ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2005

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

ВЛАДИМИР САРКИСОВИЧ САРКИСЯН
(К 70-летию со дня рождения)

25-ого июня 2005г. исполнилось 70 лет академику НАН РА, заслуженному деятелю науки РА, доктору физико-математических наук, профессору, декану факультета механики Ереванского Государственного Университета Владимиру Саркисовичу Саркисяну.

Владимир Саркисович Саркисян родился 25-ого июня 1935 года в городе Джульфе Нахичевана, в семье железнодорожника, которая в 1938 году переехала в Ереван. В 1957 году он успешно окончил отделение механики физико-математического факультета Ереванского государственного университета и был назначен ассистентом кафедры механики. В 1959 году он поступил в аспирантуру ЕГУ и в 1962 году в Москве защитил кандидатскую, а в 1972 году в Казани – докторскую диссертацию. В 1961-1978 гг. В.С.Саркисян работал старшим преподавателем, доцентом, профессором. С 1978г. В.С.Саркисян – заведующий кафедрой механики сплошной среды ЕГУ. В 1986 году был избран членом-корреспондентом НАН РА, а в 1996 году – академиком НАН РА.

Профессор В.С.Саркисян – известный специалист в области механики сплошной среды. Широка область его научных исследований. Научные исследования В.С.Саркисяна относятся к ряду современных проблем механики анизотропных и неоднородных тел – прочности конструкций из композиционных материалов, оптимальному проектированию формы и материала конструкций (стержни, пластинки, оболочки), оптимальному контролю колебаний, устойчивости неоднородных анизотропных пластин и оболочек, теорий колебаний, изгиба, термоупругости и удара, динамическим проблемам анизотропных неоднородных сред, контактным задачам упругих тел с упругими накладками, граничным задачам теории упругости с различными криволинейными анизотропиями, когда края области не совпадают с осями анизотропии, задачам теории ползучести и пластичности и другим вопросам. Для решения многих задач теории упругости анизотропных, неоднородных тел существенную роль имеют предложенные, развитые и обобщенные им методы физических и геометрических малых параметров, приближенный эффективный метод, построенный на основе интегро-дифференциальных уравнений и применениях функционального анализа, новая модификация метода разделения переменных, полученная для решения нестационарных задач математической физики и другие методы. Профессор В.С.Саркисян создал научную школу теории упругости неоднородных анизотропных тел. Под его непосредственным руководством защищено свыше 50 кандидатских и докторских диссертаций ученые из нашей страны и зарубежья.

Основные результаты В.С.Саркисяна в области механики неоднородных, анизотропных тел опубликованы в 7 монографиях, свыше 300 научных статьях и 12 учебных пособиях.

Основные научно-исследовательские результаты академика В.С.Саркисяна многократно докладывались и были представлены на конгрессах, конференциях, семинарах и симпозиумах, как в бывших странах СССР, так и в Германии, Болгарии, Румынии, Китае, Чехии, Словакии, Венгрии, Польше, Сирии, Египте, Франции, Бельгии, США, Австралии, Англии и т.д.

Профессор В.С.Саркисян – опытный организатор науки и высшего образования. Он долгие годы руководил кафедрой механики сплошной среды, с 1957 года читает лекции в Ереванском государственном университете, читал лекции в университетах Братиславы, Праги, Будапешта, Варшавы, Берлина, Ростока и т.д.

В.С.Саркисян многократно был одним из организаторов как Всесоюзных, так и Международных конференций по механике деформируемого твердого тела и прикладной математики, был председателем, сопредседателем, членом Организационных Комитетов этих конференций.

В 1981 году ему было присуждено звание заслуженного деятеля науки, в 1999 году он награжден медалью имени Анания Ширакаци, золотой медалью имени Яна Каменского Братиславского университета и медалью университета Мансури Египта. Около 30 лет В.С.Саркисян руководил Специализированным Советом по присуждению степени кандидата физико-математических наук по специальности "Механика деформируемого твердого тела" при ЕГУ. Он является редактором межвузовского журнала «Механика», членом редколлегии журналов «Научные труды ЕГУ», «Механика» НАН РА.

Велико его участие в научной жизни бывшего СССР. Профессор В.С.Саркисян был членом Научно-государственного Совета СССР «Конструкционная прочность и разрушение» по науке и технике, членом Президиума научно-методической комиссии по теоретической механике

Министерства Высшего образования СССР, председателем Закавказского региона той же комиссии.

В 1988-1990 гг. профессор В.С.Саркисян был первым деканом - основоположником факультета механики, 1990-1992 гг. — проректором ЕГУ по научным вопросам, 1993-1994 гг. — и.о. академика-секретаря отделения информатики и технических наук и членом Президиума НАН РА, а в 1994 году — заместителем председателя Проблемного Совета математики и механики НАН РА, с 1996 года — декан факультета механики ЕГУ.

Научная деятельность В.С.Саркисяна получила международное признание. Он избран почетным членом товарищества механиков Академии Наук Словакии, членом Национального Комитета теоретической и прикладной механики АН России, членом Международного товарищества сотрудничества математики и механики, членом Инженерной Академии РА, председателем Национального Комитета теоретической и прикладной механики Армении и т.д.

Профессор В.С.Саркисян пользуется большим уважением среди своих коллег.

(Из статьи академиков НАН РА Ф.Т.Саркисяна, С.А.Амбарцумяна, Ю.Г.Шукуряна, профессора М.В.Белубекяна, опубликованной в газете"Голос Армении" за №68 от 28 июня 2005г.)

Редколлегия журнала Известия НАН Армении «Механика» поздравляет академика В.С.Саркисяна с юбилеем, желает успехов и плодотворной научной деятельности во благо развития науки Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

САМВЕЛ ОГАНЕСОВИЧ САРКИСЯН
(К 60-летию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой "Математического анализа и дифференциальных уравнений" Гюмрийского педагогического института им.М.Налбандяна С.О.Саркисян родился 5 декабря 1944 г. в г.Ленинакане (ныне Гюмри). В 1967 г. с отличием окончил Ленинаканский филиал Ереванского политехнического института, 1970-1973 гг. — аспирант Ереванского государственного университета и в 1974 г. защитил кандидатскую, а в 1987 г. — докторскую диссертацию. С 1989 г. — профессор. В 1967-1994 гг. работал ассистентом, доцентом, профессором Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении. 1994-1998гг. — ректор Гюмрийского государственного педагогического института им.Налбандяна, а с 1995 г. — зав.кафедрой "Математического анализа и дифференциальных уравнений".

Научные исследования охватывают вопросы решения контактных задач теории пластин и оболочек, построения двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек и пластин, построения асимптотической теории микрополярных тонких стержней, пластин и оболочек. Автор монографии "Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек" (Изд. НАН РА. 1992г. 260с.) и многочисленных научных статей. Под его руководством защищены несколько кандидатских диссертаций.

Саркисян С.О. — член Специализированного Совета по защитам докторских диссертаций по специальности "Механика деформируемого твердого тела", член Национального Комитета по теоретической и прикладной механике Армении.

Редакция журнала "Известия НАН Армении. Механика" сердечно поздравляет Саркисяна С. О. с 60-летним юбилеем и желает ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

БЕЛУБЕКЯН МЕЛС ВАГАРШАКОВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)

Дорогой Мелс Вагаршакович!

Редакция журнала Известия НАН Армении "Механика" сердечно поздравляет Вас со славным юбилеем – 70-летием со дня рождения и 45-летием научно-педагогической деятельности.

Профессор М.В.Белубекян родился 8 мая 1935г. в г.Ереване. В 1958 г. окончил физико-математический факультет Ереванского государственного университета, а в 1964 г. – аспирантуру Ленинградского политехнического института.

В лице Вас приветствуем умелого педагога, талантливого ученого, преданного патриота и гражданина своей страны. Многие годы являетесь членом редколлегии нашего журнала и своим принципиальным отношением и своей заботливостью по отношению к коллегам, в особенности, молодым, Вы снискали уважение авторов нашего журнала. Действующий в Институте механики НАН РА научный семинар «Волновые процессы», руководителем которого являетесь Вы получил широкое признание и играет огромную роль в подготовке молодых научных кадров. За долгие годы работы в Институте механики НАН РА. Вы объединили вокруг себя большую группу молодых ученых. Под Вашим непосредственным руководством защищено около двадцати кандидатских и докторских диссертаций. Подготовленные Вами высококвалифицированные ученые-механики преподают и работают в научных учреждениях и ВУЗах Армении. Вы внесли огромный вклад в развитие механики. Ваши научные исследования посвящены современным проблемам механики сплошной среды и получили широкое признание в научных кругах. Вы являетесь одним из основателей теории магнитоупругости тонкостенных тел, предложили и развили теорию токонесущих пластин и оболочек, разработали и создали эффективные методы в области распространения волн в электропроводящих и пьезоэлектрических средах. Ваши работы и полученные результаты способствовали признанию армянской школы механики.

Ваши более сотни научных статей и монографии послужили основой для успешного развития новых направлений механики в Армении.

Вы являетесь членом Национальных Комитетов по теоретической и прикладной механике Армении и России.

Дорогой Мелс Вагаршакович, в этот торжественный день желаем Вам крепкого здоровья, долгих лет жизни и новых творческих достижений.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В СИСТЕМЕ ТОНКИЙ СЛОЙ – ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Белубекян М.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան
Ռելեյի տիպի ալիքները շերտ–կիսատարածություն համակարգում

Ուսումնասիրված են տեղայնացված առաձգական ալիքների տարածումը, երբ շերտի և կիսատարածության միջև տրված են տարբեր տիպի եզրային պայմաններ: Ստացված են պարզեցված դիսպերսիոն հավասարումները: Որոշված են տեղայնացված ալիքների գոյության պայմանները:

M.V. Belubekyan

Rayleigh Type Waves in the Layer–Half-space System

It is supposed that elastic layer is thin. The correctnes of the assumptions of Kirchhoff' plate theorey for the layer is accepted. Two cases of boundary conditions (full contact and smooth contact) are considered.

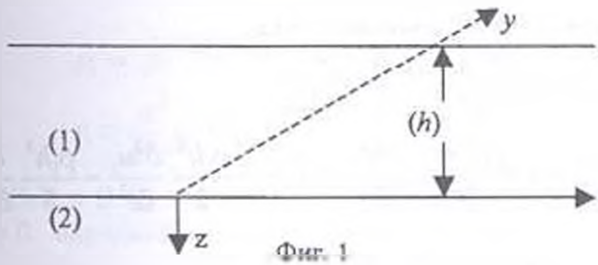
The dispersion equations are derived. The conditiones of surface waves existens are determined

Распространение поверхностных волн типа Рэлея в системе слой – полупространство было исследовано многими авторами.

Обзор ранних работ в этой области приводится в [1]. Из последних работ следует отметить [2,3], в которых рассмотрена задача о вынужденных колебаниях полосы, соединенной с полуплоскостью, где для обеих областей предполагается разная анизотропия.

В настоящей работе слой принимается тонким и для него считается применимым допущения теории пластин Кирхгофа. Получены дисперсионные уравнения задачи при различных контактных условиях между слоем и полупространством.

1. Рассматривается задача плоской деформации для полупространства, контактирующего с тонким слоем (фиг.1)



Фиг. 1

Принимается

$$u_1^{(i)} = u^{(i)}(x,z,t),\ u_3^{(i)} = w^{(i)}(x,z,t),\ u_2^{(i)} = 0 \quad (i = 1,2) \tag{1.1}$$

Уравнения движения полупространства $z > 0$ в перемещениях имеют вид [4]

$$c_t^2 \Delta u^{(2)} + \left(c_e^2 - c_t^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}$$

$$c_t^2\,\Delta w^{(2)}+\left(c_e^2-c_t^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial w^{(2)}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

Как обычно, система уравнений (1.2) при помощи преобразования

$$u^{(2)}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\; w^{(2)}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.3}$$

приводится к уравнениям

$$c_e^2\,\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\; c_t^2\Delta\,\psi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

При этом для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{(2)}&=\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\\ \sigma_{31}^{(2)}&=\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

где λ,μ — коэффициенты Ляме для материала полупространства $z>0$.

Для покрывающего полупространство тонкого слоя $(-h<z<0)$ принимаются допущения теории пластин Кирхгофа (с учетом независимости от координаты y)

$$u_1^{(1)}=u_1-z\frac{\partial w_1}{\partial x},\quad u_3^{(1)}=w_1,\quad u_1,w_1\sim(x,t) \tag{1.6}$$

$$\sigma_{11}^{(1)}=\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) \tag{1.7}$$

С учетом условий на свободной границе слоя $z=-h$

$$\sigma_{33}^{(1)}=0,\quad \sigma_{31}^{(1)}=0 \tag{1.8}$$

уравнения колебания слоя принимают вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T_1}{\partial x}+\sigma_{31}^{1}(0)=\rho_1 h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\frac{\rho_1 h^2}{2}\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2\partial x}\\ &\frac{\partial N_1}{\partial x}+\sigma_{33}^{(1)}(0)=\rho_1 h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2},\;\frac{\partial M_1}{\partial x}-N_1=-\frac{\rho_1 h^2}{2}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\rho_1 h^3}{3}\,\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial t^2}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь

$$\int_{-h}^{0}\sigma_{11}^{(1)}dz\equiv T_1=C\frac{\partial u_1}{\partial x}+K\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2},\quad \int_{-h}^{0}z\,\sigma_{11}^{(1)}\,dz\equiv M_1=-K\frac{\partial u_1}{\partial x}-D\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

$$\int_{-h}^{0}\sigma_{13}^{(1)}dz\equiv N_1,C=\frac{E_1 h}{1-\nu_1^2},K=\frac{E_1 h^2}{2(1-\nu_1^2)},\;D=\frac{E_1 h^3}{3(1-\nu_1^2)} \tag{1.11}$$

После пренебрежения в уравнениях (1.9) членами

$$\frac{\rho_1 h^2}{2}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\;\frac{\rho_1 h^2}{2}\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2},\;\frac{\rho_1 h^3}{3}\,\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial t^2}$$

что соответствует точности теории пластин Кирхгофа и подстановки (1.10), получаются следующие уравнения колебания слоя в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial u_1}{\partial x}+K\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+\sigma_{31}^{(1)}(0)=\rho_1 h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\sigma_{33}^{(1)}(0)=\rho_1 h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u_1}{\partial x}+D\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+N_1=0$$

2. Пусть слой и полупространство жестко скреплены. Тогда на контактной границе $z=0$ должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений

$$u_1^{(1)}=u^{(2)},\ w_1^{(1)}=w^{(2)},\ \sigma_{33}^{(1)}=\sigma_{33}^{(2)},\ \sigma_{31}^{(1)}=\sigma_{31}^{(2)} \tag{2.1}$$

С учетом (2.1) система уравнений (1.12) приводится к граничным условиям для уравнений (1.2) или (1.4) при $z=0$

$$C\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}+K\frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x^3}+\sigma_{31}^{(2)}=\rho_1 h\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}$$

$$D\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial x^4}+K\frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3}+\rho_1 h\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2}=\sigma_{33}^{(2)} \tag{2.2}$$

В [5] для слоя принимаются известные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба пластины (уравнения планарных и изгибных колебаний) без членов взаимодействия, т.е. без членов уравнения (2.2) с множителем K.

Общие решения уравнений (1.4), удовлетворяющие условиям затухания

$$\lim_{z\to\infty}\varphi=0,\ \lim_{z\to\infty}\psi=0 \tag{2.3}$$

имеют вид

$$\varphi=Ae^{-kp_1 z}\exp i(\omega t-kx),\ \psi=Be^{-kp_2 z}\exp i(\omega t-kx) \tag{2.4}$$

где

$$p_1=\sqrt{1-\theta\eta},\ p_2=\sqrt{1-\eta},\ 0<\eta<1$$

$$\eta=\frac{\omega^2}{k^2c_t^2},\ \theta=\frac{c_t^2}{c_e^2} \tag{2.5}$$

С учетом (1.3) и (1.4), значения функций, входящих в систему уравнений (2.2) при $z=0$, определяются следующим образом:

$$u^{(2)}(0)=-k(iA+p_2B)\exp i(\omega t-kx)$$

$$w^{(2)}(0)=-k(p_1A-iB)\exp i(\omega t-kx)$$

$$\sigma_{33}^{(2)}(0)=\mu k^2\left[(2-\eta)A-2ip_2B\right]\exp i(\omega t-kx) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{31}^{(2)}(0)=\mu k^2\left[(2ip_1A+(2-\eta)B\right]\exp i(\omega t-kx)$$

Подстановка (2.6) в граничные условия (2.2) приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A и B.

$$\left(2-\eta-\beta p_1\eta kh-\alpha k^2h^2+\frac{2}{3}\alpha k^3h^3p_1\right)A_1-$$
$$-i\left(2p_2-\beta\eta kh-\alpha p_2k^2h^2+\frac{2}{3}\alpha k^3h^3\right)B=0 \tag{2.7}$$
$$i\left[2p_1+(2\alpha+\beta\eta)kh+\alpha p_1k^2h^2\right]A+$$
$$+\left[2-\eta+(2\alpha+\beta\eta)p_2kh+\alpha k^2h^2\right]B=0$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha=\frac{\mu_1}{(1-\nu_1)\mu},\quad \beta=\frac{\rho_1}{\rho} \tag{2.8}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.7) дает уравнение, определяющее фазовую скорость поверхностной волны типа Рэлея. Здесь это уравнение приводится с точностью $k^2h^2<<1$

$$R(\eta)\equiv(2-\eta)^2-4p_1p_2-\left[(2\alpha+\beta\eta)p_2-\beta\eta p_1\right]\eta kh=0 \tag{2.9}$$

Для получения более точного уравнения необходимо применить теорию, учитывающую поперечные сдвиги и инерцию вращения [6].

Уравнение (2.9) имеет корень $\eta=0$, которому соответствует тривиальное решение, что нетрудно проверить. Исключая корень $\eta=0$, аналогично тому, как это сделано в [7], уравнение (2.9) приведем к виду

$$R_1(\eta)=\eta-4(1-\theta)p_2(p_1+p_2)^{-1}-\left[(2\alpha+\beta\eta)p_2-\beta\eta p_1\right]kh=0 \tag{2.10}$$

Уравнения (2.9) и (2.10) при $kh=0$ совпадают с вариантами классического уравнения Рэлея.

Из свойств функции $R_1(\eta)$

$$R_1(0)=-2(1-\theta)-2\alpha kh<0,\ R_1(1)=1+\beta\sqrt{1-\theta}kh>0$$
$$R_1^{\prime}(\eta)>0\ \text{ при } 0<\eta<1 \tag{2.11}$$

следует, что уравнение (2.10) имеет один и только один действительный корень. Поверхностная волна при наличии тонкого слоя, в отличие от волны Рэлея, является дисперсной.

3. Рассматривается система тонкий слой — полупространство в случае, когда на контактной границе $z=0$ имеют место условия скользящего контакта

$$\sigma_{31}^{(1)}=0,\ \sigma_{31}^{(2)}=0,\ w_1=w^{(2)},\ \sigma_{33}^{(1)}=\sigma_{33}^{(2)} \tag{3.1}$$

С учетом (3.1) система уравнений (1.12) приводится к следующим граничным условиям при $z=0$:

$$C\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+K\frac{\partial^3w^{(2)}}{\partial x^3}=\rho_1h\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2},\quad \sigma_{31}^{(2)}=0$$
$$D\frac{\partial^4w^{(2)}}{\partial x^4}+K\frac{\partial^3u_1}{\partial x^3}+\rho_1h\frac{\partial^2w^{(2)}}{\partial t^2}=\sigma_{33}^{(2)} \tag{3.2}$$

Используя выражения (2.6) и представление

$$u_1=F\exp i(\omega t-kx) \tag{3.3}$$

для произвольных постоянных A, B, F получим систему однородных алгебраических уравнений

$$
\begin{gathered}
i\alpha k^2 h p_1 A + \alpha k^2 h B - (2\alpha - \beta\eta) F = 0 \\
\left(2 - \eta - \beta\eta p_1 kh + \frac{2}{3}\alpha k^3 h^3 p_1\right) A - i\left(2 p_2 - \right. \\
\left. - \beta kh + \frac{2}{3}\alpha k^3 h^3\right) B - i\alpha kh^2 F = 0 \\
2ip_1 A + (2 - \eta) B = 0
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.4) дает искомое дисперсионное уравнение, которое с точностью $k^2h^2 << 1$ имеет вид

$$
R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4p_1 p_2 + \beta p_1 \eta^2 kh = 0 \tag{3.5}
$$

Уравнение (3.5) исключением корня тривиального решения $\eta = 0$ приводится к виду

$$
R_1(\eta) \equiv \eta - 4(1 - \theta) p_2 (p_1 + p_2)^{-1} + \beta p_1 \eta kh = 0 \tag{3.6}
$$

Уравнение (3.6) в промежутке $0 < \eta < 1$ имеет единственный действительный корень, что следует из следующих свойств функции $R_1(\eta)$:

$$
R_1(0) = -2(1 - \theta) < 0, \; R_1(1) = 1 + \beta\sqrt{1 - \theta}kh, \; R_1^{\prime}(\eta) > 0 \tag{3.7}
$$

4. Пусть, наконец, на границе $z = 0$ между слоем и полупространством заданы условия Навье (условия антискользящего контакта)

$$
\sigma_{33}^{(1)} = 0, \; \sigma_{33}^{(2)} = 0, \; u_1 = u^{(2)}, \; \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} \tag{4.1}
$$

В этом случае система уравнений (1.2) приводится к следующим граничным условиям:

$$
\begin{gathered}
C\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + K\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + \sigma_{31}^{(2)} = \rho_1 h \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}, \; \sigma_{33}^{(2)} = 0 \\
D\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + K\frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Подстановка в (4.2) выражений из (2.6) и представление

$$
w_1 = G \exp i(\omega t - kx) \tag{4.3}
$$

приведет к однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B, G

$$
\begin{gathered}
i\left[2p_1 + (2\alpha - \beta\eta)kh\right]A + \left[2 - \eta + (2\alpha - \beta\eta)p_2 kh\right]B + i\alpha kh^2 G = 0 \\
(2 - \eta)A - 2i\, p_2 B = 0 \\
\alpha kh A - i\alpha p_2 kh B - k^{-1}\left(\beta\eta - \frac{2}{3}\alpha k^2 h^2\right)G = 0
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Дисперсионное уравнение, согласно (4.4), с точностью $k^2h^2 << 1$ будет иметь вид

$$R(\eta) \equiv (2-\eta)^2 - 4p_1p_2 - (2\alpha - \beta\eta)\,p_2\eta kh = 0 \tag{4.5}$$

Другой вариант уравнения (4.5) получается исключением корня $\eta = 0$

$$R_1(\eta) = \eta - 4(1-\theta)^{\cdot} p_2(p_1+p_2)^{-1} - (2\alpha - \beta\eta)\,p_2 kh = 0 \tag{4.6}$$

Также и в предыдущих случаях показывается, что уравнение (4.6) имеет в промежутке $0 < \eta < 1$ один и только один действительный корень.

5. В рассмотренных вариантах граничных условий получены дисперсионные уравнения, в которых члены с множителями k^2h^2 и k^3h^3 пренебрежены в согласии с точностью теории Кирхгофа. Следовательно, и система уравнений (1.12) содержит члены, влиянием которых можно пренебречь.

Они имеют такой же порядок, что и моменты инерции вращения и поперечные сдвиги. Анализ систем уравнений (2.7), (3.4) и (4.4) показывает, какими членами можно пренебречь.

В случае граничных условий жесткого контакта между слоем и полупространством (4.1) система уравнений (1.12) должна быть заменена следующей системой для более простой модели:

$$c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sigma_{13}^{(1)}(0) = \rho_1 h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\ \sigma_{33}^{(1)}(0) = \rho_1 h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{5.1}$$

В случае статической задачи стрингера с растягивающей нагрузкой система (5.1) совпадает с моделью работы [8].

Таким же образом, когда на границе слоя и полупространства заданы условия скользящего контакта (3.1), уравнения (1.12) приводятся к упрощенному виду:

$$c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + K\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = \rho_1 h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\ \sigma_{33(0)}^{(1)} = \rho_1 h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{5.2}$$

Соответствующие уравнения для варианта граничных условий Навье имеют вид

$$c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sigma_{31}^{(1)}(0) = \rho_1 h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\quad K\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \rho_1 h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \tag{5.3}$$

Если при решении задач пунктов 2-4, вместо уравнений (1.12) взять за основу для каждого варианта свои упрощенные системы уравнений (5.1)-(5.3), то соответствующие дисперсионные уравнения будут либо (2.9), либо (3.5), либо (4.5).

Следует отметить, что уравнения (1.12) получаются в общем случае в рамках теории пластин Кирхгофа. Однако, для конкретных вариантов условий контакта оказывается возможным делать дополнительные упрощения.

6. Как видно из дисперсионных уравнений, фазовые скорости поверхностных волн, в отличие от классической волны Рэлея, зависят от относительной длины волны (kh).

Численные результаты показывают, что фазовые скорости также существенно зависят от упругих характеристик слоя α и β.

В табл. 1 в качестве примера приведены значения безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости (η) в зависимости от kh для случая скользящего контакта, т.е. для уравнения (3.5). Численные расчеты проведены при $\theta = 0,25$ $(\nu = 1/3)$ и $\beta = 2$

Таблица

kh	0	0,1	0,2	0,3
η	0,8696	0,8203	0,7687	0,7184

По результатам таблицы можно сделать вывод, что наличие тонкого покрытия приводит к значительному увеличению степени локализации волны в окрестности контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chattarjee S.N. Propogation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space.// Pure and Applied Geophysics. 1971. V. 86. №3. P 69-79.
2. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т. 2. С. 31-37.
3. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказкий регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С. 120-121.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
5. Tiersten H.F. Elastic Surface Waves Guided by Thin Films. // Journal of Applied Physics. 1969. Vol. 40. №2. P 770-789.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука. 1987. 360 с.
7. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела." Ереван: Изд. НАН Армении 1997. С. 79-96.
8. Муки Р., Стернберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Амер общ. инж-механиков. 1968. С. Е. Т.35. №4. С.124-135.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.12.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.С.

Է.Խ. Գրիգորյան, Կ.Ս. Սարգսյան
Կոնտակտային խնդիր երկու զուգահեռ, կիսաանվերջ ստրինգերներով ուժեղացված առաձգական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ համասեռ սալի խնդիրը, որը ուժեղացված է երկու զուգահեռ կիսաանվերջ առաձգական ստրինգերներով: Սալը դեֆորմացվում է ստրինգերների ծայրերին ազդող ուժերի ազդեցության տակ, որոնք ուղղված են ստրինգերներով: Ֆուրիեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը հանգեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի եզրային խնդրի լուծմանը: Ստացված են կոնտակտային տանգենցիալ լարումները և ստրինգերներում նորմալ լարումները: Այդ լարումների համար ստացված են ասիմպտոտական բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի ազդման կետերի շրջակայքում և նրանցից հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, K.S. Sargsyan
The Contact problem for Elastic Plate Strengthened by Two Parallel Half infinite Stringers

In this work a problem for infinite homogeneous plate strengthened by two parallel half-infinite elastic stringers is considered. The plate is deformed by the forces applied to the ends of stringers and directed along the stringers. By means of Fourie's transformation the problem is reduced to the solution of Reimann's problem of analytic functions theory. Contact tangential stresses and normal stresses are defined. For these stresses asymptotic formulas characterizing the behavior of these stresses around and far from the points of the strength application are obtained.

В работе рассматривается задача для бесконечной однородной пластины, усиленной двумя параллельными полубесконечными стрингерами. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к концам стрингеров и направленных вдоль стрингеров. С помощью преобразования Фурье задача сводится к решению задачи Римана теории аналитических функций. Определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, действующие в стрингерах. Для этих напряжений получены асимптотические формулы, характеризующие поведение этих напряжений вблизи и вдалеке от точек приложений сил.

1. Пусть бесконечная однородная пластина малой постоянной толщины H усилена двумя параллельными полубесконечными стрингерами, находящимися на расстоянии $2a$ и деформируется под действием сосредоточенных сил, приложенных к концам стрингеров и направленных вдоль стрингеров.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений и нормальных напряжений в стрингерах.

В силу вышесказанного дифференциальное уравнение равновесия стрингера при $y = a$ запишется в виде

$$\frac{d^2 u_1(x,a)}{dx^2} - \frac{P(x,a)}{E_1 F_1} = 0 \quad (-\infty < x < 0) \tag{1.1}$$

при условии

$$\left.\frac{du_s}{dx}\right|_{x=0}=\frac{R}{E_sF_s} \tag{1.2}$$

где F_s — площадь поперечного сечения стрингера, E_s — модуль упругости стрингера, $P(x,a)$ — контактные тангенциальные усилия, $u_s(x,a)$ — перемещения точек стрингера при $y=a$

Чтобы написать уравнение (1.1) с условием (1.2) одним уравнением для всех x $(-\infty<x<\infty)$, введем функцию

$$U_s^-(x)=\theta(-x)u_s(x,a) \tag{1.3}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Тогда, учитывая уравнение (1.1) и условие (1.2), для $U_s^-(x)$ будем иметь

$$\frac{d^2U_s^-(x)}{dx^2}=\frac{1}{E_sF_s}P^-(x)-\frac{R}{E_sF_s}\delta(x)-u_s(0,a)\delta'(x) \tag{1.4}$$

где $P^-(x)=\theta(-x)P(x,a)$, $\delta(x)$ — функция Дирака, $\delta'(x)$ — производная функции $\delta(x)$.

Применив к уравнению (1.4) интегральное преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций, получим

$$-\sigma^2\overline{U}_s^-(\sigma)=\frac{\overline{P}^-(\sigma)}{E_sF_s}-\frac{R}{E_sF_s}+i\sigma u_s(0,a) \tag{1.5}$$

где

$$\overline{\Phi}^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{i\sigma x}dx$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Далее отдельно рассмотрим четную задачу, когда силы, действующие на концах стрингеров, одинаковы по направлению и величине ($R=R_1$, $P(x,a)=P(x,-a)=P_1(x)$) и нечетную задачу, когда действующие на концах стрингеров силы имеют одинаковую величину, но противоположны по направлению ($R=R_2$, $P(x,a)=-P(x,-a)=P_2(x)$).

Рассмотрим четную задачу. В этом случае имеем [1]

$$\overline{U}_1(\sigma,a)=\overline{U}_1^-(\sigma,a)+\overline{U}_1^+(\sigma,a)= \tag{1.6}$$

$$=\left\{\left[\frac{(\lambda^*+3\mu)}{4\mu(\lambda^*+2\mu)H|\sigma|}-\frac{(\lambda^*+\mu)}{2\mu(\lambda^*+2\mu)H}a\right]e^{-2|\sigma|a}+\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)H|\sigma|}\right\}\overline{P}_1^-(\sigma)$$

где

$$U_1^+(x,a)=\theta(x)u_1(x,a)$$
$$U_1^-(x,a)=\theta(-x)u_1(x,a) \tag{1.7}$$

$\lambda^* = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}$, λ и μ — постоянные Ламе, $u_1(x,a)$ — перемещения точек пластины при $y = a$.

