeta) \\ y_{21}(\zeta) & y_{22}(\zeta) \end{pmatrix}}{(\zeta - \alpha)} d\zeta = \gamma(\alpha) \quad (1.11)$$

$$X^-(\alpha) = \begin{pmatrix} y_{11}(\alpha) & y_{12}(\alpha) \\ y_{21}(\alpha) & y_{22}(\alpha) \end{pmatrix}$$

где  $E$  — единичная матрица,

$$\begin{aligned} d(\alpha) c_{11} &= g_2(\alpha) g_0(\zeta) - g_1(\alpha) g_1(\zeta) f(\zeta) \\ d(\alpha) c_{12} &= g_2(\alpha) g_1(\zeta) - g_1(\alpha) g_2(\zeta) \\ d(\alpha) c_{21} &= -g_1(\alpha) f(\alpha) g_0(\zeta) + g_0(\alpha) g_1(\zeta) f(\zeta) \\ d(\alpha) c_{22} &= -g_1(\alpha) f(\alpha) g_1(\zeta) + g_0(\alpha) g_2(\zeta) \\ d(\alpha) &= g_2(\alpha) g_0(\alpha) - g_1^2(\alpha) f(\alpha) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\text{Обозначим еще} \quad X^-(\alpha) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.13)$$

Факторизация матрицы  $G(\bar{\alpha})$  для больших  $\bar{\alpha}$ , для которых  $\beta_{1,2} \approx -i\alpha$ ,  $\gamma_{1,2} \approx i\alpha$ , т.е. для случая рациональных коэффициентов, дана в [13] и имеет вид  $G = X^-(\alpha) (X^-(\alpha))^{-1}$ , где можно считать  $\alpha \approx \infty$

$$X^*(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$X(\alpha) = G^{-1}(\alpha)$$

$$G^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta} \left( \frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) & -\frac{i}{\Delta} \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2a_1^2} + \frac{1}{2b_1^2} \right) \\ \frac{i}{\Delta} \left( \frac{2b^2}{a^2} (a^2 - 2b^2) + \frac{2b_1^2 (a_1^2 - 2b_1^2)}{a_1^2} \right) & \frac{1}{\Delta} \left( \frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -\left( \frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2} \right)^2 - \left[ \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) + \left( \frac{1}{2a_1^2} + \frac{1}{2b_1^2} \right) \right] \times \\ \times \left[ \frac{2b^2 (a^2 - 2b^2)}{a^2} + 2b_1^2 (a_1^2 - 2b_1^2) / a_1^2 \right]$$

при этом в (1.11)  $\gamma(\alpha) \approx X^-(\alpha)$ , которая дается формулой (1.14).

Тогда (1.7) и (1.13) дают

$$\begin{pmatrix} V^- \gamma_1^- \\ \frac{\sigma_{xy}^-}{\rho \gamma_1^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} M_1(\zeta) \\ M_2(\zeta) \end{pmatrix} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} \quad (1.15)$$

$$M_1(\zeta) = \left[ -\left( \frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) x_{12} + i \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a_1^2} + \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2b_1^2} \right) x_{22} \right] \frac{K}{\Delta \gamma_1^-} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}$$

$$M_2(\zeta) = \left[ -\left( \frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) x_{22} - i \left( \frac{2b^2}{a^2} + \frac{2b_1^2}{a_1^2} (a_1^2 - 2b_1^2) \right) x_{12} \right] \frac{K}{\gamma_1^-(\zeta) \Delta} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}$$

При  $\alpha \approx \infty$  получится

$$\frac{\sigma_{xy}^-}{\rho} = \frac{\gamma_1^-}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} M_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} \quad (1.16)$$

$$V^- = \frac{1}{2\pi i} \gamma_1^- \int_{-\infty}^{\infty} M_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}}$$

Переходя к обратным преобразованиям Лапласа и Фурье, получим при  $y=0, x < 0$  [12]

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\rho \partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\alpha x)} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha} M_2(\zeta)}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} \quad (1.17)$$

где заменены  $\bar{\zeta}$  через  $\zeta \bar{\omega}$ ,  $\bar{\alpha}$  — через  $\alpha \bar{\omega}$ . Вычисляя интеграл по  $s$  в формуле (1.17) и затем интеграл по  $\alpha$ , можно получить решения в форме Смирнова-Соболева.

Из формул (1.5), (1.16) можно получить выражение для коэффициентов  $A_n, C_n$  в виде

$$A_1 = \frac{i\bar{\alpha}^2 \sigma_{xy}}{\omega^2 \bar{\gamma}_1 \rho} + \frac{b^2 \bar{\alpha} \bar{\chi} V^-}{\omega^2 \bar{\gamma}_1}, \quad A_2 = -\frac{2b^2 \bar{\alpha} \bar{\gamma}_2 V^-}{\omega^2} + \frac{\bar{\rho}_2}{\omega^2 \rho} \sigma_{xy}^-$$

$$C_1 = \frac{i\bar{\alpha}^2 \sigma_{xy}}{\omega^2 \beta_1 \rho_1} + \frac{b_1^2 \bar{\alpha} \bar{\chi} V^-}{\omega^2 \beta_1}, \quad C_2 = -\frac{2b_1^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2 V^-}{\omega^2} + \frac{i\bar{\beta}_2}{\omega^2 \rho_1} \sigma_{xy}^-$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t \rho} = \frac{\text{Re}}{\pi} \int_{-i\sqrt{x}}^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x}} \frac{M_2(\zeta)}{(\zeta - t/x)(\zeta - x)} d\zeta \quad (1.18)$$

где понимается конечная часть интеграла. Поскольку при  $\alpha \approx \infty, \gamma(\alpha) \approx X^-(\alpha) = G^{-1}(\alpha)$ , которая дается формулой (1.14), то (1.11) дает систему уравнений Фредгольма

$$y_{11}(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{11} y_{11}(\zeta) + c_{12} y_{21}(\zeta) - y_{11}(\zeta)}{\zeta - \bar{\alpha}} d\zeta = -\left(\frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{1}{\Delta} \quad (1.19)$$

$$y_{12}(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{11} y_{12}(\zeta) + c_{12} y_{22}(\zeta) - y_{12}(\zeta)}{\zeta - \bar{\alpha}} d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{\Delta} \left[ i \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) + i \left( \frac{1}{2a_1^2} + \frac{1}{2b_1^2} \right) \right]$$

$$y_{21}(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{21} y_{11}(\zeta) + c_{22} y_{21}(\zeta) - y_{21}(\zeta)}{\zeta - \bar{\alpha}} d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{\Delta} \left( \frac{2b^2}{a^2 i} (a^2 - 2b^2) + \frac{2b_1^2 (a_1^2 - 2b_1^2)}{i a_1^2} \right)$$

$$y_{22}(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{21} y_{12}(\zeta) + c_{22} y_{22}(\zeta) - y_{22}(\zeta)}{\zeta - \bar{\alpha}} d\zeta = \left( \frac{b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{1}{\Delta}$$

Разрешимость системы (1.19) показана в [13]. При этом интегралы понимаются в смысле главного значения. Поскольку  $X^+(\alpha) = G(\alpha)X^-(\alpha)$ , имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ g_1 f & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

откуда для произвольных  $\zeta$  по известным  $y_{\alpha}$  из (1.19) найдутся  $x_{\alpha}(\zeta)$ , т. е. уже можно из (1.18) найти  $\sigma_{xy}$  в замкнутом виде. Поведение напряжения  $\sigma_{xy}$  при  $x \rightarrow -0$  имеет вид  $\sigma_{xy} = O(|x|^{-1/2})$ , что соответствует поставленному условию на ребре.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малков М.А. Двумерная задача об упругом соударении стержней. // ДАН СССР. 1965. Т.148. № 4. С. 782-785
2. Мартиросян А.Н., Сафарян Ю.С. Линейные и нелинейные задачи соударения упругих тел конечной высоты. // В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. // Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1984. С. 130-135
3. Мартиросян А.Н. Некоторые нестационарные граничные задачи для упругой среды, граничащей с жидкостью. // Изв. АН Арм. ССР. Механика 1982. Т. 35. №2. С. 53-64.
4. Чебан В.Г., Сабодаш П.Ф. Упругие и термоупругие волны в деформируемых средах. Кишинев: Штинца. 1972.
5. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н. Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях. // ДАН СССР. 1976. Т.226. №3. С.537-540.
6. Зволлинский Н.В., Флитман Л.М., Костров Б.В., Афанасьев В.А. Некоторые задачи дифракции упругих волн. // В сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. Т.1. М.: 1965.
7. Черепанов Г.П. Дифракция упругих волн на разрезе. // В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука. 1972.
8. Свехло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. // ПММ. 1961. Т.25. вып. 5.
9. Селезов И.Т., Корнидов И.Е., Нога Ю.В. Применение методов приближения функций при исследовании дифракции волн на жестких телах и оболочках вращения. // В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1984.
10. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы. // МТТ. 1976. №1. С.107-117
11. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962. 279с.
12. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С. 13-23.
13. Векун Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука. 1970. 380 с.

Горисский ф-л Армянского государственного  
архитектурного университета

Поступила в редакцию  
18.11.2004

УДК 539.3

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ КУЛОНОВОМ ТРЕНИИ МЕЖДУ СЛОЯМИ**

Աղալոյան Լ. Ա., Սոգոսյան Ա. Մ.

Լ. Ա. Աղալոյան, Ա. Մ. Սոգոսյան

Երկչրա սրբարոպ ապի ստիպարական առատանուններ շերտերի միջև կոլոնյան շփման ապկայության դիպում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է սրբարոպ ապի ստիպարական առատանունների վերաբերյալ առածվաբանության տեսության եռաչափ սինգուլյար խնդիրը։ Երբ շերտերի միջև կա կոլոնյան շփում։ Որպեսզի է ըստույնների թեւորդի և ածարկայության վեկտորի բազարդիների ապիմպտոտիկան, կատարված է իւզերապիտի պոպուե աինալառ մեծությունները արշերտ համար։ Ստապված է խնդրի ընդհանուր ապիմպտոտիկական բաժանել, մասնավոր դասի խնդիրների իսանար ստապված են փակ լուծումներ։ Նշված են սեպանանի ապարապման կայունները։

L. A. Aghalovyan, H. M. Poghosyan

**The Forced Vibrations of Two-layer Orthotropic Plate at Coulomb Friction Between Layers**

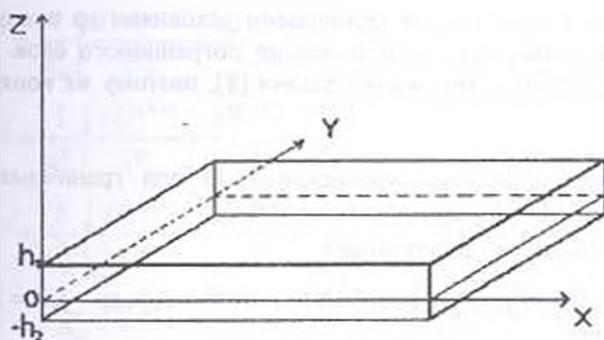
The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibration of orthotropic plate at coulomb friction between layers is solved by the asymptotic method. The asymptotics of stress tensor and displacement vector components are found. The values determination of the iterative process for sought is built. The common asymptotic solution of the problem is found. The closed solution for particular type of problems is found. The resonance arising conditions are established.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. Найден асимптотики для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, построен итерационный процесс для определения искомых величин. Найдено общее асимптотическое решение задачи, для частного типа задач получено замкнутое решение. Установлены условия возникновения резонанса.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений. Асимптотическим методом статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел рассмотрены в [1,2]. Для решения неклассических краевых задач, когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы вектор перемещения или смешанные краевые условия, этот метод оказался особенно эффективным [3-6]. Асимптотический метод эффективен не только для определения решения вышеупомянутых задач, но и для решения динамических задач, в частности, для определения решений о собственных и вынужденных колебаниях однослойных и двухслойных балок и пластин [7-9].

В работе рассматривается задача о вынужденных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки

$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_0, -h_2 \leq z \leq h_1, h = \max(h_1, h_2) \ll l\}$  при кулоновом трении между слоями (фиг. 1).



Фиг.1

где  $D_0$  – плоскость между слоями,  $l$  – характерный тангенциальный размер пластинки.

Требуется определить решение системы динамических уравнений задачи теории упругости для ортотропного тела:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} & \frac{\partial u^k}{\partial x} &= a_{11}^k \sigma_x^k + a_{12}^k \sigma_y^k + a_{13}^k \sigma_z^k \\
 \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2} & \frac{\partial v^k}{\partial y} &= a_{12}^k \sigma_x^k + a_{22}^k \sigma_y^k + a_{23}^k \sigma_z^k \\
 \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 w^k}{\partial t^2} & \frac{\partial w^k}{\partial z} &= a_{13}^k \sigma_x^k + a_{23}^k \sigma_y^k + a_{33}^k \sigma_z^k \\
 \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{46}^k \sigma_{xy}^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial x} + \frac{\partial u^k}{\partial z} = a_{43}^k \sigma_x^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial z} = a_{44}^k \sigma_y^k & k &= I, II
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$u''(-h_2) = u'(\xi, \eta) \exp(i\Omega t) \quad (u, v, w), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l} \quad \text{при } z = -h_2 \tag{1.2}$$

$$u'(h_1) = v'(h_1) = w'(h_1) = 0 \quad \text{при } z = h_1 \tag{1.3}$$

или

$$\sigma_x'(h_1) = \sigma_y'(h_1) = \sigma_z'(h_1) = 0 \quad \text{при } z = h_1 \tag{1.4}$$

где  $\Omega$  – частота вынуждающего воздействия.

На поверхности контакта  $z = 0$  заданы условия неполного контакта между слоями:

$$\begin{aligned}
 w'(z=0) &= w''(z=0) \\
 \sigma_x'(z=0) &= \sigma_x''(z=0) \\
 \sigma_x'(z=0) &= \sigma_x''(z=0) = f_1 \sigma_x'(z=0) \\
 \sigma_y'(z=0) &= \sigma_y''(z=0) = f_2 \sigma_x'(z=0)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для этого класса задач граничными условиями на боковой поверхности обусловлено появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи [8], поэтому их конкретизировать не будем.

2. Решение системы уравнений (1.1) при граничных и контактных условиях (1.2)-(1.5) будем искать в виде:

$$(u^k, v^k, w^k) = (u_x^k, u_y^k, u_z^k) \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k(x, y, z, t) = \sigma_{\mu}^k(x, y, z) \exp(i\Omega t) \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3$$

$$k = I, II \tag{2.1}$$

Затем перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}$$

$$U^k = \frac{u_x^k}{l}, \quad V^k = \frac{u_y^k}{l}, \quad W^k = \frac{u_z^k}{l} \tag{2.2}$$

Подставив (2.1) в преобразованные уравнения (1.1), получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho_k \Omega^2 U^k = 0, \quad (1, 2, 3; U, V, W)$$

$$\frac{\partial U^k}{\partial \xi} = a_{11}^k \sigma_{11}^k + a_{12}^k \sigma_{22}^k + a_{13}^k \sigma_{33}^k, \quad (\xi, \eta; U, V; 1, 2)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W^k}{\partial \zeta} = a_{13}^k \sigma_{11}^k + a_{23}^k \sigma_{22}^k + a_{33}^k \sigma_{33}^k, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} = a_{14}^k \sigma_{22}^k, \quad \frac{\partial U^k}{\partial \eta} + \frac{\partial V^k}{\partial \xi} = a_{46}^k \sigma_{12}^k$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} = a_{46}^k \sigma_{13}^k$$

$$\Omega^2 = h^2 \Omega^2, \quad k = I, II$$

Эту систему будем решать асимптотическим методом. Решение будем искать в виде [2.9]:

$$\sigma_{ij}^k = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad U^k = \varepsilon^s U^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U, V, W) s = \overline{0, N}, \quad k = I, II \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем обозначение  $s = \overline{0, N}$  означает, что по немому (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование в пределах  $[0, N]$ .

Подставив (2.4) в (2.3), получим рекуррентную систему для определения  $\sigma_{ij}^{(k,s+1)}, U^{(k,s+1)}, V^{(k,s+1)}, W^{(k,s+1)}$ .

Решив эту систему, получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{(k,j)} &= \frac{1}{a_{22}^k} \left[ \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
\sigma_{11}^{(k,j)} &= \frac{1}{a_{33}^k} \left[ \frac{\partial U^{(k,j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W^{(k,j-1)}}{\partial \xi} \right] \\
\sigma_{33}^{(k,j)} &= \frac{1}{a_{33}^k} \left[ \frac{\partial V^{(k,j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
\sigma_{12}^{(k,j)} &= -A_{23}^k \frac{\partial W^{(k,j)}}{\partial \xi} + A_{22}^k \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{23}^{(k,j)} &= -A_{11}^k \frac{\partial W^{(k,j)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{31}^{(k,j)} &= A_{11}^k \frac{\partial W^{(k,j)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial U^{(k,j-1)}}{\partial \xi} - A_{11}^k \frac{\partial V^{(k,j-1)}}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11}^k &= \frac{a_{11}^k a_{22}^k - a_{12}^k{}^2}{\Delta}, & A_{22}^k &= \frac{a_{22}^k a_{33}^k - a_{23}^k{}^2}{\Delta}, & A_{33}^k &= \frac{a_{33}^k a_{11}^k - a_{13}^k{}^2}{\Delta} \\
A_{12}^k &= \frac{a_{11}^k a_{12}^k - a_{12}^k a_{11}^k}{\Delta}, & A_{13}^k &= \frac{a_{11}^k a_{23}^k - a_{12}^k a_{13}^k}{\Delta}, & A_{23}^k &= \frac{a_{22}^k a_{13}^k - a_{12}^k a_{23}^k}{\Delta}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Delta = a_{11}^k a_{22}^k a_{33}^k + 2a_{12}^k a_{13}^k a_{23}^k - a_{11}^k (a_{23}^k)^2 - a_{22}^k (a_{13}^k)^2 - a_{33}^k (a_{12}^k)^2$$

Функции  $U^{(k,j)}$ ,  $V^{(k,j)}$ ,  $W^{(k,j)}$  определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{(k,j)}}{\partial \xi^2} + a_{33}^k \rho_k \Omega^2 U^{(k,j)} &= R_k^{(k,j)}, & R_k^{(k,j)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,j-1)}}{\partial \xi \partial \xi} - a_{33}^k \left[ \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
\frac{\partial^2 V^{(k,j)}}{\partial \xi^2} + a_{11}^k \rho_k \Omega^2 V^{(k,j)} &= R_k^{(k,j)}, & R_k^{(k,j)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,j-1)}}{\partial \eta \partial \xi} - a_{11}^k \left[ \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\
A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{(k,j)}}{\partial \xi^2} + \rho_k \Omega^2 W^{(k,j)} &= R_k^{(k,j)}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$R_k^{(k,j)} = A_{22}^k \frac{\partial^2 U^{(k,j-1)}}{\partial \xi \partial \xi} + A_{11}^k \frac{\partial^2 V^{(k,j-1)}}{\partial \eta \partial \xi} - \left[ \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,j-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,j-1)}}{\partial \eta} \right], \quad k = I, II$$

Решениями уравнений (2.7) являются:

$$U^{(k,j)} = U_0^{(k,j)}(\xi, \eta, \zeta) + U^{\tau(k,j)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U, V, W) \tag{2.8}$$

где величины с индексом "0" – решения однородных, а с индексом "τ" – частные решения неоднородных уравнений (2.7).

Решениями однородных уравнений являются:

$$\begin{aligned}
U_0^{(k,j)} &= C_1^{(k,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega \zeta + C_2^{(k,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega \zeta \\
V_0^{(k,j)} &= C_1^{(k,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega \zeta + C_2^{(k,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega \zeta \\
W_0^{(k,j)} &= C_1^{(k,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega \zeta + C_2^{(k,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega \zeta
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$a_1^t = \sqrt{a_{33}^t \rho_k}, \quad a_2^t = \sqrt{a_{44}^t \rho_k}, \quad a_3^t = \sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^t}} \quad k = I, II$$

следовательно,

$$\begin{aligned} U^{(k,i)} &= C_1^{(k,i)}(\xi, \eta) \sin a_1^t \Omega \zeta + C_2^{(k,i)}(\xi, \eta) \cos a_1^t \Omega \zeta + U_r^{(k,i)}(\xi, \eta, \zeta) \\ V^{(k,i)} &= C_3^{(k,i)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta + C_4^{(k,i)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta + V_r^{(k,i)}(\xi, \eta, \zeta) \\ W^{(k,i)} &= C_5^{(k,i)}(\xi, \eta) \sin a_3^t \Omega \zeta + C_6^{(k,i)}(\xi, \eta) \cos a_3^t \Omega \zeta + W_r^{(k,i)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Удовлетворим граничным и контактными условиям. После удовлетворения условиям (1.2), (1.3), (1.5), получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций  $C_i^{(k,i)}$ ,  $k = I, II$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

$$\begin{aligned} C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^t \Omega \zeta_1 + C_2^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^t \Omega \zeta_1 &= -U_r^{(i,j)}(\zeta = \zeta_1) \\ -C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_1^t \Omega \zeta_2 + C_2^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_1^t \Omega \zeta_2 &= U_r^{(i,j)} - U_r^{(i,j)}(\zeta = -\zeta_2) \\ \Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{33}^t}} C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) - \Omega \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{33}^t}} C_1^{(i,j)}(\xi, \eta) &= b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) - f_1 A_{11}^t a_2^t \Omega C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) &= f_1 b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \\ C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) - C_6^{(i,j)}(\xi, \eta) &= W_r^{(i,j)}(\zeta = 0) - W_r^{(i,j)}(\zeta = 0) \\ C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta_1 + C_4^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta_1 &= -W_r^{(i,j)}(\zeta = \zeta_1) \\ \sqrt{A_{11}^t \rho_I} \Omega C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) - \sqrt{A_{11}^t \rho_{II}} \Omega C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) &= b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \\ -C_5^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_3^t \Omega \zeta_2 + C_6^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_3^t \Omega \zeta_2 &= W_r^{(i,j)} - W_r^{(i,j)}(\zeta = -\zeta_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta_1 + C_4^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta_1 &= -V_r^{(i,j)}(\zeta = \zeta_1) \\ -C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) \sin a_2^t \Omega \zeta_2 + C_4^{(i,j)}(\xi, \eta) \cos a_2^t \Omega \zeta_2 &= V_r^{(i,j)} - V_r^{(i,j)}(\zeta = -\zeta_2) \\ \Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) - \Omega \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) &= b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Omega \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^t}} C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) - f_2 \sqrt{A_{11}^t \rho_I} \Omega C_3^{(i,j)}(\xi, \eta) = f_2 b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0) - b_{33}^{(i,j)}(\zeta = 0)$$

где

$$\begin{aligned} U^{(i,j)} &= \frac{u}{l}, \quad V^{(i,j)} = \frac{v}{l}, \quad W^{(i,j)} = \frac{w}{l}, \quad U^{(i,j)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (U, V, W) \\ b_{33}^{(i,j)} &= \frac{1}{a_{33}^t} \left[ \frac{\partial U_r^{(i,j)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_r^{(i,j-1)}}{\partial \xi} \right], \quad b_{33}^{(i,j)} = \frac{1}{a_{33}^t} \left[ \frac{\partial V_r^{(i,j)} + \partial W_r^{(i,j-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_r^{(i,j-1)}}{\partial \eta} \right] \\ b_{33}^{(i,j)} &= A_{11}^t \frac{\partial W_r^{(i,j)}}{\partial \zeta} - A_{11}^t \frac{\partial U_r^{(i,j-1)}}{\partial \xi} - A_{11}^t \frac{\partial V_r^{(i,j-1)}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решив систему (3.1)–(3.3) и подставив значения  $C_i^{(k,i)}$  в (2.10), получим:

$$U^{(1,1)} = U_1^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\Omega} \left( f_1 b_{33}^{(1,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(1,1)}(\zeta=0) + f_1 A'_1 a'_1 \Omega \cdot \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1}(\xi, \eta) \right) \right] \times \quad (3.5)$$

$$\times \left[ \frac{a'_1}{\rho_1} \sin a'_1 \Omega \cdot (\zeta - \zeta_1) - U_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \cos a'_1 \Omega \zeta \right]$$

$$V^{(1,1)} = \frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \left[ C_1^{(1,1)}(\xi, \eta) \sin a'_1 \Omega \cdot (\zeta - \zeta_1) - V_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \cos a'_1 \Omega \zeta \right] + V_1^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$W^{(1,1)} = \frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \left[ \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1} \sin a'_1 \Omega \cdot (\zeta - \zeta_1) - W_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \cos a'_1 \Omega \zeta \right] + W_1^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$U^{(2,1)} = \frac{1}{\cos a''_1 \Omega \zeta_1} \left[ C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) \sin a''_1 \Omega \cdot (\zeta + \zeta_2) + \right.$$

$$\left. + (U^{(1,1)} - U_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a''_1 \Omega \zeta \right] + U_1^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$V^{(2,1)} = \frac{1}{\cos a''_2 \Omega \zeta_2} \left[ C_2^{(2,1)}(\xi, \eta) \sin a''_2 \Omega \cdot (\zeta + \zeta_2) + \right.$$

$$\left. + (V^{(1,1)} - V_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a''_2 \Omega \zeta \right] + V_1^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.6)$$

$$W^{(2,1)} = \frac{1}{\cos a''_1 \Omega \zeta_1} \left[ C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) \sin a''_1 \Omega \cdot (\zeta + \zeta_2) + \right.$$

$$\left. + (W^{(1,1)} - W_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a''_1 \Omega \zeta \right] + W_1^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta)$$

где

$$l_1^{(1)} = \left[ - (W_1^{(1,1)}(\zeta=0) - W_1^{(1,1)}(\zeta=0)) \cos a'_1 \Omega \zeta_1 - W_1^{(1,1)}(\zeta = \zeta_1) \right] \times$$

$$\times \sqrt{A_{11}'' \rho''} \Omega \cdot \cos a''_1 \Omega \zeta_1 + \left[ (b_{33}^{(1,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(1,1)}(\zeta=0)) \sin a''_1 \Omega \zeta_2 - \right.$$

$$\left. - (W^{(1,1)} - W_1^{(2,1)}(\zeta = -\zeta_2)) \sqrt{A_{11}'' \rho''} \Omega \right] \cos a'_1 \Omega \zeta_1$$

$$\Delta_1 = \sqrt{A_{11}'' \rho''} \Omega \cdot \cos a''_1 \Omega \zeta_1 \sin a'_1 \Omega \zeta_1 + \sqrt{A_{11}'' \rho''} \Omega \sin a''_1 \Omega \zeta_2 \cos a'_1 \Omega \zeta_1$$

$$C_1^{(1,1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \left( f_1 b_{33}^{(1,1)}(\zeta=0) - b_{11}^{(1,1)}(\zeta=0) + f_1 A'_1 a'_1 \Omega \cdot \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1}(\xi, \eta) \right) \sqrt{\frac{a'_{33}}{\rho_1}}$$

$$C_1^{(2,1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \left( \Omega \cdot \sqrt{\frac{\rho_1}{a'_{33}}} C_1^{(1,1)}(\xi, \eta) - b_{11}^{(2,1)}(\zeta=0) + b_{13}^{(2,1)}(\zeta=0) \right) \sqrt{\frac{a''_{33}}{\rho''}} \quad (3.7)$$

$$C_1^{(1,2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{a'_{33}}{\rho_1}} (f_2 b_{33}^{(1,2)}(\zeta=0) - b_{11}^{(1,2)}(\zeta=0)) + f_2 \sqrt{A_{11}'' a'_{33}} \frac{l_1^{(1)}}{\Delta_1}$$

$$C_3^{(0,0)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{a_{33}''}{\rho_{II}}} (-b_{23}^{(0,0)}(\zeta=0) + b_{33}^{(0,0)}(\zeta=0)) + \sqrt{\frac{a_{33}'' \rho_I}{\rho_{II} a_{33}'}} C_3^{(0,0)}(\xi, \eta)$$

$$C_5^{(0,0)}(\xi, \eta) = \frac{I_1^{(0)}}{\Delta_1}$$

$$C_7^{(0,0)}(\xi, \eta) = \frac{I_3^{(0)} \sqrt{A_{11}' \rho_I}}{\Delta_1 \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}}} - \frac{b_{11}^{(0,0)}(\zeta=0) + b_{22}^{(0,0)}(\zeta=0)}{\sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega}$$

Решения (3.5), (3.6) будут конечными, если

$$\cos a_i' \Omega \zeta_j \neq 0, \quad i=1, 2, 3 \quad j=1, 2 \quad k=I, II$$

$$\Delta_1 \neq 0 \quad (3.8)$$

Условия (3.8) будут выполнены, если  $\Omega$  не является частотой собственных колебаний [9], в противном случае будет возникать резонанс. Формулы (2.1), (2.5), (2.10), (3.5)-(3.7) позволяют определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью.

