ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2005

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА, ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО К СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

Амбарцумян С.А., Минасян М.М.

Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Մ. Մինասյան
Դեֆորմացիաների արագության նկատմամբ զգայուն ոչ գծային առաձգամածուցիկ նյութից պատրաստված սալի պարամետրական տատանումները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է դեֆորմացիաների արագության նկատմամբ զգայուն ոչ գծային առաձգամածուցիկ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի պարամետրական տատանումները։ Սալերի դասական տեսության շրջանակներում, հեղինակների կողմից առաջարկված ոչ գծային առաձգամածուցիկ մոդելի հիման վրա ստացվել են սալի ծռման դինամիկական հավասարումները, երբ սալի վրա ազդում է առանցքային պարբերական ուժ: Կիրառվել է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդը: Ստացվել են տատանումների ամպլիտուդի նկատմամբ ոչ գծային հավասարումը: Ուսումնասիրվել է սալի կայունությունը գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի շրջակայքում:

S.A. Ambartsumyan, M.M. Minasyan
Parametric Vibrations of a Plate made of Nonlinear Viscoelastic Strain-rate Sensitive Materials

В работе рассматриваются параметрически возбуждаемые изгибные колебания прямоугольной пластинки, изготовленной из нелинейно-вязкоупругого материала, чувствительного к скорости деформации при активном нагружении. В рамках классической теории пластин и на основе модели нелинейно-вязкоупругого тела, предложенного авторами, выведено уравнение изгибных колебаний пластинки при действии осевого периодического усилия. Применена процедура Бубнова-Галеркина. Выведено нелинейное уравнение для амплитуды колебаний. Исследована неустойчивость в окрестности главного параметрического резонанса. Выявлены некоторые "нестандартные" особенности резонансной кривой.

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях пластинки, изготовленной из нелинейно-вязкоупругого материала, чувствительного к скорости деформации в стадии активного нагружения. Одномерная модель такого тела предложена в работах авторов [1,2]. В работе [3] дано трехмерное обобщение модели, а в работах [4,5] на основе термомеханики и вариационных принципов обоснована эта модель. Показано, что модель с достаточной точностью описывает особенности динамического поведения ряда полимерных материалов путем сравнения следствий из модели с данными известных одномерных испытаний.

Одномерная модель

$$\sigma = \sigma_s(\varepsilon)\left[1 + \psi\left(\dot{\varepsilon}/\alpha\right)\right] \qquad (1)$$

где σ_s — квазистатическое напряжение, $\dot{\varepsilon}$ — скорость деформации и функция ψ — мера отклонения динамического нагружения от квазистатического, хорошо описывает главные особенности ряда полимеров (политен, винипласт и др.), причем не все из этих особенностей вписываются в известные модели вязкоупругого тела. Важными свойствами, выявленными моделью, являются динамический гистерезис и рассеяние механической энергии, свойство запаздывания деформации, характерное для наследственного тела с сингулярным ядром ползучести.

Трехмерная модель описывается уравнениями

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\left(1+\psi\left(\dot{e}_I/\alpha\right)\right)\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3\right) \tag{2}$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

где $\dot{e}_I$ – производная по времени от интенсивности деформаций. Считается, что $\psi = 0$ при $\dot{e}_I < 0$, т.е. для разгрузки принимается модель линейно-упругого восстановления.

Из (2) следует параллельность девиаторов напряжений и деформаций, а также существование "единой" динамической зависимости интенсивности напряжений, интенсивности деформаций и скорости изменения последней

$$\sigma_I = 2G\left(1+\psi\left(e_I/\alpha\right)\right) \tag{3}$$

В работе [3] показано, что при колебаниях пластинки в диапазоне главных частот можно принять

$$\psi\left(\dot{e}_I/\alpha\right) \approx \left(\dot{e}_I/\alpha\right)^k \quad k < 1 \tag{4}$$

Представляя прогиб пластинки в форме

$$w(x,y,t) = F(t)\Phi(x,y) \tag{5}$$

получим

$$\psi(x,y,z,t) = \left(\frac{3z^2}{2\alpha^2}\right)^{k/2} F^k(t)\psi_1(x,y) \tag{6}$$

$$\psi_1(x,y) = \left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^k$$

Для изгибающих и крутящего моментов получаются

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3\psi_1}{k+3}\left(\frac{3h^2F^2}{8\alpha^2}\right)^{k/2}\left(A_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right] \tag{7}$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{3\psi_1}{k+3}\left(\frac{3h^2F^2}{8\alpha^2}\right)^{k/2}\left(A_0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] \tag{8}$$

$$H = -D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{3\psi_1}{k+3}\left(\frac{3h^2F^2}{8\alpha^2}\right)^{k/2}\frac{\partial^2 w}{\partial x}\right] \tag{9}$$

$$A_0 = \frac{2\left(\nu^2-\nu+1\right)}{3(1-\nu)}, \quad B_0 = \frac{4\nu-\nu^2-1}{3(1-\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

где E, ν – упругие константы при $\psi = 0$.

Пусть пластинка нагружена осевой периодической силой, действующей вдоль оси x. Для прогиба пластинки имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + hP_0\cos pt\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

Для шарнирно опертого по всему контуру пластинки, приняв

$$\Phi(x,y)=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\quad x\in[0;a]\quad y\in[0,b] \tag{11}$$

и применив метод Галеркина, получим уравнение для амплитуды колебаний в окрестности главного параметрического резонанса в безразмерной форме

$$f''(\tau)+f(\tau)(1+\lambda\cos 2\tau)+sf(\tau)+\gamma|f'(\tau)|^k f(\tau)H(ff')=0 \tag{12}$$

где

$$\tau=\omega_0 t,\quad f(\tau)=h^{-1}F(t),\ \omega_0^2=\frac{\pi^4 D}{\rho h}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right),\quad \lambda=\frac{\pi^2 n^2 P_0}{\rho a^2\omega_0^2}$$

$$\gamma=\frac{12\left[\sqrt{\frac{3}{8}}\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\frac{emh^2}{ab}\right]^k}{\pi^2(k+3)(\mu+2+\mu^{-1})}\left\{J_1\left[A_0(\mu+\mu^{-1})+2B_0\right]+2(1-\nu)J_2\right\}$$

$$J_1=\int_0^\pi\int_0^\pi\left[(\mu-1+\mu^{-1})\sin^2\xi\sin^2\eta+3\cos^2\xi\cos^2\eta\right]^{k/2}\sin^2\xi\sin^2\eta\, d\xi d\eta$$

$$J_1=\int_0^\pi\int_0^\pi\left[(\mu-1+\mu^{-1})\sin^2\xi\sin^2\eta+3\cos^2\xi\cos^2\eta\right]^{k/2}\cos^2\xi\cos^2\eta\, d\xi d\eta$$

$$\mu=\left(\frac{n}{m}\frac{b}{a}\right)^2$$

В уравнении (12) $H(x)$ – функция Хевисайда, s – частотная расстройка.

Порождающее решение в первом приближении имеет вид

$$f(\tau)=a\sin\tau+b\cos\tau=A\sin(\tau+\varphi) \tag{14}$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}(b/a)$$

Подставив (14) в уравнение (12), получим

$$-\sin\tau\left(\frac{a\lambda}{2}+sa\right)+\cos\tau\left(\frac{b\lambda}{2}-sb\right)+\gamma H(\sin 2(\tau+\varphi))A^{k+1}|\cos(\tau+\varphi)|^k\sin(\tau+\varphi)+$$

$$+\frac{\lambda a}{2}\sin 3\tau+\frac{\lambda b}{2}\cos 3\tau=0 \tag{15}$$

Умножив (15) поочередно на $\sin\tau$ и $\cos\tau$ и проинтегрировав полученные уравнения в промежутке $[\varphi;\varphi+2\pi]$, получим уравнения для определения параметров разветвления a и b:

$$\pi a(s+\lambda/2)-\gamma A^k(aI_1-bI_2=0)$$
$$\pi b(s-\lambda/2)-\gamma A^k(aI_2+bI_1) \tag{16}$$

где

$$I_1(k)=2\int\cos^k\tau\sin^2\tau d\tau,\ I_2(k)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{k+1}\tau\sin\tau d\tau=\frac{2}{k+2}$$

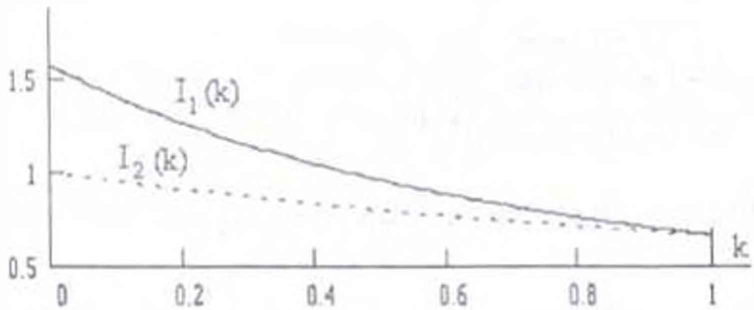
Учитывая формулы [7]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-2} B[\mu/2, \mu/2], \; B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{17}$$

где $B(x, y)$ – Бэта-функция, $\Gamma(x)$ – Гамма-функция, получим

$$I_1(k) = \frac{2^k \Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}{(k+2)\Gamma(k+1)}$$

Фиг.1 представляет графики функций $I_1(k)$ и $I_2(k)$



Фиг.1

Условие существования нетривиального решения системы приводит к амплитудному соотношению

$$\frac{\gamma^2 A^{2k}}{\pi^2}\left(I_1^2 + I_2^2\right) - 2s\frac{\gamma A^k I_1}{\pi} + s^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0 \tag{18}$$

Записав решение (18) в виде

$$\frac{\gamma I_1}{\pi} A^k = \frac{s \pm \sqrt{(1+\beta^2)\lambda^2/4 - s^2\beta^2}}{1+\beta^2} \qquad (\beta = I_2/I_1) \tag{19}$$

видно, что нетривиальное решение существует в диапазоне

$$-\frac{\lambda}{2}\sqrt{1+\beta^{-2}} \le s \le \frac{\lambda}{2}\sqrt{1+\beta^{-2}} \tag{20}$$

частотной расстройки.

Опорные значения частотной расстройки (при $A = 0$) равны $-\lambda/2$ и $\lambda/2$. Уравнение "скелетной" кривой (точек, равноудаленных от ветвей резонансной кривой на уровнях $A = \text{const}$) (фиг.2)

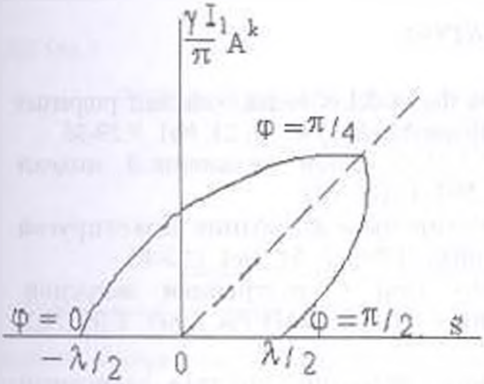
$$\frac{\gamma I_1}{\pi} A^k = s \tag{21}$$

Максимум амплитуды достигается на этой кривой при $s = \lambda/2\beta$.

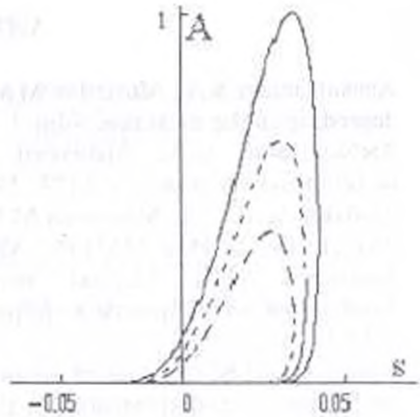
Из системы (16) для фазовой расстройки φ получим

$$\varphi = \text{arctg}\sqrt{\frac{s+\lambda/2-y}{y-s+\lambda/2}}, \quad y = \frac{\gamma I_1}{\pi} A^k \tag{22}$$

откуда следует, что Φ монотонно меняется вдоль резонансной кривой в промежутке $[0;\pi/2]$, двигаясь слева направо со значением $\pi/4$ в точке y_{max}.



Фиг.2



Фиг.3

Для ширины резонансной области получим

$$\Delta\omega = \lambda\omega_0\sqrt{1-\frac{4\gamma^2 A^{2k} I_1^2}{\lambda^2\pi^2}} \tag{23}$$

откуда видно, что опорная ширина области (при $A=0$) пропорциональна глубине модуляции λ и не зависит от нелинейности γ. Отметим, что перечисленные свойства резонансной кривой характерны параметрическим колебаниям с нелинейным демпфированием и с нелинейной восстанавливающей силой. Для сравнения приведем пример дифференциального уравнения колебаний с указанными механизмами [6]

$$\ddot{u} + u(1+\lambda\cos 2\tau) + su + \gamma u^2\dot{u} - ku^3 = 0 \tag{24}$$

Резонансная кривая для этого уравнения получается в виде

$$\left(\frac{3}{4}kA^2\right)^2(1+\beta^2) - 2s\left(\frac{3}{4}kA^2\right) + s^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0, \quad \left(\beta = \frac{\gamma}{3k}\right) \tag{25}$$

и полностью совпадает с уравнением (18) с заменой $\gamma A^k I_1/\pi$ на $3kA^2/4$. Сравнение показывает, что динамическое перенапряжение в модели вязкоупругого тела играет одновременно роль нелинейного демпфирования и нелинейной консервативной силы. Резонансная кривая в плоскости $(3kA^2/4,\ s)$ также имеет вид, показанный на фиг.2, однако в плоскости (A,s) эти кривые качественно отличаются в следующем: если для уравнения (25) резонансная кривая в опорных точках имеет вертикальные касательные, то для уравнения (18) из-за значения $k<1$ резонансная кривая касается оси частот.

В качестве примера построим резонансную кривую для винипласта, для которого имеем [1,2]

$$\alpha = 50\,сек^{-1}, \quad \nu = 0.25, \quad \sqrt{E/\rho} = 2.27\bullet 10^3\ м/с, \ k = 0.25$$

Примем

$$h/l = 0.01, \quad m = n = 1, \quad a = b = l, \quad hP_* = \lambda \bullet 4\pi^2 D/l^2$$

Резонансные кривые для трех значений глубины модуляций показаны на фиг.3: $\lambda = 0.04; 0.045; 0.05$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ambartsumian S.A., Minassian M.M. On the model of bodies with their properties depending on the stress rate. // Int. J. Nonlinear Mech. 1986. V. 21. №1. P.27-36
2. Амбарцумян С.А., Минасян М.М. Об одной нелинейной модели вязкоупругого тела. // МТТ. 1991. №4. С.165-172
3. Амбарцумян С.А., Минасян М.М. Нелинейные колебания вязкоупругой пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. №4. С.3-10
4. Минасян М.М. Модель твердого тела с внутренней энергией, зависящей от скорости деформаций. // Докл. НАН РА. 1999. Т.99. №1. С.11-15
5. Минасян М.М. К модели нелинейного вязкоупругого тела, зависящей от скорости деформаций. // В кн. "Проблемы механики деформируемых твердых тел". Изд. Гитутюн НАН РА. 2003. С.233-140.
6. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир. 1978.
7. Градштейн И.М., Рыжик И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов. М.: Изд. Физматгиз. 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.11.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 539.3

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНОК ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНОЙ

Егиазарян Т.А.

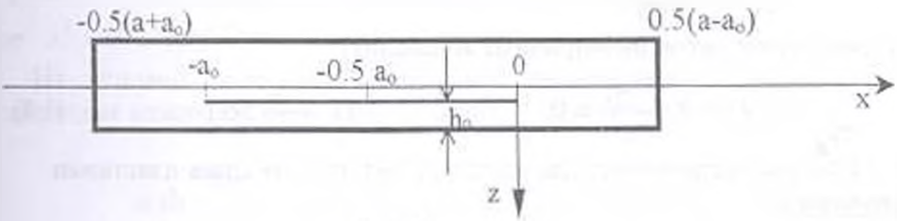
Տ.Հ. Եղիազարյան
Ճաքով թուլացված սալի սեփական տատանումների մասին

Աշխատանքում քննարկվում է ճաքի ազդեցությունը սալի սեփական տատանումների հաճախականության վրա: Դիտարկված են սալի երկու հանդիպակաց կողերը հոդակապորեն կամ կոշտ ամրացման դեպքերը: Կատարված է խնդրի վերլուծություն կախված սալի ներսում ճաքի երկարությունից և դիրքից:

Yeghiazaryan T.H.
On own vibrations of plate impaired by crack

В работе обсуждается вопрос о влиянии трещины на частоты собственных колебаний пластинки. Рассмотрены случаи шарнирного и жесткого закрепления двух противоположных сторон пластинки. Проведен анализ задачи в зависимости от длины и расположения трещины внутри пластинки.

1. Пусть в прямоугольной пластинке размерами a, b, h, модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью материала ρ, имеется трещина размерами $a_0 \in [0;a]$, b, расположенная на расстоянии $h_0 \in [0;0.5h]$ от срединной плоскости (фиг.1).



Фиг. 1

В рассмотренном случае жесткость на изгиб пластинки представится в виде [1,2]

$$D(x)=\begin{cases} D_1 = D, & \text{при} \quad \dfrac{x}{a} \in [-0.5(1+\alpha), -\alpha) \\ D_2 = \delta^2 D & \text{при} \quad \dfrac{x}{a} \in (-\alpha; 0) \\ D_2 = D & \text{при} \quad \dfrac{x}{a} \in (0; 0.5(1-\alpha)] \end{cases} \qquad (1.1)$$

где

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2),\ \delta^2 = 1-3\beta+3\beta^2,\ \beta = h_*/h \in [0,0.5],\ \alpha = a_0/a \in [0,1] \qquad (1.2)$$

Пусть на кромках пластинки $y=0$, $y=b$ заданы условия скользящего контакта

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \tilde{T}_{13} = T_{13} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x} = 0 \qquad (1.3)$$

где $w=w(x,y,t)$-прогиб пластинки, $\tilde{T}_{13}$ –обобщенное поперечное усилие, T_{13} – поперечное усилие, M_{12} –крутящий момент.

При условиях (1.3) изгиб пластинки происходит по цилиндрической поверхности $w=w(x,t)$ и уравнение колебаний пластинки представится в виде

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}^4} + \rho h l^4 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \qquad (i=1,2,3) \qquad \bar{x} = \frac{x}{a} \qquad (1.4)$$

Причем в точках $\bar{x}=0$, $\bar{x}=-\alpha$ должны быть удовлетворены условия сопряжения решений

$$w_1 = w_3,\quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial\ w_3}{\partial \bar{x}^3},\quad M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(3)},\ T_{13}^{(1)} = T_{13}^{(3)} \qquad (\bar{x} = -\alpha) \quad (1.5)$$

$$w_1 = w_2,\quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial\ w_2}{\partial \bar{x}^3},\quad M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(2)},\ T_{13}^{(1)} = T_{13}^{(2)} \qquad (\bar{x} = 0) \quad (1.6)$$

Так как трещина симметрично расположена по длине пластинки, то можно отдельно рассматривать симметричные и антисимметричные колебания, при этом в первом случае (симметричные колебания) в центре пластинки имеются условия

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = 0,\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{x}^3} = 0, \qquad (\bar{x} = -0.5\alpha) \qquad (1.7)$$

а во втором случае (антисимметричные колебания)

$$w_1(\bar{x}) = 0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{x}^2} = 0, \qquad (\bar{x} = -0.5\alpha) \qquad (1.8)$$

2. Ниже рассматриваются два варианта закрепления краев пластинки:

<u>шарнирное</u>

$$w_2(\bar{x}) = 0,\quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0.5(1-\alpha) \qquad (2.1)$$

$$w_3(\bar{x}) = 0,\quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = -0.5(1+\alpha) \qquad (2.2)$$

<u>жесткое</u>

$$\frac{\partial w_2}{\partial \bar{x}} = 0,\quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0.5(1-\alpha) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial \bar{x}} = 0,\quad \frac{\partial^3 w_3}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = -0.5(1+\alpha) \qquad (2.4)$$

Уравнение собственных колебаний

$$D\frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}^4}+\rho h a^4\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}=0, \qquad (i=1,2,3), \qquad \bar{x}=\frac{x}{a} \tag{2.5}$$

подстановкой $w_i(\bar{x},t)=f_i(\bar{x})e^{i\omega t}$ приводится к уравнению

$$D_i f^{IV}(\bar{x})-\rho h a^4\omega^2 f(\bar{x})=0, \qquad (i=1,2,3) \tag{2.6}$$

где ω –искомая частота собственных колебаний пластинки.

Рассмотрим симметричные колебания шарнирно опертой по двум противоположным сторонам пластинки. В этом случае

$$\begin{gathered} f_1^{IV}(\bar{x})-\frac{1}{\delta^2}\omega^2 f_1(\bar{x})=0 \quad \text{при } \bar{x}\in[-0{,}5\alpha;0] \\ f_2^{IV}(\bar{x})-\omega^2 f_2(\bar{x})=0 \quad \text{при } \bar{x}\in[0;\,0{,}5(1-\alpha)] \end{gathered} \tag{2.7}$$

При условиях симметрии в точке $\bar{x}=-0.5\alpha$, сопряжения решений в точке $\bar{x}=0$ и шарнирного закрепления в точке $\bar{x}=0.5(1-\alpha)$

$$\begin{gathered} f_1'(\bar{x})=0, f'''_1(\bar{x})=0 \qquad \text{при} \qquad \bar{x}=-0.5\alpha \\ f_1(\bar{x})=f_2(\bar{x}), \quad f_1'(\bar{x})=f_2'(\bar{x}), \delta^2 f_1''(\bar{x})=f_2''(\bar{x}) \quad \delta^2 f'''_1(\bar{x})=f_2'''(\bar{x}) \\ \text{при} \quad \bar{x}=0, \\ f_2(\bar{x})=0, f_2''(\bar{x})=0 \qquad \text{при } \bar{x}=0.5(1-\alpha) \end{gathered} \tag{2.8}$$

которые получаются из (1.6),(1.7),(2.2).

Решения (2.7) имеют вид

$$\begin{gathered} f_1(\bar{x})=a_1\operatorname{ch}\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}+a_2\operatorname{sh}\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}+a_3\cos\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}+a_4\sin\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}} \\ f_2(\bar{x})=b_1\operatorname{ch}\lambda\bar{x}+b_2\operatorname{sh}\lambda\bar{x}+b_3\cos\lambda\bar{x}+b_4\sin\lambda\bar{x} \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\lambda^4=a^4\omega^2\rho h/D$.

Из условий (2.8) для определения восьми постоянных получается следующая однородная система алгебрических уравнений:

$$\begin{gathered} a_1\operatorname{sh}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{ch}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_3\sin\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_4\cos\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}=0 \\ a_1\operatorname{sh}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{ch}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}+a_3\sin\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}+a_4\cos\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}=0 \\ a_1+a_3-b_1-b_3=0, \quad a_2+a_4-\sqrt{\delta}b_2-\sqrt{\delta}b_4=0 \\ \delta a_1-\delta a_3-b_1+b_3=0, \ \delta a_2-\delta a_4-b_2+b_4=0 \\ b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0 \\ b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

Условие существования ненулевого решения системы (2.10) приводит к определению корней трансцендентного уравнения

$$\begin{gathered}\frac{4}{\delta}\operatorname{th}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}-4\operatorname{cth}\frac{1-\alpha}{2}\lambda\operatorname{ctg}\frac{1-\alpha}{2}\lambda-\sqrt{\delta}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{cth}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}-\right. \\ \left.-\operatorname{th}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{ctg}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}\right)+\sqrt{\delta}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\operatorname{th}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{cth}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{ctg}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}\right)=0\end{gathered} \qquad (2.11)$$

Корни этого уравнения определяют нечетные по номеру частоты собственных колебаний

$$\omega_m=\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\frac{\lambda_m^2}{a^2}\ \ (m=1,3,5,....)$$

В частном случае, когда $\alpha=0$ или $\delta=1$ ($\beta=0$), т.е. в случае отсутствия трещины

$$\lambda_m=m\pi,\ \ \omega_m=\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\frac{m^2\pi^2}{l^2}$$

В случае антисимметричных колебаний, взамен первых двух уравнений системы (2.10) из условий (1.8) получаются уравнения

$$\begin{gathered}a_1\operatorname{ch}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{sh}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}+a_3\cos\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}-a_4\sin\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}=0 \\ a_1\operatorname{ch}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{sh}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}+a_3\sin\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}+a_4\cos\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}=0\end{gathered} \qquad (2.12)$$

В случае симметричных колебаний жестко закрепленной по краям $\bar{x}=-0.5(1+\alpha)$ и $\bar{x}=0.5(1-\alpha)$ пластинки, взамен последних двух уравнений системы (2.10), из условий (2.3), (2.4) получаются уравнения

$$\begin{gathered}b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0 \\ b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0\end{gathered} \qquad (2.13)$$

В случае же антисимметричных колебаний жестко закрепленной по краям $\bar{x}=-0.5(1+\alpha)$ и $\bar{x}=0.5(1-\alpha)$ пластинки, в системе (2.10) взамен первых двух уравнений необходимо взять два уравнения (2.12), а взамен последних двух–два уравнения (2.13).

Расчеты по определению приведенных значений первых двух частот (симметричных и антисимметричных) собственных колебаний

$$\bar{\omega}_m=a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}\,\omega_m=\lambda_m^2,\ \ (m=1,2) \qquad (2.14)$$

для двух вариантов граничных условий приводятся в таблицах 1-4

Таблица 1

Шарнирно закрепленная пластинка (симметричные колебания)

β \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	9.53	9.23	8.99	8.79	8.65	8.55	8.48	8.45	8.43
0.2	9.07	8.47	8.02	7.68	7.45	7.29	7.19	7.14	7.12
0.3	8.53	7.66	7.06	6.65	6.38	6.20	6.08	6.03	6.01
0.4	8.02	6.98	6.32	5.89	5.60	5.41	5.30	5.25	5.23
0.5	7.81	6.70	6.03	5.59	5.31	5.12	5.01	4.96	4.94

Таблица 2

Шарнирно закрепленная пластинка (антисимметричные колебания)

β \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	39.43	39.13	38.43	37.40	36.25	35.20	34.42	33.95	33.76
0.2	39.36	38.61	36.97	34.77	32.58	30.78	29.53	28.80	28.51
0.3	39.26	37.90	35.14	31.82	28.87	26.66	25.20	24.39	24.06
0.4	39.15	37.15	33.35	29.24	25.92	23.52	22.08	21.26	20.94
0.5	39.10	36.79	32.55	28.18	24.76	22.40	20.91	20.10	19.79

Таблица 3

Жестко закрепленная пластинка (симметричные колебания)

β \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	21.82	21.40	21.15	21.03	21.01	21.00	20.89	20.59	20.01
0.2	21.12	20.33	19.93	19.78	19.77	19.71	19.41	18.71	17.58
0.3	20.32	19.30	18.85	18.74	18.73	18.55	17.95	16.83	15.31
0.4	19.63	18.55	18.10	18.03	17.99	17.65	16.75	15.32	13.59
0.5	19.35	18.20	17.82	17.77	17.71	17.28	16.26	14.72	12.94

Таблица 4

Жестко закрепленная пластинка (антисимметричные колебания)

β \ α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	61.56	60.90	59.55	57.92	56.58	55.89	55.74	55.64	54.82
0.2	61.40	59.79	56.74	53.52	51.30	50.37	50.27	49.88	48.04
0.3	61.18	58.30	53.38	48.98	46.43	45.62	45.55	44.64	41.83
0.4	60.93	56.73	50.31	45.33	42.86	42.27	42.13	40.63	37.17
0.5	60.80	56.00	49.00	43.89	41.52	41.04	40.82	39.06	35.39

Следует отметить, что при $\alpha=0$ или $\beta=0$, т.е. при отсутствии трещины, $\overline{\omega}_1=\pi^2$, $\overline{\omega}_2=4\pi^2$ для случая шарнирно закрепления и $\overline{\omega}_1=2.69\pi^2$, $\overline{\omega}_2=6.25\pi^2$ для случая жесткого закрепления.

Из приведнных таблиц видно уменьшение частот при увеличении относительной длины трещины и расстояния трещины от лицевой плоскости пластинки. Случай $\alpha=0.5$, $\beta=0.5$ соответствует трещине, расположенной в срединной плоскости пластинки.

В заключение отметим, что расчеты приведенных значений частот собственных колебаний (2.14) были проведены двумя способами: определением корней соответствующих трансцендентных уравнений и определением собственных значений матриц (8x8) для соответствующих условий закрепления в случаях симметричных и антисимметричных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц. К устойчивости сжатой длинной пластинки, ослабленной трещиной. Сб. Исследование современных научных проблем в вузах. Том 2. Ер.: Изд. "Анастан", 2000г, с.130-133.
2. Гнуни В.Ц., Егиазарян Т.А. Об устойчивости пластинок ослабленных трещиной. В сб. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ер.: Изд. ЕГУ, 2002, с. 37-41.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
24.11.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Никогосян Г.С., Саркисян С.О.

Գ.Ս. Նիկողոսյան, Ս.Հ. Սարգսյան
Միկրոպոլյար առաձգական բարակ բաղանթի ասիմպտոտիկ տեսության մասին

Դիտարկվում է եռաչափ բարակ բաղանթի տիրույթում առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության (երբ տեղափոխությունները և պտույտները իրարից անկախ են) ստատիկական խնդրի ընդհանուր հավասարումները համապատասխան եզրային պայմաններով: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ կառուցված է ներքին ասիմպտոտիկական վերլուծությունը և սահմանային շերտերը: Ցույց է տրվում, որ սահմանային շերտերը չորսն են՝ ուժային (հարթ և հակահարթ) և մոմենտային (հարթ և հակահարթ): Ուսումնասիրվում է ներքին և սահմանային շերտի տիպի խնդիրների համակցումը, բավարարելու համար բաղանթի կողմնային մակերևույթի վրա առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության եռաչափ եզրային պայմաններին: Այս ուսումնասիրման արդյունքում ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծության համար ստացվել են առանձին եզրային պայմաններ, սահմանային շերտերի համար նույնպես ստացվել են առանձին եզրային պայմաններ:

Ասիմպտոտիկ մեթոդի հենքի վրա կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ բաղանթի կիրառական ընդհանուր երկչափ տեսությունը:

G.S. Nikogosyan, S.H. Sarkisyan
On Asymptotic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells

В трехмерной тонкой области оболочки рассматриваются общие уравнения и соответствующие граничные условия статической задачи несимметричной теории упругости (когда перемещения и вращения независимы друг от друга). Методом асимптотического интегрирования построен внутренний итерационный процесс и погранслои. Показывается существование четырех типов погранслоев: силовые (плоское и антиплоское) и моментные (плоское и антиплоское). Изучается задача сращивания внутренней задачи и погранслоев для удовлетворения трехмерных граничных условий несимметричной теории упругости на боковой поверхности оболочки. В результате этого исследования получены отдельные граничные условия для внутреннего итерационного процесса и для пограничных слоев.