Имеет место условие контакта

$$\overline{U}_s^-(\sigma) = \overline{U}_1^-(\sigma, a), \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{1.8}$$

Сопоставлением формул (1.5), (1.6), (1.8), для определения $\overline{P}_1^-(\sigma)$, $\overline{U}_1^+(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{K}_1(\sigma)\overline{P}_1^-(\sigma) = \overline{G}_1^+(\sigma), \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{1.9}$$

где

$$\overline{G}_1^+(\sigma) = TR_1 + \sigma^2 TE_s F_s \overline{U}_1^+(\sigma, a) - i\sigma TE_s F_s u_s(0) \tag{1.10}$$

$$\overline{K}_1(\sigma) = T + 2|\sigma| e^{-|\sigma| a} \operatorname{ch}|\sigma| a - ka\sigma^2 e^{-2|\sigma| a}$$

$$T = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \frac{H}{E_s F_s}, \qquad k = \frac{2(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 3\mu} \tag{1.11}$$

Задача свелась к решению задачи Римана в теории аналитических функций [2]. Для решения функционального уравнения (1.9) факторизируем $\overline{K}_1(\sigma)$, представив ее в виде

$$\overline{K}_1(\sigma) = \overline{K}_1^+(\sigma)\overline{K}_1^-(\sigma) \tag{1.12}$$

где $\overline{K}_1^+(\sigma)$ регулярна, не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а $\overline{K}_1^-(\sigma)$ регулярна, не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha < 0$ $\quad (\alpha = \sigma + i\tau)$.

Функции $\overline{K}_1^\pm(\sigma)$ стремятся к единице при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Здесь

$$\overline{K}_1^+(\sigma) = (\sigma + i0)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\bar{f}^+(\sigma) + \overline{F}_1^+(\sigma)\right]$$

$$\overline{K}_1^-(\sigma) = (\sigma - i0)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\bar{f}^-(\sigma) + \overline{F}_1^-(\sigma)\right] \tag{1.13}$$

где

$$\bar{f}^+(\sigma) = \int_0^\infty f(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \bar{f}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i(\sigma-i0)x} dx \tag{1.14}$$

$$\overline{F}_1^+(\sigma) = \int_0^\infty F_1(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \overline{F}_1^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F_1(x) e^{i(\sigma-i0)x} dx$$

а функции $f(x)$ и $F_1(x)$ равны

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{T}{|\sigma|}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{|\sigma| - ka\sigma^2}{T + |\sigma|} e^{-2|\sigma| a}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma, \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.15}$$

Имея в виду (1.12), функциональное уравнение (1.9) можно записать в виде

$$\overline{L}_1^-(\sigma)=\overline{L}_1^+(\sigma) \tag{1.16}$$

где

$$\overline{L}_1^-(\sigma)=\overline{K}_1^-(\sigma)\overline{P}_1^-(\sigma)$$

$$\overline{L}_1^+(\sigma)=\frac{\overline{G}_1^+(\sigma)}{\overline{K}_1^+(\sigma)} \tag{1.17}$$

Дальнейший ход рассуждений проводится, как в работе [3]. Применив к (1.16) обратное преобразование Фурье, получим

$$L_1^+(x)=L_1^-(x) \tag{1.18}$$

В таком случае [4,5] будем иметь

$$L_1^+(x)=L_1^-(x)=\sum_{k=0}^{*}a_k\delta^{(k)}(x) \tag{1.19}$$

где $\delta^{(0)}=\delta(x)$; $\delta^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ – производные функции $\delta(x)$.

Далее, применив к (1.19) преобразование Фурье, будем иметь

$$\overline{L}_1^+(\sigma)=\overline{L}_1^-(\sigma)=\sum_{k=0}^{*}a_k(-i)^k\sigma^k \tag{1.20}$$

Имея в виду, что подынтегральное выражение при экспоненте имеет порядок $|\sigma|^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$, то функция $f_1(x)=O(\ln|x|)$ при $|x|\to 0$. Тогда

$$\bar{f}^+(\sigma)=O\left[(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)\right]$$

$$\bar{f}^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.21}$$

Так как подынтегральное выражение при $F_1(x)$ абсолютно интегрируема, то функция $F_1(x)$ – непрерывная функция, следовательно, она в точке $x=0$ принимает конечное значение. Следовательно,

$$\overline{F}_1^+(\sigma)=O\left[(\sigma+i0)^{-1}\right],\quad \overline{F}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{-1}\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.22}$$

Из вышесказанного следует, что

$$\overline{K}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}\right],\quad \overline{K}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.23}$$

Далее, как известно [6,7]

$$P_1^-(x)=O\left((-x)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{при } x\to-0 \tag{1.24}$$

то отсюда следует

$$\overline{P}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.25}$$

Так как $u_1(0,a)=u_1(0)$, то $\overline{U}_1^+(\sigma,a)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеет порядок $iu_1(0)(\sigma+i0)^{-1}$. Следовательно, $\overline{L}_1^-(\sigma)=O(1)$ при $|\sigma|\to\infty$. Тогда из (1.20) следует, что $a_k=0$ $(k=1,2,\ldots)$. Таким образом, для искомой величины $\overline{P}_1^-(\sigma)$ получим

$$\bar{P}_1^-(\sigma) = \frac{a_0}{(\sigma - i0)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\bar{f}^-(\sigma) - \bar{F}_1^-(\sigma)\right] \tag{1.26}$$

Таким образом, для искомых контактных напряжений получим:

$$P_1^-(x) = \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\bar{f}^-(\sigma) - \bar{F}_1^-(\sigma)\right]}{(\sigma - i0)^{1/2}} e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{1.27}$$

Постоянная a_0 в дальнейшем будем определять из условия

$$\int_{-\infty}^{0} P_1(s)ds = \bar{P}_1^-(0) = R_1 \tag{1.28}$$

В дальнейшем будет показано, что

$$a_0 = R_1 \sqrt{T} e^{-1-\frac{\pi}{4}} \tag{1.29}$$

Интересно отметить, что при $a \to 0$ для $P_1(x)$ получается решение задачи одного стрингера с двойной жесткостью, так как при $a \to 0$ получается

$$\bar{P}_1^-(\sigma) = R_1 \sqrt{\frac{T}{2}} e^{-1-\frac{\pi}{4}} \exp\left[-\bar{f}_0^-(\sigma)\right]$$

где

$$\bar{f}_0^-(\sigma) = \int_{-\infty}^{0} f_0(x) e^{i(\sigma - i0)x} dx, \quad f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{T}{2|\sigma|}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается.

2. Теперь приступим к определению асимптотических формул для $P_1^-(x)$ и $q_1(x)$ (нормальные напряжения в стрингерах) при $x \to -0$ и $x \to -\infty$. Сначала определим асимптотическую формулу при $x \to -\infty$.

Для этого заметим, что

$$\bar{f}^-(\sigma) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}\, s ds}{(T + |\sigma|)(s - (\sigma - i0))} - \frac{1}{2(\sigma - i0)} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \frac{T}{T^2 - (\sigma - i0)^2} \ln\frac{\sigma - i0}{T} + \frac{1}{2(T + (\sigma - i0))} - \frac{1}{2(\sigma - i0)} \tag{2.1}$$

Рассмотрим разложение $\bar{f}^-(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$.

$$\bar{f}^-(\sigma) = -\frac{1}{\pi i T}\left[\ln\frac{\sigma - i0}{T} + \frac{\sigma^2}{T^2}\ln\frac{\sigma - i0}{T} + \frac{\sigma^4}{T^4}\ln\frac{\sigma - i0}{T} + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{1}{2T}\left[1 - \frac{\sigma}{T} + \left(\frac{\sigma}{T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{T}\right)^3 + \cdots\right] - \frac{1}{2}(\sigma - i0)^{-1} \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2), для $\bar{f}^-(\sigma)$ получим

$$\bar{f}^-(\sigma) = -\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma - i0}{T} - \frac{i\pi}{4} + \tilde{f}^-(\sigma) \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{f}^-(\sigma)=\frac{\sigma}{\pi i T}\left(\ln\frac{\sigma-i0}{T}-1\right)+\frac{\sigma^3}{3\pi i T^3}\left(\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\frac{\sigma}{2T}-\frac{\sigma^2}{4T^2}+\frac{\sigma^3}{6T^3}+O\left(\sigma^4\right),\quad |\sigma|\to 0 \tag{2.4}$$

Здесь было использовано представление

$$\ln\frac{T}{|\sigma|}=\overline{M}^-(\sigma)+\overline{M}^+(\sigma)$$

где

$$\overline{M}^-(\sigma)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{i\pi}{4},\quad \overline{M}^+(\sigma)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma+i0}{T}+\frac{i\pi}{4} \tag{2.5}$$

Имея в виду (2.3), выражение для $\overline{F}_1^-(\sigma)$ можно записать в виде

$$\overline{F}_1^-(\sigma)=\frac{a_0e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{T}}\left[1-\left(\tilde{f}^-(\sigma)+\overline{F}_1^-(\sigma)\right)+\frac{1}{2}\left(\tilde{f}^-(\sigma)+\overline{F}_1^-(\sigma)\right)^2+\cdots\right] \tag{2.6}$$

После громоздких вычислений получено асимптотическое разложение $\overline{F}_1^-(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$

$$\overline{F}_1^-(\sigma)=\frac{\sigma}{\pi T i}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}+A_1\right]+O\left(\sigma^2\right),\quad |\sigma|\to 0 \tag{2.7}$$

где

$$A_1=\int_0^\infty\frac{se^{-2T^*s}-\ln\left(1+\frac{s-kT^*s^2}{1+s}e^{-2T^*s}\right)}{s^2}ds \tag{2.8}$$

$T^*=aT$; ψ – известная функция пси.

При получении разложения (2.7) были использованы формулы

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^{2n}e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=-\frac{1}{2\pi i}\left[2\sum_{m=1}^{n}\int_0^\infty s^{2(n-m)}\sigma^{2m-1}e^{-2as}ds-\sigma^{2n}i\pi+2a\sigma^{2n}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^\infty\ln[s-(\sigma-i0)]e^{-2as}ds-\int_0^\infty\ln[s+(\sigma-i0)]e^{-2as}ds\right)\right],\quad n=1,2,\ldots \tag{2.9}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=\frac{\sigma}{\pi i}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}\right]-$$

$$-\frac{a\sigma}{\pi i}\int_0^\infty\frac{\ln\left[s^2-(\sigma-i0)^2\right]}{s^2}e^{-2as}ds$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|^{2n-1}e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=-\frac{1}{2\pi i}\left[2\sum_{m=2}^{n}\int_0^\infty s^{2(n-m)+1}\sigma^{2m-3}e^{-2as}ds-\right.$$

$$-2\sigma^{2n-1}\ln(\sigma-i0)-\sigma^{2n-1}i\pi+2a\sigma^{2n-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}\ln[s-(\sigma-i0)]e^{-2as}ds+\int_0^{\infty}\ln[s+(\sigma-i0)]e^{-2as}ds\right)\Bigg], \qquad n=2,3,4,\ldots$$

Причем, при $n=1$ имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=\frac{\sigma}{\pi i}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}\right]-a\sigma^2+O\left[\sigma^3\ln(\sigma-i0)\right]$$

$$\text{при } |\sigma|\to 0 \qquad (2.10)$$

Подставляя выражения $\bar{f}^-(\sigma)$, $\bar{F}_1^-(\sigma)$ из (2.4) и (2.7) в (2.6), получим

$$\bar{P}_1^-(\sigma)=\frac{a_0e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{T}}\left[\bar{I}_1^-(\sigma)+\bar{I}_2^-(\sigma)\right]+O\left(\sigma^3\ln(\sigma-i0)\right), \quad |\sigma|\to 0 \qquad (2.11)$$

где

$$\bar{I}_1^-(\sigma)=1-\frac{\sigma}{\pi iT}\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma}{\pi iT}B-\frac{\sigma^2}{2\pi^2T^2}\ln^2(\sigma-i0)-$$

$$-\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}B\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma^2}{2\pi^2T^2}B^2 \qquad (2.12)$$

$$\bar{I}_2^-(\sigma)=-\frac{\sigma}{\pi iT}\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma}{\pi iT}\bar{A}_1-\frac{3}{2}\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}\ln^2(\sigma-i0)-$$

$$-\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}\left(2\bar{A}_1+B\right)\ln(\sigma-i0)-\left(\frac{\bar{A}_1^2}{2}+\bar{A}_1B\right)\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}$$

$$\bar{A}_1=\ln 2a-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}+A_1; \quad B=-\ln T-1+\frac{i\pi}{2}$$

Учитывая условия (1.28) и (2.11), постоянная a_0 определяется в виде (1.29).

Применив к (2.11) обратное преобразование Фурье, с учетом свойств интеграла Фурье, будем иметь

$$P_1^-(x)=R_1\left[I_1^-(x)+I_2^-(x)\right]+O\left(|x|^{-4}\right), \quad x\to-\infty \qquad (2.13)$$

где

$$I_1^-(x)=\frac{1}{\pi T}|x|^{-2}-\frac{1}{\pi^2T^2}|x|^{-3}\left[\Gamma'(3)-2-2\ln|x|T\right]$$

$$I_2^-(x)=\frac{1}{\pi T}|x|^{-2}-\frac{1}{\pi^2T^2}|x|^{-3}\left[3\Gamma'(3)-4\ln\frac{|x|}{2a}-2\ln|x|T-4\psi(1)+4A_1-2\right]$$

$$x\to-\infty \qquad (2.14)$$

При определении $I_1^-(x)$ и $I_2^-(x)$ были использованы формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma-i0)^{\lambda}e^{-i\sigma x}d\sigma=-\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}\lambda}\sin\pi\lambda}{\pi}\Gamma(\lambda+1)x^{-1-\lambda} \qquad (2.15)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\sigma - i0)^{\lambda} = (\sigma - i0)^{\lambda} \ln(\sigma - i0) \qquad (2.16)$$

где

$$x_{-} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x > 0 \\ |x| & \text{при} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Пользуясь формулой

$$q_1(x) = \frac{1}{F_s}\int_{-\infty}^{x} P_1(s)ds \qquad (2.17)$$

определим поведение нормальных напряжений в стрингерах при $x \to -\infty$, для которых получим

$$q_1(x) = \frac{R_1}{F_s}\left[\tilde{I}_1^-(x) + \tilde{I}_2^-(x)\right] + O\left(x^{-3}\ln|x|T\right) \qquad (2.18)$$

где

$$\tilde{I}_1^-(x) = -\frac{1}{\pi T}\frac{1}{x} - \frac{1}{\pi^2 T^2}\left[\psi(1) - \ln|x|T\right]\frac{1}{x^2} \qquad (2.19)$$

$$\tilde{I}_2^-(x) = -\frac{1}{\pi T}\frac{1}{x} - \frac{1}{\pi^2 T^2}\left[\psi(1) - 2\ln\frac{|x|}{2a} - 2\ln|x|T + 2A_1 + \frac{3}{2}\right]\frac{1}{x^2}$$

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_1(x)$ при $x \to -0$. Для этого, как известно из свойств интегрального преобразования Фурье, надо определить асимптотическую формулу $\overline{P}_1^-(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$. Для этого запишем $\overline{P}_1^-(\sigma)$ в виде

$$\overline{P}_1^-(\sigma) = \frac{R_1\sqrt{T}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(\sigma - i0)^{1/2}}\left[1 - \bar{f}^-(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{f}^{-2}(\sigma) - \overline{F}_1^-(\sigma) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\overline{F}_1^{-2}(\sigma) + \bar{f}^-(\sigma)\overline{F}_1^-(\sigma) + \ldots\right] \qquad (2.20)$$

Используя формулу (2.1), для $\bar{f}^-(\sigma)$ будем иметь

$$\bar{f}^-(\sigma) = \frac{T}{\pi i}(\sigma - i0)^{-1}\left[\ln(\sigma - i0) - \ln T + 1 + \frac{i\pi}{2}\right] - \frac{T^2}{4}(\sigma - i0)^{-2} +$$
$$+ O\left[(\sigma - i0)^{-3}\ln(\sigma - i0)\right], \qquad |\sigma| \to \infty \qquad (2.21)$$

Используя формулу (1.15), для $\overline{F}_1^-(\sigma)$ будем иметь

$$\overline{F}_1^-(\sigma) = \frac{D_1}{i}(\sigma - i0)^{-1} + O\left[(\sigma - i0)^{-1}\right] \qquad (2.22)$$

где

$$D_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[1 + \frac{\sigma - ka\sigma^2}{T+\sigma} e^{-2\sigma a}\right] d\sigma, \quad |\sigma| \to \infty \tag{2.23}$$

Подставляя выражения $\bar{f}^-(\sigma)$ и $\bar{F}_1^-(\sigma)$ из (2.21) и (2.22) в (2.20), получим

$$\bar{P}_1^-(\sigma) = R_1\sqrt{T}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[m_1^-(\sigma) + m_2^-(\sigma)\right] + O\left[(\sigma - i0)^{-\frac{7}{2}}\ln^2(\sigma - i0)\right] \tag{2.24}$$

где

$$m_1^-(\sigma) = (\sigma - i0)^{-\frac{1}{2}} + \frac{T}{\pi i}(\sigma - i0)^{-\frac{3}{2}}\left[\ln(\sigma - i0) + N\right] + \frac{T^2}{4}(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}} -$$

$$-\frac{T^2}{2\pi^2}(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}}\left[\ln^2(\sigma - i0) + 2N\ln(\sigma - i0) + N^2\right] \tag{2.25}$$

$$m_2^-(\sigma) = -\frac{D_1}{i}(\sigma - i0)^{-\frac{3}{2}} - \frac{D_1^2}{2}(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}} - \frac{D_1 T}{\pi}(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}}\left[\ln(\sigma - i0) + N\right]$$

$$N = 1 - \ln T + i\pi/2$$

Применив к (2.24) обратное преобразование Фурье, получим поведение $P_1^-(x)$ при $x \to -0$

$$P_1^-(x) = \frac{R_1\sqrt{T}}{\pi}\left[m_1^-(x) + m_2^-(x)\right] + O\left[|x|^{\frac{5}{2}}\right] \tag{2.26}$$

где

$$m_1^-(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{-\frac{1}{2}} + \frac{T}{\pi}\left[(1 - \ln|x|T)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) + \Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\right]|x|^{\frac{1}{2}} + \tag{2.27}$$

$$+\frac{T^2}{4\pi^2}\left[\left(-3\pi^2 + 2(1 - \ln|x|T)^2\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) + 4(1 - \ln|x|T)\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right) + \Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)\right]|x|^{\frac{3}{2}}$$

$$m_2^-(x) = D_1\left\{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{1}{2}} + \left[\left(D_1 + \frac{T}{\pi}(1 - \ln|x|T)\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) + \Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{T}{\pi}\right]|x|^{\frac{3}{2}}\right\}$$

При определении формул (2.27) были использованы формулы (2.15) и (2.16). Пользуясь формулой

$$q_1(x) = \frac{1}{F_*}\int_0^x P_1(s)ds + \frac{R_1}{F_*} \tag{2.28}$$

определим асимптотическую формулу для интенсивности нормальных напряжений стрингера при $x \to -0$

$$q_1(x) = \frac{R_1\sqrt{T}}{\pi}\left[\tilde{m}_1^-(x) + \tilde{m}_2^-(x)\right] + O\left(|x|^{\frac{7}{2}}\right), \qquad x \to -0 \tag{2.29}$$

где

$$\widetilde{m}_1^-(x)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\frac{T}{\pi}|x|^{\frac{3}{2}}\left[\frac{5}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)-\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\ln|x|T\right]-$$

$$-\frac{T^2}{10\pi^2}\left\{\left(\frac{106}{25}-3\pi^2\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{28}{5}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)+2\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)-4\ln|x|T\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{7}{5}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\right]+2\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\ln^2|x|T\right\}|x|^{\frac{5}{2}} \qquad (2.30)$$

$$\widetilde{m}_2^-(x)=D_1\left\{-\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}|x|^{\frac{5}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(D_1+\frac{7}{5}\frac{T}{\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{T}{\pi}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\ln|x|T\right]\right\}$$

В формулах (2.19) и (2.30) функции $\widetilde{l}_1^-(x)$ и $\widetilde{m}_1^-(x)$ соответствуют асимптотическим формулам для интенсивности нормальных напряжений одного стрингера при $x\to-\infty$ и $x\to-0$ соответственно полученных в работе [7].

3. Рассмотрим нечетную задачу

$$R=R_2;\ P(x,a)=-P(x,-a)=P_2(x),\ q(x,a)=q_2(x,a)$$

В этом случае имеем [1]

$$\overline{U}_2(\sigma,a)=\overline{U}_2^-(\sigma,a)+\overline{U}_2^+(\sigma,a)=$$

$$=\overline{P}_2^-(\sigma)\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)H|\sigma|}e^{-a|\sigma|}\mathrm{sh}a|\sigma|+\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)H}ae^{-2a|\sigma|}\right] \qquad (3.1)$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, для определения $\overline{P}_2^-(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{K}_2(\sigma)\overline{P}_2^-(\sigma)=\overline{G}_2^+(\sigma) \qquad (3.2)$$

где

$$\overline{G}_2^+(\sigma)=TR_2+\sigma^2TE_sF_s\overline{U}_2^+(\sigma,a)-i\sigma TE_sF_su_s(0) \qquad (3.3)$$

$$\overline{K}_2(\sigma)=T+2|\sigma|\mathrm{sh}a|\sigma|e^{-a|\sigma|}+ka\sigma^2e^{-2a|\sigma|} \qquad (3.4)$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, разрешив уравнение (3.2) для искомых контактных напряжений, получим:

$$P_2^-(x)=\frac{R_2e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{T}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\bar{f}^-(\sigma)-\overline{F}_2^-(\sigma)\right]}{(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}}e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (3.5)$$

где

$$F_2^-(\sigma)=\ln\left[1-\frac{|\sigma|-ka\sigma^2}{T+|\sigma|}e^{-2|\sigma|a}\right] \tag{3.6}$$

а $\bar{f}^-(\sigma)$ определяется из формул (1.14), (1.15). Нетрудно заметить, что при $a\to 0$ $P_2^-(x)=R_2\delta(x)$, которое говорит о том, что при приближении стрингеров напряжения как бы сосредоточиваются в окрестности точки $x=0$, иначе говоря, при приближении стрингеров их жесткость как бы уменьшается. Для получения асимптотической формулы для $P_2^-(x)$ при $x\to-\infty$, определим $\overline{P_2^-}(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$.

Будем иметь

$$\overline{P_2^-}(\sigma)=R_2\left[1+B_1\sigma+B_2\sigma^2+B_3\sigma^3+B_4\sigma^3\ln 2a(\sigma-i0)+B_5\sigma^4\ln 2a(\sigma-i0)\right]+ \\ +O\left|\sigma^4\right| \tag{3.7}$$

где

$$B_4=-\frac{2a^2(k+1)}{T\pi i}$$

$$B_5=\frac{4a^2(k+1)}{T^2\pi^2}\left[\psi(1)-\ln 2aT-\frac{k+2}{2T}+\frac{3(k-2)}{16aT^2}+\frac{85}{432a^2T^3}+A_2\right] \tag{3.8}$$

$$A_2=\int_0^\infty\frac{se^{-2T^*s}+\ln\left(1+\dfrac{kT^*s^2-s}{1+s}e^{-2T^*s}\right)}{s^2}ds \tag{3.9}$$

коэффициенты B_i $(i=1,2,3)$ – постоянные величины, зависящие от упругих характеристик пластины и расстояния стрингеров a.

Тогда для $P_2^-(x)$ при $x\to-\infty$ получим:

$$P_2^-(x)=R_2\frac{12a^2(k+1)}{T\pi}\times$$

$$\times\left\{|x|^{-4}-\frac{4}{T\pi}\left[\psi(1)+A_2-\ln 2aT-\frac{k+2}{2T}+\frac{3(k-2)}{16aT^2}+\frac{85}{432a^2T^3}\right]|x|^{-5}\right\}+O\left(|x|^{-6}\right),$$
$$x\to-\infty \tag{3.10}$$

Используя формулу (2.18), для $q_2(x)$ получим

$$q_2(x)=-\frac{4a^2(k+1)}{\pi TF_s}R_2\times$$

$$\times\left\{|x|^{-3}-\frac{3}{\pi T}\left[\psi(1)+A_2-\ln 2aT-\frac{k+2}{2T}+\frac{3(k-2)}{16aT^2}+\frac{85}{432a^2T^3}\right]|x|^{-4}\right\}+$$

$$+O\left(|x|^{-3}\right) \tag{3.11}$$

Асимптотические формулы для $P_2^-(x)$ и $q_2(x)$ при $x \to -0$ идентичны асимптотическим формулам для четной задачи при $x \to -0$ с одной лишь разницей, что вместо D_1 в формулах (2.29) и (2.30) фигурирует коэффициент D_2, который равен

$$D_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[1 - \frac{\sigma - ka\sigma^2}{T+\sigma}e^{-2\sigma a}\right]d\sigma \tag{3.12}$$

Из полученных результатов можно получить решение задачи, когда при $y = a$ по направлению x действует сила $P\delta(x)$, а при $y = -a$ – сила $Q\delta(x)$. В этом случае контактные напряжения равны

$$P^-(x,a) = P_1^-(x) + P_2^-(x), \qquad R_1 + R_2 = P,$$
$$P^-(x,-a) = P_1^-(x) - P_2^-(x), \qquad R_1 - R_2 = Q.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т. 57. №2. С.3-10.
2. Гахов В.Д. Краевые задачи. М.: Госиздат. 1963.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. № 3. С.29-34.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука. 1965.
5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ М.: Наука. 1972. 544 с.
6. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. 1968. Т.32. №4. С. 632-646.
7. Koiter W.T., On the Diffusion of load form a Stiffener into a sheet.//The Quarterly Journal of Mechanics and Applied mathematicas. 1955. V. 8. №2. P.164-178.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
28.12.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ, ВОЗМУЩЕННЫХ СИЛОЙ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА БЕРЕГУ ТРЕЩИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ И ОТСУТСТВИИ ЭЛЕКТРОДА

Мелкумян А. С.

Ա. Ս. Մելքումյան
Պիեզոէլեկտրիկում ճաքի ափին ազդող ուժի գրգռած ոչ ստացիոնար ալիքների դիֆրակցիան էլեկտրոդի առկայության և բացակայության դեպքերում

Դիտարկվում է կիսաանվերջ ճաք պարունակող 6mm դասի պիեզոէլեկտրական տարածություն՝ ճաքի հարթությունում հողակցված անվերջ բարակ էլեկտրոդի առկայության և բացակայության դեպքերում: Ճաքի ափերից մեկի վրա ազդող ժամանակից կախված փոփոխական կենտրոնացված ուժի գրգռած սահքի ոչ ստացիոնար ալիքներ հասնելով ճաքի գագաթին ենթարկվում են դիֆրակցիայի: Խնդիրը դիտարկված է պիեզոէլեկտրիկի տարածությունում քվազիհիպերբոլիկ դրվածքով, որի դեպքում ինչպես էլեկտրական այնպես էլ ակուստիկական ալիքները ունեն տարածման վերջավոր արագություն: Ուսումնասիրությունները կատարվել են Վիներ - Հոպֆի և Կանյար - դե Հուփի մեթոդների կիրառմամբ: Ինչպես էլեկտրոդի առկայության, այնպես էլ նրա բացակայության դեպքերում ուսումնասիրված է ամբողջական էլեկտրաառաձգական ալիքային դաշտի կառուցվածքը և նրա զարգացումը ժամանակի ընթացքում: Մանրամասնորեն հետազոտված են ժամանակից կախված էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և մեխանիկական լարումների ինտենսիվությունների գործակիցները ճաքի գագաթում: Բերված են թվային հաշվարկներ:

A. S. Melkumyan
Diffraction of nonstationary waves generated by a force applied on a face of a crack in piezoelectric medium in the cases of presence and absence of an electrode

A piezoelectric medium of the class 6mm is considered, which contains a semi-infinite crack, in the cases of presence and absence of an infinitesimal thin grounded electrode in the plane of the crack. The shear waves, perturbed by the concentrated force, which is varying in time and is applied on one face of the crack, approaching the crack tip diffract. The problem is considered in the quasihyperbolic approximation, so that both electrical and acoustical waves have a finite speed of propagation. The investigation is carried out by the means of Wiener – Hopf and Cagniard – de Hoop methods. The structure of the coupled electroelastic wavefield and its development in time are investigated in the cases of presence and absence of the electrode. The dynamic stress intensity factor and dynamic electric displacement intensity factor are investigated in details. Numerical calculations are presented.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm, содержащее полубесконечную трещину в случаях наличия и отсутствия бесконечно тонкого заземленного электрода в плоскости трещины. Волны сдвига, возмущенные сосредоточенной силой, зависящей от времени и действующей на одном берегу трещины, достигая вершины трещины, дифрагируют. Задача рассмотрена в квазигиперболической постановке, при которой как электрические, так и акустические волны имеют конечную скорость распространения. Исследования проведены с применением методов Винера-Хопфа и Каньяра-де Хупа. Исследована структура взаимосвязанного электроупругого волнового поля и ее развитие во времени как в случае наличия электрода, так и в случае его отсутствия. Детально изучены интенсивности электрической индукции и механических напряжений при вершине трещины в зависимости от времени. Приведены численные расчеты.

1. Задачи распространения и дифракции волн в сплошных средах с упругими, электроупругими и магнитоупругими свойствами представляют

особый интерес. Ряд таких исследований как в стационарной, так и в нестационарной постановках были проведены в работах [1]-[10].

Имеется пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии, содержащее полубесконечную трещину. Введем декартовую координатную систему $OXYZ$ с осью OZ, совпадающей с осью симметрии кристалла и с полуплоскостью $y=0,\ x<0,\ -\infty<z<\infty$, совпадающей с трещиной. Один берег трещины является свободным от напряжений, а на другой берег действует сосредоточенная сила, зависящая от времени:

$$\sigma_{yz}(x,y,t)\big|_{y=+0} = -P\delta(x+a)f(t),\ \ \sigma_{yz}(x,y,t)\big|_{y=-0} = 0 \tag{1}$$

где $x<0$, $P=\text{const}$, $a>0$, а $f(t)$ является заданной функцией, такой, что $f(t)=0$ при $t<0$. До воздействия данной силы пьезоэлектрическое пространство находилось в состоянии покоя.

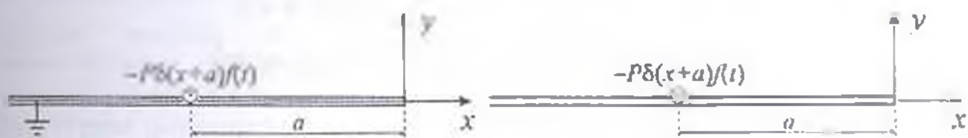
Рассмотрим задачу при двух вариантах электрического контакта на поверхности $y=0$ (фиг. 1):

a) имеется тонкий заземленный электрод в плоскости трещины, то есть

$$\varphi(x,+0,t)=\varphi(x,-0,t)=0,\ \forall x\in(-\infty,\infty) \tag{2}$$

b) электрод отсутствует, то есть

$$\begin{cases} \varphi(x,+0,t)=\varphi(x,-0,t) \\ D_y(x,+0,t)=D_y(x,-0,t) \end{cases} \forall x\in(-\infty,\infty) \tag{3}$$



Фиг. 1. Постановка задачи a) при наличии электрода (слева) и b) при отсутствии электрода (справа)

Волны, возмущенные сосредоточенной силой, будут сдвиговыми в обоих случаях, так что для векторов перемещения $\mathbf{u}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ будем иметь

$$\mathbf{u}=(0,0,w(x,y,t)),\ \ \mathbf{E}=(-\varphi_{,x}(x,y,t),-\varphi_{,y}(x,y,t),0) \tag{4}$$

Волновые процессы в пьезоэлектрике будем рассматривать в квазигиперболической постановке [9], [10], при которой имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\ \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0 \tag{5}$$

а также соотношения

$$\sigma_{xz}=\tilde{c}_{44}w_{,x}+e_{15}\psi_{,x},\ \ \sigma_{yz}=\tilde{c}_{44}w_{,y}+e_{15}\psi_{,y} \tag{6}$$

$$D_x = e_{15}\left(1-C_f\right)w_{,x} - \varepsilon_{11}\psi_{,x},\; D_y = e_{15}\left(1-C_f\right)w_{,y} - \varepsilon_{11}\psi_{,y} \tag{7}$$

где введена следующая функция:

$$\psi\left(x,\,y,\,t\right) = \varphi\left(x,\,y,\,t\right) - \frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}}w\left(x,\,y,\,t\right) \tag{8}$$

а также обозначено $\bar{c}_{44} = c_{44} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}$, $c_l = s_l^{-1} = 1\big/\sqrt{\varepsilon_{11}\mu_0}$, $c_s = s_s^{-1} = \sqrt{c_{44}/\rho}$, $C_f = c_l^2\big/\left(c_l^2 - c_s^2\right)$, $\tilde{c}_{44} = \bar{c}_{44}\left[1-\left(1-C_f\right)\left(e_{15}^2/\bar{c}_{44}\varepsilon_{11}\right)\right]$, $k_e^2 = e_{15}^2 C_f\big/\left(\varepsilon_{11}\tilde{c}_{44}\right)$.