4. Рассмотрим частный случай, пусть

$$u' = \text{const}, \quad v' = \text{const}, \quad w' = \text{const} \quad (4.1)$$

При  $s = 0$  будем иметь

$$U^{(0,0)} = -\frac{1}{\cos a_1' \Omega \zeta_1} \frac{W^{-(0)} f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}' \rho_{II}} \Omega}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_1' \Omega (\zeta - \zeta_1)$$

$$V^{(0,0)} = -f_2 \frac{W^{-(0)} \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}' \rho_{II}} \Omega}{\Delta_1 \cos a_2' \Omega \zeta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_2' \Omega (\zeta - \zeta_1) \quad (4.2)$$

$$W^{(0,0)} = -\frac{W^{-(0)} \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega}{\Delta_1} \sin a_1' \Omega (\zeta - \zeta_1)$$

$$U^{(0,0)} = \frac{1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2}$$

$$\times \left[ -\frac{W^{(0)} f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}' \rho_I} \Omega}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_1'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + U^{-(0)} \cos a_1'' \Omega \zeta \right]$$

$$V^{(0,0)} = \frac{1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} \times$$

$$\times \left[ -f_2 \frac{W^{-(0)} \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}' \rho_{II}} \Omega}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + V^{-(0)} \cos a_2'' \Omega \zeta \right] \quad (4.3)$$

$$\bar{W}^{(n,0)} = \frac{1}{\cos a'' \Omega \zeta_2} \times \left[ \frac{W^{(n,0)} \sqrt{A'_1 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \sin a'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + W^{(n,0)} \cos a'' \Omega \zeta \right]$$

Из (2.5) при  $s = 0$  учитывая, что  $Q^m = 0$  при  $m < 0$ , для компонентов тензора напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(s,0)} &= 0, & \sigma_{11}^{(s,0)} &= \frac{1}{a''_1} \frac{\partial U^{(s,0)}}{\partial \zeta}, & \sigma_{21}^{(s,0)} &= \frac{1}{a''_2} \frac{\partial V^{(s,0)}}{\partial \zeta} \\ \sigma_{11}^{(s,0)} &= -A''_2 \frac{\partial W^{(s,0)}}{\partial \zeta}, & \sigma_{22}^{(s,0)} &= -A''_1 \frac{\partial W^{(s,0)}}{\partial \zeta}, & \sigma_{33}^{(s,0)} &= A''_1 \frac{\partial W^{(s,0)}}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Несложно убедиться, что при  $s > 0$

$$U^{(s,s)}, V^{(s,s)}, W^{(s,s)} = 0, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{ij}^{(s,s)} = 0, \quad k = I, II, \quad i, j = 1, 2, 3$$

поэтому приближению  $s = 0$  соответствует точное решение: величины первого слоя —

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1} \frac{w f_1 \sqrt{A'_1 A''_1 a''_2 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \sin a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ v' &= -f_2 \frac{w \sqrt{A''_1 a''_2 A''_1 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1 \cos a'_2 \Omega \zeta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \sin a'_2 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ w' &= -\frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \sin a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ \sigma'_y &= 0 \\ \sigma'_{xx} &= -\frac{w f_1 \sqrt{A'_1 A''_1 a''_2 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1 a'_1 \cos a'_1 \Omega \zeta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ \sigma'_{yy} &= -f_2 \frac{w \sqrt{A''_1 a''_2 A''_1 \rho_1 a'_2 \Omega^2}}{h a''_2 \Delta_1 \cos a'_2 \Omega \zeta_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \cos a'_2 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ \sigma'_{zz} &= A''_1 \frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1} \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ \sigma'_{xy} &= A''_1 \frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1} \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \\ \sigma'_{yz} &= -A''_1 \frac{w \sqrt{A''_1 \rho_1 a'_1 \Omega^2}}{h \Delta_1} \cos a'_1 \Omega (\zeta - \zeta_1) \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

величины второго слоя —

$$u'' = \frac{1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} \times \left[ -\frac{w f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_1'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + u^- \cos a_1'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$v'' = \frac{1}{\cos a_2'' \Omega \zeta_2} \times \left[ -f_2 \frac{w \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + v^- \cos a_2'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$w'' = \frac{1}{\cos a_3'' \Omega \zeta_2} \times \left[ -\frac{w \sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \sin a_3'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + w^- \cos a_3'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{\tau}'' = 0 \quad (4.7)$$

$$\sigma_{11}'' = -\frac{a_1'' \Omega}{h a_{11}'' \cos a_1'' \Omega \zeta_2} \times \left[ \frac{w^- f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_1'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + u^- \sin a_1'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{22}'' = -\frac{a_2'' \Omega}{h a_{22}'' \cos a_2'' \Omega \zeta_2} \times \left[ f_2 \frac{w \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{33}'' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + v^- \sin a_2'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{33}'' = A_{11}'' \frac{a_3'' \Omega w^-}{h \cos a_3'' \Omega \zeta_2} \left[ \frac{\sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_3'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{12}'' = A_{11}'' \frac{a_1'' \Omega w^-}{h \cos a_1'' \Omega \zeta_2} \left[ \frac{\sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_2'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + \sin a_2'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{23}'' = -A_{11}'' \frac{a_2'' \Omega w^-}{h \cos a_2'' \Omega \zeta_2} \left[ \frac{\sqrt{A_{11}' \rho_1 \Omega}}{\Delta_1} \cos a_1' \Omega \zeta_1 \cos a_3'' \Omega (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3'' \Omega \zeta \right] \exp(i\Omega t)$$

Из полученного точного решения (4.6), (4.7) следует любопытный факт — все величины первого слоя не зависят от  $u^*$ ,  $v^*$ , т.е. при наличии кулонова трения между слоями, сообщаемые второму слою тангенциальные перемещения не влияют на напряженно-деформированное состояние первого слоя. Отметим, что если между слоями имеется полный контакт, т.е. равенство на поверхности контакта всех компонентов вектора перемещения и напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{zx}$ , напряженно-деформированные состояния обоих слоев зависят от  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  [9]. Установленный выше факт можно использовать в расчетах фундаментов-оснований сооружений сейсмостойкого строительства при учете сейсмического воздействия.

Выясним характер напряженно-деформированного состояния в ключевых сечениях двухслойного пакета и проведем сравнительный анализ. Согласно (2.1), (4.6) при  $\zeta = \zeta_1$  имеем:

$$\begin{aligned} \sigma'_{13}(\zeta_1) &= -f_1 b_1 \frac{\cos a'_1 \Omega \zeta_1}{\cos a'_1 \Omega \zeta_1}, \quad \sigma'_{23}(\zeta_1) = -f_2 b_2 \frac{\cos a'_2 \Omega \zeta_1}{\cos a'_2 \Omega \zeta_1} \quad (4.8) \\ \sigma'_{11}(\zeta_1) &= -b_1, \quad b_1 = \frac{w \Omega^2 \sqrt{A'_1 A''_1} \rho_1 \rho_2}{h \Delta_1} \end{aligned}$$

Из (4.8) следует, что при определенных значениях физико-механических и геометрических параметров слоев ( $\cos a'_1 \Omega \zeta_1 = 0$ ,  $\cos a'_2 \Omega \zeta_1 = 0$ ,  $\Delta_1 = 0$ ) на верхнем сечении могут возникнуть достаточно большие касательные и нормальные напряжения, которые могут привести к разрушению (отрыву).

Напряжения и перемещения на поверхности контакта  $\zeta = 0$  слоев таковы:

$$\begin{aligned} \sigma'_{13}(\zeta = 0) &= -f_1 b_1 \cos a'_1 \Omega \zeta_1, \quad \sigma'_{23}(\zeta = 0) = -f_2 b_2 \cos a'_2 \Omega \zeta_1 \\ \sigma'_{11}(\zeta = 0) &= -b_1 \cos a'_1 \Omega \zeta_1, \quad u'_1(\zeta = 0) = f_1 b_1 \sqrt{a''_1 \rho_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a'_1 \Omega \zeta_1 \\ u'_2(\zeta = 0) &= f_2 b_2 \sqrt{a''_2 \rho_2} \cos a'_2 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a'_2 \Omega \zeta_1 \\ u'_3(\zeta = 0) &= b_2 \sqrt{\rho_2 / A''_1} \sin a'_1 \Omega \zeta_1, \quad b_2 = w \Omega \sqrt{A'_1 A''_1} / \Delta_1 \quad (4.9) \\ \bar{u}''_1(\zeta = 0) &= -f_1 b_1 \sqrt{a''_1 \rho_1} \cos a'_1 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a''_1 \Omega \zeta_1 + \frac{u^*}{\cos a''_1 \Omega \zeta_1} \\ \bar{u}''_2(\zeta = 0) &= -f_2 b_2 \sqrt{a''_2 \rho_2} \cos a'_2 \Omega \zeta_1 \operatorname{tg} a''_2 \Omega \zeta_1 + \frac{v^*}{\cos a''_2 \Omega \zeta_1} \end{aligned}$$

Из (4.9) следует, что на поверхности контакта касательные напряжения сравнительно малы за исключением резонансных значений частоты, соответствующих  $\Delta_1 = 0$ , тогда доминирующую роль будут играть

нормальное перемещение и нормальное напряжение. Для значений частоты внешнего воздействия, близких к резонансным, соответствующим  $\cos a_1' \Omega \zeta_1 = 0$ ,  $\cos a_1'' \Omega \zeta_2 = 0$ ,  $i=1, 2$ , доминирующую роль играют тангенциальные перемещения.

При неполном контакте, естественно, тангенциальные перемещения не равны. Приведем значения относительного смещения слоев:

$$\begin{aligned}
 & u_1'(\zeta = 0) - u_1''(\zeta = 0) = \\
 & = f_1 b_2 \cos a_1' \Omega \zeta_1 \left( \sqrt{a_{33}' \rho_H} \operatorname{tg} a_1' \Omega \zeta_1 + \sqrt{a_{33}'' \rho_1} \operatorname{tg} a_1'' \Omega \zeta_2 \right) - \frac{u^*}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} \\
 & u_2'(\zeta = 0) - u_2''(\zeta = 0) = \\
 & = f_2 b_1 \cos a_2' \Omega \zeta_1 \left( \sqrt{a_{44}' \rho_H} \operatorname{tg} a_2' \Omega \zeta_1 + \sqrt{a_{44}'' \rho_1} \operatorname{tg} a_2'' \Omega \zeta_2 \right) - \frac{v^*}{\cos a_2'' \Omega \zeta_2} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

которое может оказаться существенным вблизи резонансных значений частоты  $\Omega$  внешнего воздействия.

Напряжения при  $\zeta = -\zeta_2$  имеют значения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}''(-\zeta_2) &= -f_1 b_1 \frac{\cos a_1' \Omega \zeta_1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} + \frac{\Omega}{h} \sqrt{\frac{\rho_H}{a_{33}''}} u^* \operatorname{tg} a_1'' \Omega \zeta_2 \\
 \sigma_{23}''(-\zeta_2) &= -f_2 b_1 \frac{\cos a_2' \Omega \zeta_1}{\cos a_2'' \Omega \zeta_2} + \frac{\Omega}{h} \sqrt{\frac{\rho_H}{a_{44}''}} v^* \operatorname{tg} a_2'' \Omega \zeta_2 \quad (4.11) \\
 \sigma_{33}''(-\zeta_2) &= -b_1 \frac{\cos a_1' \Omega \zeta_1}{\cos a_1'' \Omega \zeta_2} + \frac{\Omega}{h} \sqrt{A_{11}'' \rho_H} w^* \operatorname{tg} a_1'' \Omega \zeta_2
 \end{aligned}$$

Из (4.11) следует, что значения напряжений под вектором перемещения  $(u^*, v^*, w^*)$ , сообщаемого поверхности  $\zeta = -\zeta_2$ , существенно зависят также от физико-механических и геометрических характеристик первого слоя.

The authors express their gratitude to INTAS, grant Ref. NO; 03-51-5547, which made this investigation possible.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.

3. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. //Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып.2. С. 7-12.
4. Агаловян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера. // В сб.: XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Часть первая. Таллин. 1983. С. 13-18.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. // В сб.: Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
6. Агаловян Л. А., Адамян С. Х. О напряженно-деформированном состоянии двухслойной полосы-прямоугольника с переменными упругими характеристиками. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986. Т. 39. №5. С. 3-15.
7. Агаловян Л. А., Саркисян Л. С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. //Труды XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. Р. Ф. Саратов. 1997. Том I. С.30-38.
8. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С.132-135.
9. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во Гитутюн НАН РА, 2002. С. 9-19.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
14.12.2004

PROPAGATION CHARACTER OF PLANE VOLUME WAVES  
IN ELASTIC MAGNETOSTRICTIVE MEDIA

G.Y. Baghdasaryan, V.G. Garakov, Z.N. Danoyan, M.A. Mikilyan

ХАРАКТЕР РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН  
В УПРУГИХ МАГНИСТОСТРИКЦИОННЫХ СРЕДАХ

Г.Е.Багдасарян, В.Г.Гараков, З.Н.Даноян, М.А.Микилян

Исследован характер распространения плоских объемных волн в диэлектрической магнитострикционной среде в присутствии постоянного магнитного поля. Исследования были проведены на основе линейных дифференциальных уравнений и соответствующих условий, описывающие поведение возмущений в магнитострикционных средах, взаимодействующие с магнитными полями. Показано, что имеются три типа волн, которые могут распространяться в магнитострикционной среде: квазипродольная магнитострикционно связанная, квазиперечная магнитострикционно связанная и поперечная несвязанная. Более того, несвязанная та волна, в которой материальные частицы среды колеблются перпендикулярно той поверхности, которая формируется направлениями данного магнитного поля и распространения волны. Поведение вышеупомянутых волн исследовано в зависимости как от интенсивности магнитного поля, так и от ориентации магнитного поля относительно плоскости распространения волны.

Գ. Ե. Բաղդասարյան, Վ. Գ. Գարակով, Զ. Ն. Դանոյան, Մ. Ա. Միկիլյան

Հարթ ծավալային աղիւծների տարածման վարքը առաձգական մագնիսատրիկցիոն միջավայրերում

Հետազոտված է դիէլեկտրիկ մագնիսատրիկցիոն միջավայրում ծավալային հարթ ալիքների տարածման քննարկ մագնիսական դաշտի առկայությանը: Հետազոտությունները կատարված են մագնիսական դաշտերի հետ փոխազդեցության մեջ գտնվող մագնիսատրիկցիոն միջավայրերի գրգռումների վարքը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների և համապատասխան պայմանների հիման վրա: Ելույթ է տրված, որ գոյություն ունեն երեք տիպի ալիքներ, որոնք կարող են տարածվել մագնիսատրիկցիոն միջավայրում քվազիերկայնական մագնիսատրիկցիոնապես կապակցված, քվազիընդայնական մագնիսատրիկցիոնապես կապակցված և ընդայնական չկապակցված: Ավելին, կապակցված չէ այն ալիքը, որում միջավայրի մասնիկները տատանվում են այն հարթությանը ուղղահայաց, որը կազմվում է տրված մագնիսական դաշտի և ալիքի տարածման ուղղություններով: Վերը նշված ալիքների վարքը հետազոտված է կախված ինչպես մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից, այնպես էլ ալիքների տարածման հարթության նկատմամբ մագնիսական դաշտի ուղղվածությունից:

The character of propagation of plane volume waves in elastic dielectric magnetostrictive media in the presence of constant magnetic field is investigated. Investigations have been done on the basis of linear differential equations and conditions describing the perturbation behavior in elastic magnetostrictive media interacting with magnetic fields. It is shown that there are three types of waves that can be propagated in the elastic magnetostrictive media: quasilongitudinal magnetostrictionally coupled, quasitransversal magnetostrictionally coupled and transversal uncoupled. Moreover, uncoupled is that wave in which the material particles of the medium are vibrated perpendicular to the plane which is formed by the direction of given magnetic field and wave propagation. Behavior of the above-mentioned waves is investigated depending on both the intensity of magnetic field, as well as magnetic field's orientation with respect to the plane of wave propagation.

1. Introduction

Currently there are many works where several problems of propagation of electromagnetoelastic waves in solids are investigated. They are mainly devoted to the wave processes in conductive non-ferromagnetic media and in dielectric media with piezoelectric or ferromagnetic (with linear characteristic of magnetization) properties.

There are some works devoted to the issues of existence and propagation of waves in magnetoactive media in dependence on intensity of magnetic field and properties of the medium. The works [10,11] are devoted to the investigation of surface magnetoelastic waves with thermal relaxations, and in the work [9] the issues of existence of shear surface waves in magnetostrictive half-space (Blustein-Guliazev type wave) are studied. The issues of interaction between magnetic and acoustic waves in magnetoactive media are investigated in works [1,6]. The issues of existence and propagation of shear surface waves in piezomagnetic media are studied in [3]. In the works [4] the issues of reflection of shear magnetoelastic waves in magnetoactive media. It is discovered that when the volume wave falls on the edge of division between magnetoactive half-space and vacuum the qualitatively new vibrations (accompanying surface magnetoelastic vibrations) accompany the usual reflection process, which are conditioned exclusively by the magnetostrictive property of the medium. In the work [2] the linearized equations and boundary conditions are derived characterizing the behavior of small disturbances in non-conductive magnetoactive elastic media using non-linear equations and boundary conditions of the theory of magnetoelasticity of ferromagnetic bodies [1,2,5,6,8,13] and using the linearization technique [2,7,8]. Here on the basis of addressed in [3] linear boundary value problems by solving two-dimensional problems of wave dynamics, the character of propagation of plane volume waves depending on the magnetostrictive properties of the medium and its interaction with magnetic field is studied.

## 2. Basic equations and boundary conditions

Let an elastic dielectric media with the ordered magnetic structure is placed in an external stationary magnetic field, which in absence of a ferromagnetic body is characterized by the vector of intensity  $\vec{H}_0$  and vector of a magnetic induction  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$  ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/A<sup>2</sup> is the magnetic constant). The surroundings of the body are considered as vacuum.

The paper [2] is devoted to issues of mathematical modeling of disturbed motion of considered magnetoelastic medium in the presence of an external magnetic field. In that paper, using the basic postulates of nonlinear theory of magnetoelasticity of ferromagnetic bodies [1,2,5,6,8,13] and the theory of small disturbances, via linearization technique [2,7,8] the following linear equations and surface conditions describing the behavior of small disturbances in the noted magnetoactive deformable media are obtained:

equation in internal area

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( s_{ik} + s_{im}^0 \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \mu_0 M_i^0 \frac{\partial h_k}{\partial x_i} + \mu_0 m_i \frac{\partial H_k^0}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \\ \text{rot} \vec{h} = 0, \quad \text{div} \vec{b} = 0, \quad \vec{b} = \mu_0 (\vec{h} + \vec{m}) \\ s_{ij} = \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 c_{ijk} m_k \\ h_i = g_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik} m_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

where  $s_{ik}$  disturbances of components of the tensor of magnetoelastic stresses;  $s_{ik}^0$  are components of the tensor of stresses in unexcited shape;  $u_k$  are the disturbances of the vector of elastic displacements  $\vec{u}^n$  of unexcited state;  $h_k$ ,  $m_k$  and  $b_k$  are components of vectors  $\vec{h}$ ,  $\vec{m}$  and  $\vec{b}$ , which are disturbances according to the intensity  $\vec{H}^0$ .

magnetization  $\vec{M}^0$  and magnetic induction  $\vec{B}^0$  of unexcited magnetic field,  $x_i$  are Cartesian coordinates:

equations in external area

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \vec{b}^{(e)} = \mu_0 \vec{h}^{(e)} \quad (2.2)$$

index "e" here and further means belonging to the external area;

boundary conditions on the surface  $S_0$  of unexcited body:

$$\begin{aligned} \left[ s_{ik} + s_{km}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] n_k^0 &= [t_{ik}^{(e)} - t_{ik}] n_k^0 + [T_{km}^{0(e)} - T_{km}^0] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 \\ [b_k - b_k^{(e)}] n_k^0 &= [B_m^0 - B_m^{0(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 \\ \varepsilon_{msl} \left\{ [h_s - h_s^{(e)}] n_m^0 - [H_s^0 - H_s^{0(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $T_{km}^0$  and  $T_{km}^{0(e)}$  are Maxwell stress tensors of unexcited shape for a body and medium respectively (see (2.9)),  $n_k^0$  are components of the external unit vector  $\vec{n}_0$  to the surface  $S_0$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  is the Levi-Civita's tensor.

$$\begin{aligned} t_{ik} &= b_k H_i^0 + h_i H_k^0 - \mu_0 \delta_{ik} \vec{H}^0 \vec{h} \\ t_{ik}^{(e)} &= \mu_0 [h_i^{(e)} H_k^{0(e)} + h_k^{(e)} H_i^{0(e)} - \delta_{ik} \vec{H}^{0(e)} \vec{h}^{(e)}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

In the equations (2.1) the following notations are used.

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijkl} &= c_{ijkl} + \mu_0 A_{pqrs} M_r^0 M_s^0 (\delta_{ik} \delta_{pl} \delta_{rj} + \delta_{il} \delta_{kp} \delta_{rj} + \delta_{ip} \delta_{kl} \delta_{rj} + \delta_{jp} \delta_{kl} \delta_{ir}) + \\ &+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} (\delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kl} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{pq}) M_r^0 M_s^0 + \\ &+ \mu_0 B_{pqrs} (\delta_{pk} \delta_{ql} \delta_{is} M_j^0 + \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{is} M_k^0) M_r^0 \\ e_{ijkl} &= B_{ijkl} M_i^0 + A_{mkl} (\delta_{ij} M_m^0 + \delta_{mk} M_j^0) \\ g_{ijk} &= B_{\mu p i} M_p^0 + A_{rs} (\delta_{is} \delta_{jk} M_r^0 + \delta_{ik} \delta_{rs} M_j^0 + \delta_{ij} \delta_{rs} M_r^0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

where  $c_{ijkl}$ ,  $A_{kl}^{-1}$  and  $B_{ijkl}$  are tensors of elastic constants, magnetic permeability and magnetostrictive constants, respectively.

For magnetoelastic bodies which in the non-magnetization shape are isotropic with respect both magnetic and elastic properties, the following equations are [2,12,13]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad A_{kl} = \chi^{-1} \delta_{kl} \\ B_{ijk} &= e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

where  $\lambda$  and  $\mu$  are Lamé constants;  $\chi$  is the magnetic permeability;  $e_1$  and  $e_2$  are magnetostrictive constants of the medium.

It is necessary to add to the equations (2.2) the conditions of attenuation of disturbances of magnetic quantities on infinity.

When considering the linearized equation and expressions (2.1) - (2.5) it is noticed, that into the coefficients of these expressions the quantities with superscript "0" are

included, which in turn also non-linear and should be linearized. Details of the specified process of linearization are investigated in the work [8]. Here (in the work [2]) the simplified variant is applied based on identifications of geometry of an initial body in a non-excited state. By this assumption it is accepted, that a) the magnetic field of the unexcited shape coincides with a magnetic field of a non-deformable body and b) stresses and deformations of the unexcited shape can be defined from the solution of the following static problem of the theory of elasticity:

equations of equilibrium

$$\frac{\partial x_a^0}{\partial x_i} + \mu_2 M_a^0 \frac{\partial H_i^0}{\partial x_a} = 0 \quad (2.7)$$

$$s_{ij}^0 = c_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \mu_2 A_{ij} M_i^0 M_j^0 + \frac{1}{2} \mu_2 B_{ijkl} M_i^0 M_j^0 M_k^0 M_l^0$$

conditions on a surface of a non-deformable body

$$s_{ij}^0 N_j^0 = [T_{ij}^{(e)} - T_{ij}^0] n_i^0$$

where

$$T_{ij}^{(e)} = H_i^0 B_j^0 - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ij} [\bar{H}^0]^2 \quad (2.9)$$

$$T_{ij}^{(e)} = \mu_0 H_i^{(e)} H_j^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ij} [\bar{H}^{(e)}]^2$$

Included in (2.7) - (2.9) characteristics of the non-disturbed magnetic field, according to the accepted assumption are defined from the following problem of magnetostatics for a non-deformable body:

equations magnetostatics in the internal area

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{H}^0 &= 0, & \text{div} \bar{B}^0 &= 0 \\ \bar{B}^0 &= \mu_0 (\bar{H}^0 + \bar{M}^0), & H_i^0 &= A_{ij} M_j^0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

equations in the external area

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{H}^{(e)} &= 0, & \text{div} \bar{H}^{(e)} &= 0 \\ \bar{M}^{(e)} &= 0, & \bar{B}^0 &= \mu_0 \bar{H}^{(e)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

conditions on the surface

$$(\bar{B}^0 - \bar{B}^{(e)}) \cdot \bar{n}_0 = 0, \quad (\bar{H}^0 - \bar{H}^{(e)}) \times \bar{n}_0 = 0 \quad (2.12)$$

and condition on infinity

$$\bar{H}^{(e)} \rightarrow \bar{H}^{(e)} \text{ for } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

Thus, the issues of investigation of behavior of disturbances of magnetoelastic quantities of some shape is reduced to the consequently solution of the following three tasks:

1. Definition of the characteristics of a magnetic field of a non-deformable body on the basis of equations (2.10) - (2.13);
2. Definition of magnetoelastic quantities of the unexcited shape on the basis of equations (2.7) - (2.9) with the use of the solution of the first task;
3. Investigation of behavior of magnetoelastic disturbances on the basis of equations (2.1) - (2.6) with the use of the solutions of first two tasks.

