UEbuibyu E X A H И K A MECHANICS

чизиизииь франьюзанового изфизью ичильютизь селечифор Известия национальной академии наук армении

Մեխանիկա

57, №3, 2004

Механика

УДК 539.3

ԱՆԻՋՈՏԲՈՊ ՀԻՄՆԱՏԱԿԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ Բաքլոյան Ա.Հ., Բեգլարյան Ա.Գ., Շահվերդյան Գ.Ն.

О расчете анизотропных оснований А.А. Баблоян, А.Г. Бегларян, Г.Н. Шахвердян

Разработана медодика точного расчета напряжений и перемещений в анизотропных груптах конечной толщины, сжимающихся жестким оспованием сооружений

The Account of Anizotropic Foundation A.G.Beglaryan, A.H. Babloyan, G.N. Shahverdyan

Իզուտրոսլ հիմնատակնրում կոնտակտային լարումների որոշման հարցերը մշակված են շատ հեղինակների կողմից [1:2] Անիզոտրուլ հիմնատակերի համար այդ հարցերը դեռևս մնացել են բաց. Քանի որ անիզուտրոպ մարմիններում լարումների և տեղափոխումների բաշխումները էապես տարբերվում են իզուտրոպի դեպքից, այդ պատճառով անիզուտրոպ հիմնատակերում լարումների (մասնավորապես կոնտակտային) և տեղափոխումների որոշման հարցերը դառնում են հրատապ

Աշխատանքում, գծային առաձգականության տեսության հիմբի վրա, մշակված են մաթեմատիկական Ճշպրիա մեթողներ որոշելու համար լարումները և տեղափոխությունները վերջավոր հաստության անիզոտրոսլ հիմնատակերում, որոնք սեղմվում են կառույցների կոշտ հիմբերով։ Ենթադրվում է, որ հիմնատակը գծորեն անիզոտրոպ է, իսկ անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքները չեն համընկնում հիմնատակի եզրերի հետ։

1. Խառը եզրային պայմաններով խնդիր

Մինչև կոնտակտային խնդրի լուծելը նախապես դիտարկենք հետեյալ օժանդակ խնդիրը։

Որուշել լարումներն ու տեղափոխումները ուղղագծորեն անիզուորոպ շերտում. երբ նրա մի եզրը ամրակցված է, խկ մյուսը՝ բեռնավորված է կամայական ձեռվ (նկ.է)։



 $\sigma_{u}(\xi,h) = f(\xi), \quad \tau_{\xi_{n}}(\xi,h) = g(\xi), \quad u_{\xi}(\xi,0) = u_{u}(\xi,0) = 0, \quad (-\infty < \xi < \infty)$ (1.1)

3

Հարթ դեֆորմացիոն վիճակի դեպքում ուղղագծորեն անիզոտյուպ մարմինների հավասարակշրության հավասարումների լուծումները (— $\infty < \xi < \infty$, () $\leq \eta \leq h$) չերտի համար կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով [3;4].

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= \int_{-\infty}^{1} \sum_{p=1}^{4} d_{p} A_{p}(\lambda) e^{\lambda ((\xi+\beta_{p}\eta))} d\lambda, \quad u_{\eta} = -\int_{-\infty}^{1} \sum_{p=1}^{4} e_{p} A_{p}(\lambda) e^{\lambda ((\xi+\beta_{p}\eta))} d\lambda, \\ \sigma_{\eta} &= \int_{-\infty}^{1} \sum_{p=1}^{4} e_{p} A_{p}(\lambda) \lambda e^{\lambda ((\xi+\beta_{p}\eta))} d\lambda, \quad \sigma_{\xi} = \int_{-\infty}^{1} \sum_{p=1}^{4} I_{p} A_{p}(\lambda) \lambda e^{\lambda ((\xi+\beta_{p}\eta))} d\lambda \end{aligned}$$
(1.2)
$$\tau_{\xi\eta} &= \int_{-\infty}^{1} \sum_{p=1}^{4} s_{p} A_{p}(\lambda) \lambda e^{\lambda ((\xi+\beta_{p}\eta))} d\lambda. \end{aligned}$$

որտեղ $A_p(\lambda)$ կամայական ֆունկցիաներ են,

$$c_{p} = \alpha^{-1} \cos \varphi + i \sin \varphi \quad s_{p} = \alpha^{-1} \sin \varphi - i \cos \varphi$$

$$d_{p} = [i\gamma_{0}(\alpha_{p}) \cos \varphi - \sin \varphi] E_{0}^{-1}(\alpha_{p}), \quad e_{p} = [i\gamma_{0}(\alpha_{p}) \sin \varphi + \cos \varphi] E_{0}^{-1}(\alpha_{p})$$

$$\beta = \frac{i\alpha_{p} \cos \varphi - \sin \varphi}{\alpha_{p} \sin \varphi - i \cos \varphi} = \frac{s_{p}}{ic_{p}}, \quad \delta_{p} = \frac{\cos \varphi + i\alpha_{p} \sin \varphi}{\alpha_{p} \cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{c_{p}}{is_{p}}$$

$$i = \frac{1 - \alpha_{p}}{c_{p} \alpha_{p}^{2}} - c_{p}, \quad m = \frac{1 - \alpha_{p}^{2}}{s_{p} \alpha_{p}^{2}} - s_{p}, \quad (p = 1, 2, 3, 4)$$

$$E_{0}(\alpha) = \alpha^{-1} [c_{11}\gamma_{0}(\alpha) - c_{13}\alpha] = -\alpha [c_{13}\gamma_{0}(\alpha) - c_{33}\alpha] = c_{44} [\alpha\gamma_{0}(\alpha) + 1] =$$

$$= c_{44} \frac{c_{13} + \alpha^{2}c_{33}}{c_{13} + c_{44}}, \quad \gamma_{0}(\alpha) = \frac{(c_{13} + c_{44}) \cdot \alpha}{c_{11} - \alpha^{2}c_{44}} = -\frac{c_{44} - \alpha^{2}c_{33}}{(c_{13} + c_{44}) \cdot \alpha} \quad (1.3)$$

Այստեղ c_i անիզոտրապ նյութի առաձգական մողուլներն են գլխավոր ուղղությունների նկատմամբ (*xoy* - համակարգում), ϕ անիզոտրապիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի և չերտի եզրերի կազմած անկյունն է, իսկ α_p (p = 1; 2; 3; 4) երկքառակուսի հավասարման արմատներն են, որը ստացվում է (1.3)-ի վերջին առնչությունից:

ભուվարարելով (1.1) եզրային պայմաններին և կիրառելով ստացված առնչությունների նկատմամբ Ֆուրյեի հակաղարձ ձևավախությունը, A_ρ(λ) անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար կստանանք գծային հավասարումների համակարգ։

$$\sum_{p=1}^{4} e_p Z_p A_p = \widetilde{f}(\lambda), \quad \sum_{p=1}^{4} s_p Z_p A_p = \widetilde{g}(\lambda)$$

$$\sum_{p=1}^{4} d_p A_p = 0, \quad \sum_{p=1}^{4} e_p A_p = 0, \quad Z_p = e^{\lambda h \beta_p}$$
(1.4)

$$\overline{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \overline{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$$
(1.5)

Ստացված (1.4) համակարգի լուծումն է

$$\Delta_0(\lambda)A_p(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)x_{p1}(\lambda) + \tilde{g}(\lambda)x_{p2}(\lambda), \quad (p = 1; 2; 3; 4)$$
(1.5)

$$\begin{aligned} x_{11} &= (d_3e_4 - d_4e_1) = Z_2 + (d_4e_2 - d_2e_4)s_3Z_3 + (d_2e_3 - d_3e_2)s_4Z_4 \\ x_{21} &= (d_4e_3 - d_3e_4)s_1Z_1 + (d_1e_4 - d_4e_1) = Z_1 + (d_3e_1 - d_1e_3)s_4Z_4 \\ x_{31} &= (d_2e_4 - d_4e_1) = Z_1 + (d_4e_1 - d_4e_1)s_2Z_2 + (d_1e_2 - d_2e_1)s_4Z_4 \\ x_{41} &= (d_3e_2 - d_2e_3)s_1Z_1 + (d_4e_1 - d_4e_2)s_2Z_2 + (d_1e_2 - d_2e_3)c_4Z_4 \\ x_{12} &= (d_4e_3 - d_4e_1)s_2Z_2 + (d_2e_4 - d_4e_2)s_3Z_3 + (d_3e_2 - d_2e_3)s_4Z_4 \\ x_{22} &= (d_3e_4 - d_4e_1)s_2Z_2 + (d_2e_4 - d_4e_1)s_2Z_2 + (d_2e_1 - d_1e_2)s_4Z_4 \\ x_{32} &= (d_4e_2 - d_2e_4)s_1Z_1 + (d_1e_4 - d_4e_1)s_2Z_2 + (d_2e_1 - d_1e_2)s_4Z_4 \\ x_{42} &= (d_2e_3 - d_3e_2)s_1Z_1 + (d_3e_1 - d_1e_3)s_2Z_2 + (d_1e_2 - d_2e_1)s_3Z_1Z_3 + \\ + (d_4e_1 - d_1e_4)(s_3s_2 - c_2s_3)Z_2Z_3 + (d_3e_2 - d_2e_3)(s_4s_1 - c_1s_4)Z_1Z_4 + (1.8) \\ + (d_4e_3 - d_3e_1)(s_4s_2 - s_4)Z_2Z_4 + (d_2e_1 - d_1e_2)(s_4s_3 - s_3s_4)Z_3Z_4 \end{aligned}$$

Նչենք, որ $\overline{\Delta}(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot Exp[-i\lambda \cdot \operatorname{Im}(\beta_1 + \beta_2)]$ Ֆունկցիան $\varphi = 0; \pm \pi/2$ դեպքում զույգ է և իրական λ -ի համար ընդունում է իրական արժեքներ։ Մնացած դեպքերում $\overline{\Delta}(\lambda)$ և $\Delta_0(\lambda)$ ֆունկցիաները միշտ ընդունում են կոմպլեքս արժեքներ։

Տեղադրելով 4 (2.) ֆունկցիաների արժեքները (1.5)-(1.8)-ից (1.2) բանաձևերի մեջ, կստանանք օժանդակ խնդրի վերջնական լուծումը։

2. Ողորկ դրոշմի ներթափանցումը անիզոտրոպ շերտի մեջ

Դիտարկենք այժմ ողորկ կոչտ դրոչմի ներքափանցման խնդիրը գծորեն անիզոտրոպ շերտի մեջ, որի ներքեի հիմքը ամրակցված է, իսկ անիզոտրոպիայի գլխավոր ոսըլություններն ունեն կամայական կալմնորոշում։ Շերտի վերեի եզրը դյոշմից դուրս ազատ է արտաքին լարումներից։ Դիտարկվող կսնդրի եզրային պայմանները կլինեն.

$$u_{\xi}(\xi,0) = u_{\eta}(\xi,0) = 0, \ \tau_{1\eta}(\xi,h) = 0, \ (|\xi| < \infty)$$

$$u_{\eta}(\xi,h) = v(\xi), \ (|\xi| \le a), \ \sigma_{\eta}(\xi,h) = 0, \ (|\xi| > a)$$

(2.1)

որտեղ ν(ξ) դիֆերենցելի ֆունկցիա է։ Նչանակենք անհայտ կոնտակտային լարումները *p*(ξ)-ով՝

$$\sigma_{\eta}(\xi, h) = f(\xi) = \begin{cases} p(\xi), \ (|\xi| < a) \\ 0, \ (|\xi| > a) \end{cases}$$
(2.2)

և օգտվենք օժանդակ խնդրի լուծումից։ Հաչվենք տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները դ = h ոսլդի վրա։

Մի շարք ձևափոխություններից հետո (1.2)-ից կստանանք

$$u_{\xi}(\xi,h) = \int_{-\infty} \widetilde{f}(\lambda) \frac{\Delta_{1}(\lambda)}{\Delta_{0}(\lambda)} e^{i\lambda\xi} d\lambda, \qquad u_{\eta}(\xi,h) = -\int_{-\infty} \widetilde{f}(\lambda) \frac{\Delta_{1}(\lambda)}{\Delta_{0}(\lambda)} e^{i\lambda\xi} d\lambda. \tag{2.3}$$