На основе асимптотического метода построена общая прикладная двумерная теория микрополярных оболочек.

1. Несимметричная (моментная, микрополярная) теория упругости впервые построена в работе [1], согласно которой каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета вращательных степеней свободы.

Современное состояние несимметричной теории упругости изложено в работах [2–4]. Проблемы приложения теории несимметричной упругости в конкретных областях механики деформируемого тела рассмотрены в работах [5–8].

Несимметричная теория упругости является феноменологической моделью, отражающую полное внутреннее взаимодействие частиц тел, имеющих микроструктуру [9–10].

Актуальным является проблема построения микрополярной теории упругих тонких балок и стержней, пластин и оболочек [11–14].

В работе [11] методом гипотез реализован симбиоз общей несимметричной теории упругости и основных положений общеизвестной уточненной теории оболочек и пластин [15,16], построена теория микрополярных упругих тонких оболочек и пластин, которая открывала существенные возможности для решения прикладных проблем прочности, колебания и устойчивости микрополярных тонких оболочек и пластин.

Актуальным является проблема построения общей теории микрополярных упругих тонких балок и стержней, пластин и оболочек на основе асимптотического метода. При построении общей теории тонких балок и стержней, пластин и оболочек по классической теории упругости асимптотические методы развиты в работах [17-23]. В работе [21] (см. также обзорн. ст. [24]) была найдена новая асимптотика для построения общей теории упругих тонких балок и стержней, пластин и оболочек при неклассических краевых условиях, которая позволила найти решения новых классов статических и динамических проблем тонких тел.

В работах [25,26] на основе асимптотического метода построена общая теория статической задачи тонких пластин на основе несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. Построен внутренний итерационный процесс и погранслой. Показано существование четырех типов погранслоев-силовых (плоского и антиплоского) и моментных (плоского и антиплоского). Изучены свойства погранслойных решений, доказаны формулы обобщенной ортогональности. Изучено взаимодействие внутренней задачи и погранслоев с целью удовлетворения трехмерных граничных условий на боковой цилиндрической поверхности пластинки по несимметричной теории упругости, в результате которого трехмерные граничные условия расщепляются между внутренней задачей и задачами погранслоев. На основе исходного приближения асимптотической теории построена общая прикладная-двумерная теория статической задачи тонких пластин по несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

В работе [27] построена общая асимптотическая теория микрополярных упругих тонких балок и стержней. В работе [28] построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных тонких пластин.

Будем рассматривать оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Дифференциальные уравнения несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) будут иметь вид [4]:

Уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ji} = 0, \qquad \nabla_j \mu^{ji} + e^{ijk} \cdot \sigma_{jk} = 0 \tag{1.1}$$

Соотношения упругости

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda \cdot \gamma_{kk} \cdot \delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta \cdot \varkappa_{kk} \cdot \delta_{ij} \end{cases} \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{ji} = \nabla_j u_i - e_{kji} \cdot \omega^k, \qquad \varkappa_{ji} = \nabla_j \omega_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

где σ^{ij}, μ^{ij} – соответственно контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\vec{u}$ – вектор перемещения; $\vec{\omega}$ – вектор независимого поворота; γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$ – соответственно ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие константы материала оболочки.

Далее отнесем оболочку к триортогональной системе координат $\alpha_i \, (i = 1, 2, 3)$, принятой в теории оболочек [18].

К определяющим уравнениям НТУ с НППВ $(1.1)-(1.3)$ присоединим соответствующие граничные условия. Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ, которые можем записать так.

$$\sigma_{3i} = \mp q_i^{\pm}, \quad \mu_{3i} = \mp m_i^{\pm} \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Граничные условия на боковой поверхности оболочки (который представляет собой замкнутый торец) могут быть граничными условиями первой, второй или смешанной граничной задачи НТУ с НППВ; для определенности примем граничные условия первой граничной задачи

$$\sigma_{ji} n_j = p_i^* \ , \quad \mu_{ji} n_j = m_i^* \quad \text{при} \quad \alpha_1 = \alpha_{10} \tag{1.5}$$

Займемся теперь построением внутреннего итерационного процесса поставленной красвой задачи НТУ с НППВ.

Введем новые независимые переменные, положив [18]:

$$\alpha_i = R \cdot \lambda^{-p} \cdot \xi_{i} \ , \quad \alpha_3 = R \cdot \lambda^{-l} \cdot \zeta \qquad (i = 1,2) \tag{1.6}$$

где R – некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности, p, l – целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$l > p \geq 0 \ ,$$

а λ – большой постоянный параметр, определяемый формулой

$$h = R \cdot \lambda^{-l} \tag{1.7}$$

Сделаем также следующие замены искомых величин (далее будем считать, что индексы i, j принимают значения 1,2):

$$V_i = \lambda^{l-p-c} \cdot \overset{*}{V}_i \ , \quad V_3 = \lambda^{l-2p} \cdot \overset{*}{V}_3 \ , \quad \omega_i = \lambda^{l-p-c} \cdot \overset{*}{\omega}_i \ , \quad \omega_3 = \lambda^{l-2p} \cdot \overset{*}{\omega}_3$$

$$\tau_{ij} = \lambda^{l-c} \cdot \overset{*}{\tau}_{ij} \ , \qquad \tau_{33} = \lambda^{0} \cdot \overset{*}{\tau}_{33} \ , \qquad \nu_{ij} = \lambda^{l-c} \cdot \overset{*}{\nu}_{ij} \ , \qquad \nu_{33} = \lambda^{0} \cdot \overset{*}{\nu}_{33} \tag{1.8}$$

$$\tau_{i3} = \lambda^{l-p} \cdot \overset{*}{\tau}_{i3} \ , \quad \nu_{i3} = \lambda^{l-p} \cdot \overset{*}{\nu}_{i3} \qquad [3 \rightleftarrows i]$$

где $c = 0$ при $2p \leq l$ и $c = 2p - l$ при $2p \geq l$; τ_{ij} – несимметричный тензор силовых напряжений [18]. ν_{ij} – аналогичный тензор для моментных напряжений.

Кроме того, введем формулы:

$$L_i = \frac{\lambda^{l+p-c}}{R} \cdot \overset{*}{L}_i \ , \qquad L = \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{L} \ , \qquad F = \frac{\lambda^{l}}{R} \cdot \overset{*}{F}$$

$$l_i = \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{l}_i \ , \qquad e_i = \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{e}_i \ , \qquad g_i = \frac{\lambda^{l-p}}{R} \cdot \overset{*}{g}_i$$

$$K_i = \frac{\lambda^{l+p-c}}{R} \cdot \overset{*}{K}_i \ , \qquad K = \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{K} \ , \qquad \Phi = \frac{\lambda^{l}}{R} \cdot \overset{*}{\Phi} \tag{1.9}$$

$$n_i = \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{n}_i \ , \qquad \varkappa_i = \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{\varkappa}_i \ , \qquad \theta_i = \frac{\lambda^{l-p}}{R} \cdot \overset{*}{\theta}_i$$

где

$$\overset{*}{L} = R \cdot \left(\frac{\overset{*}{\tau}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{*}{\tau}_{22}}{R_2} \right) , \qquad \overset{*}{K} = R \cdot \left(\frac{\overset{*}{\nu}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{*}{\nu}_{22}}{R_2} \right)$$

$$\overset{*}{F} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\tau}_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \overset{*}{\tau}_{13} + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\tau}_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \overset{*}{\tau}_{23}$$

$$\dot{L}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\tau}_{ii}}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(\dot{\tau}_{ii}-\dot{\tau}_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{\tau}_{ji}}{\partial\xi_j}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(\dot{\tau}_{ji}+\dot{\tau}_{ij}\right)$$

$$\dot{t}_i=\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\xi_j}-\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\dot{V}_j\ ,\qquad \dot{g}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{V}_3}{\partial\xi_i}-\lambda^{-c}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{V}_i$$

$$\dot{e}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\dot{V}_j+\lambda^{c-2p}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{V}_3 \tag{1.10}$$

$$\dot{\Phi}=\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot\dot{\nu}_{13}+\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{23}}{\partial\xi_2}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot\dot{\nu}_{23}$$

$$\dot{K}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{ii}}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(\dot{\nu}_{ii}-\dot{\nu}_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{ji}}{\partial\xi_j}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_i}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(\dot{\nu}_{ji}+\dot{\nu}_{ij}\right)$$

$$\dot{n}_i=\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\xi_j}-\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\dot{\omega}_j\ ,\qquad \dot{\theta}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial\xi_i}-\lambda^{-c}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{\omega}_i$$

$$\dot{\varkappa}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\dot{\omega}_j+\lambda^{c-2p}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{\omega}_3$$

Тогда, имея в виду (1.8)–(1.10), вместо исходной системы уравнений НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) будем иметь:

$$\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\dot{L}_i+\frac{\partial\dot{\tau}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\cdot\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\tau}_{i3}+\dot{\tau}_{3i}}{R_i}=0\ ,\quad -\lambda^{-c}\cdot\dot{L}+\dot{F}+\frac{\partial\dot{\tau}_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\lambda^{2p-l-c}\,\frac{1}{a_i}\cdot\dot{K}_i+\frac{\partial\dot{\nu}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\,\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\nu}_{i3}+\dot{\nu}_{3i}}{R_i}-(-1)^{j}\cdot\lambda^{-l}R\frac{a_j}{a_i}\cdot\left(\dot{\tau}_{3j}-\dot{\tau}_{j3}\right)=0 \tag{1.11}$$

$$-\lambda^{-c}\cdot\dot{K}+\dot{\Phi}+\frac{\partial\dot{\nu}_{33}}{\partial\zeta}+\lambda^{-c}R\cdot a_1\cdot\dot{\tau}_{12}-\lambda^{-c}R\cdot a_2\cdot\dot{\tau}_{21}=0$$

$$\dot{\tau}_{ii}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\dot{e}_i-\frac{1}{R}\cdot\frac{\lambda'}{4\mu'\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\dot{e}_j-\lambda^{-l}\,\frac{1}{a_i}\cdot\frac{\lambda'}{2\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\dot{\tau}_{33} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2p-2l}\,\frac{R}{a_1a_2}(\lambda'+2\mu')\cdot\dot{\tau}_{33}+\lambda^{2p-l-c}\,\frac{R}{a_2}\cdot\lambda'\cdot\dot{\tau}_{11}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{R}{a_1}\cdot\lambda'\cdot\dot{\tau}_{22}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\zeta}=(-1)^{j}\cdot\lambda^{-l}R\,\dot{\omega}_j+\lambda^{c-l}\,\frac{R}{a_j}(\mu'+\alpha')\cdot\dot{\tau}_{3i}+\lambda^{c-l}\,\frac{R}{a_j}(\mu'-\alpha')\cdot\dot{\tau}_{i3}$$

$$\dot{\tau}_{i3}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{1}{\mu'+\alpha'}\cdot\dot{g}_i+(-1)^j\cdot\lambda^{-c}\frac{a_j}{\mu'+\alpha'}\cdot\dot{\omega}_j-\frac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}\cdot\dot{\tau}_{3i}$$

$$\dot{\tau}_{ij}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\mu'+\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\dot{\imath}_j-\frac{1}{R}\cdot\frac{\mu'-\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\dot{\imath}_i-(-1)^j\cdot\lambda^{c-2p}\frac{a_j}{2\alpha'}\cdot\dot{\omega}_3$$

$$\dot{\nu}_{ii}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{2\gamma'+\beta'}{4\gamma'\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\dot{\varkappa}_i-\frac{1}{R}\cdot\frac{\beta'}{4\gamma'\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\dot{\varkappa}_j-\lambda^{c-l}\frac{1}{a_i}\cdot\frac{\beta'}{2\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\dot{\nu}_{33} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2p-2l}\frac{R}{a_1a_2}(2\gamma'+\beta')\cdot\dot{\nu}_{33}+\lambda^{2p-l-c}\frac{R}{a_2}\cdot\beta'\cdot\dot{\nu}_{11}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{R}{a_1}\cdot\beta'\cdot\dot{\nu}_{22}$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\zeta}=\lambda^{c-l}\frac{R}{a_j}(\gamma'+\varepsilon')\cdot\dot{\nu}_{3i}+\lambda^{c-l}\frac{R}{a_j}(\gamma'-\varepsilon')\cdot\dot{\nu}_{i3}\ , \quad a_i=1+\frac{R\lambda^{-l}}{R_i}\cdot\zeta$$

$$\dot{\nu}_{i3}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{1}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot\dot{\theta}_i-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot\dot{\nu}_{3i}\ , \quad \dot{\nu}_{ij}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\dot{n}_j-\frac{1}{R}\cdot\frac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\dot{n}_i$$

Наша цель теперь будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ) уравнения НТУ с НППВ (1.11), (1.12) к двумерным (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2) уравнениям. Для этого, в частности, необходимо избавиться в (1.11), (1.12) от дифференцирования по ζ. Эту операцию будем выполнять так, чтобы в коэффициентах получаемых уравнений был явно виден характер их зависимости от параметра λ и переменной ζ. В результате, на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{2p-2l}\right)$ получим:

$$\dot{V}_i=\overset{0}{V}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{V}_i(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{\omega}_i=\overset{0}{\omega}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\omega}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{V}_3=\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{V}_3(\xi_1,\xi_2)\ , \quad \dot{\omega}_3=\overset{0}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{\imath}_i=\overset{0}{\imath}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\imath}_i(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{n}_i=\overset{0}{n}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{n}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{e}_i=\overset{0}{e}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{e}_i(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{\varkappa}_i=\overset{0}{\varkappa}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\varkappa}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{g}_i=\overset{0}{g}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{g}_i(\xi_1,\xi_2)\ , \quad \dot{\theta}_i=\overset{0}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2) \quad (1.13)$$

$$\dot{\tau}_{ii}=\overset{0}{\tau}_{ii}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ii}(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{\nu}_{ii}=\overset{0}{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{\tau}_{ij}=\overset{0}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{\nu}_{ij}=\overset{0}{\nu}_{ij}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{ij}(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{\tau}_{3i}=\overset{0}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)\ , \quad \dot{\nu}_{3i}=\overset{0}{\nu}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{3i}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{\tau}_{i3}=\overset{0}{\tau}_{i3}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{i3}(\xi_1,\xi_2)\ , \quad \dot{\nu}_{i3}=\overset{0}{\nu}_{i3}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{i3}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{L}_i=\overset{0}{L}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{L}_i(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{K}_i=\overset{0}{K}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{K}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{L} = \overset{0}{L}(\xi_1,\xi_2) + \underline{\lambda^{c-1}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{L}(\xi_1,\xi_2)}\ , \quad \dot{K} = \overset{0}{K}(\xi_1,\xi_2) + \underline{\lambda^{c-1}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{K}(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{F} = \overset{0}{F}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{F}(\xi_1,\xi_2)\ , \quad \dot{\Phi} = \overset{0}{\Phi}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\Phi}(\xi_1,\xi_2) \quad (1.13)$$

$$\dot{\tau}_{33} = \overset{0}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2) + \zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta^2\cdot\overset{2}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{\nu}_{33} = \overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) + \zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta^2\cdot\overset{2}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)$$

Здесь, основные функции, зависящие от ξ_1 и ξ_2, представляют собой $\overset{0}{V}_1(\xi_1,\xi_2)$, $\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)$, $\overset{0}{\omega}_1(\xi_1,\xi_2)$ и $\overset{0}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)$; остальные величины будут определяться через указанные функции по соответствующим формулам. Для получения формул для искомых величин поставленной задачи следует (1.13) подставить в выражения (1.8).

Отметим, что на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{c-1})$ подчеркнутые члены пренебрегаются.

Специфические свойства внутреннего итерационного процесса для трехмерного тонкого упругого тела оболочки состоят в том, что полученная в асимптотических приближениях система уравнений НТУ с НППВ, как убедились, допускает интегрирование по переменной ζ, и в описании внутреннего напряженно-деформированного состояния остается выяснить роль переменных (ξ_1,ξ_2), задающих положение точки на срединной поверхности оболочки. С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия и моменты [11, 25, 2], которые можем представить следующими формулами:

$$T_{ii} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{ii}\,d\alpha_3\ , \qquad S_{ij} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{ij}\,d\alpha_3$$

$$N_{3i} = -\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{3i}\,d\alpha_3\ , \quad L_{3i} = -\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\nu_{3i}\,d\alpha_3 \qquad \left|3\leftrightarrows i\right|$$

$$L_{ii} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\nu_{ii}\,d\alpha_3\ , \qquad L_{ij} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\nu_{ij}\,d\alpha_3$$

Используем также понятия перемещений и поворотов точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i = V_i\big|_{\zeta=0}\ , \quad w = -V_3\big|_{\zeta=0}\ , \quad \Omega_i = \omega_i\big|_{\zeta=0}\ , \quad \Omega_3 = -\omega_3\big|_{\zeta=0}$$

На основе построенной асимптотики, для поставленной краевой задачи (1.1)–(1.5), на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{2p-c-1})$ приходим к следующей разрешающей системе двумерных уравнений:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(T_{ii}-T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(S_{ij}+S_{ji}\right) -$$

$$-\underline{\frac{N_{i3}}{R_i}} - \left(1+\underline{\frac{h^2}{R_iR_j}}\right)\left(q_i^+ + q_i^-\right) - \underline{h\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_j}\right)\left(q_i^+ - q_i^-\right)} = 0$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2N_{13})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1N_{23})\right]+$$

$$+\left(1+\frac{h^2}{R_1R_2}\right)(q_3^+ + q_3^-)+\underline{h\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(q_3^+ - q_3^-)}=0 \qquad (1.14)$$

$$\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot(L_{ij}+L_{ji})-\underline{\frac{L_{i3}}{R_i}}+$$

$$+\underline{(-1)^j\cdot(N_{3i}-N_{i3})}-\left(1+\frac{h^2}{R_iR_j}\right)(m_i^+ + m_i^-)-\underline{h\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_j}\right)(m_i^+ - m_i^-)}=0$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2L_{13})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1L_{23})\right]-(S_{12}-S_{21})+$$

$$+\left(1+\frac{h^2}{R_1R_2}\right)(m_3^+ + m_3^-)+\underline{h\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(m_3^+ - m_3^-)}=0$$

Соотношения упругости

$$T_{ii}=2h\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\left(\Gamma_{ii}-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\cdot\Gamma_{jj}\right)+\underline{h\cdot\frac{\lambda'}{2\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot(q_3^+ - q_3^-)}$$

$$S_{ij}=2h\cdot\left(\frac{\mu'+\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\Gamma_{ij}-\frac{\mu'-\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\Gamma_{ji}\right),\quad N_{i3}=-2h\cdot\frac{1}{\mu'+\alpha'}\cdot\Gamma_{i3}-\frac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}\cdot N_{3i} \qquad (1.15)$$

$$L_{ii}=2h\cdot\frac{2\gamma'+\beta'}{4\gamma'\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\left(\chi_{ii}-\frac{\beta'}{2\gamma'+\beta'}\cdot\chi_{jj}\right)+\underline{h\cdot\frac{\beta'}{2\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot(m_3^+ - m_3^-)}$$

$$L_{ij}=2h\cdot\left(\frac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ij}-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ji}\right),\quad L_{i3}=-2h\cdot\frac{1}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot\chi_{i3}-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot L_{3i}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_j-\frac{w}{R_i}\,,\qquad \chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i}$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_i+(-1)^j\cdot\Omega_3\,,\quad \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_i \qquad (1.16)$$

$$\Gamma_{i3}=-\left(\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i}\right)+(-1)^j\cdot\Omega_j\,,\qquad \chi_{i3}=-\left(\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}+\frac{\Omega_i}{R_i}\right)$$

Здесь следует учесть, что

$$N_{3i}=h\cdot\left[(q_i^+ - q_i^-)+\underline{\frac{h}{R_j}\cdot(q_i^+ + q_i^-)}\right],\quad L_{3i}=h\cdot\left[(m_i^+ - m_i^-)+\underline{\frac{h}{R_j}\cdot(m_i^+ + m_i^-)}\right] \qquad (1.17)$$

Система уравнений $(1.14)-(1.17)$ представляет собой разрешающую систему уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек на уровне асимптотического приближения $O\left(\lambda^{2p-2l}\right)$.

Отметим,что к разрешающей системе уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек можем прийти также на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$. Эта система опять представляет систему $(1.14)-(1.17)$, где следует пренебречь подчеркнутыми членами. При этом подчеркнутыми членами следует пренебречь также в формулах (1.13).

После решения основной разрешающей системы уравнений $(1.14)-(1.17)$ все расчетные величины трехмерной задачи $(1.1)-(1.5)$ будут определяться по соответствующим формулам.

2. Обратимся к изучению краевых упругих явлений и будем снова исходить из уравнений трехмерной теории НТУ с НППВ $(1.1)-(1.3)$.

Будем считать, что край оболочки, вблизи которого надо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных по формулам [18]:

$$\alpha_1-\alpha_{10}=R\lambda^{-l}\cdot\xi_1,\qquad \alpha_2=R\lambda^{-p}\cdot\xi_2,\qquad \alpha_3=R\lambda^{-l}\cdot\zeta \tag{2.1}$$

где величины $R,\ \lambda,\ l,\ p$ имеют тот же смысл, что и в (1.6).

Будем считать, что в краевом напряженно-деформированном состоянии искомые величины не меняют своего асимптотического поведения при дифференцировании по ξ_1,ξ_2,ζ.

Так же, как и в предыдущем пункте, введем несимметричные силовые напряжения [18] и аналогичным образом введем несимметричные моментные напряжения, при этом, при изучении погранслойной задачи букву τ заменяем на букву P, а ν –на $\underline{Q}$.

Кроме того, преобразуем компоненты перемещений и вращений по формулам:

$$W=h^{-1}\cdot V_3\,,\quad U_k=h^{-1}\cdot V_k\quad (k=1,2)\,,\quad \Omega_m=h^{-1}\cdot\omega_m\quad (m=1,2,3) \tag{2.2}$$

После подстановки $(2.1),(2.2)$ в $(1.1)-(1.3)$, уравнения НТУ с НППВ можем представить в виде четырех групп уравнений, которые при отбрасывании величин порядка λ^{p-l} можем записать так:

Группа А

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0\,,\qquad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{12}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{21}\right]=0$$

$$-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{21}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{12}\right]=0\,,\ -\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{23}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{32}\right]=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{32}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{23}\right]=0$$

Группа В

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial \underline{Q}_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial \underline{Q}_{32}}{\partial\zeta}=0\,,\ \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi_1}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot \underline{Q}_{12}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot \underline{Q}_{21}\right]=0$$

$$-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{21}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{12}\right]=0\ ,\ -\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{23}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{32}\right]=0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\zeta}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{32}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{23}\right]=0$$

Группа C

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0\ ,\quad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}-\left[(2\mu'+\lambda')\cdot P_{11}+\lambda'\cdot(P_{22}+P_{33})\right]=0 \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial\zeta}-\left[(2\mu'+\lambda')\cdot P_{33}+\lambda'\cdot(P_{11}+P_{22})\right]=0\ ,\ -\left[(2\mu'+\lambda')\cdot P_{22}+\lambda'\cdot(P_{11}+P_{33})\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_1}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{13}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{31}\right]=0,\ \frac{\partial U_1}{\partial\zeta}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{31}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{13}\right]=0$$

Группа D

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial\zeta}=0\ ,\quad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\xi_1}-\left[(2\gamma'+\beta')\cdot Q_{11}+\beta'\cdot(Q_{22}+Q_{33})\right]=0 \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\zeta}-\left[(2\gamma'+\beta')\cdot Q_{33}+\beta'\cdot(Q_{11}+Q_{22})\right]=0\ ,\ -\left[(2\gamma'+\beta')\cdot Q_{22}+\beta'\cdot(Q_{11}+Q_{33})\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\xi_1}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{13}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{31}\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\zeta}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{31}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{13}\right]=0$$

Величины $S=(P_{12}\ ,\ P_{21}\ ,\ P_{23}\ ,\ P_{32}\ ,\ U_2)$ и $H=(Q_{11}\ ,\ Q_{22}\ ,\ Q_{33}\ ,\ Q_{13}\ ,\ Q_{31}\ ,\ \Omega_1\ ,\ \Omega_3)$ удовлетворяют соответственно однородным двумерным уравнениям (2.3) и (2.6) - так называемой [25, 26] силовой и моментной антиплоских задач несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим соответственно $S(a)=S^0(a)$ и $H(a)=H^0(a)$. Величины $L=(P_{11}\ ,\ P_{22}\ ,\ P_{33}\ ,\ P_{13}\ ,\ P_{31}\ ,\ U_1\ ,\ W)$ и $R=(Q_{12}\ ,\ Q_{21}\ ,\ Q_{23}\ ,\ Q_{32}\ ,\ \Omega_2)$ удовлетворяют соответственно однородным двумерным уравнениям (2.5) и (2.4)– так называемой $[25, 26]$ силовой и моментной плоской задачи несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим соответственно $L(b)=L^0(b)$ и $R(b)=R^0(b)$ Основываясь на этом, будем называть решения типа (a) и (b) силовым и моментным антиплоским и плоским решениями уравнений несимметричной теории упругости соответственно [25, 26].

Описанное исходное приближение можно уточнять методом итерации и, помимо главных, строить следующее приближение для напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов. Тогда получим:

a-решения

$$S(a)=S^0(a)+\lambda^{p-1}\cdot S^1(a)\ ,\quad L(a)=0+\lambda^{p-1}\cdot L^1(a) \qquad (2.7)$$

$$H(a) = H^0(a) + \lambda^{p-1} \cdot H^1(a)\ , \quad R(a) = 0 + \lambda^{p-1} \cdot R^1(a)$$

b -решения

$$L(b) = L^0(b) + \lambda^{p-1} \cdot L^1(b)\ , \quad S(b) = 0 + \lambda^{p-1} \cdot S^1(b) \tag{2.8}$$

$$R(b) = R^0(b) + \lambda^{p-1} \cdot R^1(b)\ , \quad H(b) = 0 + \lambda^{p-1} \cdot H^1(b)$$

Отметим, что нас будут интересовать только такие решения уравнений НТУ с НППВ (2.3)–(2.6) типа (a) и (b), которые на лицевых поверхностях удовлетворяют однородным граничным условиям и, кроме того, затухают при удалении от края $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Такие решения будем называть $[25, 26]$ силовым плоским погранслоем, силовым антиплоским погранслоем и моментным плоским погранслоем, моментным антиплоским погранслоем.

Заметим, что как и в случае пластин $[25, 26]$, в отличие от классической теории упругости (где проявляются два погранслоя-силовой плоский и силовой антиплоский погранслои), по теории НТУ с НППВ проявляются четыре типа погранслоев. Это один из существенных проявлений теории НТУ с НППВ.

На основании уравнений силового и моментного погранслоев получим, что их решения удовлетворяют следующим важным равенствам:

$$\int_{-1}^{1} \left.\stackrel{b(0)}{P}_{11}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\ , \quad \int_{-1}^{1} \left.\stackrel{a(0)}{P}_{12}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\ , \quad \int_{-1}^{1} \left.\stackrel{b(0)}{P}_{13}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left.\stackrel{b(0)}{U}_1\right|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{2\mu'\lambda'}{2\mu'+\lambda'} \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \left.P_{13}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\ , \quad \int_{-1}^{1} \left.\stackrel{a(0)}{U}_2\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left.\stackrel{b(0)}{W}\right|_{\xi_1=0} d\zeta - (\mu'-\alpha') \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \left.\stackrel{b(0)}{P}_{11}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0 \tag{2.9}$$

$$\int_{-1}^{1} \left.\stackrel{a(0)}{Q}_{11}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\ , \quad \int_{-1}^{1} \left.\stackrel{b(0)}{Q}_{12}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \left.\stackrel{a(0)}{Q}_{13}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left.\stackrel{a(0)}{\Omega}_1\right|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{2\gamma'\beta'}{2\gamma'+\beta'} \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \left.\stackrel{a(0)}{Q}_{13}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\ , \quad \int_{-1}^{1} \left.\stackrel{b(0)}{\Omega}_2\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left.\stackrel{a(0)}{\Omega}_3\right|_{\xi_1=0} d\zeta - (\gamma'-\varepsilon') \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \left.\stackrel{a(0)}{Q}_{11}\right|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

Равенства (2.9) назовем условиями затухания. Очевидно, что они необходимы для того, чтобы существовали затухающие решения типа (a) и (b), а следовательно, и для того, чтобы существовали силовой антиплоский и плоский и моментный антиплоский и плоский погранслои.

3. В дальнейшем будем исходить из предположения, что напряженное состояние трехмерного тела оболочки по НТУ с НППВ составляется из внутреннего напряженного состояния и погранслоев:

$$(\text{НДС})_{\text{нппв}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + \lambda^{r} \cdot (\text{НДС})^{a}_{\text{кр}} + \lambda^{\theta} \cdot (\text{НДС})^{b}_{\text{кр}} \tag{3.1}$$

где числа r, θ назовем показателями интенсивности плоского и антиплоского погранслоев, которые пока произвольны. Погранслои, как уже говорилось, локализуются вблизи бокового края оболочки, а под внутренним понимается напряженное состояние, не обладающее свойством затухания, и захватывающее, вообще говоря, всю область тела оболочки.

Отметим, что внутреннее напряженное состояние и погранслои в совокупности содержат достаточно произволов для выполнения трехмерных граничных условий (1.5) на боковой поверхности оболочки.

Для того, чтобы осуществить сращивание внутренней задачи и погранслоев по НТУ с НППВ, следует подставить (3.1) в граничные условия (1.5). При этом, показатели r и θ будем выбирать так, чтобы получился удобный итерационный процесс для выполнения граничных условий (1.5).