Введем также одностороннее преобразование Лапласа по времени и двухстороннее преобразование Лапласа по координате x согласно формулам

$$\begin{gathered} f^*\left(x,p\right) = \int_0^\infty f\left(x,t\right)\, e^{-pt}dt, \quad f\left(x,t\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f^*\left(x,p\right)\, e^{pt}dp \\ \hat{f}^*\left(\varsigma,p\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*\left(x,p\right)\, e^{-px\varsigma}dx,\; f^*\left(x,p\right) = \frac{p}{2\pi i}\int_{\varsigma_0-i\infty}^{\varsigma_0+i\infty}\hat{f}^*\left(\varsigma,p\right)\, e^{px\varsigma}d\varsigma \end{gathered} \tag{9}$$

Решение задачи при обоих вариантах электрического контакта будем искать в виде суммы симметричного и антисимметричного задач. В результате будем иметь 4 граничные задачи, при которых решается система (5) со следующими четырьмя разными условиями на плоскости $y=0$:

1) симметричная задача варианта a:

$$\begin{gathered} \sigma_{yz}\left(x,\pm0,t\right) = \mp0.5P\delta\left(x+a\right)f\left(t\right),\, x<0 \\ \varphi\left(x,+0,t\right) = \varphi\left(x,-0,t\right) = 0,\, \forall x\in\left(-\infty,\infty\right) \end{gathered} \tag{10}$$

2) антисимметричная задача варианта a:

$$\begin{gathered} \sigma_{yz}\left(x,\pm0,t\right) = -0.5P\delta\left(x+a\right)f\left(t\right),\, x<0 \\ \varphi\left(x,+0,t\right) = \varphi\left(x,-0,t\right) = 0,\, \forall x\in\left(-\infty,\infty\right) \end{gathered} \tag{11}$$

3) симметричная задача варианта b:

$$\begin{gathered} \sigma_{yz}\left(x,\pm0,t\right) = \mp0.5P\delta\left(x+a\right)f\left(t\right),\, x<0 \\ \varphi\left(x,+0,t\right) = \varphi\left(x,-0,t\right),\, \forall x\in\left(-\infty,\infty\right) \\ D_y\left(x,+0,t\right) = D_y\left(x,-0,t\right),\, \forall x\in\left(-\infty,\infty\right) \end{gathered} \tag{12}$$

4) антисимметричная задача варианта b:

$$\begin{gathered} \sigma_{yz}\left(x,\pm0,t\right) = -0.5P\delta\left(x+a\right)f\left(t\right),\, x<0 \\ \varphi\left(x,+0,t\right) = \varphi\left(x,-0,t\right),\, \forall x\in\left(-\infty,\infty\right) \\ D_y\left(x,+0,t\right) = D_y\left(x,-0,t\right),\, \forall x\in\left(-\infty,\infty\right) \end{gathered} \tag{13}$$

Отметим, что во всех случаях 1)-4) условие

$$\begin{cases} \sigma_{yz}\left(x,+0,t\right) = \sigma_{yz}\left(x,-0,t\right) \\ w\left(x,+0,t\right) = w\left(x,-0,t\right) \end{cases} \forall x>0 \tag{14}$$

также должно быть удовлетворено.

2. Перейдем к решению задач 1)-4), сформулированных в предыдущем пункте. Симметричные задачи 1) и 3) решаются с использованием преобразований Лапласа (9) без применения метода Винера-Хопфа.

Решение симметричной задачи в случае наличия электрода (вариант a) имеет вид

$$w^*_{s(a)}(x,y,p)=\frac{P}{2\bar{c}_{44}}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{a(\zeta)-k_e^2e(\zeta)}d\zeta \tag{15}$$

$$\psi^*_{s(a)}(x,y,p)=-\frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}}\frac{P}{2\bar{c}_{44}}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x-a)]}}{a(\zeta)-k_e^2e(\zeta)}d\zeta \tag{16}$$

а решение симметричной задачи в случае отсутствия электрода (вариант b) имеет вид

$$w^*_{s(b)}(x,y,p)=\frac{P}{2\bar{c}_{44}}\frac{C_f}{C_f+k_e^2(1-C_f)}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{a(\zeta)}d\zeta \tag{17}$$

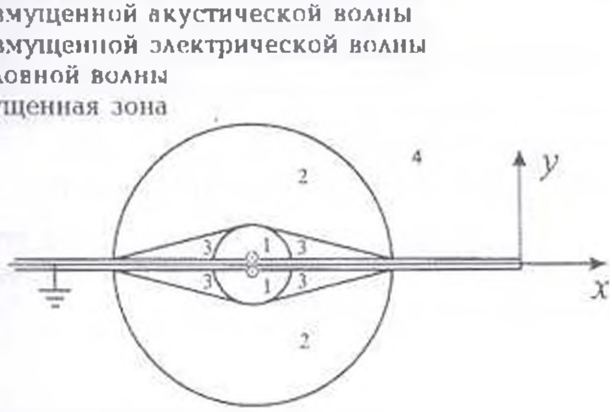
$$\psi^*_{s(b)}(x,y,p)=\frac{C_f(1-C_f)}{C_f+k_e^2(1-C_f)}\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{P}{2\bar{c}_{44}}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{e(\zeta)}d\zeta \tag{18}$$

Здесь и далее введены следующие обозначения: $a(\zeta)=\sqrt{s_s^2-\zeta^2}$, $a(0)=s_s$ с разрезами $\{\operatorname{Im}\zeta=0,\ |\operatorname{Re}\zeta|\ge s_s\}$, $e(\zeta)=\sqrt{s_l^2-\zeta^2}$, $a(0)=s_l$ с разрезами $\{\operatorname{Im}\zeta=0,\ |\operatorname{Re}\zeta|\ge s_l\}$.

Как следует из выражений (15)-(18), волны, возмущенные симметрично действующими силами, не дифрагируют от вершины трещины как в случае наличия электрода (вариант a), так и в случае его отсутствия (вариант b).

Применяя метод Каньяра-де Хупа [11], [12] к выражениям (15)-(18), получаем волновые фронты. В случае наличия электрода (вариант a) получаются следующие 4 волновые зоны, показанные на фиг. 2 (отметим, что среди них нет зон дифрагированных волн):

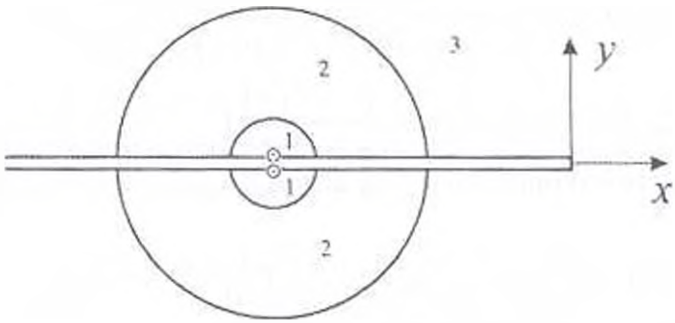
1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Зона головной волны
4. Невозмущенная зона



Фиг. 2. Волновые фронты симметричной задачи варианта a)

В случае отсутствия электрода (вариант b) получаются следующие 3 волновые зоны, показанные на фиг. 3 (отметим, что среди них нет зон дифрагированных волн):

1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Невозмущенная зона



Фиг. 3. Волновые фронты симметричной задачи варианта b)

Заметим, что в случае отсутствия электрода в отличие от случая его наличия в волновом поле отсутствует головная волна. Заметим также, что при $c_t / c_l \to 0$ имеем $C_t \to 1$, так что согласно (18) $\psi^{*}_{y(b)}(x, y, p) \to 0$. Следовательно, в квазистатическом приближении в симметричной части варианта b) возмущенная электрическая волна отсутствует.

Перейдем теперь к решению антисимметричных задач 2) и 4). Как будет показано ниже, решения антисимметричных задач для случаев наличия заземленного электрода (вариант a) и его отсутствия (вариант b) совпадают. Это обстоятельство объясняется тем, что антисимметричные силы, действующие на берегах трещины, даже в случае отсутствия заземленного электрода создают такое волновое поле, что удовлетворяется условие $\varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) = 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

Решение антисимметричной задачи, общей для вариантов a) и b)

Рассмотрим антисимметричную задачу в случае отсутствия электрода, то есть задачу 4). Имеем пьезоэлектрическое пространство с полубесконечной трещиной, на берегах которого действуют антисимметрично расположенные силы:

$$\sigma_{yx}(x, +0, t) = \sigma_{yx}(x, -0, t) = -Q\delta(x + a) f(t), \quad x < 0,$$

где $Q = P/2$.

Задача заключается в решении уравнений (5) со следующими условиями на поверхности $y = 0$:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yz}(x,+0,t)=\sigma_{yz}(x,-0,t)=-Q\delta(x+a)f(t)+\sigma_{-}(x,t)\\
&w(x,+0,t)-w(x,-0,t)=h_{-}(x,t)\\
&\varphi(x,+0,t)=\varphi(x,-0,t)\\
&D_y(x,+0,t)=D_y(x,-0,t)
\end{aligned} \tag{19}$$

где $h_{-}(x,t)=0$ при $x>0$, $\sigma_{-}(x,t)=0$ при $x<0$.

Как в уравнениях (5), так и в условиях (19), производя одностороннее преобразование Лапласа по времени и двухстороннее преобразование Лапласа по координате x, будем иметь

$$\frac{\partial^2\hat{w}^*}{\partial y^2}-p^2a^2(\zeta)\hat{w}^*=0,\quad \frac{\partial^2\hat{\psi}^*}{\partial y^2}-p^2e^2(\zeta)\hat{\psi}^*=0 \tag{20}$$

и

$$\begin{gathered}
\hat{w}^*_{,y}(\zeta,+0,p)=\hat{w}^*_{,y}(\zeta,-0,p)\\
\hat{\psi}^*_{,y}(\zeta,-0,p)=\hat{\psi}^*_{,y}(\zeta,+0,p)\\
\tilde{c}_{44}\hat{w}^*_{,y}(\zeta,+0,p)+e_{15}\hat{\psi}^*_{,y}(\zeta,+0,p)=-Qf^*(p)e^{p\zeta a}+\hat{\sigma}^*_{+}(\zeta,p)\\
\hat{w}^*(\zeta,+0,p)-\hat{w}^*(\zeta,-0,p)=\hat{h}^*_{-}(\zeta,p)\\
\hat{\psi}^*(\zeta,+0,p)-\hat{\psi}^*(\zeta,-0,p)=-C_f\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\hat{h}^*_{-}(\zeta,p)
\end{gathered}$$

Решая уравнение (20) и удовлетворяя условиям контакта, получим следующие выражения для $\hat{w}^*$ и $\hat{\psi}^*$:

$$\hat{w}^*(\zeta,y,p)=\operatorname{sgn}(y)\frac{\hat{h}^*_{-}(\zeta,p)}{2}e^{-pa(\zeta)|y|} \tag{21}$$

$$\hat{\psi}^*(\zeta,y,p)=-\operatorname{sgn}(y)C_f\frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\hat{h}^*_{-}(\zeta,p)e^{-pe(\zeta)|y|} \tag{22}$$

а также уравнение Винера-Хопфа [13]:

$$-\tilde{c}_{44}\left[1-k_e^2\right]R(\zeta)a(\zeta)\frac{\hat{h}^*_{-}(\zeta,p)}{2}p=-Qf^*(p)e^{p\zeta a}+\hat{\sigma}^*_{+}(\zeta,p) \tag{23}$$

где обозначено

$$R(\zeta)=\frac{1}{1-k_e^2}\frac{a(\zeta)-k_e^2e(\zeta)}{a(\zeta)} \tag{24}$$

Факторизируя функцию $R(\zeta)$ с применением интегралов типа Коши [14], получим

$$R(\zeta)=R_{+}(\zeta)R_{-}(\zeta) \tag{25}$$

где

$$R_{\pm}(\zeta)=\frac{s_{bgs}\pm\zeta}{s_s\pm\zeta}I_{\pm}(\zeta) \tag{26}$$

$$I_s(\zeta)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{s_e/s_t}^{1}\arctan\left[k_e^2\frac{\sqrt{\sigma^2-s_e^2s_t^{-2}}}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right]\frac{d\sigma}{\sigma\pm s_t^{-1}\zeta}\right) \tag{27}$$

$$s_{bge}=\sqrt{\frac{s_s^2-k_e^4s_t^2}{1-k_e^4}}>s_s \tag{28}$$

После подстановки (25) в (23) получим функциональное уравнение

$$-\tilde{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)R_-(\zeta)\sqrt{s_s-\zeta}\frac{\hat{h}_-^*(\zeta,p)}{2}p=-\frac{Qf^*(p)e^{p\zeta a}}{R_-(\zeta)\sqrt{s_s+\zeta}}+\frac{\hat{\sigma}_-^*(\zeta,p)}{R_-(\zeta)\sqrt{s_s+\zeta}} \tag{29}$$

для решения которого функция $D(\zeta,p)=e^{p\zeta a}/\left(R_-(\zeta)\sqrt{s_s+\zeta}\right)$ должна быть представлена в виде суммы плюс и минус функций:

$$D(\zeta,p)=e^{p\zeta a}/\left(R_-(\zeta)\sqrt{s_s+\zeta}\right)=D_+(\zeta,p)+D_-(\zeta,p) \tag{30}$$

Пользуясь интегралами типа Коши [14], получаем следующие выражения для $D_+(\zeta,p)$ и $D_-(\zeta,p)$:

$$D_+(\zeta,p)=\frac{1}{\pi}\int_{s_s}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{R_-(u+i0)\sqrt{s_s-u-i0}}\right]\frac{e^{-pua}du}{u+\zeta} \tag{31}$$

$$D_-(\zeta,p)=\frac{e^{p\zeta a}}{R_-(\zeta)\sqrt{s_s+\zeta}}-D_+(\zeta,p) \tag{32}$$

Используя (24)-(28), (30)-(32) и решая уравнение (23) методом Винера-Хопфа [13], получим

$$\frac{\hat{h}_-^*(\zeta,p)}{2}=\frac{Q}{\tilde{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)}\frac{f^*(p)}{p}\frac{D_-(\zeta,p)}{R_-(\zeta)\sqrt{s_s-\zeta}} \tag{33}$$

$$\hat{\sigma}_-^*(\zeta,p)=Qf^*(p)D_+(\zeta,p)R_+(\zeta)\sqrt{s_s+\zeta} \tag{34}$$

Подставляя (33) в (21)-(22), обращая двухстороннее преобразование Лапласа по координате x и используя выражения (31)-(32), получим

$$w_{an}^*(x,y,p)=\frac{Q\operatorname{sgn}y}{\tilde{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{R(\zeta)a(\zeta)}d\zeta-$$

$$-\frac{Q\operatorname{sgn}y}{\tilde{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{D_+(\zeta,p)e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta x]}}{R_-(\zeta)\sqrt{s_s-\zeta}}d\zeta \tag{35}$$

$$\psi_{an}^*(x,y,p)=-\frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}}\frac{Q\operatorname{sgn}y}{\tilde{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{R(\zeta)a(\zeta)}d\zeta+$$

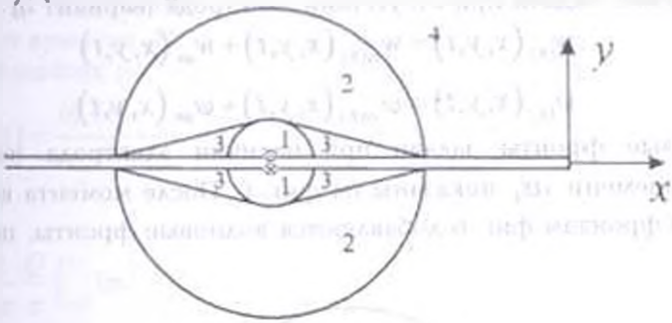
$$+\frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}}\frac{Q\operatorname{sgn}y}{\tilde{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)}\frac{f^*(p)}{2\pi i}\int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty}\frac{D_+(\zeta,p)e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta x]}}{R_-(\zeta)\sqrt{s_s-\zeta}}d\zeta \tag{36}$$

где добавлен индекс "an" для того, чтобы подчеркнуть, что полученные решения соответствуют антисимметричной задаче.

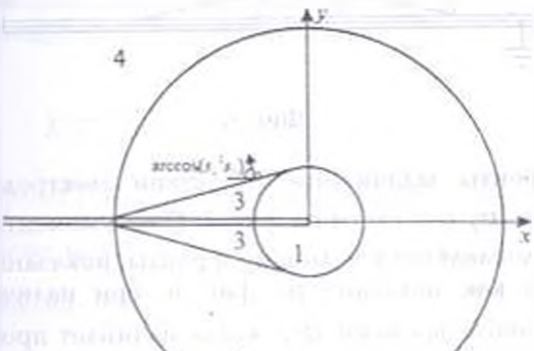
Первое слагаемое как выражения (35), так и выражения (36), представляет волны, возмущенные сосредоточенными силами, и не содержит явления дифракции. Второе слагаемое как в (35), так и в (36), представляет дифрагированные волны и проявляется через время as, после начала действия сил, то есть начиная с того момента, когда электрическая волна возмущенная силами доходит до края трещины.

Применяя метод Каньяра-де Хупа [11], [12] к выражениям (35)-(36), получаем волновые фронты. Первые слагаемые выражений (35) и (36) определяют следующие волновые зоны (фиг. 4):

1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Зона головной волны
4. Невозмущенная зона



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Вторые слагаемые выражений (35) и (36) определяют дифрагированные волны. Соответствующие волновые зоны показаны на фиг. 5:

1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Зона головной волны

4. Невозмущенная зона

Из (35)-(36) и из условий контакта (19) следует, что выражения (35)-(36) удовлетворяют не только условиям (13), но и условиям (11). Следовательно, (35)-(36) является решением антисимметричной задачи не только в случае отсутствия, но и в случае наличия заземленного электрода (вариант a). Тем самым доказано, что антисимметричные задачи вариантов a) и b) совпадают.

Суммируя решения симметричных задач обоих вариантов a) и b), данные выражениями (15)-(16) и (17)-(18), вместе с решением общей антисимметричной задачи (35)-(36), получаем

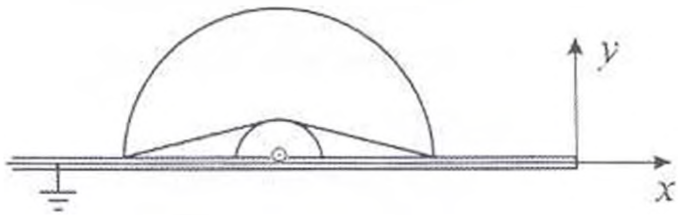
решение задачи при наличии электрода (вариант a)

$$
\begin{aligned}
w_{(a)}(x,y,t) &= w_{sy(a)}(x,y,t) + w_{an}(x,y,t) \\
\psi_{(a)}(x,y,t) &= \psi_{sy(a)}(x,y,t) + \psi_{an}(x,y,t)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

и решение задачи при отсутствии электрода (вариант b)

$$
\begin{aligned}
w_{(b)}(x,y,t) &= w_{sy(b)}(x,y,t) + w_{an}(x,y,t) \\
\psi_{(b)}(x,y,t) &= \psi_{sy(b)}(x,y,t) + \psi_{an}(x,y,t)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

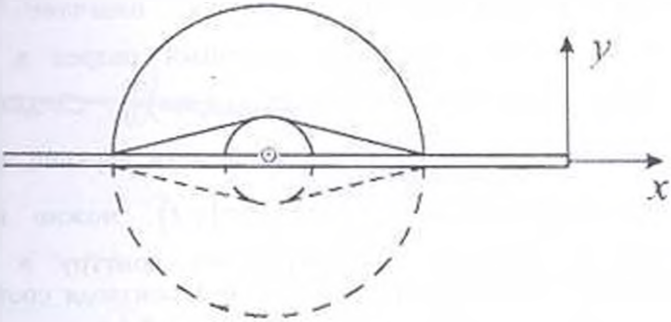
Волновые фронты задачи при наличии электрода (вариант a) до момента времени as_t показаны на фиг. 6. После момента времени as_t к волновым фронтам фиг. 6 добавляются волновые фронты, показанные на фиг. 5.



Фиг. 6.

Волновые фронты задачи при отсутствии электрода (вариант b) до момента времени as_t показаны на фиг. 7. После момента as_t к волновым фронтам фиг. 7 добавляются волновые фронты, показанные на фиг. 5.

Заметим, что как показано на фиг. 6, при наличии заземленного электрода до момента времени as_t, когда начинает проявляться явление дифракции, волны распространяются только в верхнем пьезоэлектрическом полупространстве. Это объясняется тем, что сила действует только на одном берегу трещины, а заземленный электрод не дает электрическим волнам пройти через трещину. В случае же отсутствия электрода (фиг. 7) несмотря на то, что сила действует только на верхнем берегу трещины, возмущенные там электрические волны, беспрепятственно проходят через трещину и в силу пьезоэффекта возмущают в нижнем полупространстве как электрические, так и акустические волны.



Фиг. 7.

3. Перейдем теперь к изучению интенсивностей механических напряжений и электрической индукции при вершине трещины в зависимости от времени. Пользуясь выражениями (15)-(18), (35)-(36) и (37)-(38), после небольших расчетов получаем

$$K_\sigma(t) = \frac{df(t)}{dt} * K_\sigma^H(t), \quad K_D(t) = \frac{e_{15}}{\bar{c}_{44}\left(1-k_e^2\right)} K_\sigma(t) \tag{39}$$

где

$$K_\sigma^H(t) = -\sqrt{\frac{2}{a\pi}} \frac{Q}{\pi} \int_{s_l a}^{t} \operatorname{Im}\left[\frac{\sqrt{(\tau+i0)-s_t a}\, H(t-s_t a)}{\left[(\tau+i0)-a s_{bge}\right] I_-\left[(\tau+i0)a^{-1}\right]\sqrt{(\tau+i0)-t}}\right] d\tau \tag{40}$$

представляет интенсивность механических напряжений в случае $f(t) = H(t)$ ($H(t)$ – функция Хевисайда), а знак * означает свертку.

Из выражений (39)-(40), полученных для электроупругого тела, легко получается следующее выражение механических напряжений для чисто упругого тела:

$$K_\sigma^{elastic}(t) = Q\sqrt{\frac{2}{a\pi}} f(t - s_t a) \tag{41}$$

которое при $f(t) = H(t)$ было получено ранее в работе [8].

Так как согласно выражениям (39) функция $K_\sigma^H(t)$, представляющая интенсивность механических напряжений в случае $f(t) = H(t)$, играет важнейшую роль при определении $K_\sigma(t)$ и $K_D(t)$ при любом $f(t)$, то возникает необходимость в подробном изучении функции $K_\sigma^H(t)$.

Заметим, что функция

$$g(z,t) = \frac{1}{\left(z - s_{bge} a\right) I_-\left(z a^{-1}\right)} \frac{\sqrt{z - s_t a}}{\sqrt{z - t}} \tag{42}$$

присутствующая в подынтегральном выражении (40) удовлетворяет условию $\overline{g(z,t)} = g(\bar{z},t)$, где черточка означает комплексное сопряжение, и имеет следующий конечный разрез в комплексной плоскости (z): $\{\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \in [s_\ell a, \max(s_s a, t)]\}$. Следовательно, при $t > s_s a$ интегрирование в (40) проходит по всей верхней части разреза, так что, пользуясь условием $\overline{g(z,t)} = g(\bar{z},t)$, можно интеграл (40) преобразовать в интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости и пользоваться теорией вычетов. Производя соответствующие расчеты, получаем следующее выражение для $K^H_\sigma(t)$:

$$K^H_\sigma(t) = K^H_\sigma\left(\frac{t}{s_s a}; \frac{Q}{\sqrt{a}}, s_\ell / s_s, k_e\right) = \tag{43}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{k_e^2}{1+k_e^2}\frac{1}{\pi}\int_{s_\ell/s_s}^{ts_s^{-1}a^{-1}} \frac{\sqrt{\tau^2 - s_\ell^2 s_s^{-2}}}{\sqrt{1+\tau}\sqrt{ts_s^{-1}a^{-1} - \tau}} \frac{I_+(s,\tau)}{\tau - s_{bge}s_s^{-1}} d\tau \left[H(t - s_\ell a) - H(t - s_s a)\right] + \right.$$

$$\left. + H(t - s_s a) - \frac{\sqrt{s_{bge}s_s^{-1} - 1}}{I_-(s_{bge})\sqrt{s_{bge}s_s^{-1} - ts_s^{-1}a^{-1}}}\left[H(t - s_s a) - H(t - s_{bge}a)\right]\right\}$$

График безразмерной величины $\sqrt{a}Q^{-1}K^H_\sigma(t)$ в зависимости от $ts_s^{-1}a^{-1}$ при разных значениях электромеханической связи k_e приведен на фиг. 8:

Из (39) следует, что при $f(t) = H(t)$ для интенсивности электрической индукции при вершине трещины будем иметь выражение

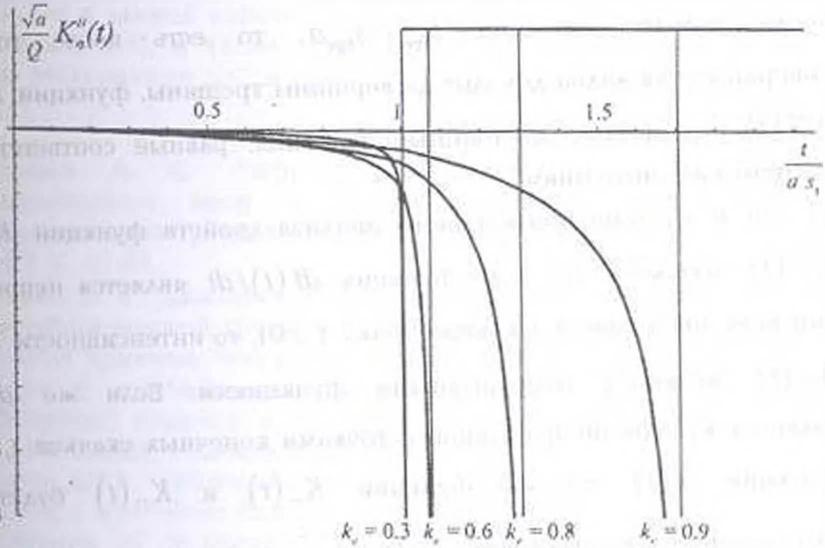
$$K^H_D(t) = \frac{e_{15}}{\bar{c}_{44}(1-k_e^2)} K^H_\sigma(t) \tag{44}$$

График безразмерной величины $\sqrt{a}Q^{-1}e_{15}\varepsilon_{11}^{-1}K^H_D(t)$ в зависимости от $ts_s^{-1}a^{-1}$ при разных значениях k_e приведен на фиг. 9:

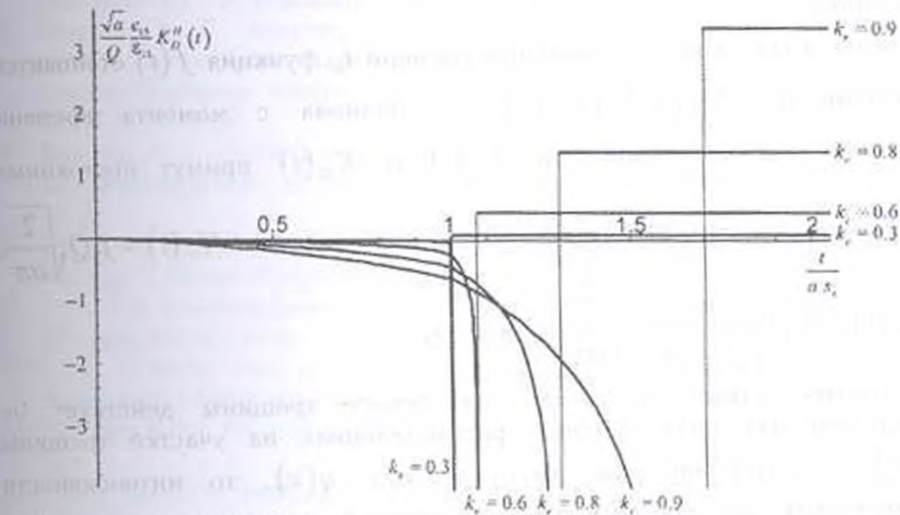
При расчетах, следуя Ш [9], принималось $s_\ell / s_s = 10^{-4}$.

Исходя из выражений (39)-(40), (43) и из графиков на фиг. 8 и 9, можно сделать следующие выводы:

- $K^H_\sigma(t) = 0$, $K^H_D(t) = 0$ до момента времени $t_\ell = s_\ell a$, когда электрическая волна, возмущенная сосредоточенной силой, доходит до вершины трещины
- начиная с момента времени $t_\ell = s_\ell a$ и до момента $t_s = s_s a$, когда до вершины доходит акустическая волна, возмущенная сосредоточенной силой, кривые функций $K^H_\sigma(t)$ и $K^H_D(t)$ медленно идут вниз (моменту времени $t_s = s_s a$ соответствует линия $t/(as_s) = 1$ на фиг. 8 и 9)



Фиг. 8.



Фиг. 9.

- начиная с момента времени $t_s = s_s a$ и до момента $t_{bge} = s_{bge} a$, когда до вершины доходит поверхностная волна, возмущенная сосредоточенной силой, функции $K_a^H(t)$ и $K_D^H(t)$, быстро меняясь, стремятся к $-\infty$, имея сингулярность порядка $(s_{bge} a - t)^{-1/2}$ (моменту времени $t_{bge} = s_{bge} a$ соответствуют вертикальные асимптоты, показанные на фиг. 8 и 9)

- после момента времени $t_{bge} = s_{bge}a$, то есть после того, как поверхностная волна доходит до вершины трещины, функции $K_{\sigma}^{H}(t)$ и $K_{D}^{H}(t)$ принимают постоянные значения, равные соответствующим статическим значениям
- из (39) и из вышеприведенного анализа свойств функций $K_{\sigma}^{H}(t)$ и $K_{D}^{H}(t)$ вытекает, что если функция $df(t)/dt$ является непрерывной при всех значениях t (включая точку $t = 0$), то интенсивности $K_{\sigma}(t)$ и $K_{D}(t)$ являются непрерывными функциями. Если же $df(t)/dt$ является кусочно-непрерывной с точками конечных скачков $t_i \geq 0$ для функции $f(t)$, то обе функции $K_{\sigma}(t)$ и $K_{D}(t)$ будут иметь сингулярность порядка $\left(s_{bge}a + t_i - t\right)^{-1/2}$ в моментах времени, когда поверхностная волна, обусловленная скачком $f(t)$, дойдет до вершины трещины
- если начиная с какого-то момента времени t_0 функция $f(t)$ становится постоянной: $f(t) = f_0$ $(t > t_0)$, то начиная с момента времени $t_K = t_0 + s_{bge}a$ интенсивности $K_{\sigma}(t)$ и $K_{D}(t)$ примут постоянные значения соответствующей статической задачи: $K_{\sigma}(t) = f_0 Q \sqrt{\dfrac{2}{a\pi}}$,

$$K_{\sigma}(t) = f_0 Q \frac{e_{15}}{\bar{c}_{44}\left(1 - k_e^2\right)} \sqrt{\frac{2}{a\pi}} \quad \text{при } t > t_K$$

Отметим также, что если на берегу трещины действует не сосредоточенная сила, а сила, распределенная на участке трещины $[x_0, x_1]$ с интенсивностью распределения $q(x)$, то интенсивности механических напряжений и электрической индукции при вершине трещины примут следующий вид:

$$K_{\sigma}^{q}(t) = \int_{x_0}^{x_1} K_{\sigma}(t,x) q(x) dx, \quad K_{D}^{q}(t) = \int_{x_0}^{x_1} K_{D}(t,x) q(x) dx \qquad (45)$$

следовательно, используя анализ функций интенсивностей при сосредоточенной силе, проведенной выше, можно сделать соответствующие выводы для случая распределенной силы.