որսւեղ

$$\begin{split} \Delta_{1}(\lambda) &= (d_{4}e_{3} - d_{3}e_{4})(e_{2}s_{1} - e_{1}s_{2})Z_{1}Z_{2} + (d_{4}e_{2} - d_{2}s_{4})(e_{1}s_{3} - \cdots)Z_{1}Z_{3} + \\ &+ (d_{3}e_{2} - d_{2}e_{3})(e_{4}s_{1} - e_{1}s_{4})Z_{1}Z_{4} + (d_{4}e_{1} - d_{1}e_{4})(e_{3}s_{2} - e_{2}s_{3})Z_{2}Z_{3} + \\ &+ (d_{3}e_{1} - d_{1}e_{3})(e_{2}s_{4} - e_{4}s_{2})Z_{2}Z_{4} + (d_{2}e_{1} - d_{1}e_{2})(e_{4}s_{3} - e_{3}s_{4})Z_{3}Z_{4} \\ \Delta_{1}(\lambda) &= (d_{4}e_{3} - d_{3}e_{4})(d_{2}s_{1} - d_{1}s_{2})Z_{1}Z_{2} + (d_{4}e_{1} - d_{1}e_{4})(d_{1}s_{3} - d_{3}s_{4})Z_{1}Z_{3} + \\ &+ (d_{3}e_{2} - d_{2}e_{3})(d_{4}s_{1} - d_{1}s_{4})Z_{1}Z_{4} + (d_{4}e_{1} - d_{1}e_{4})(d_{1}s_{2} - d_{2}s_{3})Z_{2}Z_{3} + \\ &+ (d_{4}e_{1} - d_{1}e_{3})(d_{2}s_{4} - d_{4}s_{2})Z_{2}Z_{4} + (d_{2}e_{1} - d_{1}e_{2})(d_{4}s_{1} - d_{3}s_{4})Z_{3}Z_{4} \\ & \nabla_{2}\psi\phi\rho, np (2.3) pu\omega\omega\Delta\omega\rhon\omega \\ \mathcal{M}(\lambda) &= \frac{\Delta_{2}(\lambda)}{\Delta_{0}(\lambda)} = \mathcal{M}_{1}(\lambda) + i\mathcal{M}_{2}(\lambda), \quad \mathcal{N}(\lambda) = -\frac{\Delta_{1}(\lambda)}{\Delta_{0}(\lambda)} = \mathcal{N}_{1}(\lambda) + i\mathcal{N}_{2}(\lambda) \quad (2.5) \end{split}$$

.ֆունկցիաները አ → ±∞ ղեպքում ձգտում են վերջավոր սահմանների։

$$\lim N(\lambda) = k = k_1 + ik_2, \quad \lim M(\lambda) = \chi = \chi_1 + i\chi_2$$

$$k = -\frac{e_2 s_1 - e_1 s_2}{c_2 s_1 - c_1 s_2} \qquad \frac{1}{c_2 s_1 - c_1 s_2}$$
(2.6)

Բացի դա, $M_1(\lambda)$ և $N_1(\lambda)$ ֆունկցիաները կենտ են, իսկ $M_2(\lambda)$ և $N_1(\lambda)$ -ը զույզ,

$$M(0) = N(0) = 0, \quad \beta = \operatorname{Re}(\beta_1 + \beta_2), \quad M(\lambda) - \chi = 0(e^{-\beta\lambda\hbar})$$
$$N(\lambda) - k = 0(e^{-\beta\lambda\hbar}), \quad \lambda \to +\infty$$
(2.7)

Տեղադրելով $f(\lambda)$ ֆունկցիայի արժեքը (1.4)-ից (2.3)-ի մեջ և հաշվի առնելով (2.5)-(2.7) հատկությունները տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար, կստանանք հետևյալ վերջնական բանաձները

$$u_{\ell}(\varsigma,h) = \frac{1}{\pi} \int \left[\chi_1 \ln \operatorname{cth} \frac{\pi(\varsigma-x)}{4\beta h} + H\left(\frac{\xi-x}{h}\right) - H_2\left(\frac{\xi-x}{h}\right) \right] f(x) \, dx$$

$$u_{\eta}(\xi,h) = \frac{1}{\pi} \int \left[k_1 \ln \operatorname{cth} \frac{\pi(\xi-x)}{4\beta h} - G\left(\frac{\xi-x}{h}\right) - G\left(\frac{\xi-x}{h}\right) \right] f(x) \, dx$$
(2.8)

որտեղ օգտագործված են հետևյալ նշանակումները.

$$H_{1}(t) = \int_{0}^{t^{-1}} [M_{1}(\lambda) - \chi_{1} th \beta \lambda_{1}] \cos \lambda t d\lambda$$

$$H_{2}(t) = 0.5\pi \chi_{2} \operatorname{sign} t + \int \lambda^{-1} [M_{2}(\lambda) - \chi_{1}] \sin \lambda t d\lambda$$

$$G_{1}(t) = \int_{0}^{t} \lambda^{-1} [N_{1}(\lambda) - k_{1} th \beta h] \cos \lambda t d\lambda$$

$$G_{2}(t) = 0.5\pi k_{2} \operatorname{sign} t + \int \lambda^{-1} [N_{2}(\lambda) - k_{2}] \sin \lambda t d\lambda,$$
(2.9)

(2.8) և (2.9) բանաչկերը ստանալիս օգտագործվել է հետեյալ ինտեգրայի արժեքը [5]

$$\int x^{-1} \operatorname{th} \beta x \cdot \cos ax \, dx = \ln \operatorname{cth} \frac{\pi |a|}{4\beta}, \quad (\operatorname{Re} \beta > 0)$$
(2.10)

Նշենք, որ (2.9) ֆունկցիաները $t \to \infty$ դեպքում ձգտում են գրոյի էքսպոնննտի օրենքով. H_1 և G_1 ֆունկցիաները անընդհատ են ամենութեք, իսկ H_2 և G_2 ֆունկցիաները t = 0 կետում ունեն վերջավոր թոիչքներ համապատասխոսնաբար $\pi\chi_2$ և πk_2 չափերով։

Քավարարենք այժմ (2.1)-ի $u_n(\xi, h) = v(\zeta)$ պայմանին հաշվի առնելով նաև (2.2): Այնուհետև արտապատկերելով $|\xi| \le a$ տիլույթը $|y| \le 1$ -ի վրա, անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման համար կստանանք առաջին սեռի սինգուլյար ինտեզրալ հավասարում.

$$\int_{-1}^{1} \left[\chi_1 \ln \operatorname{cth} \frac{\pi |z|}{4\beta} + G(z) \right] p_0(y) \, dy = v_0(x), \quad |x| \le 1$$
(2.11)

որտեղ կատարված են հետևյալ նշանակումները

$$G(z) = G_1(z) - G_2(z), \ z = \frac{x - y}{\mu}, \ \mu = \frac{h}{a}, \ p_0(y) = p(ay), \ v_0(x) = \frac{\pi}{a} v(ay) \ (2.12)$$

(2.11) ինտեգրալ հավասարման ռեգուլյար մասում մասնակցող $G_2(z)$ կենտ ֆունկցիայի առկայության պատճառով նույնիսկ համաչափ բեռան տակ անկզոտրոպ հիմքին սեղմվելուց կոշտ դրոշմը կթնքվի $\theta = \theta(\mu, c_{ij})$ անկյունով։ Իսկ (2.8)-ի առաջին բանաձեից հետևում է, որ դրոշմը կտեղափոխվի նաև հորիզոնական ուղղությամբ։

(2.11) սինգուլյար ինտեզրալ հավասարումը գծային հանրահաշվական անվերջ համակարգի բերելու նպատակով կօգտվենը [6] գրքում ստացված սպեկտրալ բանաձևից.

$$\int \ln \left| \operatorname{cth} \frac{\pi |x - y|}{4\beta \mu} \right| \frac{T_*(T) \, dy}{\sqrt{\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2r y}} = \mu_* T_*(x), \quad (n = 0; 1; 2 \cdots)$$
(2.13)

որտեղ օգտագործված են հետևյալ նշանակումները

$$r = \frac{\pi}{2\beta\mu}, Y = -\cos s_0, X = -\cos t_0, \mu_0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{re'} K(e^{-2r})$$

$$\mu_n = \frac{\sqrt{2}}{nre'} K'(e^{-2r}) \ln \left[\frac{\pi n K(e^{-2r})}{K'(e^{-2r})} \right], (n = 1; 2 \cdots)$$

$$s_0 = \frac{\pi}{K'(e^{-2r})} F\left[\arccos \sqrt{\frac{e^{2r} - e^{-2rr}}{2 \operatorname{sh} 2r}}, \sqrt{1 - e^{-4r}} \right]$$

$$t_0 = \frac{\pi}{K'(e^{-2r})} F\left[\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{e^{2r} - e^{-2rr}}{2 \operatorname{sh} 2r}}, \sqrt{1 - e^{-4r}} \right]$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sqrt{2}}{2re'} K'(e^{-2r}) [1 + \delta_{0,m}]$$
(2.14)

7

Այստեղ $T_n(x)$ Эեթիյեի առաջին սեռի բազմանդամն է. $K(x), K'(x), F(\varphi, x)$ էլիպտիկ ինտեգրալներն են [5], իսկ $\delta_{\varphi=}$ Կրոնոկերի սիմվոլը։

Անհայտ կոնտակտային $p_0(x)$ լաթումը ներկայացնենք Ֆուրյեի չայցի տեսքով՝ ըստ Չերիչեի բազմանդամների [ճ]։

$$p_{0}(x) = (ch2r - ch2rx)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{k} T_{k}(X), \ (|x| < 1)$$
(2.15)

Տեղադրենք (2.13) ֆունկցիայի արժեքը (2.15)-ից (2.11) հավասարման մեջ և օգտվենք (2.13) բանաձևից։ Մի չարք ձևափոխություններից հետո անհայտ թ Յուրյեի գործակիցների որոշման համար կստանանք գծային հավասարումների անվերջ համակարգ

$$d_{-}p_{-} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{n,n} p_{n} = f_{n}, \quad (m = 0; 1; 2 \cdots)$$
 (2.16)

որտեղ

$$d_{m} = k_{1} \quad \mu_{m} \cdot \varepsilon_{m}, \quad f_{m} = \int_{1}^{\infty} \frac{(X)T_{m}(X)dx}{\sqrt{ch2r - ch2rx}}$$

$$e_{1,m} = \int_{1}^{1} \int_{1}^{1} \frac{G(z)T_{m}(X)dx - T_{k}(Y)dxdy}{\sqrt{(ch2r - ch2rx)(ch2r - ch2ry)}}$$
(2.17)

Անվերջ համակարգը ստասալիս օգտագործվել է նաև Չեբիշեի (2.13) բազմանդամների օրբոգոնալության պայմանը [6]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_{m}(X)T_{k}(X)dx}{\sqrt{ch2r - ch2rx}} = \varepsilon_{m}\delta_{m,k}, \quad (m,k=0;1;2\cdots)$$
(2.18)

Օգտագործելով Պարսեվալի նավասարումը Ֆուրլեի կրկնակի շարքերի նամար

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e_{k,m}}{\varepsilon_k \varepsilon_m} = \int \frac{G(z) \, dx \, dy}{\sqrt{(ch2r - ch2rx)(ch2r - ch2ry)}}$$

ղժվար չէ ապացուցել, որ (2.16) համակարգը ц > ц, դեպքում լիովին ռեգուլյար է, որտեղ ц_о կախված է հիմնատակի անիզոտրոպիայի գործակիցներից և φ անկյունից։

Օգտվելով (2.2), (2.12) և (2.15) բանաձևերից հաշվենք կոշտ դրոշմի վրա ազդող ուժերի համագորը և մոմենտը

$$P = \int_{a}^{b} f(\xi) d\xi = a \int_{a}^{b} p_{0}(x) dx = a \varepsilon_{0} p_{0}, \qquad w_{k} = \int_{a}^{b} \frac{x T(X) dx}{\sqrt{ch 2r - ch 2rx}}$$

$$M = \int_{a}^{b} \xi f(\zeta) d\xi = a^{2} \int_{a}^{b} x p_{0}(x) dx = a^{2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} p_{k} w_{k}$$
(2.19)

Դրոշմի հորիզոնական ուղղությամբ տեղափոխման չափը կորոշվի (2.8)-ի առաջին բանաձևի օգնությամբ

