Utbutbyu E X A H И K A MECHANICS

Մեխանիկա

57, Nº4, 2004

МЕХАНИКА

УДК 539.3

.

ON ASYMPTOTIC METHOD OF STATIC AND DYNAMIC BOUNDARY PROBLEMS SOLUTION

Lenser A. Aghalovyan'

Լ.Ա. Աղալովյան

Սասարկական և դինամիկական եզրային խնդիրների լուծման ասիմպառաիկ մեթողի մասին

Շարադրված է առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկ մեթողը բարակ մարմինների հեծաններ, սալեր, թաղանբներ, լարվածու-ղեֆորմացիոն վիճակները որոյելու համար։ Դիտարկված են ինչպես դասական, այնպես էլ ոչ դասական եգրային խնդիրներ։ Յույց է տրված մեթոդի էֆեկտիվությունը և՝ ստատիկական և դինամիկական խնդիրների լուծումները որոշելու հարցում Քերված են իլյուստրացիոս բնույթի անհրաժեշտ օրինակներ։

Агаловян Л.А.

Об асимптотическом методе решения статических и динамических краеных задач

Изложена суть асимптотического метода решения краевых задач теории упругости аля товких тел — балки, пластины, оболочки. Рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи. Показана эффективность осимптотического метода для определения решений и статических, и динамических задач. Приведены необходимые плаюстрационные примеры.

Abstract

The equations of elasticity theory for thin bodies (bars, beams, plates, shells) are singularly perturbed by small geometric parameter. For the solution of such systems an asymptotic method is suggested to be used. The solution of the corresponding boundary problem of elasticity theory consists of two qualitatively different types of solutions - inner problem and boundary layer. The ways of constructing these solutions and their conjunctions are described. We consider as classic boundary problems as well as nonclassic boundary problems from the point of view of the plates and shells theory on the facial surfaces the displacement vector components or mixed conditions are given. Asymptotics of the inner problem solution is established, it is proved that it sensitively reacts on the type of the boundary problems conditions of elasticity theory laid on the facial surfaces. Solutions of the boundary layers are constructed. The relation of the boundary layer with Saint-Venant principle is displaced. In case of the first boundary problem for a rectangle it is proved that Saint-Venant principle is mathematically exact. Iteration processes for the determination of the inner problem solution are built, the connection with the solutions on classical Bernoulli-Coulomb theory of beams, Kirchhoff-Love theory of plates and shells with precise theories on the base of softened hypothesis is established. The formula of calculation of the bed coefficient for a layered foundation is reduced. The asymptotic method is especially effective for the solution of nonclassical dynamic boundary problems. Free and forced vibrations of thin bodies are considered. The connections between the frequencies values of free vibrations and the velocities of propagation of elastic shear and longitudinal waves are established.

Institute of Mechanics of NAS of RA, Baghramyan 24b, 375019 Yerevan, Armenia

The Author's report in 21^a International congress of Theoretical and Applied Mechanics. August 15-21, 2004, Warsaw, Poland

Key words: elasticity, singularly perturbed problems, thin bodies, asymptotic method, free and forced vibrations.

Introduction

For the calculation of thin bodies of beam type, plates and shells methods of hypotheses. decompositions of sought values according to the cross coordinate or special functions were originally used. Yet, the specific character of this kind of bodies is so, that one of its sizes sharply differs from the others and if in the equations of elasticity theory we pass to dimensionless coordinates and components of the displacement vector, these equations turn to be perturbed by small geometrical parameter. That is why it will be natural to use asymptotic methods. It was found out that the perturbance by small parameter is singular. Mathematical theory of such equations and systems began to develop from the middles of the 20th century, that is why the application of the asymptotic methods has a considerably new history. The first papers where the asymptotic method for the solution of boundary value problems of elasticity theory for plates and shells are [1-3]. The first boundary value problem of clasticity theory for isotropic rectangle is solved in [4] by an asymptotic method. The asymptotic theory of isotropic shells is built in [5], and the anisotropic theory of beams, plates and shells is in [6].

The asymptotic method turned to be especially effective for the solution of nonclassical static and dynamic boundary value problems of thin bodies – on the facial surfaces the values of the displacement vector component or mixed conditions are given [6-14].

Let's stop at some key results, obtained by the asymptotic method.

1. The first boundary value problem for a rectangle. The connection of the asymptotic solution with classical theory of beams and with Saint-Venant principle

The solution of this considerably simple problem reveals the basic principles and advantages of the asymptotic method application. It is required to find the solution of the equations at a plane problem of elasticity theory in the region of $D = \{(x, y) : x \in [0, \ell], | y| \le h, h \le c\}$, if on the longitudinal edges $y = \pm h$ of the rectangle the values of the stresses are given

$$\sigma_{xy}(\pm h) = \pm X^{\pm}(x), \ \sigma_{yy}(\pm h) = \pm Y^{\pm}(x)$$
(1.1)

and when $x = 0, \ell$ are the values of stresses, displacements or mixed conditions. Passing to dimensionless coordinates $\xi = x/\ell$, $\zeta = y/h$ and displacements $U = u/\ell$, $V = v/\ell$ the equations system of a plane problem for an isotropic rectangle is written in the following form

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \zeta} + \ell F_x(\ell\xi, h\zeta) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \zeta} + \ell F_x(\ell\xi, h\zeta) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{E} (\sigma_{xy} - v\sigma_{yy}), \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - v\sigma_{yy})$$
(1.2)

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}, \ \varepsilon = h / \ell$$

where σ_{ik} are the stresses tensor components, F_x , F_y are volume forces. The solution of system (1.2), as singularly perturbed by small parameter ε system, is combined from the solution of mner problem and from the solutions of boundary layers built close to $x = 0, \ell$:

$$I = Q + R^{(1)} + R^{(2)} \tag{1.3}$$

The solution of inner problem Q, which exactly reacts the types of the stated when $y = \pm h$ conditions, is sought in the form of

$$Q = e^{q_s + s} Q^{(s)}(\xi, \zeta), \quad s = 0, N$$
 (1.4)

where q_a characterizes the asymptotic order of the given magnitude, their values must be so that substituting (1.4) into (1.2) and coefficients under the same degrees ε to get a noncontradictory system for sequential determination of values $Q^{(1)}$, i.e. the stresses tensor components and displacement vector. This is most responsible moment when applying the asymptotic method as not all the components have the same orders. In this case

$$q = -2$$
 for $\sigma_{xx}, u: q = -1$ for $\sigma_{xy}; q = 0$ for $\sigma_{xy}; q = -3$ for v (1.5)

From the system for $Q^{(1)}$ all the values are expressed through functions $u^{(1)}(\zeta), v^{(1)}(\zeta)$, which satisfy the equations

$$E\frac{a^{\prime}u^{\prime}}{d\xi^{2}} = P_{x}^{(s)}, \quad \frac{1}{3}E\frac{d^{\prime}v^{\prime}}{d\xi^{4}} = P_{x}^{(s)}$$
(1.6)

where $P_{s}^{(s)}$, $P_{v}^{(s)}$ are expressed through X^{+} , Y^{+} , F_{x} , F_{v} consequently are known functions. The first of the equations (1.6) when s = 0 coincides with the classic equation of the bars extension-pressure, and the second one coincides with the classical equation of beam bend. Approximations $s \ge 1$ make the results on Bernoulli-Coulomb-Euler classical theory of bars and beams precise. Derivatives of the first order from $u^{(-1)}$, the third and the fourth orders from $v^{(-1)}$ enter the formulae for stresses, that is why, corresponding to (1.6) the formulae of stresses will involve three arbitrary constants which should be determined from the boundary value conditions when $x = 0, \ell$. Naturally, restricted only by the solution of the inner problem, it is impossible to satisfy these conditions at every point, which also indirectly proves singular perturbation of the original problem. In order to remove the arising residual it is necessary to build a qualitatively new solution.

That is the solution of the boundary layer which exponentially decreases when removing from end sections of the rectangle. In order to find the denoted solution near the end – wall x = 0, a new change of variables is introduced $t = \zeta/\varepsilon$ into system (1.2) and the solution of the transformed system is sought in the form of functions of boundary layer type:

$$R_{b} = \varepsilon^{\lambda_{b}+s} R^{(s)}(\zeta) \exp(-\lambda t), \quad s = \overline{0, N}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$$
(1.7)

As inhomogeneous conditions (1.1) are satisfied by the solution of the inner problem, the boundary layer problem must satisfy the conditions

$$\sigma_{xyb} = \sigma_{yyb} = 0 \quad \text{when} \quad \zeta = \pm 1 \tag{1.8}$$

For deriving noncontradictory system relative to $R_b^{(i)}(\zeta)$, it is necessary to have

$$\chi_{o_{\lambda}} = \chi, \quad \chi_{u_{\lambda}} = \chi + 1 \tag{1.9}$$

where the full number χ will be determined during the conjunction of the inner problem solution with the boundary layer solution. After having substituting (1.7) into transformed system (1.2) all the magnitudes may be expressed through $\sigma_{12}^{(1)}$.

$$\sigma_{inb}^{(i)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\sigma_{inb}^{(i)}}{d\zeta}, \quad \sigma_{inb}^{(i)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\sigma_{inb}^{(j)}}{d\zeta}$$

$$u_p^{(i)} = -\frac{1}{\lambda^3 E} \left[\frac{d^2 \sigma_{inb}^{(i)}}{d\zeta^2} - \nu \lambda^2 \sigma_{inb}^{(i)} \right]$$

$$v_p^{(i)} = -\frac{1}{\lambda^4 E} \left[\frac{d^3 \sigma_{inb}^{(i)}}{d\zeta^3} + (2 + \nu) \lambda^2 \frac{d\sigma_{inb}^{(i)}}{d\zeta} \right]$$
(1.10)

 $\sigma_{r=0}^{(3)}$ is determined from the equations

$$\frac{d^4 \sigma^{(z)}}{d\zeta^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2 \sigma^{(r)}}{d\zeta^2} + \lambda^4 \sigma^{(r)} = 0$$
(1.11)

Having solved ordinary differential equation (1.11) and satisfying conditions (1.8), we find the final solution of the boundary layer:

$$\sigma_{yyb}^{(s)} = A_n^{(s)} F_n(\zeta) \tag{1.12}$$

where

$$F_n(\zeta) = \zeta \sin \lambda_n \zeta - tg\lambda_n \cos \lambda_n \zeta \quad \text{(symmetric problem-extension)}$$

$$F_n(\zeta) = \sin \lambda_n \zeta - \zeta tg\lambda_n \cos \lambda_n \zeta \quad \text{(bend)} \quad (1.13)$$

 λ_n is the root of the equation $\sin 2\lambda_n + 2\lambda_n = 0$ in the symmetrical problem and the equations $\sin 2\lambda_n - 2\lambda_n = 0$ is the bend problem. In (1.12) $A_n^{(1)}$ are constant integrations by "h" summing takes place corresponding to all the roots λ_n , every λ_n is corresponded by $\overline{\lambda}_n$, totally $\sigma_n^{(1)}$ will be real.

The solution of boundary layer (1.7), (1.10), (1.12) has a number of very important properties. It is exact for every "s"; in the arbitrary cross-section $t = t_k$ the stresses $\sigma_{i=k}^{(1)}$, $\sigma_{i=k}^{(1)}$ are self-balanced:

$$\int_{-1}^{1} \sigma_{xxb}^{(s)} d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \zeta \sigma_{xxb}^{(s)} d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \sigma_{xyb}^{(s)} d\zeta = 0 \qquad (1.14)$$

It is easy to be convinced in justification of (1.14) using formulae (1.10) and conditions (1.8). This solution when removing from the end-wall into the inside the rectangle fades as $\exp(-\operatorname{Re}\lambda_1 t)$, where $\operatorname{Re}\lambda_1 \approx 2,106$ in symmetric. $\operatorname{Re}\lambda_1 \approx 3,75$ in skew-symmetric (bend) problems [6]

The denoted solution in not possible to obtain on the base of any known hypothesis, particularly, accepting the hypothesis of plane sections, this exact solution is lost.

Using formulae (1.3)-(1.5), (1.7), (1.9) and property (1.14), it is easy to satisfy the boundary value conditions when $x = 0, \ell$. Let the values of stresses be given when x = 0:

$$\sigma_{xx} = \phi(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \psi(\zeta) \quad \text{when} \quad x = 0 \tag{1.15}$$

When satisfying conditions with x = 0 it is usually ignored by the affect of the boundary layer $R_b^{(2)}$, which is equivalent to fulfillment of the conditions $1 + \exp(-\operatorname{Re} \lambda_1 \ell / h) \approx 1$, which is practically fulfilled even for a square. Then we shall have:

$$\varepsilon^{-1+s}\sigma^{(s)} + \varepsilon^{x+s}\sigma^{(s)}_{xyy} = \psi \qquad \text{when } x = 0 \ (t = 0) \tag{1.16}$$

From (1.16) noncontradictory conditions only with $\chi = -2$ follow. We have

$$\sigma_{xxb}^{(s)}(t=0) = \varphi^{(s-2)} - \sigma_{xx}^{(s)}(\xi=0)$$

$$\sigma_{xyb}^{(s)}(t=0) = \psi^{(s-2)} - \sigma_{xy}^{(s-1)}(\xi=0)$$

$$\varphi^{(0)} = \varphi, \ \varphi^{(s)} = 0 \quad \text{when} \quad k \neq 0, \ (\varphi, \psi)$$

(1.17)

The right parts of (1.17) must satisfy the conditions of self-balance (1.14). From these three conditions all the three unknown constants in the solution of inner problem are determined. From this fact it follows, that the self-balanced part of the end-wall loading doesn't affect on the solution of the inner problem. This pure mathematical result expresses the validity of Saint-Venant principle. Returning again to (1.17) the right parts of which will already be known functions, constants $A_n^{(s)}$ of the boundary layer solution are determined. Let

$$\varphi(\zeta) = 2P(1-|\zeta|), \quad \psi(\zeta) = 0 \tag{1.18}$$

the above said may be illustrated in fig. 1



where in the right part the first summand corresponds to the solution of the inner problem, the second one corresponds to the boundary layer.

From (1.8), (1.10) follows that the boundary layer displacements don't have the characteristics of self-balance (1.14), i.e. Saint-Venant principle for displacements is not correct and under other boundary value conditions when $x = 0, \ell$, conjunction of the inner problems and the boundary layer solutions is fulfilled by other ways – by the method of boundary collocation, by less squares and so on.

The advantage of an asymptotic method appears under the solution of more complicated problems for thin bodies. With the help of this method solutions of plane problems for an anisotropic strip-rectangle, for layered rectangle-strips are found. In all cases when loadings affecting on facial surfaces are polynomials, iteration process for inner problem terminates on certain approximation and mathematically precise solutions are obtained

From these solutions as private cases, all the solutions obtained by Menage-Timoshenko method, follow. As an illustration the solution of inner problem for orthotropic

rectangle reinforced by stringer, which stretches by the load of permanent intensively will be brought (fig. 2)



$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{I} &= P\zeta_{1}(B_{2} - B_{1}\zeta)\frac{1}{a_{11}^{I}}, \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_{1} \\ \sigma_{xy}^{I} &= 0, \quad \sigma_{yy}^{I} = 0, \quad u^{I} = P\ell\zeta_{1}\zeta(B_{2} - B_{1}\zeta) \\ v^{I} &= \frac{P\ell^{2}}{2h_{2}}B_{1}\zeta_{1}\xi^{2} + \frac{Ph_{1}}{8} \left[(1 - \zeta_{1})(4B_{2} + (1 - \zeta_{1})B_{1})\frac{a_{12}^{II}}{a_{11}^{II}} + 4\zeta(2B_{2} - B_{1}\zeta)\frac{a_{12}^{I}}{a_{11}^{II}} \right] \\ \sigma_{1x}^{II} &= P\zeta_{1}(B_{2} - B_{1}\zeta)\frac{1}{a_{11}^{II}}, \quad \sigma_{1x}^{II} = 0, \quad \sigma_{1x}^{II} = 0, \quad -1 \leq \zeta \leq 0 \\ u^{II} &= P\ell\zeta_{1}\xi(B_{2} - B_{1}\zeta), \quad \zeta = x/\ell, \quad \zeta = y/h_{2}, \quad \zeta_{1} = h_{1}/h_{2} \\ v^{II} &= \frac{P\ell^{2}}{2h_{2}}B_{1}\zeta_{1}\xi^{2} + \frac{Ph_{1}}{8}(1 - \zeta_{1} + 2\zeta)[4B_{2} + (1 - \zeta_{1} - 2\zeta)B_{1}]\frac{a_{12}^{II}}{a_{11}^{II}} \\ B_{1} &= \frac{2D_{2} - \zeta_{1}D_{1}}{2(D_{1}D_{3} - D_{2}^{2})}, \quad B_{2} &= \frac{2D_{3} - \zeta_{1}D_{2}}{2(D_{1}D_{3} - D_{1}^{2})} \\ D_{1} &= \frac{\zeta_{1}}{a_{11}^{II}} + \frac{1}{a_{11}^{II}}, \quad D_{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_{1}^{2}}{a_{11}^{I}} - \frac{1}{a_{11}^{II}}\right), \quad D_{3} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta_{1}^{3}}{a_{11}^{I}} + \frac{1}{a_{11}^{II}}\right) \end{aligned}$$

Solution (1.19) is precise in the sense of Saint-Venant, all the equations of plane problem of an orthotropic body, conditions of full contact between the layers, boundary value problems of the free edge when $y = h_1$, $y = -h_2$ ($\sigma_{xv} = 0$, $\sigma_{yv} = 0$) are satisfied. The stresses of the boundary layer σ_{xxh} , σ_{xyh} in spite of layerity in any cross-section are also self-balanced, which permitted us to satisfy the conditions when x = 0, ℓ integrally. From solution (1.19) it follows that on the line of contact $\sigma_{yn}^{\prime} = \sigma_{yn}^{\prime\prime} = 0$ Meanwhile, in some applied models, for example, in Melan's models it is admitted the stringer behaves as a bar, on the surface of which tangential stresses arise.

The obtained precise solution (1.19) disproves such an assumption and advises to be careful when using applied models. Tangential stresses arise in the zone of boundary layer, but the stress strain state there, is not uniaxial but plane.

The established here qualitative picture is preserved for three-layered rectangular packet as well, i.e. in case of the presence of thin inclusion [15].

The described scheme of the asymptotic solution determination preserves the force for the spatial problems of plates and shells as well. It was found out that the initinal approximation for the inner problem is adequate to the classical theory of Kirchhoff-Love's plates and shells. By admitting the hypotheses of classical theory, the boundary layers, which can be of two types-boundary torsion (antiplane boundary layer), plane boundary layer are eliminated. The first of these boundary layers takes into account Reissner, Hambartsumyan's theory by Timoshenko type. If we build the second approximation for the inner problem it will correspond to S.A. Hambartsumyan's iteration theory. For bending of the transversal isotropic plate the following equations relative to the plate deflection are offered:

$$D\Delta\Delta w = z - \left(2\frac{G}{G'} - 0.75\frac{E}{E'}v'\right)\frac{(2h)^{2}\Delta z}{10(1-v)} \quad \text{(asymptotic theory)}$$

$$D\Delta\Delta w = z - \left(2\frac{G}{G'} - \frac{E}{E'}v'\right)\frac{(2h)^{2}\Delta z}{10(1-v)} \quad \text{(Hambartsumyan's theory)} \quad (1.20)$$

For anisotropic plates and shells on the magnitude of the contribution of the following approximations are essentially influenced by the relations of the constants of elasticity, and the changeability of acting loads as well.

2. The second and the mixed boundary value problems

The asymptotic method turned out to be especially effective for the second and mixed boundary value problems solution of elasticity theory for thin bodies (nonclassical boundary value problems of beams, plates and shells). In the first case it is considered on the facial surfaces of the thin body displacements values are given. The punch problem for example refers to this.

In the second case on one of the facial surfaces the displacements values are given and on the other one the values corresponding to the stresses tensor components are given. These problems are basic in the calculation of foundations and bases of constructions by the model of a compressible layer, and during the calculation of seismic actions on the constructions as well. Mixed conditions on each of the facial surfaces may be given.

It is established that the asymptotics (1.4), (1.5) for this class of problems is not admittable, i.e. it is not possible to solve these problems on the base of plane sections and Kirchhoff-Love hypotheses.

A principally new asymptotics is found [7]:

$$q = -1$$
 for $\sigma_{u}, \sigma_{u}, q = 0$ for u, v (2.1)

from where it follows that unlike the classical theory of beams and plates, here in general case all the stresses are equivalent, and the displacements are equivalent too.

In this case what was said above takes place in the case of general anisotropy. Another characteristics has appeared too – it was found out that the inner problem solution is fully determined after having satisfied the boundary value conditions on the facial surfaces, i.e. the boundary layers only correspond to the conditions under torsion sections $x = 0, \ell$. If exterior actions are polynomial closed solutions in the inner problem are obtained. We bring these solutions for two cases, corresponding to when the lower bound of the orthotropic rectangle-strip is rigidly fastened, and the upper bound is informed constant displacements or it is loaded by a load of constant intensivity. The conditions

$$u(-h) = v(-h) = 0, \ u(h) = u^*, \ v(h) = v^*; \ u^*, v^* = \text{const}$$
 (2.2)
to the solution

correspond to the solution

$$\sigma_{1x} = -\frac{a_{12}}{\Delta} \frac{v}{2h}, \quad \sigma_{xy} = G_{12} \frac{u}{2h}, \quad \sigma_{yy} = \frac{a_{11}}{\Delta} \frac{v}{2h}$$

$$u = \frac{u}{2h} (y+h), \quad v = \frac{v}{2h} (y+h), \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^{2}$$
(2.3)

and the conditions

сол

$$u(-h) = v(-h) = 0, \ \sigma_{yy}(h) = \tau^*, \ \sigma_{yy}(h) = -\sigma_2^*; \ \tau^*\sigma_2^* = \text{const}$$
(2.4)

$$\sigma_{xx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_2^*, \quad \sigma_{yy} = \tau^*, \quad \sigma_{yy} = -\sigma_2^*$$

$$u = \frac{\tau}{G_{12}} (y+h), \quad v = -\frac{\Delta}{a_{11}} \sigma_2 (y+h)$$
(2.5)

From the solution (2.5) the value of the bed coefficient for an elastic foundation of power (width) 2h is directly followed. Taking into account $\tau^* = 0$, we calculate the displacement under normal loading. With y = h we have

$$u(h) = 0, \quad v(h) = \frac{2\Delta h}{a_{11}}(-\sigma_2^*)$$
 (2.6)

from where it follows

$$\sigma_{2}(h) = -\sigma_{2}^{*} = Kv(h), \quad \mathbf{K} = \frac{a_{11}}{2h\Delta} = \frac{E_{2}}{2h(1 - v_{12}v_{21})}$$
(2.7)

For isotropic foundations coefficient K coincides with well-known bed coefficient $K = E/(2h(1-v^2))$. Note that in case of foundations with general anisotropy from the asymptotic solution nonapplicability of Vinkler's model follows, i.e. the sense of bed coefficient is lost.

Asymptotics (2.1) is right for layered and for inhomogeneous beams as well [6]. If Young's module changes by the depth of the layer of power h linearly, using the values $[E, E_{i}]$, for hed coefficient we have

$$K = K_0 \frac{c-1}{\ln c}, \ c = \frac{E_2}{E_1}, \ K_0 = \frac{E_1}{h(1-v^2)}$$
(2.8)

Asymptotics (1.4), (2.1) permits generalizing on anisotropic layered plates and shells, it is possible to get closed solutions [8-10].

Using the solution of the mixed boundary value problem for n-layered packet from orthotropic plates, in particular, it is possible to get the following formula of bed coefficient calculation

$$K_{n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} h_{i} A_{33}^{(i)}}$$

$$A_{33}^{(i)} = \frac{1 - v_{12}^{(i)} v_{21}^{(l)} - v_{13}^{(l)} v_{31}^{(l)} - v_{23}^{(l)} v_{32}^{(l)} - v_{21}^{(l)} v_{13}^{(l)} v_{32}^{(l)} - v_{12}^{(l)} v_{23}^{(l)} v_{31}^{(l)}}{(1 - v_{12}^{(l)} v_{21}^{(l)}) E_{5}^{(l)}}$$
(2.9)

where $E_{1}^{(i)}$ is Young's module in the direction, perpendicularly to the plate of the layers contact, $v_{ii}^{(i)}$ is Poisson's coefficient.