Производя предельный переход, при котором скорость электрической волны стремится к бесконечности, из результатов данной работы можно получить соответствующие результаты для случая квазистатической подстановки задачи. Частный антисимметричный случай этой задачи в квазистатическом приближении был рассмотрен Ингом и Вангом в работе [15]. Отметим, что результаты, опубликованные недавно в [15], находятся в строгих количественных и качественных противоречиях с результатами, полученными в данной работе. Доказательство ошибочности результатов Инга и Ванга [15], а также соответствующие правильные результаты получены Мелкумяном А.С. и приведены в работе [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелкумян А. С. Дифракция акустической и электрической нестационарных волн в пьезоэлектрическом пространстве на полубесконечной трещине. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N 1. С. 51-63.
2. Григорян Э. Х., Джилавян С. А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N 1. С. 38-50.
3. Grigoryan E. and Melkumyan A. On diffraction in a piezoelectric medium by parallel-situated electrodes. // Proceedings of The 4th Australasian Congress on Applied Mechanics, Melbourne 2005, pp. 593–598.
4. Grigoryan E.Kh., Melkumyan A.S. On wave diffraction in a piezoelectric medium containing a semi-infinite electrode. // Proceedings of the International Seminar "Day on Diffraction' 04", St. Petersburg 2004, pp. 100–109.
5. E. Grigoryan, S. Jilavyan, K. Agayan, Diffraction of waves in an elastic space with semi-infinite inclusion. // Proceedings of the International Seminar "Day on Diffraction' 04", St. Petersburg 2004, pp. 90–100.
6. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1974. Т. 27. N 3. С. 10-20.
7. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1974. Т. 27. N 2. С. 15-23.
8. Ma C.C., Hou Y.C. Transient analysis for antiplane crack subjected to dynamic loadings. // Journal of Applied Mechanics 58, 1991, 703-709
9. Li S. The Electromagneto-acoustic Surface Wave In A Piezoelectric Medium: The Bleustein-Gulyaev Mode. // Journal of Applied Physics 80(9), 1996, pp. 5264-5269
10. Li S. Transient wave propagation in piezoelectric half space. // Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP) 51, 2000, 236–266.
11. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Pub., 1984. pp. 425.
12. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland Pub., 1978. pp. 618.
13. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы. 1962. 280 с.
14. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
15. Ing Y.S., Wang M.J. Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material. // International Journal of Solids and Structures, № 41, 2004, pp. 3849–3864.
16. Melkumyan A. Comments on "Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material" by Yi-Shyong Ing, Mau-Jung. // International Journal of Solids and Structures, 2005, In Press

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
28.12.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛИНИИ РАЗДЕЛА ОБЛАСТЕЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СОСТАВНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНО-АНИЗОТРОПНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Саргсян А.М.

Ա.Մ.Սարգսյան

Լարվածային վիճակի բնույթը ուղղագծային-անիզոտրոպ պրիզմաձև մարմնի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթների բաժանման գծի անկյունային կետի շրջակայքում

Ուսումնասիրված է լարումների վարքը երկայնական սահքի պայմաններում գտնվող բաղադրյալ ուղղագծային-անիզոտրոպ պրիզմաձև մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետի շրջակայքում:

Ցույց է տրված, որ, ի տարբերություն բաղադրյալ իզոտրոպ պրիզմաձև մարմնի, բաղադրյալ անիզոտրոպ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետի շրջակայքը կարող է լինել նաև թերլարված

A.M.Sargsyan

Character of Stresses to the Angular Point of the Separation Line of the Area of the Cross-section of a Compound Straight-forward Anisotropic Body

The behaviour of stresses in the vicinity of the angular point of the contact surface of the compound straight-forward anisotropic prismatic body in the state of a longitudinal shear

It is shown that unlike the compound isotropic prismatic body, in the compound straight-forward anisotropic body the vicinity of the angular point of the separation surface may also be low strained

Исследуется поведение напряжений в окрестности угловой точки поверхности контакта составного прямолинейно-анизотропного призматического тела, находящегося в состоянии продольного сдвига. Показано, что, в отличие от составного изотропного призматического тела, в составном прямолинейно-анизотропном теле окрестность угловой точки поверхности раздела может быть также малонапряженной.

Поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта составного изотропного или анизотропного (цилиндрического или прямолинейного) призматического тела, находящегося в состоянии кручения или продольного сдвига, изучено в работах [1-4].

Исследованы также особенности напряжений около угловой точки линии раздела (точка O на фиг.1) составного изотропного и цилиндрически анизотропного тела [1, 5]. В [1] установлено, что напряжения при $r \to 0$ бесконечно возрастают (имеют особенность) при всех значениях угла θ_1, $(0 < \theta_1 < 2\pi)$ кроме $\theta_1 = \pi$. А в [5] показано, что характеристики стационарных физических полей (в частности, напряжения при кручении или продольном сдвиге) вблизи угловой точки могут стремиться к нулю, иметь особенность или конечные значения.

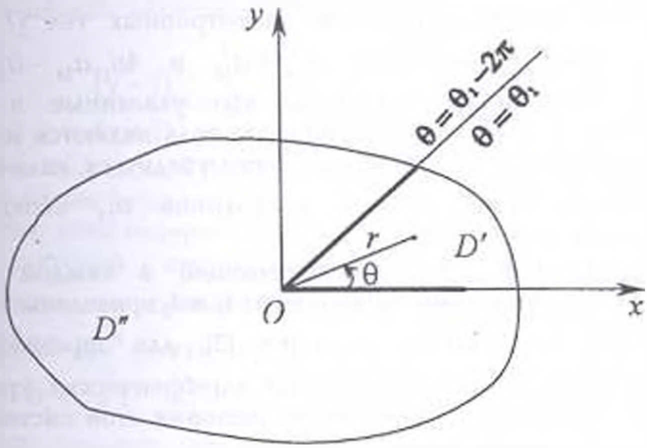
В данной работе эти вопросы изучены для кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного призматического тела, находящегося в состоянии продольного сдвига.

Пусть D' и D'' – два клина, жестко соединенных вдоль боковых поверхностей. Введем декартовы x, y и полярные r, θ координаты, как показаны на фиг.1.

При отсутствии массовых сил компоненты напряжений $\tau_{xz}^{(j)}$ и $\tau_{yz}^{(j)}$ выражаются через функции напряжений $\psi_j(x, y)$ формулами [3]

$$\tau_{xz}^{(j)} = \frac{\partial\psi_j(x,y)}{\partial y}, \qquad \tau_{yz}^{(j)} = \frac{\partial\psi_j(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

Функция напряжений в соответствующих областях поперечного



Фиг. 1

сечения удовлетворяет уравнению [3]

$$a_{44}^{(j)}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(j)}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x\partial y} + a_{55}^{(j)}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

$$j=1,\ 0<\theta<\theta_1; \quad j=2, \quad -(2\pi-\theta_1)<\theta<0; \quad \theta_1+\theta_2\le 2\pi, \ \ \theta_j \le 2\pi$$

и условиям сопряжения на линии разрыва свойств материалов ($y=0$ и $x = r\cos\theta_1$, $y = r\sin\theta_1$)

$$\Psi_1 = \Psi_2, \ u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \tag{3}$$

В уравнении (2) $a_{44}^{(j)}, a_{45}^{(j)}, a_{55}^{(j)}$ – упругие постоянные, отнесенные к выбранной системе координат.

Представляя решение уравнения (2) в виде [3,4]

$$\psi_j(x,y) = A_j(x+\mu_j y)^\lambda + B_j(x+\overline{\mu}_j y)^\lambda \tag{4}$$

где A_j, B_j – неизвестные постоянные, λ – произвольный параметр,

$$\mu_j = \sigma_j + i\tau_j = a_{45}^{(j)}\big/a_{55}^{(j)} + i\sqrt{a_{44}^{(j)}a_{55}^{(j)} - a_{45}^{(j)}a_{45}^{(j)}}\Big/a_{55}^{(j)}$$
$$\overline{\mu}_j = \sigma_j - i\tau_j, \quad \tau_j > 0, \quad (j=1,\ 2) \tag{5}$$

и используя уравнения состояний, а также условие совместности деформаций, для перемещения $u_z^{(j)}$ получим

$$u_z^{(j)} = A_j m_j (x+\mu_j y)^\lambda + B_j \overline{m}_j (x+\overline{\mu}_j y)^\lambda + C_j$$
$$m_j = a_{55}^{(j)}\mu_j - a_{45}^{(j)}, \quad \overline{m}_j = a_{55}^{(j)}\overline{\mu}_j - a_{45}^{(j)} \tag{6}$$

Как и в работе [9], числа μ_j будем называть комплексными параметрами данной проблемы.

В связи с этим, заметим, что величина $a_{44}a_{55}-a_{45}^2$, входящая в мнимую часть комплексного параметра μ_1 или μ_2, является инвариантой для тел с общей анизотропией, т.е. эта величина не меняется при повороте координатной системы вокруг общей оси z. В известных монографиях по теории упругости анизотропных тел [7, 8, 9] этот инвариант, а также инварианты $a_{34}^2+a_{35}^2$ и $4a_{13}a_{23}-a_{36}^2$ нигде не фигурируют. Более того, оказалось, что указанные в работе [9] инварианты I_1, I_2, I_3 и I_4 для ортотропного тела являются инвариантами для тел с общей анизотропией. В этом легко убедиться, если учесть, что в формуле преобразования упругой постоянной a_{12} перед последним членом стоит знак минус [7, 9].

Для анизотропной пластинки, имеющей в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, инварианты I_1 и I_2 приведены в [7, 9].

Удовлетворяя контактным условиям (3), для определения A_j, B_j получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиального решения этой системы вытекает следующее уравнение относительно λ:

$$\frac{4\chi}{(1+\chi)^2}\operatorname{sh}^2\left(\frac{\lambda}{2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+\sin^2\left(\lambda\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)-\frac{(\chi-1)^2}{(\chi+1)^2}\sin^2\left(\lambda\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)=0 \quad (7)$$

где

$$\chi=\frac{\sqrt{a_{44}^{(2)}a_{55}^{(2)}-a_{45}^{(2)^2}}}{\sqrt{a_{44}^{(1)}a_{55}^{(1)}-a_{45}^{(1)^2}}},\quad r_j=\sqrt{(\cos\theta_1+\sigma_j\sin\theta_1)^2+(\tau_j\sin\theta_1)^2} \quad (8)$$

$$\varphi_1=\arg(\cos\theta_1+\mu_1\sin\theta_1),\quad \varphi_2=\arg(\cos\theta_1+\bar{\mu}_2\sin\theta_1)\quad 0<\varphi_j<2\pi$$

Из представления (1) и (4) видно, что напряжения $\tau_{xz}^{(j)}$ и $\tau_{yz}^{(j)}$ неограниченно возрастают при приближении к угловой точке линии раздела, если положительная действительная часть первого корня уравнения (8) меньше единицы $(0<\operatorname{Re}\lambda_1<1)$. Если $\operatorname{Re}\lambda_1>1$, то напряжения убывают до нуля при $r\to0$. В случае $\operatorname{Re}\lambda_1=1$ напряжения в угловой точке конечны и вообше отличны от нуля.

Отметим прежде всего, что из (7) легко получить соответствующее уравнение для кусочно-однородного изотропного клина [1], полагая $a_{44}^{(j)}=a_{55}^{(j)}$, $a_{45}^{(j)}=0$.

Не накладывая ограничения на упругие деформативные характеристики материалов соединенных тел, рассмотрим частный случай $\theta_1=\pi$. Из обозначений (8) следует $r_j=1$, $\varphi_j=\pi$, и из (7) получим $\lambda_1=1$, т.е. на гладких внутренних частях поверхности контакта составного анизотропного тела напряжения не могут иметь особенности.

В случае $\theta_1=\pi/2$ имеем $\varphi_1=\arg\mu_1$ $(0<\arg\mu_1<\pi)$, $\varphi_2=\arg\bar{\mu}_2$

$(\pi < \arg\bar{\mu}_2 < 2\pi)$, $r_j = \sqrt{\sigma_j^2 + \tau_j^2}$. Если $r_1 = r_2$, т.е. $a_{44}^{(2)}/a_{55}^{(2)} = a_{44}^{(1)}/a_{55}^{(1)}$, из (7) будем иметь

$$\sin^2\left(\lambda\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) = \frac{(\chi-1)^2}{(\chi+1)^2}\sin^2\left(\lambda\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) \tag{9}$$

Построив графики обеих частей уравнения (9) в зависимости от λ, замечаем, что первое пересечение этих кривых происходит при $\lambda > 1$, если

$$\frac{(\chi-1)^2}{(\chi+1)^2} < \sin^2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\bigg/\sin^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) = a_0 \tag{10}$$

Следовательно, условие (10) обеспечивает малонапряженность вблизи угловой точки линии раздела.

В частности, если материал одного из соединенных клиньев является изотропным, а второй - стеклопластиком Б [6], вырезанным под углом $\alpha = \pi/4$ по отношению к направлению армировки ($a_{44} = a_{55} = 25.05\cdot10^{-6}$ см²/кг, $a_{45} = -3.75\cdot10^{-6}$ см²/кг), из (5) и (8) имеем $\varphi_1 = \pi/2, \sigma_1 = 0, \tau_1 = 1, \quad \varphi_2 = 1.45\pi, \quad r_2 = 1, \sigma_2 = -0.1497, \quad \tau_2 = 0.9887$. Тогда из (10) следует, что при условии $(\chi-1)^2/(\chi+1)^2 < 0.0062$ напряжения всегда стремятся к нулю при приближении к угловой точке O. Например, первый корень уравнения (9) при $a_0 = 0.002$ находится в интервале $1.011 < \lambda_1 < 1.012$.

Когда соединенные материалы таковы, что $\chi = 1$, т.е.

$$a_{44}^{(2)}a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)^2} = a_{44}^{(1)}a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)^2} \tag{11}$$

уравнение (7) упрощается, и для определения λ_1 получим простую формулу

$$\lambda_1 = \frac{2\pi(\varphi_1+\varphi_2)}{(\varphi_1+\varphi_2)^2 + (\ln r_2/r_1)^2} + i\frac{2\pi\ln r_2/r_1}{(\varphi_1+\varphi_2)^2 + (\ln r_2/r_1)^2} \tag{12}$$

Условию (11) легко удовлетворить, когда анизотропный материал соединен с соответствующим изотропным материалом.

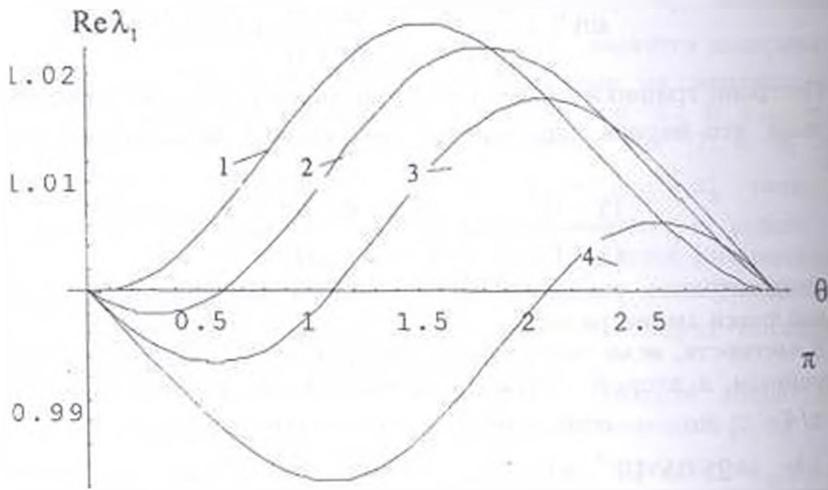
Особенно простой частный случай условия (11) имеет место, когда составляющие кусочно-однородного клина получены из одного и того же анизотропного тела, вырезанного под разными углами по отношению к заданному направлению. Для таких материалов величина $a_{44}a_{55} - a_{45}^2$ инвариантна по отношению к преобразованию координат. Здесь приведен не претендующий на полноту перечень соединенных пар, указывающий лишь на практическую возможность допущений (11).

Из (12) непосредственно следует, что окрестность угловой точки O может быть малонапряженной, если

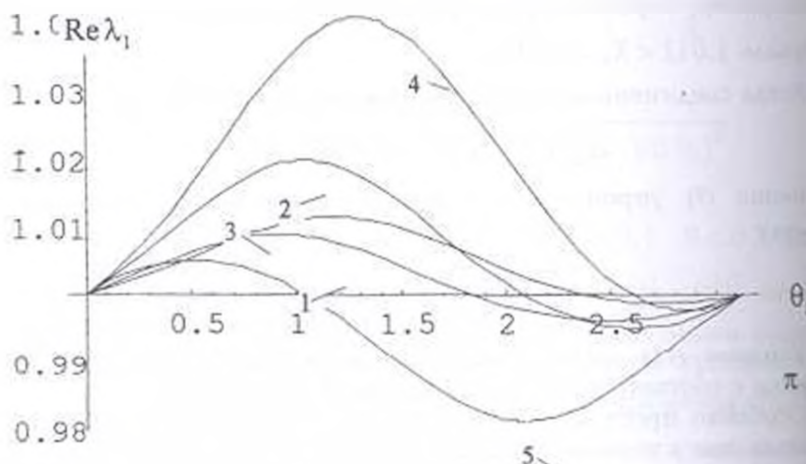
$$\pi - \sqrt{\pi^2 - (\ln r_2/r_1)^2} < (\varphi_1+\varphi_2) < \pi + \sqrt{\pi^2 - (\ln r_2/r_1)^2}$$

т.е. когда $0.0432 < r_2/r_1 < 23.141$ и $\varphi_1 + \varphi_2 < 2\pi$. Последнее условие имеет место, в частности, когда $\arg\mu_1 < \arg\mu_2$ и $\arg\bar{\mu}_2 < \varphi_2 < \arg\bar{\mu}_1$.

На фиг. 2а и 2б приведены кривые зависимости $\mathrm{Re}\lambda_1$ от угла θ_1 (в рад.) для девяти различных комбинаций соединенных пар.



Фиг. 2а



Фиг. 2б

Кривые 1, 2 и 3 на фиг. 2а построены для случая, когда одна составляющая кусочно-однородного тела является изотропным материалом $(\mu_1 = i)$, а вторая – стеклопластиком Б [6], соответственно вырезанным под углами $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/6$, $\alpha = \pi/12$ и имеющим, следовательно, комплексные параметры $\mu_2 = 0.1497 + i0.9882$, $\mu_2 = -0.1206 + i0.9199$ и $\mu_2 = -0.0656 + i0.8753$. Для четвертой кривой $\mu_2 = 0.0656 + i0.8753$.

Приведенные на фиг. 2б кривые 1, 2 и 3 соответствуют случаю, когда обе части составного клина изготовлены из стеклопластика Б, вырезанного под разными углами по отношению к армировке (для кривой 1– $\alpha=\pi/4$ и $\alpha=\pi/6$; для кривой 2– $\alpha=\pi/4$ и $\alpha=\pi/12$; для кривой 3– $\alpha=\pi/6$ и $\alpha=\pi/12$). Кривые 4 и 5 построены для составного клина из анизотропного материала ($\mu_2 = 0.0656 + i0.8753$) и стеклопластика Б, вырезанного под углами $\alpha=\pi/4$ и $\alpha=\pi/6$ соответственно.

Вышеприведенный анализ и численные расчеты (кривые на фиг. 2а и 2б) показывают, что в отличие от кусочно-однородного изотропного клина, в составном прямолинейно-анизотропном клине окрестность угловой точки линии раздела может быть малонапряженной.

Отметим, что двумерные краевые задачи теории упругости для клиновидных прямолинейно-анизотропных тел (однородных или кусочно-однородных) при различных ненулевых граничных условиях можно успешно решить с помощью интегрального преобразования Меллина аналитической функции $f(x+\mu y)$ [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1987. 338с.
2. Саргсян А.М. Поведение плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного цилиндрически анизотропного тела. // В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН Армении. 1993. С. 157-162.
3. Алексанян Р.К., Чобанян К.С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня. // ПМ. 1977. Т. XIII. №6. С. 90-96.
4. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина. //Изв.НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №1. С. 17-22.
5. Аликян Ж.Г., Саргсян А.М. Поведение стационарных физических полей в окрестности угловой точки линии раздела кусочно-однородного цилиндрически-анизотропного тела. //Изв.АН Армении. Механика. 1991. Т. 44. №6. С. 3-9.
6. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тейперс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572с.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 416с.
8. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского университета, 1997. 241с.
9. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.
10. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. //МТТ. 1979. №6. С. 33-41.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.07.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Агаловян Л. А., Азатян Г. Л.

Լ. Ա. Աղալովյան, Գ. Լ. Ազատյան

Օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումները մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալում առկա է մածուցիկ դիմադրություն: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ ազատ է: Որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, սեփական տատանումների հաճախությունները ու տատանման ձևերը: Ապացուցված է, որ օրթոտրոպ սալում կարող են առաջանալ երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկուսը սահքային և մեկը երկայնական: Որոշված են տատանումների՝ մածուցիկ դիմադրությունով պայմանավորված մարման բնութագրիչները:

L.A. Aghalovyan, G.L. Azatyan

The free vibrations of orthotropic plates at the presence of viscous resistance

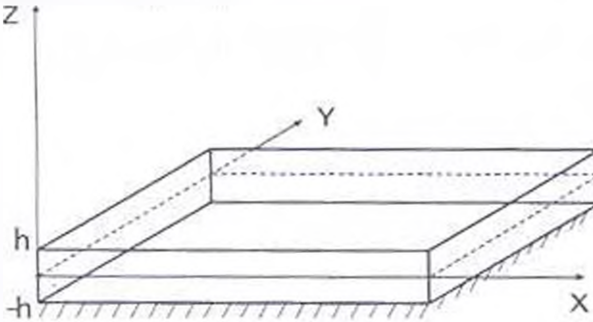
By means of asymptotic method a three-dimensional dynamic problem is solved for the elasticity theory related to free vibrations of orthotropic plates at presence of viscous resistance. The bottom side f a plate is rigidlv fastened, and top one is free. Asymptotics for the components of the tensor of stress and vector of displacement are found. The kinds of free vibrations are established. Is proved, that in the orthotropic plate there can be free vibrations of three types: two shear and one longitudinal ones. The values of frequencies and form of free vibrations, and also parameters of vibrations damping, caused by viscous resistance are determined.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления. Нижняя грань пластинки жестко защемлена, а верхняя – свободна. Найдены асимптотики для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены виды собственных колебаний. Доказано, что в ортотропной пластине могут возникнуть собственные колебания трех типов: два сдвиговых и одно продольное. Определены значения частот и формы собственных колебаний, а также обусловленные вязким сопротивлением параметры затухания колебаний.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Метод оказался особенно эффективным для решения неклассических с точки зрения теории пластин и оболочек краевых задач. Была найдена принципиально новая асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, которая позволила найти решения новых классов статических и динамических краевых задач [2-8]. Некоторые классы задач о собственных и вынужденных колебаниях полос-балок и пластин рассмотрены в [9-11]. Обзор работ по использованию асимптотического метода для определения напряженно-деформированных состояний тонких тел при статических и динамических воздействиях содержится в [12].

В работе рассматривается задача о собственных колебаниях ортотропной пластинки $D=\left\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ \left|z\right|\le h,\ h<<l\right\}$ при наличии вязкого сопротивления.

Предполагается, что нижняя грань пластинки жестко защемлена, а верхняя свободна (фиг. 1).



Фиг. 1.

D_0 – срединная поверхность пластинки, а l – ее характерный тангенциальный размер.

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0 \text{ при } z = h \tag{1.1}$$

$$u=v=w=0 \text{ при } z = -h \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности конкретизировать не будем, поскольку, как показано в [13], они для этого класса задач непосредственно не влияют на значения частот собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в зоне пограничного слоя.

Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки и собственные функции, соответствующие граничным условиям (1.1),(1.2). Для этого необходимо найти ненулевые решения системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропного тела:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}-k_1\frac{\partial u}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad (x,y,z;\ u,v,w) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=a_{55}\sigma_{xz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=a_{13}\sigma_{xx}+a_{23}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz},\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=a_{44}\sigma_{yz}$$

при граничных условиях (1.1),(1.2), где $\vec{R}=-k_1\vec{V}$ – вязкое сопротивление.

Решение системы уравнений (1.3) будем искать в виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jk}(x,y,z)\exp(\omega t)$$

$$(u,v,w)=(\bar{u},\bar{v},\bar{w})\exp(\omega t)\quad \alpha,\beta=x,y,z;\quad j,k=1,2,3 \tag{1.4}$$

где ω — искомая частота собственных колебаний.

Подставив (1.4) в уравнения (1.3), получим:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}-k_1\bar{u}\omega-\rho\omega^2\bar{u}=0 \quad (\bar{u},\bar{v},\bar{w};x,y,z;1,2,3)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33},\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}=a_{66}\sigma_{12},\quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=a_{55}\sigma_{13},\quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}=a_{44}\sigma_{23} \tag{1.5}$$

Перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\begin{aligned}&\xi=x/l,\qquad \eta=y/l,\qquad \zeta=z/h\\ &U=\bar{u}/l,\quad V=\bar{v}/l,\quad W=\bar{w}/l\end{aligned} \tag{1.6}$$

В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=\dfrac{h}{l}$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta}-2K\varepsilon^{-2}\omega_*U-\varepsilon^{-2}\omega_*^2U=0 \quad (U,V,W;\xi,\eta,\zeta;1,2,3)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}, && \frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}\\ &\frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}, && \frac{\partial W}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13}\\ &\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}, && \frac{\partial W}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23}\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\omega_*^2=\rho h^2\omega^2;\quad 2K=\frac{k_1h}{\sqrt{\rho}}$$

Эту сингулярно возмущенную систему будем решать асимптотическим методом. Решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned}&\sigma_{jk}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\\ &(U,V,W)=\varepsilon^{s}(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}),\\ &\omega_*=\varepsilon^{s}\omega_{*s}, \qquad\qquad s=\overline{0,S};\end{aligned} \tag{1.8}$$

где обозначение $s=\overline{0,S}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $[0,S]$.

Подставив (1.8) в (1.7), применив правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.8) получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}U^{(s-m)}-C_mU^{(s-m)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}V^{(s-m)}-C_mV^{(s-m)}=0 \qquad m=\overline{0,s}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}W^{(s-m)}-C_mW^{(s-m)}=0$$

$$C_m=\omega_{*m-n}\omega_n,\quad n=\overline{0,m}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22}^{(s)}+a_{13}\sigma_{33}^{(s)},\quad \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22}^{(s)}+a_{23}\sigma_{33}^{(s)} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}^{(s)}+a_{23}\sigma_{22}^{(s)}+a_{33}\sigma_{33}^{(s)}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)},\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13}^{(s)},\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23}^{(s)}$$

$$Q^{(s)}\equiv 0 \text{ при } s<0.$$

В (1.9) все величины можно выразить через $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$ по формулам:

$$\sigma_{11}^{(s)}=-A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right],\quad \sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

где

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\Delta},\quad A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{\Delta},\quad A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{\Delta}$$

$$A_{12}=\frac{a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23}}{\Delta},\quad A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},\quad A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta} \tag{1.11}$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{22}a_{13}^2-a_{11}a_{23}^2-a_{33}a_{12}^2$$

Для определения же $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$, подставив значения $\sigma_{jk}^{(s)}$ в первые три уравнения (1.9), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}-a_{55}(2K\omega_{*m}+C_m)U^{(s-m)}=R_U^{(s)},$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2}-a_{44}(2K\omega_{*m}+C_m)V^{(s-m)}=R_V^{(s)},\qquad m=\overline{0,s}$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2}-(2K\omega_{*m}+C_m)W^{(s-m)}=R_W^{(s)},\tag{1.12}$$

где

$$R_U^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$R_V^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-a_{44}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]\tag{1.13}$$

$$R_W^{(s)}=A_{21}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}+A_{31}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-\left[\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

Очевидно, что $R_U^{(0)}=R_V^{(0)}=R_W^{(0)}=0$.

2. Чтобы определить значения частот, рассмотрим уравнения (1.12) при $s=0$:

$$\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial\zeta^2}-a_{55}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)U^{(0)}=0,\quad \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial\zeta^2}-a_{44}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)V^{(0)}=0$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial\zeta^2}-(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)W^{(0)}=0\tag{2.1}$$

Решениями уравнений (2.1) являются:

$$U^{(0)}=A_u^{(0)}(\xi,\eta)\operatorname{ch}\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}\,\zeta+B_u^{(0)}(\xi,\eta)\operatorname{sh}\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}\,\zeta\tag{2.2}$$

$$V^{(0)}=A_v^{(0)}(\xi,\eta)\operatorname{ch}\sqrt{a_{44}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}\,\zeta+B_v^{(0)}(\xi,\eta)\operatorname{sh}\sqrt{a_{44}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}\,\zeta\tag{2.3}$$

$$W^{(0)}=A_w^{(0)}(\xi,\eta)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2}{A_{11}}}\,\zeta+B_w^{(0)}(\xi,\eta)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2}{A_{11}}}\,\zeta\tag{2.4}$$

Используя (2.2), удовлетворив условиям (1.1),(1.2) относительно σ_{13}, u и учитывая, что $\sigma_{13}^{(0)}=\dfrac{1}{a_{55}}\dfrac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta}$, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно функций $A_u^{(0)}$, $B_u^{(0)}$. Из условия существования ненулевого решения этой системы вытекает

$$\operatorname{ch}2\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}=0 \text{ или } \sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}=\frac{\pi}{4}(2n+1)i\;,\; n\in N\tag{2.5}$$

откуда следует: $\omega_{*0n}=-K\pm\sqrt{K^2-\dfrac{\pi^2}{16a_{55}}(2n+1)^2}\;,\; n\in N$ (2.6)

Рассмотрим следующие возможные варианты:

I. $K > \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1)$

имеем

$$а)\ \omega_{0n1} = -\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_1, \quad где\ 0 < \theta_1 < 1 \tag{2.7}$$

$$б)\ \omega_{0n2} = -\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_2, \quad где\ 1 < \theta_2 < 2$$

Из (1.4), (2.7) следует, что собственные колебания затухают без явного колебания, как

$$\exp(-\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_1 t), \qquad \exp(-\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_2 t)$$

II. $K < \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1)$

будем иметь

$$\omega_{*0n} = K\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right] \tag{2.8}$$

Затухание собственных колебаний будет колебательным.

Учитывая, что $\frac{1}{a_{55}} = G_{13}$ достаточно большое число, на практике вариант II будет встречаться часто. Поэтому этот случай рассмотрим более подробно.