էքըն դրուշմի սայրակնտերի փոքր շրջակայքնրում անհայտ կոնտակտային լայումները ներկայացնենք նյութերի փխրուն քայքայման տեսության հայտնի բանաձներով

$$p_0(x) = \frac{K(\pm 1)}{\sqrt{1 \mp x}}, \quad |x| < 1, \quad x \approx \pm (1 - 0).$$

ապա եզակիության գործակիցների որոշման համար (2.14) ե (2.15)-ից կստանանք հետեյալ բանաձեերը։

$$K(-1) = (2r \operatorname{sh} 2r)^{-0.5} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p_k , \qquad K(+1) = (2r \operatorname{sh} 2r)^{-0.5} \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

Այստեղից հետևում է, որ դրոշմի ծայրակնտերում կոնտակտային լայումների եզակիությունների գործակիցների արժեքները կախված են հիմնատակի անիզոտրոպիայի գործակիցներից (c_{1,j}), անիզոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից (φ) և գրոշմի հարաբերական լայնությունից (μ):

Որպես օրինակ դիտարկված է ողորկ կոշտ դրոշմի ներթափանցման խնդիրը գծորեն անիզոտրոպ շերտի մեջ, երբ չերտի ներքեի հիմքը ամրակցված է, վերեի եզրը դրոշմից դուրս ազատ է արտաբին լարումներից, իսկ դլաշմի վրա ազդում են *P* կենտրոնացած ուժը և *M* մոմենտը (նկ. 1)։ Դրոշմի հիմքն ունի քառակուսի պարաբորի տեսը

$$c_{44}v(\xi) = a_1 + b_1\xi + c_1\xi^2, \quad \xi = ax$$

որտեղ a_1 , b_1 , c_1 –կամայական հաստատուններ են։ Հիմքի բարձրությունը h = 1, դրոչմի լայնությունը 2a = 0.25, իսկ անիզոտրոպ նյութի առաձգական մողուլներն են (անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների ox y նկատմամբ)։

 $c_{13} = 15.51\chi$, $c_{13} = 8\chi$, $c_{33} = 13.6\chi$, $c_{44} = 2.9\chi$, $\chi = 10^{5}$ krc/cm⁻² (2.16) համակարգի անհայտները ներկայացվել են

 $p_k = a_1 x_k + b_1 a y_k + c_1 a^2 t_k$, $(k = 0; 1; 2; \cdots)$

տեսքով։ Հաշվարկները կատարվել են անիզոտրոպիայի գլիսավոր առանցքների տարբեր ուղղությունների համար $\varphi = k\pi/8$, (k = 0;1;2;3;4).

Հայված են P ուժի, M մոճենտի և եզակիության $K(\pm 1)$ գործակիցների արժեքները արտահայտված a_1 , b_2 և c_1 պարամետրերով։ Յուրաքանչյուր դեպքի համար հայված է նաև որոշմի միջին կետի արիզոնական տեղափոխման չափը $(u_{\epsilon}(0,h))$:

$$\varphi = 0$$

$$P = 8.3014a_{1} + 0.0643c_{1}, \quad M = 0.1426b_{1}, \quad c_{44}u_{1}(0,h) = -0.10876b_{1}$$

$$K(-1) = 14.708a_{1} - 4.1076b_{1} + 0.6193c_{1}$$

$$K(+1) = 14.708a_{1} + 4.1076b_{1} + 0.6193c_{1}$$

$$\varphi = \pi/2$$

$$P = 0.8379a_{1} + 0.0065c_{1}, \quad M = 0.0140b_{1}, \quad c_{44}u_{1}(0,h) = -0.0349b_{1}$$

$$K(-1) = 1.4813a_{1} - 0.4033b_{1} + 0.0610c_{1}$$

 $K(+1) = 1.483a_1 + 0.4033b_1 + 0.0610c_1$

$$\begin{split} P &= 2.5450a_1 + 0.1003b_1 + 0.0221c_1, \ M = -0.1003a_1 + 0.0480b_1 + 0.0008c_1 \\ K(-1) &= 12.895a_1 - 2.8340b_1 + 0.3670c_1 \\ K(+1) &= 2.4333a_1 + 0.5422b_1 + 0.1596c_1 \\ c_{44}u_1(0,h) &= -0.7299a_1 - 0.0725b_1 - 0.0058c_1 \\ \phi &= \pi/4 \end{split}$$
 $P &= 1.2268a_1 - 0.0310b_1 + 0.0100c_1, \ M &= 0.0309a_1 + 0.0231b_1 - 0.0002c_1 \\ K(-1) &= 1.2392a_1 - 0.4104b_1 + 0.0784c_1 \\ K(+1) &= 4.2661a_1 + 1.0380b_1 + 0.1410c_1 \\ c_{44}u_1(0,h) &= -0.4721a_1 - 0.0174b_1 - 0.0017c_1 \\ \phi &= 3\pi/8 \end{split}$ $P &= 0.9085a_1 - 0.0105b_1 + 0.0071c_1, \ M &= 0.0105a_1 + 0.0158b_1 - 0.0001c_1 \\ c_{44}u_1(0,h) &= -0.2336a_1 - 0.0044b_1 - 0.0013c_1 \\ K(-1) &= 1.2014a_1 - 0.3698b_1 + 0.0600c_1 \\ K(+1) &= 2.1922a_1 + 0.5552b_1 + 0.0799c_1 \end{split}$

Դրոշմի նստվածքի չափը որոշվում է a_1 և c_1 գործակիցներով, իսկ թեքման անկյունը՝ b_1 գործակցով (tg $\theta = b_1 / c_{44}$):

Ստացված արդյունքները կարելի է օգտագործել երկրաշարժի ազդեցության դեպքում կառույցների հաշվարկների ժամանակ, օգտագործելով ժամանակակից գեոդեզիական գնըճշգրիտ չափումների արդյունքները [7].

ЛИТЕРАТУРА

- Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 647с.
- Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
- 3 Бегларян А.Г., Баблоян А.А. Изгиб анизотропной полосы. //Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. №4. С. 29-38.
- Аехницкий С.Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука, 1977. 415с.
- 5. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1100 с.
- Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрыгиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
- Бегларян А.Г. Разработка и совершенствование мстодов й приборов для автоматизации геодезических деформационных измерений инженерных сооружений и разломов земной коры./Дисс. на соиск. уч ст. докт. тех. наук. Ереван. 1997. 104с.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 16.06.2004

КОНТЕКТИИНИИ СТАТИТИИ И СОСТАНИИИ СТАТИТИСКИ СТАТИТИСКИ СТАТИТИКИ СТАТИТИКИ СТАТИТИКИ СТАТИТИКИ СТАТИТИКИ С ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57, Nº3, 2004

Механика

УДК 539.3

РАСЧЕТ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ – КОНСОЛИ Белубекян М.В., Саноян Ю.Г

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Յու. Գ. Սանոյան Բարձակային սալի ծոման հաշվարկը

ՈՒղղանկյան սալի ծռման խնդիրները լուծվում են անալիտիկ կերպով այն դեպքերում, երց սալի երկու հանդիպակաց կողմերը ազատ են, և կիրառվում է փոփոխականների բաժանման մեթոդը։ Մ ո.ս դեպքում խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է թվային և մոտավոր մուտեցումների կիրառումը [1]։ Տմյալ հողվացում այղպիսի խնդրի լուծման համար առաջարկվում է կիրառել քվային մեթոդ [23]

M. W. Belubekyan, Yu. G. Sanoyan Calculation of Cantilever Plate Bending

Задачи изгиба прямоугольной пластины решаются аналитически в случаях, когда для противоположные стороны пластины свободно оперты. В остальных случаях для решения задачи необходимо применение числевных и приближенных методов [1]. В настоящей статье для решения такого типа задач предлагается использовать числевный метод, основанный на разложения в ряды Фурье [2,3].

Рассмотрим консоль в виде пластины, левый конец которой закреплен. Координатная плоскость *хоу* совпадает со средней плоскостью. На верхнюю поверхность действует равномерная нагрузка q Правени конец находится под воздействием момента силы \overline{M}_x и поперечной силы \overline{N}_a каждая боковая сторона консоли – под воздействием момента сил

Размеры консоли: длина – *a*, ширина – 2*d*, толщина – 2*h*. Расположение координатных осей относительно пластины показано на фиг.1. Рассчитаем изгиб пластины под воздействием указанных выше сил.



Решение задачи по определению упругих характеристик на осново теории пластин Кирхгофа сводится к решению бигармонического уразнения, которое при введении относительных координат x = x/a. $y = \overline{y}/a$ и безразмерной функции перемещений $w(x, y) = \overline{w}(x, y)/2h$ имоет вид

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = q \gamma^{-4}$$
(1)

при следующих краевых условиях:

$$x = 0, \quad w(0, y) = 0, \quad w_{x}(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad -\alpha \le y \le \alpha$$
 (2)

$$x = 1, \ \partial_{x,y} w(x,y) + v \partial_{y,y} w(x,y) = -M_x \gamma^2 \quad \text{при} \quad -\alpha \le y \le \alpha$$
(3)

$$x = 1, \quad \partial_{x, x, x}(w(x, y) + (2 - \nu)\partial_{x, y, y}w(x, y) = -N_x \gamma^{-3} \quad \text{при} \quad -\alpha \le y \le \alpha$$
(4)

$$y = \alpha, \ \partial_{y,y} w(x,y) + v \partial_{x,x} w(x,y) = -M_y \gamma^{-2}$$
при $0 \le x \le 1$ (5)

$$y = \alpha, \ \partial_{y,y,y}(w(x,y) + (2-\nu)\partial_{y,x,x}w(x,y) = 0 \text{ нрм } 0 \le x \le 1$$
(6)

где

 $q = 12(1 - v^2)\overline{q}/E, \gamma = 2h/a, M_x = 3(1 - v^2)\overline{M}_x/h^2E,$ $M_y = 3(1 - v^2)\overline{M}_y/h^2E, \quad N = 6(1 - v^2)\overline{N}/hE, \quad \alpha = d/a, \quad E -$ модуль упругости. $v - \kappa_{03}$ фициент Пуассона.

Краевые условия (2) – (6) симметричны относительно оси *х*. Поэтому и функция перемещений, приведенная ниже и, которая является решением (1), должна быть симметричной относительно этой же оси.

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n x)}{\operatorname{ch}(\lambda_n)} (A_n(\operatorname{th}(\lambda_n x) - g\mathbf{1}_n x) + B_n x(\operatorname{th}(\lambda_n x) - g\mathbf{2}_n)) \cos(\lambda_n y) + C_n \frac{\operatorname{ch}(\chi_n y)}{\operatorname{ch}(\chi_n \alpha)} (y \chi_n(v-1) \operatorname{th}(\chi_n \alpha) \operatorname{th}(\chi_n y) + \chi_n \alpha (1-v) - (1+v) \operatorname{th}(\chi_n \alpha)) \sin(\chi_n x) + F 4x^4 + F 3x^3 + F 2x^2 + F 1x$$
(7)

rae $\lambda_n = \pi n / \alpha$, $\chi_n = \pi n$.

$$gl_{n} = \frac{\lambda_{n}(v-1)th(\lambda_{n})}{\lambda_{n}(v-1)-2th(\lambda_{n})}, \quad gl_{n} = \frac{\lambda_{n}(v-1)th(\lambda_{n})-2}{\lambda_{n}(v-1)-2th(\lambda_{n})}$$
(8)

В решении (7) только член $F4x^*$ является частным решением уравнения (1), а все остальные члены представляют общее решение однородного бигармонического уравнения. Наряду с этим (7) удовлетворяет первому краевому условию (2), условию (6), а сумма обращается в нуль при подстановке в условие (3) благодаря специальному подбору коэффициентов $g1_n$ и $g2_n$. Гаким образом, общее решение уравнения содержит только 3 набора неизвестных коэффициентов A_n , B_n , C_n решения бигармонического уравнения и четыре неизвестных F1, F2, F3, F4. Для определения F4 подставим решение (7) в(1). Учитывая вышесказанное относительно свойств функции перемещения (7), найдем

$$F4 = q \gamma^{-4} / 24 \tag{9}$$

Первое краевое условие (2) выполняется тривиально, так как при x = 0 все выражения при $A_{n'}$, $B_{n'}$, C_{n} и полином, в том числе, обращаются в нуль.