Единственно приемлемые значения r и θ в случае нагруженного края оболочки на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{2p-2l}\right)$ определяются так:

$$r = p - c\ , \qquad \theta = p - c \tag{3.2}$$

С учетом (3.2), в результате подстановки (3.1) в условия (1.5), получим граничные условия в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\tau}_{11}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{b0}{P}_{11}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a1}{P}_{11}+\overset{b1}{P}_{11}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\overline{p}_1^*\\
&\overset{*}{\tau}_{12}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{a0}{P}_{12}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a1}{P}_{12}+\overset{b1}{P}_{12}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\overline{p}_2^*\\
&\overset{*}{\tau}_{11}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\overset{b0}{P}_{13}+\lambda^{3p-2l-c}\cdot\left[\overset{a1}{P}_{13}+\overset{b1}{P}_{13}\right]=\lambda^{2p-l-c}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\overline{p}_3^*\\
&\overset{*}{\nu}_{11}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{a0}{Q}_{11}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a1}{Q}_{11}+\overset{b1}{Q}_{11}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\overline{m}_1^*\\
&\overset{*}{\nu}_{12}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{b0}{Q}_{12}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a1}{Q}_{12}+\overset{b1}{Q}_{12}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\overline{m}_2^*\\
&\overset{*}{\nu}_{13}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\overset{a0}{Q}_{13}+\lambda^{3p-2l-c}\cdot\left[\overset{a1}{Q}_{13}+\overset{b1}{Q}_{13}\right]=\lambda^{2p-l-c}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\overline{m}_3^*\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\alpha_1=\alpha_{10}\right)
\end{aligned}\tag{3.3}$$

(здесь принимаются обозначения $p_i^* = \lambda^{p-c}\cdot\overline{p}_i^*,\quad m_i^* = \lambda^{l-c}\cdot\overline{m}_i^*\quad (i=1,2,3)$).

Ограничиваясь соответствующей асимптотической точностью и используя условия затухания (2.9), получим, что граничные условия трехмерной теории НТУ с НППВ (1.5) расщепляются между внутренней задачей (прикладной-двумерной теории оболочек) и погранслойными задачами.

Для прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек (определяющая система уравнений (1.14)–(1.17)), получим граничные условия следующего вида:

$$T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3\ , \qquad S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3$$

$$N_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = -\int_{-h}^{h} p_3^* d\alpha_3 + \tilde{f}_1 \qquad (3.4)$$

$$L_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_1^* d\alpha_3\,, \qquad L_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_2^* d\alpha_3$$

$$L_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = -\int_{-h}^{h} m_3^* d\alpha_3 + \tilde{f}_2$$

где

$$\tilde{f}_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p=0 \\ \dfrac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}\cdot\left[\dfrac{1}{A_{20}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\right]\displaystyle\int_{-h}^{h} p_2^*\cdot\alpha_3\, d\alpha_3 & \text{при} \quad p>0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1\to 2, & p\to m, \\ \mu'\to\gamma', \alpha'\to\varepsilon', \end{pmatrix}$$

Граничные условия каждого из четырех типов погранслоев будут выражаться так:

Для задачи (2.3)

$$\overset{a\,0}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} = \overline{p}_2^* - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \overline{p}_2^* d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\varphi_2 \qquad (3.5)$$

Для задачи (2.4)

$$\overset{b\,0}{Q}_{12}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{m}_2^* - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \tilde{m}_2^* d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\psi_2 \qquad (3.6)$$

Для задачи (2.5)

$$\overset{b\,0}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0} = \overline{p}_1^* - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \overline{p}_1^* d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\varphi_1 \qquad (3.7)$$

$$\overset{b\,0}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{p}_3^* - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \tilde{p}_3^* d\zeta - \zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{13}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0}$$

Для задачи (2.6)

$$\overset{a\,0}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{m}_1^* - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \tilde{m}_1^* d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\psi_1 \qquad (3.8)$$

$$\overset{a\,0}{Q}_{13}\Big|_{\xi_1=0} = \overline{m}_3^* - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \overline{m}_3^* d\zeta - \zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{13}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0}$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 2p\ge l \\ \lambda^{c-l}\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{1i}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0} & \text{при} \quad 2p<l\,, \end{cases} \qquad \begin{matrix} (i=1,\ 2) \\ (\varphi\to\psi,\ \tau\to\nu) \end{matrix}$$

Применяемый асимптотический метод позволил построить прикладную двумерную теорию тонких оболочек на основе НТУ с НППВ (уравнения (1.14)–(1.17) и граничные условия (3.4)) и изучить краевое напряженное состояние (по уравнениям (2.3)-(2.6) и граничным условиям (3.5)–(3.8)).

4. Оказывается, что если будем ставить ограничения на некоторые упругие константы материала оболочки, то для поставленной красвой задачи (1.1)–(1.5) будет применима так называемая, обобщенная классическая асимптотика (т. е. силовая часть и перемещения будут иметь асимптотику классического случая [18], моментные напряжения и повороты будут иметь соответствующую асимптотику).

Заранее отметим, что в этом случае приходим к теории микрополярных оболочек со стесненным вращением.

В трехмерных уравнениях (1.1)–(1.3) перейдем к безразмерным величинам:

$$\overline{\tau}_{ij}=\frac{1}{E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_j}{R_j}\right)\cdot\sigma_{ij}\ ,\qquad \overline{\nu}_{ij}=\frac{1}{R\cdot E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_j}{R_j}\right)\cdot\mu_{ij}$$

$$\overline{\tau}_{33}=\frac{1}{E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\cdot\sigma_{33}\ ,\qquad \overline{\nu}_{33}=\frac{1}{R\cdot E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\cdot\mu_{33}$$

$$\overline{\tau}_{i3}=\frac{1}{E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\cdot\sigma_{i3}\ ,\qquad \overline{\nu}_{i3}=\frac{1}{R\cdot E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\cdot\mu_{i3}\qquad \left[3\leftrightarrows 1\right]\tag{4.1}$$

$$\overline{V}_i=\frac{1}{R}\cdot V_i\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\overline{\gamma}'=R^2\cdot E\cdot\gamma'\ ,\quad \overline{\beta}'=R^2\cdot E\cdot\beta'\ ,\quad \overline{\varepsilon}'=R^2\cdot E\cdot\varepsilon'\ ,\quad \overline{R}_i=R_i/R\quad (i=1.2)$$

$$\overline{\mu}'=E\cdot\mu'\ ,\qquad \overline{\alpha}'=E\cdot\alpha'\ ,\qquad \overline{\lambda}'=E\cdot\lambda'\ ;$$

и выполним замену независимых переменных (1.6). Сделаем также следующие замены искомых величин:

$$\overline{\tau}_{ij}=\lambda^{l}\cdot\dot{\tau}_{ij}\ ,\qquad \overline{\nu}_{ij}=\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{\nu}_{ij}\qquad (i=1,2;\ j=1,2)$$

$$\overline{\tau}_{i3}=\lambda^{p}\cdot\dot{\tau}_{i3}\ ,\qquad \overline{\nu}_{i3}=\lambda^{p-l}\cdot\dot{\nu}_{i3}\qquad (i=1,2),\ [\mathrm{i}\leftrightarrows 3]$$

$$\overline{\tau}_{33}=\lambda^{c}\cdot\dot{\tau}_{33}\ ,\qquad \overline{\nu}_{33}=\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{\nu}_{33}\ ,\tag{4.2}$$

$$\overline{V}_i=\lambda^{l-p}\cdot\dot{V}_i\ ,\qquad \omega_i=\lambda^{p+l-c}\cdot\dot{\omega}_i\qquad (i=1.2)$$

$$\overline{V}_3=\lambda^{l-c}\cdot\dot{V}_3\ ,\qquad \omega_3=\lambda^{l}\cdot\dot{\omega}_3$$

Кроме того, введем формулы:

$$L_i=\frac{\lambda^{l-p}}{R}\cdot\dot{L}_i\ ,\qquad L=\frac{\lambda^{l}}{R}\cdot\dot{L}\ ,\qquad F=\frac{\lambda^{2p}}{R}\cdot\dot{F}$$

$$t_i=\frac{\lambda^{l}}{R}\cdot\dot{t}_i\ ,\qquad e_i=\frac{\lambda^{l}}{R}\cdot\dot{e}_i\ ,\qquad g_i=\frac{\lambda^{l+p-c}}{R}\cdot\dot{g}_i\tag{4.3}$$

$$K_i=\frac{\lambda^{3p-l-c}}{R}\cdot\dot{K}_i\ ,\qquad K=\frac{\lambda^{2p-l-c}}{R}\cdot\dot{K}\ ,\qquad \Phi=\frac{\lambda^{2p-l}}{R}\cdot\dot{\Phi}$$

$$n_i=\frac{\lambda^{2p+l-c}}{R}\cdot\dot{n}_i\ ,\qquad \varkappa_i=\frac{\lambda^{2p+l-c}}{R}\cdot\dot{\varkappa}_i\ ,\qquad \theta_i=\frac{\lambda^{l+p}}{R}\cdot\dot{\theta}_i$$

где $\dot{L}_i$, $\dot{L}$, $\dot{F}$, $\dot{t}_i$, $\dot{e}_i$, $\dot{g}_i$, $\dot{K}_i$, $\dot{K}$, $\dot{\Phi}$, $\dot{n}_i$, $\dot{\varkappa}_i$, $\dot{\theta}_i$ определяются по формулам (1.10).

Ставим следующие ограничения на упругие константы материала оболочки:

$$\bar{\gamma}' = \lambda^{2l}\cdot\tilde{\bar{\gamma}}' \ , \qquad \bar{\beta}' = \lambda^{2l}\cdot\tilde{\bar{\beta}}' \ , \qquad \bar{\varepsilon}' = \lambda^{2l}\cdot\tilde{\bar{\varepsilon}}'$$

где велечины $\tilde{\bar{\gamma}}'$, $\tilde{\bar{\beta}}'$, $\tilde{\bar{\varepsilon}}'$ считаются величинами порядка λ^0.

Тогда, имея в виду (4.1)–(4.3), вместо исходной системы уравнений НТУ со НППВ (1.1)–(1.3) будем иметь:

$$\frac{1}{a_i}\cdot\dot{L}_i+\frac{\partial\dot{\tau}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\cdot\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\tau}_{i3}+\dot{\tau}_{3i}}{R_i}=0\ , \qquad -\lambda^{-c}\cdot\dot{L}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{F}+\frac{\partial\dot{\tau}_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\lambda^{2p-l-c}\frac{1}{a_i}\cdot\dot{K}_i+\frac{\partial\dot{\nu}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\nu}_{i3}+\dot{\nu}_{3i}}{R_i}-(-1)^j\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\left(\dot{\tau}_{3j}-\dot{\tau}_{j3}\right)=0 \qquad (4.4)$$

$$\dot{\tau}_{ii}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\bar{\lambda}'+2\bar{\mu}'}{4\bar{\mu}'\cdot\left(\bar{\lambda}'+\bar{\mu}'\right)}\cdot\dot{e}_i-\frac{\bar{\lambda}'}{4\bar{\mu}'\cdot\left(\bar{\lambda}'+\bar{\mu}'\right)}\cdot\dot{e}_j-\lambda^{c-l}\frac{1}{a_i}\cdot\frac{\bar{\lambda}'}{2\cdot\left(\bar{\lambda}'+\bar{\mu}'\right)}\cdot\dot{\tau}_{33}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2c-2l}\frac{1}{a_1a_2}\left(\bar{\lambda}'+2\bar{\mu}'\right)\cdot\dot{\tau}_{33}+\lambda^{c-l}\frac{1}{a_2}\cdot\bar{\lambda}'\cdot\dot{\tau}_{11}+\lambda^{c-l}\cdot\frac{1}{a_1}\cdot\bar{\lambda}'\cdot\dot{\tau}_{22}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\zeta}=-\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\dot{g}_i+\lambda^{2p-2l}\cdot2\bar{\mu}'\cdot\frac{1}{a_j}\cdot\left(\dot{\tau}_{3i}+\dot{\tau}_{i3}\right)$$

$$\dot{\tau}_{ij}=\frac{1}{4\bar{\mu}'}\cdot\left(\dot{t}_i+\frac{a_j}{a_i}\cdot\dot{t}_j\right)-\lambda^{2p-l-c}\cdot(-1)^j\cdot\left(\frac{\partial\dot{\nu}_{33}}{\partial\zeta}-\lambda^{c-l}\cdot\left(\lambda^{c}\cdot\dot{K}-\dot{\Phi}\right)\right)$$

$$\dot{\nu}_{ii}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{2\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\beta}}'}{4\tilde{\bar{\gamma}}'\cdot\left(\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\beta}}'\right)}\cdot\dot{\varkappa}_i-\frac{\tilde{\bar{\beta}}'}{4\tilde{\bar{\gamma}}'\cdot\left(\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\beta}}'\right)}\cdot\dot{\varkappa}_j-\frac{\tilde{\bar{\beta}}'}{2\cdot\left(\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\beta}}'\right)}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\dot{\nu}_{33}$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2p-l-c}\cdot\left[\frac{\tilde{\bar{\gamma}}'\cdot\left(2\tilde{\bar{\gamma}}'+3\tilde{\bar{\beta}}'\right)}{\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\beta}}'}\cdot\frac{1}{a_1a_2}\cdot\dot{\nu}_{33}+\frac{\tilde{\bar{\beta}}'}{2\left(\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\beta}}'\right)}\cdot\left(\frac{1}{a_1}\cdot\dot{\varkappa}_1+\frac{1}{a_2}\cdot\dot{\varkappa}_2\right)\right]$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\zeta}=\lambda^{c-l}\cdot\frac{1}{a_j}\cdot\left(\left(\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\varepsilon}}'\right)\cdot\dot{\nu}_{3i}+\left(\tilde{\bar{\gamma}}'-\tilde{\bar{\varepsilon}}'\right)\cdot\dot{\nu}_{i3}\right) \qquad (4.5)$$

$$\dot{\nu}_{i3}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{1}{\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\theta}_i-\frac{\tilde{\bar{\gamma}}'-\tilde{\bar{\varepsilon}}'}{\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\nu}_{3i}\ , \qquad \dot{\nu}_{ij}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\tilde{\bar{\gamma}}'+\tilde{\bar{\varepsilon}}'}{4\tilde{\bar{\gamma}}'\tilde{\bar{\varepsilon}}'}\cdot\dot{n}_j-\frac{\tilde{\bar{\gamma}}'-\tilde{\bar{\varepsilon}}'}{4\tilde{\bar{\gamma}}'\tilde{\bar{\varepsilon}}'}\cdot\dot{n}_i$$

$$\dot{\omega}_i=(-1)^j\cdot\left(\frac{1}{a_j}\cdot\dot{g}_j-\lambda^{c-l}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\left(\left(\mu'-\alpha'\right)\cdot\dot{\tau}_{3j}+\left(\mu'+\alpha'\right)\cdot\dot{\tau}_{j3}\right)\right)$$

$$\dot{\omega}_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a_1}\cdot\dot{t}_2-\frac{1}{a_2}\cdot\dot{t}_1\right)-\alpha'\cdot\left(\frac{1}{a_2}\cdot\dot{\tau}_{12}-\frac{1}{a_1}\cdot\dot{\tau}_{21}\right)$$

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-\varepsilon})$ из систем (4.4), (4.5) часть величин можно получить интегрированием по переменной ζ, в результате получим

$$\dot{V}_1 = \overset{0}{V}_1(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-1-\varepsilon}\zeta\cdot\overset{1}{V}_1(\xi_1,\xi_2), \qquad \dot{V}_3 = \overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{\omega}_i = \overset{0}{\omega}_i(\xi_1,\xi_2), \quad \dot{x}_i = \overset{0}{x}_i(\xi_1,\xi_2), \quad \dot{n}_i = \overset{0}{n}_i(\xi_1,\xi_2), \quad \dot{\nu}_{ij} = \overset{0}{\nu}_{ij}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{t}_i = \overset{0}{t}_i(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-1-\varepsilon}\zeta\cdot\overset{1}{t}_i(\xi_1,\xi_2), \quad \dot{e}_i = \overset{0}{e}_i(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-1-\varepsilon}\zeta\cdot\overset{1}{e}_i(\xi_1,\xi_2) \tag{4.6}$$

$$\dot{\tau}_n = \overset{0}{\tau}_n(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-1-\varepsilon}\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_n(\xi_1,\xi_2), \qquad \dot{g}_i = \overset{0}{g}_i(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{L} = \overset{0}{L}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-1-\varepsilon}\zeta\cdot\overset{1}{L}(\xi_1,\xi_2)$$

Здесь основные функции, зависящие от ξ_1 и ξ_2, представляют собой $\overset{0}{V}_1(\xi_1,\xi_2)$ и $\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)$; остальные величины будут определяться через указанные функции по соответствующим формулам.

Остальная часть величин выражаются через вышеотмеченные величины и через величину $\dot{\nu}_{33}$, для определения которой приходим к дифференциальному уравнению (относительно координаты ζ) с соответствующими граничными условиями при $\zeta = \pm 1$:

$$\overline{\alpha}'\cdot\frac{\partial^2\dot{\nu}_{33}}{\partial\zeta^2} - \frac{\tilde{\overline{\gamma}}'\cdot\left(2\tilde{\overline{\gamma}}' + 3\tilde{\overline{\beta}}'\right)}{\tilde{\overline{\gamma}}' + \tilde{\overline{\beta}}'}\cdot\dot{\nu}_{33} = -\frac{\tilde{\overline{\gamma}}'\cdot\left(2\tilde{\overline{\gamma}}' + 3\tilde{\overline{\beta}}'\right)}{\tilde{\overline{\gamma}}' + \tilde{\overline{\beta}}'}\cdot\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4\tilde{\overline{\gamma}}'}\cdot\left[\overset{1}{t}_2(\xi_1,\xi_2) - \overset{1}{t}_1(\xi_1,\xi_2) - \lambda^{\varepsilon-2p}\cdot\left(\frac{\overset{0}{t}_2(\xi_1,\xi_2)}{\overline{R}_1} - \frac{\overset{0}{t}_1(\xi_1,\xi_2)}{\overline{R}_2}\right)\right] \tag{4.7}$$

$$\dot{\nu}_{33}\Big|_{\zeta=\pm1} = \mp\tilde{m}_3^{\pm} \qquad \left(\tilde{m}_3^{\pm} = \lambda^{\varepsilon+1-2p}\cdot m_3^{\pm}\right)$$

После решения граничной задачи (4.7) и определения $\dot{\nu}_{33}$:

$$\dot{\nu}_{33} = \begin{cases} \overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) & \text{при} \quad \overline{\alpha}' = 0 \\ \overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) + \tilde{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2,\zeta) & \text{при} \quad \overline{\alpha}' \neq 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

при этом

$$\tilde{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2,\zeta) = -\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\overline{k}}\cdot\zeta\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\overline{k}}\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{m}_3^{+} - \tilde{m}_3^{-}\right) + \overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)\right] - \frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\overline{k}}\cdot\zeta\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\overline{k}}\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{m}_3^{+} + \tilde{m}_3^{-}\right)\right]$$

$$\overline{k} = \frac{1}{\overline{\alpha}'}\cdot\frac{\overline{\gamma}'\cdot\left(2\overline{\gamma}' + 3\tilde{\overline{\beta}}'\right)}{\overline{\gamma}' + \tilde{\overline{\beta}}'}$$

для остальных величин получим:

$$\dot{\omega}_3=\overset{0}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\omega}_3(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$
$$\dot{\theta}_i=\overset{0}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\theta}_i(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$
$$\dot{\tau}_{ij}=\overset{0}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2,\zeta) \tag{4.9}$$
$$\dot{L}_i=\overset{0}{L}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{L}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{L}_i(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$
$$\dot{\nu}_{ii}=\overset{0}{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2)+\tilde{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2,\zeta)\ ,\qquad \dot{K}_i=\overset{0}{K}_i(\xi_1,\xi_2)+\tilde{K}_i(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$
$$\dot{\tau}_{3i}=\overset{0}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta^2\cdot\overset{2}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$

Отметим, что относительно величин $\dot{\nu}_{3i}$ тоже приходим к отдельным дифференциальным уравнениям (относительно координата ζ) с соответствующими граничными условиями при $\zeta=\pm1$:

$$(\overline{\mu}'+\overline{\alpha}')\cdot\frac{\partial^2\dot{\nu}_{3i}}{\partial\zeta^2}-\frac{4\overline{\overline{\gamma}}'\overline{\overline{\varepsilon}}'}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\nu}_{3i}=\frac{\overline{\overline{\gamma}}'-\overline{\overline{\varepsilon}}'}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\theta}_i+$$
$$+(-1)^j\cdot\left[2(\overline{\mu}'+\overline{\alpha}')\cdot\frac{\partial\dot{\tau}_{3j}}{\partial\zeta}-\overline{\lambda}'\cdot\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\dot{\tau}_{11}+\dot{\tau}_{22}\right)\right]-\lambda^{2p-l-c}\cdot(\overline{\mu}'+\overline{\alpha}')\cdot\frac{\partial\dot{K}_i}{\partial\zeta}$$
$$\dot{\nu}_{3i}\Big|_{\zeta=\pm1}=\mp\tilde{m}_i^{\pm}\qquad\left(\tilde{m}_i^{\pm}=\lambda^{l-p}\cdot m_i^{\pm}\right) \tag{4.10}$$

После решения уравнений (4.10) остальные величины (связанные с $\dot{\nu}_{3i}$) определяются по следующим формулам:

$$\dot{\nu}_{i3}=\frac{1}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\theta}_i-\frac{\overline{\overline{\gamma}}'-\overline{\overline{\varepsilon}}'}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\nu}_{3i}\ ,\quad \dot{\tau}_{i3}=\dot{\tau}_{3i}+(-1)^j\cdot\left(\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{K}_j+\frac{\partial\dot{\nu}_{3j}}{\partial\zeta}\right)$$
$$\dot{\tau}_{33}=\overset{0}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2)+\int_0^{\zeta}\left(\lambda^{-c}\cdot\dot{L}-\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{F}\right)d\zeta \tag{4.11}$$
$$\dot{\tau}_{33}\Big|_{\zeta=\pm1}=\pm\tilde{q}_3^{\pm}\qquad\left(\tilde{q}_3^{\pm}=\lambda^{-c}\cdot q_3^{\pm}\right)$$

Далее, переходим к следующим осредненным по толщине оболочки силовым и моментным характеристикам [11, 25, 26]:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{ii}\,d\alpha_3\ ,\qquad S_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{ij}\,d\alpha_3$$
$$G_{ii}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{ii}\cdot\alpha_3 d\alpha_3\ ,\ H_{ii}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{ij}\cdot\alpha_3 d\alpha_3$$

$$N_{3i} = -\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{3i}\,d\alpha_3\ ,\qquad L_{3i} = -\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\mu_{3i}\,d\alpha_3 \qquad \left[3\leftrightarrows i\right]$$

$$L_{ii} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\mu_{ii}\,d\alpha_3\ ,\qquad L_{ij} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\mu_{ij}\,d\alpha_3$$

$$L_{33} = \int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_1\right)\left(1+\alpha_3/R_2\right)\cdot\mu_{33}\,d\alpha_3$$

Используя понятия перемещений и поворотов точек срединной поверхности оболочки, на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{p-1}\right)$ переходим к следующей разрешающей системе двумерных уравнений:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(S_{ij}+S_{ji}\right)-\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial\left(G_{11}-L_{12}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot\left(\left(G_{11}-L_{12}\right)-\left(G_{22}+L_{21}\right)\right)-\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial\left(H_{21}+L_{22}\right)}{\partial\alpha_2}-$$

$$-\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot\left(\left(H_{12}-L_{11}\right)+\left(H_{21}+L_{22}\right)\right)-N_{13}+\left[h\left(q_1^{+}-q_1^{-}\right)-\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial\left(G_{22}+L_{21}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot\left(\left(G_{22}+L_{21}\right)-\left(G_{11}-L_{12}\right)\right)-\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial\left(H_{12}-L_{11}\right)}{\partial\alpha_1}-$$

$$-\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot\left(\left(H_{21}+L_{22}\right)+\left(H_{12}-L_{11}\right)\right)-N_{23}+\left[h\left(q_2^{+}-q_2^{-}\right)+\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right)\right]=0$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2N_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1N_{23}\right)\right]+\left(q_3^{+}+q_3^{-}\right)=0 \qquad (4.12)$$

Соотношения упругости

$$T_{ii} = 2h\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot\left(\lambda'+\mu'\right)}\cdot\left(\Gamma_{ii}-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\cdot\Gamma_{jj}\right)$$

$$G_{ii} = -\frac{2}{3}h^3\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot\left(\lambda'+\mu'\right)}\cdot\left(\mathrm{K}_{ii}-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\cdot\mathrm{K}_{jj}\right)$$

$$S_{ij} = 2h\cdot\frac{1}{4\mu'}\cdot\left(\Gamma_{ij}+\Gamma_{ji}\right)+\frac{(-1)^j}{2}\cdot\left(m_3^{+}+m_3^{-}\right)$$

$$H_{ij} = \frac{2}{3}h^3\cdot\frac{1}{4\mu'}\cdot\left(\mathrm{K}_{ij}+\mathrm{K}_{ji}\right)+\frac{(-1)^j}{2}\cdot\left(1-\frac{h\sqrt{k}}{\mathrm{th}\left(h\sqrt{k}\right)}\right)\cdot\tilde{L}_{33} \qquad (4.13)$$

$$L_{ii} = 2h\cdot\frac{1}{2\gamma'}\cdot\chi_{ii}-\frac{\beta'}{2\left(\gamma'+\beta'\right)}\cdot\tilde{L}_{33}\ ,\qquad L_{ij} = 2h\cdot\left(\frac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ij}-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ji}\right)$$

$$\widetilde{L}_{33}=-2h\cdot\frac{\operatorname{th}\left(h\sqrt{k}\right)}{h\sqrt{k}}\left[\frac{m_3^+-m_3^-}{2}+\frac{1}{4\gamma'}\cdot\left(K_{12}-K_{21}-\left(\frac{\Gamma_{12}}{R_1}-\frac{\Gamma_{21}}{R_2}\right)\right)\right]$$

$$k=\frac{1}{\alpha'}\cdot\frac{\gamma'\cdot(2\gamma'+3\beta')}{\gamma'+\beta'}\quad\left(k=h^{-2}\cdot\bar{k}\right)$$

(здесь $\widetilde{L}_{33}$ та часть L_{33}, которая обусловлена величиной $\overline{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2,\zeta)$).

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_j-\frac{w}{R_i},\qquad K_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\beta_j$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_i,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\beta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\beta_i$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\quad \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_i \tag{4.14}$$

$$\beta_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\qquad \Omega_i=(-1)^j\cdot\beta_j$$

$$\Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot u_1-\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot u_2\right)$$

После решения основной разрешающей системы уравнений $(4.12)-(4.14)$, остальные искомые величины будут определяться по соответствующим формулам.

Уравнения (4.12)–(4.14) представляют собой уравнения разрешающей системы двумерных уравнений прикладной двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек, когда вращения выражаются через перемещения.

Отметим, что при $\alpha\to+\infty$ $(\alpha'\to 0)$ уравнения (4.12)–(4.14) полностью переходят к разрешающей системе уравнений микрополярных оболочек, когда в основу будем принимать трехмерную теорию несимметричной упругости со стесненным вращением (эта часть работы будет опубликована отдельно).

5. Обратимся к изучению краевых упругих явлений и будем снова исходить из уравнений трехмерной теории НТУ с НППВ (1.1)–(1.3).

Будем считать, что край оболочки, вблизи которого надо исследовать напряженное состояние, опять задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных по формулам (2.1).

В трехмерных уравнениях (1.1)–(1.3) перейдем к безразмерным величинам (4.1) и выполним следующие замены искомых величин:

$$\overline{\tau}_{ij}=P_{ij},\quad \overline{\nu}_{ij}=\lambda^d\cdot Q_{ij},\quad \Omega_i=\omega_i\quad (i=1,\ 2,\ 3;\ \ j=1,\ 2,\ 3)$$

$$U_i=\lambda^l\cdot\overline{V}_i,\quad W=\lambda^l\cdot\overline{V}_3\qquad (i=1,\ 2)$$

Кроме того, на упругие константы материала оболочки $\overline{\gamma}'$, $\overline{\beta}'$, $\overline{\varepsilon}'$ ставим такие же ограничения как и в предыдущем пункте.

После этого, уравнения НТУ с НППВ можем представить в виде двух групп уравнений, которые при отбрасывании величин порядка λ^{a-2} можем записать так:

Группа А

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial\zeta}+\left(P_{23}-P_{32}\right)=0\ ,\quad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial\zeta}+\left(P_{12}-P_{21}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{32}}{\partial\zeta}=0,\qquad -\left[\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\cdot Q_{22}+\tilde{\tilde{\beta}}'\cdot\left(Q_{11}+Q_{33}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\xi_1}-\left[\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\cdot Q_{11}+\tilde{\tilde{\beta}}'\cdot\left(Q_{22}+Q_{33}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\zeta}-\left[\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\cdot Q_{33}+\tilde{\tilde{\beta}}'\cdot\left(Q_{11}+Q_{22}\right)\right]=0 \qquad (5.1)$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\xi_1}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{13}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{31}\right]=0,\ \ \Omega_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}-\overline{\alpha}'\cdot\left[P_{32}-P_{23}\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\zeta}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{31}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{13}\right]=0,\qquad \frac{\partial U_2}{\partial\zeta}-2\overline{\mu}'\cdot\left[P_{23}+P_{32}\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}-2\overline{\mu}'\cdot\left[P_{12}+P_{21}\right]=0,\ \ \Omega_3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}-\overline{\alpha}'\cdot\left[P_{21}-P_{12}\right]=0$$

Группа B

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{32}}{\partial\zeta}+\left(P_{31}-P_{13}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial\zeta}=0,\qquad -\left[\left(2\overline{\mu}'+\overline{\lambda}'\right)\cdot P_{22}+\overline{\lambda}'\cdot\left(P_{11}+P_{33}\right)\right]=0 \qquad (5.2)$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}-\left[\left(2\overline{\mu}'+\overline{\lambda}'\right)\cdot P_{11}+\overline{\lambda}'\cdot\left(P_{22}+P_{33}\right)\right]=0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial\zeta}-\left[\left(2\overline{\mu}'+\overline{\lambda}'\right)\cdot P_{33}+\overline{\lambda}'\cdot\left(P_{11}+P_{22}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_1}+\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}-2\overline{\mu}'\cdot\left(P_{13}+P_{31}\right)=0,\qquad -\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{21}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{12}\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\zeta}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{32}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{23}\right]=0,\ \ -\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{23}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{32}\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi_1}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{12}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{21}\right]=0$$

$$\Omega_2-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}-\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_1}\right]-\overline{\alpha}'\cdot\left[P_{13}-P_{31}\right]=0$$

Величины $A=\left(P_{12}, P_{21}, P_{23}, P_{32}, U_2, Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{13}, Q_{31}, \Omega_1, \Omega_3\right)$ удовлетворяют однородным двумерным уравнениям (5.1), так называемой смешанной силовой-моментной антиплоской задачи несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим $A(a)=A''(a)$. А величины $B=\left(P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{13}, P_{31}, U_1, W, Q_{12}, Q_{21}, Q_{23}, Q_{32}, \Omega_2\right)$ удовлетворяют однородным двумерным уравнениям (5.2), так называемой смешанной силовой

-моментной плоской задачи несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим $B(b) = B^0(b)$.