Итак, определили некоторый класс значений частот собственных колебаний пластинки, которые будем обозначать индексом " I ". С учетом (1.7) имеем:

$$\omega^I_{*0n} = \frac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right], \ n \in N \tag{2.9}$$

Из (2.2), (2.5) (2.6) имеем

$$A^{(0)}_n = B^{(0)}_n \operatorname{th}\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega^2_{*0})} \tag{2.10}$$

Подставив (2.10) в (2.2), получим

$$U^{(0)}_{nI} = B^{(0)}_{nIn}\left(\operatorname{th}\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\operatorname{ch}\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\zeta + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh}\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\zeta\right) = B^{(0)}_{*n}(\xi,\eta)\operatorname{sh}\left[(1+\zeta)\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\right]$$

или с учетом (2.5)

$$U^{(0)}_{nI} = D^{(0)}_{*n}(\xi,\eta)\sin(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1), \ где\ D^{(0)}_{*n} = iB^{(0)}_{*n}(\xi,\eta) \tag{2.11}$$

Точно так же удовлетворив остальным условиям (1.1),(1.2), получим новые значения частот: $\omega^{\mathrm{II}}_{*0n}$, $\omega^{\mathrm{III}}_{*0n}$.

Если $\omega_{*0} = \omega^{\mathrm{I}}_{*0n}$, то оно не будет удовлетворять условиям разрешимости существования ненулевых решений систем алгебраических уравнений, соответствующих (1.1),(1.2),(2.3) и (2.4), откуда следует, что эти системы будут иметь нулевые решения:

$$V^{(0)}_{n\mathrm{I}} = W^{(0)}_{n\mathrm{I}} = 0 \qquad (2.12)$$

Точно так же, если $\omega_{*0} = \omega^{\mathrm{II}}_{*0n}$, то:

$$U^{(0)}_{n\mathrm{II}} = W^{(0)}_{n\mathrm{II}} = 0 \qquad (2.13)$$

А при $\omega_{*0} = \omega^{\mathrm{III}}_{*0n}$:

$$U^{(0)}_{n\mathrm{III}} = V^{(0)}_{n\mathrm{III}} = 0 \qquad (2.14)$$

Итак, мы имеем три типа собственных колебаний:

1. Колебания с частотами $\omega^{I}_{*n} = \dfrac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\,\right]$

и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$U^{(0)}_{nI} = D^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\sin(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)$$

$$V^{(0)}_{nI} = 0,\quad W^{(0)}_{nI} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{11\,\mathrm{I}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{22\,\mathrm{I}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{33\,\mathrm{I}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{12\,\mathrm{I}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{23\,\mathrm{I}} = 0$$

$$\sigma^{(0)}_{13\,\mathrm{I}} = D^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{55}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \qquad (2.15)$$

2. Колебания с частотами $\omega^{II}_{*n} = \dfrac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{a_{44}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\,\right]$

и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$V^{(0)}_{n\mathrm{II}} = D^{(0)}_{vn}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$U^{(0)}_{n\mathrm{II}} = 0,\quad W^{(0)}_{n\mathrm{II}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{11\,\mathrm{II}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{22\,\mathrm{II}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{33\,\mathrm{II}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{12\,\mathrm{II}} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{13\,\mathrm{II}} = 0$$

$$\sigma^{(0)}_{23\,\mathrm{II}} = D^{(0)}_{vn}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{44}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \qquad (2.16)$$

3. Колебания с частотами $\omega_{0n}^{III} = \frac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\frac{\pi\sqrt{A_{11}}}{4K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right]$ и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$W_{nIII}^{(0)} = D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)], \quad U_{nIII}^{(0)} = 0, \quad V_{nIII}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{11\,III}^{(0)} = -D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{23}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$\sigma_{22\,III}^{(0)} = -D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{13}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.17}$$

$$\sigma_{33\,III}^{(0)} = D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{11}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$\sigma_{12\,III}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{13\,III}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{23\,III}^{(0)} = 0$$

3.О приближениях s ≥ 1. Рассмотрим уравнения (1.12) при s = 1. Сперва рассмотрим первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^{I}$:

$$\frac{\partial^2 U_{n1}^{(1)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}(2K\omega_{*0n}^{I} + \omega_{*0n}^{I^2})U_{n1}^{(1)} - 2a_{55}\left(K\omega_{*1n}^{I} + \omega_{*0n}^{I}\omega_{*1n}^{I}\right)U_{n1}^{(0)} = R_{Un1}^{(1)} \tag{3.1}$$

Решение $U_{n1}^{(1)}$ представим в виде ряда по собственным функциям $U_{n1}^{(0)}$ нулевого приближения, которые составляют ортогональную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$

$$U_{n1}^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}U_{m1}^{(0)} \tag{3.2}$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.1), (1.2), соответствующим u и σ_{xz}. Подставив (3.2) в (3.1), с учетом (2.1) получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{55}b_{nm}\left[2K(\omega_{*0m}^{I} - \omega_{*0n}^{I}) + \omega_{*0m}^{I^2} - \omega_{*0n}^{I^2}\right]U_{m1}^{(0)} = 2a_{55}\left(K\omega_{*1n}^{I} + \omega_{*0n}^{I}\omega_{*1n}^{I}\right)U_{n1}^{(0)} + R_{Un1}^{(1)} \tag{3.3}$$

Умножив (3.3) на $U_{k1}^{(1)}$ и проинтегрировав по ζ на отрезке [-1, 1], учитывая ортогональность функций $\left\{U_{n1}^{(0)}\right\}$, получим:

$$a_{55}b_{nk}\left[2K(\omega_{*0k}^{I} - \omega_{*0n}^{I}) + \omega_{*0k}^{I^2} - \omega_{*0n}^{I^2}\right] = 2a_{55}\left(K\omega_{*1n}^{I} + \omega_{*0n}^{I}\omega_{*1n}^{I}\right)\delta_{nk} + R_{Unk1}^{(1)} \tag{3.4}$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, а

$$R_{Unk1}^{(1)} = \frac{1}{\left(D_{Uk}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1} R_{Un1}^{(1)}U_{k1}^{(0)}d\zeta \tag{3.5}$$

При $k = n$ из (3.4) будем иметь:

$$\omega'_{*1n} = -\frac{R^{(1)}_{Un1}}{2a_{ss}\left(K + \omega'_{*0n}\right)} \tag{3.6}$$

а при $k \neq n$:

$$b_{nk} = \frac{R^{(1)}_{Uk1}}{a_{ss}\left[2K(\omega'_{*0k} - \omega'_{*0n}) + \omega'^2_{*0k} - \omega'^2_{*0n}\right]} \tag{3.7}$$

Из(1.10), (1.13) и (2.12) следует:

$$R^{(1)}_{Ul} = 0 \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$b_{nk} = 0 \qquad\qquad k \neq n \tag{3.9}$$

$$\omega^1_{*1n} = 0 \qquad\qquad n \in N \tag{3.10}$$

Для определения b_{nn} нормируем U_n [14,15]

$$\frac{1}{\left\|U^{(0)}_{n1}\right\|^2}\int_{-1}^{1}[U^{(0)}_{n1} + \varepsilon U^{(1)}_{n1}]^2 d\zeta = 1,\ \text{где}\ \left\|U^{(0)}_{n1}\right\|^2 = \int_{-1}^{1}\left[U^{(0)}_{n1}\right]^2 d\zeta \tag{3.11}$$

откуда получим:

$$\int_{-1}^{1} U^{(0)}_{n1} U^{(1)}_{n1} d\zeta = 0 \tag{3.12}$$

Подставив $U^{(1)}_n$ в (3.12), используя (3.2), будем иметь:

$$b_{nn} = 0 \tag{3.13}$$

Итак, имеем:

$$U^{(1)}_{n1} = 0,\ \omega^1_{*1n} = 0, \qquad n \in N \tag{3.14}$$

Теперь рассмотрим приближение s = 2. Первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n} = \omega^1_{*0n}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}_{n1}}{\partial\zeta^2} - a_{ss}(2K\omega'_{*0n} + \omega'^2_{*0n})U^{(2)}_{n1} - 2a_{ss}\left(K\omega'_{*2n} + \omega'_{*0n}\omega'_{*2n}\right)U^{(0)}_{n1} = R^{(2)}_{Un1} \tag{3.15}$$

Решение снова ищем в виде:

$$U^{(2)}_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} U^{(0)}_{m1} \tag{3.16}$$

Повторив те же действия, получим:

$$a_{ss}c_{nk}\left[2K(\omega'_{*0k} - \omega'_{*0n}) + \omega'^2_{*0k} - \omega'^2_{*0n}\right] = 2a_{ss}\left(K\omega'_{*2n} + \omega'_{*0n}\omega'_{*2n}\right)\delta_{nk} + R^{(2)}_{Unk1} \tag{3.17}$$

где

$$R^{(2)}_{Unk1} = \frac{1}{\left(D^{(0)}_U\right)^2}\int_{-1}^{1} R^{(2)}_{Un1} U^{(0)}_{k1} d\zeta \tag{3.18}$$

Из (3.17) следует:

$$\omega'_{*2n} = -\frac{R^{(2)}_{Un1}}{2a_{ss}\left(K + \omega'_{*0n}\right)} \quad \text{при} \quad k = n \tag{3.19}$$

$$c_{nk} = \frac{R^{(2)}_{(1nk)}}{a_{55}\left[2K(\omega'_{*0k} - \omega'_{*0n}) + \omega'^{2}_{*0k} - \omega'^{2}_{*0n}\right]} \quad \text{при} \quad k \neq n \tag{3.20}$$

Из (1.13) имеем

$$R^{(2)}_{(1n1)} = -\frac{\partial^2 W^{(1)}_1}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}\left[\frac{\partial\sigma^{(1)}_{111}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma^{(1)}_{121}}{\partial\eta}\right] \tag{3.21}$$

$W^{(1)}_1$ определяется из третьего уравнения (1.12) $\sigma^{(1)}_{111}$, $\sigma^{(1)}_{121}$ определяются из (1.10) при $s = 1$ и $\omega_{*0n} = \omega^{\mathrm{I}}_{*0n}$, удовлетворив соответствующим граничным условиям (1.1), (1.2) относительно σ_{in}, W'. Определитель вытекающей алгебраической системы будет отличным от нуля, следовательно, $W^{(1)}_1$ определится однозначно.

В итоге по формулам (3.19), (3.20) определятся $\omega^{\mathrm{I}}_{*2n}$ и c_{nk}. Для определения c_{nn} поступим так же, как в случае b_{nn}, в результате получим:

$$c_{nn} = 0 \tag{3.22}$$

Значения $U^{(2)}_{n1}$ и $\omega^{\mathrm{I}}_{*2n}$ отличны от нуля.

Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} \omega^{\mathrm{I}}_{*n} = \omega^{\mathrm{I}}_{*0n} + \varepsilon^2\omega^{\mathrm{I}}_{*2n} \\ U_{n1} = U^{(0)}_{n1} + \varepsilon^2 U^{(2)}_{n1} \end{cases} \tag{3.23}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\omega_{*0n} = \omega^{\mathrm{II}}_{*0n}$ и $\omega_{*0n} = \omega^{\mathrm{III}}_{*0n}$. В итоге будем иметь:

$$V^{(1)}_{n\mathrm{II}} = 0,\ \omega^{\mathrm{II}}_{*1n} = 0, \quad V^{(2)}_{n\mathrm{II}} \neq 0,\ \omega^{\mathrm{II}}_{*2n} \neq 0 \tag{3.24}$$

$$W^{(1)}_{n\mathrm{III}} = 0,\ \omega^{\mathrm{III}}_{*1n} = 0, \quad W^{(2)}_{n\mathrm{III}} \neq 0,\ \omega^{\mathrm{III}}_{*2n} \neq 0 \tag{3.25}$$

Из полученных результатов следует, что начальное приближение дает достаточно точные значения для частот и форм собственных колебаний. Поэтому, значения частот для исходного приближения назовем главными и в практических приложениях можно ограничиться этими значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука.Физматлит. 1997. 414 с.
3. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. // Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
4. Агаловян Л А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы

Винклера. // В сб.: ХШ Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Часть первая. Таллин. 1983 С. 13-18.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией// В сб.: Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 105-110.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1989. Т. 42. №3. С. 28-36.
7. Агаловян М. Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии. //Докл. НАН Армении. 1996. Т. 96. №2-4. С. 23-24.
8. Агаловян Л. А., Сарксян Л. С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы //Тр. XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. Р. Ф. Саратов 1997. Том 1. С. 30-38.
9. Агаловян Л. А., Халатян Л. М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №4. С.315-321.
10. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Сб. докладов XIX международной конференции по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
11. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл. НАН РА. 2003. Т. 103. №4. С. 296-301.
12. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел// Международный научный журнал. Прикладная механика. 2002. Т. 38. № 7. С. 3-24.
13. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления колебания и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 132-135.
14. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398 с.
15. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Изд-во Мир. 1976. 455 с.

Институт механики,
НАН Армении

Поступила в редакцию
8.11.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Багдасарян З.Р.

Զ.Ռ.Բաղդասարյան
Սալի գլանային ծռման խնդիրը ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ հեծանի, կամ սալի ծռման խնդիրներում կարևոր նշանակություն ունի ընդլայնական սահքերի հաշվառումը :

Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկվում է սալի գլանային ծռման խնդիրը, երբ այն հոդակապորեն ամրակցված է երկու հանդիպակաց եզրերով և երբ սալի մի եզրը ազատ է, իսկ մյուսը կոշտ ամրակցված: Երկու դեպքերում էլ սալի վրա ազդում են հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռներ:

Սահմանային անցման շնորհիվ, երբ ընդհանուր բեռնավորվածությունը մնում է հաստատուն, իսկ բեռի կիրառման տիրույթը ձգտում է զրոյի՝ ստացվում է կենտրոնացված բեռի խնդրի լուծումը:

Հաշված է սալի ճկվածքի մեծագույն արժեքը և ցույց է տրված, որ ընդլայնական սահքերի հաշվառումը բերում է ճկվածքի մեծացմանը:

Z.R.Baghdasaryan
On the Problem of Cylindrical Bending of Plate with the Regard of Transversal Shear

The accounting of transversal shear is of very important in the problems where plate or beam is bending under action of concentric forces.

In the paper the cylindrical bending of a plate is considered by means both of specified theory of high range- the theory of Ambartsumyan S. [1] and specified theory of first range- the theory of Raisner- Hanky- Mindlin [2].

The two boundary problems are considered, when the normal distributed transversal loads are applied.

Passing to the limit, when general load is stayed constant, and loading domain is vanished, the solution of for concentrated force is attained.

The plate maximal displacement is calculated and it is shown that transversal shear accounting brings to increase of displacement.

Учет поперечных сдвигов имеет важное значение в тех задачах, в которых пластинка или балка изгибается под действием сосредоточенных сил.

В настоящей работе на основе уточненной теории высокого порядка–теории Амбарцумяна (A) [1] и на основе уточненной теории первого порядка–теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева (B) [2] рассматривается цилиндрический изгиб изотропной пластинки в случае, когда пластинка шарнирно закреплена по двум противоположным краям и в случае, когда один край пластинки жестко защемлен, а другой свободен. В обоих случаях на пластинку действуют нормально распределенные поперечные нагрузки.

С помощью предельного перехода, когда общая нагрузка остаётся постоянной, а область нагружения стремится к нулю, получается решение задачи сосредоточенной силы.

Вычислен максимальный прогиб пластинки и показан, что учет поперечных сдвигов приводит к увеличению прогиба.

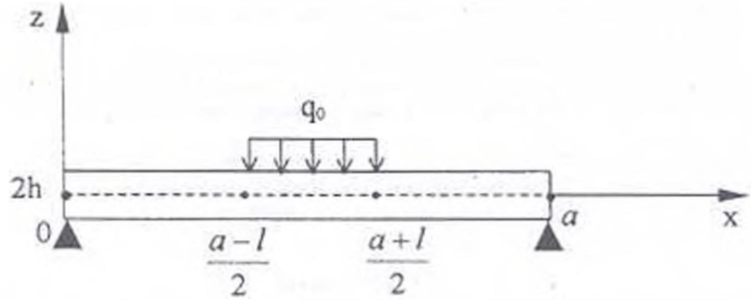
1. Рассматривается пластинка толщиной $2h$ и длиной a, которая шарнирно закреплена по двум краям.

Прямоугольная система координат выбирается так, как показано на (фиг.1) и предполагается, что на поверхности пластинки по следующему закону:

$$
q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x < \dfrac{a-l}{2} \\ q_0 & \text{при} \quad \dfrac{a-l}{2} \le x \le \dfrac{a+l}{2} \qquad (0 < l < a) \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{a+l}{2} < x \le a \qquad (q_0 = \text{const}) \end{cases}
$$

действует равномерно распределенная поперечная нагрузка (фиг.1).

Считается, что перемещения точек пластинки не зависят от координаты y, то есть рассматривается одномерная задача.



Фиг.1

Сначала поставленная задача решается по теории (А).

Перемещения точек пластинки имеют вид [3]

$$
u_1 = u - z\frac{dw}{dx} + \frac{1}{G}g(z)\varphi, \quad u_3 = w \tag{1.1}
$$

где

$$
g(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \tag{1.2}
$$

u –перемещение по направлению оси абсцисс, w–прогиб пластинки, G–модуль сдвига, а функции φ и w не зависят от координаты z.

Уравнения изгиба пластинки имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{4h}{3}\frac{d\varphi}{dx} = -q(x) \\
D\frac{d^3w}{dx^3} - \frac{16h^2}{15(1-\nu)}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{4h}{3}\varphi = 0
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

где

$$
D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.4}
$$

Граничные условия шарнирного закрепления следующие [3]:

$$
w=0, \ \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{4}{5G}\frac{d\varphi}{dx} = 0 \ \text{при } x=0 \text{ и } x=a \tag{1.5}
$$

Решив систему (1.3) при граничных условиях (1.5), для прогиба пластинки получим

$$w(x)=\frac{1}{6D}\left[\int_0^x (x-t)^3 q(t)dt-\frac{x^3}{a}\int_0^a (a-t)q(t)dt-\right.$$

$$-\frac{x}{a}\int_0^a (a-t)^3 q(t)dt+ax\int_0^a (a-t)q(t)dt-$$

$$\left.-\frac{12\gamma h^2}{1-\nu}\int_0^x (x-t)q(t)dt+\frac{12\gamma h^2 x}{(1-\nu)a}\int_0^a (a-t)q(t)dt\right] \tag{1.6}$$

где $\gamma=2/5$.

Если же эту задачу исследовать на основе теории (В), то в выражении прогиба (1.6) следует поставить $\gamma=1/3$.

Если учесть, что прогиб пластинки достигает своего максимального значения при $x=a/2$, получится

$$\max w=\frac{q_0 a^3 l}{48D}\left[1+\frac{l^3}{8a^3}-\frac{l^2}{2a^2}+\frac{24\gamma h^2}{(1-\nu)a^2}\left(1-\frac{l}{2a}\right)\right] \tag{1.7}$$

При $l\to 0$ и $q_0 l\to P$ (P=const) получится случай сосредоточенной силы и из формулы (1.7) для максимального прогиба получится

$$\max w=\frac{Pa^3}{48D}\left[1+\frac{24\gamma h^2}{(1-\nu)a^2}\right] \tag{1.8}$$

В случае $l=a$ $\max w$ имеет вид

$$\max w=\frac{5q_0 a^4}{384}\left[1+\frac{96\gamma h^2}{5(1-\nu)a^2}\right] \tag{1.9}$$

что совпадает с решением, приведенным в [1] при $\gamma=2/5$.

Если в формулах (1.7)–(1.9) пренебречь отношением h^2/a^2, получатся соответствующие значения прогиба, полученные по теории Кирхгофа [4].

Вычислив значения напряжений σ_{11} при $x=\dfrac{a}{2}$ и $x=\dfrac{a-l}{2}$ $(z=h)$, получается

$$\sigma_{11}\Big|_{x=\frac{a}{2}}=\frac{3q_0 al}{8h^2}\left[1-\frac{l}{2a}+\frac{8h^2}{15(1-\nu)al}\right] \tag{1.10}$$

$$\sigma_{11}\Big|_{x=\frac{a-l}{2}}=\frac{3q_0 al}{8h^2}\left[1-\frac{l}{a}+\frac{8h^2}{15(1-\nu)al}\right] \tag{1.11}$$

Из формул (1.10) и (1.11) видно, что в случае сосредоточенной силы ($l\to 0$ и $q_0 l\to P$) напряжение σ_{11} неограниченно возрастает, т.е.

напряжение σ_{11} существенно зависит от l, если учитывается поперечный сдвиг.

По теории (В) для напряжения σ_{11} имеется

$$\sigma_{11}\Big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{3q_0 al}{8h^2}\left(1-\frac{l}{2a}\right),\ \sigma_{11}\Big|_{x=\frac{a-l}{2}} = \frac{3q_0 al}{8h^2}\left(1-\frac{l}{a}\right) \tag{1.12}$$

откуда видно, что по этой теории напряжение σ_{11} не зависит от поперечного сдвига.

Далее, по обеим теориям, как при $x=\dfrac{a}{2}$, так и при $x=\dfrac{a-l}{2}$ для момента M_1 получаются одинаковые выражения

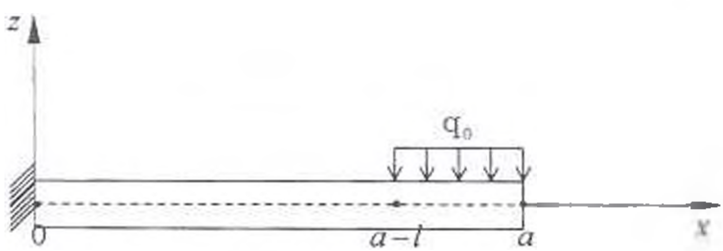
$$M_1\Big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{q_0 al}{4}\left(1-\frac{l}{2a}\right),\ M_1\Big|_{x=\frac{a-l}{2}} = \frac{q_0 al}{4}\left(1-\frac{l}{a}\right) \tag{1.13}$$

Очевидно, момент M_1 не зависит от учета поперечного сдвига.

2. Теперь предполагается, что один край пластинки жестко защемлен, а другой свободен. Координатная система остается без изменения и предполагается, что на поверхности пластинки по следующему закону:

$$q(x)=\begin{cases}0 \text{ при } & 0\le x<a-l\\ q_0 \text{ при } & a-l\le x\le a\end{cases}$$

действует равномерно распределенная поперечная нагрузка (фиг. 2)



Фиг. 2

Согласно постановке задачи нужно решить систему (1.3) при граничных условиях

$$w=0,\ \frac{dw}{dx}-\frac{4}{5G}\varphi=0 \qquad \text{при } x=0$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{4}{5G}\frac{d\varphi}{dx}=0,\ \ \varphi=0 \quad \text{при } x=a \tag{2.1}$$

Сделав вышесказанное, для прогиба пластинки получим

$$w(x)=\frac{1}{6D}\left[\int_0^x (x-t)^3 q(t)dt - x^3 q_0 l + 3x^2 a q_0 l\left(1-\frac{l}{2a}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{6\gamma h^2}{1-\gamma}\left(2xq_0 l-\int_0^x (x-t)q(t)dt\right)\right] \tag{2.2}$$

где, как и прежде, $\gamma = 2/5$ по теории (А) и $\gamma = 1/3$ по теории (В).

Если учесть, что в рассмотренном случае прогиб пластинки достигает своего максимума при $x=a$, то получится

$$\max w = \frac{q_0 a^3 l}{3D}\left[1-\frac{3l}{4a}+\frac{l^3}{8a^3}+\frac{6\gamma h^2}{(1-\nu)a^2}\left(1-\frac{l}{2a}\right)\right] \tag{2.3}$$

При $l \to 0$ и $q_0 l \to P$ (P=const) получится случай сосредоточенной силы и из формулы (2.3) для максимального прогиба получится

$$\max w = \frac{Pa^3}{3D}\left[1+\frac{6\gamma h^2}{(1-\nu)a^2}\right] \tag{2.4}$$

В случае $l = a$ для максимального прогиба получится

$$\max w = \frac{q_0 a^4}{8D}\left[1+\frac{8\gamma h^2}{(1-\nu)a^2}\right] \tag{2.5}$$

что также совпадает с результатом, приведенным в [1] при $\gamma = 2/5$.

Если в формулах (2.3)–(2.5) пренебречь отношением h^2/a^2, получатся соответствующие значения прогиба, полученные по теории Кирхгофа [4].

Вычислив значения напряжений σ_{11} при x=0 и $x=a-l$ ($z=h$), получается

$$\sigma_{11}\big|_{x=0} = \frac{3q_0 al}{2h^2}\left(1-\frac{l}{2a}\right),\ \sigma_{11}\big|_{x=a-l} = \frac{3q_0 l^2}{4h^2}\left[\frac{4h^2}{15(1-\nu)l^2}-1\right] \tag{2.6}$$

Здесь, как и выше, если принять $\gamma = 1/3$, то получим значение прогиба по теории (В).

По теории (В) для напряжения σ_{11} получается

$$\sigma_{11}\big|_{x=0} = \frac{3q_0 al}{2h^2}\left(1-\frac{l}{2a}\right),\ \sigma_{11}\big|_{x=a-l} = \frac{3q_0 l^2}{4h^2} \tag{2.7}$$

Далее, по теориям (А) и (В) для момента M_1 при x=0 и $x = a-l$ получается

$$M_1\big|_{x=0} = -\frac{q_0 l}{2}(2a-l),\ M_1\big|_{x=a-l} = -\frac{q_0 l^2}{2} \tag{2.8}$$

Как видно, и в рассмотренном случае момент M_1 не зависит от учета поперечного сдвига.

По обеим теориям для перерезывающей силы на краю защемления пластинки получаются одинаковые выражения

$$N_1\big|_{x=0} = q_0 l \tag{2.9}$$

3. Рассматривается трансверсально-изотропная пластинка толщиной $2h$ и длиной a, которая шарнирно закреплена по двум краям.

Нагрузив пластинку, как и в первой задаче (фиг.1), для перемещений ее точек по теории (А) будем иметь

$$u_1 = u - z\frac{dw}{dx} + \frac{1}{G'}g(z)\varphi, \quad u_3 = w \tag{3.1}$$

где G' –модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

В результате, для искомых величин получаются те же формулы, что в пункте 1, заменив в этих формулах $\gamma = 2G/5G'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин. История и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. N3. С.110-115.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. /В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2002. С. 67-88.
4. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз,1962. 456с.

Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию
19.11.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Багдасарян Р.А.

Ռ.Ա. Բաղդասարյան

Երկու կիսաանվերջ վերադիրներով ուժեղացված կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկված է երկու միատեսակ կիսաանվերջ վերադիրներով ուժեղացված, երկու կիսաանվերջ սալերից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիրը, ընդ որում վերադիրները գտնվում են նյութերի բաժանման գծին զուգահեռ ուղղի վրա: Սալը դեֆորմացվում է անվերջ հեռու կետերում կիրառված և նյութերի բաժանման գծին զուգահեռ ձգող լարումների ազդեցության տակ:

Խնդիրը բերվում է վերադիրների ծայրերը միացնող հատվածին պատկանող սալի կետերի դեֆորմացիաների նկատմամբ ստացված սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Իր հերթին, ստացված ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերվում է քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծմանը:

Ստացված է նաև ասիմպտոտիկ բանաձև անվերջ հեռու կետերում կոնտակտային լարումների որոշման համար

R.A.Bagdasaryan

Problem for Piece-homogeneous Infinite Plate Reinforced by Two Semi-infinite Stringers

In the paper the problem is considered for piece-homogeneous infinite plate from two semi-infinite plates. The semi-infinite plate is strengthened by two same semi-infinite stringers lying on one line parallel to line of material separation.

The plate is deformed under action of tensile stresses applied on infinity parallel to line of material separation.

The problem is reduced to the solution of singular integral equation with respect to plates point deformation in the interval of stringer edges. Hereafter the solution of singular integral equation is reduced to the solution of quasi-regular infinite simultaneous linear algebraic equations.

The asymptotic formula is also obtained for contact stresses in infinite points.

В работе рассматривается задача для кусочно-однородной бесконечной пластины, состоящей из двух полубесконечных пластин, усиленной двумя одинаковыми полубесконечными стрингерами, находящимися на одной прямой, параллельной линии раздела материалов.

Пластина деформируется под действием растягивающих напряжений, приложенных на бесконечности и параллельных линий раздела материалов.

Задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно деформации точек пластины в промежутке между концами стрингеров. Далее решение сингулярного интегрального уравнения сводится к решению квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Получена также асимптотическая формула для определения контактных напряжений в бесконечно удаленных точках.

Пусть бесконечная кусочно-однородная пластина, состоящая из двух полубесконечных пластин с различными упругими постоянными, усилена двумя одинаковыми полубесконечными стрингерами, находящимися на одной прямой, параллельной линии раздела материалов пластины (фиг.1).

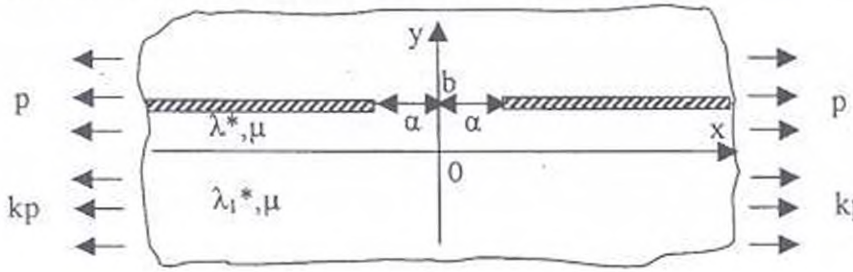
Ось абсцисс совпадает с линией раздела материалов. Стрингеры находятся на расстоянии h от оси абсцисс и на расстоянии a – от оси ординат.

Пластина деформируется под действием растягивающих напряжений $\sigma_x = p$, приложенных на бесконечности $|x| \to \infty$ при $y > 0$, а при $y < 0$ – под действием напряжений kp, где

$$k = \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\lambda^* + 2\mu}{\lambda_1^* + 2\mu_1}\frac{\lambda_1^* + \mu_1}{\lambda^* + \mu} = \frac{E_1}{E}$$

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \lambda_1^* = \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$

E_1, ν и E_1, ν_1 – модули упругости и коэффициенты Пуассона пластины соответственно при $y > 0$ и $y < 0$.



Фиг.1

Здесь, как и в [1], относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактных участков, а для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Задача заключается в определении контактных напряжений, действующих на контактных участках между стрингерами и пластиной.

Поставленная задача решается методом, изложенным в [2], где рассматривается аналогичная задача для упругой однородной полуплоскости.

В силу вышеуказанного, уравнения равновесия элемента стрингеров запишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2u_s}{dx^2} = \frac{\tau(x)}{E_sF_s} \quad \text{при } |x| > a \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\left.\frac{du_s}{dx}\right|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{du_s}{dx} \to \frac{p}{E} \quad \text{при } |x| \to \infty \tag{2}$$

где E_s и F_s – соответственно модуль упругости и площадь поперечного сечения стрингеров, $\tau(x) = d \cdot q(x)$, d – ширина стрингеров, $q(x)$ – контактные касательные напряжения под стрингерами, а $u_s(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров.

Отметим, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{F_s}\int_a^\infty \tau(s)ds = \frac{E_s}{E}p \tag{3}$$

Чтобы уравнения (1) и граничные условия (2) записать с помощью одного уравнения на оси $Ox(-\infty < x < \infty)$, введем функцию

$$U_s(x) = \theta(-x-a)\frac{du_s(x)}{dx} + \theta(x-a)\frac{du_s(x)}{dx}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Учитывая (1) и (2), для $U_s(x)$ получим

$$\frac{dU_s(x)}{dx} = \frac{1}{E_sF_s}\tau_1(x), \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4}$$

где $\tau_1(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)]\tau(x)$.