Подставим (8) во второе краевое условие (2).

$$w_n(0, y) = F1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\lambda_n - g1_n) - B_n g2_n}{\operatorname{ch}(\lambda_n)} \cos(\lambda_n y) +$$

$$+ C_n \chi_n \frac{\operatorname{ch}(\chi_n \gamma)}{\operatorname{ch}(\chi_n \alpha)} \{ (\nu - 1) \chi_n [\nu \operatorname{th}(\chi_n \alpha) \operatorname{th}(\chi_n \gamma) - \alpha] - (1 + \nu) \operatorname{th}(\chi_n \alpha) \} = 0 \quad (10)$$

Разложим функцию при C_n в ряд Фурье по $\cos(\lambda_m y)$. Тогда, обозначив через a_n, b_n коэффициенты при A_n и B_n , представим (10) в виде

$$F1 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a 2_n + B_n b 2_n) \cos(\lambda_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n c 0 2_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n c 2_{n,m} \cos(\lambda_m y) = 0 \quad (11)$$

где c02, и c2, – коэффициенты разложения в ряд Фурьс и равны

$$c02_{n} = -\frac{4\nu th(\chi_{n}\alpha)^{2}}{\alpha}, \quad c2_{m} = -\frac{4\chi_{n}^{2}\cos(\lambda_{m}\alpha)th(\chi_{n}\alpha)^{2}}{\alpha(\lambda_{m}^{2} + \chi_{n}^{2})}(\lambda_{m}^{2} + \nu\chi_{n}^{2}) \quad (12)$$

Разложение по $\cos(\lambda_m y)$ в двойной сумме формулы (11)заменим на разложение по $\cos(\lambda_m y)$, поменяв местами индексы *m* и *n*

$$F1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n a 2_n + B_n b 2_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n c 2_{m,n} \right] \cos(\lambda_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n c 0 2_n}{2} = 0$$
(13)

Чтобы левая часть этого выражения была равна нулю, необходимо приравнять нулю все коэффициенты ряда при $\cos(\lambda_{_{R}}y)$ и сумму двух оставшихся членов, из которой определим F]

$$A_n a 2_n + B_n b 2_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n c 2_{m,n} = 0, \quad F1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n c 0 2_n}{2}$$
 (14)

Подставим (6) в краевое условие (3). Учитывая замечание, сделанное выше относительно коэффициентов gl_s и $g2_r$ и, принимая во вниманис. что $sin(\chi_s) = 0$, получим

$$6F4 + 3F3 + F2 = -M_x \gamma^{-2}/2 \tag{15}$$

Подставим теперь [8] в краевое условие [4] $6(F3 + 4F4) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \lambda_n^2 (gl_n (\lambda_n (1 - \nu) th(\lambda_n) - 1 - \nu) + \lambda_n (\nu - 1)) + B_n \lambda_n^2 (\lambda_n (\nu - 1) + (1 + \nu) th(\lambda_n) + g2_n (\lambda_n (1 - \nu) th(\lambda_n) - 1 - \nu)) \cos(\lambda_n y)) + C_n \chi_n^3 (\nu - 1) \times \cos(\chi_n) \frac{ch(\chi_n \nu)}{ch(\chi_n \alpha)} (\chi_n \alpha (\nu - 1) - (\nu - 5 + \chi_n y (\nu - 1) th(\chi_n y)) th(\chi_n \alpha))) = -N_n \gamma^{-1}$ [16]

Разложим функцию при неизвестной *C*_n в ряд Фурье по cos(λ_m y). Тогда, обозначив коэффициенты при *A_n* и *B_n* через *a*4_n и *b*4_n, перепишем (16) в следующем виде:

$$24F4 + 6F3 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a 4_n + B_n b 4_n) \cos(\lambda_n y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n c 0 4_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n c 4_{n,m} \cos(\lambda_m y) = -N_x \gamma^{-3}$$
(17)

где козффициенты разложения в ряд Фурье $c4_{n.m}$ и постоянные $c04_n$ при m=0 приведены ниже

$$c4_{n,m} = \frac{4\chi_{\pi}^{4}(\nu-1)\cos(\chi_{\pi})\cos(\lambda_{m}\alpha)\operatorname{th}(\chi_{\pi}\alpha)^{2}}{\alpha(\lambda_{m}^{2}+\chi_{\pi}^{2})}((3-\nu)\lambda_{m}^{2}+2\chi_{\pi}^{2})$$
(18)

$$c04_{\mu} = \frac{8\chi_{\mu}^{2}(\nu-1)\cos(\chi_{\mu})th(\chi_{\mu}\alpha)^{2}}{\alpha}$$
(19)

Разложение по $\cos(\lambda_y)$ в (17) заменим на разложение $\cos(\lambda_y)$, поменяв местами индексы *т* и *п*, и, приравняв затем к нулю сумму при $\cos(\lambda_x)$, а оставшиеся постоянные члены к правой части уравнения, получим вторую группу *N* уравнений (если ограничиться числом членов разложения в ряд Фурье равным *N*) и выражение для определения значения *F* 3

$$A_{n}aA_{n} + B_{n}bA_{n} + \sum_{m=0}^{\infty} C_{m}A_{m,m} = 0$$
⁽²⁰⁾

$$F_{3} = -\frac{N_{s}}{6\gamma^{3}} - 4F_{4} - \sum_{n=1}^{m} \frac{C_{n}c_{0}4_{n}}{12}$$
(21)

Подставим (7) в краевое условие (5) $2(F2 + 3F3x + 6F4x^2)v +$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n}\cos(\lambda_{n}\alpha)\frac{\operatorname{ch}(\lambda_{n}x)}{\operatorname{ch}(\lambda_{n})}(A_{n}(\lambda_{n}(\nu-1)(\operatorname{th}(\lambda_{n}x)-xg)_{n})-2\nu g_{1}\operatorname{th}(\lambda_{n}x))+$$
$$+B_{n}(2\nu(1-g2_{n}\operatorname{th}(\lambda_{n}x))+x\lambda_{n}g2_{n}(\nu-1)(\operatorname{th}(\lambda_{n}x)-g2_{n}))+$$
$$+C_{n}\chi_{n}^{2}(\nu-1)\sin(\chi_{n}x)(\alpha\chi_{n}(\nu-1)\operatorname{sh}(\alpha\chi_{n})^{2}+(3+\nu)\operatorname{th}(\alpha\chi_{n}))=-\frac{M_{\nu}}{m^{2}}$$
(22)

Разложим функции при A_n и B_n в ряд Фурье по $\sin(\chi_n x)$, а функцию $2(F2 + 3F3x + 6F4x^2)v$ и постоянный член справа от равенства по $\sin(\chi_n x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m S_n \sin(\chi_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n a S_{n,m} + B_n b S_{n,m} \right) \sin(\chi_m x) + C_n c S_n \sin(\chi_n x) \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n (1 - \cos(\chi_n))}{\gamma^2 \chi_n} \sin(\chi_n x)$$
(23)

где коэффициенты разложения соответственно равны

$$\alpha \mathcal{L}_{n,m} = \frac{2\chi_m \lambda_n \cos(\chi_m) \cos(\lambda_n \alpha)}{(\lambda^2 + \chi_n^2)^2} \times (24)$$

$$\times \left[2g l_n (\lambda_n^* + v\chi_m^*) th(\lambda_n) + \lambda_n (v-1)(g l_n - th(\lambda_n))(\lambda_n^* + \chi_m^2) \right]$$

$$b \mathcal{L}_{n,m} = \frac{2\chi_m \lambda_n \cos(\lambda_n \alpha)}{(\lambda^2 + \chi_n^2)^2} (2(\lambda_n^2 + v\chi_m^*)(sh(\lambda_n) + \cos(\chi_m)(g l_n th(\lambda_n) - 1)) + \lambda_n (v-1)\cos(\chi_m)(\lambda_n^2 + \chi_m^2)(g l_n - th(\lambda_n)))$$

$$(25)$$

$$c5_{n} = (v - 1^{\circ})\chi_{n}^{2} \left(\frac{\alpha \chi_{n}(v - 1)}{ch(\chi_{n}\alpha)^{2}} + (3 + v)th(\chi_{n}\alpha)\right)$$
(26)

$$m5_{n} = \frac{4v}{\chi_{n}} (12F4(\cos(\chi_{n}) - 1) + (F2 - (F2 + 3F3 + 6F4)\cos(\chi_{n}))\chi_{n}^{2})$$
(27)

В m5, входит неизвестная константа C_a, которая содержится в F2 и F3. Ее необходимо выделить и перенести во вторую сумму выражения (23) Для этого определим сперва F2 из (15), подставив в него значение F3 H3 (21)

$$F2 = -\frac{M_x}{2\gamma^2} + \frac{N_x}{2\gamma^3} + 6F4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n c04_n}{4}$$
(28)

Полученное значение F2 подставим в (27) и. заменив в ней сумму при коэффициенте COS(X,) на равное ему значение из (15), после несложных преобразований получим

$$m5_n = m51_n + \frac{v}{\chi_n} \sum_{m=1}^{\infty} C_m c04_m$$
 (29)

 Γ_{λ}

$$m51_{n} = \frac{4\nu}{\chi^{2}} \left[\left(12F4 + \chi_{n}^{2} \frac{M_{*}}{2\gamma^{2}} \right) (\cos(\chi_{n}) - 1) + \chi_{n}^{2} \left[6F4 + \frac{N_{*}}{2\gamma^{2}} \right] \right]$$
(30)

Подставим полученное значение $m5_{\pm}$ в (23) и остабив сумму с неизвестными С_ в левой части уравнения, перенесем оставшиеся члены в правую часть.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m a 5_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m b 5_{m,n} + C_n c 5_n + \frac{v}{\chi_n} \sum_{m=1}^{\infty} C_m c 04_m \right) \sin(\chi_n x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (m 51_n + \frac{M_m (1 - \cos(\chi_n))}{2\gamma^2 \chi_n}) \sin(\chi_n x)$$
(31)

Приравняв коэффициенты разложений в ряд Фурьс обеих частей этого равенства, получим последнюю группу из N уравнений с 3N неизвестными

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m a 5_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m b 5_{m,n} + C_n c 5_n + \frac{v}{\chi_n} \sum_{m=1}^{\infty} C_m c 0 4_m = -m 5 1_n - \frac{M(1 - \cos(\chi_n))}{v \chi_m} (32)$$

для n = 1, 2, ... N; m = 1, 2, ... M, при этом M необходемо брать равным N. Это уравнение с уравнениями (14) и (20), также состоящих из N уравнений, образуют систему из 3N уравнений с 3N неизвестными A, В., С., Неизвестные постоянные F1, F2, F3 получим подстановкой полученных значений C_p в выражения (14). (28) и (21).

Графики функций перемещений для значений $v = 0.3, \lambda = 0.05, M_s = 0, M_s = 0, N_s = 0, q = 10^{-5}, \alpha = 0.25, 0.5, 0.8$ приведены на фиг. 2,3,4, при N=20. Дальнейшее увеличение количества членов разложения функции перемещений не приводит к заметному изменению вида графика. Для нулевых значений *М., М.* и *N*. перемещения консоли определяются в основном полиномом четвертой Значения перемещений, определяемые тригонометрическим степени. рядом формулы (7), вычисленные для $\alpha = 0.8, x = 0.5, x = 1$ при изменении у от 0 до 0.8 шагом 0.1, приведены в таблице. На фиг. 5 приводится график изгибающего момента М, на закрепленном и свободном краях, вычисленный при α = 0.5 для N = 100.

Авторы выражают благодарность профессору Баблояну А. за ценные указания, сделанные им при рецензировании статьи.











		Таблицэ
У	$w(0.5, y) \times 10^4$	$w(1, y) \times 10^4$
0	-2.102	-3.733
0.1	-2.061	-3.412
0.2	-2.022	-2.506
0.3	-2.259	-1.194
0.4	-3.285	0.2783
0.5	-5.924	1.616
0.6	-11.39	2.562
0.7	-21.28	2.997
0.8	-37.36	3.055

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластии. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360с.
- Баблоян А.А., Мкртчян А.М. Равновесие прямоугольника, ослабленного крестообразными разрезами. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т. 27. № 4. С.13-25.
- Brown C. M., Dreyer W., Muller W.H. Discrete Fourier transforms and their application to stress-strain problems in composite mechanics: a convergence study. Proc. Royal Societe Lond. 2002, 458. P.1967-1987.