3. Free and forced vibrations

The investigations of seismic waves actions of thin and massive bodies and so on bring to the solution of specific problems on free and forced vibrations of thin bodies. Asymptotic method shows off here too from the best side. We illustrate the above said on the example of free vibrations of an orthotropic plate $D = \{(x, y, z) : x, y \in D_0, z \le h\}$. It is required to determine the frequencies of free vibrations of the plate, corresponding to boundary conditions

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{when } z = h$$

$$u = v = w = 0 \qquad \text{when } z = -h$$
(3.1)

OF

$$u = v = w = 0 \qquad \text{when } z = \pm h \tag{3.2}$$

Looking for the solution of the equations system of special dynamic problem of elasticity theory in the form of

$$\sigma_{ab}(x, y, z, t) = \sigma_{k}(x, y, z) \exp(i\omega t)$$

$$(u, v, w) = (u_{x}, u_{y}, u_{z}) \exp(i\omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3$$
(3.3)

where ω is the sought frequency of free vibrations and passing to dimensionless coordinates and components of displacement vector $\zeta = x/\ell$, $\eta - y/\ell$, $\zeta = -/h$. $U = u_x/\ell$, $V = u_y/\ell$, $W = u_y/\ell$, ℓ is the characteristic size of the middle surface D, of the plate, we have the following singularly perturbed by small parameter $\varepsilon = h/\ell$ system:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 V = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 V = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 W = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} = a_{43} \sigma_{22}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = a_{55} \sigma_{13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{66} \sigma_{12}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2$$
(3.4)

The solution of the singularly perturbed system (3.4) is sought in the form of

$$\sigma_{jk} = \varepsilon^{-1/4} \sigma_{jk}^{(1)}, \quad \omega_*^2 = \varepsilon^3 \omega_{*s}^2, \quad s = 0, N$$

$$(U_*V_*W) = \varepsilon^2 (U^{(1)}_* V^{(1)}_* W^{(1)})$$
(3.5)

where notation s = 0, N means that by repeated index *s* summing in the limits [0, N] takes place. Substituting (3.5) into (3.4), using Cauchy's rule of multiplying the rows, we get a new system, from where it will be possible to express the stresses tensor components through $U^{(1)}, V^{(1)}, W^{(2)}$, which, in their turn, are determined from the equations system

$$\frac{\partial^{2} U^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + a_{55} \omega_{*k}^{2} U^{(s-k)} = R_{u}^{(s)}, \quad k = \overline{0, s}$$

$$\frac{\partial^{2} V^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + a_{44} \omega_{*k}^{2} V^{(s-k)} = R_{v}^{(s)}$$

$$A_{14} \frac{\partial^{2} W^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + \omega_{*k}^{2} W^{(s-k)} = R_{w}^{(s)}$$
(3.6)

where $A_{11} = 1/A_{33}$, $R^{(s)}$, $R^{(s)}$, $R^{(s)}$ are well-known functions, in particular, $R^{(s)}_{v} = R^{(s)}_{v} = R^{(0)}_{s} = 0$. With s = 0 the equations of system (3.6) become independent. Having solved these equations and satisfied conditions (3.1) or (3.2), we get dispersing equations from where ω_{00} are determined. Conditions (3.1) correspond the following three groups of main values of frequencies:

$$\omega_{0n}^{I} = \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}} (2n+1) = \frac{\pi}{4h} V_{c}^{32} (2n+1), V_{c}^{32} = \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, n \in \mathbb{N}$$

$$\omega_{0n}^{II} = \frac{\pi}{4h} V_{c}^{32} (2n+1), V_{c}^{32} = \sqrt{\frac{1}{\rho a_{44}}} = \sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}, n \in \mathbb{N}$$

$$\omega_{0n}^{III} = \frac{\pi}{4h} V_{p} (2n+1), V_{p} = \sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho A_{33}}}, n \in \mathbb{N}$$

(3.7)

where G_{sc} is shear module, A_{13} is calculated by formula (2.9) without ascribing index *i*, V_{c}^{c} , V_{c}^{sc} are well-known in seismology and physics velocities of propagation of shear waves. Formulae (3.7) show that in the orthotropic plate free vibrations of three types – two shear and a longitudinal may arise. Their interinfluence will be perceived taking into account the approximations $s \ge 1$. The calculation of the next approximations brings to the correction of the frequency value of the order $O(\varepsilon^2)$, that is why in practical applications it is possible to be restricted by the values (3.7), which we call main values of frequencies.

Conditions (3.2) correspond to the following main values of frequencies:

$$\omega_{0n}^{\prime} = \frac{\pi n}{2h} V_{c}^{\prime \pi}, \quad \omega_{0n}^{\prime \prime} = \frac{\pi n}{2h} V_{c}^{\prime \pi}, \quad \omega_{0n}^{\prime \prime \prime} = \frac{\pi n}{4h} V_{p}, \quad n \in \mathbb{N}$$
(3.8)

The forced vibrations are considered in the analogues way. For example, if harmonically changing in time displacements are informed to the facial surface z = -h of the plate

$$u(-h) = u^{-}(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \ v(-h) = v^{-}(\xi, \eta) \exp(i\Omega t)$$

$$w(-h) = w^{-}(\xi, \eta) \exp(i\Omega t)$$
(3.9)

which take place under seismic actions on plate-like bases of constructions, the solution of the problems is sought in the form of (3.3), then (3.5) with substitution ω into Ω . ω : into $\Omega_{\bullet}^{2} = \rho h^{2} \Omega^{2}$. As a result the solution is expressed through the functions $U^{(0)}$. $W^{(0)}$, each of which is determined from the ordinary differential equations of the second order. Subjecting the solutions of these equations to the conditions (3.1), (3.9) or conditions (3.9) and u(h) = v(h) = w(h) = 0 the amplitudes of forced vibrations are uniquely determined. It the value of frequency Ω of the exterior action coincides with any value from (3.7) or (3.8) a resonance takes place. Note, that it is always possible to choose physical-mechanical and geometrical parameters of the plate so, that in the presence of the given interval of possible values Ω the resonance didn't arise.

Note, that the described scheme of the frequencies determination of free vibrations and amplitudes of forced vibrations is applicable for layered thin bodies as well.

4. Conclusions

Effectiveness of asymptotic method of singularly perturbed differential equations solution for the solution of boundary and dynamic problems of elasticity theory for thin bodies (beams, bars, plates, shells). Connection of asymptotic method with Saint-Venant principle, with applied theories of beams, plates and shells is established. Nonclassical problems of thin bodies are solved. The frequencies of free vibrations and the amplitudes of forced vibrations of orthotropic beams and plates to the corresponding nonclassical boundary value problems are determined.

5. Acknowledgment

The author express their gratitude to INTAS, grant Ref. N0 1 03-51-5547, which made this investigation possible.

References

- Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates// Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14. № 1.
- Gol'denveizer A.L. The construction an approximate theory of the bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity// Prikl. Mat. Mech. 1962. Vol. 26. № 4. 668-686p.
- Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells// Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. №1325.
- Aghalovyan L.A. On the character of interaction of boundary layer with inner stressstrain state of strip.// Proceed. AS ArmSSR, Mechanics. 1977. Vol. 30. № 5. p.48-62.
- 5. Gol'denveizer A.L. The Theory of Thin Elastic Shells, Moscow, Nauka, 1976, 510p.
- Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Moscow. Nauka. Fizmatgiz, 1997, 414p.

- Aghalovyan L.A. The structure of the solution of a class of plane problems of the theory of elasticity of an anisotropic body// Mckhanika. Izd. Yerevan Univ. 1982. Vol. 2. p.7-12.
- 8 Aghalovyan I..A., Gevorgyan R.S.// Nonclassical boundary-value problems of plates with general anisotropy// In Proceedings of the 4th Symposium on the Mechanics of Structurs of Composite Materials// Novosibirsk, Nauka, 1984, p.105-110.
- Aghalovyan L.A. and Gevorgyan R.S., The asymptotic solution of mixed threedimensional problems for double-layer anisotropic plates.¹ Prikl, Mat. Mekh. 1986. Vol. 50. № 2. p.271-278.
- Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., The asymptotic solution of nonclassical boundaryvalue problems for two-layer anisotropic thermoelastic shells// Izv.Akad. Nauk ArmSSR. Mekhanika. 1989. Vol. 42. Nº 3. pp. 28-36.
- Aghalovyan L.A. On the asymptotic method of solution of dynamic mixed problems for anisotropic strips and plates// Proceedings of Higher Education Institutions RF. Northern-Caucasus Region, ser National Sciences. 2000. № 3. pp. 8-11.
- Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. and Aghalovyan M.L., Asymptotics of Forced Vibrations of Bases, Foundations and Seismoisolators," Journal of Structural Control, vol. 8, № 2, pp. 249-263, 2001
- 13 Aghalovyan L.A. and Gevorgyan R.S. and Sahakyan A.V.// The Asymptotic solution of the three-dimensional problem of the theory of elasticity for plates of incompressible materials// J. Appl. Maths. Mechs. 2002. Vol. 66. № 2. pp. 283-295.
- Aghalovyan L.A. Asymptotic of Solutions of Classical and Nonclassical Boundary Value Problems of Statics and Dynamics of Thin Bodies// Int. Appl. Mech. 2002. Vol. 38. Nº 7. pp. 3-24.
- Sarkisyan A.H. On stress-strain state of three-layered anisotropic strip.//Rep. NAS of Armenia. 1997. Vol. 97. № 3. p. 40-48.

Институт механики НАН Армении

4

Поступила в редакцию 2.11.2004

чиния чолугия национальной академии наук армении Известия национальной академии наук армении

Մեխանիկա

57, Nº4, 2004

Механика

УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.

Ս. Ա. Համբարձումյան, Վ. Ց. Գնունի Հայնական սահբերի հաշվառմամբ տարաձոդուլ սալի գլանային մակերևույթով ծռումը

Աշխատանքում քննարկվում է սալի նյութի տաբամողուլության և լայնական տարերի հայվասման ազդեցությունը սայի հայվարկային մեծությունների վրա։ Դիտարկվում են սայի երկար կողերի ամրացման ապրբեր ղեպքեր։ Բացածայտվում են տարամողուլության և լայնական սածքերի հայվառման ազդեցությունները սալի ճկվածթի և լարվածության (ձգում, սեղմմում) գոտիների վրա։

S.A. Hamhartsuniyan, V.Ts. Gnuni ClyIndrical Bending of Different-modulus Plate with Regard to Transversal Shears

Разлачные задачи прочвости, устойчивости и колебаний стержней, пластин в оболочек на основе разномодульной теории упругости [1] быля рассмотрены в работах многих авторов (силитературу в [1], а также литературу и краткий обзор в [2]). Однако, сложности, связанные с общей теорией, требуют иных подходов для решения многих колкретных задач.

Здесь рассматравается задача цилипдрического влиба пластинки с учетом влияния поперечных сдвигов, с помощью ковой (песколько упрощенной) четырехколстантной торки разномодульных материалов [3].

1. Пусть для материала пластинки имеем: $E^+ = модуль$ упругости ври чистом растяжении; $E^- = модуль$ упругости при чистом сжатии; $G^- = модуль$ сдвига при чистом сдвиге; $v^+ u^- = coorectremetering и соорфициенты Пуассона (<math>E^+v^- = E^-v^+$). Предполагается, что востоянные упругости остаются неизменными при любых сложных напряженных состояниях [3].

Согласно [1,3,4] принимается, что в зависимости от знаков нормальных напряжений σ'_{μ} и σ'_{μ} пластинка по толщине h разделяется на две зоны ("слоя") с постоянными толщинами h_{μ} ($h_{\mu} + h_{\mu} = h$).

В основу ставятся следующие известные предположения [4]: нормальные к срединной плоскости перемещения u'_{+} не зависят от координаты z, нормальные напряжения σ'_{+} пренебрежительно малы; доперечные касательные напряжения τ_{+} и τ_{-} по толщине слоя меняются по заданному закону.

Обобщенный закон упругости примет следующий вид [1.3,4]:

$$e_{x}^{i} = a_{11}^{i} \sigma_{x}^{i} + a_{12}^{i} \sigma_{y}^{i} , \quad e_{y}^{i} = a_{22}^{i} \sigma_{y}^{i} + a_{12}^{i} \sigma_{z}^{i}$$

$$e_{xy}^{i} = a_{55}^{i} \tau_{xy}^{i} , \quad e_{32}^{i} = a_{55}^{i} \tau_{xz}^{i} , \quad e_{34}^{i} = a_{55}^{i} \tau_{35}^{i}$$
(1.1)

где для коэффициентов упругости в зависимости от знаков нормальных напряжений имеем

при
$$\sigma'_{x} > 0$$
, $\sigma'_{y} > 0$ $a'_{11} = a'_{22} = \frac{1}{E^{*}}$
при $\sigma'_{x} < 0$, $\sigma'_{y} < 0$ $a'_{11} = a'_{12} = \frac{1}{E^{-}}$
при $\sigma'_{x} > 0$, $\sigma'_{y} < 0$ $a'_{11} = \frac{1}{E^{*}}$, $a'_{22} = \frac{1}{E^{-}}$
при $\sigma'_{x} < 0$, $\sigma'_{y} > 0$ $a'_{11} = \frac{1}{E^{-}}$, $a'_{22} = \frac{1}{E^{-}}$

для коэффициентов a_{12} и a_{66} в независимости от знаков напряжений имеем

$$a_{12} = -\frac{v^*}{E^*} = -\frac{v^*}{E^*}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_p}$$

Разрешая (1.1) относительно напряжений, получим

$$\sigma_{x}^{i} = b_{11}^{i} e_{x}^{i} + b_{12}^{i} e_{y}^{i} , \quad \sigma_{y}^{i} = b_{22}^{i} e_{y}^{i} + b_{12}^{i} e_{x}^{i}$$

$$\tau_{xy}^{i} = b_{66}^{i} e_{xy}^{i} , \quad \tau_{xz}^{i} = b_{66}^{i} e_{xz}^{i} , \quad \tau_{yz}^{i} = b_{66}^{i} e_{yx}^{i}$$
(1.2)

где для упругих постоянных имеем

$$b_{11}^{i} = \frac{a_{22}^{i}}{\Omega^{i}}, \quad b_{22}^{i} = \frac{a_{11}^{i}}{\Omega^{i}}, \quad b_{12}^{i} = \frac{a_{12}}{\Omega^{i}}$$

$$\Omega^{i} = a_{11}^{i}a_{22}^{i} - a_{12}^{2}, \quad b_{66}^{i} = \frac{1}{a_{66}^{i}} = G_{p}$$
(1.3)

Полагая что пластинка загружена лишь нормально приложенной к лицевым поверхностям ($z = h_1$, $z = -h_2$) нагрузками Z^- и $Z^$ соответственно для поперечных касательных напряжений, запишем [4]

$$\tau_{xz}^{i} = \left(1 - \frac{z^{2}}{h_{i}^{2}}\right) \varphi , \quad \tau_{yz}^{i} = \left(1 - \frac{z^{2}}{h_{i}^{2}}\right) \psi$$
(1.4)

где $\varphi = \varphi(x), \quad \psi = \psi(x)$ – искомые функции.

Для деформаций в случае цилиндрического изгиба по координате х имеем

$$e'_{x} = \frac{\partial u'_{x}}{\partial x}, \ e'_{y} = 0, \ e'_{x} = \frac{\partial u'_{z}}{\partial z} = 0$$

$$e'_{xy} = \frac{\partial u'_{y}}{\partial x}, \ e'_{yz} = \frac{\partial u'_{y}}{\partial z}, \ e'_{xz} = \frac{\partial u'_{x}}{\partial z} + \frac{\partial u'_{z}}{\partial x}$$
(1.5)

где $u_{x}^{i}(x,z)$, $u_{z}^{i}(x,z)$, $u_{z}(x)$ — перемещения какой-либо точки пластинки.

Пусть при; z = 0 (координатная плоскость x0y совпадает с плоскостью разделения "слоев") $u_z^i = w(x)$, $u_z^i = u(x)$, $u_z^i = v(x)$. где и. и. у – искомые перемещения координатной плоскости x0y.

Согласно (1.2), (1.4), (1.5), а также при предыдущем предположении, для компонент любой точки пластинки получим

$$u_{x}^{i} = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + z a_{66} \left(1 - \frac{z}{3h_{*}^{2}} \right) \varphi$$

$$u_{y}^{i} = v + z a_{66} \left(1 - \frac{z^{2}}{3h_{*}^{2}} \right) \psi, \quad u_{z}^{i} = w$$
(1.6)

Далее, согласно (1.5) и (1.2), наряду с (1.4), для отличных от нуля напряжений получим

$$\sigma_{x}^{i} = b_{11}^{i} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + z a_{66} \left[1 - \frac{z^{2}}{3h_{*}^{2}} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{y}^{i} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \sigma_{x}^{i} \quad \tau_{xy}^{i} = b_{66} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + z a_{66} \left(1 - \frac{z^{2}}{3h_{*}^{2}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$$
(1.7)

Согласно определению при z = 0 σ, откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
 (1.8)

Теперь, окончательно для напряжений имеем (1.4) и

$$\sigma'_{y} = -zb_{11}'\frac{\partial^{2}w}{\partial x} + zb_{11}'a \left(1 - \frac{z}{3h_{i}^{2}}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\sigma'_{y} = \frac{a_{12}}{a_{22}'}\sigma'_{x}, \ \tau_{xy} = b_{66}\frac{\partial v}{\partial x} + z\left(1 - \frac{z}{3h_{i}^{2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
(1.9)

Эти напряжения вызывают внутренние усилия и моменты, которые запишутся следующим образом:

$$T_{1} = K_{11} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - \frac{5}{6} a_{66} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$T_{2} = K_{12} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - \frac{5}{6} a_{66} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$S = b_{66} h \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{5}{12} \left(h_{2}^{2} - h_{1}^{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$N_{1} = \frac{2}{3} h \varphi , \quad N_{2} = \frac{2}{3} h \psi$$
(1.11)

$$M_{1} = -D_{11} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{4}{5} D_{11} a_{66} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$M_{2} = -D_{12} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{4}{5} D_{12} a_{66} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
 (1.12)

$$H = -\frac{1}{2}b_{66}\left(h_2^2 - h_1^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4}{15}\left(h_2^3 - h_1^3\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

где

$$K_{11} = \frac{1}{2} \left(b_{11}'' h_2^2 - b_{11}' h_1^2 \right), \quad K_{12} = \frac{1}{2} \left(b_{12}'' h_2^2 - b_{12}' h_1^2 \right)$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \left(b_{11}'' h_2^3 - b_{11}' h_1^3 \right), \quad D_{11} = \frac{1}{3} \left(b_{12}'' h_2^3 - b_{12}' h_1^3 \right)$$

(1.13)

Здесь мы имеем лишь жесткости взаимовлияния K_{ik} и жесткости изгиба D_{ik} . Отсутствие жесткостей ратяжения-сжатия C_{ik} , которые имеют вид [5]

$$C_{11} = b_{11}'' h_2 + b_{11}' h_1$$
, $C_{12} = b_{12}'' h_2 + b_{12}' h_1$ (1.14)
обусловлено равенством (1.8).

Отметим, что в формулах (1.13) и (1.14) штрихами отмечены соответствующие "слои"

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки
 | Z = Z + Z | имеют следующий вид |1-4|;

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 , \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \frac{\partial N_1}{\partial x} = -Z$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} = N_1, \frac{\partial H}{\partial x} = N_2$$
(2.1)

Согласно первому уравнению равновесия (2.1) и первой формуле (1.10), полагая $K_{11} = 0$, с учетом равенства $h_1 + h_2 = h$, для искомых толщин образованных "слоев" h_1 имеем

$$h_1 = \frac{\sqrt{b_{11}''}}{\sqrt{b_{11}''} + \sqrt{b_{11}'}} h , \quad h_2 = \frac{\sqrt{b_{11}'}}{\sqrt{b_{11}''} + \sqrt{b_{11}'}} h$$
(2.2)

Подставляя значения внутренних усилий и моментов из $[1.10] \cdot (1.12)$ в оставленные уравнения (2.1), совместно с (1.8) получим следующую систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций $w(x), u(x), v(x), \phi(x), \psi(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad \frac{2}{3}h \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -Z$$

$$b_{66}h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{5}{12} \left(h_z^2 - h_1^2\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{4}{5} D_{31} a_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{3}h\varphi = 0$$

$$\left(h_z^3 + h_1^3\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{15}{8} b_{66} \left(h_z^2 - h_1^2\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{5}{2}h\psi = 0$$
(2.3)

В этих уравениях разномодульность материала пластинки отражается в упругих постоянных a_{66} и b_{66} , в жесткости изгиба D_{11} и в геометрических параметрах h_i .

Из (2.3) после очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial^{2} \psi}{\partial x^{2}} - k^{2} \psi = 0, \quad \frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}} = -\frac{5}{12} \frac{h_{1}^{2} - h_{1}^{2}}{h b_{66}} k^{2} \psi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{3}{2h} Z, \quad \phi = -\frac{3}{2h} \int Z dx - \frac{3}{2h} C_{1} \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial^{3} w}{\partial x^{2}} + \frac{6}{2h} D_{11} a_{66} \frac{\partial Z}{\partial x} = \int Z dx + C_{1}, \quad u = C_{0}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\delta h} = \int \lambda dx + C_1 ,$$

где С, – постоянные интегрирования

$$k^{2} = 80 h^{2} \left[32h \left(h_{2}^{3} + h_{1}^{3} \right) - 25 \left(h_{1}^{2} - h_{1}^{2} \right)^{2} \right]^{-1}$$
(2.5)

К уравнениям (2.3) и (2.4) должны быть присоединены граничные условия, которые ничем не отличаются от граничных условий угочненной теории пластин [4].

3. Рассмотрим длинную прямоутольную пластинку, несущую поперечную, равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью Z = q. Пусть пластинка имеет ширину l и шарнирно оперта по своим длинным сторонам x = l, x = 0. В этом случае изогнутая поверхность участка пластинки, достаточно удаленного от ее коротких сторон. Будет близка к цилиндрической.

Граничные условия запишем следующим образом (возможны и иные варианты) [4]:

при
$$x = 0$$
 $w = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $M_1 = 0$, $\psi = 0$
при $x = l$ $w = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $M_1 = 0$, $\psi = 0$ (3.1)

Из (2.4) для искомых функций легко записать

$$w = c_9 , \quad \psi = c_5 e^{kx} + c_6 e^{-kx} , \quad T_1 = c_{10} = 0$$

$$v = -\frac{5}{12} \frac{h_2^2 - h_1^2}{hb_{66}} \left(c_5 e^{kx} + c_6 e^{-kx} \right) c_7 x + c_8$$
(3.2)

$$D_{11}w = q\frac{x^{1}}{2\varphi} + c_{1}\frac{x^{2}}{6}c_{2}\frac{x^{2}}{2} + c_{3}x + c_{4} \qquad \varphi = -\frac{3q}{2h}x - \frac{3c_{1}}{2h}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), определим постоянные интегрирования.

Далее для искомых функций получим

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \psi = 0, \quad \varphi = \frac{3q}{2h} \left(\frac{l}{2} - h\right)$$

$$w = \frac{qx}{D_{11}} \left(\frac{x^3}{24} - \frac{x^2l}{12} + \frac{l^3}{24}\right) + \frac{3q}{5h} a_{66} x \left(l - x\right)$$
(3.3)

Имея значения искомых функций с помощью формул (1.4), (1.9)-(1.13) и (2.2), легко найти все расчетные величины задачи.