С другой стороны, для перемещения точек пластины имеем [3]

$$u^{(1)}_{(x,y)} = \frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{A_1 \ln\frac{1}{\left[(x-s)^2+(y+b)^2\right]^{1/2}} + A_2\frac{(y+b)^2}{(x-s)^2+(y+b)^2} + A_3\frac{yb\left[(y+b)^2-(x-s)^2\right]}{\left[(x-s)^2+(y+b)^2\right]^2} + \right.$$

$$\left. + A_4 \ln\frac{1}{\left[(x-s)^2+(y-b)^2\right]^{1/2}} - A_5\frac{(y-b)^2}{(x-s)^2+(y-b)^2}\right\}\tau_1(s)ds + \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)}px \tag{5}$$

$$V^{(1)}(x,y) = \frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{B_1 \operatorname{arctg}\frac{x-s}{y+b} + B_2\frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2+(y+b)^2} + B_3\frac{yb(x-s)(y+b)}{\left[(x-s)^2+(y+b)^2\right]^2} + \right.$$

$$\left. + B_4\frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2+(y-b)^2}\right\}\tau_1(s)ds - \frac{\lambda^*}{4\mu(\lambda^* + \mu)}py \tag{6}$$

$$(-\infty < x < \infty; \quad 0 \le y < \infty; \quad b > 0),$$

$$u^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{C_1 \ln\frac{1}{\left[(x-s)^2+(y-b)^2\right]^{1/2}} + C_2\frac{b(y-b)}{(x-s)^2+(y-b)^2} - \right.$$

$$\left. - C_3\frac{y(y-b)}{(x-s)^2+(y-b)^2}\right\}\tau_1(s)ds + \frac{\lambda_1^* + 2\mu_1}{4\mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)}kpx \tag{7}$$

$$V^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\left[D_1 \operatorname{arctg}\frac{x-s}{y-b} + D_2\frac{b(x-s)}{(x-s)^2+(y-b)^2} + \right.$$

$$\left. + D_3\frac{y(x-s)}{(x-s)^2+(y-b)^2}\right]\tau_1(s)ds - \frac{\lambda_1^*}{4\mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)}kpy \tag{8}$$

$$(-\infty < x < \infty; \quad -\infty < y \le 0; \quad b > 0)$$

где h – толщина пластины, $u^{(1)}(x,y)$ и $V^{(1)}(x,y)$ – перемещения точек пластины при $y \ge 0$; $u^{(2)}(x,y)$, и $V^{(2)}(x,y)$ – перемещения точек пластины при $y \le 0$.

Для коэффициентов из (5) – (8) имеем

$$A_1=\frac{\mu^2(\lambda_1^*+3\mu_1)\left[(\lambda^*+2\mu)^2+\mu^2\right]-\mu_1^2(\lambda^*+3\mu)\left[2\mu^2+(\lambda_1^*+\mu_1)(\lambda^*+3\mu)\right]}{4\mu(\lambda^*+2\mu)\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]\left[\mu(\lambda_1^*+3\mu_1)+\mu_1(\lambda_1^*+\mu_1)\right]}$$

$$A_2=\frac{(\mu_1-\mu)(\lambda^*+\mu)(\lambda^*+3\mu)}{4\mu(\lambda^*+2\mu)\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]},\qquad A_4=\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}$$

$$A_3=\frac{(\mu-\mu_1)(\lambda^*+\mu)^2}{2\mu(\lambda^*+2\mu)\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]},\qquad A_5=\frac{\lambda^*+\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}$$

$$B_1=\frac{\mu^2(\lambda_1^*+3\mu_1)-\mu_1^2(\lambda^*+3\mu)}{2\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]\left[\mu(\lambda_1^*+3\mu_1)(\lambda_1^*+\mu_1)\right]}$$

$$B_2=\frac{(\mu-\mu_1)(\lambda^*+\mu)(\lambda^*+3\mu)}{4\mu(\lambda^*+2\mu)\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]}$$

$$B_3=\frac{(\mu_1-\mu)(\lambda^*+\mu)^2}{\mu(\lambda^*+2\mu)\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]},\qquad B_4=\frac{\lambda^*+\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}$$

$$C_1=\frac{\mu(\lambda^*+2\mu)(\lambda_1^*+3\mu_1)+\mu_1(\lambda_1^*+2\mu_1)(\lambda^*+3\mu)}{2\left[\mu(\lambda_1^*+3\mu_1)+\mu_1(\lambda_1^*+\mu_1)\right]\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda_1^*+\mu_1)\right]}$$

$$C_2=\frac{\lambda^*+\mu}{2\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]},\qquad C_3=\frac{\lambda_1^*+\mu_1}{2\left[\mu(\lambda_1^*+3\mu_1)+\mu_1(\lambda_1^*+\mu_1)\right]}$$

$$D_1=\frac{\mu_1^2(\lambda^*+3\mu)-\mu^2(\lambda_1^*+3\mu_1)}{2\left[\mu(\lambda_1^*+3\mu_1)+\mu_1(\lambda_1^*+\mu_1)\right]\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]}$$

$$D_2=\frac{\lambda^*+\mu}{2\left[\mu_1(\lambda^*+3\mu)+\mu(\lambda^*+\mu)\right]},\qquad D_3=\frac{\lambda_1^*+\mu_1}{2\left[\mu(\lambda_1^*+3\mu_1)+\mu_1(\lambda_1^*+\mu_1)\right]}$$

Из (5) определим $\dfrac{\partial u^{(1)}(x,b)}{\partial x}$

$$\frac{\partial u^{(1)}(x,b)}{\partial x}=U(x)+g(x)=-\frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{A_1\frac{x-s}{(x-s)^2+4b^2}+8b^2A_2\frac{x-s}{\left[(x-s)^2+4b^2\right]^2}+\right.$$

$$\left.+2b^2A_3\frac{(x-s)\left[12b^2-(x-s)^2\right]}{\left[(x-s)^2+4b^2\right]^2}+A_4\frac{1}{x-s}\right\}\tau_1(s)ds+\frac{\lambda^*+2\mu}{4\mu(\lambda^*+\mu)}p$$

$$(-\infty<x<\infty)\tag{9}$$

где

$$U(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]\frac{\partial u^{(1)}(x,b)}{\partial x}$$

$$g(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\frac{\partial u^{(1)}(x,b)}{\partial x}$$

Учитывая также условия контакта

$$U_1(x)=U(x),\quad(-\infty<x<\infty)\tag{10}$$

и применив к (4), (9) и (10) преобразование Фурье, получим

$$i\sigma U_s(\sigma)=\frac{1}{E_s F_s}\tau_1(\sigma) \tag{11}$$

$$\overline{U}(\sigma)+\overline{g}(\sigma)=\overline{r}(\sigma)\overline{\tau}_1(\sigma), \qquad \overline{U}_s(\sigma)=\overline{U}(\sigma) \tag{12}$$

где

$$\overline{r}(\sigma)=\frac{1}{ih}\left[A_4\operatorname{sgn}\sigma+\left(A_1\operatorname{sgn}\sigma+2bA_2\sigma+b^2A_3\sigma^2\operatorname{sgn}\sigma\right)e^{-2b|\sigma|}\right]$$

при этом $\overline{f}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$

Сопоставлением формул (11) и (12) получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{\tau}_1(\sigma)=\frac{h}{A_4}\frac{i\sigma\overline{g}(\sigma)}{A+|\sigma|+\overline{q}(\sigma)} \tag{13}$$

где

$$\overline{q}(\sigma)=\left(c_1|\sigma|+2bc_2\sigma^2+b^2c_3|\sigma|^3\right)e^{-2b|\sigma|}$$

$$A=\frac{h}{E_sF_sA_4},\quad c_1=\frac{A_1}{A_4},\qquad c_2=\frac{A_2}{A_4},\quad c_3=\frac{A_3}{A_4}$$

Применив к (13) обратное преобразование Фурье и имея ввиду теорему о свертке, получим

$$\tau_1(x)=\frac{h}{A_4}\int\limits_{-a}^{a}k(x-s)\frac{\partial u^{(1)}(s,b)}{\partial s}ds, \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{14}$$

где
$$k(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma}{A+|\sigma|+\overline{q}(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{15}$$

Из (14) при $|x|<a$ следует

$$\int\limits_{-a}^{a}k(x-s)\frac{\partial u^{(1)}(s,b)}{\partial s}ds=0 \tag{16}$$

Определив $\dfrac{\partial u^{(1)}(x,b)}{\partial x}$ из (16), для искомой $\tau(x)$ получим

$$\tau(x)=\frac{h}{A_4}\int\limits_{-a}^{a}k(x-s)\frac{\partial u^{(1)}(s,b)}{\partial s}ds, \quad |x|>a \tag{17}$$

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения (16).

До того, как перейти к решению уравнения (16), приступим к исследованию ядра этого уравнения. Заметим, что $k(x)$ можно представить в виде

$$k(x)=k_1(x)-k_2(x)$$

где $k_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma e^{-i\sigma x}}{A+|\sigma|}d\sigma$, $\quad k_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma\bar{q}(\sigma)e^{-i\sigma x}}{(A+|\sigma|)[A+|\sigma|+\bar{q}(\sigma)]}d\sigma$

Так как при $|\sigma|\to\infty$ имеет место разложение

$$\bar{k}_1(\sigma)=\frac{i\sigma}{A+|\sigma|}=i\operatorname{sgn}\sigma-\frac{iA}{\sigma}+i\frac{A^2}{\sigma|\sigma|}+O\left(|\sigma|^{-3}\right)$$

то в силу свойств интегралов Фурье, при $|x|\to 0$ будем иметь

$$k_1(x)=\frac{1}{\pi x}-\frac{A}{2}\operatorname{sgn}x+R(x) \tag{18}$$

где $R(x)=0(x\ln|x|)$ при $|x|\to 0$.

Далее, нетрудно видеть, что

$$k_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^2\bar{q}(\sigma)d\sigma}{(A+|\sigma|)[A+|\sigma|+\bar{q}(\sigma)]}x+0(x^3), \qquad |x|\to 0 \tag{19}$$

Таким образом, для функции $k(x)$ получим

$$k(x)=\frac{1}{\pi x}-\frac{A}{2}\operatorname{sgn}x+R_1(x) \tag{20}$$

где $R_1(x)=R(x)-k_2(x)$ и $R_1(x)=0(x\ln|x|)$ при $|x|\to 0$.

Итак, после замены переменных $s=at$ и $x=ay$ в (16) и имея ввиду вышесказанное, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t-y}=A^*\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-y)\varphi(t)dt+a\int_{-1}^{1}R_1[a(y-t)]\varphi(t)dt, \qquad |y|<1 \tag{21}$$

где $A^*=aA$, $\qquad \varphi(t)=\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=at}$

Учитывая, что $\varphi(t)$ четная функция, решение полученного сингулярного интегрального уравнения ищем в виде

$$\varphi(t)=a_0F(t) \tag{22}$$

где a_0 – постоянная, подлежащая определению,

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}T_{2n}(t) \tag{22'}$$

$T_k(t)=\cos(k\arccos t)$, $\qquad k=0,1,2,\ldots\ldots$

многочлены Чебышева первого рода.

Подставляя выражение $\varphi(t)$ из (22) в (21) и пользуясь соотношением

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)dt}{(t-y)\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}0, k=0,\\ U_{k-1}(y), k=1,2,\ldots\end{cases}$$

$$U_{k-1}(t)=\frac{\sin(k\arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \quad k=1,2,\ldots\ldots\ldots; \quad |y|<1)$$

где $U_{k-1}(t)$ – многочлены Чебышева второго рода, известным способом [4] получим следующую квазивполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов b_{2n}, $n = 1,2,\ldots$:

$$b_{2m} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[K^{(1)}_{2m,2n} + K^{(2)}_{2m,2n}\right]b_{2n} = \frac{2}{\pi}\varphi_{2m}, \quad m = 1,2,\ldots \tag{23}$$

где $$K^{(1)}_{2m,2n} = -\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sgn}(t-y)T_{2n}(t)}{2\sqrt{1-t^2}}dt\right]U_{2m-2}(y)\sqrt{1-y^2}\,dy \tag{24}$$

$$K^{(2)}_{2m,2n} = -\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\frac{R_1[a(y-t)]T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right]U_{2m-2}(y)\sqrt{1-y^2}\,dy \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2m} = A^*\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sgn}(t-y)}{2\sqrt{1-t^2}}dt\right]U_{2m-2}(y)\sqrt{1-y^2}\,dy + \\ + a\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\frac{R_1[a(y-t)]}{2\sqrt{1-t^2}}dt\right]U_{2m-2}(y)\sqrt{1-y^2}\,dy, \qquad m = 1,2,\ldots\end{aligned} \tag{26}$$

После определения b_{2n}, $n = 1,2,\ldots$ можно получить представления напряжения $\tau(ay)$ с выделенными особенностями в точках $y = \pm 1$ [2]

$$\tau(ay) = \frac{h}{A_4}a_0L(y) \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}L(y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{y^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\left\{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^{-2n} + \right.\\ \left. + \frac{A^*}{2}\int_{-1}^{1}\left[\operatorname{sgn}(t-y) + aR_1[a(y-t)]\right]\frac{T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right\}, \qquad |y| > 1\end{aligned} \tag{28}$$

Постоянная a_0 определяется из условия (3) и имеет вид

$$a_0 = \frac{E_1F_1A_4}{Eah\int_1^{\infty}L(y)dy}p \tag{29}$$

Теперь приступим к определению асимптотической формулы для $\tau(x)$ при $|x| \to \infty$.

Имея ввиду разложение $\bar{\tau}_1(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$

$$\bar{\tau}_1(\sigma) = \frac{h\bar{g}(0)}{AA_4}i\sigma + a_1i\sigma|\sigma| + a_2i\sigma^3 + a_3i\sigma^3|\sigma| + a_4i\sigma^5 + 0(\sigma^6)$$

где

$$a_1 = -\frac{h}{A^2A_4}(1+c_1)\bar{g}(0)$$

$$a_1 = -\frac{h}{AA_4}\left\{\frac{[\bar{g}(0)]''}{2}(1+c_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{g}(0)}{A}\left[b^2(c_3+2c_1-4c_2)+\frac{(1+c_1)^3}{A^2}-\frac{4b}{A}(1+c_1)(c_2-c_1)\right]\right\}$$

$$\bar{g}(0)=\pi a a_0, \quad [\bar{g}(0)]''=-\frac{\pi a^3 a_0}{4}(b_2+2)$$

a_1 и a_4 — некоторые постоянные, в силу свойств интеграла Фурье [5] имеем

$$\tau(x)=\frac{2a_1}{\pi x^3}+\frac{24a_4}{\pi x^5}+0(x^{-7}) \quad |x|\to\infty \qquad (3)$$

Автор выражает благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы в ходе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1968. Сер. Е. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №2. С.62-71.
3. Багдасарян Р.А., Гукасян Г.О. Об одной задаче для кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным стрингером.// Межвузовский сб. научных трудов. 1991. Вып.8. С.316-321.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 467с.
5. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions //Cambridge Univ. Press. 1959. P.87.

Государственный инженерный университет Армении

Поступила в редакцию 6.09.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИКЛАДНОЙ-ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Никогосян Г. С.

Գ. Ս.Նիկողոսյան
Միկրոպոլյար առաձգական բարակ գլանային թաղանթի կիրառական-երկչափ տեսության որոշիչ հավասարումները և եզրային պայմանները

Աշխատանքում ստացված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ գլանային թաղանթի կիրառական-երկչափ տեսության որոշիչ հավասարումները և եզրային պայմանները: Ուսումնասիրությունները տարված են անկախ պտույտներով առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հիման վրա:
Ստացված են նաև միկրոպոլյար առաձգական բարակ փակ գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ ծռման և ոլորման դեֆորմացիաներին վերաբերող կիրառական տեսության որոշիչ հավասարումները և եզրային պայմանները:

G.S. Nikogosyan

Defining equations and boundary conditions of applied two-dimensional theory of micropolar elastic thin circular cylindrical shells

In present work the defining equations and boundary conditions of applied two-dimensional theory of micropolar elastic thin cylindrical shells are obtained. The examinations are made on the basis of asymmetrical theory of elasticity with the independent fields of displacements and rotations. The defining equations and boundary conditions of the applied two-dimensional theory of micropolar elastic thin closed cylindrical shells are obtained in case of axisymmetric deformation of bending and torsion.

В работе получены определяющие уравнения и граничные условия прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек. Исследования велись на основе несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.
Получены определяющие уравнения и граничные условия прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких замкнутых цилиндрических оболочек при осесимметричной деформации изгиба и кручения.

В работе [1] на основе метода гипотез при реализации симбиоза общей несимметричной теории упругости и основных положений общеизвестной уточненной теории оболочек и пластин [2,3] создана прикладная-двумерная теория микрополярных упругих тонких оболочек и пластин.

В работе [4] на основе метода разложения по толщине построена прикладная-двумерная теория оболочек при несимметричной теории упругости со стесненным вращением (НТУ со СВ).

В работе [5] на основе метода гипотез построена прикладная-двумерная теория тонких пластин при несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ).

В работе [6] разработан асимптотический подход, на основе которого построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных упругих тонких пластин, когда имеется трехмерная НТУ с НППВ. Построена теория погранслоя по НТУ с НППВ. Изучены структура и свойства микрополярных погранслоев. Построены функции типа погранслоев. В виде функциональных рядов построены общие решения погранслойных задач. Изучена задача сращивания асимптотических разложений внутренней задачи (прикладной-двумерной теории) и погранслойных задач.

Получены граничные условия прикладной-двумерной теории микрополярных тонких пластин и граничные условия погранслойных задач.

В работе [7] построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных тонких оболочек, когда в основе имеем НТУ с НППВ.

Для приложений круговые цилиндрические оболочки занимают особое положение, поэтому необходимо отдельное изложение теории микрополярных цилиндрических оболочек.

В данной работе на основе общей прикладной-двумерной теории микрополярных тонких оболочек [7] получены разрешающие уравнения и граничные условия микрополярных тонких круговых цилиндрических оболочек по НТУ с НППВ.

1. Разрешающие уравнения и граничные условия микрополярных цилиндрических оболочек по НТУ с НППВ. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, изготовленную из микрополярного упругого изотропного материала. Пусть r – радиус дуги поперечного круга. Примем [3], что α_1 и α_2 являются ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны срединной поверхности, т.е. с прямолинейными образующими $(\alpha_2 = \text{const})$ и с направляющими дугами $(\alpha_1 = \text{const})$ цилиндрической срединной поверхности. Положение какой-либо точки M срединной поверхности определим безразмерными координатами ξ и θ, из которых ξ представляет собой величину, пропорциональную расстоянию до точки M вдоль образующих, а θ – величину, пропорциональную расстоянию до той же точки M по дуге поперечного круга. За коэффициент пропорциональности примем радиус r. Таким образом:

$$\alpha_1 = r\cdot\xi\ , \qquad \alpha_2 = r\cdot\theta \tag{1.1}$$

Для коэффициентов первой квадратичной формы и главных радиусов кривизны координатной поверхности будем иметь:

$$A_1 = A_2 = r\ , \qquad R_1 = \infty\ , \qquad R_2 = r \tag{1.2}$$

Из общих уравнений и соотношений прикладной-двумерной теории оболочек по НТУ с НППВ, приведенной в работе $[7]$, исходя из (1.1) и (1.2), для круговых цилиндрических оболочек получим:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial S_{21}}{\partial\theta} - r\cdot\left(q_1^+ + q_1^-\right) - h\cdot\left(q_1^+ - q_1^-\right) = 0 \\
\frac{\partial S_{12}}{\partial\xi} + \frac{\partial T_{22}}{\partial\theta} - N_{23} - r\cdot\left(q_2^+ + q_2^-\right) - h\cdot\left(q_2^+ - q_2^-\right) = 0 \\
T_{22} + \frac{\partial N_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial N_{23}}{\partial\theta} + r\cdot\left(q_3^+ + q_3^-\right) + h\cdot\left(q_3^+ - q_3^-\right) = 0 \\
\frac{\partial L_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{21}}{\partial\theta} + r\cdot\left(N_{32} - N_{23}\right) - r\cdot\left(m_1^+ + m_1^-\right) - h\cdot\left(m_1^+ - m_1^-\right) = 0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \xi}+\frac{\partial L_{22}}{\partial \theta}-L_{23}-r\cdot\left(N_{31}-N_{13}\right)-r\cdot\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)-h\cdot\left(m_2^{+}-m_2^{-}\right)=0$$

$$L_{23}+\frac{\partial L_{13}}{\partial \xi}+\frac{\partial L_{23}}{\partial \theta}-r\cdot\left(S_{12}-S_{21}\right)+r\cdot\left(m_3^{+}+m_3^{-}\right)+h\cdot\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)=0$$

соотношения упругости:

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\cdot\left(\Gamma_{ii}+\nu\cdot\Gamma_{jj}\right)-\frac{\nu\cdot h}{1-\nu}\cdot\left(q_3^{+}-q_3^{-}\right) \tag{1.4}$$

$$S_{ij}=2h\cdot\left((\mu+\alpha)\cdot\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\cdot\Gamma_{ji}\right),\quad N_{i3}=-2h\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\Gamma_{i3}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\cdot N_{3i}$$

$$L_{ii}=2h\cdot\frac{4\gamma\cdot(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\cdot\left(\chi_{ii}-\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)}\cdot\chi_{jj}\right)-\frac{\beta}{2\gamma+\beta}\cdot h\cdot\left(m_3^{-}-m_3^{-}\right)$$

$$L_{ij}=2h\cdot\left((\gamma+\varepsilon)\cdot\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\cdot\chi_{ji}\right),\quad L_{i3}=-2h\cdot\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot L_{3i}$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \xi},\qquad \Gamma_{22}=\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta}-w\right),\qquad \gamma_1=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}$$

$$\Gamma_{12}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+\Omega_3,\qquad \Gamma_{21}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \theta}-\Omega_3,\qquad \gamma_2=-\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}+u_2\right)$$

$$\Gamma_{13}=\gamma_1+\Omega_2,\qquad \Gamma_{23}=\gamma_2-\Omega_1,$$

$$\chi_{11}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi},\qquad \chi_{22}=\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta}-\Omega_3\right),\qquad \chi_{12}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi} \tag{1.5}$$

$$\chi_{21}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta},\qquad \chi_{13}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \Omega_3}{\partial \xi},\qquad \chi_{23}=-\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial \Omega_3}{\partial \theta}+\Omega_2\right)$$

где следует учесть

$$N_{3i}=h\cdot\left[\left(q_i^{+}-q_i^{-}\right)+\frac{h}{R_j}\cdot\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right)\right],\quad L_{3i}=h\cdot\left[\left(m_i^{+}-m_i^{-}\right)+\frac{h}{R_j}\cdot\left(m_i^{+}+m_i^{-}\right)\right] \tag{1.6}$$

Здесь (u_1,u_2,w), $(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)$ – соответственно, компоненты вектора перемещения и независимого вектора поворота точек срединной поверхности цилиндрической оболочки; $T_{11},T_{22},S_{12},S_{21}$ – тангенциальные усилия; N_{13}, N_{23} – перерезывающие усилия; $L_{11},L_{22},L_{12},L_{21},L_{13},L_{23}$ – усредненные по толщине оболочки моменты (происходящих от соответствующих моментных напряжений) в сечениях оболочки; $\Gamma_{11},\Gamma_{22},\Gamma_{12},\Gamma_{21},\Gamma_{13},\Gamma_{23}$ – компоненты тензора деформации; $\chi_{11},\chi_{22},\chi_{12}$, $\chi_{21},\chi_{13},\chi_{23}$ – компоненты тензора изгиба-кручения в точках срединной поверхности оболочки; $\left(q_1^{\pm},\, q_2^{\pm},\, q_3^{\pm}\right)$, $\left(m_1^{\pm},\, m_2^{\pm},\, m_3^{\pm}\right)$ – заданные внешние усилия и моменты на лицевых поверхностях оболочки.

Подставляя значения компонент тензора деформаций Γ_{11}, Γ_{22}, ..., χ_{13}, χ_{23} из (1.5) в (1.4), учитывая также (1.6), получим выражения для внутренних сил и моментов через компоненты перемещений и независимых вращений:

$$T_{11}=\frac{1}{r}\cdot\frac{2Eh}{1-\nu^2}\cdot\left[\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\nu\cdot\left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta}-w\right)\right]-\frac{\nu\cdot h}{1-\nu}\cdot\left(q_3^+-q_3^-\right)$$

$$T_{22}=\frac{1}{r}\cdot\frac{2Eh}{1-\nu^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta}-w\right)+\nu\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right]-\frac{\nu\cdot h}{1-\nu}\cdot\left(q_3^+-q_3^-\right)$$

$$S_{12}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[(\mu+\alpha)\cdot\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+(\mu-\alpha)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+r\cdot 2\alpha\cdot\Omega_3\right] \tag{1.7}$$

$$S_{21}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[(\mu+\alpha)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+(\mu-\alpha)\cdot\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-r\cdot 2\alpha\cdot\Omega_3\right]$$

$$N_{13}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}-r\cdot\Omega_2\right)+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\left(\frac{r}{2}\cdot\left(q_1^+-q_1^-\right)+\frac{h}{2}\cdot\left(q_1^++q_1^-\right)\right)\right]$$

$$N_{23}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}+u_2+r\cdot\Omega_1\right)+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\frac{r}{2}\cdot\left(q_2^+-q_2^-\right)\right]$$

$$L_{11}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\cdot\left[\frac{\partial\Omega_1}{\partial\xi}+\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)}\cdot\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}-\Omega_3\right)\right]-h\cdot\frac{\beta}{2\gamma+\beta}\cdot\left(m_3^+-m_3^-\right)$$

$$L_{22}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\cdot\left[\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}-\Omega_3\right)+\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\xi}\right]-h\cdot\frac{\beta}{2\gamma+\beta}\cdot\left(m_3^+-m_3^-\right)$$

$$L_{12}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[(\gamma+\varepsilon)\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi}+(\gamma-\varepsilon)\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}\right]$$

$$L_{21}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[(\gamma+\varepsilon)\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}+(\gamma-\varepsilon)\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi}\right]$$

$$L_{13}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\xi}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\left(\frac{r}{2}\cdot\left(m_1^+-m_1^-\right)+\frac{h}{2}\cdot\left(m_1^++m_1^-\right)\right)\right]$$

$$L_{23}=\frac{1}{r}\cdot 2h\cdot\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial\Omega_3}{\partial\theta}+\Omega_2\right)+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{r}{2}\cdot\left(m_2^+-m_2^-\right)\right]$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.7) в уравнения равновесия (1.3), получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и независимых вращениях для микрополярных круговых цилиндрических оболочек (когда в основе имеем НТУ с НППВ):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{11}u_1 + \mathcal{L}_{12}u_2 + \mathcal{L}_{13}w + && && + \mathcal{L}_{16}\Omega_3 + X_1 = 0\\
&\mathcal{L}_{21}u_1 + \mathcal{L}_{22}u_2 + \mathcal{L}_{23}w + \mathcal{L}_{24}\Omega_1 + && && + \mathcal{L}_{26}\Omega_3 + X_2 = 0\\
&\mathcal{L}_{31}u_1 + \mathcal{L}_{32}u_2 + \mathcal{L}_{33}w + \mathcal{L}_{34}\Omega_1 + \mathcal{L}_{35}\Omega_2 + && && + X_3 = 0\\
&\qquad\quad \mathcal{L}_{42}u_2 + \mathcal{L}_{43}w + \mathcal{L}_{44}\Omega_1 + \mathcal{L}_{45}\Omega_2 + \mathcal{L}_{46}\Omega_3 + X_4 = 0\\
&\qquad\qquad\qquad \mathcal{L}_{53}w + \mathcal{L}_{54}\Omega_1 + \mathcal{L}_{55}\Omega_2 + \mathcal{L}_{56}\Omega_3 + X_5 = 0\\
&\mathcal{L}_{61}u_1 + \mathcal{L}_{62}u_2 + \qquad + \mathcal{L}_{64}\Omega_1 + \mathcal{L}_{65}\Omega_2 + \mathcal{L}_{66}\Omega_3 + X_6 = 0
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где $\mathcal{L}_{ij}\,(i, j = 1,2,\ldots 6)$ представляют собой следующие дифференциальные операторы:

$$
\mathcal{L}_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} + \alpha\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,,\quad \mathcal{L}_{33} = 1 - \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)
$$

$$
\mathcal{L}_{22} = \left(\frac{1-\nu}{2} + \alpha\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}
$$

$$
\mathcal{L}_{44} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot(\gamma+\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r^2
$$

$$
\mathcal{L}_{55} = \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot(\gamma+\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\left(\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r^2 + \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\right)
$$

$$
\mathcal{L}_{66} = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + \left(1 + \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot 4\alpha\cdot r^2\right)
$$

$$
\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21} = \left(\frac{1+\nu}{2} - \alpha\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\theta}\,,\quad \mathcal{L}_{13} = \mathcal{L}_{31} = -\nu\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}
$$

$$
\mathcal{L}_{23} = \mathcal{L}_{32} = \left(-1 - \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}
\tag{1.9}
$$

$$
\mathcal{L}_{45} = \mathcal{L}_{54} = \left(\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)} + \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot(\gamma-\varepsilon)\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\theta}
$$

$$
\mathcal{L}_{46} = \mathcal{L}_{64} = -\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\,,\quad \mathcal{L}_{56} = \mathcal{L}_{65} = \left(-1 - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}
$$

$$
\mathcal{L}_{16} = -\frac{1-\nu^2}{E}\cdot 2\alpha\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\,,\quad \mathcal{L}_{61} = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot 2\alpha\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}
$$

$$\mathscr{L}_{24} = -\frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r\ , \quad \mathscr{L}_{42} = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r$$

$$\mathscr{L}_{26} = \frac{1-\nu^2}{E}\cdot 2\alpha\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\ , \quad \mathscr{L}_{62} = \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot 2\alpha\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$\mathscr{L}_{34} = -\frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\ , \quad \mathscr{L}_{43} = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\mathscr{L}_{35} = \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\ , \quad \mathscr{L}_{53} = \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}$$

а X_i $(i = 1,2,\ldots,6)$ выражаются через внешние нагрузки и моменты по формулам:

$$X_1 = -\frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{r^2}{2h}\cdot\left(q_1^+ - q_1^-\right) - \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{r}{2}\cdot\left(q_1^+ - q_1^-\right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(q_3^+ - q_3^-\right)$$

$$X_2 = -\frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{r^2}{2h}\cdot\left(q_2^+ + q_2^-\right) - \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{2\mu}{\mu+\alpha}\cdot\left(q_2^+ - q_2^-\right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q_3^+ - q_3^-\right)$$

$$X_3 = -\frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{r^2}{2h}\cdot\left(q_3^+ + q_3^-\right) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\cdot\frac{r}{2}\cdot\left(q_3^+ - q_3^-\right) -$$

$$-\frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(q_1^+ - q_1^-\right) + \frac{h}{r}\cdot\left(q_1^+ + q_1^-\right)\right) - \frac{1-\nu^2}{E}\cdot\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q_2^+ - q_2^-\right)$$

$$X_4 = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r^2}{2h}\cdot\left(m_1^+ + m_1^-\right) - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r}{2}\cdot\left(m_1^+ - m_1^-\right) -$$

$$-\frac{\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(m_3^+ - m_3^-\right) + \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r^2\cdot\left(q_2^+ - q_2^-\right) \qquad (1.10)$$

$$X_5 = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r^2}{2h}\cdot\left(m_2^+ + m_2^-\right) - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\cdot\left(m_2^+ - m_2^-\right) -$$

$$-\frac{\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(m_3^+ - m_3^-\right) - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r^2\cdot\left(\left(q_1^+ - q_1^-\right) + \frac{h}{r}\cdot\left(q_1^+ + q_1^-\right)\right)$$

$$X_6 = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r^2}{2h}\cdot\left(m_3^+ + m_3^-\right) - \frac{1}{2(\gamma+\beta)}\cdot\frac{r}{2}\cdot\left(m_3^+ - m_3^-\right) -$$

$$-\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(m_1^+ - m_1^-\right) + \frac{h}{r}\cdot\left(m_1^+ + m_1^-\right)\right) - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(m_2^+ - m_2^-\right)$$

Отметим, что дифференциальные операторы уравнений системы (1.8) обладают полной симметрией. Согласно (1.9) $\mathscr{L}_{12} = \mathscr{L}_{21}$, $\mathscr{L}_{13} = \mathscr{L}_{31}$, $\mathscr{L}_{23} = \mathscr{L}_{32}$; $\mathscr{L}_{45} = \mathscr{L}_{54}$, $\mathscr{L}_{46} = \mathscr{L}_{64}$, $\mathscr{L}_{56} = \mathscr{L}_{65}$, а $\mathscr{L}_{16}$ и $\mathscr{L}_{61}$, $\mathscr{L}_{24}$ и $\mathscr{L}_{42}$, $\mathscr{L}_{26}$ и $\mathscr{L}_{62}$, $\mathscr{L}_{34}$ и $\mathscr{L}_{43}$, $\mathscr{L}_{35}$ и $\mathscr{L}_{53}$ отличаются друг от друга только постоянными множителями, зависящими от упругих констант материала оболочки.