Институт механики НАН Армении

0.0

Поступила в редакцию 25.02.2004



Սեխանիկա

57, Nº3, 2004

Механика

УДК 531.8

О КЛАССИЧЕСКОЙ И УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИЯХ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН Геворкян Г.З., Гнуни В.Ц., Киракосян Р.М.

Գ.Չ. Գեորգյան, Վ. Ց. Գնունի, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Օրթուռըուպ սալնրի ստատիկ կայունության խնդիրներում դասական և ճշգրտված տեսությունների մասին

Ռազմաթիվ ուսումնասիրություններ կան նվիրված անիզոտրոպ սալերի կայունության հարցերին, որոբցում հաշվի են առնված ընդլայնական սահքերի, ինչպես նաև սեփական չափերի փոփոխության ազղեցությունները ([1]-{ճ] և այլն) Այս աշխատանքում [1] ճշգրաված տեսության շրջանակներում բերվում են հաստատուն հաստության օրրոտրոպ ուղղանկյուն սալերի սաստիկ կայունության խնդրի

հավասարումները ընդլայնական սահքերի, սայի չափերի փոփոխության և նորմալ 🗖 լարման

ազդեցությունների հաշվառմամբ. Որպես մասնավոր դեպք լուծվում է եզրերով հոդակապորեն հենված սալգոտու խնդիրը։ Դիտարկվում է չորս տարբերակ, որոնցից երեքում հաշվի է առնվում վերը նշված գործոններից յուրաբանչյուրի ազդեցությունը առանձին, իսկ չորրորդ տարբերակում՝ բոլօրի ազդեցությունները միասին։ Յույց է տրվում, որ իզուտրոպ սալ-գոտու դեպքում ընդլայնական սաեքի,

չափերի փոփոխության և σ, լարման ազդեցությունները իրար համակչաում են և սեղմոդ ուժերի կրիտիկական արժեքները գործնականում համընկնում են դասական տեսության համապատասխան արժեքների հետ։ Հետևաբար իզոտրոպ սալերի համար իմաստ չունի կիրառել ճչգրտված տեսություն և կարելի է բավարարվել դասական տեսությամբ։ Մինչդեռ օրրոտրոպ սալերի համար այս եզրակացությունը ընդեանուր առմամբ ճիշտ չէ. Չգայի անիզոտրոսլության դեպչում պետք է դիմել ճչգրտված տեսության.

րնդ որում, սահքի և 🔿 լարման ազդեցությունները հաշվի տոնելիս յի կարելի արհամարհել սկզբնական չափերի փոփոխության ազդեզությունը

G.Z. Gevorgyan, V. Ts. Gnuni, R.M. Kirakosyan On the Classical and Refined Theory in the Statical Stability Problem of Orthotropic Plates

Многие исследования посвящены вопросам устойчивости анизотродных пластин, где учитываются влияния поперечных сдвигов, а также изменения размеров {[1] = [6] и т.д.). В настоящей работе в рамках уточненной теории [1] приводятся уравнения задачи статической устойчивости ортотропных пластиц постоянной толщины при учете влияний поперечных

сдянгов, изменения размеров и нормального напряжения О. В качестве примера решается задача шарнирно опертой по краям пластинки-полосы. Рассматриваются четыре варианта. В трех из них учитываются влияния отмеченных факторов в отдельности. В четвертом варианте учитываются влияния всех факторов вместе. Показывается, что в случае изотроп-

ной полосы факторы поперечного сдвига, изменения размеров и напряжения **О**, с большой точностью компенсируют друг друга и критические значения сжимающих сил практически совпадают с соответствующими значениями классической теории. В случае ортотропных пластии со значительной анизотропией это утверждение певерно. Тогда необходимо обратиться к угочненной теории. Однако, при учете влияния поперечцого сдвига и напряжения **О**, в обязательном порядке надо учитывать и влияние каменения размеров.

1. Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластинку со сторонами a_0, b_0 и постемянной толщины h_0 . Пластинку отнесем к декартовой системе координат *Охуг*. Координатную плоскость *Оху* совместим со

срединной плоскостью, направив оси Ох и Оу вдоль сторон пластинки, а

ось Oz так, чтобы образовалась правая система координат. Будем считать, что главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям. Пусть на пластинку статически прикладываются сжимающие силы и в ней возникает безмоментное напряженно-деформированное состояние с однородными внутренними тангенциальными усилиями

$$T_x^0 = -P, \quad T_y^0 = -\lambda P, \quad S_{yy}^0 = 0$$
 (1.1)

Здесь $\lambda = T_{s}^{0} / T_{s}^{-}$ - отношение сжимающих усилий.

Из обобщенного закона Гука ортотропного тела [1] имеем:

$$e_{p} = -\frac{P}{E_{1}h_{0}} + \frac{v_{12}}{E_{2}}\frac{\lambda P}{h_{0}}, \quad e_{p} = -\frac{\lambda P}{E_{2}h_{0}} + \frac{v_{12}}{E_{2}}\frac{P}{h_{0}}, \quad e_{z} = \frac{v_{12}P}{E_{3}h_{0}} + \frac{v_{22}}{E_{3}}\frac{\lambda P}{h_{0}}$$
(1.2)

Здесь e_x , e_y , e_z и E_1 , E_2 , E_3 – компоненты деформации и модули Юнга материала вдоль координатных осей, v_{12} , v_{13} , v_{23} – коэффициенты Пуассона.

В результате деформирования размеры пластинки изменятся и в момент наступления потери устойчивости примут значения *a*, *b* и *b*. Пользуясь (1.2) и геометрическими соотношениями, находим:

$$a = a_0 \left(1 - \frac{P}{E_1 h_0} + \frac{\mathbf{v}_{12} P}{E_2 h_0} \right), \quad b = b_0 \left(1 - \frac{\lambda P}{E_2 h_0} + \frac{\mathbf{v}_{12} P}{E_2 h_0} \right)$$
(1.3)

$$h = h_0 \left[1 + \frac{v_{13}P}{E_3 h_0} + \frac{v_{23}\lambda P}{E_3 h_0} \right]$$
(1.4)

Поступая, как обычно, из системы уравнений изгиба пластинки [1] можно получить следующую систему уравнений статической утойчивости, учитывающую влияния поперечных сдвигов, изменения размеров и напряжения о.:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{12P}{h^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(D_{12} + 2D_{66} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(D_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + a_{44} \left(D_{12} + D_{66} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{h^3 \varphi}{12} = \frac{A_1 h^2 P}{10} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(D_{12} + 2D_{66} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(D_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + a_{15} \left(D_{12} + D_{66} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{h^3 \psi}{12} = \frac{A_2 h^2 P}{10} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \lambda \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$
(1.5)

Здесь и – прогиб. D_{i_1} – жесткости пластинки. A_1, A_2 – коэффициенты.

учитывающие влияние напряжения σ₂; φ и ψ-функции, характеризующие распределение поперечных сдвигов.

К системе (1.5) следует присоединить известные граничные условия (1), записанные для измененных краев пластинки x = 0, a и y = 0, b. Отметим, что значения a и b соответствуют моменту наступления потери устойчивости пластинки и являются функциями от неизвестного критического значения параметра сжимающих сил P.

2. В качестве примера рассмотрим задачу статической устойчивости шарнирно-опертой по краям x = 0, a ортотропной пластинки-полосы. Полоса сжимается равномерно распределенными силами погонной интенсивности P, приложенными на шарнирно-опертых сторонах. По длине полоса свободна и может беспрепятственно перемещаться вдоль оси Oy, в силу чего усилие T, отсутствует. Пользуясь формулами (1.3) и (1.4), находим:

$$a = a_0 \left(1 - \frac{P}{E_1 h_0} \right), \quad h = h_0 \left(1 + \frac{v_{10} P}{E_1 h_0} \right)$$
(2.1)

где 🕰 и h₀ – начальные значения ширины и толщины.

Интегрируя первое и второе уравнения системы [1.5] по х и имея в виду условия шарнирного опирания пластинки, приходим к одному уравнению. Пользуясь выражением коэффициента A_1 [1], это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60E_3G_{13}P}{B_{11}h^2 \{5E_3G_{13}h + 6P[(v_{13} + v_{12}v_{23})G_{13} - E_3]\}} w = 0$$
(2.2)

Здесь *G*₁₃ – модуль поперечного сдвига, а *B*₁₁ выражается через упругие постоянные материала по известной формуле [1].

Отметим, что уравнение (2.2) относится к общему случаю, при котором одновременно учитываются влияния всех факторов: поперечного сдвига, изменения размеров полосы и напряжения **о**. Краевые условия задачи в этом случае имеют вид:

$$w|_{x=0} = w|_{x=0} = 0$$
 (2.3)

Рассмотрим частные случаи.

 а) Влияния всех перечисленных факторов пренебрегаются (классическая постановка). Разрешающее уравнение (2.2) и краевые условия в эгом случае имеют вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{12P}{B_{11}h_0^3} w = 0$$
(2.4)

$$w|_{x=0} = w|_{x=a_0} = 0$$
 (2.5)

б) Учитывается только влияние поперечного сдвига. Краевые условия совпадают с (2.5), а разрешающее уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60G_{..}P}{B_{..}h_0^2 (5G_{..}h_0 - 6P)} w = 0$$
(2.6)

в) Учитывается только влияние напряжения σ, Краевые условия совпадают с (2.5). Разрешающее уравнение будет:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60E_3P}{B_{11}h_0^2 [5E_3h_0 + 6P(v_{13} + v_{12}v_{22})]} w = 0$$
(2.7)

г) Учитывается только влияние изменения размеров полосы. Краевые условия совпадают с (2.3), а разрешающее уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{12P}{B_1 h^3} w = 0$$
(2.8)

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными величинами:

$$\bar{x} = x/a_0, \ \bar{w} = w/h_0, \ n_1 = E_1/\sigma_0, \ n_3 = E_3/\sigma_0, \ n_{11} = B_{11}/\sigma_0$$

$$n_{13} = G_{13} / \sigma_0, \ \varepsilon = a_0 / h_0, \ P = P / (\sigma_0 h_0)$$
 (2.9)

о – характерное напряжение, играющее роль масштаба.

Отметим, что разрешающее уравнение всех случаев с учетом (2.9) можно записать в единой безразмерной форме:

$$\frac{d^2 \overline{w}}{d\overline{x}^2} + k^2 \overline{w} = 0 \tag{2.10}$$

где k² для различных случаев имеет различные выражения. Подчинив общее решение уравнения (2.10) краевым условиям, для определения критических значений сжимающих усилий *Р* получим

$$\sin ka = 0 \tag{2.11}$$

Здесь

$$\overline{a} = \begin{cases} 1 - \text{при неучете влияния изменения размеров} \\ 1 - \overline{P} / n_1 - \text{при учете влияния изменения размеров} \end{cases}$$
(2.12)

Из (2.11) следует

$$ka = j\pi, \quad j = 1, 2, \dots$$
 (2.13)

где *J* – номер формы потери устойчивости. В случаях неучета влияния изменения размеров уравнение (2.13) линейно относительно \overline{P}_{j} . В случаях же учета этого влияния оно становится кубическим.

В табл. 1 приведены выражения k^* для всех случаев, значения \overline{P}_i в случаях а), б), в) и кубическое уравнение относительно \overline{P}_i для остальных случаев. Из выражения \overline{P}_i для случаев а) и в) заключаем, что учет влияния только напряжения σ_i приводит к увеличению значений критических сил по сравнению с классическими. Исходя из физических соображений, можно ожидать, что учет изменсния размеров (уменьшение ширины и увеличение толщины) полосы также должен привести к росту критических значений сжимающих сил. С другой стороны, как видно из выражения \overline{P}_i для случая б), учет поперечных сдвигов, наоборот, уменьшает значения критических сил. Возникает вопрос: в какой мере

влияния отмеченных факторов будут взаимокомпенсировать друг друга при их одновременном учете.