Формулы (3.3) внешне ничем не отличаются от соответствующих формул уточненной теории [4]. Однако D_{11} и a_{66} имеют иное содержание. В частности, подставляя в (1.13) значения h_{1} из (2.2), для жесткости изгиба D_{11} получим

$$D_{31} = \frac{b_{11}^* b_{11}'}{\left(\sqrt{b_{11}^*} + \sqrt{b_{11}'}\right)^2}$$
(3.4)

В частности, полагая $v^* = 0$, $v^- = 0$, $E^- = 2E$, $E^- = E$, $b_{66} = 0.5E$. получим

 $h_1 = 0.4142 h$, $h_2 = 0.5858 h$, $D_{11} = 0.1144 E h^3$ $h_1 = h_2 = 0.5h$, $D_{11} = 0.1667 E h^3$

Если же полагать $v^* = v^* = 0$, $E^* = E^* = E$, $b_{66} = 0.5E$, то получим

$$h_1 = h_2 = 0.5h$$
, $D_{11} = 0.0833 Eh^3$

Сравнивая эти результаты, заключаем, что неучет разномодульности может принести к ошибкам по h_1 от 17% до 20%, а по жесткости D_{11} — от 27-46%.

Что же касается напряжений, то, естественно, значительное перемещение нейтрального слоя и непосредственное влияние модулей упругости существенно изменяют качественную и количественную картины напряженного состояния пластинки.

4. Рассмотрим длинную прямоутольную пластинку, несущую поперечную и равномерно распределенную нагрузки с интенсивностью Z = q. Пластина имеет ширину l и заделана по своим длинным сторонам x = 0, x = l.

Рассмотрим два варианта заделки

a) при x = 0, x = l

$$w = 0, v = 0, u = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \psi = 0$$
 (4.1)

6) при x = 0, x = l

$$w = 0$$
, $u = 0$, $v = 0$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}$, $\psi = 0$ (4.2)

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (4.1), окончательно для искомых функций получим

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \psi = 0, \quad \phi = \frac{3\sigma}{2h} \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

$$m_{w} = \frac{qx^{2}}{24D_{\eta}} (x - l)^{2}, \quad w_{max} = \frac{ql}{384D_{\eta}}$$
(4.3)

Отметим, что здесь для u, v, ψ и ϕ получим тот же результат, что и в (3.3), а для нормального перемещения – классическую формулу с новой жесткостью изгиба D_{11} . Как известно, в этой задаче пластинка разделяется на отдельные зоны по координате x. Вблизи от краев растянутые зоны находятся в слоях, где z < 0, а в середине – в слоях, где z > 0. Однако, элементарной подстановкой h, из (2.2) в D_{11} (1.13) легко ноказать, что жесткость изгиба по ширине пластинки (по координате x) остается неизменной.

Следует отметить также. что величины (длины) крайних (а) и центральной (в) зон пластинки. (которые определяются из условия $M_{\star} = 0$), в отличие от классической теории, существенно зависят от жесткости изгиба D_{11} (содержащей особенности разномодульности) и постоянной упругости b_{66} , характеризующего деформации сдвига.

В частности, имеем

$$a = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{144 D_{11}}{5b_{66} h l^2} \right)} \right)$$

$$b = l \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{144 D_{11}}{5b_{66} h l^2} \right)}$$
(4.4)

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (4.2), получим

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad \psi = 0, \quad \phi = \frac{3q}{2h} \left(\frac{l}{2} - x \right)$$
$$v = \frac{qx^3}{24D_{11}} \left(x - l \right)^2 + \frac{3a_{50}qx}{4h} \left(l - x \right), \quad w_{max} = \frac{ql^4}{384D_{11}} \left(1 + \frac{72D_{11}}{b_{66}hl^2} \right) \quad (4.5)$$

В этом случае имеем иную картину. Нормальное перемещение зависит также от деформаций поперечных сдвигов. При этом количественно изменяются также размеры зон по координате х. В частности в этом случае имеем

$$a = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{324 D_{11}}{5b_{66} h l^2} \right)} \right)$$

$$b = l \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{324 D_{11}}{5b_{66} h l^2} \right)}$$
(4.6)

5. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поверечную равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью Z = q. Пластинка имеет ширину l и в отличие от предыдущих задач, по алинным сторонам x = 0, x = l имеет различные типы закрепления. Считается, что при x = 0 пластинка шарнирно оперта, а при x = l заделана, т.е. имеет следующие граничные условия:

$$mp_{\rm H} x = 0 \quad u = 0, \ v = 0, \ w = 0, \ M_{\rm e} = 0, \ \psi = 0$$

при
$$x = l$$
 $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\psi = 0$ (5.1)

Согласно (3.2). удовлетворяя граничным условиям (5.1), для искомых функций получим

$$u = 0, v = 0, \quad \psi = 0$$

$$\phi = \frac{3q}{2h} \left(\frac{3}{8}l - x \right) - \frac{27q}{10} \frac{a_{66}D_{11}}{h^2 l}$$

$$w = \frac{qx}{48D_{11}} \left(2x^3 - 3x^2l + l^3 \right) + \frac{3q}{10} \frac{a_{66}x}{hl} (x - l)^2$$
(5.2)

Рассматривая (5.2), замечаем, что несимметричность граничных условий существенно изменяет влияние как разномодульности, так и учета поперечных сдвигов.

В этой задаче пластинка по ширине разделяется на две зоны. В первой зоне $0 \le x \le c$ верхние слои пластинки сжаты, а нижние растянуты, а во второй зоне $c \le x \le l$ — наоборот Однако, как и раныше, D_{11} остается постоянным. Приравнивая к нулю M_1 (для этой задачи см. (1.12) и (5.2)), для c получим

$$c = \frac{3}{4}I\left(1 - \frac{24}{5}\frac{a_{00}D_{11}}{I^{2}h}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

- Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.:Наука, 1982. 317с.
- Саркисян К.С. Устойчивость элементов конструкций из разномодульных материалов с учетом поперечных сдвигов. – Ереван. 1987. Кандидатская диссертация.
- 3. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся расляжению и сжатию. Ереван: Из-во РАУ, 2004. 187 с.
- 4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики НАП Армении Поступила в редакцию 11.10.2004

«ԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄՒԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57, №4, 2004

Механика

УДК 539.3

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕС-КОГО ПРОСТРАНСТВА С ЧАСТИЧНО ЭЛЕКТРОДИРО-ВАННЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլչաինսկի

Մասամբ էլեկտրողավորված անցբով և թունելային ճարով պլեզոկերամիկ աարածության էլեկտրական գրգռում

Դիտարկվում է էլնկտրուառաձգականություն հակահարթ խառը եզրային խնդիր անցքի և ճարի տեւցով բունելային անհամասեռություններով պյեզուկերամիկ աարածության տատանումների մասին Էլեկտրական դաշտի գրգոումը տեղի է ունենում էլեկտրական պոտենցիալների տարբերության հաշվին, որոնք հաղորդվում են լարումներից ազսատ անցքի մակերևույթի վրա տեղավորված էլեկտրույնելի համակարգին ճաքի ծայրակետերում սաեցի լարումների ուժգնության գործակիցների համար ստացված է բանաձև և թվային վերլուծության միջոցով բացահայտված են բնութագրիչ մեծությունների փոփոխման օրինալափությունները.

D.Bardzokas, M.I., Filshtinsky

Electric excitation of a piezoceramic space with a partially electrodized opening and tunnel crack

Рассиатривается антиплоская смешанная грепичная задача электроупругости о колебаниях пьезокерамического пространства с тупнельными однородностями. Получена формула для коэффициента интенсивности сдвиговых папряжений в вершинах трещины и посредством численного акализа выяснены закономерность изменения характерных зеличии.

1. Введение

Многие актуальные научные И технологические проблемы современной инженерии связаны С исследованиями процессов распространения волн в пьезоэлектриках и с определением динамической прочности в окрестности различных типов неоднородностей. Решение возникающих в этом случае сложных проблем требует применения современных математических средств и методов, в частности, методов динамической теории упругости. Развитие этих методов отражено в монографиях [1-6], которые появились в последние десятилетия.

В пьезоэлектрических средах с неоднородностями взаимодействие электрических и механических полей может приводиться к электрическому, механическому или смещанному электромеханическому разрушению. Края электродов являются источниками концентрации компонентов электроупругого поля, и следовательно, в эгих областях возможно зарождение микротрещин или развитие пробоя [7]. Некоторые аспекты механики разрушения пьезокерамических тел рассмотрены в [8,9].

В предположении, что электроды невесомы и имеют пренебрежимо малую жесткость, были рассмотрены многие статические и динамические граничные задачи электроупругости для пьезоэлектриков с поверхностными электродами [6,10-11]. При этом, в основном, изучались случаи, когда расположение электродов на поверхности тела имеет либо периодический (бесконечное число электродов), либо симметричный характер, что позволяло применять для решения задач эффективные в этих случаях методы рядов и интегральных преобразований.

Полход, опирающийся на метод граничных интегральных уравнений, исследованию гармонических колебаний к бесконечного пьзокерамического цилиндра, возбуждаемого произвольной системой электродов, был предложен в [12]. При помощи специальных интегральных представлений решений антиплоская граничная задача электроупругости была сведена ĸ системе сингулярных интегродифференциальных уравнений с разрывными ядрами. Для ее решения была разработана модифицированная схема метода квадратур. ΠΟΔΧΟΔΟΜ были рассмотрены Указанным антиплоские залачи электроупругости о гармонических колебаниях пьезокерамической среды с туннельным вдоль оси симметрии материала отверстием [13.14] Нестационарная динамическая задача о возбуждении сдвиговых воли в пьезосреде с электродированной полостью электрическим импульсом рассмотрена в [15]. Дифракция волны сдвига на тупнельных полостях. цилиндрических включениях в пьезокерамическом трещинах 55 полупространстве и полуслое методом сингулярных интегральных уравнений исследовалась в [16-19]. Статические и динамические антиплоские задачи электроупругости для кругового цилиндра с одним и двумя симметрично расположенными электродами методом рядов изучались в [6] Колебания бесконечных пьезокерамических цилиндров с лефектами типа тупнельных трешин и линейных включений (стрингеров) в условиях прямого пьезоэлектрического эффекта рассматривались в [13].

В данной статье рассматривается антиплоская смешанная граничная задача электроупругости о колебаниях пьезокерамического пространства тупнельными неоднородностями типа отверстия и трещины. Возбуждение электроупрутого поля происходит за счет разностей электрических потенциалов, подаваемых на систему электродов, расположенных на свободной от напряжений поверхности отверстия. Даются корректные интегральные представления решений, с учетом граничная задача сводится которых ĸ системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода с разрывными ядрами. Получена формула для коэффициента интенсивности сдвиговых напряжений в вершинах трещины. Приводятся результаты численной реализации алгоритма. характеризующие поведение компонентов электроупругого поля в области и на границе кусочно-однородного пространства в условиях обратного пьезоэлектрического эффекта.

2. Постановка задачи

Рассмотрим отнесенное к декартовой системе координат Ox_1, x_2, x_3 пьезокерамическое пространство, содержащее туннельные вдоль оси отверстие и криволинейную трещину L. На свободной от механических усилий поверхности отверстия располагаются 2n бесконечно длинных в направлении оси x_2 тонких электродов с заданными разностями электрического потенциала. Неэлектродированные участки поверхности отверстия сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы k-то электрода определены величинами β_{24-1} и β_{24} (k = 1, 2n), а электрический потенциал на нем задан величиной $\phi_4^* = \text{Re}(\Phi_4^*e^{-1})$ (ω – круговая частота, t – время). Предполагается, что кривизны контуров L и C являются функциями класса Гельдера [20], а электроды – идеально проводящие и абсолютно гибкие. Взаимное расположение неоднородностей, их конфигурации, а

также расположение поверхностных электродов не могут быть вполне произвольными: налагаемые на них требования будут указаны ниже.

В данных условиях в кусочно-однородном пространстве имеет место электроупругое поле, соответствующее состоянию антиплоской деформацин [6]. Полная система дифференциальных уравнений в квазистатическом приближении включает следующие соотношения: уравнение движения

$$\partial_i \sigma_{i3} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$
 (2.1)

материальные уравнения среды

$$\sigma_{m1} = c_{AA}^E \partial_m u_3 - e_{,5} E_m, \quad D_m = e_{15} \partial_m u_3 + e_{11} E_m \quad (m = 1, 2)$$
(2.2)
и уравнения электростатики

$$\operatorname{div} D = 0, \qquad E = -\operatorname{grad} \phi \tag{2.3}$$

В (2.1) – (2.3) σ_{m3} (m = 1,2) – компоненты тензора напряжения, u_3 – компонента вектора упругого перемещения в направлении, параллельном оси x_3 ; E и D – векторы напряженности и индукции электрического поля; ϕ – электрический потенциал; e_{15} и – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях, соответственно; ρ – массовая плотность материала.

Систему уравнений (2.1)-(2.3) сведем к дифференциальным уравнениям относительно перемещения и, и электрического потенциала ф

$$e_{44} \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad e_{15} \nabla^2 u_2 - \vartheta_{11} \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.4)$$

Из (2.4) следуют соотношения

$$\nabla^{2} u_{1} - c^{-2} \frac{\partial^{*} u_{1}}{\partial t^{2}} = 0, \quad \nabla^{2} F = 0$$

$$\phi = \frac{e_{15}}{\vartheta_{11}^{*}} u_{3} + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^{E} \left(1 + k_{15}^{2}\right)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^{E} \vartheta_{11}^{e}}}$$
(2.5)

где с—скорость волны сдвига в пьезокерамической среде, k_{15} коэффициент электромеханической связи [5].

Механические и электрические величины при учете (2.2). (2.3) и (2.5) можно выразить через функции u_2 и F по формулам [13]

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{44}^{E} \left(1 + k_{15}^{2} \right) u_{3} + e_{15} F \right]$$
(2.6)

$$D_1 - iD_2 = -2 \mathfrak{z}_{11}^{\mathfrak{e}} \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F + \frac{e_{15}}{\mathfrak{z}_{11}^{\mathfrak{e}}} u_3 \right), \qquad z = x_1 + ix_2$$

Полагая $u_3 = \operatorname{Re}(U_3 e^{-i\pi t})$, $\phi = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\pi t})$ и $F = \operatorname{Re}(e^{-i\pi t}F^*)$, запишем уравнения (2.5) относительно амплигудных величии:

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad \Phi = \frac{e_{15}}{\mathfrak{I}_{11}} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}$$
 (2.7)

где у – волновое число.

Считая, что берега трещины свободны от механических напряжений, представим механические и электрические граничные условия на контуре *L* следующим образом [6]:

$$\left(\sigma_{13}\cos\psi + \sigma_{23}\sin\psi\right)^{\pm} = 0 \tag{2.8}$$

$$E_s^* = E_s^-, \quad D_s^* = D_s^-$$
 (2.9)



Фиг. 1. Среда с частично электродированным отверстием и криволинейной трещиной. Здесь E_1 и D_2 представляют собой касательную компоненту вектора электрической напряженности и нормальную компоненту вектора электрической индукции соответственно: $\Psi =$ угол между нормалью к левому берегу L и осью Ox_1 ; знаки «плюс» и «минус» относятся к левому и правому берегам разреза при движении от его начала a к концу b (фиг.1). Условия [2.9) выражают то обстоятельство, что соответствующие компоненты электрического поля не претерпевают

скачков при переходе через разрез L.

С учетом представлений (2.5), (2.6) граничные условия на поверхностях отверстия и трещины можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^{\varepsilon} \left(1 + k_{15}^2 \right) U_3 + e_{15} F^* \right\} = 0 \text{ Ha } C$$

$$F^* + \frac{e_{15}}{3_{11}^{\varepsilon}} U_3 = \Phi^* \left(\zeta^* \right), \quad \zeta^* \in C_{\phi}, \quad D_{\phi}^* = -\vartheta_{11}^{\varepsilon} \frac{\partial F^*}{\partial n} = 0 \text{ Ha } C \setminus C_{\phi} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^{\varepsilon} \left(1 + k_{15}^2 \right) U_3 + e_{15} F^* \right\}^* = 0 \text{ Ha } L$$

где C_{ϕ} — часть контура C_{+} соответствующая электродированной новерхности отверстия; оператор $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к граничному контуру.

Таким образом, задача заключается в определении функций U, и F^{*} из уравнений (2.7), граничных условий (2.10) и электрических условий (2.9) на L.

3. Сведение граничной задачи электроупругости к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений

Следуя [13], представим амплитуды искомых функций в виде

$$U_{3}(z) = \int_{C} p(\zeta^{*}) H_{0}^{(1)}(\gamma r_{1}) ds - \frac{i}{4} \int_{L} [U_{3}] \frac{\partial H_{0}^{(1)}(\gamma r)}{\partial n_{*}} ds$$

$$F^{*}(z) = \int_{C} f(\zeta^{*}) \frac{\partial}{\partial n_{s}} I nr_{1} ds + \frac{c_{13}}{2\pi \mathfrak{s}_{11}^{*}} \int_{L} \left[\frac{dU_{3}}{ds} \right] \arg(z - \zeta) ds \qquad (3.1)$$

$$r = |z - \zeta|, \quad r_{1} = |\zeta^{*} - z|, \quad \zeta \in L, \quad \zeta \in C$$

Здесь $H_{v}^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода порядка v, ds – элемент длины дуги контура, по которому производится интегрирование.

Интегральные представления (3.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.7), обеспечивают наличие скачка перемещения и непрерывность вектора напряжения на *L*, а также автоматическое выполнение электрических условий (2.9).

Подставляя предельные значения функций (3.1) и их производных при $z \to \zeta_0 \in L$ и $z \to \zeta_0^* \in C$ в граничные условия (2.10), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$2ip(\zeta_{0}^{*}) + \int_{C} p(\zeta^{*})g_{1}(\zeta^{*},\zeta_{0}^{*})ds + \int_{C} f^{*}(\zeta^{*})g_{2}(\zeta^{*},\zeta_{0}^{*})ds + \\ + \int_{L} \left[\frac{dU_{3}}{ds} \right]g_{3}(\zeta_{0},\zeta_{0}^{*})ds + \int_{L} [U_{3}]g_{4}(\zeta,\zeta_{0}^{*})ds = 0 \\ -\pi f(\zeta_{0}^{*}) + \int_{C} p(\zeta^{*})g_{3}(\zeta^{*},\zeta_{0}^{*})ds + \int_{C} f(\zeta^{*})g_{3}(\zeta^{*},\zeta_{0}^{*})ds + \\ + \int_{C} \left[\frac{dU_{3}}{ds} \right]g_{7}(\zeta,\zeta_{0}^{*})ds + \int_{C} [U_{3}]g_{8}(\zeta,\zeta_{0}^{*})ds = \Phi^{*}(\zeta_{0}^{*}), \quad \zeta_{0}^{*} \in C_{0} \right]$$

$$(3.2)$$

$$(f'(\zeta^{*})g_{9}(\zeta^{*},\zeta_{0}^{*})ds + \int_{L} \left[\frac{dU_{3}}{ds} \right]g_{10}(\zeta,\zeta_{0}^{*})ds = 0, \quad \zeta_{0}^{*} \in C \setminus C_{0}$$

$$(p(\zeta^{*})g_{11}(\zeta^{*},\zeta_{0})ds + \int_{C} f'(\zeta^{*})g_{12}(\zeta^{*},\zeta_{0})ds + \int_{L} \left[\frac{dU_{3}}{ds} \right]g_{13}(\zeta,\zeta_{0})ds + \int_{L} \left[\frac{dU_{3}}{ds}$$

в которой ядра $g_m \ (m=1.14)$ определяются следующими выражениями:

$$g_{1}(\zeta^{*},\zeta^{*}_{\circ}) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^{*} - \zeta^{*}_{0}} + \gamma H_{1}(\gamma r_{10}) \cos(\psi_{10} - \alpha_{10})$$

$$g_{2}(\zeta^{*},\zeta^{*}_{\circ}) = \frac{e_{15}}{c_{44}^{E}(1 + k_{15}^{2})} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^{*} - \zeta^{*}_{0}}, \qquad g_{3}(\zeta,\zeta^{*}_{\circ}) = \frac{1}{2\pi(1 + k_{15}^{2})} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta^{*}_{0}}$$

$$g_{4}(\zeta,\zeta^{*}_{\circ}) = \frac{i\gamma^{2}}{\delta} \left[H_{2}(\gamma r_{20}) \cos(\psi + \psi_{10} - 2\alpha_{20}) - H_{0}^{(1)}(\gamma r_{20}) \cos(\psi - \psi_{10}) \right]$$

$$g_{5}(\zeta^{*},\zeta^{*}_{a}) = \frac{e_{15}}{9_{11}^{i}} H^{(1)}(\gamma r_{10}), \quad g_{6}(\zeta^{*},\zeta^{*}_{a}) = \operatorname{Re} \frac{e_{15}}{\zeta^{*} - \zeta^{*}_{a}}$$

$$g_{7}(\zeta,\zeta^{*}_{a}) = \frac{e_{15}}{2\pi g_{11}} \alpha_{20}, \quad g_{8}(\zeta,\zeta^{*}_{a}) = -\frac{e_{15}}{4g_{11}} \gamma H^{(1)}_{1}(\gamma r_{20}) \cos(\psi - \alpha_{20})$$

$$g_{8}(\zeta^{*},\zeta^{*}_{a}) = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^{*} - \zeta^{*}_{0}}, \quad g_{10}(\zeta,\zeta^{*}_{a}) = -\frac{e_{15}}{2\pi g_{11}^{i}} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta^{*}_{0}}$$

$$g_{11}(\zeta^{*},\zeta^{*}_{a}) = \frac{e}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{ig_{10}}}{\zeta^{*} - \zeta^{*}_{a}} + \gamma H_{1}(\gamma r_{30}) \cos(\psi_{0} - \alpha_{0})$$

$$g_{12}(\zeta^{*},\zeta_{0}) = \frac{e_{15}}{c_{44}^{\varepsilon}(1 + k_{15}^{2})} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^{*} - \zeta_{0}}, \quad g_{13}(\zeta,\zeta_{0}) = \frac{1}{2\pi(1 + k_{15}^{2})} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta_{0}}$$

$$g_{13}(\zeta,\zeta_{0}) = \frac{i\gamma^{*}}{\delta} \left[H_{2}(\gamma r_{0}) \cos(\psi + \psi_{0} - 2\alpha_{0}) - H^{(1)}_{0}(\gamma r_{0}) \cos(\psi - \psi_{0}) \right]$$

$$H_{1}(x) = \frac{2i}{\pi x} + H^{(1)}_{1}(x), \quad H_{2}(x) = \frac{4i}{\pi x^{2}} + H^{(1)}_{2}(x)$$

$$r_{0} = |\zeta_{0} - \zeta_{1}^{i}, \quad \alpha = \operatorname{arg}(\zeta^{*} - \zeta_{1}), \quad r_{10} = |\zeta^{*} - \zeta_{0}^{i}|, \quad \alpha_{10} = \operatorname{arg}(\zeta^{*} - \zeta_{0})$$

$$\psi = \psi(\zeta_{0}), \quad \psi_{1} = \psi(\zeta^{*}), \quad \psi_{0} = \psi(\zeta_{0}), \quad \psi_{10} = \psi(\zeta_{0}^{*}), \quad \zeta^{*}, \zeta^{*}, \zeta^{*} \in L, \; \zeta^{*}, \zeta^{*}, \zeta^{*} \in C$$

Здесь ψ и ψ_1 – утлы между нормалями к контурам L и C и осью Ox_1 соответственно; $\Phi(\zeta_0^*)$ – кусочно-постоянная функция, задающая значения амплитуд электрических потенциалов на электродах.

Для однозначной разрешимости системы (3.2) в классе функций с производными, неограниченными вблизи концов трещины L [20], ее необходимо рассматривать в совокупности с дополнительным условием

$$\int_{L} \left[\frac{dU_3}{ds} \right] ds = 0 \tag{3.3}$$

выражающим равенство нулю скачков перемещения в вершинах *L*. Кроме того, условие (3.3) обеспечивает однозначность интегрального представления функции *F*^{*}(*z*) в (3.1)

Необходимо отметить, что, поскольку возникающие в процессе колебаний отраженные от трещины электроупругие волны превносят дополнительные заряды на парные (питаемые от отдельного генератора) электроды, расположение последних, а также взаимное расположение отверстия и трещины и их конфигурации должны быть таковыми, чтобы эти дополнительные заряды (по абсолютной величине) были одинаковыми. В противном случае система (3.2) становится неразрешимой.

Определив функцин $[U_3], p(\zeta^*)$ и $f(\zeta^*)$ из системы (3.2), во формулам (2.5). (2.6) с использованием представлений (3.1) можно

определить все компоненты электроупрутого поля в кусочно-однородном пространстве.