Описанное исходное приближение можно уточнять методом итерации и, помимо главных, строить следующие приближения для напряжений, перемещений и поворотов. Тогда получим:

a -решения

$$A(a) = A^0(a) + \lambda^{p-1} \cdot A^1(a)\,, \qquad B(a) = 0 + \lambda^{p-1} \cdot B^1(a) \tag{5.3}$$

b -решения

$$B(b) = B^0(b) + \lambda^{p-1} \cdot B^1(b), \qquad A(b) = 0 + \lambda^{p-1} \cdot A^1(b) \tag{5.4}$$

Отметим, что нас будут интересовать только такие решения уравнений НТУ с НППВ (5.1)–(5.2) типа (a) и (b), которые на лицевых поверхностях удовлетворяют однородным граничным условиям и, кроме того, затухают при удалении от края $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Такие решения будем называть смешанным силовым–моментным плоским погранслоем и силовым-моментным антиплоским погранслоем.

На основании уравнений плоского и антиплоского погранслоев получим, что их решения удовлетворяют следующим важным равенствам:

$$\int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{U}_{1}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{2\overline{\mu}'\overline{\lambda}'}{2\overline{\mu}' + \overline{\lambda}'} \cdot \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{b\,(0)}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - 2 \cdot \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{a\,(0)}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{2\overline{\mu}'} \cdot \int_{0}^{+\infty} \Big[\overset{a}{U}_2\Big]_{-1}^{1} \cdot A_{10}\, d\xi_1 = 0 \tag{5.5}$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{Q}_{12}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{b\,(0)}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{Q}_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{2\overline{\mu}'} \cdot \int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{U}_{2}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

Равенства (5.5) назовем условиями затухания. Очевидно, что они необходимы для того, чтобы существовали затухающие решения типа (a) и (b), а следовательно, и для того, чтобы существовали антиплоский и плоский погранслои.

6. Будем исходить из предположения, что напряженное состояние трехмерного тела оболочки по НТУ с НППВ составляется из внутреннего напряженного состояния и погранслоев:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + \lambda^{r} \cdot (\text{НДС})^{a}_{\text{кр}} + \lambda^{\theta} \cdot (\text{НДС})^{b}_{\text{кр}} \tag{6.1}$$

где числа r, θ — показатели интенсивности плоского и антиплоского погранслоев, которые пока произвольны.

Величины r и θ должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий НТУ с НППВ на боковой поверхности оболочки:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ji} n_j = p_i^* \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ &\mu_{ji} n_j = m_i^* \qquad (i = 1,\ 2) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha_1 = \alpha_{10} \tag{6.2}$$

Единственно приемлемые значения r и θ в случае нагруженного края оболочки определяются так:

$$r = 2p - c, \qquad \theta = 2p - c \tag{6.3}$$

С учетом (6.3), в результате подстановки (6.1) в условия (6.2), получим граничные условия в следующем виде:

$$\overset{\bullet}{\tau}_{1i} + \lambda^{2p-l-c} \cdot \overset{b\,0}{P}_{1i} + \lambda^{3p-2l-c} \cdot \left[\overset{a\,1}{P}_{1i} + \overset{b\,1}{P}_{1i} \right] = \lambda^{2p-l-c} \left(1 + \frac{R}{R_2} \lambda^{-l} \zeta \right) \cdot \tilde{p}_i^{\bullet} \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \\ a \rightleftharpoons b \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{c-p} \cdot \overset{\bullet}{\tau}_{13} + \overset{b\,0}{P}_{13} + \lambda^{p-l} \cdot \left[\overset{a\,1}{P}_{13} + \overset{b\,1}{P}_{13} \right] = \lambda^{c-p} \left(1 + \frac{R}{R_2} \lambda^{-l} \zeta \right) \cdot \tilde{p}_3^{\bullet} \tag{6.4}$$

$$\overset{\bullet}{v}_{1i} + \overset{a\,0}{Q}_{1i} + \lambda^{p-l} \cdot \left[\overset{a\,1}{Q}_{1i} + \overset{b\,1}{Q}_{1i} \right] = \left(1 + \frac{R}{R_2} \lambda^{-l} \zeta \right) \cdot \tilde{m}_i^{\bullet} \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \\ a \rightleftharpoons b \end{pmatrix} \quad (\alpha_1 = \alpha_{10})$$

(здесь принимаются обозначения $p_i^{\bullet} = \lambda^{2p-c} \cdot \tilde{p}_i^{\bullet}$, $m_i^{\bullet} = \lambda^{2p-l-c} \cdot \tilde{m}_i^{\bullet}$ $(i = 1, 2)$, $p_3^{\bullet} = \lambda^{p} \cdot \tilde{p}_3^{\bullet}$).

Здесь, ограничиваясь асимптотической точностью $0(\lambda^{p-l})$ и используя условия затухания (5.5), получим, что граничные условия трехмерной теории НТУ с НППВ (6.2) расщепляются между внутренней задачей (прикладной-двумерной теории оболочек) и погранслойными задачами.

Для прикладной-двумерной теории оболочек получим граничные условия следующего вида:

$$T_{11} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_1^{\bullet} d\alpha_3, \qquad S_{12} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_2^{\bullet} d\alpha_3$$

$$\left(-N_{13} + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_{12} - L_{11}) \right) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} \left(p_3^{\bullet} + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\alpha_3 \cdot p_2^{\bullet} - m_1^{\bullet}) \right) d\alpha_3$$

$$(L_{12} - G_{11}) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} (m_2^{\bullet} + \alpha_3 \cdot p_1^{\bullet}) d\alpha_3 \tag{6.5}$$

Граничные условия каждого из двух типов погранслоев будут выражаться так:

$$\overset{b\,0}{P}_{11} \Big|_{\xi_1 = 0} = \tilde{p}_1^{\bullet} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \tilde{p}_1^{\bullet} d\zeta - \zeta \cdot \overset{\bullet}{\tau}_{11}(\xi_1, \xi_2) \Big|_{\xi_1 = 0}$$

$$\overset{b\,0}{P}_{13} \Big|_{\xi_1 = 0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 2p \ge l \\ \lambda^{c-p} \cdot \left(\tilde{p}_3^{\bullet} - \overset{\bullet}{\tau}_{13} \Big|_{\xi_1 = 0} \right) & \text{при} \quad 2p < l \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\overset{b\,0}{Q}_{12} \Big|_{\xi_1 = 0} = \tilde{m}_2^{\bullet} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \tilde{m}_2^{\bullet} d\zeta - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \tilde{p}_1^{\bullet} d\zeta + \frac{1}{3} \cdot \overset{\bullet}{\tau}_{11}(\xi_1, \xi_2) \Big|_{\xi_1 = 0}$$

$$\overset{a\,0}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{p}_2^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{p}_2^{*}d\zeta - \zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{12}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0} -$$

$$-\left(\tilde{\tau}_{12}(\xi_1,\xi_2,\zeta) - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{\tau}_{12}(\xi_1,\xi_2,\zeta)d\zeta\right)\Big|_{\xi_1=0} \qquad (6.7)$$

$$\overset{a\,0}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0} = \bar{m}_1^{*} - \overset{*}{\nu}_{11}\Big|_{\xi_1=0}$$

Применяемый асимптотический метод позволил построить прикладную-двумерную теорию микрополярных тонких оболочек со стесненным вращением (уравнения (4.12)-(4.14) и граничные условия (6.5)) и изучить краевое напряженное состояние (по уравнениям (5.1), (5.2) и соответствующим граничным условиям (6.7), (6.6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Herrman. Paris. 1909. 226p.
2. Аэро Э.Л. Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред в вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399-1409.
3. Пальмов В.А. Основные уравнение теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
5. Морозов. Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
6. Eringen A. Cemal. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Springer. 1998. P.325.
7. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54-59.
8. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск ун-та. 1965. 162с.
9. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М. Изд-во МГУ. 1999. 327с.
10. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 416с.
11. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
12. Жилин П.А. Основные уравнения неклассических теории упругих оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. ЛПИ. № 386. Л.: Изд-во ЛПИ. 1982. С. 29-42.
13. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // Сб.: Механика деформируемого тела. М.: Наука. 1986. С.102-112.
14. Palmov V.A., Altenbach H. Uber eine cosseratsche theorie fur elastische platen // Thechn. Mech. 1982. H. 3. S. 3-9.
15. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 266с.
16. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446с.
17. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. Вып. 3. М.: Наука. 1966. С.116-136.
18. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
19. Friedrichs K.O. and Dressler R.F.A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Apll. Math. 1961. Vol. N1. P. 1-33.
20. Green A.E. On the Linear Theory of Ohin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. N1325.

21. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М: Наука. 1997. 414с.
22. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260с.
23. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Wolled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
24. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // ПМ. 2002.Т.38. № 7. С.3-24.
25. Саркисян С.О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // Сборник научных трудов посвященных к 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН РА. 2002. С. 285-296.
26. Sargsyan S.H On Sone Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol.16. Springer. 2004. P. 201-210.
27. Мутафян М.Н., Саркисян С.О. Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Известия НАН Армении. Механика. 2004.Т.7. №1. С. 41-58.
28. Атоян А.А., Саркисян С.О. Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экологический Вестник Научных Центров Черноморского Экономического Сотрудничества. 2004. № 1. С. 18-29.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 24.12.2004

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Джилавян С.А.

Է.Խ. Գրիգորյան, Ս.Հ. Ջիլավյան

Պիեզոէլեկտրական տարածությունում սահքային հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքի վրա

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջությունից կիսաանվերջ ճաքի վրա ընկնող սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան պյեզոէլեկտրական տարածությունում: Խնդիրը բերված է Վիներ – Հոփֆի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծման: Ստացված են տեղափոխության, լարման, էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի և ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչի բաշխումները պյեզոէլեկտրիկում: Ստացված են ասիմպտոտական բանաձևեր լարման, ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչի համար ճաքի գագաթի շրջակայքում, հեռավոր գոտում տրված են տեղափոխության ասիմպտոտական ներկայացումները: Ցույց է տրված մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի առկայությունը

E.Kh. Grigoryan, S.H. Jilavyan

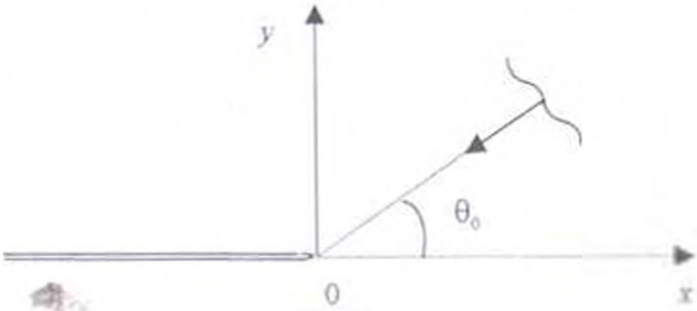
Diffraction of a Plan Shear Wave on Semi-Infinite Crack in a Piezoelectric Space

В работе рассмотрена дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Задача сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа. Получены распределения перемещения, напряжения, потенциала и составляющей вектора индукции электрического поля в пьезоэлектрической среде. Получены асимптотические формулы для напряжения и составляющей вектора индукции электрического поля в окрестности вершины трещины, в дальней зоне даны асимптотические представления перемещения. Показано наличие поверхностной электроупругой волны.

1. Рассмотрим пьезоэлектрическое пространство – пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, когда среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$ (фиг. 1). Пусть из бесконечности, под углом θ_0 к плоскости трещины $(0 < \theta_0 < \pi/2)$, распространяется плоская волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно:

$$w_\infty(x,y) = e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0}$$

$$\Phi_\infty(x,y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих электроупругого поля — временной множитель $e^{-i\omega t}$, t — параметр времени, ω — частота колебаний. Здесь $k=\omega/c$ — волновое число, $c=\sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ — скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, $æ=e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ — коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика, c_{44}, ε_{11}, e_{15} — упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные пьезоэлектрического пространства, соответственно, а ρ — плотность.

Пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала имеем следующую систему уравнений [1]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k^2 w=0,\\&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w=0\end{aligned}\qquad(1.2)$$

На берегах трещины для напряжения σ_{yz} имеем условие

$$\sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0\quad \text{при}\quad y=\pm 0,\ x<0\qquad(1.3)$$

а для электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции —

$$\Phi(x,y)\big|_{y=+0}=\Phi(x,y)\big|_{y=-0};\ D_2(x,y)\big|_{y=+0}=D_2(x,y)\big|_{y=-0},\ -\infty<x<\infty\qquad(1.4)$$

где $D_2(x,y)=e_{15}\dfrac{\partial w}{\partial y}-\varepsilon_{11}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$.

Введем функции

$$\begin{aligned}&u(x,y)=w(x,y)-w_\infty(x,y)\\&\varphi(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi_\infty(x,y)\end{aligned}\qquad(1.5)$$

Тогда для напряжения σ_{yz} получим формулу

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}&=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=c_{44}\frac{\partial u}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\\&-ikc_{44}(1+æ)\sin\theta_0 e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}\end{aligned}\qquad(1.6)$$

а для определения функций $u(x,y)$, $\varphi(x,y)$ из (1.2) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0\\&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u=0\end{aligned}\qquad(1.7)$$

Введем функции $q^+(x)=q(x)\theta(x)$, $\psi^-(x)=\psi(x)\theta(-x)$

$$\sigma_{yz}(x,0) = q^{*}(x) \tag{1.8}$$

$$u(x,+0) - u(x,-0) = \psi^{-}(x) \tag{1.9}$$

т.е. $q^{*}(x)$ – напряжение при $y=0$, а $\psi^{-}(x)$ представляет разницу перемещений на $y=\pm 0$, $\theta(x)$ – известная функция Хевисайда.

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (1.7), получим

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2)\bar{u} = 0 \\ &\frac{d^2\bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\bar{\varphi} + k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\bar{u} = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\bar{u}(\sigma,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{i\sigma x}dx$; $\bar{\varphi}(\sigma,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)e^{i\sigma x}dx$

Из (1.8), (1.9), имея в виду (1.6), применив преобразование Фурье, получим следующие условия:

$$\bar{q}^{*}(\sigma) = c_{44}\left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|_{y=0} + e_{15}\left.\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}\right|_{y=0} - 2\pi ikc_{44}(1+æ)\sin\theta_0\delta(\sigma - k\cos\theta_0) \tag{1.11}$$

$$\bar{\psi}^{-}(\sigma) = \bar{u}(\sigma,+0) - \bar{u}(\sigma,-0) \tag{1.12}$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Чтобы выполнялись условия уходящей волны, принимается, что $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$, и $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$. Для выбора такой ветви двузначной функции $\gamma(\sigma)$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ разрезы до бесконечности от точки $\sigma = k$ в верхней полуплоскости и от точки $\sigma = -k$ в нижней полуплоскости, т.е. действительная ось обходит точки ветвления: $-k$ сверху, а k – снизу [2]. Тогда, принимая во внимание условия

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{y=+0} = \left.\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{y=-0};\quad \left.\frac{d\bar{\varphi}}{dy}\right|_{y=+0} = \left.\frac{d\bar{\varphi}}{dy}\right|_{y=-0};\quad \bar{\varphi}(\sigma,+0) = \bar{\varphi}(\sigma,-0)$$

ограниченное и представляющее уходящую волну решение системы (1.10) имеет вид

$$\bar{u}(\sigma,y) = \begin{cases} -Ae^{\gamma y} & \text{при } y<0 \\ Ae^{-\gamma y} & \text{при } y>0 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\bar{\varphi}(\sigma,y) = \begin{cases} -\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A\left(e^{\gamma y} - e^{|\sigma|y}\right) & \text{при } y<0 \\ \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A\left(e^{-\gamma y} - e^{-|\sigma|y}\right) & \text{при } y>0 \end{cases} \tag{1.14}$$

В силу (1.12) очевидно, что

$$A(\sigma)=\frac{1}{2}\overline{\psi}^{*}(\sigma) \tag{1.15}$$

Из условия (1.11) получим уравнение относительно $A(\sigma)$ и $q^{*}(\sigma)$

$$\begin{aligned}&c_{44}A(\sigma)\cdot\left((1+æ)\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}-æ|\sigma|\right)+\overline{q}^{*}(\sigma)+\\&+2\pi i k c_{44}(1+æ)\sin\theta_{0}\cdot\delta(\sigma-k\cos\theta_{0})=0\end{aligned} \tag{1.16}$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (1.16), рассмотрим интересный частный случай, когда пьезоэлектрическая среда имеет бесконечную трещину – трещина занимает всю плоскость Oxz. Тогда следует в уравнении (1.16) принять $\overline{q}^{*}(\sigma)=0$ (т.е. $\sigma_{yz}=0$ при $y=0$, $-\infty<x<\infty$) и определяя $A(\sigma)=2\pi A_{0}\delta(\sigma-k\cos\theta_{0})$,
где

$$A_{0}=\frac{\sin\theta_{0}}{\sin\theta_{0}-i\dfrac{æ}{1+æ}\cos\theta_{0}} \tag{1.17}$$

Из (1.13), (1.14), применяя обратное преобразование, имея в виду (1.1), (1.5), получим решение этой частной задачи. Так, для амплитуды перемещения получим

$$\begin{aligned}&w(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_{0}-iky\sin\theta_{0}}+A_{0}e^{-ikx\cos\theta_{0}+iky\sin\theta_{0}} \quad \text{при } y>0\\&w(x,y)=(1-A_{0})e^{-ikx\cos\theta_{0}-iky\sin\theta_{0}} \quad \text{при } y<0\end{aligned} \tag{1.18}$$

на берегах трещины

$$w(x,y)=(1\pm A_{0})e^{-ikx\cos\theta_{0}} \quad \text{при } y=\pm 0.$$

Волновое поле при $y>0$ состоит из падающей волны и отраженной, а при $y<0$ – только из проходящей волны, обусловленной пьезоэффектом. Как и следовало ожидать, в случае $æ=0$ (отсутствие пьезоэффекта) при $y>0$ $w=e^{-ikx\cos\theta_{0}-iky\sin\theta_{0}}+e^{-ikx\cos\theta_{0}+iky\sin\theta_{0}}$, при $y<0$ $w=0$.

Для амплитуды электрического потенциала получим
при $y>0$

$$\Phi(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_{0}}\left(e^{-iky\sin\theta_{0}}+A_{0}e^{iky\sin\theta_{0}}\right)-A_{0}\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_{0}-ky\cos\theta_{0}}$$

при $y<0$ (1.19)

$$\Phi(x,y)=(1-A_{0})\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_{0}-iky\sin\theta_{0}}+A_{0}\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_{0}+ky\cos\theta_{0}}$$

на берегах трещины $y=\pm 0$ $\Phi(x)=\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_{0}}$.

Волновое поле для электрического потенциала при $y>0$ состоит из падающей и отраженной волн, при $y<0$ – из проходящей. Наличие локализованной волны (последние члены в выражениях (1.19)) обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики.

2. Вернемся к решению поставленной задачи о полубесконечной трещине. Уравнение (1.16) можно свести к функциональному уравнению Винера-Хопфа относительно $\overline{\psi}^{-}(\sigma)$ и $\overline{q}^{+}(\sigma)$

$$\frac{c_{44}}{2}\overline{\psi}^{-}(\sigma)\cdot\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)+\overline{q}^{+}(\sigma)+ \\ +2\pi i k c_{44}(1+æ)\sin\theta_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=0 \tag{2.1}$$

где
$$\overline{K}(\sigma)=1+æ-\frac{æ|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}} \tag{2.2}$$

здесь $\overline{K}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Функция $\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)=(1+æ)\sqrt{\sigma^2-k^2}-æ|\sigma|$ имеет нули, только если $\sigma=\pm\sigma_n$, где

$$\sigma_n=k\frac{1+æ}{\sqrt{1+2æ}}>k \tag{2.3}$$

Действительная ось обходит точку $\sigma=-\sigma_n$ сверху, а $\sigma=\sigma_n$ снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны.

Для решения функционального уравнения (2.1), факторизуем функцию $\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)$, представив ее в виде

$$\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)=\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}^{+}(\sigma)\sqrt{\sigma-k}\,\overline{K}^{-}(\sigma)$$

т.е.
$$\overline{K}(\sigma)=\overline{K}^{+}(\sigma)\cdot\overline{K}^{-}(\sigma) \tag{2.4}$$

где функция $\overline{K}^{+}(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\overline{K}^{-}(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$, $\alpha=\sigma+i\tau$. Здесь

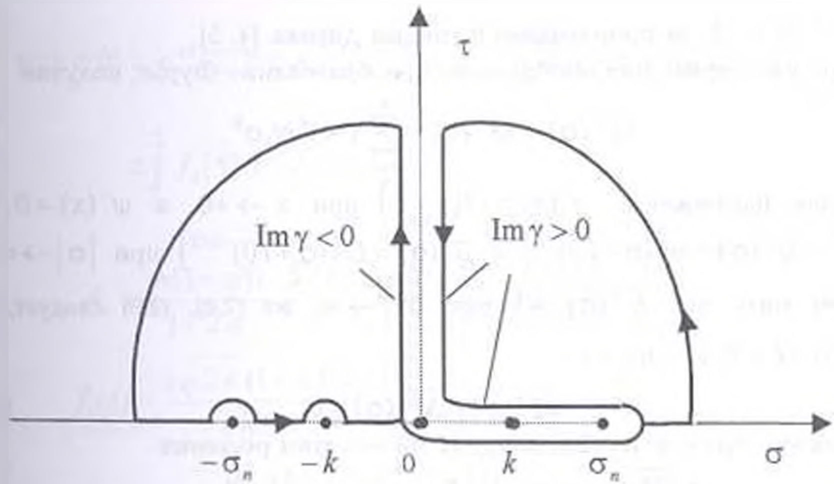
$$\overline{K}^{+}(\sigma)=\exp\left(F^{+}(\sigma)\right),\quad F^{+}(\sigma)=\int_0^{\infty}F(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx$$

$$\overline{K}^{-}(\sigma)=\exp\left(F^{-}(\sigma)\right),\quad F^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}F(x)e^{i(\sigma-i0)x}dx \tag{2.5}$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\overline{K}(\sigma)\right)e^{-i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+æ-\frac{æ|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}\right)\cdot e^{-i\sigma x}d\sigma$$

При $|\sigma|\to\infty$ $\ln\left(\overline{K}(\sigma)\right)=O(\sigma^{-2})$, значит $F(x)$ – непрерывная функция и при $x=0$ имеет конечное значение, и следовательно, $F^{\pm}(\sigma)\to\dfrac{1}{\sigma\pm i0}$ при $|\sigma|\to\infty$. $\overline{K}^{+}(\alpha)$, $\overline{K}^{-}(\alpha)$ стремятся к единице при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Вычислим $\overline{K}^{-}(\sigma)$ методом контурного интегрирования, рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на фиг. 2. Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, с помощью леммы Жордана, получим



Фиг. 2

$$\overline{K}^-(\sigma)=\frac{\sigma-\sigma_n}{\sigma-k}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{æ s}{(æ+1)\sqrt{k^2-s^2}}\cdot\frac{ds}{s-(\sigma-i0)}\right)$$

$$\overline{K}^+(\sigma)=\overline{K}^-(-\sigma) \qquad (2.6)$$

Надо иметь в виду, что $\dfrac{1}{s-(\sigma-i0)}=\dfrac{1}{s-\sigma}-i\pi\delta(s-\sigma)$.

Здесь и в дальнейшем аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \text{при } \operatorname{Re}\alpha>0\\ -\alpha & \text{при } \operatorname{Re}\alpha<0\end{cases} \qquad (2.7)$$

Приступим теперь к решению функционального уравнения (2.1). Имея в виду (2.4), а также, что

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}$$

$$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$$

уравнение (2.1) сводится к уравнению

$$\overline{M}^-(\sigma)=\overline{\psi}^-(\sigma)\sqrt{\sigma-k}\,\overline{K}^-(\sigma)+\frac{2\sqrt{2k}\,(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^+(k\cos\theta_0)\cdot(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2k}\,(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^+(k\cos\theta_0)\cdot(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}-\frac{2\overline{q}^+(\sigma)}{c_{44}\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}^+(\sigma)}=M^+(\sigma) \qquad (2.8)$$

$$-\infty<\sigma<\infty$$

Методика решения уравнения (2.8) та же, что и в [3]. Применив к (2.8) обратное преобразование Фурье, получим $M^+(x)=M^-(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, которое может иметь место только, если

$$M^+(x)=M^-(x)=\sum_{k=0}^{n} m_k\delta^{(k)}(x)$$

где $\delta^{(k)}(x)$ – k-ая производная функции Дирака [4, 5].
Теперь уже, применив обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\overline{M}^{+}(\sigma) = \overline{M}^{-}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} (-i)^k m_k \sigma^k \tag{2.9}$$

Так как напряжение $q^{+}(x) = O\left(x_{+}^{-1/2}\right)$ при $x \to +0$, а $\psi^{-}(x) = 0$ при $x = 0$, $\overline{\psi}^{-}(\sigma) = o\left((\sigma - i0)^{-1}\right)$ и $\overline{q}^{+}(\sigma) = O\left((\sigma + i0)^{-1/2}\right)$ при $|\sigma| \to \infty$. С учетом того, что $\overline{K}^{+}(\sigma) \to 1$ при $|\sigma| \to \infty$, из (2.8), (2.9) следует, что $m_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, т.е.

$$\overline{M}^{+}(\sigma) = \overline{M}^{-}(\sigma) = 0 \tag{2.10}$$

Таким образом, из (2.8) ввиду (2.10) получим решения

$$\overline{\Psi}^{-}(\sigma) = -\frac{2\sqrt{2k}(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma-k}\,(\sigma - k\cos\theta_0 - i0)\cdot\overline{K}^{-}(\sigma)}$$

$$\overline{q}^{+}(\sigma) = \frac{\sqrt{2k}(1+æ)c_{44}\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)} \cdot \frac{\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}^{+}(\sigma)}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0} \tag{2.11}$$

Следовательно, решение поставленной задачи, т.е. выражения амплитуд перемещения и потенциала электрического поля, имея в виду (1.1), (1.5), (1.13), (1.14), а также (1.15), представляется в виде

$$w(x,y) = e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0} \pm \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}} \cdot e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{2.12}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0} \pm \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma)\cdot\left(e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}} - e^{-|\sigma||y|}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{2.13}$$

при $y > 0$ или $y < 0$, соответственно.
Здесь

$$A(\sigma) = -\frac{\sqrt{2k}(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)\cdot\sqrt{\sigma-k}\,(\sigma - k\cos\theta_0 - i0)\,\overline{K}^{-}(\sigma)} \tag{2.14}$$

Тогда выражения индукции $D_2(x,y)$ и напряжения $\sigma_{yz}(x,y)$ представляются в виде

$$D_2(x,y) = -\frac{e_{15}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| A(\sigma) e^{-|\sigma||y|} e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{2.15}$$

$$\sigma_{yz}(x,y) = c_{44}(1+æ)\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} D_2(x,y) \tag{2.16}$$

Проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $-k - i\tau$, $k + i\tau$ и $i\tau$ $(0 < \tau < \infty)$, обходя точки $\sigma = k\cos\theta_0$ и $\sigma = \sigma_n$ снизу, а $\sigma = -\sigma_n$ сверху и замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, для амплитуды перемещения на берегах трещины $(x < 0, \ y = \pm 0)$ из (2.12) получим

$$w(x,\pm 0)=e^{-ikx\cos\theta_0}\pm A_1 e^{-ikx\cos\theta_0}\pm e^{i\left(\frac{\pi}{4}+kx\right)}\int_0^\infty f_1(\tau)\cdot e^{\tau x}d\tau\pm$$

$$\pm\int_0^\infty f_2(\tau)\cdot e^{x\tau}d\tau\pm A_n e^{-i\sigma_n x} \tag{2.17}$$

где

$$A_n=\frac{æ(1+æ)i}{1+2æ}\cdot\frac{\overline{K}^{*}(\sigma_n)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{*}(k\cos\theta_0)}\cdot\frac{\sqrt{2k(\sigma_n+k)}}{k\cos\theta_0-\sigma_n} \tag{2.18}$$

$$f_1(\tau)=\frac{i\sqrt{2k}\,(1+æ)^2\sin\theta_0/2}{\pi K^{*}(k\cos\theta_0)}\times$$

$$\times\frac{K^{*}(k+i\tau)\cdot(2k+i\tau)\cdot\sqrt{\tau}}{\left(2k\sin^2\theta_0/2+i\tau\right)\left(æ^2k^2-\tau(1+2æ)(2ki-\tau)\right)} \tag{2.19}$$

$$f_2(\tau)=\frac{æ(1+æ)\sqrt{2k}\cdot\sin\theta_0/2}{\pi K^{*}(k\cos\theta_0)}\cdot\frac{K^{*}(i\tau)\cdot\sqrt{k+i\tau}\cdot\tau}{(k\cos\theta_0-i\tau)\left((1+æ)^2k^2+\tau^2(1+2æ)\right)}$$

Из (2.17) следует, что волновое поле на берегах трещины складывается из порций падающей и отраженной на верхнем ($y=+0$) или проходящей на нижнем ($y=-0$) берегах трещины, соответственно, и дифрагированной объемной сдвиговой волн, а также из неволновой части и поверхностной волны. Наличие последних двух волн и проходящей волны обусловлено пьезоэффектом – характерным свойством пьезоэлектрической среды. В случае $æ=0$ (изотропное пространство) решение совпадает с приведенным в [2] решением.