	- 100					
1 I I m	5		2.4	8.0	—	- 11
- L M		n	м	42	r 1	
	~~	<i></i>		-	-	

Случан	k ²	\overline{P}_{j}
a)	$\frac{12\varepsilon^2 \tilde{P}_1}{n_{11}}$	$\frac{n_{11}j^2\pi^2}{12\varepsilon^2}$
б)	$\frac{60\varepsilon^2 n_{13} P_i}{n_{11}(5n_{13}-6P_i)}$	$\frac{5n_{11}n_{13}j^2\pi^2}{6(10n_{13}\varepsilon^2+n_{11}j^2\pi^2)}$
8)	$\frac{60\varepsilon^2 n_3 \overline{P}_j}{n_{11}[5n_3 + 6\overline{P}_j(v_{13} + v_{12}v_{23})]}$	$\frac{5n_{11}n_3 j^2 \pi^2}{6[10n_3 \varepsilon^2 - n_{11}(v_{11} + v_{12}v_{23})j^2 \pi^2]}$
т)	$\frac{12\varepsilon^2 n_3^3 \overline{P}_i}{n_{11} (n_3 + v_{13} \overline{P}_i)^3}$	$k^{2}(n_{1}-\overline{P}_{j})^{2}=j^{2}\pi^{2}n_{1}^{2}$
общий	$\frac{60\varepsilon^2 n_{13} n_3^3 P_j}{n_{11} (n_3 + v_{13} P)^2 [5 n_{13} n_3 + (11 v_{13} n_{13} - 6 n_3 + 6 v_{12} v_{23} n_{13}) P_j]}$	$k^2 (n_1 - \overline{P}_j)^2 = j^2 \pi^2 n_1^2$

 Рассмотрим примеры изотропных и ортотропных полос со значениями геометрического параметра

$$\varepsilon = 40; 30; 20; 15; 12; 10$$
 (3.1)

Для изотропных полос примем

 $n_1 = n_3 = 1000; n_{13} = 400; v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0,25; n_{11} = 1066,7$ (3.2) Для ортотропных

 $n_1 = 1000; n_3 = 50; n_{13} = 25; v_{12} = 0,1; v_{13} = 0,2; v_{23} = 0,3; n_{11} = 1200$ (3.3)

В табл.2 представлены первые критические значения сжимающей силы $\overline{P}_1^{(0)}$ в случаях учета каждого из факторов в отдельности и при одновременном их учете. Представлены также процентные отклонения от соответствующих классических эначений $\overline{P}_1^{(0)}$

$$\Delta_{l} = \frac{\overline{P_{1}^{(0)}} - \overline{P_{1}^{(l)}}}{\overline{P_{1}^{(0)}}} 100\%, \quad l = 1, 2, 3, 4$$
(3.4)

Здесь l указывает постановку задачи. При l = 1 учитывается только влияние поперечного сдвига, l = 2 — только напряжения σ_{l} , l = 3 — только поменение размеров полосы, а при l = 4 учитываются влияния всех отмеченных факторов одновременно.

Данные табл.2 приводят к следующим заключениям.

1. В случае изотропных полос учет влияния любого фактора в отдельности приводит к незначительным поправкам критических значений сжимающих сил. Например, при достаточно большой относительной толщине $h_0/a_0 = 0,1$ ($\varepsilon = 10$) поправки от поперечного сдвига, напряжения σ_{\pm} и изменения размеров в отдельности составляют

2,56%, -0,33% и -2,51% соответственно. При одновременном же учете этих факторов происходит почти полная взаимокомпенсация их влияний и общая поправка практически исчезает (составляет лишь -0,09%) Поэтому в задачах статической устойчивости изотропных полос, особенно настолько тонких, которые теряют устойчивость в пределах пропорциональности, можно ограничиться классической теорией пластин.

Таблица 2

	ε = 40	ε = 30	ε = 20	ε=15	ε = 12	ε = 10
	Изотропная полоса					
<i>P</i> , ⁽⁰⁾	0,5483	0,9748	2,1933	3,8991	6,0923	8,7730
$\overline{P}_1^{(1)}$	0,5474	0,9719	2,1789	3,8540	5,9830	8,5480
Δ_1	0,16	0,30	0,66	1,16	1,79	2,56
P. ⁽²⁾	0,5484	0,9751	2,1951	3,9048	6,1063	8,8019
Δ_2	-0,02	-0,03	-0,08	-0,15	-0,23	-0,33
$\overline{P}_1^{(3)}$	0,5491	0,9774	2,2066	3,9416	6,1973	8,9933
Δ,	-0,15	-0,27	-0,61	-1,09	-1,72	-2,51
$\bar{P_1}^{(4)}$	0,5483	0,9749	2,1938	3,9009	6,0966	8,7813
Δ_4	0	-0,01	-0,02	-0,05	-0,07	-0.09
	ортотропная полоса					
$\overline{P}_1^{(0)}$	0,6168	1,0966	2,4674	4,3865	6,8539	9,8696
$P_{\rm f}^{(1)}$	0,5991	1,0418	2,2061	3,6235	5,1572	6,6970
Δ	2,87	5,00	10,59	17,39	24,76	32,15
$P_{1}^{(2)}$	0,6190	1,1033	2,5015	4,4953	7,1234	10,438
Δ_2	-0,36	-0,61	-1,38	-2,48	-3,93	-5,76
$P_1^{(3)}$	0,6222	1,1138	2,5569	4,6813	7,6150	11,571
Δ,	-0,88	-1,57	-3,63	-6,72	-11,10	-17,23
$\overline{P}^{(4)}$	0,6061	1,0630	2,3011	3,8785	5,6687	7,5463
Δ_4	1,73	3,06	6,74	11,58	17,29	23,54
		and the second se			A second s	

2. Для ортотропных полос это заключение в общем случас неверно. Например, в рассмотренном случае ортотропии (3.3) при $h_0/a_0 = 0,1$, ($\varepsilon = 10$) поправки от поперечного сднига, напряжения σ_{\pm} и изменения размеров в отдельности довольно ощутимы и составляют 32,15%, -5,76% и -17,23% соответственно. При одновременном учете этих факторов полная взаимокомпенсация их влияний не происходит и общая поправка все же ощугима и составляет 23,54%. Следовательно, для ортотропных полос необходимо обратиться к уточненной теории. Однако, при учете влияния поперечных сдвигов в обязательном порядке надо учитывать также и влияния изменения размеров и напряжения **О**.

 Из-за нелинейности взаимовлияний сумма поправок от отдельных факторов не равна поправке от их совместного учета, т.е.

$$\sum_{l=1}^{3} \Delta_{l} \neq \Delta_{a}$$
(3.5)

Это неравенство более ощутимо в случае ортотропии и резко усиливается с ростом относительной толщины (с убыванием параметра 8).

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с
- Томашевский В.Т. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку. 1966. М.: Наука. 1966. С.753-761.
- Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. //ПМ. 1966. Т.2. Вын. 2.
- Аколян А.С., Киракосян Р.М. Об устойчивости ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечного сдвига. // Изв. НАН РА. Мсханика. 1995. Т. 48. №4. С.3-9.
- 5. Гнуни В.Ц. Некоторые соображения о расчетных моделях упругих пластинок. // Изв НАН РА. Механика. 1999. Т. 52. №3. С.86-89.
- Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластинки с учстом поперечных сдвигов. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С.5-11.

Институт механики НАН Армении

d).,

Поступила в редакцию 6.09.2004

Մեխանիկա

57, №3, 2004

Механика

УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Исраелян С. Р., Саркисян С. В.

Ս.Դ. Իսրայելյան, Ս.Վ. Սարգսյան Տեղայնացված լայնական բեռի ազդեցության տակ գանվող կիսաանվերջ սալի աատանումների մասին

Աշխատանբում ուսումնասիրվում է կիսաանվերջ սալ չերտի աատանումները եզրի մոտ տեղայնացված լայնական րերի ազդեցության տակ Հետազոտված է ճկվածքի վարքը՝ կախված բայնական բեռի հաճախությունից։ *x* = 0, եզրը ազատ լինելու դեպքում բերված է ճկվածքի վարքը ռեզոնանսային հաճախության շրջակալըում։

S.R. Israyelyan, S.V. Sarkisyan About vibrations of semi-infinite plate under the action of localized transverse load

Задача об изгибшых воллах, локализованных вдоль кромки пластинки исследована в работе [1]. В [2] рассмотрен изгиб полубесконечной пластинки, когда поперечная нагрузка локализована у короткого края пластинки. Задачи локализованной неустойчивости сжатой пластинки исследованы в [3, 4].

В настоящей работе исследуются колебания полубесконечной пластинки-полосы, когда на поверхности пластинки действует локалязованная у короткого края пластинки поперечная нагрузка. Исследовано поведение прогиба пластинки в зависимости от частоты воперечной нагрузки. В случае, когда кромка пластинки x = 0 свободна, приведено поведение прогиба в окрестности резонанской частоты

Пусть полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины 2h в прямоутольной декартовой системе координат занимает область пространства: $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью *хоу*. На поверхности пластинки z = -h действует локализованная у короткого края пластинки полеречная нагрузка в виде

$$q(x, y, t) = e^{-\alpha x} \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \lambda_n y$$
⁽¹⁾

Здесь $q_n = \text{const}$, $\alpha > 0$, $\lambda_n = n\pi/b$, ω – частота поперечной нагрузки.

Согласно теории тонких пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа без учета инерции вращения, уравнение поперечных колебаний пластинки под действием силы g(x, y, t) имеет вид [5, 6]

$$D\Delta^{2}w + 2\rho h \frac{\partial^{2}w}{\partial t^{2}} = q(x, y, t); \quad D = \frac{2Eh^{3}}{3(1-v^{2})}$$
(2)

где w(x, y, t) – прогиб пластинки, D, E, ν и ρ – жесткость, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластинки. Δ – двухмерный оператор Лапласа. Принимается, что стороны пластинки *y* = 0 и *y* = *b* шарнирно закреплены и имеет место условие затухания

$$\lim_{t \to \infty} w(x, y, t) = 0 \tag{3}$$

Представим решение уравнения (2) в виде

$$w(x, y, t) = \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y$$
(4)

которое удовлетворяет условиям шарнирного закрепления. Подставляя решение (4) в уравнение (2), с учетом (1), для определения неизвестной функции *f*_{*}(*x*) будем иметь

$$f_{n}^{\mu}(x) - 2\lambda_{n}^{2}f_{n}^{*}(x) + \lambda_{n}^{4}(1 - \theta_{n}^{2})f_{n}(x) = \frac{q_{n}}{D}e^{-\alpha x}$$
(5)

FACE $\theta_n = \frac{\omega}{\omega_n}$, $\omega_n^2 = \frac{D\lambda_n^*}{2\rho h}$.

Рассмотрим частный случай (n = 1), поперечная нагрузка имеет следующий вид:

$$q(x, y, t) = q_1 e^{-\omega t} \sin \lambda_1 y \cos \omega t$$

Общее решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям шарнирного закрепления при *у* = 0,*b* и условию затухания (3). представляется следующим образом:

$$w(x, y, t) = \left(C_1 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1 + \theta_1}} + C_2 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1 - \theta_1}} + \frac{q_1 e^{-\alpha x}}{D(\alpha^4 - 2\lambda_1^2 \alpha^2 + \lambda_1^4 (1 - \theta_1^2))} \right) \times$$
(6)

$\times \sin \lambda$, y cos ωt

Здесь а не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного дифференциального уравнения (5). Если же а является корнем характеристического уравнения, то общее решение уравнения (2) будет

$$w(x, y, t) = \left[C_1 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1-\theta_1}} + C_2 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1-\theta_1}} - \frac{q_1 x e^{-\alpha x}}{4\alpha D(\alpha^2 - \lambda_1^2)} \right] \sin \lambda_1 y \cos \omega t$$
(7)

Отметим, что для выполнения условия затухания (3) необходимо, чтобы $0 < \theta_1 = \frac{\omega}{\omega_1} < 1$. Здесь ω_1 – первая собственная частота шарнирно закрепленной пластинки-полосы (колебания по форме цилиндрической поверхности). C_1 . C_2 – произвольные постоянные, которые должны

определяться из граничных условий на краю пластинки x=0 . \cdot

В качестве граничных условий на кромке пластинки x = 0 примем:

а) свободный край

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$
(8)

б) скользящий контакт

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{9}$$

Удовлетворяя решение (6) либо (7) граничным условиям (8) и (9), для прогиба полубесконечной пластинки-полосы будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1} & \mathbf{w}(\xi, y, t) = \frac{q_{1}}{D\lambda_{1}^{4}} F_{c}(\xi, k, \theta_{1}) \sin \lambda_{1} y \cos \omega t , \\ F_{c}(\xi_{5}, k, \theta_{1}) = \frac{1}{(k^{2} - 1 - \theta_{1})(k^{2} - 1 + \theta_{1})} \left[e^{-k\xi} + \frac{k(k^{2} - 2 + v)(1 - v - \theta_{1}) + \sqrt{1 - \theta_{1}}(k^{2} - v)(1 - v + \theta_{1})}{(1 - v - \theta_{1})^{2}\sqrt{1 + \theta_{1}} - (1 - v + \theta_{1})^{2}\sqrt{1 - \theta_{1}}} e^{-\xi\sqrt{1 + \theta_{1}}} - \frac{(10)}{(1 - v - \theta_{1})^{2}\sqrt{1 + \theta_{1}} - (1 - v + \theta_{1})^{2}\sqrt{1 - \theta_{1}}} e^{-\xi\sqrt{1 + \theta_{1}}} - \frac{k(k^{2} - 2 + v)(1 - v + \theta_{1}) + \sqrt{1 + \theta_{1}}(k^{2} - v)(1 - v - \theta_{1})}{(1 - v - \theta_{1})^{2}\sqrt{1 + \theta_{1}} - (1 - v + \theta_{1})^{2}\sqrt{1 - \theta_{1}}} e^{-\xi\sqrt{1 - \theta_{1}}} e^{-\xi\sqrt$$

rae $k = \frac{\alpha}{\lambda_1} > 0$, $\xi = \lambda_1 x$.