On the basis of the formulated above boundary value problems and results of works [3,4] we'll consider the propagation character as volume as well as surface plane waves

depending on magnetostrictive properties of the medium and on the magnetoelastic interactions.

### 3. Propagation Character of Volume Plane Waves

Let us consider the propagation of a plane magnetoelastic wave in a boundless magnetostrictive dielectric medium assuming that the perturbations depend on one of the Cartesian coordinates only, say  $x_1$  and the time  $t$ . We choose the orthogonal system  $x_1, x_2, x_3$  in such a way, that the coordinate plane  $(x_1, x_2)$  coincides with the plane formed by the direction of the given magnetic field  $\vec{H}$  and the direction  $\vec{n}$  of the propagation of the plane wave (the axis  $Ox_1$  is parallel to the vector  $\vec{n}$ ). Then in this coordinate system the external magnetic field will have the form  $\vec{H}_0 = (H_{01}, H_{02}, 0)$ , where  $H_{0i} = \text{const}$ .

Taking into account the above-stated from (2.1)-(2.6) we have the following equations relative to the components of the displacement vector  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  and the vector of the induced magnetic field  $\vec{h}(h_1, h_2, h_3)$ , which describe perturbed state of the medium under consideration in the case of one-dimensional motions have the form:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ a_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\chi}{\mu_r} \left[ (\chi e_1 + 3) H_{01} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\chi e_2 + 1) H_{02} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \\ h_2 &= 0, \quad h_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

where

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda + 2\mu + \mu_0 \chi^2 \left\{ \left[ \frac{1}{\mu_r} (\chi e_1 + 3)^2 - \frac{1}{\chi} \left( \chi^2 e_1^2 + \frac{3}{2} \chi e_1 + 3 \right) \right] H_{01}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_2}{2} [1 - \chi(e_1 - e_2)] H_{02}^2 \right\} \\ a_{22} &= \mu + \mu_0 \chi^2 \left\{ \gamma H_{01}^2 + \left[ e_1 - \frac{3}{2} e_2 + \frac{\chi e_2 + 1}{\mu_r} \left( 1 - \frac{e_1 - e_2}{2} \right) \right] H_{02}^2 \right\} \\ a_{33} &= \mu + \mu_0 \chi^2 \left( \gamma H_{01}^2 + \frac{1}{2} e_2 H_{02}^2 \right) \\ a_{12} &= \mu_0 \chi^2 \left[ e_1 - \frac{\alpha}{\chi} (\chi e_2 + 1) - \frac{e_2 - 1}{\mu_r} (\chi e_2 + 3) \right] H_{01} H_{02} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$a_{21} = \mu_0 \chi^2 \left( e_1 - \frac{a}{\mu_0} (e_1 - 3) - \frac{a^2}{\chi} \right) H_{01} H_{02}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} e_1 - \frac{a^2}{\chi}, \quad a = 1 + \chi \frac{e_1 - e_2}{2}$$

From (3.1) follows that the displacement  $u_j$  is defined independently of  $u_1, u_2$  in the boundless medium and the corresponding transversal waves are magnetostrictively unbounded since they don't bring to the rise of induced magnetic field, as it is shown from (3.2).

Let

$$u_j = u_j^0 \exp[i(kx_j - \omega t)] \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

be the solution of (3.1), which corresponds to the propagation of the plane bulk magnetoelastic wave with the frequency  $\omega$  and wave number  $k$ .

Substituting (3.4) into the (3.1) we get a linear system of homogeneous algebraic equations with respect to the amplitudes  $u_j^0$ . Applying the condition of existence of non-trivial solution for the mentioned system, we get the formulas, which define the velocities  $c_i$  of the propagation of magnetostrictively bounded waves:

$$c_1^2 = \frac{a_{11} + a_{22} + q_i}{2\rho_0}, \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$c_3^2 = \frac{a_{33}}{\rho_0}$$

The following notation is introduced in (3.5)

$$q_i = (-1)^{i+1} \left[ (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Given equations and obtained relations easily imply that if the medium is non-ferromagnetic  $\chi = 0$  or the external magnetic field is absent ( $H_1 = 0$ ) then  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$ ,  $c_2^2 = c_3^2 = \mu/\rho_0$  and the results are coincided with the famous results for the pure elastic plane waves. The analysis of the characteristic equation depending on the orientation of given magnetic field shows, that

a) If the magnetic field is parallel or perpendicular to the direction of propagation ( $\vec{H} \parallel \vec{n}$  or  $\vec{H} \perp \vec{n}$ , where  $\vec{n}$  - is the direction of propagation of the plane wave) then all three waves are propagated independently;

b) In the case of  $\vec{H} \perp \vec{n}$  one of these waves with the velocity  $c_1$  is pure longitudinal and the other two waves are pure transversal and propagated with different velocities ( $c_2 \neq c_3$ );

c) In the case of  $\vec{H} \parallel \vec{n}$  the velocities of transversal waves coincide ( $c_2 = c_3$ ) (as in the case of pure elastic plane waves), pure longitudinal magnetoelastic wave with the velocity  $c_1$  and a pure transversal wave with the velocity  $c_2$  are propagated in the media and the propagation velocities depend on the value of magnetic field induction.

In other cases (in the sense of direction of magnetic field) in the magnetostrictively coupled waves the vector of displacement  $\vec{u}$  is not perpendicular or parallel to the direction of propagation of waves.

However taking into consideration that for the basic magnetostrictive materials  $\chi e_i B_s^2 / \mu_0 \mu \ll 1$  (where the  $B_s$  is the induction saturation), we observe that the deflection of  $\vec{u}$  from the direction  $\vec{n}$  in the case of wave with the velocity  $c_1$  and the deflection of  $\vec{u}$  from the plain of front for in the case of wave with the velocity  $c_2$  nonsignificant. For this reason the first wave can be called quasi-longitudinal and the second one - quasi-transversal.

Thus it is shown that there are three types of plane magnetoelastic waves which can be propagated in the magnetostrictive elastic medium: quasi-longitudinal magnetostrictively coupled, quasi-transversal magnetostrictively coupled and transversal uncoupled.

**Numerical Results.** In previous point we have investigated the influence of interaction between magnetic field and magnetostrictive media. In particular it was shown that the anisotropy caused by magnetic field can qualitatively change the character of wave field in magnetostrictive media. Here numerical calculations are made for certain materials with the purpose of revealing the quantitative influence of magnetic field on velocities of plane waves propagation. For calculations *Ferrite F-107* and *FerroNickel NiFe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>* are chosen. For these materials the physical and mechanical constants are taken from the monograph [12] and they are:

For *Ferrite F-107* -

$$\rho_0 = 5.26 \cdot 10^3 \text{ kg/meter}^3; \lambda = 1.02 \cdot 10^{11} \text{ Newton/meter}^2;$$

$$\mu = 0.66 \cdot 10^{11} \text{ Newton/meter}^2; \mu_r = 30; e_1 = 42.2; e_2 = -22.1.$$

For *FerroNickel NiFe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>* -

$$\rho_0 = 7.1 \cdot 10^3 \text{ kg/meter}^3; \lambda = 1.17 \cdot 10^{11} \text{ Newton/meter}^2;$$

$$\mu = 0.55 \cdot 10^{11} \text{ Newton/meter}^2; \mu_r = 32; e_1 = 124.2; e_2 = -62.1.$$

The results for the *Ferrite F-107* are brought in fig.1 and for the *FerroNickel NiFe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>* - in fig. 2. In the figure

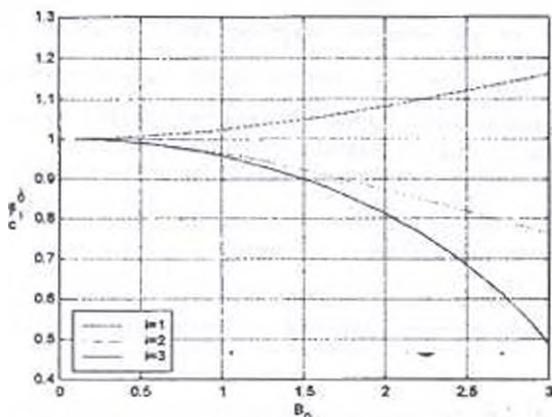


Fig. 1

Dependence of velocity of volume waves on magnetic induction for the Ferrite F-107

the dependence of  $c_i/c_0$  on magnetic field induction are brought, when

$B_{01} = \frac{1}{2} B_0$ ,  $B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0$ . Here  $c_i$ ,  $i=1,2,3$  - are velocities of propagation of

magnetoelastic plane waves, which are defined from the formula  $c_i^2 = \frac{a_{11} + a_{22} + q_i}{2\rho_0}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $c_3^2 = \frac{a_{33}}{\rho_0}$ ; and  $c_{01}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  is the propagation velocity of longitudinal plane wave;  $c_{02}^2 = c_{03}^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$  are the propagation velocities of transversal plane waves in the absence of magnetic field.

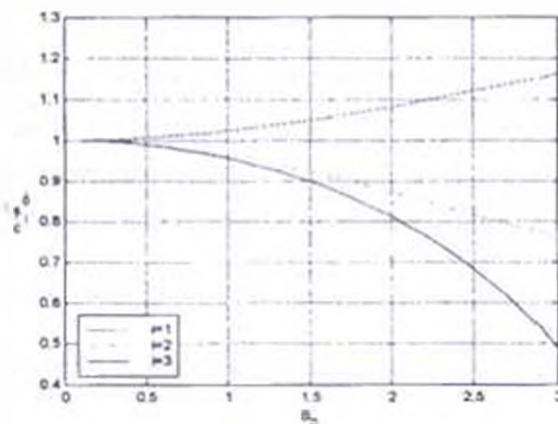


Fig. 2

Dependence of velocity of volume waves on magnetic induction for the FerroNickel F-107

From these figures it is easy to draw conclusions that:

1. With respect of magnetic field the velocity of transversal wave is more sensitive;
2. Depending on magnetic field value the velocity of longitudinal wave increases and the velocity of transversal wave decreases;
3. As it was shown in previous point the magnetic field influence is more essential for the materials having higher magnetostrictive constants.

#### 4. Conclusions

A number of results and conclusions related to the character of propagation of volume plane waves in elastic dielectric magnetostrictive media in presence of constant magnetic field were made. It was shown that:

- there are three types of plane magnetoelastic volume waves, which can be propagated in the magnetostrictive elastic medium: quasi-longitudinal magnetostrictionally coupled, quasi-transversal magnetostrictionally coupled and transversal uncoupled;
- with respect to the magnetic field the velocity of transversal wave is more sensitive; depending on the magnitude of magnetic field the velocity of longitudinal wave increases and the velocity of transversal wave decreases.

### References

1. A.I. Aghiezer, V.G. Baryakhtar, S.V. Peletinski, Spin Waves. Moscow, Nauka, 1967, - 368p (in Russian).
2. G.Y. Baghdasaryan, Mathematical Modeling of Excitement Behavior in Magnetostrictive media, in Math. Methods and Phys.-Mech. Fields, 1998, vol.41, №3, pp. 70-75 (in Russian).
3. G.E. Baghdasaryan, Z.N. Danoyan, and V.G. Garakov, Shear Surface Magnetoelastic Waves in Anisotropic Piezomagnetic Half-Space. - Proceeding of the II SU Symposium "Strength and Technological Products Made Of Composite Materials". Yerevan, 1984. Vol.1, pp.92-96.
4. G.E. Baghdasaryan, Z.N. Danoyan, and L.A. Sanoyan, The Reflection of Shear Magnetoelastic Waves From the Free edge of Piezomagnetic Half-Space. - Proc. Sci. Publ., Mechanics, Pub. House YSU, 1986, 5, pp/102-109. (in Russian)
5. W.F. Brown, Magnetoelastic Interactions, Springer-Verlag, New York, 1966, -155p.
6. G.A. Maugin, Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. Elsevier Science Publishers B.V., 1988, -560p.
7. V.V. Novojilov, The Basis of Non-linear Theory of Elasticity, Moscow, Gostechizdat, 1948, 212p (in Russian).
8. Y-H Pao, C.-S. Yeh, A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids, Int. J. Eng. Sci., 11, 1973, №4, pp.415-436.
9. J.P. Parekh, Magnetoelastic surface wave in ferrites, Electronics Letters. vol.5, №14, 1969, pp.322-323.
10. Y.Shindo, S. Tomita, Thermoelastic Rayleigh Waves With Thermal Relaxation in the Magnetic Field Normal to the Surface. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn., 1979, 27, №1, pp.9-15.
11. Y.Shindo, S. Tomita Rayleigh Waves in Magnetoelastic Solids With Thermal Relaxations. Int. J. Eng. Sci., 1979, 17, №2, pp.227-232.
12. L.N. Sirkina, Piezomagnetic Ceramics, Leningrad. Energy, 1980, 205p (in Russian).
13. K.B. Vlasov, Some Issues of the Theory of Elastic Ferromagnetic (Magnetostrictive) Media. Proc. Acad. Sci. USSR, Ser. Phys. 1957, vol.21, №8, pp.1140-1148.

Institute of Mechanics NAS Armenia  
Yerevan State University

Received  
20.01.2005

ИЗГИБ И СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ  
 ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Григорян Э. Ф.

Գրիգորյան Հ.Ֆ.

Փոփոխական հաստության անվերջ շերտի ծոռում և ապառ տատանումները

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են փոփոխական հաստության անիզոտրոպ բարակ սալերի մի քանի եզրային խնդիրներ: Խնդրի լուծման համար օգտագործվում է փոքր պարամետրի մեթոդը: Արդյունքներն աֆեյի պարզ տեսք են ստանում, էքր անվերջ շերտի համար հաստությունը փոխվում է  $h(y) = h_0 e^{2\beta y/3}$  որևէրով: Խնդրի լուծումը տրվում է փոքր պարամետրի աստիճանների շարքի տեսքով:

Grigoryan H. F.

The bending and free vibrations of strip-plate with variable thickness

Some boundary problems for anisotropic thin plates with variable thickness are considered in this work. The results are becoming simpler when the bending and free vibrations of strip-plate with variable thickness is changed according this  $h(y) = h_0 e^{2\beta y/3}$  law. The method of small parameters is offered for the solution. The recurrent systems of differential integrable equations are built.

В настоящей работе рассматриваются некоторые краевые задачи для анизотропных тонких пластин переменной толщины. Подобные задачи исследованы в [1,2,5]. Для решения задачи предлагается метод малого параметра. Решение представлено в виде ряда по степеням малого параметра.

§1. Основные дифференциальные уравнения и необходимые выражения.

Пусть имеем анизотропную пластинку переменной толщины, зависящих от двух переменных  $x$  и  $y$ . Рассмотрим изгиб тонкой упругой ортотропной пластинки под действием поперечной нагрузки  $q(x, y)$ . Обозначим через  $h = h(x, y)$  толщину пластинки, а через  $W(x, y)$  прогиб срединной плоскости. Тогда дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластинки будет [4].

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{D^4 W}{Dx^3} + 2 \left[ 2 \frac{\partial D_{66}}{\partial y} + \frac{\partial D_{12}}{\partial y} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \\
 & + 2 \left[ 2 \frac{\partial D_{66}}{\partial x} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + 2 \left[ \frac{\partial D_{66}}{\partial x} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \left[ \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\
 & + 4 \left[ \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial x \partial y} \frac{\partial W}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = q
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Предположим, что толщина пластинки меняется по закону

$$h(x, y) = h_0 \exp \left[ \frac{1}{3} (\alpha x + \beta y) \right] \tag{1.2}$$

где  $h_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные.

Тогда для выражения жесткости будем иметь

$$Dij(x, y) = \tilde{D}_i^0 h^3 = \tilde{D}_i^0 h_0^3 e^{i(\alpha x + \beta y)} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и переходя к новым переменным  $X = x/b, Y = y/b$ , получим

$$A[W] + H[W] = qe^{-b(\alpha x - \beta y)} \quad (1.4)$$

где

$$A[W] = \frac{1}{b^4} \left[ \bar{D}_{11}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2(\bar{D}_{12}^0 + 2\bar{D}_{66}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \bar{D}_{22}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right] \quad (1.5)$$

$$H[W] = \frac{2\alpha}{b^3} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \bar{D}_{11}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + (\bar{D}_{12}^0 + 2\bar{D}_{66}^0) \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] + 2 \frac{\beta}{b^3} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \bar{D}_{22}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + (\bar{D}_{12}^0 + 2\bar{D}_{66}^0) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right] + \frac{1}{b^2} \left[ (\alpha^2 \bar{D}_{11}^0 + \beta^2 \bar{D}_{22}^0) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 4\alpha\beta \bar{D}_{66}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + (\alpha^2 \bar{D}_{12}^0 + \beta^2 \bar{D}_{22}^0) \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] \quad (1.6)$$

Приведем граничные условия для двух случаев:

а) край защемлен

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad (1.7)$$

б) край оперт

$$W = 0, \quad M_n = 0 \quad (1.8)$$

## §2. Изгиб бесконечной полосы-пластины переменной толщины

Теперь рассмотрим изгиб неоднородной бесконечной ортотропной полосы-пластины ( $b/a \ll 1$ ) под действием изгибающей нагрузки

$q = q_0 = \text{const}$ .

Тогда дифференциальное уравнение (1.4) примет следующий вид:

$$\frac{d^4 W}{dY^4} + 2b\beta \frac{d^3 W}{dY^3} + b^2 \beta^2 \frac{d^2 W}{dY^2} = \frac{q_0 b^4}{\bar{D}_{22}^0} e^{-\beta b Y} \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$W = \frac{dW}{dY} = 0, \quad \text{когда } Y = 0; 1. \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) будет таким:

$$W = C_1 + C_2 Y + C_3 e^{-\beta b Y} + C_4 Y e^{-\beta b Y} + \frac{q_0 e^{-\beta b Y}}{2\bar{D}_{22}^0 \beta^4} \left[ \beta^2 b^2 Y^2 + 4\beta b Y + 6 \right] \quad (2.3)$$

А постоянные  $C_i$  можно найти при помощи граничных условий (2.2).

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q_0}{\bar{D}_{22}^0 \beta^4} \left[ -3 - \left( e^{-2\beta b} \left( \frac{\beta^2 b^2}{2} - 3 \right) + e^{-2\beta b} \left( \frac{\beta^3 b^3}{2} + 2\beta^2 b^2 + 9 \right) - e^{-\beta b} \left( \frac{\beta^3 b^3}{2} + \frac{5}{2} \beta^2 b^2 + 9 \right) + 3 \right) K(\beta) \right] \\ C_2 &= \frac{q_0}{\bar{D}_{22}^0 \beta^4} \left[ \beta b + \beta b \left( e^{-2\beta b} \left( \frac{\beta^2 b^2}{2} - 3 \right) + e^{-2\beta b} \left( \frac{\beta^3 b^3}{2} + 2\beta^2 b^2 + 9 \right) - e^{-\beta b} \left( \frac{\beta^3 b^3}{2} + \frac{5}{2} \beta^2 b^2 + 9 \right) + 3 \right) K(\beta) - \right. \\ &\quad \left. - \left( e^{-2\beta b} (-\beta^2 b^2 - 2\beta b) + e^{-\beta b} \left( \frac{\beta^4 b^4}{2} + \beta^3 b^3 + \beta^2 b^2 + 4\beta b \right) - 2\beta b \right) K(\beta) (e^{-\beta b} - 1) \right] \\ C_3 &= \frac{q_0}{\bar{D}_{22}^0 \beta^4} \left( e^{-2\beta b} \left( \frac{\beta^2 b^2}{2} - 3 \right) + e^{-2\beta b} \left( \frac{\beta^3 b^3}{2} + 2\beta^2 b^2 + 9 \right) - e^{-\beta b} \left( \frac{\beta^3 b^3}{2} + \frac{5}{2} \beta^2 b^2 + 9 \right) + 3 \right) K(\beta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$C_4 = \frac{q_0}{\bar{D}_{22}^0 \beta^4} \left( e^{-2\beta} (-\beta^2 b^2 - 2\beta b) + e^{-\beta} \left( \frac{\beta^4 b^4}{2} + \beta^2 b^3 + \beta^2 b^2 + 4\beta b \right) - 2\beta b \right) K(\beta) (e^{-\beta} - 1)$$

$$\text{где } K(\beta) = \frac{1}{(e^{-2\beta} - 1) \left( -\beta^2 b^2 e^{-2\beta} (e^{-2\beta} - 1)^2 \right)}.$$

Следовательно, из (2.3) при помощи (2.4) для прогиба бесконечной полосы находим

$$W = \frac{q_0}{\bar{D}_{22}^0 \beta^4} \left[ -3 + \beta \cdot Y + \left( e^{-3\beta} \left( \frac{\beta^2}{2} - 3 \right) + e^{-2\beta} \left( \frac{\beta^3}{2} + 2\beta^2 + 9 \right) - e^{-\beta} \left( \frac{\beta^3}{2} + \frac{5}{2} \beta^2 + 9 \right) + 3 \right) K(\beta) \cdot \right. \\ \left. \times (\beta \cdot Y + e^{-\beta \cdot Y} - 1) + \left( e^{-2\beta} (-\beta^2 + 2\beta) + e^{-\beta} \left( \frac{\beta^4}{2} + \beta^3 + \beta^2 + 4\beta \right) - 2\beta \right) K(\beta) (e^{-\beta} - 1) \cdot \right. \\ \left. \times (Y e^{-\beta \cdot Y} - Y) + \frac{e^{-\beta \cdot Y}}{2} (\beta^2 Y^2 + 4\beta Y + 6) \right] \quad (2.5)$$

$$(\beta = \beta b)$$

В частности, когда имеем однородную полосу ( $\beta = 0$ ), раскрывая неопределенность по Лопиталю, находим

$$W|_{\beta \rightarrow 0} = \frac{q_0 b^4 Y^4}{24 \bar{D}_{22}^0}$$

Вычисляем значения  $W(\beta)$  и  $W(0)$  в точках  $Y = 0, 2; 0, 5; 0, 8$ . Введем обозначение  $R(\beta) = \frac{W(\beta)}{W(0)}$ . Ниже в табл. 1 приводятся значения функции  $R(\beta)$  и графики.

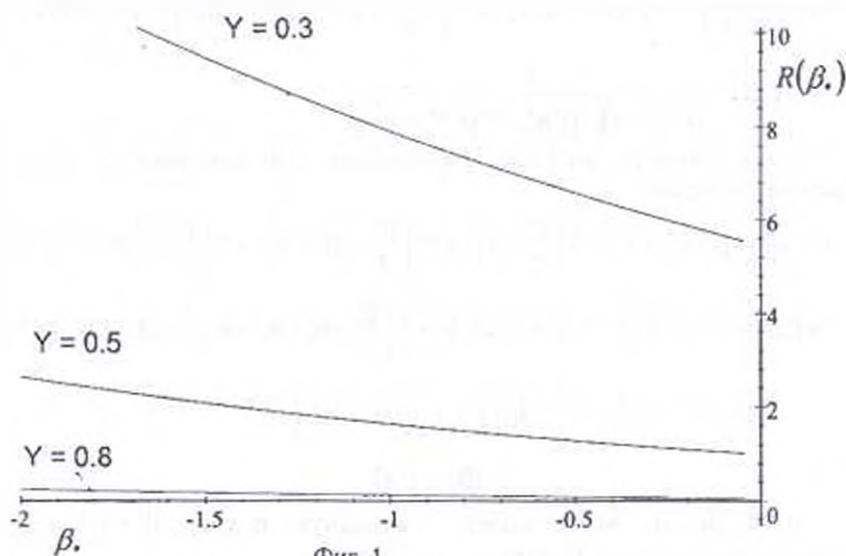
Вычисления показывают, что функция  $W(Y)$  принимает свое наибольшее значение при  $Y \approx 0,5374$  (когда  $\beta = -1$ ) и

$$\max W|_{Y \approx 0,5374} \approx 0,0043 \frac{q_0}{\bar{D}_{22}^0}$$

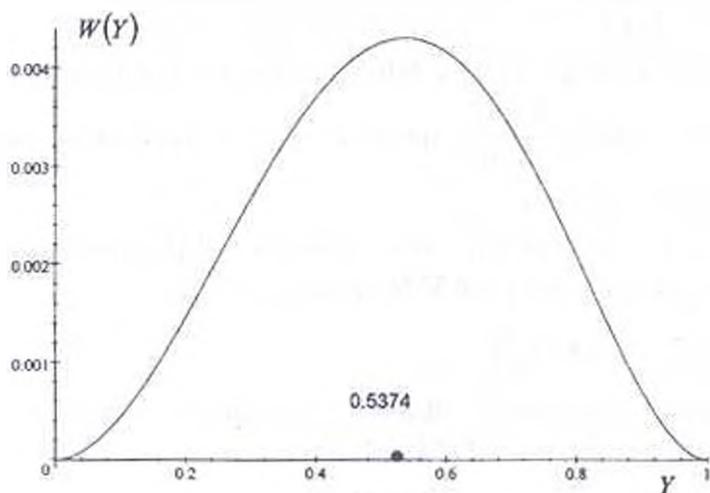
Этот факт показывает эффект переменной толщины. Ниже приводится график функции  $W(Y)$  (фиг. 2).

Таблица 1

$Y \backslash \beta$	0	0,1	-0,5	-1
0,3	5,451	5,602	6,443	7,955
0,5	1	1,041	1,208	1,642
0,8	0,081	0,089	0,092	0,125



Фиг. 1



Фиг. 2.

### §3. Свободные колебания бесконечной полосы переменной толщины

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях бесконечной полосы переменной толщины. Тогда уравнение задачи будет

$$\frac{d^4 W}{dy^4} + 2\beta \frac{d^3 W}{dy^3} + \beta^2 \frac{d^2 W}{dy^2} - \frac{\omega^2 \rho}{h_0^2 D_{22}} e^{-2\beta y} W = 0 \quad (3.1)$$

где

$$D_{22} = D_{22}^0 h_0^3 e^{3\beta y}, \quad h(y) = h_0^3 e^{\beta y}.$$

$\omega$  — частота собственных колебаний,  $\rho$  — плотность материала.

Введем малый параметр

$$\delta = \beta\beta_1, \quad (0 \leq \delta < 1) \quad (3.2)$$

Тогда, с учетом (3.2) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 W}{dy^4} + 2\delta\beta_1^{-1} \frac{d^3 W}{dy^3} + \delta^2\beta_1^{-2} \frac{d^2 W}{dy^2} - \omega^2 W \sum_{m=0}^{\infty} R_m \delta^m = 0 \quad (3.3)$$

где

$$R_m = \frac{(-1)^m}{m} \left( \frac{2}{3} \beta_1^{-1} y \right)^m, \quad \omega^2 = \frac{\omega^2 \rho}{h_0^2 D_{12}^0} \quad (3.4)$$

Представим решение уравнения (3.3)  $W$  и  $\omega^2$  в виде ряда по степеням  $\delta$

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \delta W_1 + \delta^2 W_2 + \dots \\ \omega^2 &= \Omega_0 + \delta \Omega_1 + \delta^2 \Omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя эти значения в (3.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$ , получим систему рекуррентных уравнений

$$\frac{d^4 W_0}{dy^4} - \Omega_0 R_0 W_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{d^4 W_1}{dy^4} - \Omega_0 R_0 W_1 = -\frac{2}{\beta_1} \frac{d^3 W_0}{dy^3} + W_0 (\Omega_0 R_1 + \Omega_1 R_0) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W_2}{dy^4} - \Omega_0 R_0 W_2 = & -\frac{2}{\beta_1} \frac{d^3 W_1}{dy^3} - \frac{1}{\beta_1^2} \frac{d^2 W_0}{dy^2} + W_1 (\Omega_0 R_1 + \Omega_1 R_0) + W_0 (\Omega_0 R_2 + \\ & + \Omega_1 R_1 + \Omega_2 R_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^4 W_n}{dy^4} - \Omega_0 R_0 W_n = \frac{2}{\beta_1} \frac{d^3 W_{n-1}}{dy^3} - \frac{1}{\beta_1^2} \frac{d^2 W_{n-2}}{dy^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} \Omega_i R_j W_i \quad (3.9)$$

При заданных граничных условиях эти уравнения решаются с учетом разрешимости неоднородных уравнений, определяются последующие приближения выражений собственных функций и собственных значений.