Вводя параметризацию контура C с помощью равенств $\zeta^* = \zeta^*(\beta), \ \zeta_0^* = \zeta^*(\beta_0) \ (0 \le \beta, \beta_0 \le 2\pi),$ найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов $q_k(\beta)$ на k -м электроде. Принимая во внимание то, что отверстие сопряжено с вакуумом. запишем

$$q_{k}(\beta) = D_{*}^{(k)^{*}}(\beta), \ \beta_{2k-1} < \beta < \beta_{2k}$$

$$(3.4)$$

Здесь $D_{s}^{(k)^{*}}(\beta)$ представляет собой амплитуду нормальной компоненты вектора электрической индукции на участке поверхности отверстия, покрытом k-м электродом. Привлекая интегральное представление (3.1) для функции $F^{*}(z)$, с учетом равенств (3.4), (2.6) находим

$$q_k(\beta_0) = -\vartheta_{11}^* \int_C f'(\zeta^*) \operatorname{Im} \frac{e^{i\gamma s_0}}{\zeta^* - \zeta_0^*} ds, \quad \zeta_0^* \in C_{q_k}$$
(3.5)

где C₄, — часть контура C, на которой расположен k -й электрод.

Интегрируя выражение (3.5) по переменной β₀ в пределах от β₁₁ до получим амплитудное значение суммарного заряда Q_k k-го злектрода, отнесенное к единице его длины. Ток, протекающий через данный электрод и равный току проводимости в цепи генератора, можно определить по формуле

$$I_{k}(t) = \operatorname{Re}\left\{i\omega e^{-i\omega t} \int_{\beta_{24-1}}^{\beta_{24}} q_{k}(\beta_{0})s'(\beta_{0})d\beta_{0}\right\}, \quad s'(\beta_{0}) = \frac{ds}{d\beta_{0}}$$
(3.6)

Отметим, что в случае антиплоской деформации напряжения продольного сдвига на свободной от механической нагрузки поверхности не имеют особенности на краях электродов [7]. Вместе с тем, компоненты вектора электрической индукции обладают особенностями корневого гипа на краях электродов, что непосредственно следует из асимптотического анализа сингулярных интегральных уравнений (3.2) и выражений (3.4), (3.5).

4. Коэффициент интенсивности напряжений в вершинах трещины

Для определения коэффициента интенсивности напряжений K_{uj} [21] получим главную асимптотику сдвигового напряжения на продолжении за вершину трещины. При этом будем исходить из формул определяющих поведение интегралов типа Коши в окрестности концов L в том случас, когда плотность имеет степенную особенность [20]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1}^{\underline{\tau}(\zeta)} \frac{\tau(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \frac{e^{\sigma \tau_{z}} \tau_{0}(a)(z - a)^{-\sigma}}{2i\sin\pi\sigma} + \Lambda_{1}(z), & z \in O(a) \\ -\frac{e^{-\sigma \tau_{0}} \tau_{0}(b)(z - b)^{-\sigma}}{2i\sin\pi\sigma} + \Lambda_{2}(z), & z \in O(b) \end{cases}$$

$$\tau(\zeta) = \frac{\tau_{0}(\zeta)}{(z - c)^{\sigma}}, \quad \sigma = k_{1} + ik_{2}, \quad 0 \le k_{1} \le 1 \end{cases}$$

$$(4.1)$$

Для функции $\Lambda_{m}(z)$ имеют место соотношения

$$\lim_{z\to\sigma}\Lambda_1(z)(z-a)^{\sigma}=0, \quad \lim_{z\to b}\Lambda_2(z)(z-b)^{\sigma}=0.$$

Из асимптотического анализа последнего в (3.2) сингулярного интегродифференциального уравнения в окрестности вершины L следует, что $\sigma = 1/2$. Поэтому, введя параметризацию контура трещины $\zeta = \zeta(\delta)$, можно положить

$$\left[\frac{dU_3}{ds}\right] = \frac{\Omega_0(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} > 0, \quad -1 \le \delta \le 1$$
(4.2)

где функция $\Omega_0(\delta)$ является непрерывной по Гельдеру.

Имеем (оставляя лишь члены, дающие вклад в асимптотику)

$$\sigma_{*} = \operatorname{Re}\left(S_{*}e^{-i\omega t}\right), \quad S_{*} = c_{**}^{t} \frac{\partial U_{2}}{\partial n} + \dots = c_{**}^{t} \left[e^{i\varphi_{*}} \frac{\partial U_{3}}{\partial z} + e^{-i\varphi_{*}} \frac{\partial U_{3}}{\partial z}\right] + \dots \quad (4.3)$$

где c – вершина разреза, $\Psi_c = \Psi(c)$.

На основании (3.1) вынишем главную часть функции (4.3):

$$S_{*}^{\pm} = \frac{c_{*+}^{\pm}}{2\pi} \int_{L} \left[\frac{dU_{3}}{ds} \right] \mathrm{Im} \frac{c^{2m}}{\zeta_{2} - z} ds$$
(4.4)

Используя асимптотические формулы (4.1), с учетом (4.2) находим

$$S_{n}^{0} = \pm c_{44}^{E} \frac{\Omega_{0}(\pm 1)}{2\sqrt{2r's'(\pm 1)}}, \quad s'(\pm 1) = \frac{ds}{d\delta}\Big|_{\delta_{n\pm 1}}$$
(4.5)

Здесь $r^* = |z - c|$ нижний знак относится к вершине c = 0, верхний – к c = b

Исходя из (4.5), находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{M}^{*} = \lim_{r^{*} \to 0} \sqrt{2\pi r^{*}} \sigma_{*}^{0} = \pm \frac{c_{44}^{E}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s^{*}(\pm 1)}} \operatorname{Re}[\Omega_{0}(\pm 1)e^{-i\omega}]$$
(4.6)

Асимптотика пормальной составляющей вектора электрической индукции на продолжении за вершину разреза такова:

$$D_{s} = D_{1} \cos \psi(\pm 1) + D_{2} \sin \psi(\pm 1) = \pm e_{15} \frac{\operatorname{Re}[\Omega_{s}(\pm 1)e^{-s\alpha}]}{2\sqrt{2r^{*}s'(\pm 1)}}$$
(4.7)

Остальные электрические величины в окрестности *L* ограничены. В самом деле, из уравнений состояния (2.2) имеем

$$\sigma_n = c_{44}^{\varepsilon} \frac{\partial u_3}{\partial n} - e_{15} E_n, \qquad D_n = e_{15} \frac{\partial u_3}{\partial n} + \mathfrak{s}_{11}^{\varepsilon} E_n \qquad (4.8)$$

где D_n — пормальная компонента электрической индукции на дуге L', как угодно близкой к L. Поскольку $[\sigma_n] = [D_n] = 0$ и определитель системы (4.8) отличен от нуля, находим $[\partial u_n/\partial n] = [E_n] = 0$. Таким образом, вектор электрической напряженности E непрерывно продолжим через разрез.

5. Численные результаты

Рассмотрим пьезокерамическое пространство (материал-PZT-4 [22]. содержащее отверстие эллиптического поперечного сечения и трещину, контур которой представляет собой параболу. Допустим, что возбуждение пространства осуществляется двумя электродами с разностью амплитуд вотенциалов 2Ф°. Параметрические уравнения контуров *L* и *C* соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \delta e^{i\delta} (p_1 + ip_2 \delta) + h, \quad \delta \in [-1, 1] \\ \zeta^* &= R, \cos\beta + iR_2 \sin\beta, \quad \beta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$
(5.1)

гле 9 - угол, характеризующий ориентацию трещины в пространстве.

Решение системы интегродифференциальных уравнений (3.2) совместно с (3.3) с учетом (5.1) проводилось по специальной схеме метода квадратур [13].



Фит. 2. Изменение относительного суммарного электрического заряда на электроде в функции пормализованного волнового числа $\beta_1 = 5\pi/14, \beta_3 = 9\pi/14,$

$$\beta_1 = 19\pi/14, \beta_4 = 23\pi/14$$





Фиг. 3. Изменение относительного коэффициента интенсивности напряжений в функции нормализованного волнового числа

$$\beta_1 = 5\pi/14, \beta_2 = 9\pi/14, \beta_3 = 19\pi/14, \beta_4 = 23\pi/14$$

Фиг. 4. Изменение величины $\eta^{\pm} = \arg(\Omega_0(\pm 1))$ в функции нормализованного волнового числа $\beta_1 = 5\pi/14$, $\beta_2 = 9\pi/14$, $\beta_3 = 19\pi/14$, $\beta_4 = 23\pi/14$.





Фиг. 5. Изменение относительного суммарного электрического заряда на электроде в функции нормализованного волнового числа $\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$

авного Фиг. 6. Изменение относительного даа на коэффициента интенсивности мали- напряжений в функции числа нормализованного волнового числа $\beta_1 = \pi/6, \ \beta_2 = 5\pi/6,$

$$\beta_3 = 7\pi/6, \ \beta_4 = 11\pi/6$$

Поведение величины $Q^* = |Q/(\mathfrak{s}_{11} \Phi^*)|$ (Q – амплитуда суммарного заряда на электроде) в функции нормализованного волнового числа уR представлено на фиг.2. Кривая 1 построена для значений параметров $R_1/R_2 = 1, p_1/R_1 = 1, R = 0, h/R_1 = 3, \mathfrak{D} = 0, \beta_1 = 5\pi/14, \beta_2 = 9\pi/14, \beta_3 = 19\pi/14, \beta_4 = 23\pi/14;$ кривая 2-для тех значений, кроме $p_1/R_1 = 3, \mathfrak{D} = \pi/2$ ($R = 0.5(R_1 + R_2), 2l$ – длина разреза).

На фиг 3 и 4 приведены зависимости относительного коэффициента интенсивности напряжений $(K_{III}^{*}) = c_{44}^{E} \sqrt{\pi l/s'(\pm 1)} \Omega_{0}(\pm 1)/(2e_{15}|\Phi^{*}|)$ и $\eta^{*} = \arg(\Omega_{0}(\pm 1))$ от γR для тех же значений параметров и в том же соответствии, что и на фиг.2. Сплошные линии соответствуют вершине a, штриховые – вершине b.

Зная величину $\left(K^{z}_{m}
ight)$, козффициент интенсивности напряжений можно определить по формуле

$$K_{III} = \pm \frac{e_{15} \Phi^*}{\sqrt{I}} (K_{III}) \cos(\omega t - \arg \Omega_0(\pm 1))$$

Для случая большей площади электродного покрытия $(\beta_1 = \pi/6, \beta_2 = 5\pi/6, \beta_3 = 7\pi/6, \beta_4 = 11\pi/6)$ аналогичные результаты расчета представлены на фиг. 5-6. Кривые 1 и 2 здесь соответствуют параметрам $R_1/R_2 = 1, p_1/R_1 = 1, p_2/R_1 = 0, h/R_1 = 3, \beta = 0$ и $\beta = \pi/2$.

Заключительные замечания

Представленный ΠΟΛΧΟΛ к решению смешанной стационарной Коизорнивни задачи электроупругости TOBROASET эффективно исследовать влияние инерционного эффекта на поведение компонентов электроупругого поля в пьезокерамическом пространстве с туннельными неоднородностями достаточно произвольной конфигурации лля различного количества активных электродов. При численном решении системы интегродифференциальных уравнений (3.2) по схеме метода квадратур [13], в силу того, что некогорые ее ядра терият разрыяы, в плотности обладают корневыми особенностями на краях электродов. для астижения удовлетворительной точности следует брагь значительное число узлов разбиения контура сечения полости, что приводит к увелнчению затрат процессорного времени. Несмотря на TO. рассмотренный подход привлекает своей универсальностью, позволяя Исслеловать различные варианты электрического возбуждения сопряженных полей без какого-либо принципиального изменения алгоритма.

Из представленных результатов расчетов следует, что поведение электрических и механических воличин существенно зависит от частоты гармонического нагружения, взаимного расположения и конфигурации неоднородностей, а также расположения и размеров поверхностных электродов. Наличие трещины может значительно усилить динамический эффект. Например, как следует из фиг.5, величина Q^* характеризующая суммарный электрический заряд на электроде, может превысить свой статический аналог в 2.9 раз (кривая 2). В отсутствие трещины это превышение составляет лишь 9% [13]. Отметим также, что в статике ($\omega = 0$) электрическое нагружение пьезокерамической среды в условиях антиплоской деформации не вызывает в ней механических напряжений и возтому коэффициент K_m равен нулю.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Афинским национальным Техническим Университетом и Институтом Механики НАН Армении.

ΛИТЕРАТУРА

- Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids.-Amsterdam; North-Holland Publ Co, 1973.
- Nowacki W. Electromagnetic effects in solid bodies. M. Mir, 1986.-160p [in Russian].
- Maugin G.A. Continuum mechanics of electromagnetic solids Amsterdam New York: North-Holland, 1988.–488p.
- 4. Sih G.C. (ed.)Elastodynamic crack problems.-Leyden: Noordhoff; 1977

×

- Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul ga N.A. Electroelasticity. (Mcchanics of coupled fields in construction elements, Vol. 5).-Kyiv, Naukova Dumka, 1989. -280p. [in Russian].
- Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity New York Gordon and Breach, 1988.
- Bardzokas D, Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges.-Strength of Matrials, 1994, No. 7, pp. 510-513 [in Russian].

- Parton V.Z. Fracture mechanics for piezoelectric materials. -Acta Astronautica, 1976, Vol. 3, No 9-10, pp. 671-683.
- 9. Suo Z., Kuo C.M., Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics.-J. Mech. Phys. Solids, 1992, No. 40, pp.739-765.
- 10. Kudryavtsev B.A. Electroelastic state of a half-plane from piezoceramics with two boundary electrodes. -Probl. Prochnosti, 1982, No. 7, pp. 56-59 [in Russian].
- Bardzokas D., Kudryavtsev B.A., Senik N.A. The Rayleigh waves in a half-space with a finite system of surface electrodes. -Mech. of Solids, 1996, No 1, p.45-51 [in Russian].
- Filshtinsky M.L. On an approach to the investigation of electroelastic fields in a cylinder excited by the system of surface electrodes. Sumy (Ukraine), Proceedings of Sumy University, 1998, No 1(9), pp. 3-8 [in Russian].
- 13. Bardzokas D., Filshtinsky M.I., Electroclasticity of piecewise-uniform bodies.-Sumy (Ukraine): University Book Publ., 2000.-308p. [in Russian].
- Bardzokas D., Filshtinsky M.L., Rodriguez-Ramos R., Sanchez-Casals O. Oscillations of a hollow piezoceramic cylinder excited by a system of surface electrodes --VIIIth International Conference "Numerical methods in continuum mechanics", Liptovsky Jan. Slovak Republic, 2000, pp.161-162.
- 15. Ссылка на конф. Бреббиа.
- Фильштинский М.А. Динамическое нагружение пьезокерамического полупространства с трещиной. // Акуст.журнал. 1993. Т.39. Вып.5. С.921-928 [in Russian].
- 17. Партон В.З., Фильштинский М.А. Динамическая задача электроупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями. // Изв. РАН. МТТ. 1993. №5. С.82-88 [in Russian].
- 18 Parton V.Z., Filshtinsky M.I. The steady-state wave process in a piezoelectric layer and half-layer weakened by tunnel cuts (antiplane deformation). // J. Appl. Maths Mechs, Vol. 56, No 3, 424-431, 1992.
- Бардзокас Д., Фильштинский М.А. Дифракция волны сдвига на цилиндрических включениях в пьезоэлекрическом полупространстве. //Изв. РАН МТТ. 1997. №3. С. 77-84 [in Russian].
- Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. Groningen Wolters-Noordhoff Publishing, 1958.
- Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239с.
- Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. Piczoelectric and piczomagnetic materials and their functions as transducers. In: Physical acoustics, V.1, Part A. Edited by W.P. Mason Academic Press, New-York, 1964.

Афинский национальный технический университет, Греция. Сумский государственный университет, Украина.

d)...

Поступила в редакцию 6.10.2004

КОЛТИНИИ СТАТИТИИ ПОСТАТИИ ПОСТАТИИ СТАТИТИСТИИ СТАТИТИСТИИ СТАТИТИИ СТАТИТИ СТАТИТИИ СТАТИТИ СТАТИТИИ СТАТИТИИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ С С СТАТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТАТИТИТИ СТАТИТИ СТА

Միխանիկա

57, №4, 2004

Механика

УДК 539.3.01

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМОПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА Бежанян В.А.

Վ.Ա. Բեժանյան

Ձերմապիեզոէլնկարականության տեսության խնդիրների լուծման մասին

Շարադրված են ջերմապիեզոէլիկտրականության տեսության խնդիրների լուծման մաթեմատիկական հիմունքները ճեխանիկական, էլեկտրական և ջերմային բեռնավորում ունեցող պիեզոկերամիկական մարժինների համար.

Տրված է փոխկապակցված եզրային խնդիրների ձևակերպումը, որը նկարագրում է ջերմաէլեկարաստածգական պրոցեսները տիպային նախնական թեհեռացում ունեցող պիհզոկերամիկական մարժիններում։

V.A. Bezhanyan To the solution of problems of thermopiczoelectricity theory

Изложены математические основы решения задач теории термопьезоолектричества для внаокеранических тел при механическом, олектрическом и тепловом нагружениях.

Дапа формулировка сопряженных краевых задач, описывающих термоэлектроупругие предессы в пьезокерамической среде. для типичных случаев поляризации керамики

В связи с широким использованием пьезокерамических материалов возникает необходимость в продолжении углубленного исследования взаимодействия полей деформаций с электрическими и температурными полями.

В ряде работ исследованы взаимодействие в пьезокерамических телах механических и электрических полей [1-3]. Но почти отсутствуют исследования влияния температурных полей на поведение пьезокерамических тел.

В общем виде полная система уравнений статики теории термопьезоэлектричества для трансверсально-изотропных пьезокерамических тел включает:

а) декартовые координаты (поляризация вдоль оси 0z):

I. Уравнения равновесия (без учета объемных сил)

$$\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$
(1)
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} = 0$$

где σ, σ, σ, τ, τ, τ, τ, -, компоненты тензора мсханических напряжений. II.В работах [4,5,6] утверждается, что в механике пьезокерамических сред магнитными эффектами вообще можно пренебречь, а для изучения электрического поля использовать уравнения электростатики [7]:

$$div\bar{D} = 0, \quad \vec{E} = -grad\psi \tag{2}$$

где \vec{D} — вектор электрической индукции, \vec{E} — вектор напряженности электрического поля, Ψ — электростатический потенциал.

III. Уравнения теплопроводности [8,9]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$
(3)

где $T = \tilde{T} - T_{n}$ — соответственно относительная, абсолютная и начальная температура, $\lambda^{2} = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{41}} = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{22}}$ — отношение козффициентов теплопровод-

ности тела в направлении оси 0*z* и перпендикулярном к ней ($\lambda_{11} = \lambda_{22}$).

IV. Когда в качестве термодинамического потенциала выбираем электрическую функцию Гиббса, уравнение состояния будет [10]:

$$\sigma_{x} = c_{11}^{ET} \varepsilon_{x} + c_{12}^{ET} \varepsilon_{y} + c_{13}^{ET} \varepsilon_{z} - e_{31}^{T} E_{z} - \gamma_{11}^{E} T$$

$$\sigma_{y} = c_{12}^{ET} \varepsilon_{z} + c_{11}^{ET} \varepsilon_{z} + c_{13}^{ET} \varepsilon_{z} - e_{11}^{T} E_{z} - \gamma_{11}^{E} T$$

$$\sigma_{z} = c_{13}^{ET} (\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}) + c_{31}^{ET} \varepsilon_{z} - e_{33}^{T} E_{z} - \gamma_{33}^{E} T$$

$$\tau_{z} = \tau_{yz} = c_{44}^{ET} \varepsilon_{z} - e_{15}^{T} E_{y}, \quad \tau_{z} = \tau_{xz} = c_{44}^{ET} \varepsilon_{xz} - e_{15}^{T} E_{z} \qquad (4)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \frac{1}{2} (c_{11}^{ET} - c_{12}^{ET}) \varepsilon_{xy}$$

$$D_{x} = \varepsilon_{11}^{ET} E_{x} + e_{15}^{T} \varepsilon_{xz}, \quad D_{y} = \varepsilon_{11}^{ST} E_{y} + e_{15}^{T} \varepsilon_{yz}$$

$$D_{z} = \varepsilon_{33}^{ET} E_{z} + e_{33}^{T} (\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}) + e_{33} \varepsilon_{z} + g_{3}^{T} T$$

где $c_{11}^{\mathcal{E},T}$, $c_{12}^{\mathcal{E},T}$, $c_{13}^{\mathcal{E},T}$, $c_{33}^{\mathcal{E},T}$, $c_{44}^{\mathcal{E},T}$ – компоненты тензора модулей упругости, e_{11} , e_{13} , c_{15} – пьезоэлектрические постоянные, ε_{11}^{s} , ε_{13} – диэлектрические проницаемости, γ_{11} , γ_{33} – температурные коэффициенты механических напряжений, g_{3}^{s} – пироэлектрические коэффициенты, ε_{x} , ε_{y} , ε_{z} , ε_{41} , ε_{5} , ε_{5} , ε_{5} , – компоненты тензора деформации.

Верхние индексы E, T, s указывают, что соответствующие постоянные должны быть экспериментально определены соответственно при постоянном электрическом (E) и температурном (T) полях, а также при постоянном уровне деформации (s).

V. Соотношения Коши [3]:

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial u_{x}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y} = \frac{\partial u_{z}}{\partial y}, \quad \varepsilon_{z} = \frac{\partial u_{z}}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{zy} = \frac{\partial u_{y}}{\partial x} + \frac{\partial u_{x}}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_{z}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial x}$$
(5)

где u_x, u_y, u_z – компоненты вектора упругих перемещений.

Из (1)-(5) имеем 23 соотношения смешанного дифференциальноалгебранческого типа, которые можно преобразовать в систему из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка:

$$\begin{aligned} c_{11}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial x^{2}} + \frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} - c_{12}^{ET} \right) \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial y^{2}} + c_{44}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} + c_{12}^{ET} \right) \right] \frac{\partial u_{y}}{\partial y} + \\ + \left(c_{13}^{ET} + c_{44}^{ET} \right) \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] + \left(e_{31}^{T} + e_{13}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial x \partial z} = \gamma_{11}^{E} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} - c_{12}^{ET} \right) \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial x^{2}} + c_{11}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial y^{2}} + c_{44}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} + c_{12}^{ET} \right) \right] \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + \\ + \left(c_{13}^{ET} - c_{12}^{ET} \right) \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial x^{2}} + c_{11}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial y^{2}} + c_{44}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} + c_{12}^{ET} \right) \right] \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + \\ + \left(c_{13}^{ET} - c_{12}^{ET} \right) \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] + \left(e_{31}^{T} + e_{13}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial y^{2}} + c_{44}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} + c_{12}^{ET} \right) \right] \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + \\ + \left(c_{13}^{ET} + c_{44}^{ET} \right) \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] + \left(e_{31}^{T} + e_{13}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial y^{2}} + c_{44}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(c_{11}^{ET} + c_{12}^{ET} \right) \right] \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + \\ + \left(c_{13}^{ET} + c_{44}^{ET} \right) \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] + \left(c_{31}^{ET} + e_{13}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial y^{2}} + c_{44}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial y} \right] \\ + \left(c_{13}^{ET} + c_{44}^{ET} \right) \frac{\partial^{2} u_{z}}{\partial z} + \left(c_{31}^{ET} + c_{33}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial z^{2}} + \left(c_{13}^{ET} + c_{44}^{ET} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y}}{\partial y} \right) + \\ + \left(c_{15}^{T} + c_{15}^{T} \right) \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial x^{2}} + \left(c_{31}^{T} + c_{33}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial z^{2}} = \gamma_{33}^{E} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(e_{31}^{T} + e_{15}^{T} \right) \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial x \partial z} + \left(e_{31}^{T} + e_{33}^{T} \right) \frac{\partial^{2} \psi}{\partial y^{2}} \right) + \left(c_{31}^{ET} \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial y^{2}} \right) + \left(c_{31$$

и уравнения теплопроводности (3)_

Отметим, что алгебраическим путем исключить электрический потенциал Ψ из (6)-(8) и перемещения u_x , u_y , u_z из уравнения (9), невозможно. Это означает, что задача электроупругости является взаимно связанной. Таким образом, используя в качестве основных неизвестных u_x , u_y , u_z , ψ , T, имеем полную систему уравнений статической теории термопьезозлектричества (3), (6)-(9). Эта система является невзаимосвязанной относительно температуры.