Исследуем поведение прогиба полубесконечной пластинки-полосы при x = 0 в зависимости от частоты поперечной нагрузки.

В случае, когда на кромке x = 0 выполняется условие скользящего контакта, из (12) следует

$$F_{ck}(0,k,\theta_1) = \frac{1}{(k^2 - 1 - \theta_1)(k^2 - 1 + \theta_1)} \left(1 - \frac{k}{2\theta_1} \left(\frac{k^2 - 1 + \theta_1}{\sqrt{1 + \theta_1}} - \frac{k^2 - 1 - \theta_1}{\sqrt{1 - \theta_1}} \right) \right)$$
(14)

При частотах

$$\Theta_1 = \begin{cases} k^2 - 1, & k \in (1; \sqrt{2}) \\ 1 - k^2, & k \in (0; 1) \end{cases}$$

которые удовлетворяют условию $0 < \theta_1 < 1$. знаменатель выражения (14) обращается в нуль. При этом выражение (14) становится неопределенностью вида 0/0. Раскрывая данную неопределенность, замечаем, что при этих частотах прогиб полубесконечной пластинкиполосы остается конечным.

Рассмотрим случай, когда кромка пластинки x=0 свободна. Из (10) получаем

$$F_{c}(0, k, \theta_{1}) = \frac{(k^{2} - 1 + \theta_{1})(1 - v - \theta_{1})\sqrt{1 + \theta_{1}} - (k^{2} - 1 - \theta_{1})(1 - v + \theta_{1})\sqrt{1 - \theta_{1}} + 2k\theta_{1}(k^{2} - 2 + v)}{(k^{2} - 1 - \theta_{1})(k^{2} - 1 + \theta_{1})\sqrt{1 - \theta_{1}} - \sqrt{1 + \theta_{1}})(v^{2} - 2(1 - v)\sqrt{1 - \theta_{1}^{2}} - (1 - \theta_{1}^{2}))}$$
(15)

Нули знаменателя (15), удовлетворяющие условию затухания $0 < \theta_1 < 1$ [1], следующие:

$$\theta_{1} = k^{2} - 1 \qquad \left(k \in (1; \sqrt{2})\right)$$

$$\theta_{1} = 1 - k^{2} \qquad \left(k \in (0; 1)\right)$$

$$\theta_{1} = \theta_{y} = \sqrt{4\nu - 1 - 3\nu^{2} + 2\sqrt{2\nu^{4} - 6\nu^{3} + 7\nu^{2} - 4\nu + 1}}$$
(16)

При $\theta_1 = k^2 - 1$ или $\theta_1 = 1 - k^2$ выражение (15) является неопределенностью вида 0/0. После раскрытия неопределенности тем не менее прогиб полубесконечной пластинки-полосы в данном случае остается конечным. Частота поперечной нагрузки (1) $\omega = \omega_1 \theta_v$ является резонансной частотой [1].

В случае, когда поперечная нагрузка (1) имеет вид $q(x, y, t) = q_1 e^{-it} \sin \lambda_1 y \cos \omega t$, что соответствует случаю k = 1, из (14) и (15) следует: если кромка x = 0 пластинки-полосы удовлетворяет условию скользящего контакта (9), то прогиб пластинки остается конечным при любых значениях ω , удовлетворяющих условию затухания: если кромка x = 0 пластинки удовлетворяет условию свободного края (8), то прогиб пластинки остается конечным $\omega = \omega, \theta_{u}$.

На основе формул (10) и (12) проведены численные исследования поведения функций $F_{c}(x,k,\theta_{1})$ и $F_{c}(x,k,\theta_{1})$, характеризирующие прогиб полубесконечной пластинки-полосы, при разных значениях частоты полеречной нагрузки $\theta_{1} = \omega/\omega_{1}$ и коэффициента Пуассона.

Результаты численных исследований приведены на фиг. 1-4.



Фиг. 2

На фиг. 2 приведено трехмерное поведение прогиба полубесконечной пластинки-полосы в окрестности резонансной частоты ω = ω₁θ_ν, когда кромка пластинки *x* = 0 свободна.



ЛИТЕРАТУРА

- 1. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. // ПМ. НАН Украины. 1994. Т.30. №2. С.61-68
- Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. / В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел" (Посвящ. 80-летию С. А. Амбарцумяна) Ереван, Изд. НАН Армении, 2002, с.67-88.
- Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки./ В сб.: "Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем". Ереван: ЕГУ, 1997. С.95-99.
- Белубекян В.М. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки. /В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел" (Посвящ. 80-летию С. А. Амбарцумяна) Ереван: Изд. НАН Армении, 2002. С.61-66.
- 5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, 1987. 360с.
- 6. Васильев В.В. Классическая теория пластин история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.46-58

Ереванский государственный университет Поступила в редакцию 15.07.2004

2U3UUSUUD ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57, №3, 2004

Механика

УДК 539.3 О РЕШЕНИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ Оганесян Р. Ж.

(), Ժ. Հովհաննիսյան

Օրթուտրոպ ապի սեփական տատանումների խնդրում սահմանային շերտի լուծման մասին

Լուծված է օրթոտրոպ սալի սնփական աատանումների խնդրում սահմանային չերտի որոշման խնդիրը, երբ դիմային մակերեույբների վրա տրված են առաձգականության մաբեմատիկսկան տեսության խառը նգրային խնդրի պայմանները։ Դուրս է բերված է տրանացնեղենտ հավասարում, որի արմատները բնություցրում են սահմանային շերտի մեծությունների մարժան արագությունը։ Որոշված են սահամանային շերտի բնությագրիչ ֆունկցիաները։

R. Zh. Hovhannisyan About solution of boundary layer in problem of free vibrations of plate

Определено решение пограничного слоя в задаче о собственных колебаниях ортотролной пластинки, когда на лицевых поверхностях заданы смешанные условия краевых задач математической теории упругасты. Выведено трансцендентное уравнение, корни которого характеризуют скорость затухания величии импраничного слоя. Определены соогветствующие характеристические функции погранслоя.

1. Частоты собственных колебаний и соответствующие им собственные функцин для ортотропной пластинки $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, |z| \le h, h << l\}$, когда на лиценых поверхностях $z = \pm h$ заданы условия

$$\sigma_{zz}(h) = \sigma_{yz}(h) = \sigma_{zz}(h) = 0$$

$$u(-h) = v(-h) = w(-h) = 0$$
(1.1)

определены в работе [1].

Доказано, что в пластинке могут возникнуть собственные колебания трёх видов: два сдинговых и одно продольное. Главными значениями частот являются

$$\omega_{o_n}^{x_p} = \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{G_{i_n}}{\rho}} (2n+1) = \frac{\pi}{4h} v_c^{x_i} (2n+1)$$
(1.2)

$$\omega_{0n}^{j^{2}} = \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{C_{23}}{\rho}} (2n+1) = \frac{\pi}{4h} v_{c}^{j^{2}} (2n+1) \qquad n \in \mathbb{N}$$
(1.3)

$$\omega_{0n}^{p} = \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{A_{11}}{p}} (2n+1) = \frac{\pi}{4h} v_{p} (2n+1)$$
(1.4)

гле $v_e^{x_e}$ и $v_e^{y_e}$ -известные скорости распространения сейсмических сдвиговых волн, а v_p -скорость распространения продольных волн в пластинке.

Соответствующее (1.1)-(1.4) решение удовлетворяет всем уравненням пространственной задачи математической теории упругости и граничным условиям (1.1). Однако оно, как правило, не удовлетворяет условиям при x = 0, l. Возникающая неувязка устраняется решением пограничного слоя. Чтобы построить это решение, в динамических уравнениях теории упругости введём новые переменные $\alpha = x/h$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u_x/l$, $V = u_z/l$, $W = u_{1}/l$. Решение этой системы будем искать в виде

$$\sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{jk}(\alpha, \eta, \zeta) \exp(i\omega t)$$

$$\beta, \gamma = x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3$$

$$(u_x, u_y, u_z) = (U, V, W) \exp(i\omega t)$$
(1.5)

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \varepsilon^{-2y} = 0, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \varepsilon^{-2} V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33} \quad (1.6)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \varepsilon^{-2} W = 0, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = a_{66} \sigma_{12}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{13}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}$$

$$\omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2.$$

где ш-частота собственных колебаний.

Решение этой системы разыскивается в виде функций типа погранслоя [2 - 4]:

$$R_{p} = R_{p}^{(s)}(\eta, \zeta) \varepsilon^{\lambda s_{p} - \varepsilon} \exp(-\lambda \alpha), \quad s = \overline{0, N}$$
(1.7)

Здесь Reason, $\chi_{\sigma_{ab}} = -1$, $\chi_{U_{a},V_{a},W} = 0$, обозначение s = 0, N здесь и далее означает, что по повторяющемуся (немому) индексу *s* происходит суммирование в пределах всех целых значений [0, N]. Напряжения $\sigma_{13p}, \sigma_{23p}, \sigma_{33p}$ при $\zeta = 1$ и перемещения U_p, V_n, W_n при $\zeta = -1$ должны обращаться в нуль, а само решение затухать при удалении от края $\zeta = 0$ в глубь пластинки.

Подставив (1.6) в (1.5) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε (в правых и левых частях, начиная с наинизшей), получим непротиворечивую систему относительно величин $R_{\perp}^{(0)}$:

$$-\lambda \sigma_{11,p}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{12,p}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{22,p}^{(s)}}{\partial \zeta_{5}} + \omega_{*k}^{2} U_{p}^{(s-k)} = 0$$

$$-\lambda \sigma_{21,p}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{22,p}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{22,p}^{(s)}}{\partial \zeta_{5}} + \omega_{*k}^{2} V_{p}^{(s-k)} = 0$$

$$-\lambda \sigma_{13,p}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{22,p}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{22,p}^{(s)}}{\partial \zeta_{5}} + \omega_{*k}^{2} W_{p}^{(s-k)} = 0 \qquad k = \overline{0, s}$$

$$-\lambda U_{p}^{(s)} = a_{11} \sigma_{11,p}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22,p}^{(s)} + a_{23} \sigma_{32,p}^{(s)}$$

$$\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11,p}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22,p}^{(s)} + a_{23} \sigma_{32,p}^{(s)}$$

$$\frac{\partial W_{p}^{(s-1)}}{\partial \zeta_{5}} = a_{13} \sigma_{11,p}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22,p}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33,p}^{(s)}$$

$$Y^{(s)} = a_{ss} \sigma_{12,p}^{(s)} - \lambda W_{p}^{(s)} + \frac{\partial U_{p}^{(s)}}{\partial \zeta_{5}} = a_{55} \sigma_{13,p}^{(s)}, \quad \frac{\partial W_{p}^{(s-1)}}{\partial z_{5}} + \frac{\partial V_{p}^{(s)}}{\partial z_{5}} = a_{24} \sigma_{23}$$

11.53

 $\frac{\partial U_p}{\partial U_p}$

Злесь $R^{(1)} \equiv 0$ при s < 0.