Таким образом, система уравнений $(1.3)-(1.6)$ или (1.8) (уравнения в перемещениях и независимых поворотах) с учетом $(1.9),(1.10)$ представляет собой разрешающую систему уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных тонких круговых цилиндрических оболочек, когда в основе имеем НТУ с НППВ.

К полученной разрешающей системе уравнений $(1.8)-(1.10)$ (которая имеет двенадцатый порядок) следует присоединить соответствующие граничные условия, которые получены в работе [7] и имеют такой вид:

$$
\begin{aligned}
&T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3\,, \qquad S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3\\
&L_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3\,, \qquad L_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3 \qquad\qquad (1.11)\\
&N_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=-\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3\,, \qquad L_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=-\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3
\end{aligned}
$$

где $p_i^*\ (i=1,2,3)$, $m_i^*\ (i=1,2,3)$ представляют собой компоненты заданных внешних усилий и моментов в граничных поперечных к срединной поверхности сечениях цилиндрической оболочки.

После решения указанных систем разрешающих уравнений, все расчетные величины (силовые и моментные напряжения, перемещения и повороты в области трехмерной оболочки) определяются по соответствующим формулам.

2. Разрешающие уравнения и граничные условия осесимметричной деформации микрополярной замкнутой круговой цилиндрической оболочки по НТУ с НППВ. Пусть микрополярная изотропная замкнутая круговая цилиндрическая оболочка нагружена осесимметричным образом. В этом случае ввиду полной симметрии оболочка будет деформироваться осесимметрично. Тогда все искомые расчетные величины оболочки будут функциями лишь одной переменной ξ, т.е. они не будут зависеть от угловой координаты θ.

Тогда общие уравнения равновесия, соотношения упругости и геометрические соотношения круговой цилиндрической оболочки разделяются на две отдельные системы (первая из которых представляет изгиб, а вторая–кручение цилиндрической оболочки) и приобретают следующий вид:

Для задачи изгиба:

уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
&\frac{dT_{11}}{d\xi}-r\cdot\left(q_1^+ + q_1^-\right)-h\cdot\left(q_1^+ - q_1^-\right)=0\\
&T_{22}+\frac{dN_{13}}{d\xi}+r\cdot(q_3^+ + q_3^-)+h\cdot(q_3^+ - q_3^-)=0 \qquad\qquad (2.1)\\
&\frac{dL_{12}}{d\xi}-L_{23}-r\cdot\left(N_{31}-N_{13}\right)-r\cdot\left(m_2^+ + m_2^-\right)-h\cdot\left(m_2^+ - m_2^-\right)=0
\end{aligned}
$$

соотношения упругости

$$
T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\cdot\left(\Gamma_{ii}+\nu\cdot\Gamma_{jj}\right)-\frac{\nu\cdot h}{1-\nu}\cdot\left(q_3^+ - q_3^-\right)
$$

$$N_{13} = -2h \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \cdot \Gamma_{13} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \cdot N_{31} \tag{2.2}$$

$$L_{12} = 2h \cdot \left((\gamma + \varepsilon) \cdot \chi_{12} + (\gamma - \varepsilon) \cdot \chi_{21} \right), \quad L_{23} = -2h \cdot \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \cdot \chi_{23} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \cdot L_{32}$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered} \Gamma_{11} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du_1}{d\xi}, \quad \Gamma_{22} = -\frac{w}{r}, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{d\xi}, \quad \Gamma_{13} = \gamma_1 + \Omega_2 \\ \chi_{12} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Omega_2}{d\xi}, \quad \chi_{21} = 0, \quad \chi_{23} = -\frac{\Omega_2}{r} \end{gathered} \tag{2.3}$$

где следует учесть

$$N_{31} = h \cdot \left[\left(q_1^+ - q_1^-\right) + \frac{h}{r} \cdot \left(q_1^+ + q_1^-\right) \right], \quad L_{32} = h \cdot \left(m_2^+ - m_2^-\right) \tag{2.4}$$

Разрешающая система уравнений для задачи изгиба в перемещениях и независимых поворотах, согласно $(2.1)-(2.4)$, можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{L}}_{11} u_1 + \tilde{\mathscr{L}}_{13} w + \qquad\qquad & \tilde{X}_1 = 0 \\ \tilde{\mathscr{L}}_{31} u_1 + \tilde{\mathscr{L}}_{33} w + \tilde{\mathscr{L}}_{35} \Omega_2 + & \tilde{X}_3 = 0 \\ \tilde{\mathscr{L}}_{53} w + \tilde{\mathscr{L}}_{55} \Omega_2 + & \tilde{X}_5 = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{\mathscr{L}}_{11} = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \tilde{\mathscr{L}}_{13} = \tilde{\mathscr{L}}_{31} = -\nu \cdot \frac{d}{d\xi}, \quad \tilde{\mathscr{L}}_{33} = 1 - \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \\ \tilde{\mathscr{L}}_{35} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r \cdot \frac{d}{d\xi}, \quad \tilde{\mathscr{L}}_{53} = \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r \cdot \frac{d}{d\xi} \\ \tilde{\mathscr{L}}_{55} = \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot (\gamma+\varepsilon) \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \left(\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r^2 + \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \right) \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{r^2}{2h} \cdot \left(q_1^+ + q_1^-\right) - \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(q_1^+ - q_1^-\right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(q_3^+ - q_3^-\right) \\ \tilde{X}_3 &= -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{r^2}{2h} \cdot \left(q_3^+ + q_3^-\right) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(q_3^+ - q_3^-\right) - \\ &\quad - \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\left(q_1^+ - q_1^-\right) + \frac{h}{r} \cdot \left(q_1^+ + q_1^-\right) \right) \\ \tilde{X}_5 &= -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r^2}{2h} \cdot \left(m_2^+ + m_2^-\right) - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon} \cdot \left(m_2^+ - m_2^-\right) - \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$-\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\cdot r^2\cdot\left(\left(q_1^+-q_1^-\right)+\frac{h}{r}\cdot\left(q_1^++q_1^-\right)\right)$$

Для задачи кручения:
уравнения равновесия

$$\frac{dS_{12}}{d\xi}-N_{23}-r\cdot\left(q_2^++q_2^-\right)-h\cdot\left(q_2^+-q_2^-\right)=0$$

$$\frac{dL_{11}}{d\xi}+r\cdot\left(N_{32}-N_{23}\right)-r\cdot\left(m_1^++m_1^-\right)-h\cdot\left(m_1^+-m_1^-\right)=0 \qquad (2.8)$$

$$L_{22}+\frac{dL_{13}}{d\xi}-r\cdot\left(S_{12}-S_{21}\right)+r\cdot\left(m_3^++m_3^-\right)+h\cdot\left(m_3^+-m_3^-\right)=0$$

соотношения упругости

$$S_{ij}=2h\cdot\left((\mu+\alpha)\cdot\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\cdot\Gamma_{ji}\right),\quad N_{23}=-2h\cdot\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\cdot\Gamma_{23}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\cdot N_{32}$$

$$L_{ii}=2h\cdot\frac{4\gamma\cdot(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\cdot\left(\chi_{ii}-\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)}\cdot\chi_{jj}\right)-\frac{\beta}{2\gamma+\beta}\cdot h\cdot\left(m_2^+-m_2^-\right) \qquad (2.9)$$

$$L_{13}=-2h\cdot\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\chi_{13}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot L_{31}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12}=\frac{1}{r}\cdot\frac{du_2}{d\xi}+\Omega_3\ ,\quad \Gamma_{21}=-\Omega_3\ ,\quad \gamma_2=-\frac{u_2}{r}\ ,\quad \Gamma_{23}=\gamma_2-\Omega_1$$

$$\chi_{11}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d\Omega_1}{d\xi}\ ,\qquad \chi_{22}=-\frac{\Omega_3}{r}\ ,\quad \chi_{13}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{d\Omega_1}{d\xi} \qquad (2.10)$$

где следует учесть

$$N_{32}=h\cdot\left(q_2^+-q_2^-\right),\quad L_{31}=h\cdot\left[\left(m_1^+-m_1^-\right)+\frac{h}{r}\cdot\left(m_1^++m_1^-\right)\right] \qquad (2.11)$$

На основании $(2.8)-(2.11)$ разрешающая система уравнений для задачи кручения можем представить в перемещениях и независимых поворотах:

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{22}u_2+\widetilde{\mathscr{L}}_{24}\Omega_1+\widetilde{\mathscr{L}}_{26}\Omega_3+\bar{X}_2=0$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{42}u_2+\widetilde{\mathscr{L}}_{44}\Omega_1+\widetilde{\mathscr{L}}_{46}\Omega_3+\bar{X}_4=0 \qquad (2.12)$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{62}u_2+\widetilde{\mathscr{L}}_{64}\Omega_1+\widetilde{\mathscr{L}}_{66}\Omega_3+\bar{X}_6=0$$

где на этот раз

$$\tilde{\mathcal{L}}_{22} = \left(\frac{1-\nu}{2} + \alpha \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \right) \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{24} = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r \ , \ \tilde{\mathcal{L}}_{42} = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{26} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot 2\alpha \cdot r \cdot \frac{d}{d\xi} \ , \ \tilde{\mathcal{L}}_{62} = \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot 2\alpha \cdot r \cdot \frac{d}{d\xi} \tag{2.13}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{44} = \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r^2 \ , \ \tilde{\mathcal{L}}_{46} = \tilde{\mathcal{L}}_{64} = -\frac{\beta}{2(\gamma+\beta)} \cdot \frac{d}{d\xi}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{66} = -\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot 4\alpha \cdot r^2 \right)$$

$$\tilde{Y}_2 = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{r^2}{2h} \cdot \left(q_2^+ + q_2^- \right) - \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{2\mu}{\mu+\alpha} \cdot \left(q_2^+ - q_2^- \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_4 = &-\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r^2}{2h} \cdot \left(m_1^+ + m_1^- \right) - \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(m_1^+ - m_1^- \right) - \\ &- \frac{\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(m_3^+ - m_3^- \right) + \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{\alpha}{\mu+\alpha} \cdot r^2 \cdot \left(q_2^+ - q_2^- \right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_6 = &-\frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r^2}{2h} \cdot \left(m_3^+ + m_3^- \right) - \frac{1}{2(\gamma+\beta)} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(m_3^+ - m_3^- \right) - \\ &- \frac{2\gamma+\beta}{4\gamma(\gamma+\beta)} \cdot \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\left(m_1^+ - m_1^- \right) + \frac{h}{r} \cdot \left(m_1^+ + m_1^- \right) \right) \end{aligned}$$

Общие граничные условия (1.11) тоже распадаются на две отдельные группы и к полученным разрешающим системам уравнений (2.1)–(2.4) (или к (2.5)–(2.7)) и (2.8)–(2.11) (или к (2.12)–(2.14)) следует присоединить, соответственно, следующие граничные условия:

$$T_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3 \ , \qquad N_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = -\int_{-h}^{h} p_3^* d\alpha_3 \tag{2.15}$$

$$L_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_2^* d\alpha_3$$

$$L_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_1^* d\alpha_3 \ , \qquad L_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = -\int_{-h}^{h} m_3^* d\alpha_3 \tag{2.16}$$

$$S_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_2^* d\alpha_3$$

Граничная задача $(2.1)-(2.4)$, (2.15) $\left(\text{или } (2.5)-(2.7),\ (2.15)\right)$ определяет изгиб, а $(2.8)-(2.11)$, (2.16) $\left(\text{или } (2.12)-(2.14), (2.16)\right)$ – кручение осесимметричной деформации микрополярных замкнутых круговых цилиндрических оболочек по общей теории НТУ.

Таким образом, при заданных граничных условиях, решая систему линейных уравнений $(2.5)-(2.7)$ или $(2.12)-(2.14)$, можем определить искомые функции перемещений и независимых вращений (соответственно для задачи изгиба и кручения), с помощью которых, посредством определенных формул, можем найти расчетные силовые и моментные напряжения, внутренние усилия и моменты, перемещения и независимые повороты в трехмерной области оболочки.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван.: Изд-во НАН Армении. 1999. 216с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446с.
4. Бабич Д. В. О влиянии моментных напряжений на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки // ПМ 1967.Т.3. Вып.4. С.39-44.
5. Мовсисян Л. А. К моментной теории упругости для тонких пластин // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №2. С. 148-152.
6. Sargsyan S.H. On Sone Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol.16. Springer. 2004. P. 201-210.
7. Никогосян Г.С., Саркисян С.О. Микрополярная теория упругих тонких оболочек // Изв. НАН Армении.Механика. 2005. Т.58. №1.С. 15-37.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 14.03.2005

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 593.3

МИКРОПОЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Саркисян С. О.

Ս.Հ. Սարգսյան
Բարակ ձողերի, սալերի և թաղանթների միկրոպոլյար տեսություն

Աշխատանքում, որն ակնարկային բնույթի է, տրվում է միկրոպոլյար (մոմենտային, ոչ սիմետրիկ) առաձգականության տեսության ներկա ձեռքբերումների նկարագիրը, հատկապես առավել հանգամանորեն կանգ առնելով միկրոպոլյար բարակ ձողերի, սալերի և թաղանթների կիրառական միաչափ և երկչափ տեսությունների կառուցման և այս խնդիրներում ասիմպտոտիկ մեթոդի զարգացման հարցերի վրա: Ակնարկի ամփոփումով հեղինակի տեսանկյունից նշվում են միկրոպոլյար բարակ ձողերի, սալերի և թաղանթների տեսությունների հետագա զարգացման որոշ ուղղություններ:

S. H. Sargsyan
Micropolar Theory of Thin Bars, Plates and Shells

This paper, which is of a survey character, reflects the latest achievements in the Micropolar (Momental, Asymmetrical) Theory of elasticity, particularly, aiming at problems of constructing Applied One-dimensional and Two-dimensional Theories of Micropolar Thin Bars, Plates and Shells, and also at the development of the asymptotic method in these problems.

In the conclusion of the survey, there are brought out several directions of further development of the Micropolar Theory of Bars, Plates and Shells.

В работе обзорного характера дано описание достижений в микрополярной (моментной, несимметричной) теории упругости, более обстоятельно останавливаясь на вопросах построения прикладных-одномерных и двумерных теорий микрополярных тонких стержней, пластин и оболочек и развития асимптотического метода в этих задачах.

В заключении обзора, с точки зрения автора, констатируются некоторые направления дальнейшего развития микрополярных теорий стержней, пластин и оболочек.

1. **Введение**. Важной гипотезой, служащей для механического описания действия внутренних сил в деформируемом твердом теле, является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию только их главного вектора, приложенной к центру площадки, при этом, пренебрегая действиями их главного момента относительно указанной точки. Это предположение отвергнуто в разработанной в начале XX века братьями Коссера системе механики сплошной среды [96] (отметим, что идея учета главного момента внутренних сил возникла еще в работе [111]). Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения $\bar{u}$, но также вектором поворота $\bar{\omega}$, при этом, в среде, между ее частицами, помимо обычного центрального воздействия осуществляется еще и вращательное, и следовательно, возникают не только силовые напряжения, но и моментные напряжения, образующие несимметричные тензоры. Твердую среду, моделируемую таким образом, называют средой Коссера, а за теорией закрепились названия моментной, микрополярной или несимметричной теории упругости.

Понятно, что в среде Коссера то, что называется бесконечно малым объемом, представляет собой не как материальную точку, а как более сложный объект (имеющий микроструктуру), обладающий помимо поступательных, также ротационными степенями свободы, содержащий весьма большое число элементарных частиц, а передаваемое через площадку усилие следует трактовать как суммарный эффект взаимодействия этих частиц. Таким образом, при структурно-феноменологическом подходе несимметричная теория упругости является математической моделью для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с микроструктурой.

Наиболее остро интерес к всестороннему изучению континуума Коссера проявился в 50-х, 60-х и 70-х годах прошлого века. Он обусловлен, в первую очередь, применением поликристаллических структур, зернистых металлов, высокомолекулярных полимеров и широким внедрением композиционных материалов.

Современный вывод уравнений этой теории и ее обоснование приведены в работах [17,50,61,62,64,69,72,74,94,97,104 и др.].

Как отмечается в монографии [57], нет ничего логически недопустимого в том, что, по крайней мере, в местах резкой изменяемости напряженного состояния (в окрестности вершин трещин, отверстий и выточек) влияние моментов может оказаться сравнимым с влиянием сил.

Несимметричная теория упругости является базовой моделью при изучении волновых процессов в твердых телах с микроструктурой [40].

Однако большинство точных решений [27,47,50,61,62,66,74,75 и др.] получено с использованием упрощения, часто называемого «стесненным вращением» или псевдоупругой средой Коссера, при котором постулируется зависимость вектора вращения от вектора перемещения

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{u}$$

Этот вариант моментной теории упругости как-то понижает ее полноту, так как [69,74] число физических констант для изотропного упругого тела сокращается с шести до четырех.

Ряд авторов [17,64,69,70,94,97,104 и др.] посвятил свои работы отысканию точных решений задач в полной постановке моментной теории, несмотря на значительные трудности при разрешении получающихся дифференциальных уравнений. Найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия [55,70], задача о равновесии полупространства [104], о сдвиге бесконечного плоского слоя [54,104], кручении кольца [51] и др. Получен ряд новых аналитических и численных решений несимметричной теории упругости [51,54] и из этих решений выделены и проанализированы параметры (моменты, силы, перемещения, повороты), откликающиеся на моментные эффекты. С целью расширения круга решаемых задач разработан также алгоритм метода конечных элементов для решения двумерных задач несимметричной теории упругости.

Отметим, что наиболее эффективные приложения моментной теории упругости относятся к задачам расчета упругонапряженного состояния вблизи острых вершин трещин [17,64 и др.]

Как известно, на пути практических приложений моментной теории упругости встречаются определенные трудности, связанные с экспериментальным определением для конкретных материалов традиционных и дополнительных упругих постоянных. Скудность информации о материальных констант сред с микроструктурой является одним из основных факторов, сдерживающих изучение модели несимметричной теории упругости. Если до недавнего времени отсутствовали достаточно убедительные экспериментальные исследования по определению упругих характеристик, входящих в основные соотношения теории упругости с несимметричным тензором напряжений, то в настоящее время имеется значительное продвижение в этой области.

Измерения констант упругости на основе статических экспериментов производились в работах [50,51 и др.]. В работе [51] в качестве экспериментально реализуемой схемы по деформированию материала была выбрана задача Кирша о растяжении бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием, аналитическое решение которой в рамках несимметричной теории упругости приведено в работе [55]. Анализ аналитического решения позволил определить макропараметры, которые откликаются на моментные свойства материала и которые конструктивно экспериментально измеряемы.

Необходимо отметить, что более точными все-таки являются динамические эксперименты, особенно ультразвуковые. Наблюдаемая экспериментально дисперсия ультразвука позволяет вычислить модули упругости континуума Коссера [40,99]. Заметим, что для успешного развития акустических методов измерения необходимо изучение особенностей распространения упругих волн в средах сложной структуры, которым посвящены работы [99 и др.].

Интерес к изучению механического поведения твердых тел с микроструктурой в настоящее время очень велик. Проблема состоит в определении макроскопических свойств конструкционных материалов, в том числе и поликристаллических металлов с микроскопических позиций, умение воспроизводить заданные макроскопические свойства методами регулирования микроструктуры. В этой проблематике научно-технического прогресса определенное место имеют задачи несимметричной теории упругости.

Отметим, что в настоящее время установлена принципиальная возможность конструктивного моделирования и технологической воспроизводимости твердых деформируемых сред коссератовского типа [23].

Можно сказать, что содержание монографии братьев Коссера теснейшим образом связано с развитием современной механики сплошной среды, его роль значительно глубже, чем это считалось почти до недавнего времени. Как отмечается в работе [45], содержание монографии Е. и Ф. Коссера представляет собой, по существу, обширную программу новых направлений развития теории деформации в твердых телах.

Вопрос о построении несимметричной теории упругости остро ставится также в задачах, где учитываются не только массовые силы, но и массовые пары сил. С такого рода объемным распределением моментов приходится сталкиваться, как указывается в работе [41], при решении задач для некоторых классов материалов, обладающих электромагнитными свойствами. Это, главным образом,ферромагнетики [19,36].

Теория среды Коссера занимает промежуточное положение между классической теорией упругости и физикой твердого тела. Прогресс в микро- и нанотехнологии при создании новых материалов (нанокомпозитов) и изучении напряженно-деформированного состояния в телах из этих материалов, в свою очередь, способствовали актуальности исследований и прогресса несимметричной теории упругости [44,53].

Как отмечается в работе [7], естественно, приобретает актуальность и проблема построения теорий микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек.

На основе теории несимметричной упругости со стесненным вращением, методом гипотез, в работах [31,92 и др.] построены математические модели тонких стержней, пластин и оболочек (см. также обзор [49]). В работах [42,48] на основе концепции поверхностей Коссера построены прикладные-двумерные теории пластин и оболочек.

В монографии [7], методом гипотез, при реализации некоего симбиоза общей несимметричной теории упругости и основных положений общеизвестной уточненной теории оболочек и пластин [6,7] построена прикладная-двумерная теория микрополярных пластин и оболочек, которая открывала пути к эффективному решению конкретных задач прочности, колебания и устойчивости пластин и оболочек с учетом моментных напряжений.

В работе [63] на основе метода гипотез построена теория микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек.

В силу того, что если в соответствующих уравнениях классической теории упругости или несимметричной теории упругости для тонких трехмерных тел перейти к безразмерным координатам (и безразмерному времени в случае динамических задач), то система преобразованных уравнений будет содержать малый параметр и для решения подобных систем естественно использовать асимптотические методы. Так как системы получаемых уравнений являются сингулярно-возмущенными, следовательно, указанная проблематика относится к категории проблем с пограничным слоем.

Отметим, что регулярные асимптотические методы в теории упругих тонких анизотропных пластин и оболочек развиты в работе [76].

В задачах, принадлежащих к типу задач пограничного слоя, решение может быть разбито на части, соответствующие разным областям. В результате, трудности, возникающие при построении решения в каждой отдельной области, будут обычно намного меньше, чем при получении строгого решения, пригодного во всей области (если последнее возможно). С другой стороны, если получено точное решение сингулярно-возмущенной граничной задачи, то трудно будет разобраться с таким решением, выраженным сложной математической формулой. Асимптотический метод может извлечь из такой формулы асимптотическую структуру этого решения.

Асимптотические методы в задачах с пограничным слоем в теории тонких пластин и оболочек по классической теории упругости развиты в работах [1-4,21,29,30,32-35,88,89,98,100,102 и др.]; в электромагнитной механике теории пластин и оболочек–в работах [10,73,77,88]; в термоупругости тонких пластин и оболочек–в работах [43,60]. Асимптотический метод оказался весьма эффективным также для решения неклассических краевых задач тонких стержней, пластин и оболочек [1-4].

В данной статье дается обзор работ автора и его учеников, посвященных построению асимптотической теории микрополярных стержней, пластин и оболочек на основе уравнений двух вариантов несимметричной теории упругости. В этих работах построен внутренний итерационный процесс, изучены микрополярные погранслои, изучена проблема их сращивания с внутренней задачей. На результатах внутреннего итерационного процесса построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек.

2. Микрополярная теория упругих тонких пластин, оболочек и стержней

Асимптотический метод в несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) для тонких пластин впервые был применен в работе [38] для получения двумерных уравнений в перемещениях и независимых вращениях.

Проблема состоит в том, чтобы использовать асимптотический метод и построить общую теорию микрополярных стержней, пластин и оболочек на основе НТУ с НППВ, а также на основе НТУ с СВ (стесненным вращением).

В работах [78-81,107] разработан асимптотический подход и, в результате, в случае статической задачи построена общая асимптотическая теория микрополярных пластин на основе НТУ с НППВ. Построен внутренний итерационный процесс, введены осредненные по толщине пластинки усилия, моменты и гипермоменты по НТУ с НППВ. Получены двумерные уравнения в области срединной плоскости пластинки для любого асимптотического приближения. На основе исходного приближения внутреннего итерационного процесса построена общая прикладная-двумерная теория (для задачи изгиба и обобщенного плоского напряженного состояния) микрополярных упругих тонких пластин на основе НТУ с НППВ. Построена теория погранслоя пластинки. Доказано существование четырех типов погранслоев (силовой-плоский и антиплоский, моментный-плоский и антиплоский). Доказываются некоторые важные свойства погранслойных решений, играющих важную роль при сращивании асимптотических разложений внутренней задачи (прикладной-двумерной теории) и погранслойных задач. Строятся функции типа погранслоев и доказывается их обобщенная ортогональность [83]. В виде рядов (с неопределенными коэффицентами) представляются общие решения каждого из указанных типов погранслоев. Получены те трансцендентные уравнения, с корнями которых связываются погранслойные функции. При большом наборе граничных условий НТУ с НППВ на боковой поверхности пластинки изучается задача сращивания внутреннего итерационного процесса и погранслоев. В результате этого исследования получены граничные условия на контуре области срединной плоскости пластинки для общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин. Таким образом, общая прикладная-двумерная теория микрополярных пластин на основе НТУ с НППВ отделяется как самостоятельная граничная задача. На основе вариационного принципа НТУ с НППВ получен вариационный принцип для общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин. Отдельные граничные условия получены также для указанных выше погранслойных задач. На основе вариационного подхода для определения произволов погранслойных задач получены алгебраические линейные системы уравнений.

Асимптотический подход развивается также для построения общей асимптотической теории микрополярных пластин на основе НТУ с СВ. Построена прикладная-двумерная теория микрополярных пластин на основе НТУ с СВ. Показано, что при определенных характеристиках новых упругих констант материала пластинки эти же результаты можно получить, исходя из НТУ с НППВ. Построены и изучены погранслойные задачи по НТУ с СВ. Изучена задача сращивания и получены граничные условия прикладной-двумерной теории и погранслойных задач. Обосновывается прикладная-двумерная теория микрополярных пластин [31,92], построенной на основе метода гипотез.

В работе [108] развивается асимптотический подход работ [78-81,107] для изучения динамических задач микрополярных пластин на основе НТУ с НППВ. В работах [12,15], продолжая исследования в этом направлении, построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных пластин. Построены и изучены квазистатические погранслои. На основе сращивания асимптотических разложений получены граничные и начальные условия для общей прикладной-двумерной динамической теории микрополярных пластин. Получен принцип Гамильтона для общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин.

Построена общая прикладная-двумерная динамическиая теория микрополярных пластин на основе НТУ с СВ.

В работах [13,16] изучаются изгибные собственные колебания прямоугольных и круглых микрополярных пластин.

В работах [109] построена асимптотическая теория термоупругости микрополярных тонких пластин.

В работах [67,103] асимптотическим методом изучена статическая граничная задача НТУ с НППВ в тонкой трехмерной области оболочки. Построен внутренний итерационный процесс и теория погранслоя для тонких оболочек на основе НТУ с НППВ. Построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных оболочек. Изучены структура и свойства погранслоя по НТУ с НППВ для тонкой оболочки. Изучена задача сращивания и получены отдельные граничные условия прикладной-двумерной теории и погранслойных задач микрополярных оболочек.

В работе [68] построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных тонких оболочек на основе НТУ с СВ. Изучены погранслои по НТУ с СВ. Изучена задача сращивания внутренней задачи и погранслойных задач, в результате которого получены граничные условия прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек и погранслойных задач.

На основе результатов работ [67,68] построена общая теория микрополярных круговых цилиндрических оболочек.

В работах [65,82] асимптотический подход развивается для изучения краевых задач микрополярного упругого прямоугольника как на основе НТУ с НППВ, так и на основе НТУ с СВ. Построена прикладная-одномерная теория микрополярных стержней. Построен вариационный принцип прикладной-одномерной теории микрополярных стержней. Построена теория микрополярных погранслоев для тонкого прямоугольника, изучены структура и свойства погранслойных задач. Построены функции типа погранслоя. Доказаны свойства их обобщенной ортогональности. Построены общие решения погранслойных задач в виде рядов. Вариационным способом определение произволов погранслоев сведено к решению систем алгебраических линейных уравнений. Изучена задача сращивания прикладной одномерной теории и погранслойных задач, определены соответствующие граничные условия.

В работе [16] построена прикладная-одномерная динамическая теория микрополярных стержней как на основе НТУ с НППВ, так и на основе НТУ с СВ. В работе [14] изучена задача о распространении волн в бесконечной микрополярной полосе по НТУ с НППВ в точной постановке и доказана, что в случае длинных волн результаты по точной и прикладной теориям совпадают. В работах [13,15] изучается задача о свободных изгибных колебаниях микрополярных стержней. Численные результаты обнаруживают эффекты микрополярности на частоты собственных колебаний стержней.

В работе [26] асимптотическим методом изучается термоупругая задача микрополярного упругого тонкого прямоугольника.

3. Заключение. В заключение обзора попытаемся систематизировать затронутые выше проблемы, разработка которых на наш взгляд имеет существенное значение.

–Построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных пластин и оболочек и прикладная-одномерная теория микрополярных стержней на основе НТУ с НППВ и НТУ с СВ.

–Построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных пластин и прикладная-одномерная динамическая теория микрополоярных стержней на основе НТУ с НППВ и НТУ с СВ.

–Построена общая прикладная-двумерная теория термоупругости микрополярных пластин и прикладная-одномерная теория термоупругости микрополярных стержней.

–Изучена задача погранслоя для микрополярных пластин, оболочек и стержней, изучены структура и свойства микрополярных погранслоев, построены их общие решения.

–Изучена задача сращивания внутреннего итерационного процесса (прикладной теории) и погранслойных задач по НТУ с НППВ и НТУ с СВ, выявлены граничные условия прикладной теории в случае микрополярных пластин, оболочек и стержней.