Для ее однозначной разрешимости в некоторой пространственной области V, в каждой точке поверхности S этой области необходимо знать искомые функции или определенные комбинации их первых производных.

Граничные условия для механических переменных формулируются аналогично условиям в задачах теории упругости. Так, если на поверхности S (или на ее части) задан вектор перемещения, то искомые решения для перемещений из системы (3), (6)-(9) должны подчиняться условиям

$$u_x|_s = u_0, \quad u_y|_s = V_0, \quad u_z|_s = W_0$$
 (10)

Если же на поверхности тела S задан вектор внешних сил \bar{F}_{n} , то граничные условия имеют вид:

$$\begin{split} \overline{r}_{nx} &= e_{31}^{T} n_{x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + e_{35}^{T} n_{z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + n_{x} \left(e_{11}^{E,T} \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + e_{12}^{E,T} \frac{\partial u_{x}}{\partial y} + e_{13}^{E,T} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} n_{x} \left(e_{11}^{E,T} - e_{12}^{E,T} \right) \left(\frac{\partial u_{x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y}}{\partial x} \right) + n_{x} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{x}}{\partial z} \right) - \gamma_{11}^{E} n_{x} T \\ \overline{F}_{ny} &= e_{31}^{T} n_{y} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + e_{15}^{T} n_{x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + n_{y} \left(e_{11}^{E,T} \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + e_{11}^{E,T} \frac{\partial u_{y}}{\partial y} + e_{12}^{E,T} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} n_{x} \left(e_{11}^{E,T} - e_{12}^{E,T} \right) \left(\frac{\partial u_{y}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y}}{\partial y} \right) + n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - \gamma_{11}^{E} n_{y} T \\ &+ \frac{1}{2} n_{x} \left(e_{11}^{E,T} - e_{12}^{E,T} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - \gamma_{11}^{E} n_{y} T \\ &+ \frac{1}{2} n_{x} \left(e_{11}^{E,T} - e_{12}^{E,T} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + e_{13}^{T} n_{z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + n_{x} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - \gamma_{11}^{E} n_{y} T \\ &+ n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} \left[e_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - e_{33}^{E,T} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] - \gamma_{11}^{E} n_{z} T \\ &+ n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} \left[e_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - e_{33}^{E,T} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] - \gamma_{11}^{E} n_{z} T \\ &+ n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} \left[e_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - e_{33}^{E,T} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] - \gamma_{11}^{E} n_{z} T \\ &+ n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} \left[e_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) - e_{33}^{E,T} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right] - \gamma_{11}^{E} n_{z} T \\ &+ n_{z} e_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} \left[e_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) + n_{z} \left[e_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \right) \right] \\ &+ n_{z} e_{13}^{E,T} \left[e_{$$

где F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} – проекция вектора \bar{F}_n на декартовые координаты. n_x, n_y, n_z – проекции орта нормали к поверхности S

Остается записать краевые условия, отображающие конкретные условия электрического и гемпературного нагружения тела.

В случае нагружения тела, заданной разностью электрического потенциала на электродах, частично покрывающих тело S_1^* , задается значение искомого потенциала Ψ . В этом случае [3]:

$$\Psi \Big|_{S_1^s} = \pm V_0 \tag{12}$$

Если внешней средой пьезокерамических элементов является воздух и диэлектрики, то приближенно принимается [3]:

$$\left. \vec{n} \cdot \vec{D} \right|_{s=s_1^*-s_2^*} = 0 \tag{13}$$

Поэтому в дальнейшем понадобятся выражения для нормальной составляющей вектора электрической индукции. Она определяется по формуле:

$$D_{n} = \overline{n} \cdot \overline{D} = n_{x} D_{x} + n_{y} D_{y} + n_{z} D_{z} =$$

$$= n_{x} \left[e_{11}^{*} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right) - e_{11}^{*,T} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + n_{y} \left[e_{15}^{T} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial y} + \frac{\partial u_{z}}{\partial z} \right) - e_{11}^{*,T} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + (14)$$

$$+ n_{z} \left[e_{11}^{*} \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y}}{\partial y} \right) + e_{12}^{*} \frac{\partial u_{z}}{\partial z} + g_{1}^{*} T - e_{12}^{*,T} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]$$

Для температурного поля рассмотрим случаи, когда на поверхности пьезокерамического тела задано распределение температуры [5]

$$T|_{s} = P(x, y, z) \tag{15}$$

или известен тепловой поток

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S} = q(x, y, z) \tag{16}$$

Кроме условий (10)-(16) возможны и другие виды граничных условий. Уравнения (3), (6)-(9) являются сложной системой взаимосвязанных относительно функций и и и, и, , щ и невзаимосвязанных относительно температурных уравнений.

При $T \equiv 0$ система линейных уравнений (6)-(9) совпадает с системой уравнений статической электроупругости. Поэтому общее решение системы (3), (6)-(9) представим в виде суммы частного решения уравнения термопьезоэлектричества и общего решения уравнений электроупругости. Частное решение системы (3), (6)-(9) ищем в виде [11]:

$$u_{x}^{(*)} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_{y}^{(*)} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad u_{z}^{(*)} = k \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\psi^{(*)} = I \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad T = d \frac{\partial^{2} \phi}{\partial z^{2}}$$
(17)

где k, l и d постоянные определяются по формулам:

$$k = \frac{\Delta_{1}}{\Delta}, \quad l = \frac{\Delta_{2}}{\Delta}, \quad d = \frac{\Delta_{3}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{1} = \begin{vmatrix} b_{1} & a_{12} & a_{13} \\ b_{1} & a_{23} & a_{23} \\ b_{1} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & b_{2} & a_{23} \\ a_{31} & b_{3} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{11} & a_{12} & b_{2} \\ a_{21} & b_{2} & a_{23} \\ a_{31} & b_{3} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{11} & a_{12} & b_{2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{11} & a_{22} & b_{23} \\ a_{23} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} & a_{33} \\ a_{33} & a_{33} & a_$$

При этом потенциальная функция ф удовлетворяет уравнению (3).

Относительно уравнений состояния (4) сделаем следующие замечания. Для этих уравнений не учтены незначительные магнитные эффекты, сопровождающие процесс деформирования. В приведенной выше форме записи уравнений плезоэффекта предполагается, что направление вектора предварительной поляризации в каждой точке тела совпадает с направлением 0*z* декартовой системы координат. Если же направление поляризации меняется от точки к точке внутри тела. то приведенные уравнения следует рассматривать как локальные уравнения состояния с совмещенными паправлениями поляризации оси 0*z*. В эгом случае коэффициенты в уравнениях (4) будут переменными функциями координат.

Однако, ссли внешнее электростатическое поле предварительной поляризации обладает определенным характером симметрии, то удается записать уравнения состояния с постоянными коэффициентами по всему объему тела в криволинейных координатах, подобранных соотнетствующим образом

Приведем уравнения состояния (4) в цилиндрических и сферических координатах с постоянными коэффициентами для типичных случаев поляризации керамики [10]:

6) цилиндрические координаты r, z, ϕ ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$)

1] поляризация вдоль оси 02 (осевая поляризация)

$$\sigma_{r} = c_{11}^{E,T} \varepsilon_{r} + c_{12}^{E,T} \varepsilon_{\varphi} + c_{33}^{E,T} \varepsilon_{z} - e_{13}^{T} E_{z} - \gamma_{11}^{E} T$$

$$\sigma_{\varphi} = c_{11}^{-T} \varepsilon_{r} + c_{11}^{-T} \varepsilon_{\varphi} + c_{33}^{E,T} \varepsilon_{z} - e_{13}^{T} E_{z} - \gamma_{11}^{T} T$$

$$= c_{11}^{-T} (\varepsilon_{r} + \varepsilon_{\varphi}) + c_{33}^{-T} \varepsilon_{z} - c_{13}^{T} E_{z} - \gamma_{11}^{T} T$$

$$= \frac{1}{2} (c_{11}^{T} - c_{12}^{T})$$

$$\tau_{\varphi z} = c_{44}^{E,T} \gamma_{\varphi z} - e_{15}^{T} E_{\varphi}$$

$$T$$

$$D_{r} = \varepsilon_{11}^{T,T} E_{r} + e_{15}^{T} \gamma_{rz}$$

$$D_{z} = \varepsilon_{33}^{T} E_{z} + e_{13}^{T} (\varepsilon_{r} + \varepsilon_{\varphi}) + e_{33} \varepsilon_{z} + g_{3} T$$

21 поляризация вдоль оси Ог (радиальная поляризация)

$$\sigma_{r} = c_{33}^{E,T} \varepsilon_{r} + c_{13}^{E,T} (\varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{z}) - e_{33}^{E} E_{r} - \gamma_{33}^{E} T$$

$$\sigma_{\varphi} = c_{13}^{E,T} \varepsilon_{r} + c_{11}^{E,T} \varepsilon_{\varphi} + c_{12}^{E,T} \varepsilon_{z} - \varepsilon_{12}^{E} E_{r} - \gamma_{11} T$$

$$\sigma_{z} = c_{13}^{E,T} \varepsilon_{r} + c_{12}^{E,T} \varepsilon_{\varphi} + c_{11}^{T,T} \varepsilon_{z} - e_{13}^{T} E_{r} - \gamma_{11} T$$

$$\tau_{r\varphi} = c_{44}^{E,T} \gamma_{r\varphi} - e_{15}^{T} E_{\varphi}$$

$$= \frac{1}{2} (c_{11}^{E} - c_{12}^{E})$$

$$T_{r\varphi} = \varepsilon_{11}^{E,T} E_{r} + e_{13}^{T} (\varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{z}) + e_{33}^{T} \varepsilon_{r} + g_{3}^{T} T$$

$$B_{\varphi}^{E} = \varepsilon_{11}^{E,T} E_{\varphi} + e_{13}^{T} \gamma_{\varphi}$$

$$D_{z} = \varepsilon_{11}^{E,T} E_{z} + e_{15}^{T} \gamma_{\varphi}$$

(20)

(19)

$$\sigma_{r} = c_{11}^{T} \varepsilon_{r} + c_{11}^{E,r} \varepsilon_{\varphi} + c_{11}^{E,r} \varepsilon_{z} - c_{13}^{T} E_{\varphi} - \gamma_{11} T$$

$$\sigma_{\varphi} = c_{13}^{T} (\varepsilon_{r} + \varepsilon_{z}) + c_{33}^{T} - c_{33} E_{\varphi} - \gamma_{33}^{T} T$$

$$\sigma_{z} = c_{12}^{T} \varepsilon_{r} + c_{13}^{E,r} \varepsilon_{\varphi} + c_{11}^{E,r} \varepsilon_{z} - c_{13}^{T} E_{\varphi} - \gamma_{11} T$$

$$\tau_{r\varphi} = c_{44}^{E,r} \gamma_{r\varphi} - c_{15}^{T} E_{r}$$

$$\tau_{\varphi z} = c_{44}^{T} \gamma_{\varphi z} - c_{15}^{T} E_{z}$$

$$D_{r} = \varepsilon_{11}^{T} E_{r} + c_{15}^{T} \gamma_{r\varphi}$$

$$D_{\varphi} = \varepsilon_{33}^{T} E_{\varphi} + c_{13}^{T} (\varepsilon_{r} + \varepsilon_{z}) + c_{33}^{T} \varepsilon_{\varphi} + g_{3}^{T} T$$

$$D_{z} = \varepsilon_{11}^{T} E_{z} + c_{13}^{T} \varepsilon_{\varphi} + c_$$

в) сферические координаты

$$r, \theta, \varphi (x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta)$$

Раднальная поляризация

$$\sigma_{0} = c_{13} \varepsilon_{r} + c_{11}^{E,T} (\varepsilon_{0} + \varepsilon_{\varphi}) - e_{33}^{T} E_{r} - \gamma_{33}^{E} T$$

$$\sigma_{0} = c_{13} \varepsilon_{r} + c_{11} \varepsilon_{0} + c_{11} \varepsilon_{0} - c_{12} E_{0}$$

$$\sigma_{\varphi} = c_{13}^{E,T} \varepsilon_{r} + c_{12}^{E,T} \varepsilon_{0} + c_{11}^{E,T} \varepsilon_{\varphi} - e_{13}^{T} E_{r} - \gamma_{11} T$$

$$\tau_{r0} = c_{44} \gamma_{r0} - e_{15} E_{0}$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \gamma_{\theta\varphi}$$

$$\tau_{\varphi r} = c_{44} \gamma_{\varphi r} - e_{15} E_{\varphi}$$

$$D_{r} = E_{r} + e_{13}^{T} (\varepsilon_{0} + \varepsilon_{0}) + e_{33}^{T} \varepsilon_{2} - g_{3}^{3} T$$

$$D_{0} = \varepsilon_{11} E_{\varphi} + e_{15}^{T} \gamma_{\varphi r}$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М. Мир. 1986. 160с.
- Партон В З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
- Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев.: Наукова Думка, 1989. 279с.
- Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях //Физическая акустика/. Под. ред. У. Мезона. М.: Мир. 1996. Том 1. Ч. А. С. 204-326.
- Holland R. Eer Nisse E. Design of resonant piezoelectric devices // Cambridge: MIT. Press, 1969, 257p.
- Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. New York: Plenum press. 1969. 211p.
- 7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М. Наука. 1976. 616с.
- 8. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962. 364с.
- 9. Уздалов А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1967. 167с.
- Кудрявцев Б.А. Механика пьезоэлектрических материалов М.Д.Т. (ВИНИТИ, 1978г. 11, С.5-66).
- Goodier J.N. On the Integration of the Thermoelastic Equations. Phil. Maq. 7, 23, 1937.

Ереванский государственный Университет Архитектуры и Строительства

-01

Поступила в редакцию 26.02.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57, Nº4, 2004

Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА КРАЮ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ Григорян Э. Х., Мелкумян А. С.

է. Խ. Գրիգորյան, Ա. Ս. Մեյքումյան Սաեքային հարթ այիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկարիկ աարածությունում կիսաանվերջ մետաղական շերաի եզրից

Դիտարկվում է սահքային հարթ այիքի դիֆրակցիայի խնդիրը փոքր հաստության կիսաանվերջ մնապական չերա պարունակող պիեզուլեկտրիկ տարածությունում Խնդիրը բերվում է անալիտիկ իոնկցիաների տեսության Դիմանի խնդրի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը։ Շերտի և ապածության կոնտակտի մասում տեղափոխությունները ներկայացված են ընկնող այիքի, անցրադարձած այիքի, լոկայիզացված այիքի, սահըային ծավալային ալիքի և ոչ ալիքային մասի գաժարելիների գումարի տեսըով, իսկ կոնտակտի տեղամասից դուրս տեղափոխությունները և կեկաբական պոռենցիալը նույնպես ներկայացված են համանման ալիքային գումարկիների տեսքով, որդեն արդեն ոչ ալիքային մասին համապատասխանում է շերտի մակերևույթից գնացող այիք Մտացվել են ասիմպտոտիկ բանաձներ տեղափոխության և էլեկտրական կնդուկցիայի կարքը։ Յույց է տրվել, որ կեկտրական դաշտի ինդուկցիան պարունակում է նաև ծավալային այիքի արագությամբ տարածվող լեկարգացված այիք։

E. Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan

Diffraction of shear plane wave in piczoelectric media on the edge of semi-infinite metallic strip

Рассматривается задача о дифракции сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве, содержащем полубесконечный металлический слой малой толщины Задача сполятся к решению функционального уравнешия задачи Римана теории аналитических функций. На контактиом участке слоя с пространством перемещения представлены в виде суммы частей падающей волны, ограженной волны, локализованной волны, сдвиговой объемной волны и неволновой части, а вне участка контакта перемещения и электрический потенциал так же представлены в виде сумм аналогичных воля, где уже неволновой части соответствует волна, идущая от поверхности слоя. Получены асимптотические формулы для перемещения и электрического потенциала в дальней зоне, а в окрестности ребра слоя попеление электрической индукции. Обнаружено, что индукция электрического поля содержит также докализованную волну, распространяющуюся со скоростью объемной волны

Пусть из бесконечности распространяются савиговые плоские волны $U_0 e^{-i\omega t}$, $\Phi_0 e^{-i\omega t}$, где

$$U_{\eta} = e^{-i\mu \epsilon i n r_{\eta} r$$

$$\Phi_0 = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \varepsilon^{-i(kx\cos\theta_0 + ky\sin\theta_0)}$$

all broad a brain is b

в пьезоэлектрическом пространстве класса бmm гексагональной симметрии, причем, ось OZ совпадает с осью симметрии кристалла, содержащей металлический слой бесконечно



малой толщины (фиг. 1). Задача заключается в определении волнового поля на контактном участке слоя с пространством и внутри пьезоэлектрического пространства.

В амплитудах задача сводится к решению уравнений [1]

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{1}$$

$$\Delta \Phi = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 U \tag{2}$$

с контактными условиями $\Phi|_{y=0} = \Phi$, $D|_{y=-0} - D_y|_{y=-0} = -\varepsilon_{11}\Psi$ $U|_{y=+0} = U|_{y=-0}$, $\sigma_{yz}|_{y=+0} = \sigma_{yz}|_{y=-0}$, где $\Phi_{+}(x) = 0$ при x < 0, а $\Psi_{-}(x) = 0$ при x > 0, $\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. U – амплитуда перемещений точек пространства, Φ – амплитуда электрического потенциала. $= c_{44} \frac{\partial U}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда тангенциальных напряжений, $D = e_{15} \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда компоненты вектора электрической индукции, c_{44} – упрутая постоянная, e_{15} – пьезоэлектрический модуль, ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения упругой волны в пьезоэлектрике, $G = c_{44} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}$, ω – частота колебаний.

Для решения поставленной задачи введем функции

$$w(x, y) = U(x, y) - U_{o}(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_{o}(x, y)$$
(3)

Очевидно, что функции w(x, y), $\phi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (1) 2), но они уже должны удовлетворять и условиям уходящей волны. Применив к уравнениям (1)-(2) преобразование Фурьс, в силу вышесказанного будем иметь

$$\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} - \gamma^2 \overline{w} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial y^2} - \sigma^2 \overline{\varphi} = -\frac{e_{13}}{\varepsilon_{11}} \lambda^2 \overline{w}$$
(5)

где $\gamma^2(\sigma) = \sigma^2 - k^2$ а $\overline{w}(\sigma, y)$. $\overline{\phi}(\sigma, y)$ – преобразования Фурье функций w(x, y). $\phi(x, y)$

$$f(\sigma) = \int f(x) e^{i\sigma x} dx \, \cdot \, -\infty < \sigma < \infty \, .$$

Определим то решение уравнения (4), которое стремится к нулю при $|\nu| \rightarrow \infty$, когда $|\sigma| > k$, а при $|\sigma| < k$ представляет уходящую волну. Такое решение имеет вид

$$\overline{w}(\sigma, y) = \overline{U}(\sigma, y) - e^{-iky\sin\theta_{\sigma}} 2\pi\delta(\sigma - k\cos\theta_{\sigma}) = Ae^{-i\sigma - i\sigma}$$
(6)

гле под $\sqrt{\sigma} - k^2$ понимается та ветвь этой функции, для которой имеет место условие $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. $\sqrt{\sigma} - k^2 = -\sqrt{k^2 - \sigma}$ В таком случае действительная ось будет обходить точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ – снизу [2] Под $\delta(\sigma)$ понимается известная функция Дирака. Теперь из (5) ϕ определятся в виде

$$\overline{\varphi}(\sigma, y) = \overline{\Phi}(\sigma, y) - \frac{1}{\varepsilon_{11}} e^{-ik_{11}\omega\omega} 2\pi\delta(\sigma - \kappa\cos\theta_{0}) = Be^{-ik_{11}} + \frac{1}{\varepsilon_{11}} \overline{w}(\sigma, y)$$
(7)

Из (6)-(7) с использованием контактных условий, после применения к ним преобразования Фурьс. будем иметь

$$A(\sigma) = \frac{c_{-1}}{2G} \frac{\Psi(\sigma)}{\gamma(\sigma)}, \quad B(\sigma) = -\frac{\Psi(\sigma)}{2|\sigma|}$$
(8)

Подставляя $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ в (6)-(7) и используя граничные условия при y = 0, волучим

$$K(\sigma)\Psi_{-}(\sigma) = -2\pi \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11}} \delta(\sigma - k\cos\theta_{0}) + \Phi_{-}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty$$
⁽⁹⁾

FAR $\overline{K}(\sigma) = \frac{|\sigma|e_{15}^2/(\varepsilon_{11}G) - \gamma(\sigma)}{2\gamma(\sigma)\sigma|}$. Tak kak $K(\sigma)$ under hyan is topkax $\pm \sigma_{\pi}$.

где $\sigma_n = k(1-k^4)^{-12}$, а $k_s = e_{15}/\sqrt{\varepsilon_{12}G}$ – коэффициент электромеханической связи, то в дальнейшем, чтобы удовлетворялось условие уходящей волны. Будем считать, что действительная ось обходит точку $\sigma = -\sigma_n$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_n$ снизу.