На берегах трещины из (2.15) получим следующее выражение для индукции:

$$D_2(x,0)=-e_{15}k\cos\theta_0A_1e^{-ikx\cos\theta_0}-e_{15}\sigma_nA_ne^{-i\sigma_n x}-e_{15}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)}\times$$

$$\times\int_0^\infty f_1(\tau)\cdot(k+i\tau)e^{\tau x}\,d\tau+\frac{e_{15}(1+æ)i}{æ}\int_0^\infty f_2(\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}\,e^{\tau x}\,d\tau,\quad x<0 \tag{2.20}$$

Как видно из (2.20), волновое поле состоит как из поверхностных волн с разными волновыми числами – $k\cos\theta_0$, σ_n, k, так и из неволновой части.

Асимптотические представления амплитуд перемещения и индукции при $x\to-\infty$ имеют вид

$$w(x,\pm 0)=(1\pm A_0)e^{-ikx\cos\theta_0}\pm A_ne^{-i\sigma_n x}\pm e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{a}{|\pi kx|^{3/2}}+O\left(|kx|^{-5/2}\right)\right)\pm\frac{æ}{1+æ}\left(\frac{b}{(\pi kx)^2}+O\left(|kx|^{-3}\right)\right),\quad x\to-\infty \tag{2.21}$$

$$D_2(x,0) = -e_{15}k\cos\theta_0 A_0 e^{-ikx\cos\theta_0} - e_{15}\sigma_n A_n e^{-i\sigma_n x} - e_{15}k\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)} \times$$
$$\times\left(\frac{a}{\left|\pi k x\right|^{3/2}} + O\left(\left|kx\right|^{-5/2}\right)\right) + e_{15}k\left(\frac{ib}{(\pi k x)^2} + O\left(\left|kx\right|^{-3}\right)\right), \quad x \to -\infty \tag{2.22}$$

где $a = \dfrac{i\pi\sqrt{2}(1+æ)^2\overline{K}^-(k)}{2æ^2\sin\theta_0/2\cdot\overline{K}^-(k\cos\theta_0)}$, $b = \dfrac{\sqrt{2(1+æ)}\,\pi\sin\theta_0/2}{\cos\theta_0\cdot\overline{K}^+(k\cos\theta_0)}$.

Здесь было учтено, что $\overline{K}^{\pm}(0) = \sqrt{1+æ}$.

Проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $k+i\tau$, $-i\tau$ $(0<\tau<\infty)$, обходя точку $\sigma = k\cos\theta_0$ снизу и замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, для амплитуды индукции D_2 на $y=0$ при $x>0$ из (2.15) получим

$$D_2(x,0) = \frac{e_{15}\sqrt{2k}(1+æ)i\sin\theta_0/2}{\pi\overline{K}^+(k\cos\theta_0)}\int_0^{\infty}\frac{\tau e^{-\tau x}d\tau}{\sqrt{k+i\tau}\,(i\tau+k\cos\theta_0)\overline{K}^-(-i\tau)} \tag{2.23}$$

и следующую асимптотику

$$D_2(x,0) = e_{15}k\left(\frac{ib}{(\pi k x)^2} + O\left((kx)^{-3}\right)\right) \quad \text{при } x\to\infty \tag{2.24}$$

Как видно, $D_2(x,0)$ при $x>0$ состоит только из неволновой части.

Из (2.20) и (2.23) получим следующие асимптотические представления для составляющей вектора индукции около вершины трещины

$$D_2(x,0) = -e_{15}(k\cos\theta_0 A_0 + \sigma_n A_n) + O\left(\left|x\right|^{1/2}\right) \quad \text{при } x\to -0 \tag{2.25}$$

$$D_2(x,0) = -e_{15}k\frac{ie^{i\pi/4}\sqrt{2}(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^+(k\cos\theta_0)\sqrt{\pi k x}} + O(1) \quad \text{при } x\to +0$$

Как следует из (2.13), $\Phi(x,0) = \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0}$.

Из (2.11) очевидно, что $\sigma_{yz}(x,0) = q^+(x) = 0$ при $x<0$, а при $x>0$

$$\sigma_{yz}(x,0) = \frac{\sqrt{2k}(1+æ)c_{44}\sin\theta_0/2}{2\pi\overline{K}^+(k\cos\theta_0)}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\sigma^2-k^2}(æ+1) - æ|\sigma|\right)e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma-k}\,(\sigma-k\cos\theta_0+i0)\overline{K}^-(\sigma)} \tag{2.26}$$

Проводя в комплексной плоскости $(\alpha = \sigma + i\tau)$ разрезы по линиям $-k-i\tau$, $k+i\tau$ и $-i\tau$ $(0<\tau<\infty)$, замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, обходя точку $\sigma = k\cos\theta_0$ сверху, получим

$$\sigma_{yz}(x,0)=\frac{\sqrt{2k}\,(1+æ)c_{44}\sin\theta_0/2}{\pi\overline{K}^{-}(k\cos\theta_0)}\times$$
$$\times\left(\int_0^\infty\frac{e^{-\tau x}(1+æ)\sqrt{(k+i\tau)^2-k^2}\,e^{ikx}\,d\tau}{\sqrt{2k+i\tau}\,(i\tau+2k\sin^2\theta_0/2)\overline{K}^{-}(-k-i\tau)}+\right. \tag{2.27}$$
$$\left.+\int_0^\infty\frac{æ\tau e^{-\tau x}\,d\tau}{\sqrt{k+i\tau}\,(ik\cos\theta_0-\tau)\overline{K}^{-}(-i\tau)}\right)-i(1+æ)kc_{44}\sin\theta_0 e^{-ikx\cos\theta_0}$$

Волновое поле состоит из порций объемной сдвиговой волны и неволновой части, а также падающей волны.

Асимптотика для напряжения $\sigma_{yz}(x,0)$ при $x\to+0$ имеет вид

$$\sigma_{yz}(x,0)=-\frac{i\sqrt{2}\,(1+æ)kc_{44}e^{i\pi/4}\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{-}(k\cos\theta_0)\cdot\sqrt{\pi kx}}+O(1) \tag{2.28}$$

3. Пользуясь подходом, изложенным в [6, 7], найдем распределение перемещения в пьезоэлектрической среде (принимая $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$).

В случае $0<\theta<\pi/2$, принимая

$$\lambda=\sigma\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\sigma^2-k^2},\ \ \sigma(\lambda)=\lambda\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\lambda^2-k^2} \tag{3.1}$$

полагая, что при выборе однозначной ветви $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ разрезы в комплексной плоскости ($\alpha=\lambda+i\tau$) проведены по линиям $k+i\tau$, $-k-i\tau$ ($0<\tau<\infty$), и контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости, обходя точки $\lambda=k\cos(\theta+\theta_0)$, $\lambda=k\cos(\theta-\theta_0)$ снизу, где $\lambda=k\cos(\theta\pm\theta_0)$ нули функции $\sigma(\lambda)-k\cos\theta_0$, с помощью леммы Жордана получим

$$w(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-i\left(\alpha r-\frac{3}{2}\pi\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\times \tag{3.2}$$
$$\times\left(A(\sigma)\cdot\sqrt{\sigma^2-k^2}+A(\sigma_2)\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)d\tau$$

где $\alpha=-k-i\tau$, $\sigma_2(\alpha)=\alpha\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2}$.

Волновое поле состоит из падающей волны и дифрагированной объемной сдвиговой волны.

В случае $\pi/2<\theta<\pi$ принимается

$$\lambda=-\sigma\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\sigma^2-k^2},\ \ \sigma(\lambda)=-\lambda\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\lambda^2-k^2} \tag{3.3}$$

Теперь уже проведем разрезы в комплексной плоскости ($\alpha=\lambda+i\tau$) не только по линиям $k+i\tau$, $-k-i\tau$, но и по линии $k\sin\theta+i\tau$ для функции $|\sigma|$. Контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости. При $\pi/2<\theta<\pi-\theta_0$ $\sigma(\lambda)-k\cos\theta_0$ не имеет нулей, но при $\pi-\theta_0<\theta<\pi$

$\lambda = -k\cos(\theta + \theta_0)$ является единственным нулем этой функции, и контур интегрирования обходит эту точку снизу. Функция $A(\sigma)$ имеет простой полюс в точке

$\lambda = -\lambda_n = -\sigma_n\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}$, если только $\mathrm{Re}(-\lambda_n - k\sin\theta) > 0$, т.е. в случае $\pi - \mathrm{arctg}\frac{\sigma_n}{k} < \theta < \pi$. Для амплитуды перемещения получим

$$w(r,\theta) = w_0(r,\theta) + A_n e^{-ir\lambda_n} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\left(\alpha r + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \times$$

$$\times\left(A(\sigma)\sqrt{\sigma^2 - k^2} + A(\sigma_1)\sqrt{\sigma_1^2 - k^2}\right)d\tau - \frac{\sqrt{2k}\,æ(1+æ)\sin\theta_0/2}{\pi \overline{K}^{*}(k\cos\theta_0)} i e^{ikr\sin\theta} \times \tag{3.4}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{e^{-\tau r}\overline{K}^{*}(\sigma)(\sigma+k)\sigma\sqrt{\sigma - k}\,d\tau}{\sqrt{(k\sin\theta + i\tau)^2 - k^2}\,(\sigma - k\cos\theta_0)((1+2æ)(\sigma^2 - k^2) - æ^2k^2)}$$

где $\alpha = k + i\tau$, $\sigma_1(\alpha) = -\alpha\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\alpha^2 - k^2}$.

$$w_0(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} \quad \text{при } \pi/2 < \theta < \pi - \theta_0$$

$$w_0(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} + A_0 e^{-ikr\cos(\theta+\theta_0)} \quad \text{при } \pi - \theta_0 < \theta < \pi \tag{3.5}$$

Отметим, что $|\sigma| = \begin{cases} \sigma & \text{при } \mathrm{Re}\,\sigma > k\sin\theta \\ -\sigma & \text{при } \mathrm{Re}\,\sigma < k\sin\theta \end{cases}$

Волновое поле состоит из падающей волны, отраженной волны (если $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$), поверхностной волны (при $\pi - \mathrm{arctg}\frac{\sigma_n}{k} < \theta < \pi$), дифрагированной объемной волны, а также волны, обусловленной пьезоэффектом и распространяющейся от поверхности трещины в среду. Таким образом, обнаружена обусловленная пьезоэффектом поверхностная волна в пьезоэлектрической среде с полубесконечной трещиной при наличии падающей электроупругой волны. Однако, в случае бесконечной трещины, как следует из (1.18), поверхностная волна не возникает при данной постановке задачи.

В случае $\theta = \pi - \theta_0$ точка $\lambda = k$ является и простым полюсом подынтегральной функции, и точкой ветвления. В этом случае функцию перемещения можно представить в виде

$$w(r,\pi - \theta_0) = e^{ikr\cos 2\theta_0} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A(\sigma)\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \frac{iA_0}{2(\lambda - k)}\right)\times$$

$$\times e^{i\lambda r}d\lambda + \frac{A_0}{2}e^{ikr} \tag{3.6}$$

Как следует из решения (2.12), в случае $y < 0$, т.е. $-\pi < \theta < 0$, подынтегральную функцию следует заменить на $-A(\sigma)$, а θ на $-\theta$, и возникающая проходящая волна (при $-\pi < \theta < -\pi + \theta_0$) обусловлена пьезоэффектом.

При больших значениях r (дальние от вершины трещины зоны) получим следующие асимптотические представления амплитуды перемещения при $rk \to \infty$:

$$\text{при } -\pi < \theta < -\pi/2 \ (\theta \neq \theta_0 - \pi)$$

$$w(r,\theta) = w_1(r,\theta) - A_n e^{-ir\zeta_n} + e^{i(kr+\pi/4)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O\left((rk)^{-3/2}\right)\right) +$$
$$+ e^{-ikr\sin\theta}\left(B_n(\theta)\frac{1}{\pi kr} + O\left((kr)^{-2}\right)\right) \qquad (3.7)$$

где $\quad w_1(r,\theta) = (1 - A_0)e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}$ при $-\pi < \theta < \theta_0 - \pi$

$w_1(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}$ при $\theta_0 - \pi < \theta < \pi/2$

$$B(\theta) = \frac{\sqrt{2}\sin\theta/2\sin\theta_0/2}{\cos\theta + \cos\theta_0}\cdot\frac{1+æ}{\overline{K}^-(k\cos\theta_0)\overline{K}^-(-k\cos\theta)}$$

$$B_n(\theta) = \frac{2æ(1+æ)\sin\theta\sin\theta/2\cdot\overline{K}^-(-k\cos\theta)\cdot i\sin\theta_0/2}{\cos\theta(\cos\theta+\cos\theta_0)(æ^2+(1+2æ)\sin^2\theta)\overline{K}^-(k\cos\theta_0)}$$

$$\text{при } \theta = \theta_0 - \pi$$

$$w(r) = (1 - A_0/2)e^{ikr} - A_n e^{ir\sigma_n\left(\cos\theta_0 + i\frac{æ}{1+æ}\sin\theta_0\right)} + e^{ikr}O\left((rk)^{-1/2}\right) \qquad (3.8)$$

$$\text{при } -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$w(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} + e^{i(kr+\pi/4)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O\left((rk)^{-3/2}\right)\right) \qquad (3.9)$$

$$\text{при } \theta = \pi - \theta_0$$

$$w(r) = e^{ikr\cos 2\theta_0} + \frac{A_0}{2}e^{ikr} + A_n e^{ir\sigma_n\left(\cos\theta_0 + i\frac{æ}{1+æ}\sin\theta_0\right)} + e^{ikr}O\left((rk)^{-1/2}\right) \qquad (3.10)$$

$$\text{при } \pi/2 < \theta < \pi;\ (\theta \neq \pi - \theta_0)$$

$$w(r,\theta) = w_0(r,\theta) + A_n e^{-ir\zeta_n} + e^{i(kr+\pi/4)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O\left((rk)^{-3/2}\right)\right) +$$
$$+ e^{ikr\sin\theta}\left(B_n(\theta)\frac{1}{\pi kr} + O\left((kr)^{-2}\right)\right) \qquad (3.11)$$

где для $w_0(r,\theta)$ имеют место формулы (3.5).

Асимптотическое представление индукции $D_2(r,\theta)$ при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ имеет вид

$$D_2(r,\theta) = e_{15}k\left(\frac{ib\cos 2\theta}{(\pi kr)^2} + O\left((kr)^{-3}\right)\right),\quad kr \to \infty \qquad (3.12)$$

а в случае $\pi/2 < \theta < \pi$ или $-\pi < \theta < -\pi/2$

$$D_z(r,\theta)=-e_{15}k\cos\theta_0 e^{-ikr\cos\theta_0\cos\theta}\cdot e^{-kr\cos\theta_0|\sin\theta|}-$$

$$-e_{15}\sigma_n A_n e^{-i\alpha_n r\cos\theta}\cdot e^{-\sigma_n r|\sin\theta|}-e_{15}k e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kr\cos\theta\right)}\cdot e^{-kr|\sin\theta|}\times \qquad (3.13)$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{1}{2}i(\zeta(\theta)-\pi)}\cdot a}{(\pi k r)^{3/2}}+O\left((kr)^{-5/2}\right)\right)+e_{15}k\left(\frac{ib\cos 2\theta}{(\pi k r)^2}+O\left((kr)^{-3}\right)\right),\ kr\to\infty$$

Асимптотические представления составляющей D_θ вектора индукции и напряжения $\sigma_{\theta z}$ вблизи вершины трещины имеют вид

$$D_\theta=-e_{15}g(\theta)(\pi k r)^{-1/2}+O(1),\quad \sigma_{\theta z}=-c_{44}g(\theta)(\pi k r)^{-1/2}+O(1)\quad r\to 0$$

$$g(\theta)=\frac{ik\sqrt{2}(1+æ)e^{i\pi/4}}{K^{+}(k\cos\theta_0)}\sin\frac{\theta_0}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \qquad (3.14)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука. 1982. 240 с.
2. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. М.: Мир. 1962. 279 с.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.//Уч. записки ЕГУ. 1979. 3. С.29-34.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. II спецкурс. М.: Наука. 1965. 327 с.
5. Справочная мат. библиотека. Функ. анализ. М.: Наука. 1972. 283с.
6. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего упругого слоя.//Изв. НАН Арм. Механика. 1999. Т. 52. №1. С.30-39.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН Арм. Механика. 2003. Т. 56. №4. С.3-17.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 23.11.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ

Мелкумян А. С.

Ա. Ս. Մելքումյան
Պիեզոէլեկտրական տարածությունում ոչ ստացիոնար ակուստիկական և էլեկտրական ալիքների դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքի վրա

Դիտարկվում է ուղղագծային ճակատով էլեկտրական և սահքային ակուստիկական ոչ ստացիոնար ալիքների դիֆրակցիան լարումներից ազատ կիսաանվերջ ճաք պարունակող պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում: Ի տարբերություն պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում դինամիկ դրվածքով կատարված բազմաթիվ հետազոտությունների, որտեղ դիտարկվում են ստացիոնար խնդիրներ, այստեղ հետազոտությունները կատարված են ոչ ստացիոնար դրվածքով: Խնդիրը հետազոտված է Լապլասի ձևափոխությունների, ինչպես նաև Վիներ-Հոպֆի և Կանյար - դե Հուփի մեթոդների կիրառմամբ: Մանրամասնորեն ուսումնասիրված է ամբողջական էլեկտրաառաձգական դաշտի կառուցվածքը և նրա բաղկացուցիչ մասերի փոխդասավորվածության կախվածությունը ընկնող ալիքի տեսքից և անկման անկյունից: Ստացված են ժամանակից կախված էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և մեխանիկական լարումների ինտենսիվությունների գործակիցները ճաքի գագաթում: Բերված են թվային հաշվարկներ:

A. S. Melkumyan
Diffraction of nonstationary acoustic and electric waves in piezoelectric media on a semi-infinite crack

Рассматривается задача о дифракции электрической и сдвиговой акустической нестационарных волн с прямолинейным фронтом в пьезоэлектрическом пространстве от края полубесконечной трещины, свободной от напряжений. В отличие от многих исследований динамических задач в пьезоэлектрическом пространстве, где рассматриваются стационарные задачи, здесь исследования проведены в нестационарной постановке. Задача исследована с помощью преобразований Лапласа, а также применением методов Винера-Хопфа и Каньяра-де Хупа. Детально изучена зависимость строения взаимосвязанного электроупругого поля и взаимного расположения его составных частей от вида падающей волны и от ее угла падения. Получены выражения интенсивностей электрической индукции и механических напряжений при вершине трещины в зависимости от времени. Приведены численные расчеты.

1. Имеется пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии, содержащей полубесконечную трещину, свободной от напряжений. Введем декартовую координатную систему $OXYZ$ с осью OZ, совпадающей с осью симметрии кристалла и с полуплоскостью $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, совпадающей с трещиной. Рассматривая антиплоские механические и плоские электрические волны в пьезоэлектрике, будем иметь

$$\vec{u} = (0, 0, w(x, y, t)), \ \vec{E} = (-\varphi_x(x, y, t), -\varphi_y(x, y, t), 0) \tag{1}$$

Введем обозначения $\bar{c}_{44} = c_{44} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}$, $c_l = s_l^{-1} = 1/\sqrt{\varepsilon_{11}\mu_0}$, $c_s = s_s^{-1} = \sqrt{\bar{c}_{44}/\rho}$, $C_f = c_l^2/(c_l^2 - c_s^2)$, $\tilde{c}_{44} = \bar{c}_{44}\left[1 - (1 - C_f)(e_{15}^2/\bar{c}_{44}\varepsilon_{11})\right]$, $k_e^2 = e_{15}^2 C_f/(\varepsilon_{11}\tilde{c}_{44})$ и функцию

$$\psi(x,y,t)=\varphi(x,y,t)-\frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}}w(x,y,t) \tag{2}$$

В нестационарном приближении [1] будем иметь следующую систему гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

а также следующие соотношения:

$$\sigma_{xz}=\tilde{c}_{44}w_{,x}+e_{15}\psi_{,x},\quad \sigma_{yz}=\tilde{c}_{44}w_{,y}+e_{15}\psi_{,y} \tag{4}$$

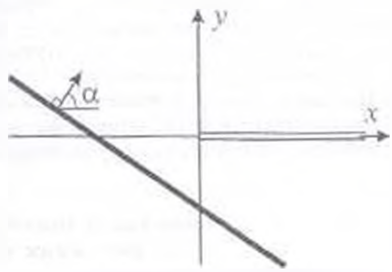
$$D_x=e_{15}(1-C_f)w_{,x}-\varepsilon_{11}\psi_{,x},\quad D_y=e_{15}(1-C_f)w_{,y}-\varepsilon_{11}\psi_{,y} \tag{5}$$

Как видно из (1)–(5), при нестационарной постановке задачи в пьезоэлектрике распространяются как акустические $w(x,y,t)$, так и электрические $\psi(x,y,t)$ волны с конечными скоростями c_s и c_l соответственно.

В пьезоэлектрике класса 6mm с полубесконечной трещиной (фиг. 1) распространяются акустическая и электрическая волны с прямолинейным фронтом

$$w^{(1)}(x,y,t)=w_0G(t-s_s[x\cos\alpha+y\sin\alpha]) \tag{6}$$

$$\psi^{(1)}(x,y,t)=\psi_0G(t-s_l[x\cos\alpha+y\sin\alpha]) \tag{7}$$



Фиг 1. Фронт падающей волны и полубесконечная трещина

где α – угол падения, $G(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau$, $g(\tau)$ – заданная функция, такая, что $g(\tau)=0$ при $\tau<0$.

Для решения задачи разделим пространство на две части: верхняя $(y>0)$ и нижняя $(y<0)$, удовлетворяя условия контакта

$$\sigma_{yz}(x,+0,t)=\sigma_{yz}(x,-0,t)=\sigma_-(x,t),\quad D_y(x,+0,t)=D_y(x,-0,t) \tag{8}$$

$$w(x,+0,t)-w(x,-0,t)=h_+(x,t),\quad \varphi(x,+0,t)=\varphi(x,-0,t) \tag{9}$$

где $\sigma_-(x,t)=0$ при $x>0$, $h_+(x,t)=0$ при $x<0$ и введем новые неизвестные функции $w^{(s)}(x,y,t)$ и $\psi^{(s)}(x,y,t)$ по формулам

$$w(x,y,t)=w^{(1)}(x,y,t)+w^{(s)}(x,y,t) \tag{10}$$

$$\psi(x,y,t)=\psi^{(1)}(x,y,t)+\psi^{(s)}(x,y,t) \tag{11}$$

Подставляя (2), (4)-(7), (10)-(11) в волновые уравнения (3) и условия контакта (8)-(9) и производя одностороннее преобразование Лапласа по времени, а также двухстороннее преобразование Лапласа по координате x, согласно формулам

$$f^*(x,p)=\int_0^\infty f(x,t)e^{-pt}dt,\quad f(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(x,p)e^{pt}dp$$

$$\tilde{f}^*(\varsigma,p)=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x,p)e^{-p\varsigma x}dx,\quad f^*(x,p)=\frac{p}{2\pi i}\int_{\varsigma_0-i\infty}^{\varsigma_0+i\infty}\tilde{f}^*(\varsigma,p)e^{p\varsigma x}d\varsigma \tag{12}$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^{(s)*}}{\partial y^2} - p^2 a^2(\varsigma)\hat{w}^{(s)*} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}^{(s)*}}{\partial y^2} - p^2 e^2(\varsigma)\hat{\psi}^{(s)*} = 0 \tag{13}$$

с преобразованными условиями контакта

$$\hat{w}^{(s)*}_{,y}(\varsigma, +0, p) = \hat{w}^{(s)*}_{,y}(\varsigma, -0, p) \tag{14}$$

$$\hat{w}^{(s)*}(\varsigma, +0, p) - \hat{w}^{(s)*}(\varsigma, -0, p) = \hat{h}^*_{-}(\varsigma, p) \tag{15}$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}_{,y}(\varsigma, +0, p) = \hat{\psi}^{(s)*}_{,y}(\varsigma, -0, p) \tag{16}$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}(\varsigma, +0, p) - \hat{\psi}^{(s)*}(\varsigma, -0, p) = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_f \hat{h}^*_{-}(\varsigma, p) \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \tilde{c}_{44}\hat{w}^{(s)*}_{,y}(\varsigma, -0, p) + e_{15}\hat{\psi}^{(s)*}_{,y}(\varsigma, -0, p) = \hat{s}^*_{-}(\varsigma, p) + \\ + \frac{g^*(p)}{p}\left[\tilde{c}_{44}\frac{w_0 s_s \sin\alpha}{\varsigma + s_s \cos\alpha} + e_{15}\frac{\psi_0 s_t \sin\alpha}{\varsigma + s_t \cos\alpha}\right] \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь и далее введены следующие обозначения: $a(\varsigma) = \sqrt{s_s^2 - \varsigma^2}$, $a(0) = s_s$ с разрезами $\operatorname{Im}\varsigma = 0, |\operatorname{Re}\varsigma| \geq s_s$, $e(\varsigma) = \sqrt{s_t^2 - \varsigma^2}$, $a(0) = s_t$ с разрезами $\operatorname{Im}\varsigma = 0, |\operatorname{Re}\varsigma| \geq s_t$, а также

$$s_{-}(x,t) = \sigma_{-}(x,t) - \tilde{c}_{44} w^{(s)}_{,y}(x,0,t)H(-x) - e_{15}\psi^{(s)}_{,y}(x,0,t)H(-x) \tag{19}$$

Решая систему (13)-(18), получим следующие выражения для $\hat{w}^{(s)*}$ и $\hat{\psi}^{(s)*}$:

$$\hat{w}^{(s)*}(\varsigma, y, p) = \operatorname{sgn}(y)\frac{\hat{h}^*_{-}(\varsigma, p)}{2}e^{-pa(\varsigma)|y|} \tag{20}$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}(\varsigma, y, p) = -\frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}}\operatorname{sgn}(y)\frac{\hat{h}^*_{-}(\varsigma, p)}{2}e^{-pe(\varsigma)|y|} \tag{21}$$

а также уравнение Винера-Хопфа [2]

$$\begin{gathered} -\left(1 - k_e^2\right)R(\varsigma)a(\varsigma)\frac{\hat{h}^*_{-}(\varsigma, p)}{2}p\tilde{c}_{44} = \hat{s}^*_{-}(\varsigma, p) + \\ + \frac{g^*(p)}{p}\left[\tilde{c}_{44}\frac{w_0 s_s \sin\alpha}{\varsigma + s_s \cos\alpha} + e_{15}\frac{\psi_0 s_t \sin\alpha}{\varsigma + s_t \cos\alpha}\right] \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$R(\varsigma) = \frac{1}{1 - k_e^2}\frac{a(\varsigma) - k_e^2 e(\varsigma)}{a(\varsigma)} \tag{23}$$

Факторизируя функцию $R(\varsigma)$ с применением интегралов типа Коши [3], получим

$$R(\varsigma) = R_{+}(\varsigma)R_{-}(\varsigma) \tag{24}$$

где

$$R_{\pm}(\varsigma)=\frac{s_{loc}\pm\varsigma}{s_s\pm\varsigma}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{s_\ell}^{s_s}\arctan\left[k_e^2\frac{\sqrt{\sigma^2-s_\ell^2}}{\sqrt{s_s^2-\sigma^2}}\right]\frac{d\sigma}{\sigma\pm\varsigma}\right) \tag{25}$$

$$s_{loc}=\sqrt{\frac{s_s^2-k_e^4 s_\ell^2}{1-k_e^4}}>s_s \tag{26}$$

Используя факторизацию (24)-(26) и решая уравнение (22) методом Винера-Хопфа [2], получим

$$\hat{h}_{+}^{*}(\varsigma,p)=-\frac{g^{*}(p)}{p^2\tilde{c}_{44}}\frac{2\left(1-k_e^2\right)^{-1}}{R_{+}(\varsigma)\sqrt{s_s+\varsigma}}\left[\frac{1}{\varsigma+s_s\cos\alpha}\frac{\tilde{c}_{44}w_0\sqrt{2s_s}\sin(\alpha/2)}{R_{-}(-s_s\cos\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varsigma+s_\ell\cos\alpha}\frac{e_{15}\psi_0 s_\ell\sin\alpha}{R_{-}(-s_\ell\cos\alpha)\sqrt{s_s+s_\ell\cos\alpha}}\right] \tag{27}$$

$$\hat{s}_{-}^{*}(\varsigma,p)=-\frac{g^{*}(p)}{p}\left[\frac{\tilde{c}_{44}w_0 s_s\sin(\alpha)}{\varsigma+s_s\cos\alpha}\left(1-\frac{R_{-}(\varsigma)\sqrt{s_s-\varsigma}}{R_{-}(-s_s\cos\alpha)\sqrt{2s_s}\cos(\alpha/2)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e_{15}\psi_0 s_\ell\sin\alpha}{\varsigma+s_\ell\cos\alpha}\left(1-\frac{R_{-}(\varsigma)\sqrt{s_s-\varsigma}}{R_{-}(-s_\ell\cos\alpha)\sqrt{s_s+s_\ell\cos\alpha}}\right)\right] \tag{28}$$

Подставляя (27) в (20)-(21) и обращая двухстороннее преобразование Лапласа по координате x, получим

$$w^{(s)*}(x,y,p)=-\frac{\sin(\alpha)\operatorname{sgn}(y)}{1-k_e^2}\frac{g^{*}(p)}{p}W^{(s)*}(x,y,p) \tag{29}$$

$$\psi^{(s)*}(x,y,p)=\frac{e_{15}C_f}{\varepsilon_{11}\tilde{c}_{44}}\frac{\sin(\alpha)\operatorname{sgn}(y)}{1-k_e^2}\frac{g^{*}(p)}{p}\Psi^{(s)*}(x,y,p) \tag{30}$$

где

$$W^{(s)*}(x,y,p)=W_a^{(s)*}(x,y,p)+W_e^{(s)*}(x,y,p)=$$

$$=\frac{w_0\sqrt{s_s}}{R_{-}(-s_s\cos\alpha)\sqrt{2}\cos(\alpha/2)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varsigma_0-i\infty}^{\varsigma_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\varsigma)|y|-x\varsigma]}d\varsigma}{(\varsigma+s_s\cos\alpha)R_{+}(\varsigma)\sqrt{s_s+\varsigma}}+$$

$$+\frac{e_{15}}{\tilde{c}_{44}}\frac{\psi_0 s_\ell}{R_{-}(-s_\ell\cos\alpha)\sqrt{s_s+s_\ell\cos\alpha}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varsigma_0-i\infty}^{\varsigma_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\varsigma)|y|-x\varsigma]}d\varsigma}{(\varsigma+s_\ell\cos\alpha)R_{+}(\varsigma)\sqrt{s_s+\varsigma}} \tag{31}$$

и

$$\Psi^{(s)*}(x,y,p)=\Psi_a^{(s)*}(x,y,p)+\Psi_e^{(s)*}(x,y,p)=$$

$$=\frac{\tilde{c}_{44}w_0\sqrt{s_s}}{R_{-}(-s_s\cos\alpha)\sqrt{2}\cos(\alpha/2)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varsigma_0-i\infty}^{\varsigma_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\varsigma)|y|-x\varsigma]}d\varsigma}{(\varsigma+s_s\cos\alpha)R_{+}(\varsigma)\sqrt{s_s+\varsigma}}+$$

$$+\frac{e_{15}\psi_0 s_\ell}{R_{-}(-s_\ell\cos\alpha)\sqrt{s_s+s_\ell\cos\alpha}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varsigma_0-i\infty}^{\varsigma_0+i\infty}\frac{e^{-p[a(\varsigma)|y|-x\varsigma]}d\varsigma}{(\varsigma+s_\ell\cos\alpha)R_{+}(\varsigma)\sqrt{s_s+\varsigma}} \tag{32}$$

Отметим, что при $e_{15} \to 0$ полученные выражения переходят в соответствующие выражения для случая чисто упругого тела, приведенные в [4].