Пусть бесконечная полоса оперта по длинным сторонам, тогда граничные условия будут

$$W|_{y=0,b} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{d^2 W}{dy^2} \right|_{y=0,b} = 0 \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.6) представим в виде

$$W_0 = A_n \sin \lambda_n y \quad \left( \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \right) \quad (3.11)$$

Очевидно, что (3.11) удовлетворяет граничным условиям

$$W_0|_{y=0,b} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{d^2 W_0}{dy^2} \right|_{y=0,b} = 0 \quad (3.12)$$

Подставляя (3.11) в (3.6), для  $\Omega_0$  получим

$$\Omega_0(n) = \left( \frac{\pi n}{b} \right)^4 \quad (3.13)$$

Теперь приступим к нахождению первого приближения. С этой целью подставляем значения  $W_0$  и  $\Omega_0$  в уравнение (3.7).

$$\frac{d^4 W_1}{dy^4} - \lambda_n^4 W_1 = -\frac{2}{\beta_1} \frac{d^3 W_0}{dy^3} + W_0 \lambda_n^4 \left( -\frac{2}{3} \beta_1^{-1} y \right) + \Omega_0 W_0 \quad (3.14)$$

$$W_1|_{y=0,b} = 0 \text{ и } \frac{d^2 W_1}{dy^2} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (3.15)$$

Тогда для

$$\Omega_1(n) = \frac{\lambda_n^4 \beta_1^{-1} b}{3} \quad (3.16)$$

А для  $W_1$  находим

$$\frac{d^4 W_1}{dy^4} - \lambda_n^4 W_1 = A_n \left( 2\lambda_n^3 \beta_1^{-1} \cos \lambda_n y - \frac{2}{3} \lambda_n^4 \beta_1^{-1} y \sin \lambda_n y + \Omega_1 \sin \lambda_n y \right) \quad (3.17)$$

Общее решение уравнения (3.17) представим в виде

$$W_1 = \bar{W}_1 + \hat{W}_1 \quad (3.18)$$

где  $\hat{W}_1$  является частным решением неоднородного уравнения (3.17), а  $\bar{W}_1$  — общим решением однородного уравнения.

$$\bar{W}_1 = \frac{A_n \beta_1^{-1}}{4} \left[ \left( -\frac{\lambda_n y^2}{3} + \frac{\lambda_n b y}{3} \right) \cos \lambda_n y - y \sin \lambda_n y \right] \quad (3.19)$$

$$\bar{W}_1 = C_1 \operatorname{ch} \lambda_n y + C_2 \operatorname{sh} \lambda_n y + C_3 \cos \lambda_n y \quad (3.20)$$

В (3.20) не представлен  $C \sin \lambda_n y$ , потому что он уже представлен в  $W_0$ .

Теперь перейдем к определению  $C_i$  ( $i=1,2,3$ ), учитывая граничные условия (3.15).

Окончательно получим

$$W_1 = A_n \beta_1^{-1} \left[ \frac{1}{3\lambda_n} \left( \operatorname{ch} \lambda_n y + \frac{(-1)^n - \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b} \operatorname{sh} \lambda_n y - \cos \lambda_n y \right) + \frac{1}{4} \left( \left( -\frac{\lambda_n y^2}{3} + \frac{\lambda_n b y}{3} \right) \cos \lambda_n y - y \sin \lambda_n y \right) \right] \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в уравнение (3.8) и поступая аналогично, как для  $\Omega_1(n)$ , для  $\Omega_2(n)$ , получим

$$\Omega_2(n) = \beta_1^{-2} \lambda_n \left[ \frac{8 \left( (-1)^n - \operatorname{ch} \lambda_n b \right)}{9b \operatorname{sh} \lambda_n b} + \frac{11}{216} \lambda_n^3 b^2 - \frac{183}{72} \lambda_n \right] \quad (3.22)$$

Если довольствоваться первыми тремя приближениями, то значения собственных частот свободных колебаний определяются формулой

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^4 \left[ 1 + \frac{\beta_1^{-1} b}{3} \delta + \frac{\Omega_2(n)}{(\lambda_n)^4} \delta^2 \right] \quad (3.23)$$

Подставляя (3.22) в уравнение (3.8), находим

$$\begin{aligned} W_2 = & C_1 \operatorname{ch} \lambda_n y + C_2 \operatorname{sh} \lambda_n y + C_3 \cos \lambda_n y + \\ & + A_n \beta_1^{-2} \left[ \frac{1}{36} (-y^2 + by) \left( \operatorname{sh} \lambda_n y + \frac{(-1)^n - \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b} \operatorname{ch} \lambda_n y \right) + \right. \\ & + \left( -\frac{\lambda_n^2}{288} y^4 + \frac{\lambda_n^2 b}{144} y^3 + \left( -\frac{95}{288} - \frac{\lambda_n^2 b}{288} \right) y^2 + \frac{by}{36} \right) \sin \lambda_n y + \\ & \left. + \left( \frac{19}{432} \lambda_n y^3 - \frac{\lambda_n b}{18} y^2 + \left( -\frac{107}{96 \lambda_n} + \frac{\Omega_2(n)}{4 \beta_1^{-2} \lambda_n} - \frac{b}{96 \lambda_n} + \frac{b}{24} \right) y \right) \cos \lambda_n y \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = & -\frac{A_n \beta_1^{-2}}{72 \lambda_n^2} \left[ -2 \frac{(-1)^n - \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b} + \frac{23}{12} \lambda_n b \right] \\ C_2 = & \frac{-\bar{W}_2(b) - (-1)^n C_3 - C_1 \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b} \\ C_3 = & \frac{A_n \beta_1^{-2}}{72 \lambda_n^2} \left[ -2 \frac{(-1)^n - \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{sh} \lambda_n b} + \frac{23 \lambda_n b}{12} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

А теперь приведем значения  $\Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{12}$ , если малый параметр  $\delta$  равен 0.01; 0.05; 0.1.

Таблица 2

$\delta \backslash \beta_1$	$\beta_1 = -1$			$\beta_1 = -2$		
	$\Omega_{10}$	$\Omega_{10} + \delta \Omega_{11}$	$\Omega_{10} + \delta \Omega_{11} + \delta^2 \Omega_{12}$	$\Omega_{10}$	$\Omega_{10} + \delta \Omega_{11}$	$\Omega_{10} + \delta \Omega_{11} + \delta^2 \Omega_{12}$
0,01	1,201	1,1889	1,1886	1,201	1,1949	1,1948
0,05	1,201	1,1409	1,1344	1,201	1,1709	1,1693
0,1	1,201	1,081	1,0553	1,201	1,141	1,1345

Из табл. 2 видно, что  $\omega^2$  уменьшается от 5.1% до 12.1%, если в выражении (3.5) взять три члена ряда.

Теперь, пусть направления анизотропии  $o\xi$  и  $o\eta$  не совпадают с направлением  $ox$  и  $oy$ , а система  $\xi\eta z$  получена из системы  $x y z$  путем

поворота вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ . Тогда  $D_x$  и  $\bar{D}_x$  связаны между собой формулами [1], [3].

Подставляя эти формулы в (3.23), можно получить изменение частоты в зависимости от угла поворота  $\varphi$ .

Введем обозначение

$$R(\varphi, \beta_*) = \frac{\omega_*^2(\varphi, \beta)}{\omega_*^2(0, 0)} = \left( \frac{D_1}{D_2} \sin^4 \varphi + 2 \frac{D_3}{D_2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi \right) \left( 1 + \frac{\beta_*}{3} \right) \quad (3.26)$$

Предположим, что материал пластины — стеклотексолит КАСТ-В со следующими упругими постоянными:

$$E_1 = 1.23 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 2.15 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

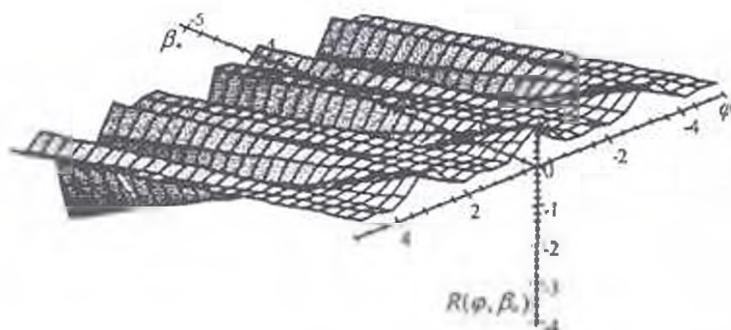
$$G = 0.207 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_1 = 0.11, \quad \nu_2 = 0.19$$

тогда  $R(\varphi, \beta_*) = (0.41 \sin^4 \varphi + 0.07 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \left( 1 + \frac{\beta_*}{3} \right)$  (3.27)

В табл. 3 приводятся значения функции  $R(\varphi, \beta_*)$  и график (фиг. 3).

Таблица 3

$\beta_*/3 \backslash \varphi$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0	1	0.896	0.601	0.368	0.306	0.370	0.41
-0.2	0.8	0.716	0.480	0.295	0.244	0.296	0.328
-0.5	0.5	0.448	0.300	0.184	0.153	0.185	0.205
-0.8	0.2	0.179	0.120	0.073	0.612	0.074	0.082



Фиг. 3

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976. 534с.
2. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т.3. Справочник в трех томах под редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: "Машиностроение", 1968. 567с.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1957. 356с.
4. Саркисян В.С., Григорян Э.Ф. О решении некоторых краевых задач анизотропных пластин переменной толщины. "Математичні методи механіки неоднородних структур". Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача. Львів: 2003. С. 343-346.
5. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА. 2000. 122с.

Владзорский государственный  
педагогический институт

Поступила в редакцию  
11.04.2005

УДК 539.3

ДВА ТИПА ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И  
ПЛАСТИНКИ  
Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան

Առավելագույնի և անհամասեռ զլանային բազաների և սաղի համար երկու տիպի ամրության խնդիրներ

Ուսումնասիրվող օրվկաների մյուսը ենթադրվում է առավելագույնի և անհամասեռ ըստ բարձրության: Առաջին տիպի խնդիրը անվերջ գլանի համար կոնտակտային խնդիրն է: Ստացված է կոնտակտի յափի կախվածության արտահայտությունը ուժից և երկրաչափական յափերից անբարրային և երկարատեղ ժամանակների համար:

Երկրորդ տիպի խնդիրը՝ միաչափ սաղի ծոծան խնդիրն է՝ առանձի տված կետում տրված ճկվայքը արտաքին բեռի միևնույն արժեքի դեպքում:

L.A.Movsisyan

Two Type Solid Problems for Viscoelastic Nonhomogeneous Cylindrical Shell and Plate

The contact problems are considered of infinite cylindrical shell and of optimal bending (minimal load) for plate. The material of objects are assumed to be viscoelastic and nonhomogeneous along thickness.

Рассматриваются некоторые задачи для вязкоупругой цилиндрической оболочки и пластинки. Предполагается неоднородность физических свойств материала объекта по высоте. В задаче оптимального изгиба пластинки неоднородность осреднена.

1. Пусть имеется тонкостенная система, материал которой обладает неоднородностью по толщине. Причем изменяются как упругие, так и вязкие свойства. Это может быть как естественным, так и связанным с термочувствительностью материала, который находится в температурном поле. Вязкоупругость предполагается типа Максвелла—Томпсона, а температурное поле—стационарное. Так как для тонкостенных систем для расчетных величин довольствуются линейным приближением по нормальной координате, то относительно вязкоупругих характеристик также принимается линейное приближение:

$$E(z) = E_0 \left( 1 + 2\delta \frac{z}{h} \right), \quad E_0 = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \delta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \quad (1.1)$$

а в наследственной связи

$$\sigma = E \left( e - \gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} e d\tau \right), \quad \gamma, \alpha \Rightarrow \gamma, \alpha(a_0 + za_1) \quad (1.2)$$

Как обычно, принимается, что коэффициент Пуассона при этом не меняется по толщине.

При сделанных предположениях двумерные вязкоупругие соотношения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 T_1 &= I_1(1-\Gamma_1^*)(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + I_2(1-\Gamma_2^*)(\kappa_1 + \nu\kappa_2) \\
 M_1 &= I_2(1-\Gamma_2^*)(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + I_3(1-\Gamma_3^*)(\kappa_1 + \nu\kappa_2) \\
 T_{12} &= 0.5(1-\nu)[I_1(1-\Gamma_1^*)\varepsilon_{12} + I_2(1-\Gamma_2^*)\kappa_{12}]
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

здесь

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{E_0 h}{1-\nu^2}, \quad I_2 = \frac{E_0 h^2}{1-\nu^2} \delta, \quad I_3 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} \\
 \Gamma_i^* u &= \gamma a_0 \int_0^t e^{-\omega_0(t-\tau)} \left[ 1 + \frac{I_{i+1}}{I_i} A(t-\tau) \right] u d\tau, \quad i = 1, 2 \\
 \Gamma_3^* u &= \gamma a_0 \int_0^t e^{-\omega_0(t-\tau)} u d\tau \\
 A(t-\tau) &= \frac{a_1}{a_0} [1 - \alpha a_0(t-\tau)]
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Двумерные соотношения (1.3) приведены для будущих исследований, а здесь будем изучать лишь одномерные задачи.

2. Сначала рассмотрим контактную задачу для бесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля, свободно опертой на кромках, аналог задач [1-3], для среды типа (1.3). Сосредоточенная сила передается через симметрично расположенный жесткий штамп. Необходимые уравнения задачи следующие:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = N, \quad \frac{\partial N}{\partial \theta} + T + Rq = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = RN
 \tag{2.1}$$

Принято отсутствие касательных напряжений под штампом, а  $q$  — неизвестное нормальное давление.

$$\begin{aligned}
 T &= I_1 \left[ \varepsilon - \Gamma_1^* \left( \varepsilon + \frac{h^2}{12} A(t-\tau) \kappa \right) \right] \\
 M &= I_3 [\kappa - \Gamma_3^* (\kappa + A(t-\tau)) \varepsilon] \\
 N &= 0.5(1-\nu) I_1 (1-\Gamma_1^*) \beta
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}, \quad \beta = \psi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \kappa = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}
 \tag{2.3}$$

В (2.2) в отличие от (1.3) упругая часть от неоднородности не приведена только ради краткости, к тому же, как известно [4], например, при не очень высоких температурах считается, что изменяются только коэффициенты вязкости. Принимая начало координат на линии симметрии, граничные условия будут

$$\begin{aligned}
 N = \nu = \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0 \quad \text{при } \theta = 0 \\
 T = M = w &= 0 \quad \text{при } \theta = \theta_1
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

При заданной сосредоточенной силе  $P$  неизвестными, подлежащими определению, являются нормальное давление  $q$  и неизвестная зона контакта  $\theta_0$ .

Решение (2.1) после удовлетворения кинематическим условиям (2.4) дается

$$\begin{aligned} T &= C_1 \cos \theta - R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \\ N &= -C_1 \sin \theta - R \int_0^{\theta} q \cos(\theta - \varphi) d\varphi \\ M &= RC_1 \cos \theta - R^2 \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \\ C_1 &= \frac{R}{\cos \theta_1} \int_0^{\theta_1} q \sin(\theta_1 - \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подвергая (2.3), (2.4) и (2.5) преобразованию Лапласа по времени, получим

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} = \frac{(p + \alpha a_0)^3}{I_1 \Delta} \left[ \frac{12R}{h^2} (p + a_0(\alpha - \gamma)) + \frac{a_1}{a_0} \gamma a_0 \frac{p}{p + \alpha a_0} \right] \times \\ &\times \left( \bar{C}_1 \cos \theta - R \right) \int_0^{\theta} \bar{q} \sin(\theta - \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (2.6)$$

$p$  — параметр преобразования, а

$$\Delta = (p + (\alpha - \gamma)a_0)^2 (p + \alpha a_0)^2 - \frac{h^2}{12} (a_1 \gamma p)^2$$

Изменение кривизны под штампом определяется

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{R}{R_1} - 1 \quad (2.7)$$

$R_1$  — кривизна штампа.

Учитывая (2.1)–(2.3), (2.6), окончательно для определения  $\bar{q}$  в предположении  $\frac{R^2}{h^2} \gg 1$  получим

$$\begin{aligned} 2(1 + \nu) \frac{p + \alpha a_0}{p + a_0(\alpha - \gamma)} Q + \\ + \frac{(p + \alpha a_0)^3}{\Delta} \frac{12R^2}{h^2} (p + a_0(\alpha - \gamma)) \left( C \cos \theta - \int_0^{\theta} Q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right) = 1 - \frac{R}{R_1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

здесь введены обозначения

$$Q = \frac{R\bar{q}}{I_1}, \quad C = \bar{C}_1 \frac{1}{I_1}$$

При решении интегрального уравнения (2.8) придется подвергать его еще преобразованию Лапласа по  $\theta$ . Дело в том, что параметр  $p$

будет входить в изображающую функцию таким сложным образом, что делает это невозможным для обратного преобразования. Но, как известно [4], часто не интересен процесс ползучести, а интересен конечный результат — в конце концов, что получится для бесконечного момента времени ( $p = 0$ ). Поэтому (2.8) будем изучать только как для мгновенного случая ( $p \rightarrow \infty$ ), так и для окончательного процесса ( $p = 0$ ). Тогда уравнение при  $v = 0$  будет иметь вид

$$Q + a^2 C \cos \theta - a^2 \int_0^{\theta} Q \sin(\theta - \varphi) d\varphi = A \quad (2.9)$$

$$a^2 = \frac{6R^2}{h^3}, \quad A = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{R}{R_1} \right) \beta, \quad \beta = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \alpha - \gamma & t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Случай  $t \rightarrow \infty$  фактически соответствует тому, чтобы с самого начала взять осредненные значения для вязких характеристик  $\alpha_1 = 0$ .

Кстати, если с самого начала учесть упругую неоднородность, то для определения  $q$  уравнение сохраняет вид (2.9), только теперь

$$a^2 = \frac{R J_1 (I_1 R - I_2)}{2(I_1 I_3 - I_2^2)}$$

Решением уравнения (2.9) будет

$$Q = A(1 + a \operatorname{sh} a\theta) - a^2 C \operatorname{ch} a\theta \quad (2.10)$$

Неизвестный контактный интервал  $\theta_0(t)$  определяется из условия равновесия штампа — равнодействующее контактного давления равно действующей силе  $P$

$$\bar{P} = \frac{P}{I_1} = 2 \int_0^{\theta_0} Q \cos \theta d\theta \quad (2.11)$$

$$C = \frac{1}{\cos \theta_0} \int_0^{\theta_0} Q \sin(\theta_0 - \theta) d\theta$$

Совместное решение системы (2.11) дает зависимость  $P(\theta_0)$  (из-за громоздкости полученных формул они не приводятся). Числовой пример произведен для следующих параметров:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = 0.5\alpha, \quad a = 25; 30, \quad R/R_1 = 0.25; 0.5$$

Ниже приводится таблица зависимости  $\bar{P}$  от  $\theta$ . В первом столбце приведены значения  $\theta_0$  в градусах, а в остальных столбцах  $\bar{P}$  для достижения данного значения  $\theta_0$ . Хотя в таблице  $\theta_0$  приведены в градусах, естественно, для формул (2.11) они переведены на радианы. В каждой клетке в первых строках помещены решения мгновенной задачи, а во вторых — длительной.

Из таблицы можно заключить (помимо ожидаемых выводов), что хотя длительный модуль в два раза меньше мгновенного ( $\gamma = 0.5\alpha$ ), это соотношение не сохраняется для действующих сил, в то же время линейная связь почти сохраняется.

Таблица

$\theta_0$	25		30	
	0.25	0.5	0.25	0.5
1	0.0112	0.0150	0.0063	0.0075
	0.0079	0.0113	0.0047	0.0057
2	0.0566	0.0872	0.0283	0.0459
	0.0378	0.0581	0.0189	0.0291
3	0.1537	0.2482	0.0795	0.1241
	0.1024	0.1711	0.0512	0.0856
4	0.3421	0.5663	0.1753	0.2905
	0.2253	0.3727	0.1169	0.1936
5	0.6447	1.1155	0.3223	0.5702
	0.4386	0.7437	0.2193	0.3718
6	1.1416	2.1008	0.5812	1.0715
	0.7680	1.4005	0.3944	0.7003
7	1.9034	3.7652	0.9517	1.9182
	1.2690	2.5101	0.6345	1.2551
8	3.1639	6.5695	1.6068	3.3447
	2.1259	4.3796	1.0878	2.1898
9	5.0599	11.4925	2.5684	5.7462
	3.3989	7.7290	1.7379	3.9656
10	8.1026	19.9157	4.0513	10.1281
	5.3622	13.1637	2.7521	6.7521

3. Здесь рассматривается предыдущая задача в предположении, что сосредоточенная сила  $P(t)$  передается непосредственно без штампа, условия прежние. Задача эта приводится скорее всего для того, чтобы показать, с какими громоздкими выкладками приходится сталкиваться при обратном преобразовании. Здесь нет смысла учета сдвига. Удовлетворяя кинематическим условиям, получим

$$T = \frac{P}{2}(\sin \theta - \operatorname{tg} \theta, \cos \theta), \quad M = RT \quad (3.1)$$

$$N = \frac{P}{2}(\cos \theta + \operatorname{tg} \theta, \sin \theta)$$

Вот выражение преобразованного прогиба:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \Lambda(p)(\sin \theta - \operatorname{tg} \theta, \cos \theta - \theta + \theta_1) P$$

$$\Lambda(p) = \frac{12R^3}{h^2 I_1 \Delta} \left[ (p + \alpha a_0)^2 \left( p + (\alpha - \gamma) a_0 \right) (p + \alpha a_0) + \frac{h^2}{12R} a_1 \gamma p \right] \quad (3.2)$$

и, наконец, его окончательный вид:

$$w = \frac{6R^3}{h^2 I_1} (\sin \theta - \operatorname{tg} \theta, \cos \theta - \theta + \theta_1) \left\{ P(t) + \int_0^t P(\tau) [ae^{-\alpha_1(t-\tau)} \{ \cos \beta_1(t-\tau) + \frac{b_1}{\beta_1} \sin \beta_1(t-\tau) \} + ce^{-\alpha_2(t-\tau)} \{ \operatorname{ch} \beta_2(t-\tau) + \frac{d_1}{\beta_2} \operatorname{sh} \beta_2(t-\tau) \}] d\tau \right\}$$

$$2a = (\delta + \varepsilon) \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} a_0 \gamma \right), \quad 2d = \alpha a_0 (\varepsilon - \delta)$$

$$2c = (\delta - \varepsilon) \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} a_0 \gamma \right), \quad 2b = -\alpha a_0 (\varepsilon + \delta)$$

$$\alpha_1 = \alpha a_0 - \frac{1}{2} (\varepsilon + \gamma a_0), \quad \beta_1^2 = \varepsilon a_0 \alpha - \frac{1}{4} (\varepsilon + \gamma a_0)^2$$

$$\alpha_2 = \alpha a_0 + \frac{1}{2} (\varepsilon - \gamma a_0), \quad \beta_2^2 = \varepsilon a_0 \alpha + \frac{1}{4} (\gamma a_0 - \varepsilon)^2$$

$$b_1 = \frac{b}{a} + \frac{1}{2} (\varepsilon + \gamma a_0), \quad d_1 = \frac{c}{d} + \frac{1}{2} (\gamma a_0 - \varepsilon)$$

$$\delta = \frac{a_1 \gamma h^2}{12R}, \quad \varepsilon^2 = \delta R a_1 \gamma$$
(3.3)

В случае пластинки ( $R \rightarrow \infty$ ) формулы упрощаются. Если на концах условия такие, как [2.4], то

$$T = 0, \quad N = \frac{P}{2}, \quad M = \frac{P}{2}(x-l) \quad (3.4)$$

Прогиб определится

$$w(x, t) = \frac{P}{2I_1} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{l^3}{3} \right) W(t) \quad (3.5)$$

где  $W(t)$  есть выражение в фигурных скобках (3.3) при  $\delta = 0$ .

4. Интересна еще задача оптимального изгиба для вязкоупругой пластинки. Такая задача для упругого материала рассмотрена в [6]. По вышеприведенным соображениям эту задачу будем изучать для осредненного случая ( $a_1 = 0$ ). Тогда уравнение изгиба пластин будет

$$I_3 \left( 1 - \Gamma_3 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q(x, t) \quad (4.1)$$

Если предположим, что нагрузка действует в некотором интервале  $[x_1, x_2]$ , то решение (4.1) запишется

$$w(x, t) = \Phi(x, t) + \gamma a_0 \int_0^t e^{-i\omega_0(t-\tau)} \Phi(x, \tau) d\tau \quad (4.2)$$

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} Q(\xi, t) u_1(x, \xi) d\xi + \int_{x_1}^{x_2} Q(\xi, t) u_2(x, \xi) d\xi \quad (4.3)$$

$$Q(x, t) = \frac{q(x, t)}{I_3}$$

Первое слагаемое в (4.3) — частное решение от нагрузки  $q(x, t)$  и одинаковое для всех случаев граничных условий, а второе соответствует решению однородной части и различное для каждого случая граничных условий.

Вопрос оптимального изгиба ставится обычным образом — в какой-то точке  $(x_0)$  пластинки (или в ряде) получить данный прогиб в данный момент  $(t_0)$ , т.е.

$$w_0 = w(x_0, t_0) = \Phi(x_0, t_0) + \gamma a_0 \int_0^{t_0} e^{-i\omega_0(t_0-\tau)} \Phi(x_0, \tau) d\tau \quad (4.4)$$

при определенном критерии качества, например,

$$J = \int_0^{t_0} \int_{x_1}^{x_2} Q^2 dx dt = \min \quad (4.5)$$

Такую постановку можно рассматривать как изопериметрическую задачу и если составить функцию

$$F = Q^2 + \lambda a_0 \gamma Q e^{-i\omega_0(t_0-\tau)} u(x_0, x) \quad (4.6)$$

$$u(x_0, t) = \begin{cases} u_1 + u_2, & x_0 \leq x_1 \\ u_2, & x_0 > x_1 \end{cases}$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, то из условия экстремума функционала находим

$$2Q + \lambda a_0 \gamma e^{-i\omega_0(t_0-\tau)} u(x_0, x) = 0 \quad (4.7)$$

которое на основании (4.4) дает

$$\lambda = -\frac{2w_0}{\Gamma}, \quad \Gamma = \gamma a_0 \left| 1 - \frac{\gamma}{2\alpha} \left( 1 - e^{-2i\omega_0 t_0} \right) \right| \quad (4.8)$$

и, следовательно, оптимальная нагрузка будет

$$Q = w_0 \Gamma^{-1} e^{-i\omega_0(t_0-\tau)} u(x_0, x) \quad (4.9)$$

между прочим, наверное, практический интерес представляет и обратная задача – имеется начальный прогиб и оптимальным образом устранить его. Фактически, полученная формула отвечает и на этот вопрос.