Таким образом, задача свелась к решению краевой задачи Римана теории аналитических функций (9). Решение задачи строится несколько иначе, чем это обычно делается при решении краевой задачи Римана [3] Сначала, как это делается в случае краевой задачи Римана, факторизируем функцию $\overline{K}(\sigma)$. представив ее в виде

$$K(\sigma) = K_{+}(\sigma)K_{-}(\sigma) \tag{10}$$

где $K_{-}(\alpha)$ регулярна при Im $\alpha > 0$ и там не имеет нулей, а $K_{-}(\alpha)$ регулярна при Im $\alpha < 0$ и там не имеет нулей ($\alpha = \sigma + i\tau$). Для этого $K(\sigma)$ представим в виде

$$\overline{K}(\sigma) = -\overline{R}(\sigma) \frac{1 - e_{ii}^{T}/(\varepsilon_{ii}G)}{2|\sigma|}$$

$$\overline{R}(\sigma) = \frac{1}{1 - k_e^2} \frac{\gamma(\sigma) - k_e^2 |\sigma|}{\gamma(\sigma)}$$

Так как $\overline{R}(\sigma) \to 1$ и $\ln(\overline{R}(\sigma)) = O(\sigma^{-2})$ при $|\sigma| \to \infty$, то, как известно [3] ее можно представить в виде

$$\overline{R}(\sigma) = \overline{R}_{\star}(\sigma)\overline{R}_{\star}(\sigma).$$

где $\overline{R}_{r}(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im} \alpha > 0$ и там не имеет нулей, а $\overline{R}_{r}(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im} \alpha < 0$ и там не имеет нулей,

$$\overline{R}_{*}(\sigma) = \exp(\overline{F}_{*}(\sigma)), \quad \overline{R}_{*}(\sigma) = \exp(\overline{F}_{*}(\sigma))$$

$$\overline{F}_{*}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} F(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \overline{F}_{*}(\sigma) = \int_{-\infty}^{0} F(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\overline{R}(\sigma)) e^{-i\alpha x} d\sigma \qquad (11)$$

Так как $\ln(\overline{R}(\sigma))$ имеет порядок σ^{-1} при $|\sigma| \to \infty$, то функция F(x)при $x \to 0$ принимает конечное значение. Тогда в силу известных свойсти интегралов Фурье $\overline{F}_{\cdot}(\sigma) = O[(\sigma + i0)^{-1}), \ \overline{F}_{\cdot}(\sigma) = O[(\sigma - i0)^{-1}]$ при $|\sigma| \to \infty$ Следовательно, функции $\overline{R}_{\cdot}(\alpha), \ \overline{R}_{\cdot}(\alpha)$ стремятся к единице при $\alpha \to \infty$ в соответствующих областях регулярности. Тогда в силу вышесказанного

$$\overline{K}_{e}(\sigma) = \frac{i\sqrt{1-k_e^2}}{\sqrt{2}(\sigma+i0)^{1/2}} \overline{R}_{e}(\sigma), \ \overline{K}_{e}(\sigma) = \frac{i\sqrt{1-k_e^2}}{\sqrt{2}(\sigma-i0)^{1/2}} \overline{R}_{e}(\sigma)$$

Приступим к решению функционального уравнения (9). Использовав формулу (10), запишем ее в виде

$$\overline{K}_{-}(\sigma)^{+}\overline{\Psi}_{-}(\sigma) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\delta(\sigma - k\cos\theta_{0})}{\overline{K}_{+}(k\cos\theta_{0})} + \frac{\Phi_{-}(\sigma)}{\overline{K}_{+}(\sigma)}, \quad -\infty < \sigma < \infty$$
(12)

Далее, использован формулу [4], [5]

$$2\pi i\delta(\sigma - k\cos\theta_0) = \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0}$$

будем иметь

$$\overline{L}^{+}(\sigma) = \overline{L}^{-}(\sigma) \tag{13}$$

где

$$\overline{L}^{-}(\sigma) = \overline{K}_{-}(\sigma)\overline{\Psi}_{-}(\sigma) + \frac{1}{i}\frac{e_{1s}}{\varepsilon_{11}}\frac{1}{\overline{K}_{+}(k\cos\theta_{0})}\frac{1}{\sigma - k\cos\theta_{0} - i0}$$
$$\overline{L}^{-}(\sigma) = \frac{\overline{\Phi}_{+}(\sigma)}{\overline{K}_{+}(\sigma)} + \frac{1}{i}\frac{e_{1s}}{\varepsilon_{11}}\frac{1}{\overline{K}_{+}(k\cos\theta_{0})}\frac{1}{\sigma - k\cos\theta_{0} + i0}$$

Дальнейшие рассуждения проводим, как в работах [6], [7]. Применив к (13) обратное преобразование Фурье, получим

$$L^{*}(\mathbf{x}) = L^{-}(\mathbf{x}) \tag{14}$$

где $L^{-}(x) = 0$ при x < 0; $L^{-}(x) = 0$ при x > 0. Из (14) следует, что [4], [5]

$$L^{*}(x) = L^{-}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k} \frac{d^{*}\delta(x)}{ax^{*}}.$$
 (15)

Теперь применив к (15) преобразование Фурье, будем иметь

$$\overline{L}^{*}(\sigma) = \overline{L}^{-}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} a_{k} (-i)^{k} \sigma^{k}$$
(16)

Так как $\overline{K}_{-}(\sigma)$, $\overline{\Psi}_{-}(\sigma)$ имеют порядок $(\sigma - i0)^{-1-}$, $\overline{K}_{+}(\sigma)$ имеет порядок $(\sigma + i0)^{-k-}$, $\overline{\Phi}_{-}(\sigma)$ имеет порядок $o((\sigma + i0)^{-1})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то $\overline{L}^{*}(\sigma) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то есть $a_{k} = 0$, k = 0, 1, ... В силу вышесказанного будем иметь

$$\overline{\Psi}_{-}(\sigma) = -\frac{1}{i} \frac{1}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{\overline{K}_{*}(k\cos\theta_{0})} \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_{0} - i0} \frac{1}{\overline{K}_{-}(\sigma)}$$
$$\overline{\Phi}_{-}(\sigma) = -\frac{1}{i} \frac{e_{1s}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{\overline{K}_{*}(k\cos\theta_{0})} \frac{K_{*}(\sigma)}{\sigma - k\cos\theta_{0} + i0}$$

Следовательно, обозначая $\overline{M}_{*}(\sigma) = \overline{R}_{*}(k\sigma), \quad \eta(\sigma) = \gamma(k\sigma)/k = \sqrt{\sigma^{2}-1}$. получим

$$w(r,\theta) = \frac{k_e^2}{1-k_e^2} \frac{\sqrt{\cos\theta_0 + i\theta}}{\overline{M}_+(\cos\theta_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i\theta}}{(\sigma - \cos\theta_0 - i\theta)\overline{M}_-(\sigma)\eta(\sigma)} d\sigma$$
$$\varphi(r,\theta) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left[w(r,\theta) - \frac{1}{1-k_e^2} \frac{\sqrt{\cos\theta_0 + i\theta}}{\overline{M}_+(\cos\theta_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i\theta}}{(\sigma - \cos\theta_0 - i\theta)\overline{M}_-(\sigma)|\overline{\sigma}|} \right]$$

Следует отметить, что, как будет показано ниже, $M_{-}(\sigma) = R_{-}(k\sigma)$ от k не зависит.

Вычислим также контактные напряжения.

$$\sigma_{j\sigma}|_{j=0} = -ik \sin(\theta_0)Ge^{-ikz\cos\theta_0}$$

В случае бесконечного слоя функциональное уравнение (9) примет вид

$$\overline{K}(\sigma)\overline{\Psi}(\sigma) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \delta(\sigma - k\cos\theta_{0})$$

откуда

$$\overline{\Psi}(\sigma) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}\overline{K}(k\cos\theta_0)} \delta(\sigma - k\cos\theta_0)$$

следовательно,

$$w(x, y) = -\frac{ik_e^2 |\cos \theta_0|}{ik_e^2 |\cos \theta_0| - \sin \theta_0} e^{-ikx \cos \theta_0 + ik|y| \sin \theta_0}$$
$$w(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w(x, y) + \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{\sin \theta_0}{ik_e^2 |\cos \theta_0| - \sin \theta_0} e^{-ikx \cos \theta_0 - k|y| \cos \theta_0}$$

следовательно, в случае бесконечного слоя сдвиговая плоская волна не возмущает локализованную волну. Приступим теперь к вычислению асимптотических формул для функции $U(r, \theta) = U_0(r, \theta) + w(r, \theta)$ при $kr \to \infty$ Для этого сделаем замену переменной $\lambda = \sigma \cos \theta - i \eta(\sigma) \sin |\theta|$ в интеграле и в комплексной плоскости (λ), замыкая путь интегрирования полуокружностью в нижней полуплоскости и используя лемму Жордана, получим следующие выражения:

при $\theta \in [0, \pi)$:

$$U(r,\theta) = U_{0}(r,\theta) + ik \left\{ \frac{|\cos\theta_{0}|e^{-ibr\cos(\theta_{0}+|\theta|)}}{\sin\theta_{0} - ik_{e}^{2}|\cos\theta_{0}|} H(|\theta| + \theta_{0} - \pi) + \frac{\sqrt{\cos\theta_{0} + i\theta}}{M_{*}(\cos\theta_{0})} \frac{M_{*}(\sigma_{0})e^{-i\sigma\pi}\cos^{2}(\cos\theta_{0})}{\sigma_{0} - \cos\theta_{0}} H(|\theta| + \arcsin(k_{*}^{2}) - \pi) + \frac{e^{i\sigma\pi}}{\pi} \int \frac{f(-(1+i\tau^{2})\cos\theta - e^{-i\tau/4}\tau\sqrt{2+i\tau^{2}}\sin\theta) + f(-(1-i\tau^{2})\cos\theta + e^{-i\sigma\pi}d\tau)}{\sqrt{2+i\tau^{2}}} d\tau - \frac{e^{ibr\sin\theta}}{\sqrt{2\pi}i} \left\{ \int \frac{g(-\sin\theta\cos\theta - i\tau\cos\theta - \sqrt{\cos^{2}\theta - 2i\tau\sin|\theta| + \tau^{2}}\sin|\theta|)}{\sqrt{\cos^{2}\theta - 2i\tau\sin|\theta| + \tau^{2}}} e^{-i\sigma\pi}d\tau \cdot |\theta| > \pi/2 \right\}$$
(17)

$$U(r, \theta)_{\theta=\pi} = U_{\theta}(r, \theta) + ik_{e}^{2} \frac{|\cos\theta_{0}| e^{ikr\theta_{0}}}{\sin\theta_{0} - ik_{e}^{2}|\cos\theta_{0}|} + \sigma_{0}^{5/2} \frac{\sqrt{\cos\theta_{0} + i\theta}}{\overline{M}_{*}(\cos\theta_{0})} \frac{\overline{M}_{*}(\sigma_{0})e^{ikr\theta_{0}}}{\sigma_{0} - \cos\theta_{0}} + 2k_{e}^{2}\sigma_{0}^{2} \frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{\pi} \frac{\sqrt{\cos\theta_{0} + i\theta}}{\overline{M}_{*}(\cos\theta_{0})} \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{s}(s^{2} - 1)\overline{M}(s)}{(s - \cos\theta_{0})(s^{2} - \sigma_{0}^{2})\sqrt{s + 1}} \Big|_{s=1+\pi^{2}} e^{-ik\pi^{2}} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{1} \frac{g(-\sin\theta_{0}\cos\theta - i\tau\cos\theta - \sqrt{\cos^{2}\theta - 2i\tau\sin|\theta| + \tau^{2}}\sin|\theta|)}{\sqrt{\cos^{2}\theta - 2i\tau\sin|\theta| + \tau^{2}}} e^{-ik\pi^{2}} \theta_{0} \neq 0$$
(18)

$$U(r, \theta)_{0,-\infty} = U_0(r, \theta)_{0,-\infty} - e^{i\pi t} + k_{\pm}^{\pm} \sigma_0^{\pm \pi} \frac{\sqrt{\cos\theta_0 + i\theta}}{M_{\pm}(\cos\theta_0)} \frac{M_{\pm}(\sigma_0)e^{i\pi\sigma_0}}{\sigma_0 - \cos\theta_0} + \frac{e^{i(4e-\pi/4)}}{\pi} \int_0^{t} \frac{f(1+i\tau^2+\theta) + f(1+i\tau^2-\theta)}{\sqrt{2+i\tau^2}} e^{-kr\tau^2} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{t} \frac{e(-\sin\theta|\cos\theta-i\tau\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta-2i\tau\sin\theta|+\tau^2}\sin|\theta|)}{\sqrt{\cos^2\theta-2i\tau\sin\theta|+\tau^2}} e^{-i\pi t} \theta_0 = 0$$
(19)

где обозначено

$$\sigma_0 = \sigma_n / k = (1 - k_e^+)^{-V^2}$$

$$f(s) = \frac{k_e^+}{1 - k_e^+} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\overline{M}_{\star} (\cos \theta_0)} \frac{\sqrt{s - i0}}{(s - \cos \theta_0)\overline{M}_{\star} (s)}$$

$$g(s) = -2k_e^+ \sigma_0^- \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\overline{M}_{\star} (\cos \theta_0)} \frac{s^2 - 1}{s^2 - \sigma_0^-} \frac{s^{V^2} \overline{M}_{\star} (s)}{s - \cos \theta_0}$$

а H(x) - известная функция Хевисайда.

Перемещения на контактном участке слоя с пространством ($|\theta| = \pi$)в формулах (18)-(19) представлены в виде суммы частей падающей волны, отраженной волны, локализованной волны, сдвиговой объемной волны и неволновой части. Те же волновые слагаемые получены внутри пьезоэлектрического пространства (17), но здесь неволновой части соответствует волна, идущая от поверхности слоя.

Используя известные теоремы об асимптотических поведениях интегралов типа Лапласа, получим следующие асимптотические формулы для $U(r, \theta)$ при $kr \to \infty$:

$$U(r,\theta) = U_0(r,\theta) + ik^2 \frac{|\cos\theta_0| e^{-ikr\cos(\theta_0 + |\theta|)}}{\sin\theta_0 - ik^2 |\cos\theta_0|} |H(|\theta| + \theta_0 - \pi), \quad |\theta| \neq \pi$$

+ $k^2 \sigma_0^{5/2} \frac{\sqrt{\cos\theta_0 + i0}}{\overline{M}_*(\cos\theta_0)} \frac{\overline{M}_*(\sigma_0) e^{-ikr\theta_0(\cos\theta_0 + i\theta_0)}}{\sigma_0 - \cos\theta_0} H(|\theta| + \arcsin(k^2) - \pi) +$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \frac{e^{i(k^{-}+k^{\prime})}}{1-k^{\prime}} \frac{\sqrt{\cos\theta_{0}+i0}\sqrt{-\cos\theta-i0}}{M_{*}(\cos\theta_{0})M_{*}(-\cos\theta)} \frac{1}{\cos\theta+\cos\theta_{0}} + O\left((kr)^{-k^{2}}\right), & \left|\theta\right| \neq \pi - \theta_{*} \neq \pi - 2 \\ \hline \frac{k_{*}^{2}\left|\cos\theta_{0}\right|}{1-k^{2}\sin\theta_{0}-ik_{*}^{2}\left|\cos\theta_{0}\right|} \left[\frac{1}{\sin2\theta_{0}} - \sin\theta_{*}\frac{\overline{M}_{*}^{2}\left(\cos\theta_{0}\right)}{\overline{M}\left(\cos\theta_{0}\right)}\right] + O\left((kv)^{-N^{2}}\right), & \left|\theta\right| = \pi - \theta_{*} = 0 \\ \hline \frac{\sqrt{\cos\theta_{*}+i0}}{M_{*}\left(\cos\theta_{0}\right)} \frac{1}{1-\cos\theta_{0}}\left(kr\right)^{-k^{2}} + O\left(kr\right)^{-k^{2}}\right), & \left|\theta\right| = \pi, \theta_{0} \neq 0 \\ \hline \frac{e^{i(k^{*}+ij^{4})}}{\sqrt{2\pi}k_{*}^{2}} + O\left((kr)^{-k^{2}}\right), & \left|\theta\right| = \pi, \theta_{0} \neq 0 \\ \hline \frac{2^{N_{*}k_{*}^{2}}}{\sqrt{1-k_{*}}} \frac{\sqrt{\cos\theta_{*}+i0}}{M_{*}\left(\cos\theta_{0}\right)} \frac{1}{4\pi\cos\theta_{0}} \left[\frac{\Gamma\left(3/4\right)}{k_{*}^{2}} - \frac{k_{*}^{2}e^{-\frac{\pi}{2}}}{4\pi\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(0/4\right)}{\left(kr\right)^{2}}\ln(kr)\right] + O\left((kr)^{-k^{2}}\right), & \left|\theta\right| = \pi/2 \end{array}$$

$$\left[\frac{k^2}{2\sqrt{\pi}\sqrt{1-k_{\pi}}}\frac{i(krm)\theta(-\pi/4)}{\sqrt{\cos\theta_{\pi}+i\theta}}\frac{kr\cos\theta}{\overline{M}_{\pi}(\cos\theta_{0})}\left[1-i\frac{3k^2}{2\pi}|kr\cos\theta|-\ln(kr)\right] + O\left((kr)^{-5-1}\right), |\theta| \in (\pi/2,\pi]\right]$$

Обозначая $\lambda = \sigma \cos \theta - i |\sigma| \sin |\theta|$ и используя аналитические своиства подынтегрального выражения и аналогичными рассуждениями, получим

при
$$|\theta| \in [0, \pi/2)$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(r, \theta) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{1 - k_e^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i\theta}}{M_-(\cos \theta_0)} \frac{e^{i\pi/4}}{2\pi i} \times \left[e^{-\frac{\pi}{4} \frac{1}{2} e^{-\frac{4\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_e^2}} \frac{\sqrt{1 - k_e^2}}{M_-(\cos \theta_0)} + e^{i\pi/2} \int_0^{\pi} \frac{\tau^{4/2} e^{-4\pi} d\tau}{(\tau - e^{i(\pi/2 - |\theta_1|)} \cos \theta_0) M_-(e^{-i(\pi/2 - |\theta_1|)} \tau)} \right]$$

при $|\theta| = \pi/2$

$$\begin{split} \Phi(r,\theta) &= \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} U(r,\theta) - \left\{ \frac{1}{2} \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0 - ik_e^2 |\cos \theta_0|} e^{-ikr(\cos \theta - i \operatorname{sgn}(\cos \theta_1) \operatorname{sgn}(\theta); |\cos \theta_0|} \theta = 0 \right\} \\ &- \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{k_e^4 \sigma_0^3}{2} \frac{\overline{M}_+(\sigma_0) \sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-ikr \sigma_0} (\cos \theta - i \sin |\theta|)}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \\ &- \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{1 - k^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{1} \left[\frac{e^{-ikr (\cos \theta - i \sin |\theta|)}}{(\tau - \cos \theta_0) \overline{M}(\tau)} \frac{1}{(\tau + \cos \theta_0) \overline{M}(\tau - \tau)} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \\ &- \operatorname{ip} \mu \left[\theta \right] \in (\pi/2, \pi] \\ \Phi(r, \theta) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{U(r, \theta) - \left\{ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0 - ik_e^2 \cos \theta_0} \right] e^{-ikr (\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &- \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\pi_e^2 \sigma_0^3}{\overline{M}_+(\sigma_0) \sqrt{\cos \theta_0 + i0}} \frac{1}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \overline{M}(\tau)} e^{-ikr (\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-ikr (\cos \theta - i \sin \theta)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-ikr (\cos \theta - i \sin \theta)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-ikr (\cos \theta - i \sin \theta)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-i e_{10}} (e^{-i(\pi/2 - |\theta|)})}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_e + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0}} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} + i \\ &+ \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \frac{e^{-i (\pi/2 - |\theta|)}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} \frac{e^{-i$$

$$+e^{i\theta/2}\int_{0}^{\sqrt{e^{-i\tau/2}\tau^{2}+1}+i0}\frac{M_{*}(e^{i(\psi\tau/10)}\tau)}{\sqrt{e^{-i2\theta'}\tau^{2}+1}+i0}+k^{2}e^{-i(\theta)}\tau = -e^{-i\tau/2}\cos\theta$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_{11}}\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\cos\theta_{0}+i0}}{M_{*}(\cos\theta_{0})}e^{i\theta/2}e^{-i(\theta)}\tau = \int_{0}^{\frac{1}{2}-ie^{i\theta}\tau}\sqrt{1-ie^{i\theta}\tau}M_{*}(1-ie^{i\theta}-1)}{\left(\left(1-ie^{i\theta}\tau\right)^{2}-\sigma_{0}^{2}\right)\left(\tau+i(1-\cos\theta_{0})e^{-i\theta}\right)}$$

Из полученных выражений видно, что в пьезоэлектрической среде $\Phi(r, 0)$, кроме волновых частей содержит, в отличие от перемещений, и неволновую часть. Из тех же выражений можно заключить, что индукция электрического поля содержит также локализованную волну, распространяющуюся со скоростью объемной волны.

Используя известные теоремы об асимптотических поведениях интегралов типа Лапласа, получим следующую асимптотическую формулу для $\Phi(r, \theta)$, когда $kr \to \infty$:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(r,\theta) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{e^{i\pi 4}}{\sqrt{\pi \cos \theta_0 + i\theta}} \frac{(1-k^2)^{1/2}}{M_*(\cos \theta_0)} \times \left((kr)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{ik^2}{2\pi} \cos \left(\frac{3\theta}{2}\right) (kr)^{1/2} \ln(kr) \right) + O\left((kr)^{-3/2}\right)$$

Аналогичными рассуждениями получим следующую асимптотическую формулу для D_n в окрестности ребра:

$$D_0 = \frac{e_+}{1 - k_c^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{M_+(\cos \theta_0)} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi r}} e^{-i\pi/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \, \pi p \mu \, r \to -0 \, .$$

a takжe асимптотику $D_{r}\Big|_{x=rc0}$, когда $kr \to \infty$. $D\Big|_{x=rc0} = \pm \frac{ie_{13}}{r} \frac{\sqrt{\cos\theta_0 + i0}}{M_-(\cos\theta_0)} \Bigg[\Bigg[\frac{M_-(\cos\theta_0)\sqrt{\cos\theta_0 - i0}\sin\theta_0}{\sin\theta_0 - ik_e^{-1}|\cos\theta_0|} + \frac{k_e^2\sigma}{\sigma_0 - \cos\theta_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 - \cos\theta_0} + \frac{\sigma_0^2}{2i\sqrt{\pi}\cos\theta_0} \Big] + \frac{1}{2i\sqrt{\pi}\cos\theta_0} \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{1-k_e^2}} \Big[(kr)^{-3/2} - i\frac{3k_e^2}{2\pi} (kr)^{-1}\ln(kr) \Big] + O\Big[(kr)^{-5/2} \Big] + \frac{M_-(1)}{k_e^2\sqrt{2\pi}} \Big[\frac{i}{(1-\cos\theta_0)} (kr)^{-3/2} + O\Big[(kr)^{-5/2} \Big], \quad \theta_0 \neq 0 \Big] \Big]$ ups $kr \to \infty$

Теперь приступим к вычислению $R_{,}(\alpha) = R_{,}(\alpha)$ Для этого рассмотрим комплексную плоскость $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, показанными на фиг 2. Замыкая путь интегрирования (11) полуокружностью в верхней полуплоскости α с указанными разрезами и используя лемму Жордана получим

-а, фиг. 2.

$$\overline{R}_{c}(\sigma) = \frac{\sigma + \sigma_{n}}{\sigma + k} \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \arctan\left[\frac{k_{c}x}{\sqrt{k^{2} - x^{2}}}\right] \frac{dx}{x + \sigma + 10}\right]$$
$$\overline{R}_{c}(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma}{\sigma - k} \exp\left[\frac{1}{\pi} \left[\arctan\left[\frac{k_{c}x}{\sqrt{k^{2} - x^{2}}}\right] \frac{dx}{x - \sigma + 10}\right]\right]$$

откуда, в частности, следует, что

$$\overline{M}_{\star}(\sigma) = R_{\star}(k\sigma) = \frac{\sigma \pm \sigma}{\sigma \pm 1} \exp\left[\frac{1}{\sigma} \int_{0}^{1} \arctan\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^{-1}}}\right] \frac{dx}{x \pm \sigma + i0}\right]$$

от k не зависит.

Здесь было использовано аналитическое продолжение функции |σ|. которым является α sgn(Rc α).

Согласно формулам Сохоцкого [4], [5] $\frac{1}{x \pm i0} = \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$.

Приведем также числовые эначения интегралов $I_{+}(\sigma) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\sigma} \arctan\left[\frac{k_{e}^{*}x}{\sqrt{1-x^{*}}}\right]\frac{dx}{x\pm\sigma+i0}\right\}$ входящих в коэффициенты полученных асимптотических формул. Для расчетов возьмем $k_c^* = \frac{e_1}{e_{15} + c_{44} \varepsilon_{11}} = 0.494$, который соответствует материалу РZТ-4. Так как

согласно вышедоказанному имеют место формулы $I_{-}(\sigma) \equiv I_{+}(-\sigma)$. $I_{-}(\sigma)I_{+}(\sigma) = \frac{(1+k_{+})\eta(\sigma)}{\eta(\sigma)+k_{e}^{-}|\sigma|}$ и, кроме того, $I_{+}(0) = I_{-}(0) = \sqrt{1+k_{+}^{-}}$, то можем

ограничиться значениями I (о) при положительных значениях о

Таблица 1

	cos(0°)	cos(15°)	cos(30°)	cos(45°)	cos(60°)	cos(75°)	σ_0
$I_*(\sigma)$	1.069	1.071	1.076	1.085	1.102	1.133	1.063
$I'_*(\sigma)$	-0.043	-0.045	-0.052	-0.066	-0.097	-0.175	

Приведем также график функции $I_{1}(\sigma)$ (фиг. 3).



Фиг. 3

АИТЕРАТУРА

- Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, 1982. 239 с.
- 2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
- Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
- Шилов Г. Е. Математический анализ, второй специальный курс М.: Наука, 1965. 328 с.
- 5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.:Наука, 1972. 283 с.
- Б. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979. №3. С. 29-34.
- Григорян Э. Х., Саркисян А. В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на краю электропроводящего упругого слоя. //Изв. НАН Армении. Механика, 1999. Т. 52. № 1. С. 30-39.

Ереванский

Государственный Университет

Поступила в редакцию 25.05.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՁԳԱՅԻՆ ԱԿԱԳԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57, Nº4, 2004

Механика

УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան

Անհամասես սայերի և գյանային թաղանըների տատանումների մասին

ՈՒսումնասիրվում են ըստ բարձրության մասնակիորեն անհամասծո սալնրի և գլանային բաղանթների տատանումների մի քանի խնդիրներ Դժային տատանումների խնդիրը սալի համար դիտարկվում է անհամասեռ առաձգամածուցիկության դեպքում (անհամասեռ սոդը) Առաձգական սալի և գլանի համար խնդիրները դիտարկվել են երկրաչափորեն ոչ գծային դրվածքով Հետաքրջիր է, որ անհամասեռությունը կարող է փոխել տատանումների և ալիքների տարածման բնույթը՝ «կոչտ» և «փափուկ» ձևերով.