2. Теперь перейдем к обращению одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени в (29)-(32) методом Каньяра - де Хупа [4]. В отдельности рассмотрим три случая: а) случай падения акустической волны (то есть $w_0 \neq 0$, $\psi_0 = 0$) при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$, б) случай падения акустической волны (то есть $w_0 \neq 0$, $\psi_0 = 0$) при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$ и в) случай падения электрической волны (то есть $w_0 = 0, \psi_0 \neq 0$).

а) случай падения акустической волны при $\alpha < \arccos(s_l/s_s)$

Для обращения одностороннего преобразования Лапласа в выражениях (29)-(32) методом Каньяра – де Хупа перейдем к координатам r и θ по формулам $x = r\cos\theta$, $|y| = r\sin\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ и введем следующие функции:

$$\varsigma_a^{\pm}(r,\theta,t) = \frac{1}{r}\left(-t\cos\theta \pm i\sqrt{t^2 - s_s^2 r^2}\sin\theta\right),\ t \in [s_s r, +\infty) \tag{33}$$

$$\varsigma_{ae}(r,\theta,t) = \frac{1}{r}\left(-t\cos\theta + \sqrt{s_s^2 r^2 - t^2}\sin\theta\right),\ t \in [t_{ae}, s_s r] \tag{34}$$

$$\varsigma_{ae}^{\pm}(r,\theta,t) = \varsigma_{ae}(r,\theta,t) \pm i\varepsilon,\ t \in [t_{ae}, s_s r] \tag{35}$$

$$\varsigma_e^{\pm}(r,\theta,t) = \frac{1}{r}\left(-t\cos\theta \pm i\sqrt{t^2 - s_l^2 r^2}\sin\theta\right),\ t \in [s_l r, +\infty) \tag{36}$$

где

$$t_{ae} = t_{ae}(r,\theta) = s_l x + \sqrt{s_s^2 - s_l^2}\,|y| \tag{37}$$

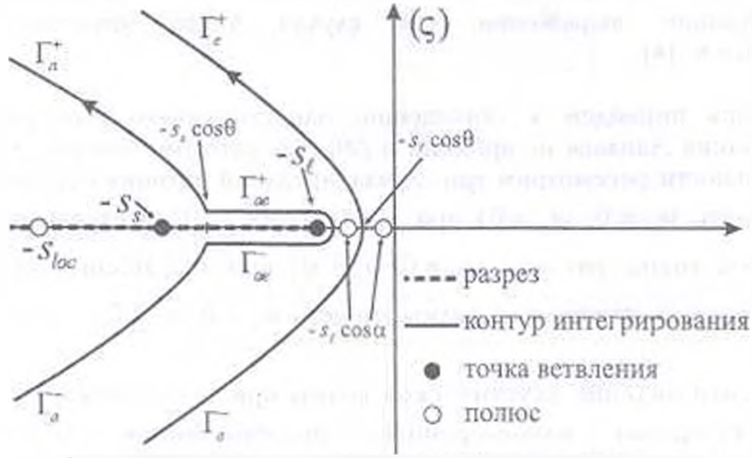
При этом будем иметь

$$\frac{\partial\varsigma_a^{\pm}}{\partial t} = \pm i\frac{a(\varsigma_a^{\pm}(r,\theta,t))}{\sqrt{t^2 - s_s^2 r^2}},\quad \frac{\partial\varsigma_{ae}}{\partial t} = \frac{\partial\varsigma_{ae}^{\pm}}{\partial t} = -\frac{a(\varsigma_{ae}(r,\theta,t))}{\sqrt{s_s^2 r^2 - t^2}} \tag{38}$$

$$\frac{\partial\varsigma_e^{\pm}}{\partial t} = \pm i\frac{e(\varsigma_e^{\pm}(r,\theta,t))}{\sqrt{t^2 - s_l^2 r^2}} \tag{39}$$

Функции (33)-(36) представляют параметрические выражения контуров интегрирования Каньяра – де Хупа [4,5], которые вместе с разрезами, точками ветвления и полюсами показаны на фиг. 2. Переходя от контуров интегрирования, параллельных мнимой оси к контуру $\Gamma_a^- + \Gamma_{ae}^- + \Gamma_{ae}^+ + \Gamma_a^+$ в (31) и к контуру $\Gamma_e^- + \Gamma_e^+$ в (32) и при этом учитывая вклады от полюсов и совершая замену переменной по формулам (33)-(36), после небольших преобразований получим

$$\begin{aligned} w^{(r)}(x,y,t) = &-w_0\frac{\operatorname{sgn}(y)}{1-k_e^4}\frac{H(\alpha-\theta)}{s_{bu}^2 - s_s^2\cos^2\alpha}G\left(t - s_s\left[x\cos\alpha + |y|\sin\alpha\right]\right) + \\ &+\int_0^t G(t-\tau)w_{ab}^{(r)}(x,y,\tau)d\tau \end{aligned} \tag{40}$$



Фиг. 2. Контур интегрирования Каняра-де Хупа в случае падающей акустической волны

где

$$w_{a\delta}^{(s)}(x,y,t)=-\frac{w_0\sqrt{s_s}\sin(\alpha)\,\mathrm{sgn}(y)\left(1-k_s^2\right)^2}{\pi\sqrt{2}R_-(-s_s\cos\alpha)\cos(\alpha/2)}\times$$

$$\times\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{s_s-\varsigma_a^-(t)}}{\left(\varsigma_a^-(t)+s_s\cos\alpha\right)R_-\left(\varsigma_a^-(t)\right)}\right]\frac{H(t-s_sr)}{\sqrt{t^2-s_s^2r^2}}-\right. \tag{41}$$

$$\left.-\,\mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{s_s-\varsigma_{ae}(t)}}{\left(\varsigma_{ae}(t)+s_s\cos\alpha\right)R_-\left(\varsigma_{ae}^+(t)\right)}\right]\frac{H(t-t_{ae})-H(t-s_sr)}{\sqrt{s_s^2r^2-t^2}}H\left(\cos\theta-s_ls_s^{-1}\right)\right\}$$

и

$$\psi^{(s)}(x,y,t)=\int_0^t G(t-\tau)\psi_{a\delta}^{(s)}(x,y,\tau)d\tau \tag{42}$$

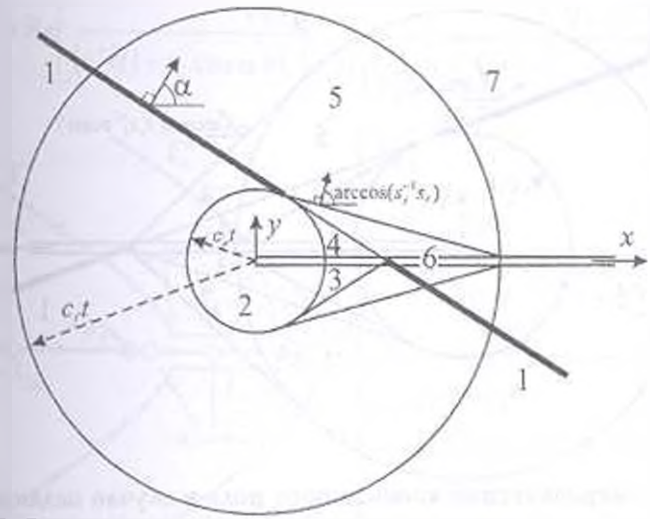
где:

$$\psi_{a\delta}^{(s)}(x,y,t)=\frac{w_0\sqrt{s_s}}{R_-(-s_s\cos\alpha)}\frac{e_{11}C_f}{\varepsilon_{11}}\frac{\sqrt{2}\sin(\alpha/2)\,\mathrm{sgn}(y)}{1-k_s^2}\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{e\left(\varsigma_e^+(t)\right)}{\left(\varsigma_e^+(t)+s_s\cos\alpha\right)R_+\left(\varsigma_e^+(t)\right)\sqrt{s_s+\varsigma_e^+(t)}}\right]\frac{H(t-s_lr)}{\sqrt{t^2-s_l^2r^2}} \tag{43}$$

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (40) – (43), показана на фиг. 3, где проявляются следующие 7 зон:

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны
6. Зона головной волны
7. Невозмущенная зона



Фиг. 3. Электроакустическое волновое поле в случае падающей акустической волны при $\alpha < \arccos(s_l/s_s)$

б) случай падения акустической волны при $\alpha > \arccos(s_l/s_s)$

Производя вычисления, проходя путем, изложенным в пункте а), получим, что в данном случае

$$w^{(s)}(x,y,t) = -w_0 \frac{\mathrm{sgn}(y)}{1-k_e^2} \frac{G(t - s_s[x\cos\alpha + |y|\sin\alpha])}{R(-s_s\cos\alpha)} H(\alpha-\theta) + \int_0^t G(t-\tau) w^{(s)}_{\text{об}}(x,y,\tau)d\tau \tag{44}$$

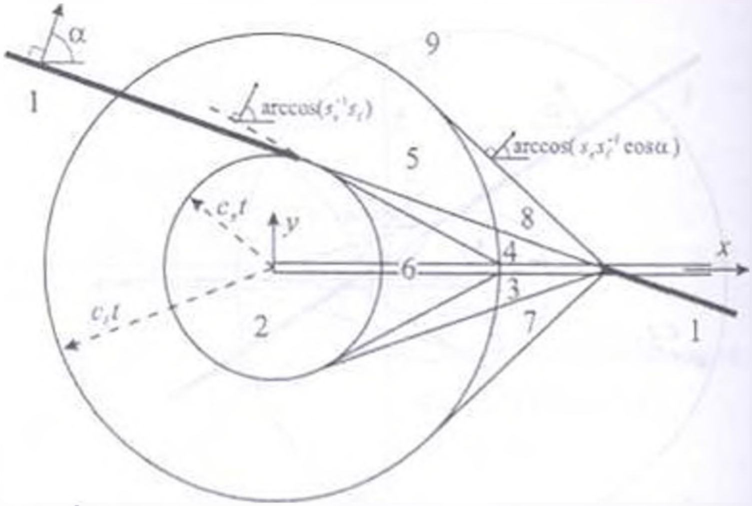
где $w^{(s)}_{\text{об}}(x,y,t)$ дается формулой (41), и

$$\psi^{(s)}(x,y,t) = w_0 \frac{e_{15}C_s}{\varepsilon_{11}} \frac{\mathrm{sgn}(y)}{1-k_e^2} \frac{G(t - [s_s x\cos\alpha + |y| e(s_s\cos\alpha)])}{R(-s_s\cos\alpha)} \times H(\arccos(s_s s_l^{-1}\cos\alpha) - \theta) + \int_0^t G(t-\tau)\psi^{(s)}_{\text{об}}(x,y,\tau)d\tau \tag{45}$$

где $\psi^{(s)}_{\text{об}}(x,y,t)$ дается формулой (43).

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (44) – (45), показана на фиг. 4, где проявляются следующие 9 зон:

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны
6. Зона головной волны
7. Зона отраженной электрической волны
8. Зона пройденной электрической волны
9. Невозмущенная зона



Фиг. 4. Электроакустическое волновое поле в случае падающей акустической волны при $\alpha > \arccos(s_l/s_s)$

в) случая падения электрической волны

Взаимное расположение контуров интегрирования, разрезов, точек ветвления и полюсов для данного случая показано на фиг. 5. Производя расчеты, аналогичные тем, которые проведены в пунктах а) и б), получим, что в данном случае

$$w^{(e)}(x,y,t) = -\psi_0\frac{e_{15}}{\bar{\varepsilon}_{11}}s_l\,\frac{\sin(\alpha)\operatorname{sgn}(y)}{1-k_e^2}\,\frac{G\left(t-\left[xs_l\cos\alpha+|y|a(s_l\cos\alpha)\right]\right)}{R(-s_l\cos\alpha)a(s_l\cos\alpha)}\times$$

$$\times H\left(\arccos\left[s_l s_s^{-1}\cos\alpha\right]-\theta\right)+\int_0^t G(t-\tau)w_{e\delta}^{(e)}(x,y,\tau)d\tau \qquad (46)$$

где

$$w_{e\delta}^{(e)}(x,y,t) = -\frac{\sin(\alpha)\operatorname{sgn}(y)}{1-k_e^2}\,\frac{e_{15}}{\bar{\varepsilon}_{11}}\,\frac{\psi_0 s_l}{R_-(-s_l\cos\alpha)\sqrt{s_s+s_l\cos\alpha}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{\sqrt{s_s-\varsigma_s^+(t)}}{\left(\varsigma_s^+(t)+s_l\cos\alpha\right)R_-\left(\varsigma_s^-(t)\right)}\right]\frac{H(t-s_s r)}{\sqrt{t^2-s_s^2r^2}}-\operatorname{Im}\left(\frac{1}{R_-\left(\varsigma_{se}^-(t)\right)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sqrt{s_s-\varsigma_{se}(t)}}{\varsigma_{se}(t)+s_l\cos\alpha}\,\frac{H(t-t_{se})-H(t-s_s r)}{\pi\sqrt{s_s^2r^2-t^2}}\right\}H\left(\arccos\left[s_l s_s^{-1}\right]-\theta\right) \qquad (47)$$

и

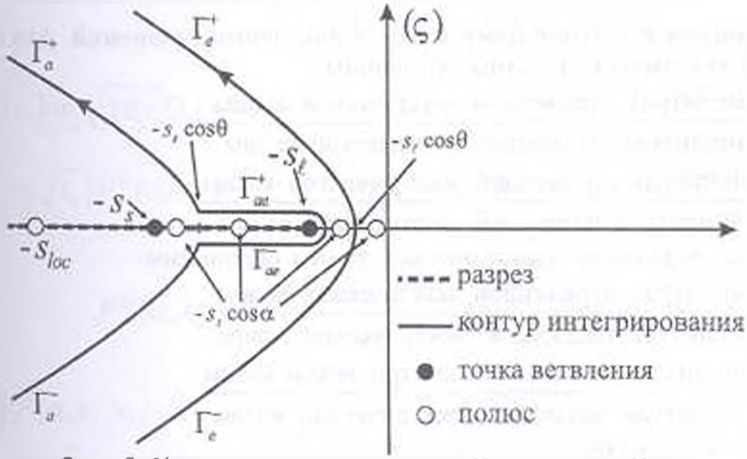
$$\psi^{(e)}(x,y,t) = \psi_0 s_l k_e^2\,\frac{\sin(\alpha)\operatorname{sgn}(y)}{1-k_e^2}\,\frac{G\left(t-s_l\left[x\cos\alpha+|y|\sin\alpha\right]\right)}{R(-s_l\cos\alpha)a(s_l\cos\alpha)}H(\alpha-\theta)+$$

$$+\int_0^t G(t-\tau)\psi_{e\delta}^{(e)}(x,y,\tau)d\tau \qquad (48)$$

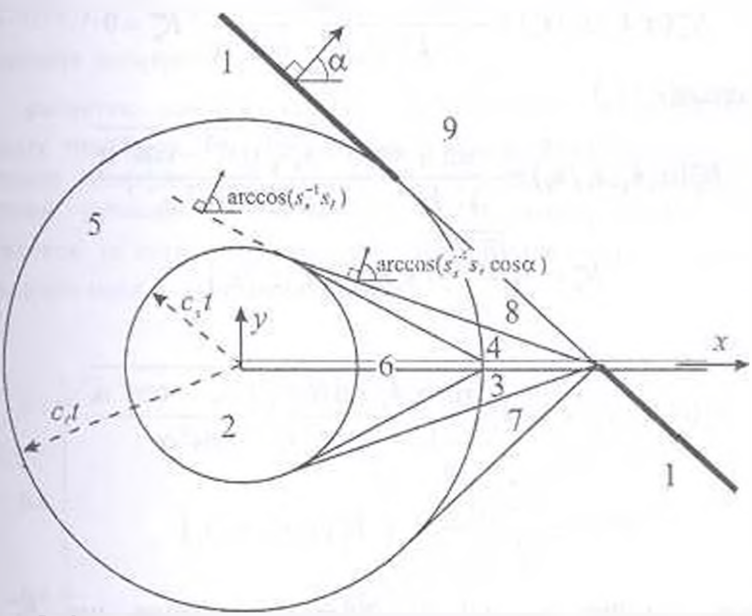
где

$$\psi_{e\delta}^{(e)}(x,y,t) = \frac{\psi_0 s_l k_e^2}{\pi(1-k_e^2)}\,\frac{\sin(\alpha)\operatorname{sgn}(y)}{R_-(-s_l\cos\alpha)\sqrt{s_s+s_l\cos\alpha}}\times$$

$$\times \mathrm{Re}\left[\frac{e\left(\varsigma_e^{+}(t)\right)}{\left(\varsigma_e^{+}(t)+s_t\cos\alpha\right)R_{-}\left(\varsigma_e^{+}(t)\right)\sqrt{s_t+\varsigma_e^{+}(t)}}\right]\frac{H(t-s_t r)}{\sqrt{t^2-s_t^2 r^2}} \tag{49}$$



Фиг. 5. Контур интегрирования Каньяра – де Хупа в случае падающей электрической волны



Фиг. 6. Электроакустическое волновое поле в случае падающей электрической волны

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (46)-(49), показана на фиг. 6, где проявляются следующие 9 зон

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны

6. Зона головной волны
7. Зона отраженной электрической волны
8. Зона пройденной электрической волны
9. Невозмущенная зона

3. Перейдем к дальнейшему анализу полученных решений. Для случая падающей акустической волны обозначим:

$$R_a^a = \frac{\text{амплитуда отраженной акустической волны}}{\text{амплитуда падающей акустической волны}}$$

$$R_a^e = \frac{\text{амплитуда отраженной электрической волны}}{\text{амплитуда падающей акустической волны}}$$

а для случая падающей электрической волны обозначим:

$$R_e^a = \frac{\text{амплитуда отраженной акустической волны}}{\text{амплитуда падающей электрической волны}}$$

$$R_e^e = \frac{\text{амплитуда отраженной электрической волны}}{\text{амплитуда падающей электрической волны}}$$

Из (40)-(49) следует:

при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$

$$R_a^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) = -\frac{1}{1-k_e^4}\frac{\sin^2\alpha}{s_{loc}^2 s_t^{-2} - \cos^2\alpha}, \quad R_a^e = 0 \tag{50}$$

при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$

$$R_a^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) = -\frac{\sin\alpha}{1-k_e^4}\frac{\sin\alpha + k_e^2\sqrt{s_t^2 s_s^{-2} - \cos^2\alpha}}{s_{loc}^2 s_s^{-2} - \cos^2\alpha} \tag{51}$$

$$R_a^e = -\sqrt{\frac{\tilde{c}_{44} C_f}{\varepsilon_{11}}}\, k_e R_a^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) \tag{52}$$

при любом α

$$R_e^e(\alpha, k_e, s_t/s_s) = k_e^2 \frac{\sin\alpha}{1-k_e^4}\frac{k_e^2\sin\alpha + \sqrt{s_s^2 s_t^{-2} - \cos^2\alpha}}{s_{loc}^2 s_t^{-2} - \cos^2\alpha} \tag{53}$$

$$R_e^a = -\left(\sqrt{\frac{\tilde{c}_{44} C_f}{\varepsilon_{11}}}\, k_e\right)^{-1} R_e^e(\alpha, k_e, s_t/s_s) \tag{54}$$

Заметим, что при $e_{15} \to 0$ из $(50)-(54)$ получаем, что $R_a^a \to -1$, $R_a^e \to 0$, $R_e^a \to 0$, $R_e^e \to 0$, то есть получаем результат для случая изотропного тела.

На основании решений (29)-(32) получаются следующие выражения для интенсивностей напряжений и электрической индукции:

$$K_\sigma(\alpha, t) = \lim_{x \to -0}\sqrt{2\pi|x|}\,\sigma_{yz}(x, 0, t) =$$

$$= -\left[\left(\tilde{c}_{44} w_0 \sqrt{s_s}\right) F_a^\circ(\alpha, k_e, s_t/s_s) + \left(e_{15}\,\psi_0\sqrt{s_t}\right) F_e^\circ(\alpha, k_e, s_t/s_s)\right]\int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\,d\tau \tag{55}$$

где

$$F_a^{\sigma}(\alpha,k_e,s_l/s_s)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(\alpha/2)}{R_s(-s_l\cos\alpha)} \tag{56}$$

$$F_s^{\sigma}(\alpha,k_e,s_l/s_s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\alpha)}{R_s(-s_l\cos\alpha)\sqrt{s_s s_l^{-1}+\cos\alpha}} \tag{57}$$

и

$$K_D(\alpha,t)=\lim_{x\to -0}\sqrt{2\pi|x|}D_y(x,0,t)=$$

$$=-\left[\left(e_{15}w_0\sqrt{s_s}\right)F_a^D(\alpha,k_e,s_l/s_s)+\left(\varepsilon_{11}\psi_0\sqrt{s_l}\right)F_s^D(\alpha,k_e,s_l/s_s)\right]\int_0^t\frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}}d\tau \tag{58}$$

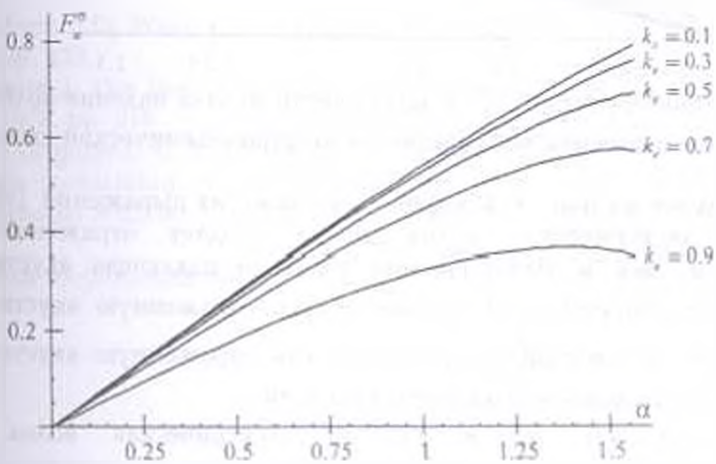
где

$$F_a^D(\alpha,k_e,s_l/s_s)=\frac{1}{1-k_e^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(\alpha/2)}{R_s(-s_l\cos\alpha)} \tag{59}$$

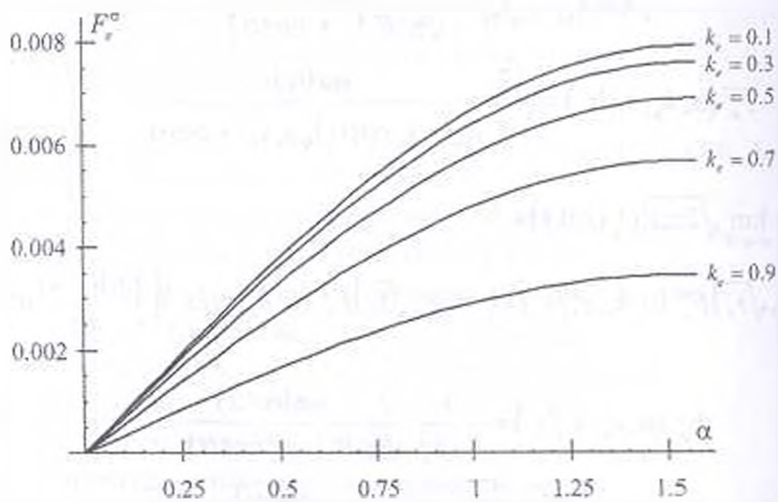
$$F_s^D(\alpha,k_e,s_l/s_s)=\frac{k_e^2}{1-k_e^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\alpha)}{C_l R_s(-s_l\cos\alpha)\sqrt{s_s s_l^{-1}+\cos\alpha}} \tag{60}$$

На фиг. 7 – 10 показаны графики функций $F_a^{\sigma}(\alpha,k_e,s_l/s_s)$, $F_s^{\sigma}(\alpha,k_e,s_l/s_s)$, $F_a^D(\alpha,k_e,s_l/s_s)$, $F_s^D(\alpha,k_e,s_l/s_s)$ при разных значениях коэффициента электромеханической связи k_e.

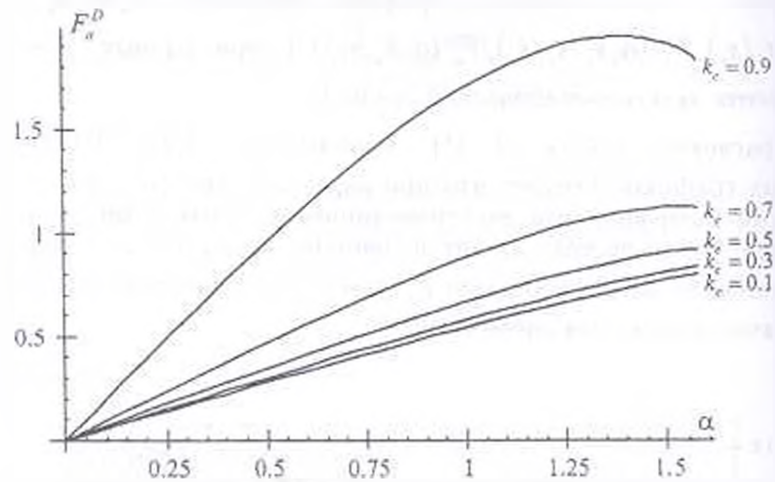
При расчетах, следуя Li [1], принималось $s_l/s_s=0.0001$. Из полученных графиков следует, что при падающей акустической волне с увеличением коэффициента электромеханической связи интенсивность напряжений уменьшается, а интенсивность электрической индукции увеличивается, то есть чем больше k_e, тем больше энергии переходит от акустического поля к электрическому.



Фиг. 7. График функции F_a^{σ} в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи



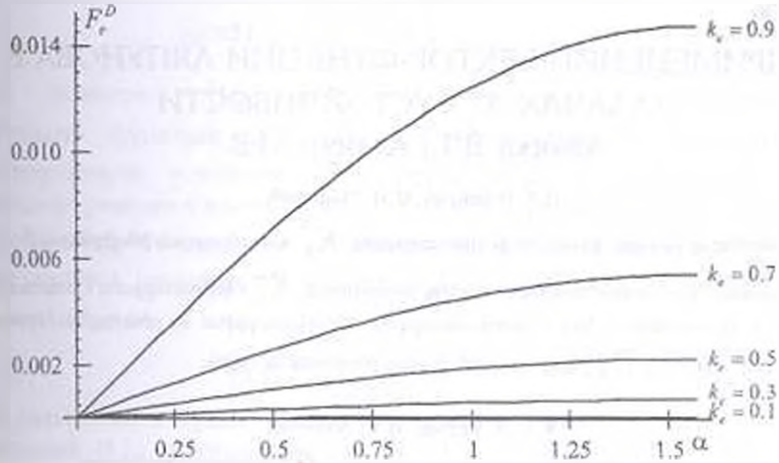
Фиг. 8. График функции F_e° в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи



Фиг. 9. График функции F_a^D в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

Как следует из фиг. 3, 4 и фиг. 6, а также из выражений (50) – (54), падающая электрическая волна всегда создает отраженные как акустическую, так и электрическую волны, а падающая акустическая волна при $\alpha < \arccos(s_l/s_s)$ создает только отраженную акустическую волну, а при $\alpha > \arccos(s_l/s_s)$ создает как отраженную акустическую волну, так и отраженную электрическую волну.

Если $s_l/s_s \to 0$, то в фиг. 3 электрическая волна будет распространяться с бесконечно большой скоростью и создаст фон, то есть неволновую часть, а фронт головной волны станет параллельным трещине. При этом головная волна проявится как неволновая часть в направлении трещины с конечной скоростью распространения в направлении, перпендикулярном трещине. Таким образом, полученные здесь результаты при предельном переходе $s_t/s_s \to 0$ переходят в соответствующие результаты работы [6] и дают более детальное объяснение строению волнового поля, полученного в [6].



Фиг. 10. График функции F_e^D в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

ЛИТЕРАТУРА

1. Li S. The Electromagneto-acoustic Surface Wave In A Piezoelectric Medium: The Bleustein-Gulyaev Mode. //Journal of Applied Physics, 1996. N 80(9), pp. 5264-5269.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы. 1963. 640 с.
4. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Pub., 1984. pp. 425.
5. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland Pub., 1978. pp. 618.
6. E. Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan On wave diffraction in a piezoelectric medium containing a semi-infinite electrode. //Proceedings of the International Seminar "Days on Diffraction 2004", 2004, pp. 99-109

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
6.12.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 531.36

О ПРИМЕНЕНИИ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ K_Δ^ω- УСТОЙЧИВОСТИ

Аванян В.Т., Аванян М.В.