Приведенные в таблице данные получены Г.Г.Нерсисяном, за что приношу благодарность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пелех Б.А., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 214 с.
2. Мовсисян Л.А. К устойчивости крутовой арки под штампом. //Иzv.НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №1-2. С.14-18.
3. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки. /Сб. научн.тр. Контактные и смешанные граничные задачи. МДТТ. (К 85-летию Н.Х.Арутюняна). Ереван. 1999. С.105-108.
4. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для кольца с заполнителем./Сб. научн. тр.конф. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Изд. ЕГУ, 2002. С.181-185.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердого тела. М.: Наука, 1977. 384 с.
6. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению упругих систем. //Иzv. АН РАН. МТТ. 1999. №6. С.146-153.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
11.11.2004

УДК 539.3: 537.228.1

ВЛИЯНИЕ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОВЕДЕНИЕ  
НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ  
ТОНКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА

Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան

Ըստակ ափեզակ լիկտրիկ սեպի անկյունային կետի շրջակայքում խրոմեների վրա  
եզրային պայմանների տիպի ազդեցության մասին

Исследовано поведение характеристик электроупругого поля (напряжения и напряженность электрического поля) в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина при различных электрических граничных условиях. На границах клина заданы также упругие перемещения.

Տեսույ է տրված, որ էլեկտրական խտուր եզրային պայմանները փոքրագնում են սեպի բազվածքի անկյան սահմանային արժեքը, որի դեպքում էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչները դառնում են վերջավոր:

G.G.Nerisyan, A.M.Sargsyan

The Influence of Type of Boundary Condition on the Behaviour of Stresses in Neighbourhood of  
Angular Point of Thin Piezoelectric Wedge

The behaviour of the electro-elastic field characteristics (stresses and electric-field strength) in the vicinity of the angular point of the thin piezoelectric wedge under various electric boundary conditions is studied. On the wedge boundaries elastic displacements are given as well

It is established that only the mixed electric boundary condition diminish the values of the limit angle of the wedge opening, under which the characteristics of the electroelastic field become finite.

Изучено поведение характеристик электроупругого поля (напряжения и напряженность электрического поля) в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина при различных электрических граничных условиях. На границах клина заданы также упругие перемещения.

Установлено, что смешанные электрические граничные условия уменьшают значения предельного угла раствора клина, при котором характеристики электроупругого поля становятся конечными.

Исследование особенностей напряжений в окрестности угловой точки пьезоэлектрического тела имеет важное прикладное значение при проектировании и изготовлении многих элементов пьезоэлектронной техники, в частности, пьезотрансформаторов [1, 2].

В работах [3, 4, 5] исследовано поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки тонкого однородного пьезоэлектрического клина, на границах которого ( $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta_1 < 2\pi$ ) заданы: а) распределение зарядов, б) потенциал электрического поля, в) на одной границе задан электрический потенциал, а на другой — распределение зарядов. Во всех случаях на границах пьезоклина заданы механические усилия. Было установлено, что смешанные электрические граничные условия (случай 3) уменьшают предельный угол раствора пьезоэлектрического клина, при котором характеристики электроупругого поля (напряжения, компоненты вектора электрической индукции) становятся конечными. Для первых двух граничных условий предельный угол  $\theta_{\text{пр}} = \pi$  и совпадает с таковым однородного анизотропного клина в упругой задаче [6].

В данной работе принимается, что на границах пьезоклина заданы упругие перемещения и те же электрические граничные условия.

Постановка задачи такова: тонкий пьезоэлектрический клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Электрические и механические внешние воздействия распределены симметрично относительно срединной плоскости и незначительно изменяются по толщине. Как и в обычной теории упругости, в условиях тонкого тела исследуются средние по толщине значения электроупругих величин. Начало декартовой  $x, y, z$  и полярной  $r, \theta, z$  систем координат находится в угловой точке срединной плоскости клина, ось  $z$  направлена нормально к этой плоскости.

При отсутствии объемных сил и электрических зарядов функции упругих напряжений  $F(x, y)$  и электрической индукции  $\Psi(x, y)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям [7, 8]

$$4\pi L_4 F(x, y) - L_1 \Psi(x, y) = 0, \quad L_1 F(x, y) + L_2 \Psi(x, y) = 0 \quad (1)$$

механическим

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta_1 \quad (2)$$

и электрическим граничным условиям, заданным в одном из видов:

$$\Psi(x, y)|_{\theta=0} = 0 \quad (3)$$

$$V(x, y)|_{\theta=0} = 0 \quad (4)$$

$$V(x, y)|_{\theta=0} = \Psi(x, y)|_{\theta=0} = 0 \quad (5)$$

Предполагается, что на бесконечности характеристики электроупругого поля стремятся к нулю.

В (1)-(5)  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — упругие перемещения,  $V(x, y)$  — потенциал электрического поля

$$\begin{aligned} L_4 &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_1 &= -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{12} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2 &= \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $s_{22}, \dots$  — коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции,  $\eta_{22}, \dots$  — коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях,  $g_{22}, \dots$  — пьезоэлектрические модули.

Из (1)-(6) следует, что при отсутствии пьезоэлектрического эффекта ( $g_M = 0$ ) краевые задачи (1)-(5) распадаются на две независимые группы задач: упругую задачу для анизотропного клина  $L_4 F(x, y) = 0$  с гранич-

ными условиями (2) и электростатические задачи для того же анизотропного клина  $L_2\Psi(x, y) = 0$  с граничными условиями (3), (4) или (5). Упругая задача легко решается изложенным в [3-6] методом, а решения электрических задач получаются из [7] как частный случай.

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции выражаются через функции  $F(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad D_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

Как и в работах [3-5], представляя решение (1) в виде

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^3 [A_j (x + \mu_j y)^{\lambda+1} + B_j (x + \bar{\mu}_j y)^{\lambda+1}] \quad (8)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{j=1}^3 [A_j f(\mu_j) (x + \mu_j y)^\lambda + B_j f(\bar{\mu}_j) (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda]$$

где  $A_j, B_j$  — неизвестные постоянные,  $\lambda$  — произвольный параметр и, учитывая уравнения состояния и условие потенциальности электрического поля [8,9], для осредненных характеристик электрического поля получаем

$$u(x, y) = (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j M_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{M}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda]$$

$$v(x, y) = (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j N_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{N}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda] \quad (9)$$

$$V(x, y) = (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j m_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{m}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda]$$

где

$$M_j = s_{11}\mu_j^2 - s_{16}\mu_j + s_{12} - f_j(g_{11}\mu_j - g_{21})/4\pi$$

$$N_j = s_{12}\mu_j - s_{26} + s_{22}\mu_j^{-1} - f_j(g_{12} - g_{22}\mu_j^{-1})/4\pi \quad (9)$$

$$m_j = g_{11}\mu_j^2 - g_{11}\mu_j + g_{12} + f_j(\eta_{11}\mu_j - \eta_{12})$$

$$f_j = f(\mu_j) = -l_1(\mu_j)/l_2(\mu_j), \quad (j = 1, 2); \quad f_3 = 4\pi l_4(\mu_3)/l_3(\mu_3)$$

$\bar{M}_j, \bar{N}_j, \bar{m}_j, \bar{f}_j$  — сопряженные по отношению  $M_j, N_j, m_j$  и  $f_j$  комплексные числа, постоянные  $w, u_0, v_0$  характеризуют поворот и жесткос смещение пластинки в срединной плоскости,  $V_0$  — нулевой уровень электростатического поля,  $\mu_j$  и  $\bar{\mu}_j$  — корни алгебраического уравнения

$$4\pi l_4(\mu)l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0 \quad (10)$$

причем, как показано в работах [9, 10], они не могут быть действительными.

В дальнейшем принимается, что корни уравнения (10)

$$\mu_j = \sigma_j + i\tau_j, \quad \bar{\mu}_j = \sigma_j - i\tau_j, \quad \tau_j > 0 \quad (j=1,2,3)$$

простые и не являются одновременно корнями  $l_k(\mu) = 0$ , ( $k=4,3,2$ ).

Полиномы  $l_k(\mu)$  получаются из  $l_k$  заменой  $\partial^k/\partial x^k$  на единицу, а  $\partial^k/\partial y^k$  — на  $\mu_j$ .

Удовлетворяя граничным условиям (2)-(5), для определения  $A_j, B_j$  получим однородные системы линейных алгебраических уравнений. Из условий существования нетривиальных решений этих систем будем иметь следующие уравнения относительно параметра  $\lambda = \alpha + i\beta$ :

для задачи (1), (3)

$$\Delta^{(3)}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & M_3 & \bar{M}_3 \\ N_1 & N_2 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & N_3 & \bar{N}_3 \\ M_1 a_1 & M_2 a_2 & \bar{M}_1 \bar{a}_1 & \bar{M}_2 \bar{a}_2 & M_3 a_3 & \bar{M}_3 \bar{a}_3 \\ N_1 a_1 & N_2 a_2 & \bar{N}_1 \bar{a}_1 & \bar{N}_2 \bar{a}_2 & N_3 a_3 & \bar{N}_3 \bar{a}_3 \\ f_1 & f_2 & \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & f_3 & \bar{f}_3 \\ f_1 a_1 & f_2 a_2 & \bar{f}_1 \bar{a}_1 & \bar{f}_2 \bar{a}_2 & f_3 a_3 & \bar{f}_3 \bar{a}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

для задач (1), (4)

$$\Delta^{(4)}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & M_3 & \bar{M}_3 \\ N_1 & N_2 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & N_3 & \bar{N}_3 \\ M_1 a_1 & M_2 a_2 & \bar{M}_1 \bar{a}_1 & \bar{M}_2 \bar{a}_2 & M_3 a_3 & \bar{M}_3 \bar{a}_3 \\ N_1 a_1 & N_2 a_2 & \bar{N}_1 \bar{a}_1 & \bar{N}_2 \bar{a}_2 & N_3 a_3 & \bar{N}_3 \bar{a}_3 \\ m_1 & m_2 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & m_3 & \bar{m}_3 \\ m_1 a_1 & m_2 a_2 & \bar{m}_1 \bar{a}_1 & \bar{m}_2 \bar{a}_2 & m_3 a_3 & \bar{m}_3 \bar{a}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

для задачи (1), (5)

$$\Delta^{(5)}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & M_3 & \bar{M}_3 \\ N_1 & N_2 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & N_3 & \bar{N}_3 \\ M_1 a_1 & M_2 a_2 & \bar{M}_1 \bar{a}_1 & \bar{M}_2 \bar{a}_2 & M_3 a_3 & \bar{M}_3 \bar{a}_3 \\ N_1 a_1 & N_2 a_2 & \bar{N}_1 \bar{a}_1 & \bar{N}_2 \bar{a}_2 & N_3 a_3 & \bar{N}_3 \bar{a}_3 \\ m_1 & m_2 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & m_3 & \bar{m}_3 \\ f_1 a_1 & f_2 a_2 & \bar{f}_1 \bar{a}_1 & \bar{f}_2 \bar{a}_2 & f_3 a_3 & \bar{f}_3 \bar{a}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

где

$$a_j = e^{i(\alpha \ln r_j - \beta y_j)} [\cos(\beta \ln r_j + \alpha y_j) + i \sin(\beta \ln r_j + \alpha y_j)]$$

$$\bar{a}_j = e^{i(\alpha \ln r_j - \beta y_j)} [\cos(\beta \ln r_j - \alpha y_j) + i \sin(\beta \ln r_j - \alpha y_j)]$$

$r_j$  и  $y_j$  — модуль и аргумент обобщенных комплексных переменных

$$z_j = \cos \theta_j + \mu_j \sin \theta_j, \quad 0 < \varphi_j < 2\pi, \quad (j=1,2,3).$$

Общее решение (1), удовлетворяющее граничным условиям (2)-(5) и конкретным условиям на замыкающей части контура угловой области, после перехода к полярной системе координат ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) представляется в виде

$$F = \sum_{n=3}^{\infty} r^{\lambda_n} \sum_{j=1}^3 r_j^{\lambda_n+1} [C_j \cos(\lambda_n+1)\varphi_{j,n} + D_j \sin(\lambda_n+1)\varphi_{j,n}]$$

$$\Psi = \sum_{n=3}^{\infty} r^{\lambda_n} \sum_{j=1}^3 r_j^{\lambda_n} [K_j \cos \lambda_n \varphi_{j,n} + E_j \sin \lambda_n \varphi_{j,n}]$$
(14)

где  $C_j, D_j, E_j$  и  $K_j$  — действительные постоянные,  $r_j$  и  $\varphi_{j,n}$  — модуль и аргумент обобщенных комплексных переменных

$$z_{j,n} = \cos \theta + \mu_j \sin \theta, \quad 0 < \varphi_{j,n} < \varphi.$$

Первую сумму в (14) необходимо распространить на все корни трансцендентного уравнения (11), имеющие положительные действительные части.

Из (7) и (14) следует, что характеристики электроупругого поля (напряжения и напряженность электрического поля) затухают вблизи угловой точки клина ( $r \rightarrow 0$ ), если действительные части первых корней  $\operatorname{Re} \lambda_k^{(4)} > 1$  ( $k=3,4,5$ ). Если  $\operatorname{Re} \lambda_k^{(4)} < 1$ , характеристики электроупругого поля неограниченно возрастают при  $r \rightarrow 0$ . В случае  $\operatorname{Re} \lambda_k^{(4)} = 1$  эти характеристики в окрестности вершины клина конечны и вообще отличны от нуля.

Внося за знак определителей (11)-(13) общий множитель  $f_3$  из пятого столбца и  $\bar{f}_3$  из шестого и переходя к пределу  $g_{44} \rightarrow 0$ , вместо уравнений (10)-(13) будем иметь

$$l_4(\mu)l_2(\mu) = 0 \tag{10}$$

$$\Delta^{(n)}(\lambda) = \Delta_{\text{упр}}(\lambda)\Delta_n^{(n)}(\lambda) = 0, \quad (n=3,4,5) \tag{11}$$

где

$$\Delta_{\text{упр}}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1^* & M_2^* & \bar{M}_1^* & \bar{M}_2^* \\ N_1^* & N_2^* & \bar{N}_1^* & \bar{N}_2^* \\ M_1^* a_1 & M_2^* a_2 & \bar{M}_1^* \bar{a}_1 & \bar{M}_2^* \bar{a}_2 \\ N_1^* a_1 & N_2^* a_2 & \bar{N}_1^* \bar{a}_1 & \bar{N}_2^* \bar{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$M_p^* = S_{11}\mu_p^2 - S_{16}\mu_p + S_{12}, \quad N_p^* = S_{12}\mu_p^2 - S_{26}\mu_p + S_{22}$$

$\bar{M}_p^*$  и  $\bar{N}_p^*$  — сопряженные по отношению  $M_p^*$  и  $N_p^*$  комплексные числа.  $\mu_p$  и  $\bar{\mu}_p$  — корни уравнения  $l_4(\mu) = 0$ . ( $p=1,2$ ):

$$\Delta_{\mu}^{(2)}(\lambda) = \Delta_{\bar{\mu}}^{(2)}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_3 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\mu}^{(3)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \eta_{11}\mu_3 - \eta_{12} & \eta_{11}\bar{\mu}_3 - \eta_{12} \\ a_3 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}$$

$\mu_3$  и  $\bar{\mu}_3$  — корни уравнения  $l_2(\mu) = 0$ .

Следовательно, при отсутствии пьезоэффекта уравнения (11)-(13) распадаются на два независимых уравнения  $\Delta_{\text{упр}}(\lambda) = 0$  и  $\Delta_{\text{ин}}^{(3)}(\lambda) = 0$ .

К такому же результату можно прийти, если в решении (8) принимать  $A_3 = A_3^*/f_3$ ,  $B_3 = B_3^*/\bar{f}_3$ .

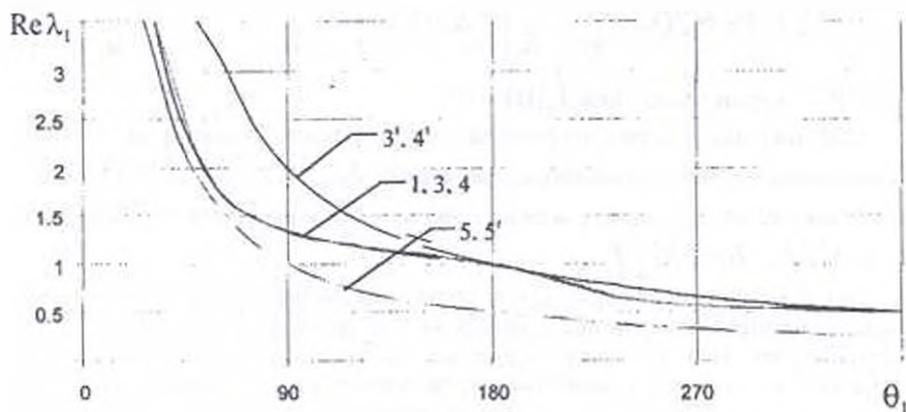
Как и в работах [3]-[5], и здесь, после раскрытия определителей 6-ого порядка, можно получить аналитический вид уравнений (11)-(13). Однако, учитывая, что при решении подобных задач для кусочно-однородного клина (что намечается в дальнейшем) получаются определители 12-го или более высокого порядка, был разработан алгоритм численного определения  $\lambda$  из (11)-(13).

Дело в том, что при использовании имеющихся в компьютерах стандартных программ для вычисления промежуточных значений детерминантов  $\Delta^{(1)}(\lambda)$ , возникает ситуация, когда аргумент произведения комплексных чисел выходит из интервала  $(-\pi, \pi)$  (вложенного в компьютер), что приводит к потере выбранной ветви. Разработанный алгоритм избавлен от подобных недостатков.

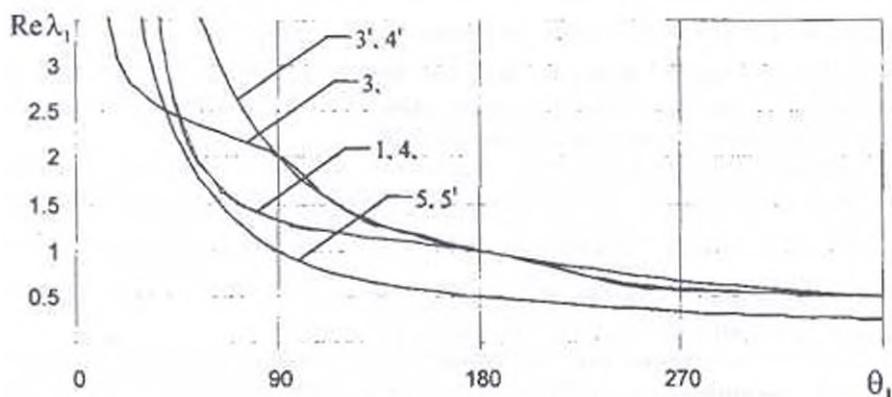
Заметим прежде всего, что, независимо от электроупругих свойств материала клина,  $\lambda = 1$  является корнем уравнений (11)-(13) при  $\theta_1 = \pi$  и  $\theta_1 = 2\pi$ , а  $\lambda = 0.5$  — только при  $\theta_1 = 2\pi$ . В этом легко убедиться, если учесть, что в этих случаях  $a_3 = \bar{a}_3 = -1$  и, поэтому некоторые строки каждого детерминанта из (11)-(13) совпадают.

С целью выяснения влияния граничных условий на поведение характеристик связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки клина был проведен численный анализ по разработанному алгоритму. На компьютере, после определения положительных действительных корней уравнений (11)-(13), определяется нулевая линия мнимой части  $\Delta^{(1)}(\lambda)$ , и по ходу вычислений на этой линии определяется ноль действительной части, если такая точка в области поиска существует.

На фиг. 1 и 2 представлены некоторые результаты численного расчета зависимости  $\lambda_1$  от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия (фиг. 1) или бифталата рубидия (фиг. 2) [9]; при граничных условиях (2) и (3) — кривые 3, при (2) и (4) — кривые 4, при (2) и (5) — кривые 5. Там же, для сравнений, приведены соответствующие кривые при отсутствии пьезоэффекта (кривые 1 — для чисто упругой задачи, кривые 3, 4, 5 — для электростатической задачи с граничными условиями (3), (4) и (5) соответственно).



Фиг. 1



Фиг. 2

Из приведенных кривых следует, что в случае граничных условий (2) и (3) или (2) и (4) предельный угол раствора пьезоклина  $\theta_{пр}$ , при котором окрестность угловой точки переходит из малонапряженного состояния ( $\theta_1 < \theta_{пр}$ ) в концентрационное ( $\theta_1 > \theta_{пр}$ ), равняется  $\pi$ . А при смешанных граничных условиях (5), при тех же механических граничных условиях (2), предельный угол уменьшается, что было обнаружено также в работе [5]. В последнем случае, как и в работе [5],  $Re \lambda_1$  стремится к 0.25 при  $\theta_1 \rightarrow 2\pi$ .

Отметим, что плоские задачи электроупругости для клиновидных тел при неоднородных граничных условиях успешно решаются с помощью интегрального преобразования Мелина комплексной функции  $f(x + \mu y)$  [11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Партоп В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука. 1988. 472с.
2. Лавренко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. М.: Энергия. 1975. 112с.
3. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С. 34-39.
4. Саргсян А.М. Особенность связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященный 91-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване. С. 169-175.
5. Саргсян А.М. Об особенностях связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армений. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 36-41.
6. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела. // Докл. АН АрмССР. 1975. Т. LXI. №4. С. 219-224.
7. Вековищева И.М. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975. Т. XI. №2. С. 85-89.
8. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1. С. 17-22.
9. Лихницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.
10. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. // ПМ. 1975. Т. XI. №5. С. 45-53.
11. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. // МТТ. 1979. №6. С. 33-42.

Институт Механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
13.09.2004

УДК 539.1

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ УДАРНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ  
 ПРОНИКАНИЯ ДАВЛЕНИЯ В УПРУГУЮ СРЕДУ И  
 НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ ВОЛНЫ НА КРАЮ  
 ЭКРАНА В КВАДРАТИЧНО-КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ  
 УПРУГОЙ СРЕДЕ**

Багдоев А. Г., Погосян С.М., Сафарян Ю. С.

Ա. Գ. Բագդոև, Ա.Մ.Պոգոսյան, Յու. Ս. Սաֆարյան

Հետազոտա-խորանարդային առածգական ոչ գծային միջավայրում հարվածային ալիքների  
 հաշվարկումը առածգական միջավայր ներթափանցող ճնշման խնդրում և էկրանի ծայրում ոչ  
 ստացիոնար դիֆրակցիայի մասնակ

Հետազոտա-խորանարդային առածգական ոչ գծային միջավայրում դիտարկվում է հարվածային  
 ալիքների հաշվարկումը տարածվող և կետային ալիքների շոշափման կետի շրջակայքում: Իրտարկվում է  
 ոչ գծային հավասարումների ճշգրիտ մասնավոր լուծումները և ցույց է տրվում հարվածային ալիքների  
 քաղաքագրող պայմանների հավաստիությունը:

A.G. Bagdoyev, S.M. Pogoyan, Yu. S. Safaryan

Calculation of shock waves in problem of pressure penetration in elastic media and in non-stationary  
 diffraction problem of wave on edge of screen in quadratic cubic non-linear elastic media

The non-linear diffraction problem of determination of solutions of short waves equations in vicinity of  
 tangency point of arbitrary propagated wave with point wave is solved for elastic media with quadratic cubic non-  
 linearity.

Рассматривается расчет ударных волн в окрестности точки касания распространяющейся  
 и точечной волны в квадратично-кубично нелинейной среде. Использовано точное частное  
 решение нелинейных уравнений. Условия на ударных волнах удовлетворены с большой  
 точностью.

1. Рассматривается плоская задача дифракции продольной упругой волны  
 АВ (фиг. 1) около края О полубесконечного непрозрачного экрана в  
 среде, описываемой уравнениями пятиконстантной (квадратичная  
 нелинейность) и девятиконстантной (квадратичная кубичная  
 нелинейность) теории упругости. Также решена задача проникания  
 давления в упругую среду. В случае квадратичной кубичной нелинейной  
 среды нормальная скорость волны записывается в виде [1]

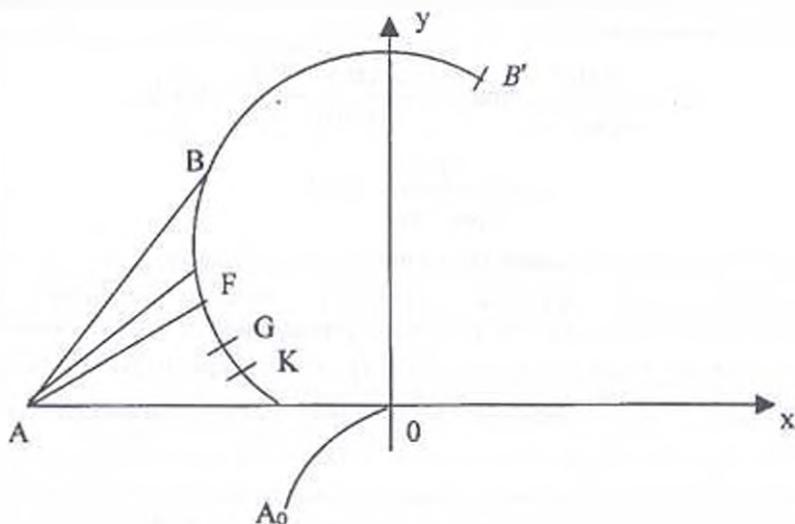
$$c_n = c_0 + c_0 \delta_2 u + c_0 \delta_3 u^2 \quad (1)$$

$c_0$  – нормальная скорость линейной волны,  $u$  – возмущенная скорость  
 частиц за волной. Можно получить коэффициенты  $\delta_2$  и  $\delta_3$  квадратичной  
 и кубичной упругой среды. Согласно девятиконстантной теории для  
 квадратичной кубичной упругой среды внутренняя энергия будет [2]

$$U = \mu u_a^2 + \frac{1}{2} \lambda u_{\alpha\alpha}^2 + \frac{A}{3} u_{\alpha\alpha} u_{\alpha\alpha} u_{\alpha\alpha} + B u_{\alpha\alpha}^2 u_{\alpha\alpha} + \frac{C}{3} u_{\alpha\alpha}^3 +$$

$$+ \alpha_1 u_{\alpha\alpha}^4 + \alpha_2 u_{\alpha\alpha}^2 u_{\alpha\alpha}^2 + \alpha_3 u_{\alpha\alpha} u_{\alpha\alpha} u_{\alpha\alpha} + \alpha_4 u_{\alpha\alpha}^4 \quad (2)$$

где тензор деформации



Фиг. 1

$$u_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

по повторяющимся индексам проводится суммирование. Записывая (2), (3) для одномерной по нормали к волне задачи, используя формулу для нормальной компоненты тензора напряжений Лагранжа

$$\sigma_{ii} = \frac{\partial U}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)} \text{ и уравнение движения } \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x}, \text{ учитывая, что на}$$

волне  $\frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{1}{c_n} \frac{\partial u_i}{\partial t}$ , можно получить соотношение (1), где

$$c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \delta_2 = -\frac{1}{2\rho c_0^4} \left( 3\mu + \frac{3}{2}\lambda + A + 3B + C \right),$$

$$\delta_3 = -\frac{3}{2}\delta_2^2 + \frac{2}{\rho c_0^4} \left( \frac{\mu}{4} + \frac{\lambda}{8} + \frac{A + 3B + C}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \right) \quad (4)$$

2. На фиг. 1  $AB$  есть распространяющаяся волна, в момент  $t = 0$  занимающая положение  $OA_0$ ,  $BB'$  есть точечная волна, произведенная краем  $O$  экрана в момент  $t = \theta$ . Волна  $ABB'$  получается и при проникании давления в среду. В линейном случае  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_3 = 0$  уравнения теории упругости описываются линейной гиперболической системой с переменными коэффициентами, и в окрестности точки  $B$  касания распространяющейся волны  $AB$  с точечной волной  $BB'$  (фиг. 1) в случае типичной скачкообразной начальной волны  $OA_0$ , за которой дается начальное условие  $u = a^0$ , и использованием теории Кирхгофа, согласно которой при определении решения в окрестности точки  $B$  нужно

интегрировать по освещенной части начальной волны [1,3], линейное решение [1] имеет вид

$$u_0 = \frac{A(t)}{\pi\sqrt{k_1 - k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2c_1\tau(k_1 - k_2)}}{\theta - \theta_0}, \quad \tau < 0$$

$$u_0 = \frac{A(t)}{\sqrt{k_1 - k_2}}, \quad \tau > 0 \quad (5)$$

здесь  $r, \theta$  — лучевые координаты для неоднородной среды.