L.A.Movsisyan

About Vibrations of Nonhomogeneous Plates and Cylindrical Shells

Исследуются одномерные колебания пластии и цилиндрической оболочки, когда потолщине имеется неоднородность. Она может быть как естественной, так и в случае, когда объект находится в температурном поле, вследствие чего свойство материала изменяется В последнем случае особенно чувствительны изменения визкоупругих свойств. В вязкоупругой постановке изучаются динейные кодебания, а в упругой – нединейные

 Уравнения движения цилиндрической оболочки и компоненты деформаций возьмем по [1]

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T}{R} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, t)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
(1.2)

Теперь несколько слов о соотношениях вязкоупругости. Как известно [2.3], если вязкоупругие свойства меняются вследствие температуры, то для материалов, для которых верна температурно-временная аналогия. связь напряжение – деформация сохраняет свой вид, только вместо времени ставится приведенное время. Так вот, в ныражении связи

$$\widetilde{E}\mathbf{v} = \mathbf{E}\left(\mathbf{v} - \gamma \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbf{v}(\tau) d\tau\right)$$
(1.3)

1 заменяется на *1*' (будем изучать экспоненциальное ядро). Если предположить, что материал находится в стационарном температурном поле и имеется только изменение температуры по высоте, приведенное время *1*' через *1* выразится [3]

$$t' = \psi(z)t$$
 (1.4)

Если предположить, что в (1.3) l заменено на l' и учесть, что принимается гипотеза прямых нормалей, естественно разложить $\psi(z)$ и $\bar{e}^{\alpha_{v}(z,1)-1}$ в ряды по z и довольствоваться линейным приближением.

Тогда окончательно для усилия Т и момента М получим

$$T = I_1 \varepsilon + I_1 \kappa - \int_{-\infty}^{t} b[(I_1 + I_2 A)\varepsilon + (I_1 + I_3 A)\kappa] d\tau$$

$$M = I_2 \varepsilon + I_3 \kappa - \int_{-\infty}^{t} b[(I_2 + I_3 A)\varepsilon + I_3 \kappa] d\tau$$

$$I_j = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} E(z) z^{j-1} dz$$

$$A(t - \tau) = \frac{a_1}{a_1} (1 - \alpha a_0(t - \tau)) \qquad (1.6)$$

$$b = \gamma a_0 e^{-\alpha a_0(t - \tau)}$$

Как видно из (1.6), так как роль коэффициента Пуассона невелика. его изменение не учитывается.

2. Рассмотрим линейные вязкоупрутие колебания пластинки $(R \to \infty)$ для случая краевых условий:

$$w = M = T = 0$$
 при $x = 0$ и $x = l$ (2.1)

Подставляя (1.5) с учетом (1.2) в (1.1), будем искать решение системы в виде

$$u = \varphi(t) \cos \lambda x, \quad w = f(t) \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$$
 (2.2)

удовлетворящее условиям (2.1).

$$\frac{d^{2} \phi}{dt^{2}} + \omega^{2} \left\{ \phi - \int b \left[\phi - \frac{h^{2}}{12} A(t-\tau) \lambda f \right] d\tau \right\} = 0$$

$$\frac{d^{2} f}{dt^{2}} + \Omega^{2} \left\{ f - \int_{-\infty}^{t} b \left[f - \frac{1}{\lambda} A(t-\tau) \phi \right] \right\} = q(t) \qquad (2.3)$$

$$\omega^{2} = \frac{I}{\rho h} \lambda^{2}, \qquad \Omega^{2} = \frac{I}{\rho h} \lambda^{4}, \qquad q = \frac{2}{\rho h l} \int_{0}^{1} P \sin \lambda x dx$$

Как известно [2], при не очень высоких температурах изменяются голько коэффициенты вязкости, т.е. в соотношениях (1.5) можно принять I = 0, соответственно с этим в (2.3) они не фигурируют (только ради краткости записи) Наличие его не приводит ни к каким-либо принципиальным осложнениям по сравнению с тем. что приводится ниже При вынужденных колебаниях $q = q_0 e^{\frac{2\pi}{3}}$ соответствующее решение (2.3) дается

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\theta_{\ell} + \theta_0)}, \qquad f = f_0 e^{i(\theta_{\ell} + \theta_1)}$$
(2.4)

здесь

$$f_{0} = g_{0} \left(F^{2} + \phi^{2}\right)^{\frac{h}{2}}, \quad \phi_{0} = \frac{h^{2}\lambda}{12\Gamma_{11}} \left(\Gamma_{21} - \Delta\Gamma_{22}\right) f_{0}$$

$$F = \Omega^{2} \left[1 - \Gamma_{1c} + \frac{h^{2}}{12\Gamma_{1c}} \left(\Gamma_{2c} - \Delta\Gamma_{2c}\right) \left(\Gamma_{2s} - \Delta\Gamma_{2c}\right)\right] - \theta^{2}$$

$$\Phi = \Gamma_{1s} - \frac{h^{2}}{12\Gamma_{1s}} \left(\Gamma_{2s}^{2} - \Delta^{2}\Gamma_{1s}^{2}\right)$$

$$\Delta = \frac{\Gamma_{2s}}{\Gamma_{2c}} \left[\frac{\omega^{2}(1 - \Gamma_{1c}) - \theta^{2}}{1 - \Gamma_{1c}} + \frac{\Gamma_{1s}\Gamma_{2c}\omega^{2}}{1 - \Gamma_{1c}} - \theta^{2}\right] + \frac{\Gamma_{1s}\Gamma_{2c}\omega^{2}}{1 - \Gamma_{2s}}$$

$$\Gamma_{1c} = \gamma \alpha a_{0}^{2} \vartheta^{-1}, \qquad \Gamma_{1s} = \gamma a_{0} \vartheta \vartheta^{-1}, \qquad \vartheta = \vartheta^{2} + (\alpha a_{0})^{2}$$

$$\Gamma_{2c} = 2 \frac{a_{1}}{a_{0}} \vartheta^{2}\Gamma_{1c} \vartheta^{-1}, \qquad \Gamma_{2s} = \frac{a_{1}}{a_{0}} \Gamma_{1s} \left(\vartheta + \alpha a_{0}\right)^{2} \vartheta^{-1}$$

При выводе (2.5) принималось, что разность между фазами $\Delta = \theta_1 - \theta_2$ мала, так что $\cos \Delta = 1$ и $\sin \Delta = \Delta$.

Частоты и коэффициенты затухания свободных колебаний, следуя [2], выводятся в предположении, что трение очень мало, гогда, пренебрегая малыми членами, получим ($p = p_1 + ip_2$)

$$p_{t} = \begin{cases} \omega, \\ \Omega, \end{cases} \qquad p_{2} = \frac{p_{1}}{2} \Gamma_{ts}(p_{t})$$
(2.6)

3. Нелинейные свободные колебания пластинки будем изучать в упругой постановке.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \beta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{\rho h}{I_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\beta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} - \beta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\rho h}{I_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (3.1)$$

$$\beta_1 = \frac{I_1}{I_1}, \qquad \beta_2 = \frac{I_1}{I_1}$$

Обычно [1] при изучении поперечных колебаний инерционным членом в первом уравнении (1.1) пренебрегается, так как собственная частота продольных колебаний на порядок выше, чем изгибные Оказывается, что при неоднородности эти разности еще больше увеличиваются [4], так что здесь он также пренебрегается. Рассмотрим случай шарнирного закрепления краев

$$u = w = M = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \tag{3.2}$$

Тогда решение (3.1) будем искать как

$$w = f \sin \lambda x, \qquad u = \varphi \sin 2\lambda x$$
 (3.3)

Система (3.1) решается методом Галеркина. Первое уравнение дает

$$\phi = -\frac{1}{8}\lambda f^{2} + \frac{2}{3l}\beta_{1}f, \qquad T = I_{1}\left(\frac{1}{4}f^{2}\lambda^{2} - \frac{2\beta_{1}\lambda}{l}f\right)$$
(3.4)

а из второго получим

$$\frac{d^{2} f}{dt^{2}} + \omega_{0}^{2} \left(1 + a_{1} f + a_{2} f^{2}\right) f = 0$$

$$\omega_{0}^{2} = \frac{I_{1}}{\rho h} \Lambda, \qquad \Lambda = \left(\beta_{1} \lambda^{2} - \frac{64}{9} \frac{\beta_{1}^{2}}{l^{2}}\right) \lambda^{2}$$

$$a_{1} = -\frac{2}{3} \frac{\beta_{1} \lambda^{3}}{l} \Lambda^{-1}, \qquad a_{2} = \frac{1}{4} \lambda^{4} \Lambda^{-1}$$
(3.5)

Появление члена с a_1 иследствие неоднородности интересно само по себе (член с f^{-1}) и его роль существенна в значении нелинейной частоты. Нелинейная частота для уравнения (3.5) имеет вид [5]

$$\omega = \omega_0 \left(1 + Aa^2 \right) \qquad A = \frac{3}{8}a_2 - \frac{12}{12}a_1^2 \tag{3.6}$$

В [1], следуя другой работе, приводится не совсем точное выражение для нелинейной частоты цилиндрической оболочки, уравнение которой имеет такой же вид, как (3.5) (с.118, формула (2.198)).

Возьмем характерный случай неоднородности

$$E(z) = \overline{E}\left(1 + \frac{2z}{h}\delta\right), \qquad \overline{E} = \frac{E_1 + E_2}{2}, \qquad \delta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$$

$$\beta_1 = \frac{h}{6}\delta, \qquad \beta_2 = \frac{h^2}{12}$$
(3.7)

Легко видеть, что при всем изменении δ ($0 \le \delta \le 1$) коэффициент A в (3.6) всегда положителен, как и в случае однородной пластинки, т.е. геометрической нелинейности соответствует "жесткая" характеристика.

4. При изучении распространения нелинейных волн в (3.1) инерционный член, как и в [6], удерживается. Кстати. в [6] удержание этого члена привело к интересному результату. Оказывается, в нелинейном дисперсионном соотношении (аналог (3.6)) нелинейный коэффициент отрицательный, что существенно при изучении характера распространения воли модуляции

Решение (3.1) в этом случае ищется как

$$u = u_0 + u_1 e^{i\tau} + u_2 e^{2i\tau} + \text{k.c.}$$

$$w = w_1 e^{i\tau} + w_2 e^{2i\tau} + \text{k.c.}, \quad \tau = kx - \omega t$$
(4.1)

Подчеркнутые члены для однородного случая отсутствуют.

Подставляя (4.1) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, из первого уравнения получим

$$\frac{\partial u_{0}}{\partial x} = k^{2} (w_{1}\overline{w_{1}} + 4w_{2}\overline{w_{2}})(1 + 4H), \qquad u_{1} = ik(1 + H)(\beta_{1}w_{1} + 2\overline{w_{1}}w_{2})$$

$$\overline{u_{1}} = -ik(1 + H)(\beta_{1}\overline{w_{1}} + 2w_{1}\overline{w_{2}}), \qquad u_{2} = \frac{1}{4}ik(1 + H)(8\beta_{1}w_{2} - w_{1}^{2}) \quad (4.2)$$

$$\overline{u_{2}} = \frac{1}{4}ik(1 + H)(\overline{w_{1}^{2}} - 8\beta_{1}\overline{w_{2}}), \qquad H = \frac{h^{2}k^{2}}{12}\left(1 - \frac{1}{3}\delta^{2}\right)$$

При получении (4.2) члены высшего порядка пренебреглись по сравнению с основными (например. $w_2\overline{w}_2 << w_1\overline{w}_2$ и т.д.) а $u_0(x)$ – так называемое среднее течение – определялось из условия [7].

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx c \frac{\partial}{\partial x}$$

где с - групповая скорость основной изгибной волны

$$c = \frac{d\omega_0}{dk}, \qquad \omega_0^2 = \frac{I_1}{12\rho h} \left(1 - \frac{1}{3}\delta^2\right) k^4$$
(4.3)

Выражение для *w*, получилось из второго уравнения, пренебрегая инерционным членом от него, и оно есть

$$v_2 = -\frac{3w_1^2}{2h^2}\beta_1 \tag{4.4}$$

Окончательно нелицейное дисперсионное соотношение выглядит как

$$\omega^{2} = \omega^{2} - \frac{I}{8\rho h} \left(9H - \frac{1}{24}\delta^{2}\right) k^{4} a^{2}$$

$$4a^{2} = w_{0} \overline{w_{0}}$$
(4.5)

Коэффициент при a^2 в однородном случае ($\delta = 0$) отрицателен, а уже для $\delta > \left[18k^2h^2(1 + 6k^2h^2) \right]$ меняет знак. А это зачит, что в первом случае имеется неустойчивость волн модуляции, как и для однородного случая, а во втором – устойчивость [7].

5. Свободные колебания цилиндрической оболочки изучаются при двух вариантах граничных условий. В нервом – для шарнирно-закрепленного случая условия такие, как (3.2) и решение также ищется по (3.3). Для ф и 7 получатся

$$\varphi = -\frac{1}{8}\lambda f^2 + \frac{2f}{3I} \left(\beta + \frac{1}{R\lambda^2}\right)$$

$$T = I_1 \left[\frac{1}{4}f^2\lambda^2 - \frac{2}{l}\left(\frac{\beta_1}{l} + \frac{1}{R\lambda}\right)f\right]$$

(5.1)

Уравнение для f имеет такой же вид, как (3.5) с коэффиционтами

$$\omega_{0}^{2} = \frac{I_{1}}{\rho h} \Delta$$

$$\Delta = \left(\frac{h^{2}}{12}\lambda^{2} - \frac{64\beta^{2}}{9l^{2}}\right)\lambda^{2} + \frac{1}{R}\left[\frac{1}{R}\left(1 + \frac{16}{9l^{2}\lambda^{2}}\right) - 2\beta_{1}\left(\lambda^{2} + \frac{24}{l^{2}}\right)\right]$$

$$a_{1} = -\frac{\lambda}{l}\left(\frac{2\beta_{1}}{3}\lambda^{2} + \frac{3}{R}\right)\Delta^{-1}$$

$$a_{2} = \frac{1}{4}\lambda^{4}\Delta^{-1}$$
(5.2)

Нелинейная частота определится по (3.6) с новыми a_{i} причем коэффициент A может быть как положительным, так и отрицательным. Это имеет место и для однородного материала – коэффициент A > 0 примерно при неравенстве h/l > 0.5l/R.

Интересен случай свободного шарнира. Тогда вместо условия u = 0 ставится T = 0. В этом случае надо вспомнить, что первое уравнение в (1.1) приведено для случая пологой оболочки, а точное уравнение имсет вид

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
(5.3)

Теперь, если принять $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx 0$ и учесть связи (1.5), получим

$$T = \frac{1}{R}M, \qquad \varepsilon = \frac{I_1 - RI_2}{RI_1 - I_2}\kappa$$

$$M = D\kappa, \qquad D = \frac{R(I_1I_2 - I_2^2)}{RI_1 - I_2}$$
(5.4)

Уравнение движения при этом примет вид

$$\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$
(5.5)

которое для f(t) даст

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + a_1 f) f = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{\rho h} \Lambda, \qquad \Lambda = \left(\lambda^2 - \frac{1}{R^2}\right) \lambda^2, \qquad a_1 = \frac{4\lambda^4}{3\pi R} \Lambda^{-1}$$
(5.6)

Нелинейная частота, определяемая по (3.6),

$$A = -\frac{5}{12}a_1 \tag{5.7}$$

т.е. в этом случае имеется "мягкая" характеристика – нелинейная частота меньше линейной.

ЛИТЕРАТУРА

- Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
- Работнов Ю.Н. Элеменгы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
- Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
- Мовсисян Л.А. К свободным колебаниям неоднородных пластин //Изв. НАН Армении, Механика. 1997. Т.50. №3-4. С.42-49.
- 5. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
- Багдоев А.Г., Мовсисян А.А. О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрической оболочки. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1988. Т.41. №3. С.3-6.
- 7. Уизем Дж. Линейные и нелицейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с
- 8. Белубекян М.В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. //Изв.НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3 С.34-41.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 20.07.2004

203003005 915016030155665 02940355 029404555 02940455 ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57, №4, 2004

Механика

УДК 539.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ УЗКОГО КОНУСА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Погосян С.М., Сафарян Ю.С.

Ա.Գ.Ջագդու, Գ.Մ.Մաշության, Ս.Մ.Պողոսյան, Յու.Ս.Սաֆաթյան Ոչ գծային խնդիրներ բարակ կոնի քափանցման սեղմելի հեղուկի մեջ

Դիտարկվում է տիպիկ դիֆրակցիոն ալիջային խնդիրը, որը առաջանում է կիսատարածություն զրադեցնող հեղուկի մեջ բարակ կոճի գերձայնային թափանցման ժամանակ։ Որոչվում են ասիմպտոտիկ գծային և ու գծային, ինչպես անալիտիկ, այնպես էլ րվային լածումները տարբեր ալիքների շվման գծի շրջակայքում։

A.G. Bagdoev, G.M.Mashuryan, S.M.Pogosyan, Ju.S.Safaryan Nonlinear Problems of Stender body penetration in compressible fluid

Рассматривается типично дифракционная волновая задача, которая возникает при сверхзпуковом проникании узкого конуса в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство. Определяются асимитотические линейные и пелинейные как аналитические гак и численые решения в окрестности ливни касания воли

При проникании узкого конуса с углом раствора 2β в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство, с постоянной сверхзвуковой скоростью V картина движения показана на фиг. 1.

Задача является осесимметричной и зависит от r, z. Выберем ось Or по поверхности жидкости, ось Oz-вглубь. Введем полярные координаты $r = r_1 \cos \varphi$, $z = r_1 \sin \varphi$. Тогда фронт линейной задачи AB соответствует

сфере $r_1 = at$ а фронт *BC*-конусу с уравнением $r = \frac{VI - z}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad M = \frac{V}{a}$

а – начальная скорость звука. В линейной постановке имеем в области [1] вне сферы *АВВ'А*' для давления

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_{r_2}^{r_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + r^2}}$$
(1)

ғде

$$r_{0,2} = \frac{M^2 z - Vt \pm \sqrt{(M^2 z - Vt)^2 - (M^2 - 1)M^2(r_1^2 - a^2 t)}}{M^2 - 1}$$
(2)

После несложных вычислений найдем

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \ln \frac{Vt - z + \sqrt{(Vt - z)^2 - (M^2 - 1)r^2}}{Vt - z - \sqrt{(Vt - z)^2 - (M^2 - 1)r^2}}$$

Вблизи фронта ВС [2]

$$P = \sqrt{2}\rho_0 \beta^2 V^2 \frac{\sqrt{V(-z - r\sqrt{M^2 - 1})}}{\sqrt{z\sqrt{M^2 - 1}}}$$
(3)

где ро - начальная плотность

Пусть уравнение состояния жидкости $P = B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - B$, $\rho = плотность$, $B = \rho_0 g^2$. Обозначим

 $t - \frac{z}{V} - \frac{r\sqrt{M^2 - 1}}{V} = \tau$ и заменим согласно теории Уизема [3] линейную характеристику т на нелинейную y_1 , тогда (3) в нелинейном случае дает

$$P = \rho_0 \beta^2 V^2 \frac{\sqrt{V} \sqrt{2} \sqrt{y_1}}{\sqrt{r} \sqrt[4]{M^2 - 1}}$$
(4)

вблизи *B* (фиг. 1) $r \approx at \cos \phi$. $\sin \phi_0 = \frac{1}{M}$, а уравнение одномерной по нормали к *BC* характеристики [3] $y_1 = \text{const}$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{n+1}{2} \frac{P}{\rho_0 a^2}, \quad \tau = -A \frac{n+1}{2} 2\sqrt{t} \sqrt{v_1} + y_1, \quad A = \frac{\beta^2 M^2 \sqrt{2}}{\cos \phi_0}$$
(5)

Уравнение ударной волны ВС [3]

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{n+1}{4} \frac{P}{\rho_0 a^2} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{n+1}{4} \frac{A}{\sqrt{t}} \sqrt{y}$$
(6)

Подставляя (5) в (6), можно получить вдоль ВС

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{n+1}{4} \frac{A}{\sqrt{t}} \sqrt{y_1} = A \frac{n+1}{2} 2\sqrt{t} \frac{\partial \sqrt{y_1}}{\partial t}$$
(7)

Решение этого уравнения будет $\sqrt{y_1} = K\sqrt{t} \frac{n+1}{4}$

$$K = 3A \tag{8}$$

и на ударной волне BC P = P'

$$\frac{P}{\rho_0 a^2} = A \sqrt{\frac{p_1}{r}}, \quad \frac{P}{\rho_0 a^2} = 3 \frac{n+1}{4} A^2, \quad \frac{P'}{\rho_0 a^2} = \frac{3}{2} (n+1) \beta^4 M^6 (M^2 - 1)^4$$
(9)

Внутри сферы $r_1 = at$ решение занишется [1]

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_0^{z_0} \frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + r^2}} - \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_{z_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + r^2}}$$
(10)

где $z_1 < 0$.

$$z_{1} = \frac{M^{2}z + Vt - \sqrt{(M^{2}z + Vt)^{2} - (M^{2} - 1)M^{2}(r_{1}^{2} - a^{2}t^{2})}}{M^{2} - 1}$$
(11)

Вблизи участка линии $r_1 = at AB$ (фиг.1)

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{l} \left(l - \frac{r}{a} \right) \frac{M^2 \sin \varphi}{1 - M^2 \sin^2 \varphi}$$
(12)

Если в нелинейной задаче применить метод замены линейных характеристик уточненным нелинейным уравнением [3], решение на АВ идали от В будет экспоненциально мало. Вблизи точки В, где $\sin \varphi_0 = \frac{1}{M}$, полученное решение не имеет места. Учитывая порядки $\varphi - \varphi_q \approx \beta^2$, $\frac{P}{\rho_0 a} \approx \beta^4$. $t - \frac{r_1}{a} \approx \beta^4$, можно видеть, что второе слагаемое в правой части (10) можно отбросить, и получится из (10) линейное решение вблизи $B\left(t - \frac{1}{a} > 0\right)$

$$\frac{P}{\rho_0 a^2} = \frac{\beta^2 M^3}{2} \frac{\phi - \phi_0 + \sqrt{(\phi - \phi_0)^2 + 2 \frac{l - \frac{r_1}{a}}{l}}}{\sqrt{M^2 - 1}}$$
(13)

Вводя в соотнетствии с [1] [2] переменные

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2} \frac{P'}{\rho_0 a^2}} y, \quad P = P' \mu, \quad V_n = a \frac{P'}{\rho_0 a^2} \mu, \quad r_1 = at + at \frac{n+1}{2} \frac{P'}{\rho_0 a^2} \delta,$$
$$V_n = a \sqrt{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{P'}{\rho_0 a^2}\right)^2 v,$$

где *V* , *V* есть компоненты скорости частиц по *r*₁, φ, из (13) можно найти волизи точки В позади *AB*

$$\mu = c\left(y + \sqrt{y^2 - 2\delta}\right), \quad c = \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad \nu = -\frac{\mu^2}{2c}$$
(14)

причем $\delta < 0$. Уравнение коротких волн в нелинейной задаче [1] [2]

$$(\mu - \delta)\frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \mu + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \delta}$$
(15)

В линейном варианте μ в скобках в (15) следует отбросить. Введя функцию ф по формуле $\mu = \frac{\partial \phi}{\partial \delta}$, интегрируя (14) при условии $\delta = 0$, $\dot{\phi} = 0$ можно получить в линейной задаче $\phi = \phi^{0}(\delta, y)$

$$\phi^{\nu} = c\delta v - c(y^2 - 2\delta)^2 \frac{1}{3} + \frac{1}{3}|y|^3$$
⁽¹⁶⁾

Уравнение коротких воли можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \delta} - \delta\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{17}$$

В случае δ > 0, т.е впереди волны *BE*. в липейной задаче согласно (1), (2) 62

$$\mu = 2c\sqrt{y^2 - 2\delta} \tag{18}$$

причем решение обращается в нуль на линейной волне $BC = \frac{\delta^2}{2}$. Из порого уравнения (15) для V получится согласно (18)

$$\frac{\partial v}{\partial \delta} = \frac{2cy}{\sqrt{y^2 - 2\delta}}, \quad v = -2cy\sqrt{y^2 - 2\delta}$$

Таким образом, линейное решение впереди параболической линии б = 0 имеет по (18) вид

$$\delta > 0, \ \delta = \frac{\nu^2}{2} - \frac{\mu^2}{8c^2}, \ \nu = -\nu\mu$$
 (19)

Решение уравнений (15) ищем в виде [1], [2]

$$\delta = -\frac{p^2}{2} f'(\mu) + F(\mu), \quad v = yf(\mu), \quad f(\mu) = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu}$$
(20)

$$F(\mu) = \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B} \ln \frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C(\mu + A)^2 - CB^2$$
(21)

Уравнения (15) можно записать в виде

$$\mu - \delta + \mu \frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad -\frac{\partial \delta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \mu}$$
(22)

Можно показать, что (20), (21) удовлетворяют (22). Уравнение ударной волны *ВС* согласно (5)-(9)

$$Vt - z - r\sqrt{M^2 - 1} = -\frac{3}{8}(n+1)^2 M^8 (M^2 - 1)^{-1} \beta^4 V$$

или в переменных δ, μ на ВС

$$\mu = 1, \quad \delta = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$$
(23)

Уравнение нелинейной параболической линии BE будет $\delta = \mu$ Точка их пересечения В будет иметь координаты

$$y_B = 1, \ \mu_B = 1, \ \delta_A = 1$$
 (24)

Для того, чтобы (20) переходило в (19), для больших у должно быть A = 0, B = 0 и (20), (21) дают после раскрытия логарифма

$$\delta = \frac{y^2}{2} + \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B} \left(-\frac{2B}{\mu + A} \right) + C\mu^2 \quad \text{или}$$
$$C = -\frac{1}{8c^2}, \delta = \frac{y^2}{2} + 2\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_1^2, \qquad = -y\mu_1 \quad (25)$$

где впереди *ВЕ* обозначены ... µ. v. через ... µ. v.