Վ.Տ. Ավանյան, Մ.Վ. Ավանյան

Լյապունովի վեկտոր-ֆունկցիայի կիրառությունը K_Δ^ω-կայունության խնդիրներում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է բարդ համակարգի K_Δ^ω-կայունությունը Լյապունովի վեկտոր-ֆունկցիայի կիրառությամբ, երբ ենթահամակարգերը կապակցված են գծայնորեն: Ստացված է ասիմպտոտիկ K_Δ^ω-կայունության համար բավարար պայման:

V.T. Avanyan, M.V. Avanyan

An application of Lyapunov's method in K_Δ^ω - stability problems

В работе рассматривается K_Δ^ω- устойчивость сложных систем с применением вектор-функции Ляпунова, когда подсистемы связаны линейно. Получено достаточное условие для асимптотической K_Δ^ω-устойчивости в целом.

Пусть уравнение возмущенного процесса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i(x_i,t) + D_i u_i, & y_i = H_i x_i \\ u_i = \sum\limits_{j=1}^{k} F_{ij} y_j & (i=1,\dots,k) \end{cases} \tag{1.1}$$

где функция $X_i(x_i,t)$ непрерывна по x_i и t, имеет непрерывные и ограниченные частные производные по координатам вектора x_i, $X_i(0,t)=0$, $x_i - n_i$-мерный вектор $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n\right)$, u_i, y_i –векторы с размерностями q_i, матрицы F_{ij}, D_i, H_i –постоянные, соответственно с размерностями $p_i \times q_j$, $n_i \times p_i$, $q_i \times n_i$. Матрица $F = \left(F_{ij}\right)_1^k$ полностью характеризует взаимосвязь отдельных подсистем.

Очевидно, уравнения подсистем (1.1) можно переписать в форме

$$\dot{x}_i = X_i(x_i,t) + \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j, \quad c_{ij} = D_i F_{ij} H_j, \quad c_{ii} = 0 \ \ (i=1,\dots,k) \tag{1.2}$$

Предположим, для каждого уравнения

$$\dot{x}_i = X_i(x_i,t) \ \ \left(X_i(0,t)=0\right) \ \ (i=1,\dots,k) \tag{1.3}$$

найдена функция Ляпунова

$$V_i(x_i,t) = \left(B_i(t) x_i, x_i\right) \ \ \left(B_i(t) = G_i^{-1*}(t) G_i^{-1}(t)\right) \tag{1.4}$$

удовлетворяющая условиям

$$\frac{1}{n_i\omega_0^2}\|x_i\|^2 \le V_i(x_i,t) \le \frac{n_i\omega_0^2}{m_i^2}\|x_i\|^2$$

$$\dot V_i(x_i,t) \le -c_i\|x_i\|^2, \quad (c_i > 0) \tag{1.5}$$

$$\|\operatorname{grad} V_i\| \le \frac{2n_i\omega_0^2}{m_i^2}\|x_i\|$$

Как известно [1], при вышеизложенных предположениях относительно функции $X_i(x_i,t)$, для существования функции (1.4), удовлетворяющей условиям (1.5), необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение подсистемы (1.3) было экспоненциально устойчиво, т. е. чтобы существовали две положительные постоянные β и Q такие, что для любого решения подсистемы (1.3) было справедливо при всех $t \ge t_0$ неравенство

$$\left\|x_i(t,x_i^0,t_0)\right\| \le Q\,e^{-\beta(t-t_0)} \tag{1.6}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для каждой подсистемы вида (1.3) условия (1.6), а следовательно, и (1.5), справедливы. Известно, что если для любого решения подсистемы (1.3) выполняется (1.6), то его тривиальное решение асимптотически K_n^m - устойчиво в целом, т. е. существует матрица $G(t) \in K_n^m$ такая, что для любого достаточно малого $\rho>0$ числа любое возмущение $x_i(t)=x_i(t,t_0,x_i^0)$, начальное значение которого удовлетворяет условию

$$\left(G_i^{-1}(t_0)x_i^0;\ G_i^{-1}(t_0)\,x_i^0\right) \le \rho^2 \tag{1.7}$$

для всех $t \ge t_0$ удовлетворяет условию

$$\left(G_i^{-1}(t)x_i(t);\ G_i^{-1}(t)\,x_i(t)\right) \le \rho^2 \tag{1.8}$$

а все возмущения удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to+\infty} x_i\left(t;t_0,x_i^0\right) = 0 \tag{1.9}$$

От (1.7) и (1.8) следует [2], что область допустимых возмущений $x_i(t)$ определяется определенно положительной эрмитовой формой (1.4), которая определена в некоторой области

$$\left\{t \in [t_0,\infty), \|x_i\| \in \Re_n^m\right\} \tag{1.10}$$

причем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \omega(t) \le \omega_0 < \infty; \quad \left|\det G_i(t)\right| \ge m_i > 0 \ \text{на} \ [t_0,\infty) \tag{1.11}$$

Полная производная по t формы (1.4) в силу подсистемы (1.2) будет

$$\dot V_i(x_i,t) = \left(\dot B_i(t)x_i, x_i\right) + \left(\operatorname{grad} V_i, X_i\right) + \left(\operatorname{grad} V_i, \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j\right) \tag{1.12}$$

Для первого слагаемого (1.12) в области (1.10) имеем

$$\lambda_{\min}^{(i)}(\dot B(t))\|x_i\|^2 \le \left(\dot B_i(t)x_i, x_i\right) \le \lambda_{\max}^{(i)}(\dot B(t))\|x_i\|^2 \tag{1.13}$$

где $\lambda_{\min}^{(i)}(\dot{B}(t))$ и $\lambda_{\max}^{(i)}(\dot{B}(t))$ -наименьшее и наибольшее характеристические числа матрицы $\dot{B}(t)$ в точке t.

Так как $\operatorname{grad} V_i = 2B_i(t)x_i$, то на $[t_0,\infty)$ имеем

$$\|\operatorname{grad} V_i\| \le 2\|B_i(t)\|\|x_i\| \le 2n_i\omega_0^2 m_i^{-2}\|x_i\| \tag{1.14}$$

Из существования непрерывного и ограниченного частного производного функции $X_i(x_i,t)$ по координатам вектора x_i следует выполнение условий Липшица для $X_i(x_i,t)$ в области (1.10):

$$\|X_i(x_i,t) - X_i(x_i',t)\| \le M_i\|x_i - x_i'\|$$

Откуда, с учетом $X_i(0,t)=0$, получаем $\|X_i(x_i,t)\| \le M_i\|x_i\|$.

Так как для координат векторов X_i и $\operatorname{grad} V_i$ имеем

$$\left(X_i(x,t)\right)_j \le \|X_i(x_i,t)\| \le M_i\|x_i\|, \quad \left(\frac{\partial V_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right)_j \le \|\operatorname{grad} V_i\| \le \frac{2n_i\omega_0^2}{m_i^2}\|x_i\|,$$

то в области (1.10) получаем

$$\left(\operatorname{grad} V_i, X_i\right) \le \frac{2n_i^2\omega_0^2}{m_i^2} M_i\|x_i\|^2$$

$$\left(\operatorname{grad} V_i, \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j\right) \le \frac{2n_i^2\omega_0^2}{m_i^2}\|c_{ij}\|\cdot\|x_i\|^2 \tag{1.15}$$

С учетом (1.13) и (1.15) из (1.12), в области (1.10), будем иметь

$$\dot{V}_i(x_i,t) \le -\left[c_i - \frac{2n_i^2\omega_0^2}{m_i^2}\|c_{ij}\|\right]\cdot\|x_i\|^2 \tag{1.16}$$

Откуда следует, что при

$$\|c_{ij}\| < \frac{m_i^2}{2n_i^2\omega_0^2}c_i \tag{1.17}$$

функция $\dot{V}_i$ будет определенно отрицательной в (1.10) и

$$\dot{V}_i(x_i,t) \le -c_i^*\cdot\|x_i\|^2 \quad \left(c_i^* = c_i - \frac{2n_i^2\omega_0^2}{m_i^2}\|c_{ij}\|\right) \tag{1.18}$$

Таким образом, получили, что для подсистемы (1.2) существует определенно положительная эрмитова форма (1.4), удовлетворяющая всем условиям теоремы об асимптотической K_Δ^{φ} - устойчивости [3].

В силу неравенства

$$\frac{1}{n\omega_0^2} \le \lambda_i(B(t)) \le \frac{n\omega_0^2}{m^2}$$

на $[t_0,\infty)$ выполняется первое неравенство из (1.5). Так как неравенства (1.5) выполняются во всех точках $\Re_{x_i}^{n}$, то подсистема (1.2) асимптотически

K_Δ^∞-устойчива в целом. Докажем, что при этом полная система (1.2) асимптотически K_Δ^∞ - устойчива в целом.

Составим следующую блочно-диагональную матрицу:

$$B(t) = \operatorname{diag}\{B_1(t),\dots,B_k(t)\} \quad \left(B(t) = G^{-1*}(t)G^{-1}(t) \right.$$

$$G(t) = \operatorname{diag}\{G_1(t),\dots,G_k(t)\}) \tag{1.19}$$

Она эрмитова и a) $|\det G(t)| \geq m_1 \dots m_k = m > 0$, б) столбцы $G^{(j)}(t)$ матрицы $G(t)$ имеют одинаковую эрмитовую норму: $\|G^{(j)}(t)\| = \omega(t)$, с) матрица $B(t)$ определенно положительная и $n^{-1} Sp B^{-1}(t) = \omega^2(t)$ на $[t_0, \infty)$.

Матрице $B(t)$ соответствует положительно-определенная эрмитова форма

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^{k} V_i(x_i, t) \tag{1.20}$$

Нетрудно убедиться, что форма (1.20) в (1.10) удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{n\omega_0^2}\|x\|^2 \leq V(x,t) \leq \frac{n\omega_0^2}{m^2}\|x\|^2$$

$$\dot V(x,t) \leq -c^* \|x\|^2 \tag{1.21}$$

$$\|\operatorname{grad} V\| \leq 2n\omega_0^2 m^{-2}\|x\|$$

Из существования формы (1.20) для полной системы (1.2), удовлетворяющей неравенствам (1.21), следует асимптотическая K_Δ^∞-устойчивость в целом его тривиального решения. Таким образом, доказана

Теорема. Если для подсистемы (1.3) существует определенно положительная эрмитова форма (1.4), удовлетворяющая в (1.10) условиям (1.5), а матрица c_{ij} удовлетворяет неравенству (1.17), то тривиальное решение полной системы (1.2) асимптотически K_Δ^∞ - устойчиво в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
2. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. // ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С.844-849.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. //Тр. Мос. Авиац. Ин-та. 1975. №339. С.5-11.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 22.03.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 62-50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Айрапетян В.В., Гукасян А.А., Манукян А.А.

Վ.Վ. Հայրապետյան, Ա.Ա. Ղուկասյան, Ա.Ա. Մանուկյան

Մանիպուլյատորի ոչ լրիվ ինֆորմացիայով օպտիմալ երաշխավորված ղեկավարման մի խնդրի մասին

Նկարագրված է ոչ լրիվ ինֆորմացիայով օպտիմալ երաշխավորված ղեկավարման մի ալգորիթմ: Ենթադրվում է, որ նպատակային կետը կարող է գտնվել ֆազային տարածության որևէ բազմության մեջ, որի մասին ինֆորմացիան՝ տվյալ բազմության կամ մեկ այլ բազմության մեջ կետի գտնվելը, ճշգրտվում է բազմության եզրի վրա, կամ մինչև եզր հասնելը: Նշված ալգորիթմով ուսումնասիրված է երկօղակ մանիպուլյատորի բռնիչի օպտիմալ երաշխավորված ղեկավարման խնդիրը: Ստացված են օպտիմալ ղեկավարման ֆունկցիաները նպատակային կետի էտապ առ էտապ ճշգրտման դեպքերում:

V.V. Hayrapetyan, A.A. Ghukasyan, A.A. Manukyan

One problem of optimal guaranteed control of the manipulator at the incomplete information

Описан один алгоритм оптимального гарантированного управления при неполной информации. Предполагается, что целевая точка находится в некотором множестве фазового пространства, информация о которой – нахождение точки в данном или в другом множестве–уточняется на границе множества или до достижения границы. С помощью описанного алгоритма исследована задача оптимального гарантированного управления схвата двухзвенного манипулятора. Получены оптимальные управляющие функции в случаях поэтапного уточнения местоположения целевой точки.

1. Описание алгоритма управления. Исследуется задача гарантированного управления механической системы при неопределенности положения целевой точки в начале процесса управления. Предполагается, что начальное состояние системы задано, а конечное состояние заранее неизвестно и уточняется в процессе движения [1].

Предполагается, что в начале движения системе управления известна не сама целевая точка, а некоторое выпуклое, закрытое, ограниченное множество, в котором она может находиться.

Поскольку положение целевой точки в пределах целевого множества произвольно, то необходимо использовать гарантированный метод управления. При таком подходе строится управление, называемое оптимально гарантирующим, рассчитывается соответствующий необходимый минимальный ресурс, который обеспечивает достижение целевой точки вне зависимости от ее положения в пределах целевого множества [2-3].

При достижении заданного множества или до этого получается дополнительная информация о целевой точке. Этой информацией является положение целевой точки в этом множестве или новое множество, где может находиться целевая точка.

Поскольку на границе множества получается дополнительная информация о целевой точке, то из начальной точки необходимо двигаться оптимально в смысле критерия качества в ту точку целевого множества, достижение которой требует наименьшей затраты. Если целевая точка не находится в заданном множестве, то точка получения информации берется как начальная точка и повторяется процесс построения управляющей функции и траектории движения для следующего целевого множества.

Уравнение движения системы в фазовом пространстве представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u} \in P \tag{1.1}$$

Качество переходного процесса оценивается следующим функционалом:

$$J = \int_{t_0}^{T} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x} - 2n$-мерный вектор состояния системы, P – множество допустимых управлений, $\mathbf{u} - n$-мерный вектор управления; t_0 -начальный момент времени, $\mathbf{x}_0$ -фиксированное начальное состояние, $F, \Phi \in C^2$.

Предполагается, что целевые множества не имеют взаимных пересечений и находятся в пределах множества достижимости, которое представляет собой выпуклое, закрытое, ограниченное множество в R^{2n}.

Предположим, что в начальный момент t_0 известно некоторое множество G_1, где может находиться целевая точка $(\mathbf{x}_1 \in G_1)$ и существует оптимальное управляющее воздействие, переводящее систему на множество G_1 за время $\bar{t}_1$. Ставится задача приведения системы из начальной точки $\mathbf{x}_0$ в произвольную точку $\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1$ с минимизацией функционала

$$J_0 = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.3}$$

Оптимальную фазовую траекторию и управляющую функцию представим в следующем виде:

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{z}}^1, t_0, \bar{t}_1, t\right) \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{z}}^1, t_0, \bar{t}_1, t\right) \tag{1.4}$$

а значение функционала (1.3) будет

$$\bar{J}_0 = \min_{\mathbf{u}\in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi\left(\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{z}}^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{z}}^1, t_0, \bar{t}_1, t\right)\right)dt \tag{1.5}$$

Поскольку система (1.1) автономна и $F, \Phi \in C^2$, при следующих условиях

(1) $\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xu} \\ \Phi_{ux} & \Phi_{uu} \end{bmatrix} > 0$

(2) выполняются какие-либо из следующих условий:

$(a)\ F_{xx} = F_{xu} = F_{uu} = 0$

$(b)\ \Phi_x = 0$

оптимальную управляющую функцию можно определить из принципа максимума [4,5]

Минимизируя (1.5) по $\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1$

$$J_1^* = \min_{\bar{\mathbf{z}}^1\in G_1} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi\left(\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{z}}^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{z}}^1, t_0, \bar{t}_1, t\right)\right)dt = \min_{\bar{\mathbf{z}}^1\in G_1}\min_{\mathbf{u}\in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.6}$$

получим точку из G_1, до которой можно дойти, используя наименьший ресурс. Минимизирующий вектор обозначим через $\mathbf{z}^1_*$ с компонентами $\left(z^1_{1*}, \dots, z^1_{2n*}\right)$

Подставляя $\mathbf{z}_*^1$ в (1.4), получим оптимальное управляющее воздействие, которое приводит систему (1.1) на множество G_1 с наименьшими ресурсами, и соответствующую фазовую траекторию

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), \qquad \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right) \tag{1.7}$$

Поскольку положение целевой точки в множестве G_1 произвольно, то в точке $\mathbf{z}_*^1$ система управления должна иметь ресурс, который позволил бы дойти до любой точки $\mathbf{z}_1$ из множества G_1, начиная движение из точки $\mathbf{z}_*^1$. Для системы (1.1) ставится задача оптимального приведения из точки $\mathbf{z}_*^1$ в точку $\mathbf{z}_1$ с минимизацией функционала

$$J_0^{\,1} = \int_{t_1}^{t_1+\theta_1} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt \tag{1.8}$$

где θ_1 - время пребывания на множестве G_1. При задаче быстродействия θ_1 будет свободным.

Решение задачи представим в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \qquad \bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right) \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и максимизируя по $\mathbf{z}_1$

$$\bar{J}_0^{\,1} = \max_{\mathbf{z}_1 \in G_1} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi\left(\bar{\mathbf{x}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right)\right)dt \tag{1.10}$$

получим тот наименьший ресурс, который необходим для решения задачи оптимального гарантированного управления системы (1.1) в случае, если целевая точка находится на множестве G_1. Соответствующая управляющая функция и траектория, переводящая систему из точки $\mathbf{z}_*^1$ в целевую точку $\mathbf{x}_1$, получаются подставлением координаты $\mathbf{x}_1$ в (1.9) (фиг 1)

$$\bar{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \qquad \bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right) \tag{1.11}$$

Таким образом, начиная движение из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0 с управляющей функцией

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), & t \in \left[t_0, \bar{t}_1\right] \\ \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), & t \in \left[\bar{t}_1, \bar{t}_1 + \theta_1\right] \end{cases} \tag{1.12}$$

можно гарантированно дойти до целевой точки $\mathbf{x}_1$ при ее нахождении на множестве G_1. Значение функционала не будет больше $J_0^{\,*} + \bar{J}_0^{\,1}$ при любом положении точки $\mathbf{x}_1$.

Если на траектории $\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right)$ есть точка $\hat{\mathbf{x}}_1$, в которой получается информация о целевой точке $\mathbf{x}_1$ в пределах множества G_1, то с помощью принципа максимума строится оптимальная траектория $\bar{\mathbf{x}}^0\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \hat{t}_1, \theta_1, t\right)$ и управляющая функция $\overline{\mathbf{u}}^{0}\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right)$, переводящая систему из точки $\hat{\mathbf{x}}_1$ в точку $\mathbf{x}_1$ и дающая минимум функционалу (1.2) на интервале $\left[\bar{t}_1, \bar{t}_1 + \theta_1\right]$.

$$\hat{J}_0^{\,1} = \min_{\mathbf{u}} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi\left(\overline{\mathbf{x}}^{0}\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \overline{\mathbf{u}}^{0}\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right)\right)dt \quad (1.13)$$

где $\bar{t}_1$ –время получения информации в точке $\hat{\mathbf{x}}_1$. Очевидно, что в этом случае

$$\int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi\left(\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right)\right)dt + \hat{J}_0^1 \leq J_0^* + \overline{J}_0^1 \quad (1.14)$$

Если целевая точка не находится на множестве G_1, в точке $\mathbf{z}_*^1$ или $\hat{\mathbf{x}}_1$ задается новое целевое множество G_2. В качестве начальной точки $\mathbf{x}_0$ берется $\mathbf{z}_*^1$ или $\hat{\mathbf{x}}_1$ и строятся соответствующие управляющая функция и траектория для G_2, повторяя рассуждения предыдущего этапа.

Допустим, система находится в точке $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$, которая находится или на границе множества G_{m-1}, или на траектории, по которой система приближается к этому множеству. В этой точке получается информация о множестве G_m, где может находиться целевая точка $\mathbf{x}_1$ и существует оптимальное управляющее воздействие, переводящее систему на множество G_m за время $\bar{t}_m$. Ставится задача приведения системы (1.1) из точки $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$ в произвольную точку $\overline{\mathbf{z}}^m \in G_m$ с минимизацией функционала

$$J_{m-1} = \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \quad (1.15)$$

где $\hat{t}_{m-1}$ –время получения информации.

Оптимальную управляющую функцию и фазовую траекторию представим в следующем виде:

$$\mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right) \quad \mathbf{u}^{m-1} = \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right) \quad (1.16)$$

а значение функционала будет

$$\overline{J}_{m-1} = \min_{\mathbf{u}\in P} \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt = \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi\left(\mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right)\right)dt$$

Минимизируя $\overline{J}_{m-1}$ по $\overline{\mathbf{z}}^m \in G_m$

$$J_{m-1}^* = \min_{\overline{\mathbf{z}}^m\in G_m} \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi\left(\mathbf{x}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \mathbf{u}^0\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right)\right)dt = \min_{\overline{\mathbf{z}}^m\in G_m} \min_{\mathbf{u}\in P} \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt$$

получим точку из G_m, до которой можно дойти, используя наименьший ресурс.

Оптимальное управляющее воздействие, приводящее систему на множество G_m с наименьшими ресурсами, и соответствующая фазовая траектория будут (фиг.1)

$$\mathbf{u}^{m-1} = \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \qquad \mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right) \quad (1.17)$$

где $\mathbf{z}_*^m$ –минимизирующая точка из G_m.

Обозначим через $\mathbf{z}_m$ произвольную точку из множества G_m. Требуется найти управляющую функцию, которая переводит систему из точки $\mathbf{z}_*^m$ в точку $\mathbf{z}_m$, минимизируя функционал

$$J_{m-1}^m = \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.18}$$

где θ_m –время пребывания на множестве G_m. При задаче быстродействия θ_m свободна.

Решая задачу (1.1), (1.18) с начальной точкой $\mathbf{z}_*^m$ и конечной точкой $\mathbf{z}_m$ и максимизируя по $\mathbf{z}_m$

$$\bar{J}_{m-1}^m = \max_{\mathbf{z}_m\in G_m} \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi\left(\mathbf{x}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m,\mathbf{z}_m,\bar{t}_m,\theta_m,t\right),\mathbf{u}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m,\mathbf{z}_m,\bar{t}_m,\theta_m,t\right)\right)dt =$$

$$= \max_{\mathbf{z}_m\in G_m}\min_{\mathbf{u}\in P} \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt$$

получим необходимый наименьший ресурс для решения задачи оптимального гарантированного управления для системы (1.1), если целевая точка находится в множестве G_m. Соответствующая управляющая функция и траектория, переводящие систему из точки $\mathbf{z}_*^m$ в целевую точку $\mathbf{x}_1$, будут

$$\bar{\mathbf{u}}^{m-1} = \bar{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m,\mathbf{x}_1,\bar{t}_m,\theta_m,t\right), \qquad \bar{\mathbf{x}}^{m-1} = \bar{\mathbf{x}}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m,\mathbf{x}_1,\bar{t}_m,\theta_m,t\right) \tag{1.19}$$

Если информация о целевой точке получается до достижения границы G_m, в точке $\hat{\mathbf{x}}_m$ траектории $\mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1},\mathbf{z}_*^m,\bar{t}_{m-1},\bar{t}_m,t\right)$, то для системы (1.1) строится оптимальная траектория и управляющая функция

$$\bar{\mathbf{x}}^{m-1} = \bar{\mathbf{x}}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_m,\mathbf{x}_1,\hat{t}_m,\theta_m,t\right), \qquad \bar{\mathbf{u}}^{m-1} = \bar{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_m,\mathbf{x}_1,\bar{t}_m,\theta_m,t\right) \tag{1.20}$$

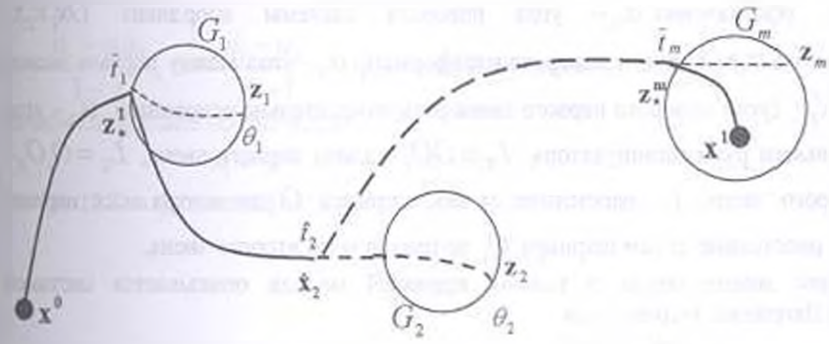
переводящие систему из точки $\hat{\mathbf{x}}_m$ в целевую точку $\mathbf{x}_1$ и минимизирующие функционал (1.2) на интервале $\left[\hat{t}_m,\bar{t}_m+\theta_m\right]$

$$\hat{J}_{m-1}^m = \min_{\mathbf{u}} \int_{\hat{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.21}$$

где $\hat{t}_m$ –время получения информации в точке $\hat{\mathbf{x}}_m$. В этом случае

$$\int_{\bar{t}_{m-1}}^{\hat{t}_m} \Phi\left(\mathbf{x}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1},\mathbf{z}_*^m,\bar{t}_{m-1},\bar{t}_m,t\right),\mathbf{u}^*\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1},\mathbf{z}_*^m,\bar{t}_{m-1},\bar{t}_m,t\right)\right)dt + \hat{J}_{m-1}^m \le J_{m-1}^* + \bar{J}_{m-1}^m \tag{1.22}$$

Таким образом, начиная движение из точки $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$ в момент времени $\hat{t}_{m-1}$ с



Фиг 1

ресурсами $J_{m-1}^{*} + \overline{J}_{m-1}^{m}$, с управляющей функцией

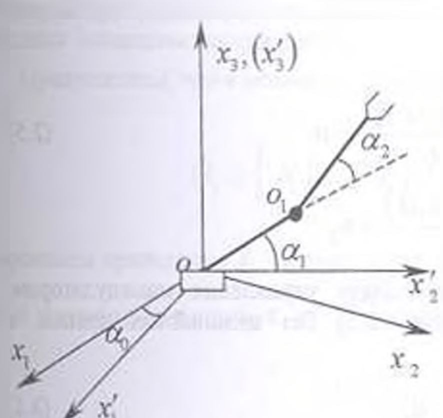
$$\mathbf{u}_{m-1} = \begin{cases} \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), & t \in \left[\hat{t}_{m-1}, \bar{t}_m\right] \\ \overline{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m, \mathbf{x}_1, \bar{t}_m, \theta_m, t\right), & t \in \left[\bar{t}_m, \bar{t}_m + \theta_m\right] \end{cases} \tag{1.23}$$

или

$$\mathbf{u}_{m-1} = \begin{cases} \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), & t \in \left[\hat{t}_{m-1}, \hat{t}_m\right] \\ \overline{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_m, \mathbf{x}_1, \hat{t}_m, \theta_m, t\right), & t \in \left[\hat{t}_m, \bar{t}_m + \theta_m\right] \end{cases} \tag{1.24}$$

можно гарантированно дойти до целевой точки $\mathbf{x}_1$ при ее нахождении во множестве G_m.

2. Расчетная модель двухзвенного манипулятора и уравнения движения. Рассматривается двухзвенный антропоморфный манипулятор типичной конструкции [6], состоящий из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг. 2). Предполагается, что рука представляет собой два абсолютно твердых тела (звена), соединенных шарниром O_1. Первое звено посредством шарнира O связано с платформой, а на конце второго звена расположен схват с грузом. Шарниры O, O_1 идеальные, цилиндрические. Управление движением манипулятора осуществляется при помощи электромеханических приводов, каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением и редуктор.



Фиг. 2

Для описания движения манипулятора введем две прямоугольные системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ с общим началом O и осью вращения платформы Ox_3.

Система координат $Ox_1x_2x_3$ неподвижная, $Ox_1'x_2'x_3'$ жестко связана с платформой, координатная плоскость $Ox_2'x_3'$ совпадает с плоскостью руки манипулятора.

Введем обозначения α_0 – угол поворота системы координат $Ox_1'x_2'x_3'$ относительно $Ox_1x_2x_3$ (угол поворота платформы), α_1 – угол между первым звеном и осью Ox_2' (угол поворота первого звена руки относительно основания), α_2 – угол между звеньями руки манипулятора, $L_1 = OO_1$ – длина первого звена, $L_2 = O_1O_2$ – длина второго звена, l_1 – расстояние от оси шарнира O до центра масс первого звена, l_2 – расстояние от оси шарнира O_1 до центра масс второго звена.

Движение манипулятора в рамках принятой модели описывается системой уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} + Q_i \qquad (i = 0,1,2) \tag{2.1}$$

Уравнения движений манипулятора получатся в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_0\ddot{\alpha}_0 + f_0(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha}) &= Q_0 \\ A_{11}\ddot{\alpha}_1 + A_{12}\ddot{\alpha}_2 + f_1(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha}) &= Q_1 \\ A_{21}\ddot{\alpha}_1 + A_{22}\ddot{\alpha}_2 + f_2(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha}) &= Q_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

С целью дальнейшего упрощения предполагаем, что вращение манипулятора в целом относительно оси Ox_3 происходит независимо от остальных движений. При этом уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} A_{00}\ddot{\alpha}_0 &= Q_0 \\ A_{11}\ddot{\alpha}_1 + A_{12}\ddot{\alpha}_2 + f_{11}(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha}) &= Q_1 \\ A_{21}\ddot{\alpha}_1 + A_{22}\ddot{\alpha}_2 + f_{22}(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha}) &= Q_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где A_{ij} $(i, j = 0,1,2)$ –постоянные коэффициенты, $f_{ii}(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha})$ $(i = 1,2)$ –нелинейные члены соответствующих уравнений [6].