$\tau = \text{const}$  дает фронты точечных волн,  $\theta = \text{const}$  дает соответствующие лучи,  $k_1$  есть кривизна обращенной точечной волны  $EF$  фиг. 1 с центром в данной точке  $M(x, y)$ ,  $k_2$  есть кривизна  $OA_0$  в точке  $O$ ,  $A(t)$  есть лучевое решение [3] на волне  $BB'$ , умноженное на  $a''$ .  $r = 0$ ,  $\theta = \theta_0$  есть координаты точки  $B$  в линейной задаче. (5) дает также решение задачи о проникании давления в жидкую или упругую среду [3].

Справедливость теории Кирхгофа для задачи о проникании давления в жидкую или упругую среду показана прямым решением граничной задачи методом Адамара, причем в окрестности точки  $B$  решение совпало с решением эквивалентной задачи о начальных условиях, где интегрирование проводилось по освещенной части начальной волны.

Решение (5) совпадает также в частном случае однородной среды с известными решениями задач о дифракции плоских акустических и упругих волн на клине, частным случаем которых является задача о дифракции на полубесконечном плоском экране [4,5].

3. В нелинейной задаче, записывая с помощью (1) нелинейные упрощенные уравнения коротких волн вблизи  $B$  [1] и вводя функции

$$u = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu, \quad v = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \nu, \quad \text{где } \nu \text{ — трансверсальная компонента}$$

скорости частиц, аналогично случаю квадратичной нелинейности [1,3], можно найти точное частное решение указанных уравнений, сращиваемое вдали от  $B$  с линейным решением (5) в виде

$$\tau = -\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_1} \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \int_0^1 \delta_2 \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu dt + \int_0^1 \delta_3 \frac{A^2}{k_1 - k_2} dt + C_1(c)$$

$$\nu = \frac{\theta - \theta_0}{\pi(k_1 - k_2)c_1} \operatorname{tg} \mu \pi - \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2} \frac{\mu}{c_1} \quad (6)$$

где  $c_1$  есть значение  $c_0$  в точке  $B$ ,  $C = \frac{\sin \mu \pi}{\sqrt{k_1 - k_2}}$ ,  $C_1(c)$  — произвольная функция.

Можно показать, что  $ABB'$  будет ударной волной в случае  $\delta_2 a'' > 0$ . В случае  $\delta_2 a'' < 0$  волна  $ABB'$  будет непрерывной волной (на которой  $u = 0$ ), при этом, как показано в аналогичной по математической постановке задаче обтекания верха треугольного крыла [6,7] сверхзвуковым потоком газа, имеется всякая ударная волна  $BK$  фиг. 1, позади которой можно снова взять решение (6), а впереди нее решение

имеет место в виде семейства характеристик, на каждой из которых  $\mu = \text{const}$ , и может быть записано в виде [1]  $\mu = \mu_1, v = v_1$ .

$$\tau - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_1} = \mu_1^2 \int_0^t \frac{\delta_1 A^2}{k_1 - k_2} dt + \mu_1 \int_0^t \frac{\delta_2 A}{\sqrt{k_1 - k_2}} dt,$$

$$v_1 = \frac{(\theta - \theta_0)\mu_1}{(k_1 - k_2)c_1} \quad (7)$$

В случае однородной среды и плоской волны  $AB$   $c_0 = c_1$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = \frac{1}{c_1 t}$ , и решения (6) упрощаются и в предположении  $\delta_2 a^0 > 0$ ,  $\delta_1 > 0$ .

после замены величин

$$\frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} = \gamma, \quad \gamma = a^n, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\delta_2 \gamma} u, \quad u = \gamma \mu, \quad \tau = \delta_2 v \delta, \quad v = \sqrt{\delta_2 \gamma} v' \quad (8)$$

дают решение позади  $KBB'$

$$\delta = -\frac{1}{2} y^2 \text{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi + \frac{\delta_1 v}{\delta_2},$$

$$\left( \mu^2 + \frac{1}{\pi} \mu \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln \sin \mu \pi \right), \quad v' = \frac{y}{\pi} \text{tg} \mu \pi - \mu y$$

где  $B$  — постоянная. Уравнение ударной волны  $BB'$

$$\frac{d\delta}{dy} = -\sqrt{2\delta - \mu - \frac{2\delta_1 \gamma}{3\delta_2} \mu^2} \quad (10)$$

куда следует подставить  $\delta$  из (9), причем получается

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y \text{tg}^2 \mu \pi - \zeta}{\chi + \frac{\delta_1 \gamma}{\delta_2} \Gamma} \quad (11)$$

где  $\chi = -\frac{y^2 \text{tg} \mu \pi}{\cos^2 \mu \pi} \pi + 1 + \cos 2\mu \pi$ ,  $\Gamma = 2\mu + 2\mu \cos 2\mu \pi - \frac{2}{\pi} \sin 2\mu \pi \ln \sin \mu \pi$ .

$$\zeta = \sqrt{-y^2 \text{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{\pi} \sin 2\mu \pi + \frac{2\delta_1 \gamma}{\delta_2} \left( \frac{2}{3} \mu^2 + \frac{\mu}{\pi} \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln \sin \mu \pi \right)} \quad (12)$$

(11) решается при начальном условии в точке  $B$  касания нелинейных волн  $AB$  и  $BK$

$$y = -\sqrt{1 + \frac{4\delta_1 \gamma}{3\delta_2}}, \quad \mu = 1, \quad \delta = 1 + \frac{\delta_1 \gamma}{\delta_2} \quad (13)$$

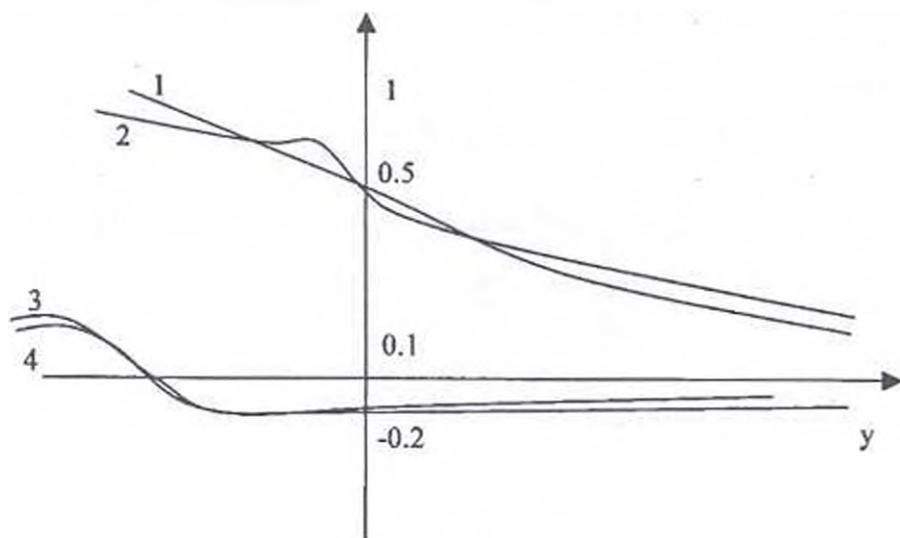
Кроме того, следует посчитать функцию  $\alpha$ , представляющую безразмерную касательную к ударной волне  $BB'$  скорость частицы

$$\alpha = \frac{y}{\pi} \text{tg} \mu \pi - \mu y - \mu \zeta \quad (14)$$

причем на  $BB'$  должно быть  $\alpha \approx 0$ .

Расчеты уравнения (11), (12) при условиях (13) при значениях  $\delta_1\gamma/\delta_2 = 0; 1/2$  показали, что наилучшее удовлетворение условия  $\varkappa = 0$  получается при  $B = 0$ , что и учтено в формулах (10)-(14). Результаты расчетов приведены на фиг. 2, где кривые 1,2 дают  $\mu(y)$ , 3,4 дают  $\varkappa(y)$  для указанных  $\delta_1\gamma/\delta_2$  соответственно.  $\varkappa(y)$  мало на всей волне  $BB'$ . Таким образом, частное решение (6) позволяет в случае  $\delta_2\gamma > 0$  удовлетворить условию  $\varkappa = 0$  с большой точностью, что для задачи газовой динамики в квадратично нелинейной среде показано в [6].

В случае упругой среды согласно [4]  $\delta_2 < 0$  [9] и при  $\delta_1 > 0, a^0 > 0$ , как было сказано, имеется виская ударная волна  $BK$  фиг. 1. Этот случай также осуществляется в случае электромагнитных ударных волн в сегнетоэлектрике [1], [10].



Фиг.2 ( $\delta_1\gamma/\delta_2 = 0; \delta_1\gamma/\delta_2 = 1/2$ )

Полагая при  $\delta_2\gamma < 0$

$$\frac{\Lambda}{\sqrt{k_1 - k_2}} = a'', \quad \gamma = a^0, \quad u = -\gamma\mu, \quad v = -\gamma\sqrt{-\delta_2\gamma}v' \quad (15)$$

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{-\delta_2\gamma}y, \quad \tau = -\delta_2\gamma t \delta$$

- подставляя (15) в (6), можно показать, что (9) снова имеет место позади  $BK$ , только в нем следует заменить

$$\frac{\delta_1\gamma}{\delta_2} \rightarrow -\frac{\delta_1\gamma}{\delta_2}, \quad \ln \sin \mu \pi \rightarrow \ln |\sin \mu \pi| \quad (16)$$

а (7) дает вперед  $BF$  фиг. 1

$$v'_1 = -u\mu_1, \quad \mu_1 = \frac{\delta_1}{2\gamma\delta_2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4\gamma\delta_1}{\delta_2} \left( \frac{y^2}{2} - \delta \right)} \right) \quad (17)$$

Впереди участка  $FK$  ударной волны вместо (17) имеет место  $\mu = -1$ .

Уравнение висячей ударной волны  $BK$  имеет вид

$$\frac{d\delta}{dy} = \mp \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1 + \frac{2}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} (\mu^2 + \mu_1 \mu + \mu_1^2)}$$

$$v' - v'_1 = -(\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dy} \quad (18)$$

Знаки  $\mp$  выбираются в ходе расчета.

Уравнение (18) с учетом исправленного по (16) решения (9) будет:

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y \gamma g^2 \mu \pi \mp \zeta}{\chi + \delta_3 \gamma / \delta_2 \Gamma} \quad (19)$$

где поскольку впереди ударной волны  $GK$   $\mu = -1$ ,

$$\zeta' = \sqrt{-y^2 \gamma g^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{\pi} \sin 2\mu \pi + 1 - \frac{2\delta_3 \gamma}{\delta_2} \left( \frac{2}{3} \mu^2 + \frac{\mu}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\mu}{\pi} \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln |\sin \mu \pi| \right)}$$

Начальные условия для (19) будут в точке  $B$  следующими:

$$y = 0, \mu = 0, \delta = 0 \quad (20)$$

В соответствующей задаче обтекания верха крыла [1], где среда квадратично нелинейная, показано, что вблизи точки  $B$  ударная волна  $BK$  вырождается в характеристику  $BG$  фиг. 1, уравнение которой получается из (18), где следует выбрать нижний знак и полагать  $\mu = \mu_1$ . Учитывая (17),

интегрируя уравнение характеристики  $\frac{d\delta}{dy} = \sqrt{2(\delta - \mu + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu^2)}$ , с учетом

(20) можно получить на  $BF$  фиг. 1

$$0 > y > y_1, \delta = -\frac{y^2}{2}, \mu = \mu_1. \quad (21)$$

где  $\mu_1$  дается (17). В случае  $\delta_3 = 0$  имеет место на  $BF$   $\mu_1 = -y^2$ . На участке  $FG$  характеристики, где  $\mu_1 = -1$ , интегрируя

$\frac{d\delta}{dy} = \sqrt{2(\delta + 1 + \delta_3 \gamma / \delta_2)}$  с начальными условиями в точке  $F$

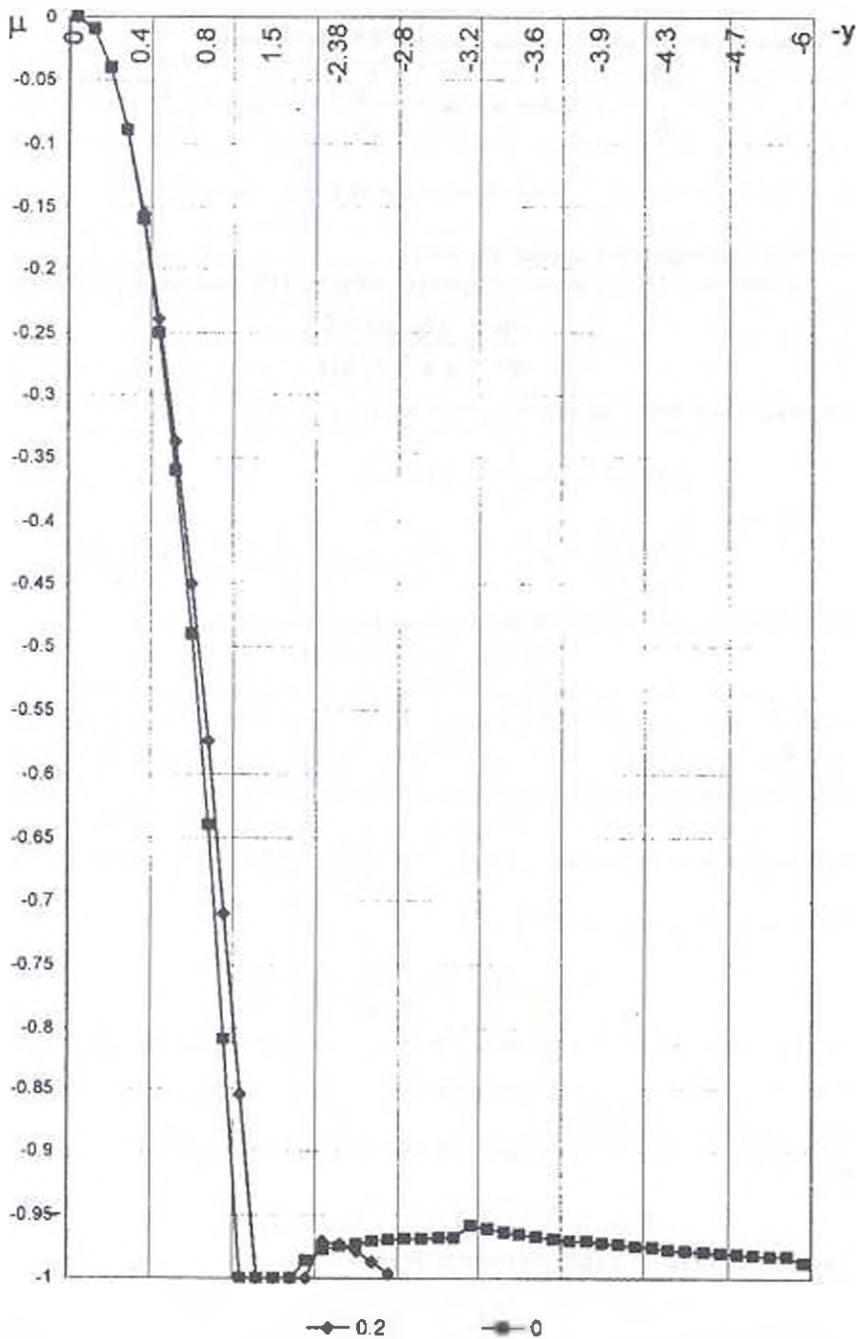
$$y_1 = -\sqrt{1 + \delta_3 \gamma / \delta_2}, \delta_1 = -y_1^2 / 2$$

можно получить на характеристике  $FG$  фиг. 1

$$y_1 > y > y_2, \mu_1 = -1, \delta + 1 + \delta_3 \gamma / \delta_2 = (y - 2y_1)^2 / 2 \quad (22)$$

где  $y = y_2$  есть точка зарождения ударной волны  $GK$  фиг. 1. В уравнении (19) выбирается верхний знак перед  $\zeta'$ , а в точке  $G$   $y_2 = 2y_1$ , в которой положено  $\mu_1 = -1$  и интегрируется (19) с этим начальным условием.

Далее решение проводится до точки  $y_1 < y_2$ , в которой меняется знак в (19) перед  $\zeta'$  на нижний и решение проводится до точки  $y = 3y_1$ .



Фиг.3 ( $\delta_1\gamma/\delta_2 = 0; 0,2$ )

Значения  $y_{2,3}$  выбраны так, чтобы  $\zeta'$  было вещественно и  $|\mu| < 1$ .  
 Рассчитано также на ГК

$$\alpha = \left( \frac{1}{\pi} (\lg \mu \pi - \mu) \right) y - y \mp \xi' (\mu + 1) \quad (23)$$

которое должно быть мало вдоль ударной волны.

Результаты расчетов для  $\delta_1 \gamma / \delta_2 = 0; 1/5$  приведены на фиг. 3. При этом  $\alpha(y)$  порядка  $10^{-3}$ , то есть мало. Таким образом, для квадратично-кубичной нелинейной среды, как упругой, так и электромагнитной, посчитаны ударные волны  $BB'$  и  $BK$  с помощью частного решения (9), (16) с почти что точным удовлетворением условий на ударных волнах. Решение с интегральным удовлетворением условия на  $BK$   $\alpha = 0$  для квадратично-нелинейной среды дано в [11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Саакян С. Г., Мартиросян Г. А. Решение дифракционной задачи для электромагнитной волны в неоднородной квадратично и кубически нелинейной среде. Конференция "Лазерная физика" 2001. С. 43-47.
2. Вальдек У. А., Пейпман Т. А., Энгельбрехт Ю. К. Асимптотика продольных и поперечных волн деформации в полупространстве // Тезисы докл. II Всес. Конф. по нелинейной теории упругости. Фрунзе. ИЛИМ. 1985. С. 203-204.
3. Багдоев А. Г., Даноян Э. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке // Журнал вычис. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12. №6. С. 1512-1529.
4. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках М.: Мир. 1966.
5. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд. Иностран. Литературы. 1962. 232 с.
6. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком // Журнал вычис. матем. и матем. физики. 1962. Т. 2. №2. С. 278-289.
7. Булах Б. М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука. 1970. 343с.
8. Zahalak G. Y, Myers M. K. Conical flow near Singular rays // Journ. Fluid Mechanics. 1974. Vol.64. N3. P. 537-561.
9. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. 520с.
10. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Физматгиз. 1963. 847с.
11. Багдоев А. Г., Машурян Г. М., Сафарян Ю. С. К расчету ударных волн в дифракционных задачах газодинамики и нелинейной динамической теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №1. С.37-42.

Институт механики НАН Армении  
Горисский ф-л Армянского государственного  
архитектурного университета

Поступила в редакцию  
16.12.2004

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ  
ДВИЖЕНИЙ ЗАМКНУТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Габриелян М.С., Мазмазян Л.А.

Մ.Ս.Գաբրիելյան, Լ.Ա.Մազմաջյան

Փակ շրջանային զանային բաղանջի տատանողական շարժման սպառնալի  
զեկավարման մասին եսակամետ իրավիճակներում

Ի հետաքրքրված է փակ շրջանային զանային բաղանջի զծային տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը երբ երա վրա ազդում են բաշխված հակամետ ուժեր: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եզանակով և բերված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող խազային խնդրի: Խաղացողների օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները որոշված են էքստրեմալ նշանատրոջան եղանակով: Փոյլ է տրված, որ երբ առաջին խաղացողի ռեսուրսները ավելի շատ են, քան երկրորդ խաղացողինը և ազդող ուժերը պատկանում են  $L_2$  դասին, ապա լուծվում է բաղանջի տատանումների մարման խնդիրը: Աշխատանքի վերջում բերված է բվային օրինակ:

M.S. Gabrielyan, L.A. Mazmazyan

On the Optimal Control for The Elastic Plate's Vibrations in the Conflict Situations

The problem of an optimal control for the closed circular cylindrical shell's linear vibrations, when the distributive disposed forces influence on it. The problem is solved by the method of Fourier and it is brought to the differential game, which is described by the infinitesimal differential equations of the second order. The extremal strategies are constructed by the extreme targeting method. It is shown that if the resources of the first player are more than the resources of the second player and the influencing forces belong to class  $L_2$ , then the problem of damping of shell's vibrations is solved. In the end of the article a numerical example is given.

Исследуется задача об оптимальном управлении линейных колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки при помощи противоборствующих сил, приложенных к поверхности оболочки. Задача решается методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью метода экстремального прицеливания определяются оптимальные управляющие силы. Указываются условия, при которых действующие силы, принадлежащие классу  $L_2$ , гасит колебательное движение оболочки, если ресурсы первого игрока больше, чем второго. В конце статьи приведен численный пример.

1. Рассматриваются линейные колебания шарнирно опертой замкнутой круговой цилиндрической оболочки при малых прогибах. Оболочка однослойная, изготовленная из однородного изотропного материала. Для круговой цилиндрической оболочки наименьший радиус кривизны совпадает с радиусом поперечного сечения. Цилиндрическая оболочка имеет срединную поверхность нулевой кривизны ( $k_r = 0$ ,  $k_\theta = 1/R$ ) ([1], с. 12).

Пусть  $L$  — длина оболочки,  $R$  — радиус кривизны срединной поверхности,  $h$  — постоянная толщина,  $\rho$  — плотность оболочки ( $\rho = \gamma/g$ , где  $\gamma$  — удельный вес материала,  $g$  — ускорение силы тяжести). Выберем координатные линии  $x$  и  $y$  таким образом, чтобы они совпадали с линиями кривизны срединной поверхности вдоль образующей и дуги соответственно. Координату  $z$  будем отсчитывать вдоль нормали к поверхности, считая  $z$  направленной к центру кривизны. Обозначим перемещения точек срединной поверхности по направлениям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  соответственно.

Пусть на поверхности оболочки на множестве положительной меры действуют две распределенные перпендикулярные силы:  $F_1(x, y, t)$  и  $F_2(x, y, t)$ , под действием которых оболочка будет колебаться. Обозначим нормальные перемещения срединной поверхности оболочки через  $w(x, y, t)$ .

Дифференциальные уравнения линейных колебаний оболочки будут ([1], с. 103)

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F_1(x, y, t)}{h} + \frac{F_2(x, y, t)}{h} \quad (1.1)$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{E}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость оболочки  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ ,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль упругости материала при растяжении (сжатии),  $\Phi(\cdot)$  — функция напряжения срединной поверхности, а

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Пусть граничные условия замкнутой круговой цилиндрической оболочки удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания со свободными смещениями в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом ([1], с. 110):

$$w = 0, \quad v = 0, \quad M_x = 0, \quad N_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = L \quad (1.3)$$

где изгибающий момент  $M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ , а нормальное усилие

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w \right] \right\}$$

Пусть начальные условия будут

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (1.4)$$

где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности соответственно.

Условия (1.3) шарнирного опирания будут удовлетворены, если прогиб представить в виде

$$w = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \quad (1.5)$$

рассматривая при этом  $t$  как параметр. Для определения  $w(x, y, t)$  достаточно определить функции  $f_{mn}(t)$ ,  $m$  — число полуволн вдоль оболочки,  $n$  — число полных волн по окружности.

Подставляя (1.5) в (1.2) и интегрируя, получим

$$\Phi = \frac{E}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0}(t) \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi x}{L} + \frac{E}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \frac{m^2 \pi^2}{L^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \quad (1.6)$$

Так как в области  $[0, L] \times [0, 2\pi R]$  система функций  $\left\{ \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \right\}$ , ( $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ ) ортогональная и полная, то функции  $F_1(x, y, t)$ ,  $F_2(x, y, t)$ ,  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{m0}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \\ F_2(x, y, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{m0}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \\ \varphi(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{m0} \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m0} \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_{m0}(t) &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} F_1(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy \\ \bar{v}_{m0}(t) &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} F_2(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy \\ \varphi_{m0} &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \varphi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy \\ \psi_{m0} &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy, \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

Подставляя (1.5), (1.6), (1.7) в уравнение (1.1), после несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned} &\left( \frac{Dg}{\gamma h} \frac{(L^2 n^2 + m^2 \pi^2 R^2)^2}{L^4 R^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{m^4 \pi^4 R^2}{(L^2 n^2 + m^2 \pi^2 R^2)^2} \right) \frac{f_{m0}(t)}{h} + \frac{f'_{m0}(t)}{h} - \\ &- \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{m0}(t) - \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{m0}(t) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.8)$$

От (1.8) перейдем к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, описывающим линейные колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки:

$$\frac{d^2 \xi_{m0}(t)}{dt^2} + \omega_{m0}^2 \xi_{m0}(t) + u_{m0}(t) + v_{m0}(t) = 0, \quad (1.9)$$

где  $\xi_{m0}(t) = \frac{f_{m0}(t)}{h}$ ,  $u_{m0} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{m0}(t)$ ,  $v_{m0} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{m0}(t)$ .