Уравнение ударной волны ВВ" будет

$$\frac{d\delta}{dy} = \sqrt{2\delta - \mu}$$
(26)

Можно найти решение уравнений (22), переходящее для больших δ.μ в (14) в виде [1], [2]

$$\delta = \frac{\mu v}{c} - \mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{2c^2} + \left(1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{2c}\right) \mu, \quad v = -\frac{\mu^2}{2c} - 1 + \frac{1}{2c}$$
(27)

Условие непрерывности решения на ВЕ по (25). (27) дает

$$\frac{y^2}{2} + 2\mu - \frac{3}{2}\mu^2 = \mu y 2\sqrt{3} - \mu \ln \mu - 6\mu^2 + (7 - 2\sqrt{3})\mu - \mu y = \sqrt{3} - 1 - \mu^2 \sqrt{3}$$
(28)

Равенства (28) точно выполнены в точке B даваемой (24), а на всей линии BE вплоть до точки y=1.6, удовлетворены с погрешностью не превышающей 10%. Уравнение на ударной волне BB'' с учетом (27) дает

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{-2\sqrt{3\mu} + \sqrt{4\sqrt{3\mu}(y-1) - 2\mu\ln\mu - 12\mu^2 + 13\mu}}{2\sqrt{3y} - \ln\mu - 12\mu - 2\sqrt{3} + 6}$$
(29)

которое следует решать для у≤1 при условиях (24). Должно выполняться условие малости функции

$$\alpha = \sqrt{3} - 1 - \mu^2 \sqrt{3} + \mu \sqrt{4} \sqrt{3} \mu (y - 1) - 2\mu \ln \mu - 12\mu^2 + 13\mu$$

В точке *B* (24) $\mathfrak{X} = 0$. Вблизи *B*, полагая y = 1 + y. $\mu = 1 + \mu$, из (29) получим $\mu = 0, 4y$; $\mathfrak{X} = -0.2y$. т.е. \mathfrak{X} мало. Расчеты (29). (24) приведены на фиг 2, при этом до точки y=-1 \mathfrak{X} мало и использованное частное решение (27) дает удовлетворительные результаты.





ЛИТЕРАТУРА

- 1. Багдоев А.Г. Движение конуса в сжимаемой жидкости// Докл. АН Арм. ССР. Механика. 1967. Т. XLV. №3. С.101-106.
- 2 Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1968. Т.ХХІ. №3. С.39-56.
- 3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН Арм ССР. 1981. 307 с.

Институт механики НАН Армении Горисский филиал государственного инженерного университета Армении

Поступила в редакцию 3.06.2004

Մեխանիկա

57, Nº4, 2004

Механика

УДК 531.539.376 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ВЕСЬМА СТАРОГО БЕТОНА С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА ДЕСОРБЦИИ ХИМИЧЕСКИ НЕСВЯЗАННОЙ ВОДЫ Карапетян К.А.

tupunte trint terre

կ Ա.Կարապետյան

Ծնը բնառմի սույքի հնաագոտումը թիմիապես Վապված գրի դեռորբգիայի պրոցնսի հայվառմամբ

Հետավոտվել է բեռունի խոռուներում և կապիլյարներում պատրասաման փուլում հավաքվող բիմիապես վկապված ջրի (նախնական խոնավություն) դեսորջցիայի պրոցեսի ազդեցությունը ծեր բետոնների սողքի վրա Յույց է տված, որ նախնական մեծ խոնավությամբ ծեր բետոնների սողքի դեֆորմացիաները ոչ բարձր խոնավային պայմաններում կարողը են բազմակի անվամ գերազանցել չրջակա միչավայրի խոնավությանը մոտ խոնավությամբ նույնանման բետոնների սողքի դեֆորմացիաներին (ավելի քան չի անգյում ծվատ է 20 անգյուն սեղմման դեպքում)

K.A.Karapetyan Investigation of creep of quite old concrete taking into account disorption process of chemically inconnected water

Носледовано влияние процесса десорбник химически несвязанной воды, накопленной в порах и канилаярах бетона в этапе и чотовления, на полтучесть бетонов в возрасте 23-27 лет.

Установлено, что в условиях невысокой влажности среды зеформации полтучести старых бетонов с большим начальным влагосолержаныем могут многократию превосходить деформации полтучести аналогичных бетонов с влажностью, примерно равной влажности окружающей среды

Сведения о влиянии начального влагосодержания бетонов и растворов на деформации ползучести в случае лальнейшего свободного влагообмена со средой с невысокой влажностью (ниже 75%, [1]) известны из работ [2-6 и др.]

В работах [2-4] установлено, что ползучесть указанных выше материалов, имеющих большую начальную влажность, существенно превосходит ползучести таких же материалов с меньшим начальным влагосодержанием как в случае кручения [2], так и при одноосном раствжении [4] и сжатии [3].

Согласно данным, приведенным в работе [5], гидроизолированные после изготовления шлакобетонные восьмерки и призмы с размерами сечений 10×10см были нагружены постоянным напряжением в возрасте 28 сут. После полной стабилизации процесса деформирования во времени гидроизоляция с двух нагруженных, а также соответствующих усадочных образцов была удалена и велось наблюдение за дальнейшим деформированием оставшихся в изоляции и «высыхающих» образцов По полученным в работе [5] результатам деформации ползучести «высыхающих» (подвергнутых десорбщии влаги) образцов во яремени развивались значительно интенсивнее, чем у оставшихся в изоляции как в случае растяжения, так и при сжатии.

Качественно такая же закономерность наблюдалась и в аналогичных исследованиях, данные которых приведены в работе [6].

Целью настоящей работы является изучение влияния процесса десорбции химически несвязанной воды (накопленной в порах и капиллярах бетона в результате технологически требуемого для приготовления смеси избытка воды) на ползучесть весьма старых бетонов при одноосном растяжении и сжатии с учетом ориентации слоев уклалки бетона по отношению к направлению действия нагрузки. Исследования при растяжении были произведены на литоиднемзобетоне состава в массе 1:1,539:2,4, В/Ц = 0,95, Ц =295 кг/м³. Для приготовления литоиднемзобетона применялись песок (у_n = 1090кг/м³), шебень (у_ш=820кг/м³) с фракцией 5-40мм, взятые из карьера Джрабер (Республика Армения) и портланднемент активностью 40 МПа. В случае сжатия был использован туфобетон состава в массе 1:1,797:2,743. В:Ц =1,43, Ц=261кг/м³, для приготовления которого применялись песок (у_n=1070кг/м³), шебень (у_m=820кг/м³) с фракцией 5-40мм. взятые из месторождения Джрвеж (Республика Армения) и шлакопортландцемент активностью 40 МПа

В момент проведения исследований возраст туфобетона составлял 23 года, а литоидпемзобетона – 27 лет.

В качестве опытных образцов были изпользованы цилиндры с диаметром 5,5см и высотой 22см, выбуренные из литоидпемзобетонных и туфобетонных исходных элементов (цилиндры с диаметром 25см и высотой 60см) по направлениям, перпендикулярному (образцы ПЕС) и параллельному (образцы ПАС) по отношению к слоям уклалки бетона Сразу после изготовления часть исходных элементов была гидроизолирована, а другая часть была оставлена без изоляции. При этом все изолированные, а также литоидпемзобетонные неизолированные элементы до выбуривания из них опытных образцов хранились в лабораторном помешении. Туфобетонные же неизолированные исходные элементы после изготовления в течение первых трех лет хранились при температуре среды 20±5°С и относительной влажности 80±10%, а в дальнейшем, еще и 20 лет, –в лабораторном помещении.

Сразу после выбуривания опытных цилиндрических образцов были определены пределы их прочности R. Затем опытные образцы-близнецы как ПЕС, так и ПАС были нагружены постоянной нагрузкой, величина которой в случае растяжения соответствовала $\sigma = 0.6$ МПа, а в случае сжатия- σ 5МПа. Продолжительность нахождения образцов под нагрузкой в условиях свободного влагообмена со средой в опытах на растяжение составляла 174 сут, а при сжатии - 150 сут. После этого все образцы были разгружены и в течение определенного количества дней (70 сут. при растяжении и 91 день при сжатии) велось наблюление за обратимыми деформациями. В период проведения опытов на соответствующих ненагруженых образцах-близнецах замерялись усадочные деформации. В каждом случае испытания было использовано по 3 образца-близнеца. При этом максимальное отклонение показателей измеряемых механических характеристик по отношению к их среднему арифметическому значению составляло ± 5.1 и -4.8%. Температура лаборагорного помещения в период проведения опытов составляла $22\pm5^{\circ}$ С, а относительная влажность- $-70\pm5\%$.

Результаты исследований представлены на фиг. 1 и 2 и в табл.1 и 2. Часть результатов, касающаяся исследования ползучести гуфобстона при сжатии, опубликована в работе [7].

Отметим, что в момент начала длительных опытов влажность гидроизолированных после изготовления литоидпемзобетонных образцов ПЕС и ПАС составляла соответственно 9,9 и 10,5%, а аналогичных туфобетонных образцов 10,6 и 10.9%. Влажность же указанных образцов после завершения длительных опытов в случае литоидпемзобетона составляла соответственно 4,4 и 5,6%, а в случае туфобетона 3,7 и 4,8%.

Согласно данным, приведенным на фит. 1 и 2, с началом процесса десорбции влаги гидроизолированные после изготовления и освобожденные от изоляции к моменту нагружения опытные образцы претерневают существенные деформации ползучести в обоих рассматриваемых случаях изгружения Значения деформаций ползучести, зафиксированные к концу длительных опытов для образцов ПЕС и ПАС в случае растяжения составляли соответственно 12,7 и 10,4×10⁻⁵. а при сжатии – 92 и 64×10⁻⁵.



Фиг. 1. Кривые деформаций иолзучести лиговдиемзобетова при растяжении.





Для составления количественной оценки указанных деформационных величин целесообразно представить результаты изучения ползучести литоидлемзобетона состава в массе 1:1,432:2,8, В/Ц =0,86, Ц=294кг/м', приготовленного на основе портландиемента активностью 50 МПа [8]. По данным этих исследований величина деформации ползучести оставленных после изготовления в лаборатории литоиднемзобетонных цилиндрических образцов ПЕС с диаметром 5,5см и высотой 22см. зафиксированная после полной стабилизации процесса ползучести, при возрастах к моменту нагружения 28 суг., 3 мес., 6 мес. и 1 год в случае одноосного растяжения ($\sigma = 0,4$ МПа) составляла соответственно 21,7; 12,0; 9,8 и 8,7×10⁻⁵, а и случае сжатия ($\sigma = 5$ МПа) – 103; 65; 56 и 50×10⁻⁵.

Следует также отметить существенную разницу (примерно в 6 раз при растяжении и 20 раз при сжатии независимо от длительности нахождения образцов под нагрузкой) между значениями деформаций ползучести гидроизолированных после изготовления и неизодированных образцов ПЕС (см. кривые 1 и 1' на фиг 1 и 2).

						1	аолниа
Вид Испы- тания	Вил опыт- чых образ- цов	Направле- нис нагруз- ки по озноше- цию к слоям ук- ладки бе- тонз	Проч- ность в мо- мент нагру- жения R, МПа	Упруго- міновенная деформация в момент нагружения ×10 ⁻⁵	Конечная ясличина деформа- ций пол- зучести ×10 ⁻⁵	Абсолютное значение об- ратимых дс- формаций < 10-1	
						Упруго- мгно- асиных	Ползу- чести
Растя- жение	Гндроизо- лированные после изго- товления	перпенд.	1,54	3,7	12,7	4,3	1,9
		паралл	1,87	3,3	10.4	5,4	1,8
	Нензолиро- ванные	перпенд	1,18	4,9	2,1	5.1	1,9
Сжа-	Гидроизоли рованные после изго- товления	перпена.	22,3	50,6	92,0	50,6	14,4
		наралл	20.6	66.7	64.0	61,9	13,3
	Неизолира- ванные	перпенд	13,6	82,5	4.7	83,2	4,4

Приведенные на фиг I и 2 экспериментальные данные ползучести в случаях одноосного растяжения (индекс +) и сжатия (индекс-) образцов, гидроизолированных после изготовления и освобожденных от изоляции к моменту нагружения были аппроксимированы следующими зависимостями [9]:

для образцов ПЕС

$$\mathcal{E}_{u}^{\pm}(t) = A_{u}^{\pm} \cdot f^{\pm}(t) \times \sigma^{\pm} \times 10^{-5} \tag{1}$$

для образнов ПАС

$$\mathcal{E}_{u}^{'\pm}(t) = A_{u}^{'\pm} \cdot f^{*}(t) \times \sigma^{\pm} \times 10^{-5}$$
(2)

а для образцов ПЕС, неизолированных после расформовки

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^{\pm}(t) = A_{\mathcal{H}}^{\pm} f^{\pm}(t) \times \sigma^{\pm} \times 10^{-5}$$
⁽³⁾

В зависимостях (1)-(3) для функции f(t) было использовано следующее аналитическое выражение [9], одинаковое для всех видов образцов:

$$f^{\pm}(t) = 1 - 0.5(e^{-\gamma_1^{\pm}t} + e^{-\gamma_2^{\pm}t})$$

(4)

Tofanno 1

где 1 – длительность нахождения образнов под нагрузкой в сутках. Величины опытных постоянных, входящих в (1) – (4), приводятся в табл.2.

					raomnua
Вид нагружения образцов	А _в . 1/МПа	А'я` 1/МПа	A _u 1/Mf1a	γι, 1/сут.	ү ₂ , 1/сут.
Растярке- ние (+)	21,67	17,5	3,5	0,015	0,02
Сжатие (-)	18,8	13,4	0,94	0,04	0,019

Согласно фит. 1 и 2 описание экспериментальных результатов ползучести (они показаны точками) зависимостями (1)-(3) с использованием данных табл. 2 можно считать приемлемым, а предположение о подобности этих кривых, обусловленной принятием формулы (4)-допустимым. При этом значение отношения деформации ползучести гидроизолированных после изготовления образцов ПЕС и ПАС. зафиксированных в один и тот же момент времени, при растяжении составляет

$$K^+ = \frac{\varepsilon^+(t)}{\varepsilon'^+(t)} \approx 1,24$$

а при сжатии -

$$K^{-} = \frac{\varepsilon^{-}(t)}{\varepsilon^{\prime-}(t)} \approx 1.4$$

Известно, что при растяжении ползучесть бегона, нагруженного напряжением, недостигающим уровня $R \approx 0.8R$, при котором наблюдается микротрещинообразование, является следствием вязкой текучести гелевой структурной составляющей и деформации кристаллической структуры цементного камия, а при более высоких напряжениях ($\sigma > R$) еще и следствием появления и развития микрогрещин в бетоне [10]. В случае сжатия ползучесть бетона, кроме перечисленных причин, обусловлена еще и капилярными явлениями [10].

В рассматриваемых в настоящей работе экспериментах уровень длительного как растягивающего, так и сжимающего напряжений был меньше значения R₁ Поэтому деформации ползучести, обусловленные образованием и развитием микротрешин в бетоне, в этих случаях нагружения не имели места. Что касается ползучести, вызванной вязкой текучестью гелевой структурной составляющей и деформаций кристаллической структуры цементного камия, то они не могли быть значительными, так как испытанные бетоны были старого возраста.

С целью большей конкретизации факторов, возникающих вследствие процесса десорбции влаги и приводящих при этом к увеличению способности деформирования нагруженного старого бетона во времени. можно пользоваться данными, полученными нами при исследовании влияния этого процесса на прочность и упругие свойства бетона.

В качестве опытных образнов были использованы цилиндры как ПЕС, так и ПАС с диаметром 5.5см и высотой 16,5-18см, выбуренные из гидроизолированных после изготовления исходных бетонных элементов. В случае растяжения был использован литоидпемзобетон состава в массе 1:1,513:2,368, В/Ц = 0,88. Ц = 310кг/м³, приготовленный на песке (у_п=1050 кг/м³), щебне (у_ш=851 кг/м³) с фракцией 5-30мм и

портландцементе активностью 38MIIa. Возраст литоидпемзобетона в момент проведения исследований составил 63мес. Исследования при сжатии были проведены на туфобетоне такого же состава, который был использован при проведении указанных выше длительных опытов. Возраст туфобетона в момент проведения исследований и в этом случае составил 23 года.

Согласно полученным результатам, в случае растяжения уменьшение начальной влажности, практически не влияя на прочность, приводит к монотонному уменьшению величины касательного модуля деформации литоидпемзобетна. При уменьшении начальной влажности литоидпемзобетонных образцов ПЕС и ПАС соответственно на 5,1 и 4,5% (через 6 мес. высыхания в лабораторном помещении) снижение модуля деформации для этих образцов оказалось практически одинаковым и составляло приблизительно 24–27%. При сжатии с уменьшением начальной влажности наблюдалось монотонное снижение как прочности, так и модуля деформации туфобетона. Величина этого спала при уменьшении влажности туфобетонных образцов ПЕС и ПАС соответственно на 8 и 6,7% (после 6 мес. высыхания) для прочности составляла соответственно 29 и 11%, а для модуля деформации соответственно 41–44% и 9–18%, в зависимости от уровия приложенного напряжения.

На основе анализа вышеприведенных данных, полученных в результате кратковременных и длительных опытов, можно заключить, что наблюдаемая существенная ползучесть при растяжении старого бетона. гидроизолированного после изготовления и освобожденного от изоляции в момент нагружения, обусловлена, в основном, накоплением во времени упругих деформаций из-за ионотонного снижения модуля деформации бетона вследствие десорбции влаги. В случае сжатия, согласно приведенным расчетам, величина деформации ползучести, вызваниая снижением модуля деформации для туфобетонных образцов НЕС и ПАС. составляет соответственно 36 и 18% от значений их суммарных деформации, зафиксированных через 150 сут. после нагружения. Остальная же часть деформации ползучести этих образцов, по всей вероятности, обусловлена капиллярными явлениями.

Известно, что при разгрузке бетона, находившегося длительное время в нагруженном состоянии, сразу же восстанавливаются упруго-мгновенные деформации, а во времени и дефорамции ползучести [11–13 и др.].

Согласно данным табл.1, в случае растяжения обрагимые упруго-мгновенные асформации гидроизолированных после изготовления и освобожденных от изоляции к моменту нагружения литоидпемзобетонных образцов ПЕС и ПАС оказались соответственно на 16 и 64% больше упруго-мгновенных деформаций этих же образцов, зафиксированных в момент нагружения, что находится в согласии с представленными в работе [13] результатами. В случае сжатия, согласио данным табл.1, упруго-мгновенные деформации гидроизолированных после изготовления туфобетонных образцов ПЕС восстанавливаются полностью, а образцов ПАС неполностью. Относительная же обратимость деформации ползучести в обоих рассматриваемых видах нагружения у образцов ПАС оказалась несколько больше, чем у образцов ПЕС (см. данные табл.1).

В случае литоидпемзобетонных и туфобетонных образнов ПЕС. неизолированных после расформовки и испытанных соответственно на одноосное растяжение и сжатие, как упруго-мгновенные леформации, так и леформации ползучести, восстанавливаются практически полностью (табл.1 и фиг. 1 и 2).

Вывозы

1.Способность весьма старых бетонов к деформированию во времени в условиях свободного влагообмена со средой с невысокой влажностью весьма чувствительна к содержанию в их порах и каниолярах химически несвязанной воды (начальная

влажность), наколенной в результате технологически требуемого для приготовления смеся избытка воды. При этом величина деформации ползучести старых бетонов с большим начальным влагосодержанием может многократно превосходить значения леформации ползучести таких же бетонов, имеющих начальную влажность, примерно равную влажности окружающей среды (более чем 6 раз в случае одноосного растяжения и 20 раз при сжатии).

2. Деформации ползучести весьма старых бетонов, обусловленные десорбщией химически несвязанной воды, более существенны в направлении, перпендикулярном слоям укладки бетона, чем в параллельном, как в случае сжатия, так и при одноосном растяжении.

ЛИТЕРАТУРА

- Строительные пормы и правила. Часть II. Нормы проектирования. Глава 21. Бетонные и железобетонные конструкции. (СНиП 2.03.01-84*). – М.: Стройиздат, 1998. 77с.
- 2 Glucklich Joseph, Isai Ori. (Creep mechanism in cement morter. //J.Amer.Concrete Inst., 1962, N7, p.923-948.
- Скатынский В.И., Крумелись Ю.В. Экспериментальное исследование влияния влажности газосиликатных бетонов на развитие деформации ползучести. Строит. конструкции. Межвед. респ. научн.сб. – Киев: Будивельник. 1970. Вып. 16. С. 85-89.
- 4. Cook D.J. Factors affecting the tensile creep of concrete. Mech. Behav. Mater. Proc. Int. Conf. Mech. Behav. Mater., Kyoto, 1971, vol. 4. Kyoto, 1972, p. 214-224.
- 5. Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от влажности среды. //Изв.АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1965. Т.18, №2. С.58-73.
- Вартанян Г.В. Исследование влияния различных факторов на деформации бетона при знакопеременных воздействиях. – Автореф. дисс. на соиск. канд. техн. наук. Ленинград, 1969. 23с.
- Карапетян К.А. Влияние высыхания на ползучесть и анизотротнию весьма старого бстона. Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости» Гезисы докладов. Ереван: Изд.АН Арм. ССР, 1982, с.90-91.
- Карапетян К.С., Карапетян К.А. Исследование неоднородности прочности, модуля деформации и ползучести бетонного элемента. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1983. Т.36. №2. С.37-53.
- Карапетян К.С. Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона на литоидной пемзе и некоторые другие его свойства. В кн.:Гидротехнический бетон на литоидной пемзе.--Ереван: Изд.АН Арм. ССР, 1958. С.111-148.
- Карапетян К.С. Экспериментальное исследование ползучести бетона. Автореферат дисс. на соиск. уч.ст. докт. техн. наук. Ленинград, 1967. 34с.
- Улицкий И.И. Ползучесть бетонов. Киев-Львов: Гостехиздат. Украины. 1948. 136с.
- 12. Васильев П.И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона // Изв. ВНИИГ, 1953, Т.49, С.83-113.
- Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бето на при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора.// Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-мат.наук. 1964. Т. 17. №4. С.71-90.

Институт механики НАН Армении

P

Поступила в редакцию 17.09.2004