После перехода к безразмерным переменным

$$t' = \frac{t}{T_*}; \quad u_i' = \frac{n_i u_i T_*^2}{A_{ii}}; \quad v_i' = \frac{m_i v_i T_*^2}{A_{ii}} \quad (i = 0,1,2) \tag{2.4}$$

уравнения (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_0 &= u_0 \\ \ddot{\alpha}_1 + \frac{A_{12}}{A_{11}}\ddot{\alpha}_2 + \frac{f_{11}(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha})}{A_{11}} &= u_1 \\ \ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 + \frac{f_{22}(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha})}{A_{22}} &= u_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Применение алгоритма. Рассмотрим задачу управления манипулятором, движение которого описывается уравнениями (2.5) без нелинейных членов, а $\alpha_0 = \text{const}$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + A\ddot{\alpha}_2 &= u_1 \\ \ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 &= u_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

уравнение (3.1) напишем в следующем виде:

$$\ddot{\alpha}_1 = u$$
$$\ddot{\alpha}_2 = v \tag{3.2}$$

где $u = \dfrac{u_1 - Au_2}{1-A}$, $v = \dfrac{u_1 - u_2}{A-1}$ – управляющие функции, $A = A_{12} / A_{11}$

Введем следующие обозначения:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \dot{\alpha}_1,\ x_3 = \alpha_2,\ x_4 = \dot{\alpha}_2$$

Уравнения (3.2) в фазовом пространстве будут

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = v \end{cases} \tag{3.3}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.4}$$

где $\{u, v\}$–управляющие функции, $\mathbf{x}$ –фазовый вектор, $\mathbf{x}_0$–начальное состояние. t_0 -начальный момент времени.

Функционал, характеризующий качество переходного процесса, представим в виде

$$J = \int_{t_0}^{T} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.5}$$

Требуется оптимально гарантированно привести схват манипулятора из заданной начальной точки $\mathbf{x}_0$ в целевую точку $\mathbf{x}^T$.

Допустим, что целевые множества имеют следующий вид:

$$G_i = \left\{ b_1^i \left(x_1 + a_1^i\right)^2 + b_3^i \left(x_3 + a_3^i\right)^2 \le 1 \right\} \tag{3.6}$$

где b_1, b_3, a_1, a_3–постоянные величины и находятся в рабочем пространстве манипулятора. Целевые множества не имеют взаимных пересечений и находятся в пределах множества достижимости.

Предположим, что в момент t_0 известно множество

$$G_1 = \left\{ b_1^1 \left(x_1 + a_1^1\right)^2 + b_3^1 \left(x_3 + a_3^1\right)^2 \le 1 \right\} \tag{3.7}$$

с временем приведения $\bar{t}_1$. Ставится задача приведения системы из начальной точки $\mathbf{x}_0$ в произвольную точку $\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1$ с минимизацией функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.8}$$

Применяя принцип максимума к системе (3.3), получим фазовую траекторию и оптимальную управляющую функцию, обеспечивающие минимум функционалу (3.8)

$$\begin{cases} u = c_1^1 t + c_2^1 \\ v = c_3^1 t + c_4^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1^1 \dfrac{t^3}{6} + c_2^1 \dfrac{t^2}{2} + c_5^1 t + c_6^1, \qquad x_3 = c_3^1 \dfrac{t^3}{6} + c_4^1 \dfrac{t^2}{2} + c_7^1 t + c_8^1 \\ x_2 = c_1^1 \dfrac{t^2}{2} + c_2^1 t + c_5^1, \qquad x_4 = c_3^1 \dfrac{t^2}{2} + c_4^1 t + c_7^1 \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$c_1^1 = \frac{6\left(-2x_{01} - \bar{t}_1 x_{02} + 2\bar{z}_1^1 - \bar{t}_1 \bar{z}_2^1 + t_0\left(x_{02} + \bar{z}_2^1\right)\right)}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}$$

$$c_2^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-2t_0^{\,2}\left(x_{02} + 2\bar{z}_2^1\right) + 2t_0\left(3x_{01} - 3\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_2^1 - x_{02}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + 2\bar{t}_1\left(3x_{01} - 3\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_2^1 + 2x_{02}\right)\right)\right)$$

$$c_3^1 = \frac{6\left(-2x_{03} - \bar{t}_1 x_{04} + 2\bar{z}_3^1 - \bar{t}_1 \bar{z}_4^1 + t_0\left(x_{04} + \bar{z}_4^1\right)\right)}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}$$

$$c_4^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-2t_0^{\,2}\left(x_{04} + 2\bar{z}_4^1\right) + 2t_0\left(3x_{03} - 3\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_4^1 - x_{04}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + 2\bar{t}_1\left(3x_{03} - 3\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_4^1 + 2x_{04}\right)\right)\right)$$

$$c_5^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{02} + t_0^{\,3} \bar{z}_2^1 + t_0^{\,2} \bar{t}_1\left(2x_{02} + \bar{z}_2^1\right) - t_0 \bar{t}_1\left(6x_{01} - 6\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(x_{02} + 2\bar{z}_2^1\right)\right)\right) \tag{3.10}$$

$$c_6^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{01} + t_0 \bar{t}_1^{\,2}\left(3x_{01} + \bar{t}_1 x_{02}\right) + t_0^{\,3}\left(\bar{z}_1^1 - \bar{t}_1 \bar{z}_2^1\right) + t_0^{\,2} \bar{t}_1\left(-3\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_2^1 - x_{02}\right)\right)\right)$$

$$c_7^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{04} + t_0^{\,3} \bar{z}_4^1 + t_0^{\,2} \bar{t}_1\left(2x_{04} + \bar{z}_4^1\right) - t_0 \bar{t}_1\left(6x_{03} - 6\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(x_{04} + 2\bar{z}_4^1\right)\right)\right)$$

$$c_8^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{03} + t_0 \bar{t}_1^{\,2}\left(3x_{03} + \bar{t}_1 x_{04}\right) + t_0^{\,3}\left(\bar{z}_3^1 - \bar{t}_1 \bar{z}_4^1\right) + t_0^{\,2} \bar{t}_1\left(-3\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_4^1 - x_{04}\right)\right)\right)$$

$$\bar{J}_0 = \min_{u \in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left(u^2 + v^2\right) dt = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left[\left(c_1^1 t + c_2^1\right)^2 + \left(c_3^1 t + c_4^1\right)^2\right] dt \tag{3.11}$$

Минимизируя (3.11) по $\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1$

$$J_0^* = \min_{\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left[\left(c_1^1 t + c_2^1\right)^2 + \left(c_3^1 t + c_4^1\right)^2\right] dt = \min_{\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1} \min_{u \in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.12}$$

получим точку из G_1, имеющую кратчайшее расстояние от точки $\mathbf{x}_0$ в смысле функционала (3.8). Минимизирующий вектор обозначим через $\mathbf{z}_*^1$ с компонентами

$\left(z_{1*}^1, z_{2*}^1, z_{3*}^1, z_{4*}^1\right)$.

$$z_{1*}^1 = \frac{\lambda a_1^1 b_1^1 (t_0 - t_1)^3 + 3\left(x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{02}\right)}{3 + \lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

$$z_{2*}^1 = \frac{-3\lambda a_1^1 b_1^1 (t_0 - t_1)^2 + 6x_{02} + \lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^2 \left(-3x_{01} + \left(t_0 - \bar{t}_1\right)x_{02}\right)}{6 + 2\lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

$$z_{3*}^1 = \frac{\lambda a_3^1 b_3^1 (t_0 - t_1)^3 + 3\left(x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{04}\right)}{3 + \lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

$$z_{4*}^1 = \frac{-3\lambda a_3^1 b_3^1 (t_0 - t_1)^2 + 6x_{04} + \lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^2 \left(-3x_{03} + \left(t_0 - \bar{t}_1\right)x_{04}\right)}{6 + 2\lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

где λ определяется из следующего уравнения:

$$\frac{9b_1^1\left(a_1^1 + x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{02}\right)^2}{\left(3 + \lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3\right)^2} + \frac{9b_3^1\left(a_3^1 + x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{04}\right)^2}{\left(3 + \lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3\right)^2} = 1 \tag{3.13}$$

Когда $b_1^1 = b_3^1 = b^1$

$$\lambda = \frac{3\left(\sqrt{b^1}\sqrt{\begin{aligned}&a_1^{12} + a_3^{12} + 2a_1^1\left(x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{02}\right) + 2a_3^1\left(x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{04}\right) +\\ &+ \left(x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{02}\right)^2 + \left(x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right)x_{04}\right)^2\end{aligned}} + 1\right)}{b^1\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3} \tag{3.14}$$

Подставляя $\mathbf{z}_*^1$ в (3.9), получим оптимальное управляющее воздействие, приводящее систему (3.3) на множество G_1 с наименьшими ресурсами, и соответствующую фазовую траекторию.

Поскольку положение целевой точки на множестве G_1 произвольно, то в точке $\mathbf{z}_*^1$ система управления должна иметь столько ресурса, который позволил бы дойти до любой точки $\mathbf{z}_1$ из множества G_1, начиная движение из точки $\mathbf{z}_*^1$. Для системы (3.3) ставится следующая задача оптимального управления. Требуется найти управляющую функцию $\mathbf{u}_0$, которая переводит систему из точки $\mathbf{z}_*^1$ в точку $\mathbf{z}_1$, минимизируя функционал

$$J_0^1 = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1 + \theta_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.15}$$

где θ_1 -время пребывания на множестве G_1.

Решая задачу (3.3), (3.15) по принципу максимума, найдем соответствующую управляющую функцию и траекторию, которые определяются из уравнений (3.9), где

$$\mathbf{x}_0 \to \mathbf{z}_*^1,\ \bar{\mathbf{z}}^1 \to \mathbf{z}_1,\ t_0 \to \bar{t}_1,\ \bar{t}_1 \to \left(\bar{t}_1 + \theta_1\right)$$

Подставляя эти уравнения в (3.15) и максимизируя по $\mathbf{z}_1$

$$\bar{J}_0^{\,1} = \max_{z_1 \in G_1} \min_{u} \int_{t_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.16}$$

получим тот наименьший ресурс, который необходим для решения задачи оптимального гарантированного управления системы (3.3), начиная движение из точки $\mathbf{z}_*^1$ в случае, если целевая точка находится на множестве G_1. Соответствующая управляющая функция и траектория, переводящие систему из точки $\mathbf{z}_*^1$ в целевую точку $\mathbf{x}^T$, получаются подставлением координаты $\mathbf{z}_1 \to \mathbf{x}^T$.

Таким образом, начиная движение из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0 с ресурсами $J_0^* + \bar{J}_0^{\,1}$, с соответствующими управляющими функциями можно гарантированно дойти до целевой точки $\mathbf{x}^T$ при ее нахождении во множестве G_1.

Если целевая точка не находится в множестве G_1, в точке $\mathbf{z}_*^1$ задается новое целевое множество G_2:

$$G_2 = \left\{ b_2^2 x_1^{\,2} + b_3^2 x_3^{\,2} \le 1 \right\} \tag{3.17}$$

в качестве начальной точки берется $\mathbf{z}_*^1$ и повторяются предыдущие рассуждения и вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420с.
2. Меликян А.А Минимаксная задача управления при неполной информации о положении целевой точки. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. №2. С.111-118.
3. Гукасян А.А., Манукян А.А. О гарантированном управлении материальной точки при неполной информации. // Уч. записки ЕГУ. 2002. №1. С.39-48.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.
5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука. 1989. 363с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 29.10.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 624.012, 539.24

ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ АРМАТУРЫ И БЕТОНА ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Григорян Д. Г., Ширинян Р. А.

Դ. Հ. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Շիրինյան

Ամրանի և բետոնի համատեղ աշխատանքի ուսումնասիրումը բևեռաօպտիկական մեթոդով

Դիտարկվում է ամրանի և բետոնի առաձգականության մոդուլների ազդեցությունը նրանց համատեղ աշխատանքի վրա: Այդ նպատակով ամրանի և բետոնի աշխատանքը մոդելավորվել և ուսումնասիրվել է բևեռաօպտիկական մեթոդով: Բերված են տարբեր մոդելներում իզոխրոմների նկարների օրինակներ, ինչպես նաև կոմպենսացման մեթոդով որոշված՝ կոնտակտի մակերևույթում գործող շոշափող լարումների բաշխվածությունները՝ ըստ ներդրակի ամրակցման երկարության:

D. H. Grigoryan, R. A. Shirinyan

Researching of the combined action of the reinforcing steel and concrete by photo-elasticity method

Рассматривается влияние модулей упругости арматуры и бетона на их совместную работу. С этой целью работа арматуры и бетона была смоделирована и исследована поляризационно-оптическим методом. Приведены примеры картинок изохром на разных моделях а также распределение действующих касательных напряжений на поверхности контакта по длине заделки вкладышей, определенное методом компенсации.

В основе применения железобетона в конструкциях лежит совместная работа бетона и арматуры, которая в действующих нормах [1] оценивается длиной зоны анкеровки обычной арматуры, равной:

$$\ell_{ан} = \left(\omega_{ан} \cdot \frac{R_s}{R_b} + \Delta\lambda_{ан} \right) \cdot d \qquad (1)$$

где R_s – расчетное сопротивление арматуры для предельных состояний первой группы, R_b – расчетное сопротивление бетона осевому сжатию для предельных состояний первой группы, d – номинальный диаметр арматуры, $\omega_{ан}$ и $\lambda_{ан}$ – коэффициенты.

Длина зоны передачи напряжений для напрягаемой арматуры определяется по аналогичной формуле. В обоих случаях длина зоны анкеровки зависит от прочности бетона R_b. Достаточно ли этой характеристики для того, чтобы описать влияние свойств бетона на сцепление? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Для плотных бетонов естественного твердения при хорошо подобранном составе, обеспечивающем нормальную структуру и небольшую усадку, параметры сцепления удается связать с прочностью бетона. Но если эти условия не выполнены, картина изменяется.

Так, при изучении влияния пропаривания бетона на сцепление с арматурой, было обнаружено, что при равной кубиковой прочности, бетон, подвергшийся пропариванию, имеет лучшее сцепление, чем бетон нормального твердения [2].

При горизонтальном положении арматуры, когда слой бетона под ней превышает 8—12см, начинает заметно сказываться явление, которое условно называют "осадкой" бетона. Дело в том, что в результате явлений, происходящих в бетоне, под арматурой возникает слой бетона с недостаточной плотностью, а иногда даже зазор [3]. Итак, мы вновь убеждаемся в недостаточности кубиковой прочности, как единственной характеристики свойств бетона для определения ℓ_{an}.

По формуле (1) прочность анкеровки прямо пропорциональна кубиковой прочности бетона, а повышение прочности бетона приводит к увеличению усадки, что, в основном, негативно влияет на сцепление арматуры с бетоном, в результате, когда мы увеличиваем прочность бетона, длина зоны анкеровки может не уменьшаться, а наоборот, увеличиваться [4].

Вышеуказанное обстоятельство относится как к тяжелым бетонам, так и к легким. А для легких бетонов доказательства недостаточности кубиковой прочности как единственной характеристики сцепления бетона с арматуруй более очевидны. Так как заполнители для их изготовления более разнообразны, т. е. в зависимости от заданных условий бетоны одной и той же прочности могут существенно отличаться по составу и иметь в связи с этим различные свойства. Если принять, что при одинаковых условиях твердения и неизменном составе прочность тяжелого бетона возрастает практически в той же степени, что и прочность анкеровки, то для бетонов на пористых заполнителях подобная связь между прочностью бетона и его анкерующей способностью не характерна. Это можно объяснить следующим образом: в легких бетонах в отличие от тяжелых, заполнители, имея относительно малую прочность, различным образом влияют на кубиковую прочность бетона и прочность анкеровки.

В действующих в РА пособиях по проектированию обычных [5] и преднапряженных [6] железобетонных конструкций длина ℓ_{an} для всех видов легких бетонов на естественных пористых заполнителях при одинаковой их прочности с тяжелым бетоном должна быть увеличена на 20%. Однако, теоретические и экспериментальные исследования [7], [8] показывают, что при описании длины зоны анкеровки кроме прочности бетона и величины, участвующих в формуле (1), должно учитываться и значение модуля упругости бетона E_b, тем более, что в конструктивных легких бетонах [5], [6] на местных заполнителях РА, при одинаковой прочности, модули упругости бетонов могут отличаться до 25% в зависимости от их плотности и вида заполнителя.

В табл. 1 приведены значения модулей упругости тяжелых и легких бетонов в зависимости от их класса по прочности на сжатие.

Таблица 1

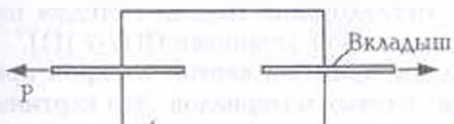
Класс бетона	Модуль упругости бетона		$E_т/E_л$
	тяжелого $E_т x10^{-3}$, МПа	легкого $E_л x10^{-3}$, МПа	
B10	18.0	14.0	1.28
B20	27.0	17.0	1.59
B25	30.0	18.5	1.62

Как видно из табл. 1, при одинаковой прочности, модули упругости тяжелых и легких бетонов в значительной мере различаются друг от друга. Естественно, что при таких условиях принятие единого коэффициента в формуле (1) неправильно.

По результатам опытов, проведенных в этом направлении [9], после достижения возраста, близкого к 28-дневному, прочность бетона увеличивается более медленно, чем уменьшается длина зоны анкеровки. Авторы объясняют это явление тем, что наличие пористых гранул заполнителей, ограничивающих существенным образом кубиковую прочность, необязательно должно ограничивать анкерующую способность бетона, так как гранулы пористого заполнителя оказывают непосредственное влияние на кубиковую прочность, являясь в момент достижения предельных деформаций и образования микротрещин очагами концентрации местных напряжений, а на прочность анкеровки пористый заполнитель оказывает косвенное влияние, поскольку он отделен от арматуры слоем цементно-песчаного раствора.

Учитывая данное обстоятельство, мы попытались выяснить влияние отношения модулей упругости арматуры и бетона на распределение касательных напряжений, образующихся на поверхности контакта арматуры и бетона. Учитывая сложное распределение напряжений и деформаций на поверхности контакта, они определялись поляризационно-оптическим методом, который обладает преимуществом по сравнению с механическими и оптическими тензометрами, так как он выявляет общую картину распределения напряжений, тогда как тензометры дают сведения лишь для отдельных точек. Эта особенность метода позволяет сравнительно легко исследовать поля напряжений для всех точек [10].

Для исследования совместной работы арматуры и бетона поляризационно-оптическим методом, в изготовляемых моделях в качестве оптически активного материала были выбраны пластины толщиной 5.5 мм, изготовленные из эпоксидной смолы марки ЭД-16 (фиг 1), модуль упругости которой 3100 МПа.



Фиг. 1.

После изготовления вкладышей и пластин они приклеивались друг к другу клеем из эпоксидной смолы марки ЭД-20, затем образцы выдерживались трое суток для затвердения клея.

Так как в совместной работе арматуры и бетона нас интересовало влияние отношения модулей этих материалов на прочность анкеровки арматуры, мы в качестве вкладышей использовали стержни с разными механическими свойствами, при этом было необходимо, чтобы отношение модулей стержней и эпоксидного компаунда варьировалось в достаточно больших пределах. Для изготовления вкладышей были использованы следующие материалы: сталь, дюралюминий, стекловолокнистые композиционные материалы и дерево, вырезанные по направлении волокон. Из стекловолокнистых композиционных материалов использовались стекловолокнит АГ-4С и стеклотекстолит марки СТЭФ. В качестве материала для деревянного стержня был использован дуб.

В табл. 2 приведены значения модулей упругости использованных материалов, определенные нами по стандартной методике и их отношения к модулю упругости эпоксидного компаунда. Из табл. 2 видно, что отношение модулей упругости материалов для вкладышей к модулю упругости эпоксидного компаунда изменяется в больших пределах. Соотношение модулей упругости арматуры и тяжелого бетона естественного твердения изменяется в пределах 5...10, а для легких бетонов – в пределах 9...13. То есть, к совместной работе арматуры и бетона более близка работа моделей с вкладышами из стеклотекстолита марки СТЭФ и стекловолокнита АГ-4С.

Таблица 2

	Материалы вкладышей	Модуль упругости, МПа	Отношения модулей упругости вкладышей и эпокс. компаунда
1	Сталь	210000	67.7
2	Дюралюминий Д16	70000	22.6
3	СТЭФ	27300	8.8
4	АГ-4С	22500	7.3
5	Дуб	12650	4.1

Исследования напряжений поляризационно-оптическим методом были проведены в лаборатории фотоупругости Института механики НАН РА. Определение напряжений в моделях было выполнено двумя методами: методом полос и методом компенсации. При определении напряжений методом полос с помощью интерференционных картин определяются оптическая разность хода лучей и направления главных напряжений по всему полю модели. Исследование модели методом полос проведено на поляризационно-проекционной установке ППУ-7 [11].

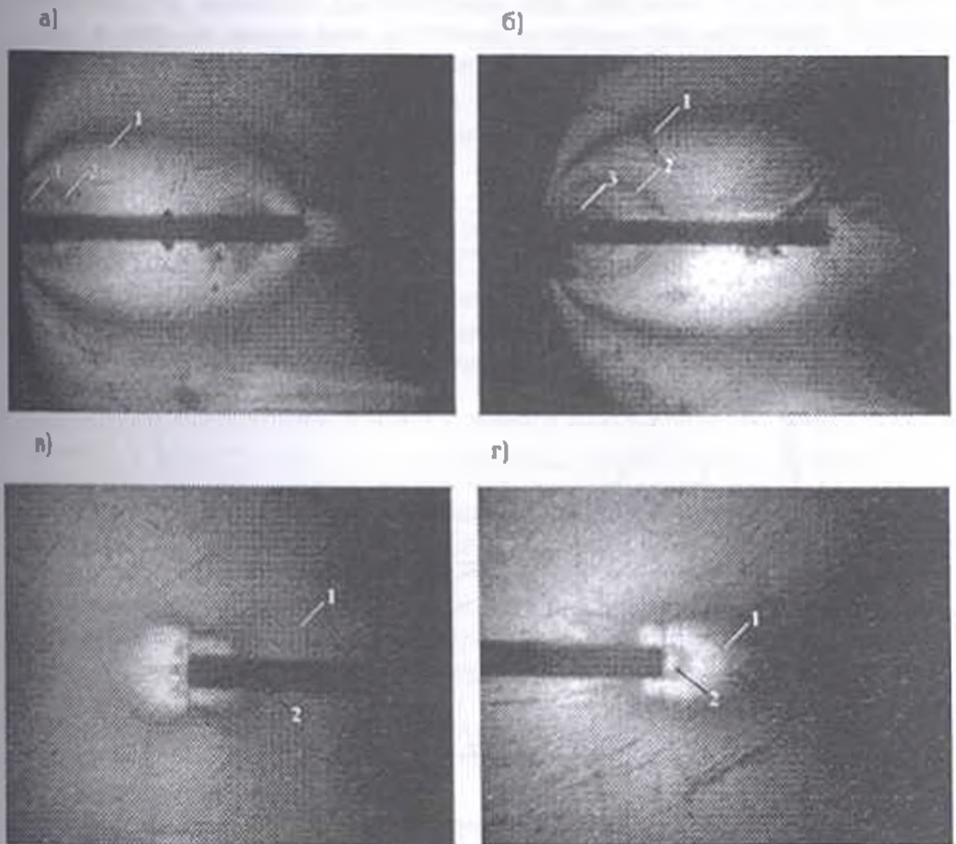
На фиг. 2 приведены примеры картин изохром при использовании в моделях вкладышей из разных материалов. Эти картины подтверждают то мнение, что при больших значениях отношений модулей упругости вкладышей к модулю упругости пластины (67.7 и 22.6), в основном, работают внутренние концы вкладышей, т. е. усилия с вкладышей на пластину передаются главным образом через окончания, а в случаях, когда материалы, из которых изготовлены вкладыши, имеют более низкий модуль упругости, в частности дерево, АГ-4С или, СТЭФ, при которых отношение их модулей упругости к модулю упругости эпоксида составляет соответственно 4.1, 7.3 и 8.8, касательные напряжения концентрируются вблизи свободной поверхности, что характерно для совместной работы арматуры с бетоном.

Исследование распределения контактных касательных напряжений проведено методом компенсации на координатно-синхронном поляриметре КСП-5 [11].

Касательные напряжения определялись по формуле

$$\tau_{xy} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin(2\varphi) \qquad (2)$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжения в наблюдаемой точке модели ($\sigma_1 > \sigma_2$).
φ — угол между осью X и главным напряжением σ_1.



Фиг. 2 Картины изохром
а) АГ-4С, б)дерево, в)сталь, г)дюралюминий
(Цифрами указаны порядок полос)

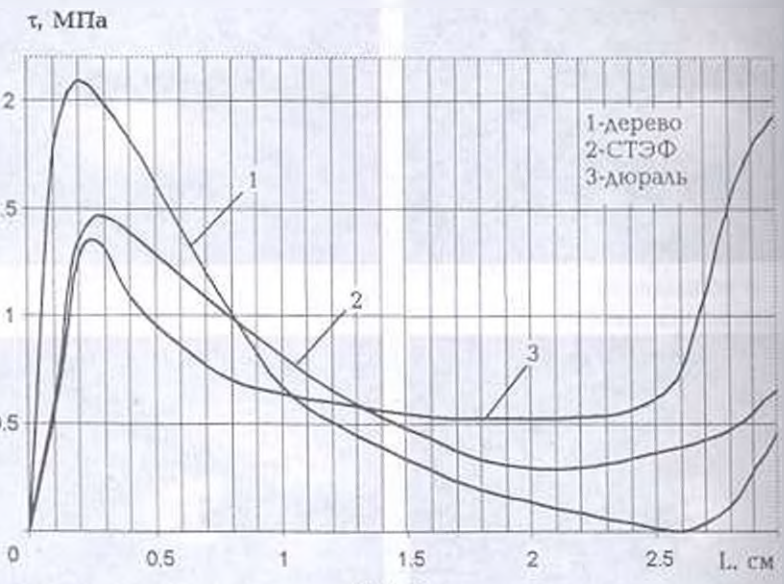
Разность главных напряжений определяется по закону фотоупругости

$$\delta = (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot C_\sigma \cdot d \quad (3)$$

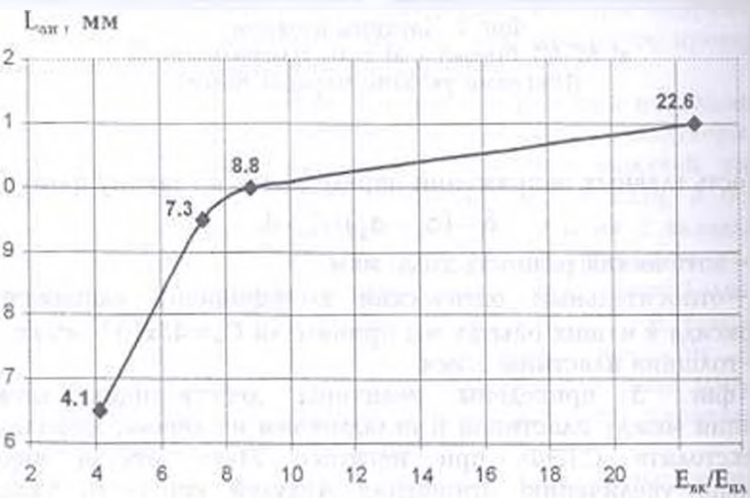
где δ — оптическая разность хода, мкм
C_σ — относительный оптический коэффициент напряжений, для эпоксида в наших опытах мы принимали $C_\sigma = 45 \times 10^{-3}$ см^2/кг,
d — толщина пластины 5.5мм.

На фиг. 3 приведены величины действующих касательных напряжений между пластиной и вкладышами из дерева, дюралюминия и стеклотекстолита СТЭФ, при нагрузке 24кгс, откуда видно, что параллельно увеличению отношения модулей упругости вкладыша и пластины, значение касательных напряжений уменьшается вблизи внешнего конца и увеличивается вблизи внутреннего конца вкладыша. Независимо от материала вкладыша, максимальные значения касательных напряжений находятся на расстоянии 0.1L от края пластины.

Полученные результаты позволяют установить зависимость величины длины зоны анкеровки от отношения модулей упругости вкладышей и пластины. На фиг. 4 приведена зависимость длины зоны анкеровки, необходимой для передачи 70% действующей нагрузки, от отношения модулей упругости вкладышей и пластины. Как видно из фиг. 4, длина зоны анкеровки зависит от соотношения модулей упругости применяемых материалов.



Фиг. 3.



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1998. 77с.
2. Кучеренко А. А. Изменение величины втягивания и зоны анкеровки арматуры при пропаривании. // Бетон и железобетон. 1968. № 3. С. 27-28.
3. Гольдфайн Б. С., Ерин Н. Н. Об особенностях сцепления бетона с горизонтально расположенной арматурой. /В сб. Анкеровка арматуры в бетоне. М. 1969. С. 50-64.
4. Ахвердов И. Н. Влияние усадки, условий твердения и циклических температурных воздействий на сцепление бетона с арматурой. // Бетон и железобетон. 1968. № 12. С. 4-7.
5. ՀՀՇՆՁ, ՀՀ հանքավայրերի բնական ծակոտկեն լցանյութերով թեթև բետոններից բետոնի և երկաթբետոնե կոնստրուկցիաների նախագծում: Առաջին մաս, Բետոնե և երկաթբետոնե կոնստրուկցիաներ առանց ամրանի նախալարման: Երևան 2000, է. 118-123:
6. ՀՀՇՆՁ, ՀՀ հանքավայրերի բնական ծակոտկեն լցանյութերով թեթև բետոններից բետոնի և երկաթբետոնե կոնստրուկցիաների նախագծում: Երկրորդ մաս, Նախալարված երկաթբետոնե կոնստրուկցիաներ: Երևան 2000, է. 135-138:
7. Манлян Р. Л. и др. Длина зоны анкеровки высокопрочной арматуры в элементах из бетона на пористых карбонатных заполнителях. //Бетон и железобетон. 1970. №1. С.32-36.
8. Хачикян А. С., Саркисян В. Г. Плоское деформировонное состояние предварительно напряженного армировонного прямоугольника. // Изв. АН Арм. ССР, Сер. техн. наук. 1973. Т. XXVI. №1. С. 31-38.
9. Корнев Н. А., Вейнер Б. Б. Анкеровка арматуры повышенной прочности в легких бетонах. // Бетон и железобетон. 1966. №10. С.23-26.
10. Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику. М.: Мир. 1970. 487с.
11. Эдельштейн Е. И. Приборы научно-исследовательского института математики и механики АГУ для исследования напряжений поляризационно-оптическим методом. /Тр. конф. Поляризационно-оптический метод исследования напряжении. Л.: 1960. С.174-191.

Институт механики НАН Армении,
Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
23.11.2004