при следующих начальных условиях:

$$f_{m0}(0) = \varphi_{m0}, \quad \dot{f}_{m0}(0) = \psi_{m0}.$$

Квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Dg(L^2n^2 + m^2\pi^2R^2)^2}{\gamma h L^4 R^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{m^4\pi^4 R^2}{(L^2n^2 + m^2\pi^2R^2)^2} \quad (1.10)$$

Предположим, что силы  $F_1(x, y, t)$  и  $F_2(x, y, t)$  принадлежат классу  $L_2$  и удовлетворяют условиям [2]

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^L \int_0^{2\pi R} [F_1(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} &= \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq P \\ \left[ \int_0^L \int_0^{2\pi R} [F_2(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} &= \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \end{aligned} \quad (1.11)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ .

Здесь  $P, Q, T$  — заданные положительные числа.

Рассмотрим следующую игровую ситуацию:

Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями  $u_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ ), стремится минимизировать значение

величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_{mn}^2(\vartheta) + \dot{\xi}_{mn}^2(\vartheta)]$  при самом упорном сопротивлении

второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями  $v_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ ), а второй игрок в свою очередь стремится

максимизировать значение величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_{mn}^2(\vartheta) + \dot{\xi}_{mn}^2(\vartheta)]$  при самом

упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Величину  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta \leq T$ ) определим ниже. Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.9). Используем метод экстремального прицеливания ([2], [3] с. 149).

Составим гипотетическое рассогласование. Так как собственные числа  $\lambda_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ ) положительны, то вводя следующие обозначения:

$$z_{mn}^{(1)} = \xi_{mn}, \quad z_{mn}^{(2)} = \frac{\dot{\xi}_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \quad (1.12)$$

систему дифференциальных уравнений (1.9) можем записать в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_{mn}^{(1)} = \sqrt{\lambda_{mn}} z_{mn}^{(2)} \\ \dot{z}_{mn}^{(2)} = -\sqrt{\lambda_{mn}} z_{mn}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} u_{mn} + \frac{\cdot T}{\sqrt{\lambda_{mn}}} v_{mn} \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots) \quad (1.13)$$

$(m, n)$ -ый блок фундаментальной матрицы однородной части системы (1.13) будет:

$$Z_{mn}[t, \tau] = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) & \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) \\ -\sin \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) & \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Гипотетическое рассогласование для сформулированной игровой задачи будет [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = & \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq P} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (l_{mn}^{(1)}, l_{mn}^{(2)}) Z_{mn}[T, t] \cdot \begin{pmatrix} z_{mn}^{(1)}(t) \\ z_{mn}^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \right. \\ & + \int_0^T \min_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2 \leq P^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (l_{mn}^{(1)}, l_{mn}^{(2)}) Z_{mn}[T, \tau] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_{mn})^{-1/2} \end{pmatrix} u_{mn} d\tau + \\ & \left. + \int_0^T \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2 \leq Q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (l_{mn}^{(1)}, l_{mn}^{(2)}) Z_{mn}[T, \tau] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_{mn})^{-1/2} \end{pmatrix} v_{mn} d\tau \right\} \quad (1.15) \end{aligned}$$

Подставляя значения  $Z_{mn}[T, \tau]$  в (1.15) и учитывая, что области  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2 \leq P^2$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2 \leq Q^2$  строго выпуклые, а минимизирующиеся и максимизирующиеся функции линейные, то есть минимум и максимум достигаются на границах, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = & \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq P} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] + \right. \\ & + \int_0^T \min_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2 \leq P^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(T - \tau)] \cdot \frac{u_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} d\tau + \\ & + \int_0^T \min_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2 \leq Q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(T - \tau)] \cdot \frac{v_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} d\tau \quad (1.16) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{mn} &= z_{mn}^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(T - t) + z_{mn}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(T - t) \\ b_{mn} &= z_{mn}^{(2)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(T - t) - z_{mn}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(T - t) \end{aligned}$$

Используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, для  $u_{mn}^{(0)}$  и  $v_{mn}^{(0)}$  получим

$$u_{mn}^{(0)}(\tau) = - \frac{P [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(T - \tau)]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} (l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}}(T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}}(T - \tau))^2 \right]^{1/2}} \quad (1.17)$$

$$v_{mn}^{(0)}(\tau) = \frac{Q \left[ l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Подставляя значения  $u_{mn}^{(0)}(\tau)$  и  $v_{mn}^{(0)}(\tau)$  из (1.17) в (1.16), получим

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] = 1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] - (P - Q) \times \right. \\ \left. \times \int_0^T \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2} d\tau \right\} \quad (1.18)$$

*Определение:* Задача для системы (1.13) назовем регулярным, если она регулярна для любых конечных  $m, n$  из (1.13).

При условии  $P > Q$  выражение в фигурных скобках в формуле (1.18) является вогнутой функцией по переменным  $l_{rj}^{(1)}$  и  $l_{rj}^{(2)}$  ( $r = 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots$ ), следовательно, максимум в (1.18) при любых  $z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)$  достигается на единственном векторе  $(l_{mn}^{(1)})^0, (l_{mn}^{(2)})^0$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ ), т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна [2]. Компоненты вектора  $l^0$  определяются из следующих уравнений:

$$a_{pk} + \zeta(l_{pk}^{(1)})^0 + \frac{Q - P \int_0^T \left[ (l_{pk}^{(1)})^0 \sin \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) + (l_{pk}^{(2)})^0 \cos \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) \right] \sin \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) d\tau}{\left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn}^{-1} \left( (l_{mn}^{(1)})^0 \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + (l_{mn}^{(2)})^0 \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}} = 0 \\ b_{pk} + \zeta(l_{pk}^{(2)})^0 + \frac{Q - P \int_0^T \left[ (l_{pk}^{(1)})^0 \sin \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) + (l_{pk}^{(2)})^0 \cos \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) \right] \cos \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) d\tau}{\left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn}^{-1} \left( (l_{mn}^{(1)})^0 \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + (l_{mn}^{(2)})^0 \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}} = 0 \\ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( (l_{pk}^{(1)})^0 \right)^2 + \left( (l_{pk}^{(2)})^0 \right)^2 \right] = 1 \quad (p = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

Заметим, что  $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$  — ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (1.18), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (1.17) равномерно по  $t \in [0, T]$ , составляют сходящиеся квадратом ряды [2]. Для определения момента  $\mathcal{G}$  в каждой ситуации нужно найти наименьший корень уравнения:

$$\min_{t \in [t_0, T]} \varepsilon^{(0)}(t_0, \{z_{mn}^{(1)}(t_0), z_{mn}^{(2)}(t_0)\}, \tau) = \varepsilon^{(0)}(t_0, \cdot, \mathcal{G}) \quad (1.20)$$

2. В этом разделе исследуем случай, когда оболочка совершает

колебания с образованием четырех волн вдоль каждой стороны ( $m = 3, n = 3$ ).

Так как  $(l_{mn}^{(i)})^0, (l_{mn}^{(z)})^0, \varepsilon^{(i)}(t, \{z_{mn}^{(i)}(t), z_{mn}^{(z)}(t)\}; T), u_{mn}^{(i)}$  и  $v_{mn}^{(i)}$  ( $m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3$ ) трудно представить в аналитической форме, то задачу решим численно.

Для численного примера возьмем оболочку из стали, которая имеет следующие значения параметров:  $L = 3\text{ м}, R = 2\text{ м}, h = 0.001\text{ м}, \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, E = 200\text{ ГПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \mu = 0,3, P = 8, Q = 2, t = 0$ . Пусть начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности есть

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{200}y^2 \quad (2.1)$$

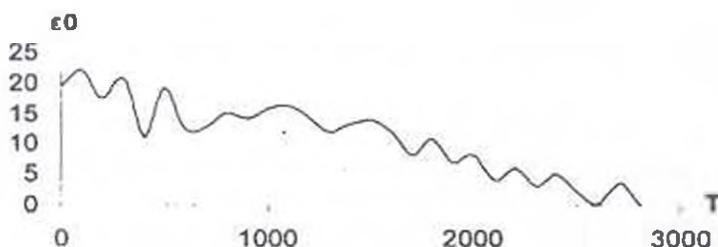
$$\psi(x, y) = \frac{1}{50}x^2$$

Вычисляя квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах из (1.8) для  $m = 3, n = 3$ , получим

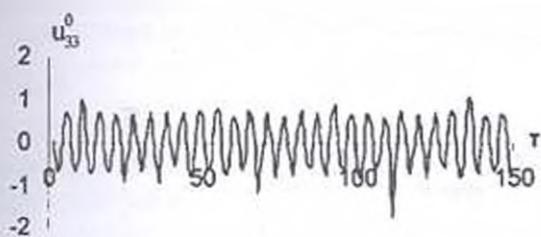
$$\begin{aligned} \lambda_{10} = \omega_{10}^2 = 641026, & \quad \lambda_{11} = \omega_{11}^2 = 425107, & \quad \lambda_{12} = \omega_{12}^2 = 175369 \\ \lambda_{13} = \omega_{13}^2 = 68832, & \quad \lambda_{20} = \omega_{20}^2 = 641030, & \quad \lambda_{21} = \omega_{21}^2 = 573766 \\ \lambda_{22} = \omega_{22}^2 = 425114, & \quad \lambda_{23} = \omega_{23}^2 = 280059, & \quad \lambda_{30} = \omega_{30}^2 = 641049 \\ \lambda_{31} = \omega_{31}^2 = 609768, & \quad \lambda_{32} = \omega_{32}^2 = 528531, & \quad \lambda_{33} = \omega_{33}^2 = 425141 \end{aligned}$$

Учитывая эти значения, с помощью программы «Mathematica 5.0» и «Microsoft Excel» численным методом вычислены  $(l_{mn}^{(i)})^0, (l_{mn}^{(z)})^0$  ( $m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3$ ), а следовательно, вычислены гипотетическое расхождение из (1.18) и оптимальные управляющие воздействия из (1.17).

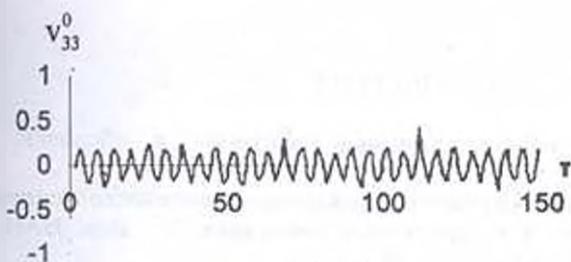
Ниже представлены зависимости  $\varepsilon^0 \{T, 0, 3000\}$  (фиг. 1),  $u_{33}^0 \{T, 0, 150\}$  (фиг. 2),  $v_{33}^0 \{T, 0, 150\}$  (фиг. 3).



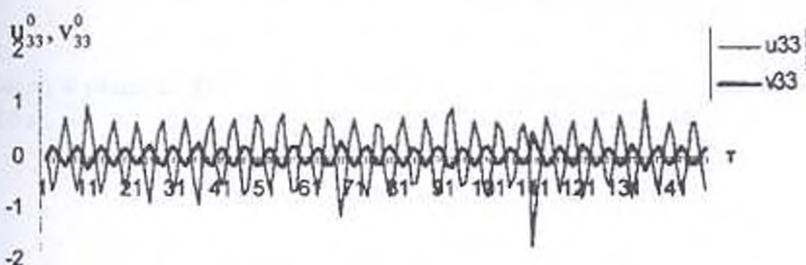
Фиг. 1



Фиг.2



Фиг.3



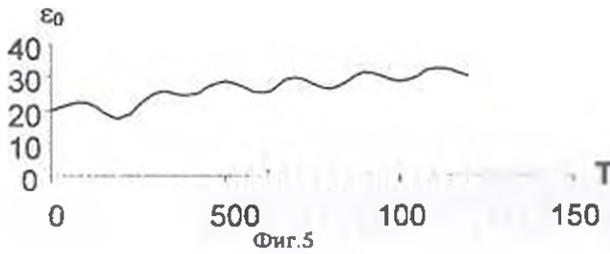
Фиг.4

Из фиг. 4 видно, что  $u_{33}^0$  и  $v_{33}^0$  имеют противоборствующее влияние в том же интервале времени. Остальные оптимальные управляющие воздействия  $u_{mn}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$ ,  $v_{mn}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$  ( $m = 1, 2, 3$ ;  $n = 0, 1, 2, 3$ ) имеют тот же характер, что и  $u_{33}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$  (фиг.2) и  $v_{33}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$  (фиг. 3).

Возьмем теперь  $P < Q$ ,  $P=2$ ,  $Q=8$ . Аналогично получим следующий график для гипотетического рассогласования (фиг. 5):

Из фиг. 1-5 следует, что когда ресурсы первого игрока больше, чем второго ( $P > Q$ ), то задача всегда решается в пользу первого игрока, т.е.

первый игрок, распоряжающийся управлением  $u_{mn}^0$  ( $m = 1, 2, 3$ ;  $n = 0, 1, 2, 3$ ), гасит колебательное движение оболочки при самом упорном сопротивлении со стороны второго игрока  $v_{mn}^0$  ( $m = 1, 2, 3$ ;  $n = 0, 1, 2, 3$ ).



Авторы выражают глубокую благодарность проф. В.Ц. Гнуни за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972, с. 9-111.
2. Габриелян М.С. Об оптимальном управлении механической системой мощности континуума в конфликтных ситуациях // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. №4. С. 72 – 76.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
24.01.2005

УДК 629.7.052

МИНИМАКСНЫЕ АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ  
НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПО ИНФОРМАЦИИ О ВЫСОТЕ ПРИ  
НАЛИЧИИ НЕМОДЕЛИРУЕМЫХ УСКОРЕНИЙ

Мартirosян С. Р.

Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Իներցիալ նավիգացիոն համակարգերի պարամետրերի գնահատման խնդրի մասին չմոդելավորող արագացումների առկայության դեպքում

Իրտարկված է դնանալիկ համակարգերի ֆուզային վիճակի մինիմալացման գնահատման խնդրի չմոդելավորող արագացումների առկայության դեպքում: Առաջված են օպտիմալացման բավարար պայմանները անալիտիկ եղանակով: Առաջարկված է այդպիսի խնդրների լուծման ալգորիթմ, որի ուղեորքանքը գտնված է իներցիալ նավիգացիոն համակարգերի պարամետրերի մինիմալացման գնահատականները:

S. R. Martirosyan

Minimax algorithms of correction of inertial navigation systems under  
the information on height at presence unmodelled acceleration

Estimation problem is considered for the case in which stochastic description of disturbances in the system and the random measurement errors is not available, but only a bound of them is known. It is being cast into parameter estimation problem under uncertain conditions. One way of solution of such problems is suggested by the methods of guaranteed (minimax) estimation theory. Hence the methods of optimal guaranteed parameter estimation theory are used for solving problems connected with spacecraft and aircraft guidance and control such as the trajectory correction problem or the problem on evaluation of motion parameters of means of measurements. In this paper the additional analysis of this problem has allowed to formulate analytical criteria of an optimality, based on construction generalized Chebyshev's polynomials. The algorithm of the solution of such problems is suggested convenient for analytical investigations of linear dynamic systems and estimators. The new algorithm is tested on a problem of correction inertial navigation system under the information on height at presence unmodelled disturbances. The optimum moments of measurements are found and a priori estimation of accuracy of determination of parameters of the navigation system are received.

Задача минимаксного оценивания с немоделируемыми ускорениями рассматривалась в работах [1-4]. В предлагаемой статье дополнительный анализ этой проблемы позволил сформулировать аналитические критерии оптимальности. Предложен аналитический алгоритм решения таких задач, основанный на построении обобщенных чебышевских полиномов. Алгоритм опробован на задаче коррекции инерциальной навигационной системы по информации о высоте при наличии немоделируемых ускорений. Найдены оптимальные моменты измерений и получены априорные оценки точности определения параметров навигационной системы.

1. Постановка задачи. Пусть изменение состояния системы  $x(t)$  на интервале времени  $t \in [0, T]$  описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0, T] \quad (1.1)$$

где  $x(t) \in R^n$ ;  $A(t) \in R^{n \times n}$ ,  $B(t) \in R^{n \times r}$  – кусочно-непрерывные матричные функции;  $u(t) \in R^r$  – вектор немоделируемых ускорений, компоненты которого являются кусочно-непрерывными функциями на  $[0, T]$ .

Предполагается, что выполнено ограничение

$$\|u(t)\| \leq \gamma(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.2)$$

где  $\gamma(t)$  – заданная неотрицательная кусочно-непрерывная функция;  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора.

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  проводятся измерения

$$z(t) = H^T x(t) + \rho(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

где  $H(t) \in R^m$  – известная кусочно-непрерывная вектор-функция;  $z(t)$  – измеренное значение;  $\rho(t)$  – ошибка измерений;  $z(t), \rho(t) \in R^1$ .

Будем предполагать, что ошибка измерений  $\rho(t)$  удовлетворяет ограничению

$$|\rho(t)| \leq \sigma(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.4)$$

где  $\sigma(t)$  – заданная неотрицательная функция на  $[0, T]$ .

Предполагается также, что система (1.1), (1.3) при  $u(t) = 0, \rho(t) = 0$  вполне наблюдаема.

Требуется построить оценку параметра

$$l = a^T x_0 \quad (1.5)$$

$a \in R^m$  – заданный вектор,  $x_0 = x(0)$ ;

на классе линейных оценок  $\hat{l}$  параметра  $l$ , определяемых в виде

$$\hat{l} = \int_0^T \Phi(t) z(t) dt \quad (1.6)$$

где

$$\Phi(t) = \Phi_0(t) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \delta(t - t_j) \quad (1.7)$$

$\Phi_0(t)$  – кусочно-непрерывная функция;  $\Phi_j, j = 1, 2, \dots, n$  – числа ( $n$  – произвольно).

Функцию  $\Phi(t)$  будем называть оценителем.

Ошибка оценки  $\hat{l} - l$ , очевидно, задается выражением

$$\hat{l} - l = \left( \int_0^T \Phi(t) h^T(t) dt - a^T \right) x_0 + \int_0^T \Phi(t) h^T(t) g(t) dt + \int_0^T \Phi(t) \rho(t) dt \quad (1.8)$$

где

$$h(t) = X^T(t) H(t) \quad (1.9)$$

$$b(t) = X^{-1}(t) B(t) \quad (1.10)$$

$$g(t) = \int_0^T b(s) u(s) ds \quad (1.11)$$

$X(t) \in R^{m \times m}$  – матрица фундаментальной системы решений (1.1):

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad X(0) = E_m \quad (1.12)$$

$E_m$  –  $m$ -мерная единичная матрица.

Из соотношения (1.8), очевидно, следует, что  $|\hat{l} - l|$  зависит от  $\rho(t)$ ,  $u(t)$  и  $\Phi(t)$ :

$$|\hat{l} - l| = D(\Phi(t), u(t), \rho(t)) \quad (1.13)$$

Гарантированное значение ошибки оценки  $\hat{l} - l$

$$D_{\text{гар}}(\Phi(t)) = \max_{u, \rho} D(\Phi(t), u(t), \rho(t)) \quad (1.14)$$

зависит только от выбранного оценивателя  $\Phi(t)$ .

Для того, чтобы величина  $D_{\text{гар}}(\Phi(t))$  была бы конечной, необходимо выполнение условия несмещенности оценивателя  $\Phi(t)$ :

$$D(\Phi(t), 0, 0) = 0 \text{ для любых } x_0 \in R^n \quad (1.15)$$

Если  $\Phi(t)$  удовлетворяет условию (1.15), то будем это отмечать  $\Phi \in N$ .

Из соотношения (1.8) следует, что требование несмещенности оценивателя (1.15) приводит к условию

$$\int_0^T \Phi(t) h(t) dt = a \quad (1.16)$$

Тогда соотношение (1.8) можно написать в виде

$$\hat{l} - l = \int_0^T \Phi(t) \rho(t) dt + \int_0^T \Phi(t) h^T(t) g(t) dt \quad (1.17)$$

Естественно среди всех алгоритмов оценивания  $\Phi(t) \in N$  найти такой, при котором величина  $D_{\text{гар}}(\Phi(t))$  минимальна.

Стремление минимизировать  $D_{\text{гар}}(\Phi(t))$  в рассматриваемой постановке порождает следующую минимаксную задачу [3]:

$$\min_{\Phi \in N} \max_{u, \rho} D(\Phi(t), u(t), \rho(t)) \quad (1.18)$$

Подсчитаем гарантированное значение ошибки оценки (1.14).

Согласно (1.17) и (1.4)

$$J(\Phi, u) = \max_{\rho} D(\Phi(t), u(t), \rho(t)) = \int_0^T \Phi(t) |\sigma(t)| dt + \int_0^T \Phi(t) h^T(t) g(t) dt \quad (1.19)$$

Тогда, в соответствии с (1.3), при любом  $\Phi(t) \in N$  гарантированное значение ошибки оценки (1.14) будет

$$J^*(\Phi) = \max_{u} J(\Phi, u) = \int_0^T \Phi(t) |\sigma(t)| dt + \int_0^T \Phi(t) |\max |h^T(t) g(t)| dt \quad (1.20)$$

Нетрудно для каждого  $t \in [0, T]$  получить оценку сверху для функции  $|h^T(t) g(t)|$  в следующем виде [3]:  $\max |h^T(t) g(t)| = C_{\text{max}}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

В самом деле, так как согласно (1.11)

$$h^T(t) g(t) = \int_0^t h^T(t) b(s) u(s) ds \quad (1.21)$$

то, очевидно,  $\max |h^T(t)g(t)|$  достигается при

$$u(s) = \frac{\gamma(s)b^T(s)h(s)}{\|b^T(s)h(s)\|} \quad (1.22)$$

Тем самым

$$C_{\max}(t) = \int_0^t \|b^T(s)h(s)\| \gamma(s) ds \quad (1.23)$$

Отсюда следует при любом  $\Phi(t) \in N$  оценка сверху функционала  $J(\Phi, u)$  (1.19):

$$J(\Phi, u) \leq J^*(\Phi) = \int_0^T (\sigma(t) + C_{\max}(t)) |\Phi(t)| dt \quad (1.24)$$

Отметим, что если  $t$  не фиксировано, то верно лишь неравенство  $|h^T(t)g(t)| \leq C_{\max}(t)$  на  $[0, T]$ .

Задача определения

$$\min_{\Phi \in N} J^*(\Phi) \quad (1.25)$$

при условии несмещенности (1.16) сводится к следующей задаче вариационного исчисления. Необходимо определить оцениватель  $\Phi(t) \in N$  из условий

$$J^* = \min_{\Phi \in N} \int_0^T (\sigma(t) + C_{\max}(t)) |\Phi(t)| dt \quad (1.26)$$

$$\int_0^T \Phi(t) h(t) dt = a \quad (1.27)$$

Задача (1.26), (1.27) может быть эффективно решена симплекс-методом [3,4]. Аналитическое решение этой задачи можно получить путем сведения ее к задаче построения обобщенного чебышевского полинома [7].

Таким образом, путем сведения задачи (1.26), (1.27) к задаче линейного программирования, легко решаемой симплекс-методом, или к задаче построения обобщенного чебышевского полинома, нетрудно получить оценки сверху для искомого функционала  $J(\Phi, u)$  (1.19) и определить программу измерений, минимизирующую эти оценки. При этом программа измерений, минимизирующая функционал  $J^*(\Phi, u)$  (1.25), будет содержать не более чем  $m$  измерений, где  $m$  — размерность пространства состояний системы, т. е. столько же, сколько в проблеме при отсутствии немоделируемых ускорений [3].

Однако следует подчеркнуть, что решение задачи (1.26), (1.27) не обязано совпадать с решением исходной проблемы (1.18), хотя в некоторых случаях такое совпадение возможно.

Рассматриваемую минимаксную задачу (1.18) можно сводить к дифференциальной игре с терминальным функционалом

$$\bar{J} = \min_{\Phi \in N} \max_{u \in U} \int_0^T (|\Phi(t)|\sigma(t) + \Phi(t)h^T(t)g(t))dt \quad (1.28)$$

подробный анализ которой проведен в работе [3]. Сформулированы достаточные условия, включающие все необходимые, которые гарантируют выполнение неравенств седловой точки

$$J(\bar{\Phi}, u) \leq J(\bar{\Phi}, \bar{u}) \leq J(\bar{\Phi}, \bar{u}) \quad (1.29)$$

где  $\bar{u}$  и  $\bar{\Phi}$  – решение задачи (1.28).

Пусть  $\bar{\Phi}^*$  – решение задачи (1.25), а  $\bar{\Phi}^0$  – решение задачи

$$\min_{\Phi \in N} J^0(\Phi) \quad (1.30)$$

в которой не учитываются немоделируемые ускорения  $u(t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ .

Справедливы неравенства [3]:

$$J^*(\bar{\Phi}^*) \geq J_*(\bar{\Phi}^*) \geq J(\bar{\Phi}) \geq J^0(\bar{\Phi}^0) \quad (1.31)$$

где  $\bar{\Phi}$  – минимизирующий оценщик минимаксной задачи (1.28);  $J_*(\Phi)$  – решение задачи (1.28) при фиксированном оценщике  $\Phi(t) \in N$ :

$$J_*(\Phi) = \max_u J(\Phi, u) \quad (1.32)$$

Если величина

$$\alpha_0 = \frac{J_*(\bar{\Phi}^*) - J^0(\bar{\Phi}^0)}{J^0(\bar{\Phi}^0)} \quad (1.33)$$

достаточно мала, то точное решение минимаксной задачи (1.28) не может существенно уменьшить гарантированную ошибку оценки [3].

**2. Сведение проблемы к задаче построения обобщенного чебышевского полинома.** Нетрудно получить при умеренной размерности  $m$  системы аналитическое решение задачи (1.26), (1.27), сводя ее к задаче построения обобщенного чебышевского полинома. Для этого сформулируем некоторые результаты теории задач математического программирования указанного вида [5,6] и воспользуемся алгоритмом решения этих задач, предложенным в [7].

Можно упростить запись задачи (1.26), (1.27) в предположении

$$\sigma(t) > 0, \quad \gamma(t) > 0, \quad t \in [0, T] \quad (2.1)$$

если обозначить

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\vartheta(t) \quad (2.2)$$

$$h'(t) = \frac{h(t)}{\vartheta(t)} \quad (2.3)$$

$$\vartheta(t) = \sigma(t)(1 + \alpha(t)) \quad (2.4)$$

$$\alpha(t) = \frac{C_{\max}(t)}{\sigma(t)} \quad (2.5)$$

**Замечания.** 2.1. Можно считать, что  $\sigma(t) > 0$ ,  $\gamma(t) > 0$ , или  $\sigma(t) + C_{\max}(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$ , иначе из условия  $\sigma(t) + C_{\max}(t) = 0$  на некоторых подмножествах  $F \subset \{0, T\}$  в соответствии с (1.2), (1.4) имеем

$\sigma(t) = 0$ ,  $C_{\max}(t) = 0$ . А тогда,  $u(t) = 0$ ,  $\rho(t) = 0$  на  $F = [t', t'']$ , в силу чего решение рассматриваемой минимаксной задачи, как задачи восстановления компонент вектора состояний системы будет иметь вид

$$l = a^T x_0 = a^T \left[ \int_{t'}^{t''} X^T(t) H(t) H^T(t) X(t) dt \right]^{-1} \int_{t'}^{t''} X^T(t) H(t) z(t) dt, \quad t \in [t', t'']$$

2.2. Заведомое отсутствие немоделируемых ускорений на некоторых подмножествах  $W \subset \{0, T\}$  просто описывается условием  $\gamma(t) = 0$ , или, в соответствии с (1.23),  $C_{\max}(t) = 0$ .