Актуальными задачами в данной области, на наш взгляд, являются:

–построение прикладной-двумерной динамической теории и теории термоупругости для микрополярных тонких оболочек;

–построение прикладной-двумерной теории магнитоупругости и магнитотермоупругости микрополярных тонких оболочек и пластин;

–решение класса задач о концентрации напряжений вокруг отверстий в микрополярных пластинах и оболочках;

–решение класса задач о свободных и вынужденных колебаниях и другие динамические задачи для микрополярных пластин и оболочек;

–изучение задач устойчивости микрополярных пластин и оболочек;

–развитие численных и вариационных методов решения задач прочности, колебания и устойчивости микрополярных пластин и оболочек;

–и, главное, найти приложения разработанной микрополярной теории пластин, оболочек и стержней в современной области микро- и наномеханики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М. Наука. 1997. 414 с.
2. Агаловян Л. А. О некоторых результатах по асимптотической теории балок, пластин и оболочек. // В сб.: " Проблемы механики деформируемого твёрдого тела". Ереван: Изд – во НАН Армении 1997. С. 31 – 50.
3. Агаловян Л. А. Об асимптотическом методе в теории пластин и оболочек // Механика оболочек и пластин в XXI веке. Саратов. Изд – во Саратовск гос. тех ун – та. 1999. С. 129 – 151.
4. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // ПМ. 2002. Т. 38. №7. С. 3 – 24.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 266с.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука 1974. 446с.
7. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
8. Амбарцумян С. А. Теория трансверсально-изотропной пластинки с учетом моментных напряжений // Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54 №1. С. 5-11.
9. Амбарцумян С. А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки // Изв. НАН Армении.Механика. 2002. Т. 55. №3. С. 20-33.
10. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272с.
11. Атоян А.А. Асимптотические решения краевых задач колебаний тонких пластин по несимметричной теории упругости. Кандидатская диссертация. Институт Механики НАН Армении. 2004. 122с.
12. Атоян А.А., Саркисян С.О. Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экологический Вестник Научных Центров Черноморского Экономического Сотрудничества. 2004. №1. С. 18-29.
13. Атоян А.А., Саркисян С.О. Свободные колебания пластин-полос, прямоугольных и круглых пластин по несимметричной теории упругости // Тезисы докладов Международной конференции «Четвертые Окуневские чтения» и симпозиума «Пуанкаре и проблемы нелинейной механики». Санкт-Петербург, 22-25 июня 2004 г. С. 25-26.
14. Атоян А.А., Саркисян С.О. К задаче о распространении плоской волны в микрополярной упругой бесконечной полосе. // Прикладная механика и технологии машиностроения: Сб. научн. тр. / Под редакцией В. И. Ерофеева, С. И. Смирнова, Г. К. Сорокина.-Нижний Новгород: Изд-во «Интелсервис». 2004. Вып. 1(7). С. 67-74.
15. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.18-33.
16. Атоян А.А., Саркисян С.О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин. // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 4. С. 287-294.
17. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2, Вып. 7. С. 1399-1409.
18. Бабич Д. В. О влиянии моментных напряжений на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки // ПМ. 1967. Т. 3. Вып. 4. С. 39-44.
19. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела // В сб.: Проблемы

механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд. НАН Армении. 2002. С. 37-47.
20. Багдоев А.Г., Петросян Л. Г. Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1983. Т. 36. №5. С. 3-16.
21. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 446с.
22. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред // Мех. Полимеров. 1965. №2. С. 27-37.
23. Бровко Г. Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера // МТТ. 2002.№1. С. 75-91.
24. Ванин Г. А. Градиентная теория упругости // МТТ. 1999. №1. С. 46-53.
25. Варданян С. А. Применение асимптотического метода к расчету термоупругих пластин по несимметричной термоупругости// В сб.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван. 2002. С. 138-142.
26. Варданян С.А. Внутренняя задача термоупругого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Механика. Материалы XII Республиканской конференции молодых ученых. Агавназор. 25-29 августа 2001. С. 42-47.
27. Введение в микромеханику. Под редакций М. Онами. М.: Металлургия. 1987. 271с.
28. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. №5. С. 3-122.
29. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. Вып. 3. М.: Наука.1966. С. 116-136.
30. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд. Тбилисск. Ун-та. 1975.С. 51-149.
31. Геворкян Г. А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // ПМ. 1966. Т. 2. Вып. 10. С. 36-43.
32. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
33. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593-608.
34. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
35. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейснера // Изв. АН. СССР МТТ. 1990. №6. С. 124-138.
36. Грекова Е. Ф., Жилин П. А. Среда Кельвина и ферромагнетики: определяющие уравнения и волновые процессы // Нелинейная акустика твердого тела / Сб. трудов 8 сессии Росс. акустич. общества.- Н. Новгород: Изд-во «Интелсервис». 1998. С.87-90.
37. Дудников В. А., Морозов Н. Ф. Определение напряженно-деформированного состояния плоских, ослабленных вырезами с угловыми точками областей, на основе линейной моментной теории упругости // Изв. АН. СССР. МТТ. 1975.№1. С. 95-100.
38. Дудников В. А., Назаров С. А. Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // ДАН СССР. 1982.Т. 262. №2. С. 306-309.

39. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // МТТ. 1994. №3. С. 181-190.
40. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 327с.
41. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Изд-во «Мир». 1965. 480с
42. Жилин П. А. Основные уравнения неклассических теорий упругих оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. ЛПИ. №386. Л.: Изд-во ЛПИ. 1982. С. 29-42.
43. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности. Л.: Изд-во ЛГУ. 1978. 224с.
44. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф., Фирсова А. Д. Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // Доклады АН России. 2003. Т. 391. № 6. С.764-768.
45. Ильюшин А. А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошных сред //Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1996. № 5. С.6-14.
46. Ильюшин А. А., Ломакин В. А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54-59.
47. Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости. М.: Наука. 1973. 304с.
48. Каюк Я. Ф., Жуковский А. П. К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // ПМ. 1981. Т. XVII. № 10. С. 80-85.
49. Кириллов Ю.В., Постников А.А., Тюленев А. И. Исследования по теории пластин и оболочек моментной теории упругости // В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во. Казанск. Ун-та 1990. Вып.20. С. 18-43.
50. Койтер В. Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С. 89-112.
51. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Аналитические, численные и экспериментальные исследования моментных эффектов при деформировании упругих тел // Тр. III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов-на-Дону-Азов. 13-16 октября 2003. Ростов-на-Дону. Изд-во «Новая книга». 2004. С. 230-231.
52. Короткина М. Р. О моментных напряжениях // Вестник Московск. Университета. 1968. №6. С. 53-61.
53. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов // Физика твердого тела. 2002. Т.44. Вып. 12. С.2158-2163.
54. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // МТТ. 2002. № 5. С. 69-82.
55. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // ПМТФ. 2001. № 4. С. 145-154.
56. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 416с.
57. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940с.
58. Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д. О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. Журнал. 1982. Т. 28 № 6. С 838-840.
59. Манукян В. Ф. О существовании поверхностных сдвиговых волн в микрополярных средах // Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. №2. С. 75-79.
60. Маслов Н. М. Асимптотическая теория термоупругости тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1993. 152с.

61. Миндлин Р. Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период. сб. Перев. Иностр. Статей. 1964. №4. С. 115-128.
62. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. Период. сб. Перев. Иностр. Статей. 1964. №4. С. 80-114.
63. Мовсисян Л. А. К моментной теории упругости для тонких пластин // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №2. С. 148-152.
64. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
65. Мутафян М. Н., Саркисян С. О. Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 41-58.
66. Назаров С. А., Семенов Б. Н. О связи коэффициентов интенсивности для плоской задачи теории упругости в классической и моментной постановке // В сб.: "Исследования по упругости и пластичности". Вып. 13. Л.: Изд-во ЛГУ. 1980. С. 148-154.
67. Никогосян Г.С., Саркисян С.О. Микрополярная теория упругих тонких оболочек // Изв. НАН Армении.Механика. 2005. Т.58. №1. С.15-37.
68. Никогосян Г.С., Саркисян С.О. Упругие тонкие оболочки по несимметричной теории упругости со стесненным вращением // Доклады НАН Армении. 2005.
69. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
70. Пальмов В.А. Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117-1120.
71. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // Сб.: Механика деформируемого твердого тела. Изд-во «Наука», 1986.С.106-112.
72. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
73. Рогачева Н.Н. Пьезокерамические оболочки, поляризованные вдоль одного семейства координатных линий срединной поверхности // Препринт №204. Институт Проблем Механики АН. СССР. М., 1982. 60с.
74. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев. Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162с.
75. Савин Г.Н., Немиш Ю. Н. Исследования по концентрации напряжений в моментной теории упругости // ПМ. 1968. Т. 4. Вып. 12. С. 1-17.
76. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во ЕГУ. 1976. 534с.
77. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении.1992. 260с.
78. Саркисян С. О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №2 С. 138-147.
79. Саркисян С. О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи изгиба упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №3. С. 216-225.
80. Саркисян С. О. Теория тонких пластин по несимметричной теории упругости // Сб. Научных трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессоров Т. Т. Хачатряна и О. М. Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998. Ереван. 1999. С. 185-189.
81. Саркисян С. О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // Сб. научных трудов, посвященных 80-летию академика НАН РА С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН РА. 2002. С. 285-296.

82. Саркисян С. О., Мутафян М. Н. Внутренняя задача изотропного упругого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Изв. ВУЗ-ов. Северо-Кавказский регион. Естест. науки. 2000. №3. С. 141-142.
83. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Обобщенная ортогональность в плоской задаче несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2001. Т. 101. № 2.
84. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Сращивание асимптотических разложений основного итерационного процесса и погранслоя в краевых задачах тонких пластин по несимметричной теории упругости // Изв. ВУЗ-ов. Северо-Кавказский регион. Естест. Науки. 2002. №2. С. 36-38.
85. Седов Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи математических наук. 1965. Т. Вып. 5. С. 121-180.
86. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука. 1995. 320с.
87. Уголчиков А. Г. Моментная динамика линейно-упругого тела // Докл. АН России. 1995. Т. 340. №1. С. 56-58.
88. Устинов Ю. А. Однородные решения и проблема предельного перехода от трехмерных задач к двумерным для плит из электроупругих материалов с переменными свойствами по толщине // Тр. Х-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1. Тбилиси. Изд-во «Мицниереба. 1975. С. 286-295.
89. Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек // Межвузовский сборник «Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та. 1978. С. 3-27.
90. Фарманян А.Ж. Сращивание внутреннего напряженного состояния и погранслоя тонких пластин для одного варианта смешанных граничных условий по несимметричной теории упругости // Материалы XII республиканской конференции молодых ученых. Механика. 2003. С. 188-192.
91. Фарманян А.Ж. Асимптотические решения краевых задач тонких пластин по несимметричной теории упругости. Диссертация кандидата физ.-мат. наук. Институт Механики НАН Армении. Ереван. 2001. 146с.
92. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикл. Механика. Тр. Америк. Об-ва инж.-механиков. Серия Е. 1964. Т. 31. №4. С. 149-150.
93. Шкутин Л.И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск. «Наука. Издательство Сибирского отделения АН СССР. 1988. 128 с.
94. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // В кн. «Разрушение. Т. 2. М.: Мир. 1975. С. 646-751.
95. Ambartsumian S. A. Nontradional theories of shells and plates (Retrospective) //Appl. Mech. Rev. 2002. V.55. N5. P. 35-44.
96. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Hermann efils. 1909. 226p.
97. Eringen A. Cemal. Microcontinuum Field Theories. 1. Foundations and Solids. Springer. 1998. P. 325.
98. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Apll. Math. 1961. Vol. N1. P. 1-33.
99. Gauther R.D. Jahsman W.E. A Quest for Micropolar Elastic Constants. Part 2 // Arch. Mech., 1981. V. 33, N 5. P. 717-737.
100. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells // Proc. R. Soc. 1962. V. A266. № 1326. P. 143-160.
101. Green A. E., Naghdi P. M. Wainwright W. L. A General Theory of a Cosserat Surface // Archive for Rational Mechanics and Analisis. 1965. V. 20. P. 287-308.

102. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Wolled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
103. Nikoghosyan G. S., Sargsyan S. H. Asymptotic Method of Construction of General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells // XXXII Summer School –Conference " Advanced Problems in Mechanics " June 24-Juli 1, 2004, St. Peterburg (Repino), Russia APM 2004 Book of Abstracts P. 79-80
104. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P. 383.
105. Palmov V.A., Altenbach H. Uber eine cosseratsche theorie fur elastische platen // Thechn. Mech. 1982. H. 3. S. 3-9.
106. Reissner E. On Generalized Two-dimencional Plate Theory-1 // IJSS. 1969. V. 5. P. 525-532.
107. Sargsyan S.H. On Some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Vol. 16. / Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Spriger. 2004. P. 201-210.
108. Sargsyan S.H. Asymptotic theory of dinamic of micropol thin plates // Abstracts Matematical Mogeling of Dinamic behavior of Thin Elastic Structures Euromech Colloquium 439. Juli 24-27. 2002. Saratov. Russia. P. 31-32.
109. Sargsyan S. H., Vardanyan S. A. Asymptotic Theory of Thermoelastic Micropole Thin Plates. Proceedings of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. 8-11 June 2003, Blacsburg. V. A. Vol. 1. MA5-3-1 - MA5-3-4.
110. Ostoja-Starzewski M. , Jasiuk I. Stress invariance in planar Cosserat elasticity// Proc. Roy. Soc. London. A. 1995. 451. P. 453-470.
111. Voigt W. Theoretische Studien uber die Elastizitats varhaltnisse der Kristall. – Abh. Ges. Wiss. Gottingen, 1887. Bd. 34.

Гюмрийский государственный
педагогический институт
им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию
11.02.2005

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 393.3

СИММЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЧГЛ

Минасян М.М.

Մ.Մ. Մինասյան

ՉԳԼ մոտավորությամբ բախումներից զուրկ պլազմայի հավասարումների համակարգի բերումը սիմետրիկ տեսքի

Աշխատանքում երկադիաբատ մոտավորությամբ (Չու-Գոլդբերգեր-Լոուի տեսություն) իդեալական, բախումներից զուրկ պլազմայի հավասարումների համակարգը բերվել է սիմետրիկ տեսքի: Օգտագործվել է Ֆրիդրիխս-Լաքսի մեթոդը: Արտածվել են այդ համակարգի հիպերբոլիկության պայմանները: Քննարկվել է ձևափոխությունների երկակիության հարցերը՝ կապված Լեժանդրի ձևափոխության հետ: Որոշվել են համապատասխան լագրանժիանները և արտածվել նրանց ուռուցիկության բավարար պայմանները: Քննարկվել են վիճակի հավասարումները և էնտրոպիայի պահպանման օրենքը:

M.M. Minassian

The symmetrization of the ChGL system for a collisionless plasma

The system of equations in doubly adiabatic approximation (theory of Chew-Goldberger-Low) is brought to symmetrical appearance. The method of symmetrization of Fridrics-Lax is applied. The conditions of system hyperbolicity are received. Duality of transformations in the theory of Legendre transformations are discussed. The responding lagrangians are constructed and sufficient conditions of their camber are deduced. Adiabatic equations of condition and entropy conservation law are discussed.

В работе система уравнений бесстолкновительной идеальной плазмы в дваждыадиабатическом приближении (теория Чу-Гольдбергера-Лоу) приведена к симметрическому виду. Применен метод симметризации Фридрихса-Лакса. Получены условия гиперболичности системы. Обсуждена двойственность преобразования в свете теории преобразования Лежандра. Построены соответствующие лагранжианы и выведены достаточные условия их выпуклости. Обсуждены адиабатические уравнения состояний и закон сохранения энтропии.

1. Одножидкостные МГД уравнения правильно описывают свойства невязкой идеально проводящей квазинейтральной плазмы в магнитном поле, если столкновения в плазме достаточно часты, чтобы поддерживать ее изотропность. Если же магнитное поле достаточно сильно, а столкновения достаточно редки, предположение об изотропности не выполняется и свойства плазмы вдоль и поперек магнитного поля оказываются различными. Чу, Гольдбергер и Лоу [1] вывели полную систему для описания бесстолкновительной плазмы путем разложения уравнения Власова по степеням $1/H$. Эта система уравнений, обычно называемая теорией ЧГЛ (или дважды адиабатической теорией), имеет вид [2]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla . \vec{v} = 0 , \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} . \nabla$$

$$\frac{D\vec{H}}{Dt} - \left(\vec{H} . \nabla\right)\vec{v} + \vec{H}\nabla . \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \mu_e \left(\nabla \times \vec{H}\right) \times \vec{H} + \nabla; \hat{P} = 0 \tag{1.1}$$

Симметричный тензор напряжений $\hat{P}$ имеет вид

$$P_{ij} = p_\perp \delta_{ij} + \frac{p_{II} - p_\perp}{H^2} H_i H_j \tag{1.2}$$

где $p_\perp, p_{II}$ — независимые давления, действующие соответственно перпендикулярно и параллельно магнитным силовым линиям (остальные обозначения общепринятые).

Дополнительно к системе (1.1) имеются два уравнения состояния (более строго: одно адиабатическое уравнение состояния и один адиабатический инвариант сохранения магнитного момента в частице):

$$\frac{p_{II} H^2}{\rho^3} = \text{const} \qquad \frac{p_\perp}{\rho H} = \text{const} \tag{1.3}$$

Систему можно представить в виде законов сохранения массы, магнитной индукции и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^j)}{\partial x^j} = 0$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(H_i v^j - H^j v_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho v_i v^j + \tilde{p}\delta_i^j - \tilde{T}_i^j\right) = 0 \tag{1.4}$$

$$\tilde{T}_i^j = \tilde{\mu} H_i H^j - \frac{1}{2}\tilde{\mu} H^2 \delta_i^j, \quad \tilde{\mu} = \mu_e + \frac{p_\perp - p_{II}}{H^2}, \quad \tilde{p} = \frac{p_\perp + p_{II}}{2}$$

Система (1.4) переходит в систему МГД, если формально принять $p_\perp = p_{II}$, однако с различными уравнениями состояния и внутренней энергии.

Следствием из системы ЧГА является закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S^j}{\partial x^j} = 0 \tag{1.5}$$

$$E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\tilde{\mu} H^2 + \rho \tilde{U} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\mu_e H^2 + \rho U$$

$$S^j = v^j E + \left(\tilde{p}\delta_i^j - \tilde{T}_i^j\right)v^i$$

$$\tilde{U} = \frac{p_{II}}{\rho} + \frac{p_\perp}{2\rho}, \quad U = \frac{p_\perp}{\rho} + \frac{p_{II}}{2\rho}$$

Будем рассматривать систему (1.4) как основную для 7-мерного вектора $u = \{\rho, H_1, H_2, H_3, v_1, v_2, v_3\}$. В силу адиабатических законов (1.3) будем считать p_{II} и $p_\perp$ заданными функциями от ρ и H, дифференциалы которых связаны соотношениями

$$dp_{II} = \frac{3p_{II}}{\rho}d\rho - \frac{2p_{II}}{H}dH, \quad dp_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{\rho}d\rho + \frac{p_{\perp}}{H}dH \tag{1.6}$$

2. Будем симметризировать систему (1.4) по методу Фридрихса-Лакса [3,4]. Симметрические системы позволяют наиболее естественным образом поставить корректную задачу Коши и получить достаточные условия гиперболичности системы. Кроме того, симметрические системы позволяют без больших вычислительных затрат применить методы редукции системы к уравнениям типа КДВ, ЗХ, КП и т.д. [5,6].

Суть метода ФЛ заключается в следующем: системы МСС, как правило, являются следствием из некоторых законов сохранения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial Q_\alpha^m}{\partial x^m} = 0 \\ &P_\alpha = P_\alpha(u_1, u_2, \ldots u_n) \qquad (m = 1,2,3) \\ &Q_\alpha^m = Q_\alpha^m(u_1, u_2, \ldots u_n) \qquad (\alpha = 1,2,\ldots n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Величины P_α называются "сохраняемыми величинами", а Q_α^m – их потоками. Важным свойством законов сохранений является то, что они могут порождать новые законы сохранения. Для этого необходимо, чтобы существовали интегрирующие множители $v_\alpha(u_1, u_2, \ldots u_n)$ такие, чтобы линейные дифференциальные формы $v_\alpha dP_\alpha$ и $v_\alpha dQ_\alpha^m$ стали полными дифференциалами:

$$v_\alpha dP_\alpha = d\omega \qquad v_\alpha dQ_\alpha^m = d\omega^m \tag{2.2}$$

Тогда следует дополнительный закон сохранения:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega^m}{\partial x^m} = 0 \tag{2.3}$$

По терминологии Фридрихса ω называется "выведенной" (derived) величиной, а уравнение (2.2) – "выведенным" уравнением сохранения. Будем считать, что выполняется условие

$$\delta^2\omega(u) - v_\alpha \delta^2 P_\alpha(u) > 0 \tag{2.4}$$

Доказывается, что в силу принятых предположений система (2.1) записывается в виде симметричной t-гиперболической системы с корректно поставленной задачей Коши

$$A^0 \frac{\partial u}{\partial t} + A^m \frac{\partial u}{\partial x^m} = 0 \tag{2.5}$$

Гиперболичность означает, что собственные числа λ матрицы $A^i\xi_i$ по отношению к матрице A^0 для любого ненулевого вектора $\bar{\xi}$ вещественны, а соответствующие им левые собственные векторы составляют базис в соответствующем векторном пространстве. Для нелинейных систем гиперболичность может определяться только на множество решений. Достаточным условием гиперболичности системы (2.4) являются симметричность матриц A^0 и A^j при положительной определенности первой.

Применительно к идеальным системам МСС, как правило, следствием является уравнение сохранения энергии E, т.е. одно из уравнений типа (2.2) является уравнение сохранения энергии. Тогда следует

$$v^{\alpha} = \frac{\partial E}{\partial P_{\alpha}} \qquad v^{\alpha} = \frac{\partial S^{m}}{\partial Q^{m}_{\alpha}} \tag{2.6}$$

Записав систему (2.1) в виде

$$\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial Q^{m}_{\alpha}}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x^{m}} = 0 \tag{2.7}$$

и умножив слева на "симметризирующую" невырожденную матрицу $\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^{j}}\right)$, получим систему (2.4) с симметричными матрицами

$$A^0 = \left(a^0_{ij}\right), \quad A^m = \left(a^m_{ij}\right)$$

$$\begin{aligned} a^0_{ij} &= \frac{\partial^2 E}{\partial u^i \partial u^j} - v^{\alpha}(u)\left(\frac{\partial^2 P_{\alpha}}{\partial u^i \partial u^j}\right) = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^j}\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u^i} \\ a^m_{ij} &= \frac{\partial^2 S^m}{\partial u^i \partial u^j} - v^{\alpha}(u)\left(\frac{\partial^2 Q^m_{\alpha}}{\partial u^i \partial u^j}\right) = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^j}\frac{\partial Q^m_{\alpha}}{\partial u^i} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Положительная определенность матрицы A^0 следует из (1.7).

Можно симметризацию провести и по иному. Этим методом часто пользуется С.К. Годунов [7,8] и др. [9]. Этот метод двойственнен к методу ФЛ в смысле преобразования Лежандра. Действительно, из теории преобразований Лежандра следует существование обратных к (1.9) преобразовании

$$P_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}} \qquad Q^{m}_{\alpha} = \frac{\partial L^{m}}{\partial v^{\alpha}} \tag{2.9}$$

порожденных функциями Лагранжа

$$L = P_{\alpha}v^{\alpha} - E, \qquad L^m = Q^m_{\alpha}v^{\alpha} - S^m \tag{2.10}$$

С использованием (1.11) систему (1.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial L^m}{\partial v^{\alpha}}\right) = 0 \tag{2.11}$$

или

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial^2 L^m}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^m} = 0 \tag{2.12}$$

которая является симметрической. При этом порождающие функции L и

E выпуклы одновременно и это обеспечивает определенность матрицы L_{mn}.

Таким образом, оба метода идентичны, однако выведенные симметрические системы разные: если система (2.4) записана для исходных полевых функций u, то система (2.11) записана для «новых» функций v. В данной работе предпочтение дается методу ФЛ, исходя именно из этого обстоятельства.

Легко проверить, что

$$L = \tilde{p} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}H^2, \quad L^m = v^i\left(\tilde{p}\delta_i^m - \tilde{T}_i^m\right) \tag{2.13}$$

Без знака тильды эти соотношения совпадают со случаем МГД.

В работе [10] приведен еще один вариант симметризации системы ЧГА для вектора

$$u = \left\{ v_i, \ H_i, \quad \frac{p_\perp - p_{II}}{2H^2}, \quad \frac{p_\perp + p_{II}}{2} \right\} \tag{2.14}$$

Однако в этом случае некоторые физические аспекты теряют свою прозрачность.

3. Переходим к симметризации системы ЧГА. Из законов сохранения (1.3) следует

$$P_\alpha = \{\rho, H_i, \rho v_i\}, \ \alpha = 1,\dots,7$$

$$Q_\alpha^m = \left\{\rho \mathrm{v}^m, \mathrm{v}^m H_i - \mathrm{v}_i H^m, \rho v_i v^m + \tilde{p}\delta_i^m - \tilde{T}_i^m \right\} \tag{3.1}$$

Теперь выберем вектор

$$v^\alpha = \left\{ \tilde{U} + \frac{\tilde{p}}{\rho} - \frac{\mathrm{v}^2}{2}, \tilde{\mu}H_i, \mathrm{v}_i \right\} \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что

$$v^\alpha P_\alpha = d\mathrm{E} \qquad v^\alpha Q_\alpha^j = dS^j \tag{3.3}$$

где E и S^j имеют представления (1.5). Вычислив по формулам (2.8), для матриц $A^0 = (a_{ij})$, $A^m = (a_{ij}^m)$ в блочном виде получим выражения

$$A^0 = \begin{vmatrix} \dfrac{3p_{II}}{\rho^2}, & \vec{0}, & \dfrac{\mu_1\vec{H}}{\rho} \\ \vec{0}^T, & \rho\hat{I}, & \hat{0} \\ \dfrac{\mu_1\vec{H}^T}{\rho}, & \hat{0}, & \tilde{\mu}\hat{I} + \mu_2\hat{h} \end{vmatrix} \quad A^m = \begin{vmatrix} 0, & \vec{a}^m, & \vec{0} \\ (\vec{a}^m)^T, & \hat{0}, & \hat{\mathrm{H}}^m \\ \vec{0}^T, & (\hat{\mathrm{H}}^m)^T, & \hat{0} \end{vmatrix} + A_0\mathrm{v}^m \tag{3.4}$$

где

$$(\vec{a}^m)_j = \frac{p_\perp}{\rho}\delta_i^m H_j - \frac{\mu_1 H_i H_j H^m}{\rho}$$

$$\left(\hat{\mathrm{H}}^{m}\right)_{ij} = \left(\mu_{*} + \frac{p_{\perp}}{H^{2}}\right)\delta_{i}^{m} H_{j} - \left(\tilde{\mu}\delta_{ij} + \mu_{2}\frac{H_{i}H_{j}}{H^{2}}\right) H^{m}$$

$$\left(\hat{h}\right)_{ij} = \frac{H_{i}}{H}\frac{H_{j}}{H}, \quad \mu_{1} = \frac{p_{\perp} - 3p_{II}}{H^{2}}, \quad \mu_{2} = \frac{4p_{II} - p_{\perp}}{H^{2}} \tag{3.5}$$

Условие положительной определенности матрицы A_{0} сводится к неравенствам

$$\tilde{\mu} = \frac{p_{\perp} - p_{II}}{H^{2}} + \mu_{*} > 0, \quad 3\mu_{*}H^{2}p_{II} - p_{\perp}^{2} + 6p_{II}p_{\perp} > 0 \tag{3.6}$$

Решив эту систему неравенств, получим

$$\frac{p_{\perp}^{2}}{6p_{\perp} + 3\mu_{*}H^{2}} < p_{II} < p_{\perp} + \mu_{*}H^{2} \tag{3.7}$$

При нарушении условий (3.7) в системе возникает неустойчивость, известная в физике плазмы как «шланговая неустойчивость» [2].

Нетрудно проверить, что условия (3.7) обеспечивают и выпуклость полной энергии.

Симметричную систему в окончательном виде представим в виде

$$\frac{3p_{II}H^{2}}{\rho^{2}}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\mu_{1}H_{i}}{\rho}\frac{DH_{i}}{Dt} + \left(\frac{p_{\perp}}{\rho}\delta_{ij} - \frac{\mu_{1}H_{i}H_{j}}{\rho}\right)\frac{\partial v_{i}}{\partial x_{j}} = 0 \tag{3.8}$$

$$\rho\frac{D\bar{v}}{Dt} + \frac{p_{\perp}}{\rho}\nabla\rho - \mu_{1}\frac{H^{2}}{\rho}\left(\hat{h}.\nabla\right)\rho + \frac{p_{II}}{H^{2}}\left(\bar{H}.\nabla\right)\bar{H} +$$
$$+ \mu_{0}\bar{H}\times\nabla\times\bar{H} - \mu_{2}\bar{H}\left(\mathrm{I}_{H}^{T} : \nabla; \bar{H}\right) = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\mu_{1}\bar{H}}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \left(\tilde{\mu}\mathrm{I} + \mu_{2}\mathrm{I}_{H}\right)\frac{D\bar{H}}{Dt} + \mu_{0}\bar{H}\nabla.\bar{v} - \tilde{\mu}\left(\bar{H}.\nabla\right)\bar{v} - \mu_{2}\bar{H}\left(\mathrm{I}_{H} : \nabla; \bar{v}\right) = 0 \tag{3.10}$$

$$\mu_{1} = \frac{p_{\perp} - 3p_{II}}{H^{2}}, \quad \mu_{2} = \frac{4p_{II} - p_{\perp}}{H^{2}}, \quad \mu_{0} = \tilde{\mu} + \mu_{1} + \mu_{2}$$

4. Рассмотрим внутреннюю энергию

$$U(\rho, H) = \frac{p_{\perp}}{\rho} + \frac{p_{II}}{2\rho} \tag{4.1}$$

В силу уравнений (1.3) внутренняя энергия в адиабатическом приближении является функцией не только плотности, как это имеет место в газовой динамике и магнитогазодинамике, но и величины магнитной индукции.

Вычислив дифференциал энергии, получим

$$dU = \frac{p_{II}}{\rho^{2}}d\rho + \frac{p_{\perp} - p_{II}}{\rho H}dH \tag{4.2}$$

Из этого соотношения следуют уравнения состояния

$$p_{II} = \rho^{2}\frac{\partial U}{\partial\rho}, \quad p_{\perp} = p_{II} + \rho H\frac{\partial U}{\partial H} \tag{4.3}$$

Можно изначально постулировать внутреннюю энергию в виде (4.1) и уравнения состояния в виде (4.3). Тогда уравнения (1.3) будут следствиями из постулированных.

Как было отмечено выше, из имеющих законов сохранения можно вывести дополнительные законы сохранения. Одним из таких законов является закон сохранения энтропии (при отсутствии ударных волн)

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t}+\frac{\partial \rho s v^j}{\partial x^j}=0 \tag{4.4}$$

В этом случае, согласно принципу равноприсутствия, энтропию следует ввести во всех уравнениях состояния и во внутреннюю энергию.

Следуя Р.В. Половину [11], в качестве энтропии можно выбрать величину

$$s=\frac{k}{2}\ln\frac{p_{II}p_{\perp}^{2}}{\rho^{5}} \tag{4.5}$$

где k – постоянная Больцмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. The Boltzman eqation and the one-fluid hydromagnetic eqations in the absence of particle collissions. Proc. Roy. Soc., A 236, 112,1956.
2. Н. Кролл, А. Трайвелпис.Основы физики плазмы. М.: Мир. 1975.
3. Fridrics K.O., Lax P.D. Systems of conservation eqation with a convex extension. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68, 1971, pp. 1668-1688.
4. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws. II, Comm. Pure Appl. Math. 10. 1957. pp.537-566.
5. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван.: Изд. АН Арм. ССР. 1984.
6. Минасян М.М. Приближенные уравнения нелинейных волн в неоднородных движущихся средах с учетом диссипации и дисперсии. // Уч. записки ЕрГУ. 3. 1978. С.46-52.
7. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука. 1978.
8. Годунов С.К. Симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики. // Численные методы МСС 3. 1972. 1. С.26-34.
9. Кондауров В.И. О законах сохранения и симметризация уравнений нелинейной теории термоупругости. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. 4. С.819-823.
10. Минасян М.М. Распространение слабых возмущений в бесстолкновительной плазме. //Уч. записки ЕрГУ, 2, 1975. С.28-38.
11. Половин Р.В. Выступление на 2-ом совещании по теор. и прикл. МГД./ Сб.: "Вопросы МГД и динамики плазмы". Рига, 1962.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
25.01.2005