2.3. Можно считать, что заданный целевой вектор  $a = (1, 0, \dots, 0)^T$ . Иначе, если  $a = (a_1, a_2, \dots, a_s, \dots, a_m)^T$  и  $a_s \neq 0$ , то с помощью замены

$$\bar{h}(t) = Ch'(t), \quad \bar{a} = Ca \quad (2.6)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_s^{-1} & 0 \\ a_s I_{s-1} & -a_1 & 0 \\ & \vdots & \\ & -a_{s-1} & \\ 0 & -a_{s+1} & a_s I_{m-s} \\ & \vdots & \\ & -a_m & \end{pmatrix}$$

в задаче (1.26), (1.27) пара векторов  $h'(t)$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_s, \dots, a_m)^T$  заменится парой

$$\bar{h}(t) \in R^m, \quad \bar{a} = (1, 0, \dots, 0)^T \in R^m \quad (2.7)$$

Итак, будем считать, что

$$\mathfrak{S}(t) > 0, \quad t \in [0, T] \quad (2.8)$$

Замена  $\Phi(t)$ ,  $h(t)$ ,  $a$ , соответственно, на  $\Phi'(t)$ ,  $\bar{h}(t)$ ,  $\bar{a}$  в соотношениях (1.26), (1.27) приводит к записи

$$J^* = \min_{\Phi \in \mathcal{N}} \int_0^T \Phi(t) | dt \quad (2.9)$$

$$\int_0^T \Phi(t) h(t) dt = a \quad (2.10)$$

где  $a = (1, 0, \dots, 0)^T \in R^m$ . Здесь знаки волны и штриха опущены.

Сформулируем двойственную к (2.9), (2.10) задачу:

на множестве векторов  $Y \in R^m$  найти вектор, максимизирующий функционал [5-7]

$$Y^T a \longrightarrow \max_Y \quad (2.11)$$

при условии

$$\{Y^T h(t) \leq 1, t \in [0, T]\} \quad (2.12)$$

$h(t) \in R^m$  – заданный вектор,  $a = (1, 0, \dots, 0)^T \in R^m$ .

Пусть  $Y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)^T$  – решение задачи (2.11), (2.12), а  $t_1, \dots, t_l, l \leq m$  – такие моменты времени, в которых  $|Y^T h(t_j)| = 1, j = 1, \dots, l$ .

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$N\Phi = a \quad (2.13)$$

$$N = (h(t_1), \dots, h(t_l)) \in R^{m \times l}, \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_l)^T \in R^l$$

Справедливы утверждения [5-7]: система (2.13) совместна;

$\Phi^0(t) = \sum_{j=1}^l \Phi_j^0 \delta(t - t_j)$  – решение задачи математического программирования (2.9), (2.10); оптимальные значения функционалов обеих задач совпадают,

$$\text{т. е. } \int_0^T \Phi^0(t) dt = Y^{0T} a.$$

Таким образом, найдя решение двойственной задачи (2.11), (2.12), получим решение задачи математического программирования (2.9), (2.10).

Сведем двойственную задачу к задаче построения обобщенного чебышевского полинома

$$L = \min_{z_j} \max_{t \in [0, T]} |S(t)| \quad (2.14)$$

где  $S(t)$  – обобщенный полином, определяемый выражением

$$S(t) = h_1(t) + z_2 h_2(t) + \dots + z_m h_m(t) \quad (2.15)$$

$h_i(t), i = 1, \dots, m$  – компоненты вектора  $h(t) \in R^m$ ;  $z_j, j = 2, \dots, m$  – числа.

Показано [5,6], что если решение двойственной задачи (2.11), (2.12)  $Y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)^T$  существует, то существует также и решение задачи построения обобщенного чебышевского полинома (2.14), достигающегося на наборе  $\{z_j\}, j = 2, \dots, m$ ; при этом  $L > 0$  и

$$y_1^0 = L^{-1}, y_j^0 = L^{-1} z_j^0, j = 2, \dots, m \quad (2.16)$$

Справедливо и обратное утверждение: если решение задачи (2.15) достигается на наборе  $\{z_j\}, j = 2, \dots, m$  и  $L > 0$ , то существует решение двойственной задачи (2.11), (2.12) и выполняется (2.16).

Для решения задачи математического программирования (2.9), (2.10) предлагается следующий алгоритм, удобный для аналитического исследования [7].

1. Строится обобщенный чебышевский полином (2.14); пусть в моменты времени  $t_1, \dots, t_l, l \leq m$  значения обобщенного чебышевского полинома равны  $\pm L$ , т.е. полином принимает при этих значениях  $t_i, i = 1, \dots, l, l \leq m$  наибольшие по абсолютной величине значения.

2. Решается система алгебраических уравнений (2.13); пусть  $\Phi^0 = (\Phi_1^0, \dots, \Phi_l^0)^T \in R^l$  – решение (2.13).

3. Строится решение задачи математического программирования (2.9), (2.10) в виде

$$\Phi^0(t) = \sum_{j=1}^l \Phi_j^0 \delta(t - t_j), \quad l \leq m \quad (2.17)$$

и определяется минимальное значение функционала (2.9)

$$I^* = \int_0^T |\Phi^0(t)| dt = \sum_{j=1}^l |\Phi_j^0|, \quad l \leq m \quad (2.18)$$

Отметим, что

$$I^* = \int_0^T |\Phi^0(t)| dt = Y^{0T} a = L^{-1} \quad (2.19)$$

Моменты времени  $t_1, \dots, t_l, l \leq m$  называются оптимальными моментами измерений.

В работе [7] сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности, единственности решения задачи построения обобщенного чебышевского полинома (2.14), которые позволяют находить обобщенный чебышевский полином, лишь установив существование полинома с нужными свойствами; а, следовательно, решение задачи (2.9), (2.10) – в аналитической форме.

Сформулируем и докажем утверждение, позволяющее определить условие, при котором оптимальные моменты измерений одни и те же, как в задаче (2.9), (2.10) при наличии немоделируемых ускорений ( $\gamma(t) \neq 0$ ), так и в задаче (2.9), (2.10), в которой они не учитываются ( $\gamma(t) = 0$ ).

Рассмотрим обобщенные полиномы

$$S(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^m z_j h_j'(t) \quad (2.20)$$

$$U(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^m u_j h_j'(t) \quad (2.21)$$

в которых  $z_j, u_j, j = 2, \dots, m$  – числа;  $h'(t) \in R^m, h(t) \in R^m$  – дифференцируемые на  $[0, T]$  вектор-функции:

$$h'(t) = \frac{h(t)}{\mathcal{G}(t)} \quad (2.22)$$

в предположении

$$\mathcal{G}(t) > 0, \quad t \in [0, T] \quad (2.23)$$

Справедливо следующее

**Утверждение 2.1.** Пусть  $u_j^0 \in R^1, j = 2, \dots, m$  таковы, что

$$U^0(t) = h_1(t) + \sum_{j=2}^m u_j^0 h_j(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.24)$$

—обобщенный чебышевский полином, достигающий наибольших по абсолютной величине значений в точках

$$t_1 = 0, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m = T \quad (2.25)$$

Тогда среди обобщенных полиномов вида  $S(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^m z_j h_j'(t)$  полином

$$S^0(t) = h_1'(t) + \sum_{j=2}^m z_j^0 h_j'(t) \quad (2.26)$$

удовлетворяющий условиям

$$S^0(t_1) = -S^0(t_2) = \dots = (-1)^{m-1} S^0(T) \\ \frac{dS^0(t)}{dt} = 0, t = t_i; \quad \frac{dS^0(t)}{dt} \neq 0, t \neq t_i, i = 1, \dots, m \quad (2.27)$$

является обобщенным чебышевским полиномом.

Доказательство. В соответствии с леммой о достаточных условиях оптимальности обобщенного полинома [7] из условия оптимальности  $U^0(t)$

имеем, что уравнение  $\sum_{j=2}^m \alpha_j h_j(t) = 0$  для любых  $\alpha_j, j = 2, \dots, m, \sum_{j=2}^m \alpha_j^2 \neq 0$

имеет не более  $(m-2)$  корней внутри отрезка  $[0, T]$ . А тогда, согласно

(2.22), (2.23) уравнение  $\sum_{j=2}^m \alpha_j' h_j'(t) = 0$  для любых  $\alpha_j', j = 2, \dots, m,$

$\sum_{j=2}^m (\alpha_j')^2 \neq 0$ , также имеет не более  $(m-2)$  корней внутри отрезка  $[0, T]$ .

Следовательно, при выполнении условий (2.26), (2.27) полином  $S^0(t)$  является обобщенным чебышевским полиномом. Утверждение доказано.

Утверждение позволяет найти решение задачи математического программирования (2.9), (2.10) при наличии немоделируемых ускорений ( $\gamma(t) \neq 0$ ) в аналитической форме, имея решение задачи (2.9), (2.10), в которой немоделируемые ускорения не учитываются ( $\gamma(t) = 0$ ). А также сформулированы критерии, при которых оптимальные моменты измерений обеих задач совпадают.

3. Задача коррекции инерциальной навигационной системы по информации о высоте при наличии немоделируемых ускорений. Пусть объект, на борту которого установлена инерциальная навигационная система, движется по траекториям, близким к ортодромии. Коррекция инерциальной навигационной системы с помощью дополнительной информации различной природы является основным источником повышения точности ее функционирования.

Особое положение в инерциальной навигации занимает информация о высоте. Она используется практически во всех инерциальных навигационных системах, применяемых в авиации и судовождении. В бортовой вычислитель навигационной системы она вводится либо априорно, либо поставляется высотомерами.

В зависимости от рода корректируемых инерциальных навигационных систем информация о высоте в совокупности с инерциальной информацией используется либо для однозначного определения местоположения объекта, либо только для формирования модельного силового поля, отличного по своей структуре от поля тяготения Земли. Примером модельных уравнений одной из таких систем, в которых информация о высоте используется только для формирования модельного поля тяготения, служат модельные уравнения трехкомпонентной навигационной системы. В результате динамические свойства системы улучшаются, а именно: динамические уравнения ошибок приобретают свойства неасимптотической устойчивости [8].

Рассмотрим задачу коррекции вертикального канала трехкомпонентной инерциальной навигационной системы с азимутально свободной ориентацией приборного трехгранника, установленной на борту летательного аппарата, движущегося по траекториям, близким к ортодромии.

Пусть помимо инерциальной информации в качестве дополнительной привлекается информация о высоте, поставляемая высотометром на фоне помехи измерений.

Уравнения динамических ошибок корректируемой по информации о высоте инерциальной навигационной системы, записанные в безразмерном времени и в безразмерных переменных в предположении, что характерные значения наблюдаемых переменных имеют один и тот же порядок, в интервалах времени коррекции  $[0, T]$  описываются соотношениями [8]

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = -y_1 + y_3 + u, \dot{y}_3 = 0 \quad (3.1)$$

$$z(t) = y_1(t) + \rho(t), t \in [0, T] \quad (3.2)$$

где  $\dot{(\ )} = \frac{d}{dt}$ ;  $t$  — безразмерное время;  $y_1$  — приведенная ошибка в определении высоты;  $y_2$  — ошибка в определении скорости в вертикальном направлении;  $y_3$  — постоянная приведенная погрешность вертикального ньютонометра;  $u(t)$  — немоделируемое ускорение;  $z(t)$  — непосредственно измеряемая величина;  $\rho(t)$  — ошибка измерений.

Будем считать, что  $T \leq \pi/2$ ; реальные интервалы коррекции удовлетворяют этому условию (в размерном времени  $\pi/2$  соответствует приблизительно 20 мин.).

Предполагается, что

$$|u(t)| \leq \gamma, \gamma \geq 0, t \in [0, T] \quad (3.3)$$

$$|\rho(t)| \leq \sigma, \sigma > 0, t \in [0, T] \quad (3.4)$$

где  $\gamma$  и  $\sigma$  — заданные постоянные.

Задача коррекции инерциальной навигационной системы при помощи дополнительной информации неинерциальной природы, в частности, по информации о высоте, состоит в построении значений фазовых переменных системы (3.1) в конечный момент времени коррекции  $t = T$  по измерениям (3.2).

Будем строить линейные несмещенные оценки фазовых переменных системы (3.1) в момент времени  $t = T$ :  $y_1(T)$ ,  $y_2(T)$ ,  $y_3(T)$ .

Проведем преобразование независимой переменной в соотношениях (3.1)-(3.4):  $t = T - \tau$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\tau \in [0, T]$ .

Тогда соотношения (3.1)-(3.4) переищутся в виде

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu'(\tau) \quad (3.5)$$

$$z(\tau) = H^T x(\tau) + \rho'(\tau), \quad \tau \in [0, T] \quad (3.6)$$

$$|u'(\tau)| \leq \gamma, \quad |\rho'(\tau)| \leq \sigma, \quad \tau \in [0, T] \quad (3.7)$$

где  $x_i(\tau) = y_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = (0, 1, 0)^T; \quad H = (1, 0, 0)^T \quad (3.8)$$

Представим измерения (3.6) в виде

$$z(\tau) = H^T(\tau)X(\tau)x_0 + \int_0^\tau H^T(\tau)X(\tau)X^{-1}(s)B(s)u'(s)ds + \rho'(\tau)$$

или

$$z(\tau) = h^T(\tau)(x_0 + g(\tau)) + \rho'(\tau) \quad (3.9)$$

где  $X(\tau)$  – матрица фундаментальной системы решений системы (3.5):

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau & 1 - \cos \tau \\ \sin \tau & \cos \tau & -\sin \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$h(\tau) = X^T(\tau)H(\tau) = (\cos(\tau), -\sin(\tau), 1 - \cos(\tau))^T \quad (3.11)$$

$$b(\tau) = X^{-1}(\tau)B(\tau) = (\sin(\tau), \cos(\tau), 0)^T \quad (3.12)$$

$$g(\tau) = \int_0^\tau b(s)u'(s)ds = \int_0^\tau (\sin(\tau), \cos(\tau), 0)^T u(s)ds \quad (3.13)$$

Подставляя (3.11), (3.12) в соотношения (1.22), (1.23) и учитывая, что  $\gamma$  – постоянная величина (3.3), получаем

$$\bar{u}(s) = \gamma \frac{\sin(s - \tau)}{|\sin(s - \tau)|} \quad (3.14)$$

$$C_{\max}(\tau) = \gamma \int_0^\tau |\sin(s - \tau)| ds, \quad \tau \in [0, T], \quad s \in [0, T], \quad s \leq \tau, \quad T \leq \pi/2$$

или

$$C_{\max}(\tau) = \gamma(1 - \cos \tau), \quad \tau \in [0, T], \quad T \leq \pi/2 \quad (3.15)$$

Итак, требуется построить несмещенную оценку компонент вектора  $x_0 = x(0)$ , или параметров

$$l_i = a_i^T x_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

$$a_1 = (1, 0, 0)^T; \quad a_2 = (0, 1, 0)^T, \quad a_3 = (0, 0, 1)^T \quad (3.17)$$

по измерениям (3.9) на классе линейных оценок вида (1.6).

В соответствии с (2.2), (2.3), (3.11), (3.16), (3.17) задача математического программирования (2.9), (2.10), соответствующая оцениванию параметров  $l_1 = x_1(0)$ ,  $l_2 = x_2(0)$ ,  $l_3 = x_3(0)$ , соответственно, эквивалентна задаче (2.9), (2.10) с парами:  $a_1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $h_1(\tau) = h'(\tau)$ ;  $a_2 = (0, 1, 0)^T$ ,  $h_2(\tau) = h'(\tau)$ ;  $a_3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $h_3(\tau) = h'(\tau)$ , где

$$h'(\tau) = \mathcal{G}^{-1}(\tau)(\cos(\tau), -\sin(\tau), 1 - \cos(\tau))^T \quad (3.18)$$

а

$$\mathcal{G}(\tau) = \sigma(1 + \alpha(1 - \cos(\tau))), \quad \alpha = \frac{\gamma}{\sigma} \quad (3.19)$$

в соответствии с (2.4), (2.5), (3.4), (3.5), (3.15). Ясно, что  $\mathcal{G}(\tau) > 0$ ,  $\tau \in [0, T]$ .

Согласно замечанию 2.3 указанные задачи можно сводить к задаче (2.9), (2.10) с  $a = (1, 0, 0)^T$  и с

$$\begin{aligned} h_1(\tau) &= \mathcal{G}^{-1}(\tau)(\cos(\tau), -\sin(\tau), 1 - \cos(\tau))^T \\ h_2(\tau) &= \mathcal{G}^{-1}(\tau)(-\sin(\tau), \cos(\tau), 1 - \cos(\tau))^T \\ h_3(\tau) &= \mathcal{G}^{-1}(\tau)(1 - \cos(\tau), -\sin(\tau), \cos(\tau))^T \end{aligned} \quad (3.20)$$

соответственно. Тогда, согласно п.2, задача оценивания параметров  $l_1 = x_1(0)$ ,  $l_2 = x_2(0)$ ,  $l_3 = x_3(0)$  сводится к задаче построения соответствующих обобщенных чебышевских полиномов, а именно:

$$L_1 = \min_{z_{1,1}} \max_{\tau \in [0, T]} |S_1(\tau, \alpha)| \quad (3.21)$$

$$S_1(\tau, \alpha) = \sigma^{-1}(1 + \alpha(1 - \cos \tau))^{-1}(\cos \tau - z_{1,2} \sin \tau + z_{1,3}(1 - \cos \tau)) \quad (3.22)$$

$$L_2 = \min_{z_{2,1}} \max_{\tau \in [0, T]} |S_2(\tau, \alpha)| \quad (3.23)$$

$$S_2(\tau, \alpha) = \sigma^{-1}(1 + \alpha(1 - \cos \tau))^{-1}(-\sin \tau + z_{2,2} \cos \tau + z_{2,3}(1 - \cos \tau)) \quad (3.24)$$

$$L_3 = \min_{z_{3,1}} \max_{\tau \in [0, T]} |S_3(\tau, \alpha)| \quad (3.25)$$

$$S_3(\tau, \alpha) = \sigma^{-1}(1 + \alpha(1 - \cos \tau))^{-1}(1 - \cos \tau - z_{3,2} \sin \tau + z_{3,3}(1 - \cos \tau)) \quad (3.26)$$

Отсюда очевидно, следует, что при отсутствии немоделируемых ускорений, т.е. при  $\gamma = 0$ , или согласно (3.19) при  $\alpha = 0$

$$S_i(\tau, 0) = U_i(\tau), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.27)$$

где  $U_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – соответствующие обобщенные полиномы в задаче оценивания параметров  $l_1 = x_1(0)$ ,  $l_2 = x_2(0)$ ,  $l_3 = x_3(0)$  при отсутствии немоделируемых ускорений.

Сначала исследуем полином

$$U_2(\tau) = \sigma^{-1}(-\sin \tau + u_{2,2} \cos \tau + u_{2,3}(1 - \cos \tau)) \quad (3.28)$$

соответствующий оцениванию  $l_2 = x_2(0)$  при  $\gamma = 0$ .

С помощью геометрических построений и несложных аналитических исследований легко показать, что среди обобщенных полиномов вида (3.28) обобщенный чебышевский полином определяется выражением

$$U_2^0(\tau) = \sigma^{-1}(-\sin \tau + u_{2,2}^0 \cos \tau + u_{2,3}^0(1 - \cos \tau)) \quad (3.29)$$

$$u_{2,2}^0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{T}{4}; \quad u_{2,3}^0 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{T}{4}$$

максимальное по абсолютной величине значение

$$L_2^0 = \sigma^{-1} |u_{2,3}^0| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{T}{4} \sigma^{-1}, \quad T \leq \pi/2 \quad (3.30)$$

достигает в точках

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{T}{2}, \quad \tau_3 = T \quad (3.31)$$

оптимальных моментов измерений.

Легко показать, что согласно утверждению 2.1, в силу условия  $\vartheta(\tau) > 0$ ,  $\tau \in [0, T]$ , обобщенный чебышевский полином, соответствующий оцениванию  $l_2 = x_2(0)$  при  $\gamma \neq 0$ , достигает максимального по абсолютной величине значения в тех же самых точках (3.31), что и полином (3.29), и определяется выражением

$$S_2^0(\tau, \alpha) = \sigma^{-1}(1 + \alpha(1 - \cos \tau))^{-1}(-\sin \tau + z_{2,2}^0 \cos \tau + z_{2,3}^0(1 - \cos \tau)) \quad (3.32)$$

$$z_{2,2}^0 = \frac{(2 \sin(T/2) - \sin T) + \alpha(\sin(T/2)(1 - \cos T) - 3 \sin T(1 - \cos(T/2)))}{2(1 + \alpha)(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))(1 - \cos T)}$$

$$z_{2,3}^0 = \frac{(2 \sin(T/2) + \sin T) + \alpha(\sin(T/2)(1 - \cos T) + \sin T(1 - \cos(T/2)))}{2(1 + \alpha)(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))(1 - \cos T)}$$

максимальное по абсолютной величине значение равно

$$L_2^0 = \frac{2 \sin(T/2) - \sin T}{2(1 - \cos T)(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))} \sigma^{-1} \quad (3.33)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полиномы (3.29) и (3.32) удовлетворяют условиям основной леммы об оптимальности обобщенных полиномов [7].

Так как уравнения вида  $\alpha_1 \sin \tau + \alpha_2(1 - \cos \tau) = 0$  и  $\alpha_1 \sin \tau + \alpha_2 \cos \tau = 0$  при любых  $\alpha_1, \alpha_2$ , таких, что  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$  имеют внутри отрезка  $[0, T]$  только один корень, то согласно следствию к основной лемме [7] оптимальные моменты измерений при оценивании всех параметров (3.16) определяются равенствами (3.31) как при наличии немоделируемых ускорений, так и при их отсутствии.

Весовые коэффициенты соответствующих алгоритмов оценивания подсчитываются из условия несмещенности (2.10) или определяются из соотношения (2.13):

$$N \Phi_i^* = a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

или

$$\Phi_i^* = N^{-1} a_i \quad (3.34)$$

где  $a_i$  определяются выражениями (3.17).

Подсчитаем матрицу  $N \in R^{3 \times 3}$ . Подставляя (3.18), (3.31) в (2.13), получаем

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos(T/2)}{1 + \alpha(1 - \cos(T/2))} & \frac{\cos T}{1 + \alpha(1 - \cos T)} \\ 0 & \frac{-\sin(T/2)}{1 + \alpha(1 - \cos(T/2))} & \frac{-\sin T}{1 + \alpha(1 - \cos T)} \\ 0 & \frac{1 - \cos(T/2)}{1 + \alpha(1 - \cos(T/2))} & \frac{1 - \cos T}{1 + \alpha(1 - \cos T)} \end{pmatrix} \cdot \sigma \quad (3.35)$$

откуда, очевидно, следует, что

$$\det N = \frac{\sin T - 2 \sin(T/2)}{(1 + \alpha(1 - \cos T))(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))} \sigma \neq 0 \quad \text{для всех } T \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

Следовательно, задача оценивания параметров (3.16) системы имеет единственное решение. Обращая матрицу (3.35) и подставляя в (3.34), получаем весовые коэффициенты минимаксных алгоритмов оценивания параметров системы (3.1)  $y_i(T) = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}^* &= \Phi_{1,2}^* = 0; & \Phi_{1,3}^* &= \sigma \\ \Phi_{2,1}^* &= \frac{-(1 - \cos(T/2))(1 + \alpha(1 - \cos T))}{\sin T - 2 \sin(T/2)} \sigma \\ \Phi_{2,2}^* &= \frac{(1 - \cos T)(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))}{\sin T - 2 \sin(T/2)} \sigma \\ \Phi_{2,3}^* &= \frac{(\cos T - \cos(T/2))}{\sin T - 2 \sin(T/2)} \sigma \\ \Phi_{3,1}^* &= \frac{-\sin(T/2)(1 + \alpha(1 - \cos T))}{\sin T - 2 \sin(T/2)} \sigma; & \Phi_{3,2}^* &= \frac{\sin T(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))}{\sin T - 2 \sin(T/2)} \sigma \\ \Phi_{3,3}^* &= \frac{-\sin(T/2)}{\sin T - 2 \sin(T/2)} \sigma. \end{aligned}$$

Оптимальные гарантированные (минимаксные) среднеквадратические значения ошибок оценок параметров  $y_1(T)$ ,  $y_2(T)$ ,  $y_3(T)$  в соответствии с (2.17) равны, соответственно, величинам

$$\begin{aligned} J_1^* &= \sigma(1 + \alpha(1 - \cos \tau)) \\ J_2^* &= \frac{2(1 - \cos T)(1 + \alpha(1 - \cos(T/2)))}{2 \sin(T/2) - \sin T} \sigma \\ J_3^* &= \sigma \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$J_3^* = \frac{2\sin(T/2) + \sin T + \alpha(\sin T(1 - \cos(T/2)) + \sin(T/2)(1 - \cos T))}{2\sin(T/2) - \sin T}$$

Оптимальные гарантированные оценки параметров  $y_1(T)$ ,  $y_2(T)$ ,  $y_3(T)$ , определяемые задачей (2.9), (2.10) при наличии немоделируемых ускорений и обозначаемые дополнительной звездочкой, имеют вид

$$y_i^*(T) = \Phi_{i3}^* z(T)$$

$$y_2^*(T) = \Phi_{2,1}^* z(0) + \Phi_{2,2}^* z(T/2) + \Phi_{2,3}^* z(T) \quad (3.37)$$

$$y_3^*(T) = \Phi_{3,1}^* z(0) + \Phi_{3,2}^* z(T/2) + \Phi_{3,3}^* z(T)$$

Оценки (3.37), очевидно, могут быть легко реализуемы. Подставляя значение  $\alpha = 0$  в соотношения (3.36), (3.37), получаем оценки и точности оценивания параметров  $y_1(T)$ ,  $y_2(T)$ ,  $y_3(T)$ , определяемые задачей (2.9), (2.10) при отсутствии немоделируемых ускорений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский В. А., Белоусов Л.Ю. Минимаксная оценка точности определения орбиты космического аппарата при учете немоделируемых ускорений. // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 3. С. 342.
2. Белоусов Л. Ю., Кузьмин Е. А. Применение теории двойственности к задачам оценки точности параметров орбит космических аппаратов. // Космич. Исслед. 1985. Т. 23. № 6. . С. 849.
3. Лидов М. Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения. // Космич. исслед. 1986. Т.24. № 2. С.247.
4. Лидов М.Л., Бакума Л.М. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями. // Космич. исслед. 1991. Т.29. № 1. С.115.
5. Белоусов Л. Ю., Крупень В. Я. О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности. // Космич. исслед. 1974. Т. 12. № 2. С. 191-196.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.
7. Матасов А.И., Мартirosян С.Р. Минимаксные алгоритмы позиционной коррекции инерциальных навигационных систем. //Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С.4-14.
8. Парусников Н.А. Использование информации о высоте в задаче инерциальной навигации. // Научные труды Ин-та механики МГУ. 1975. №40.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
11.10.2004