Все напряжения можно выразить через U¹⁰, V¹⁰, W¹⁰;

$$\sigma_{11p}^{(s)} = -\lambda A_{22} U_p^{(s)} - A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{12p}^{(s)} = \lambda A_{12} U_p^{(s)} - A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{12p}^{(s)} = \lambda A_{12} U_p^{(s)} + A_{11} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left[-\lambda V_p^{(s)} + \frac{\partial U_p^{(s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[-\lambda W_p^{(s)} + \frac{\partial U_p^{(s)}}{\partial \zeta} \right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left[\frac{\partial W_p^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_p^{(s)}}{\partial \zeta} \right]$$
(1.9)

где

$$A_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}}{\Delta}, \qquad A_{21} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^{2}}{\Delta}, \qquad A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^{2}}{\Delta}$$

$$A_{12} = \frac{a_{31}a_{12} - a_{33}a_{23}}{\Delta}, \qquad A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, \qquad A_{21} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{33}^{2} - a_{33}a_{12}^{2}$$
(1.10)

Подставив (1.9) в первые три уравнения (1.8), получим:

$$\frac{1}{a_{15}} \frac{\partial^2 U_p^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \lambda \left(\frac{1}{a_{55}} - A_{23} \right) \frac{\partial W_p^{(s)}}{\partial \zeta} + \lambda^2 A_{22} U_p^{(s)} + \omega_{*k}^2 U_p^{(s-k)} = R_{1p}^{(s)}$$

$$\frac{1}{a_{44}} \frac{\partial^2 V_p^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \lambda \frac{1}{a_{66}} V_p^{(s)} + \omega_{*k}^2 V_p^{(s-k)} = R_{2p}^{(s)}$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W_p^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda \left(\frac{1}{a_{55}} - A_{23} \right) \frac{\partial U_p^{(s)}}{\partial \zeta} + \lambda^2 \frac{1}{a_{55}} W_p^{(s)} + \omega_{*k}^2 W_p^{(s-k)} = R_{3p}^{(s)}$$

$$k = \overline{0} \cdot s$$
(1.11)

гле

$$R_{1\rho}^{(s)} = \lambda A_{12} \frac{\partial V_{\rho}^{(s-1)}}{\partial m} + \frac{\partial \alpha^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$- \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U_{\rho}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha^{(s-1)}}{\partial \eta} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 W_{\rho}^{(s-1)}}{\partial \eta^2}$$

$$R_{3\rho}^{(s)} = \frac{1}{\alpha} - A_{13} \frac{\partial^2 V_{\rho}^{(s-1)}}{\partial \eta^2}$$
(1.12)

Очевидно, что величины $R_{ip}^{(s)} = 0$ при $s \le 0$, а при s > 0 $R_{ip}^{(s)}$ известны.

Рассмотрим случай s = 0, тогда (1.11) примет вил:

$$\frac{1}{a_{s_{1}}} \frac{\partial^{2} U^{(0)}}{\partial z_{-}^{2}} - \lambda \left(\frac{1}{a_{s_{1}}} - A_{23} \right) \frac{\partial W^{(0)}}{\partial z_{-}} + \left(\lambda^{2} A_{s_{2}} + \omega_{s_{0}}^{2} \right) U^{(0)} = 0$$

$$\frac{1}{a_{s_{1}}} \frac{\partial^{2} V_{\rho}^{(0)}}{\partial z_{-}^{2}} + \left(\lambda^{2} \frac{1}{a_{s_{1}}} + \omega_{s_{0}}^{2} \right) V_{\rho}^{(0)} = 0$$

$$(1.13)$$

$$A_{1} \frac{\partial^{2} W_{\rho}^{(0)}}{\partial z_{-}^{2}} - \lambda \left(\frac{1}{a_{s_{1}}} - A_{s_{1}} \right) \frac{\partial U^{(0)}}{\partial z_{-}} + \left(\lambda^{2} \frac{1}{a_{s_{1}}} + \omega_{s_{0}}^{2} \right) W^{(0)} = 0$$

Решеннем второго уравнения будет:

 $V_{\mu}^{(0)} = C_{F1}^{(0)}(\eta) \sin \sqrt{a_{44}} (\lambda^2 / a_{66} + \omega_{\infty}^2) \zeta + C_{F2}^{(0)}(\eta) \cos \sqrt{a_{44}} (\lambda^2 / a_{44} + \omega_{\infty}^2) \zeta$ (1.14) Это решение должно удовлетворять соответствующим условням (1.1), откуда получим следующие условия:

$$\left| V_{p}^{(0)} \right|_{\Sigma = -1} = 0, \quad \sigma_{10}^{(0)} \left|_{\Sigma = 1} = 0 \implies \frac{\partial V_{p}^{(0)}}{\partial \zeta} \right|_{\Sigma = 1} = 0 \quad (1.15)$$

Подставив (1.14) в (1.15), получны следующую систему алгебраических уравнений:

$$-C_{r_1}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}(\lambda^2/a_{66}+\omega_{r_0}^2)}+C_{r_2}^{(0)}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}(\lambda^2/a_{66}+\omega_{r_0}^2)}=0$$

$$C_{r_1}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}(\lambda^2/a_{66}+\omega_{r_0}^2)}-C_{r_2}^{(0)}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}(\lambda^2/a_{46}+\omega_{r_0}^2)}=0$$

Из существования ненулевого решения этой системы вытекает:

$$\cos 2\sqrt{a_{44}} \left[\lambda^2 / a_{66} + \omega_{50}^2 \right] = 0 \tag{1.16}$$

Решив это уравнение, для л получим:

$$\lambda_{k,n} = \sqrt{\frac{a_{kk} \left(\pi^2 (2k-1)^2 - 16\omega_{tin}^2 a_{kk}\right)}{16a_{kk}}} \qquad k, n \in \mathbb{N}$$
(1.17)

Из (1.17) следует, что значения $\lambda_{i,.}$ зависят от значений $\omega_{*0s} = h_{\sqrt{\rho}}\omega_{0s}$, т.е. от частот собственных колебаний (1.2) - (1.4). Следовательно, каждому значению ω_{*0s} будет соответствовать совокупность значений , т.е. класс функций пограничного своя, при этом частоты продольных колебаний (1.4) будут порождать сдвиговой пограничный слой.

2. Рассмотрим остальные два уравнения (1.13), в которых выразим $U_p^{(0)}$ через $W^{(0)}$.

$$U_{p}^{(0)} = S_{z} \frac{\partial^{2} W_{p}^{(0)}}{\partial \zeta_{p}^{0}} + S_{z} \frac{\partial W_{p}^{(0)}}{\partial \zeta_{p}}$$
(2.1)

гдс

$$S_{1} = \frac{A_{11}}{\lambda \left(\lambda^{2} A_{22} + \omega_{10}^{2} \right) \left(a_{55} A_{23} - 1\right)}, \quad S_{3} = \frac{\omega_{10}^{2} + \lambda^{2} A_{25} \left(2 - a_{55} A_{23} \right)}{2 \left(\lambda^{2} A_{22} + \omega_{10}^{2} \right) \left(a_{55} A_{23} - 1\right)}$$
(2.2)

Подставив (2.1) в третъс уравнение (1.13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно W^{101} :

$$\frac{A_{11}}{a_{15}(\omega_{*0}^{2} + \lambda^{2} A_{22})} \frac{\partial^{4} W_{p}^{(0)}}{\partial \zeta^{*}} + \left(\frac{\omega_{*0}^{2} + \lambda^{2} A_{23} (2 - a_{55} A_{23})}{a_{55} (\omega_{*0}^{2} + \lambda^{2} A_{22})} + A_{11} \right) \frac{\partial^{2} W_{p}^{(0)}}{\partial \zeta^{2}} + \left(\omega_{*0}^{2} + \frac{\lambda^{2}}{a_{55}} \right) W_{p}^{(0)} = 0$$

$$(2.3)$$

Решением этого уравнения является

$$= C^{(0)} \cos \lambda \beta_1 \zeta + C^{(0)}_{\ \rho} \sin \lambda \beta_1 \zeta + C^{(0)}_{\ 3\rho} \cos \lambda \beta_2 \zeta + C^{(0)} \sin \lambda \beta_2 \zeta \qquad (2.4)$$

г<u>де</u>

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2A_{11}} \left(\mu^2 + A_{23} \left(2 - a_{55} A_{13} \right) + a_{55} \left(\mu^2 + A_{22} \right) A_{11} \pm \sqrt{D} \right)$$
$$D = \left(\mu^2 + A_{23} \left(2 - a_{55} A_{23} \right) + a_{55} \left(\mu^2 + A_{22} \right) A_{11} \right)^2 - 4 \left(1 + \mu^2 a_{55} \right) \left(A_{22} + \mu^2 \right) A_{11} \quad (2.5)$$
$$\mu = \frac{m_{s_1}}{\lambda}$$

$$U_{p}^{(0)} = \lambda \beta_{1} \left(S_{1} \lambda^{2} \beta_{1}^{2} - S_{2} \right) \left(C_{1p}^{(0)} \sin \lambda \beta_{1} \zeta - C_{1}^{(0)} \cos \lambda \beta_{1} \zeta \right) + \lambda \beta_{2} \left(S_{1} \lambda^{2} \beta_{2}^{2} - S_{2} \right) \left(C_{1p}^{(0)} \sin \lambda \beta_{2} \zeta - C_{1}^{(0)} \cos \lambda \beta_{2} \zeta \right)$$
(2.6)

Подставляя (2.4) и (2.6) в (1.9) и в граничные условия (1.1), придём к алгебраической системе однородных уравнений, из условия существования ненулевого решения которой получится характеристическое уравнение для определения λ

$$B_1 \cos 2\lambda \beta_2 - B_1 \cos 2\lambda \beta_1 = 0 \tag{2.7}$$

5<u>д</u>1

$$B_{3} = \lambda \beta_{1}^{2} \left(\lambda^{2} \beta_{1}^{2} S_{1} - S_{2} \right) - 1$$

$$B_{4} = \lambda \beta_{2}^{2} \left(\lambda^{2} \beta_{2}^{2} S_{1} - S_{2} \right) - 1$$
(2.8)

В уравнение (2.7) входит ω , в качестве параметра, которые были определены из решения внешней задачи и имеют вид (1.2)–(1.4). Каждому значению ω , будет соответствовать некоторое множество λ , из которой в силу свойства пограничного слоя необходимо ограничнъся теми значениями, у которых $Re\lambda > 0$. Таким образом, каждому собственному значению ω , соответствует своё семейство пограничных функций, при этом частоты сдвиговых колебаний (1.2), (1.3) будут порождать продольный пограничный слой, и наоборот – частогам (1.4) будет соответствовать также сдвиговой пограничный слой.

В качестве примера рассмотрен стеклопластик СТЭТ, чьи значения постоянных упругости следующие [2]:

$$E_1 = 35.2179 \cdot 10^9 \Pi a, E_2 = 28.7433 \cdot 10^9 \Pi a, E_1 = 17.9523 \cdot 10^9 \Pi a$$

$$G_{12} = 7.4556 - 10^9 \Pi a, G_{23} = 6.1803 - 10^9 \Pi a, G_{13} = 6.4746 \cdot 10^9 \Pi a$$

$$v_{12} = 0.177, \dots = 0.371, v_{31} = 0.157$$

Вычислены первые шесть корня уравнения (2.7), соответствующие частотам (1.2)-(1.4), которые представлены в табл. 1-3.

Таблица 1

$$\omega_{\bullet_{0n}} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{ss}}} (2n+1)$$

n=1	n=2	n=3	
2.14832 + 0.63309 i	0.93364	2.06501 + 1.03838 i	
2.96673	2.34418 + 0.76793 1	3.20766	
4.38693 + 0.67415 i	4.36276 + 0.54425 1	4.5484 + 0.7183 i	
5.58037	4.89241	6.56271	
6.59204 + 0.65866 i	6.57016 + 0.663381	6.70845 + 0.46469 i	
8.05881	7.61432	9.62226	

$$\omega_{*0n} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{44}}} (2n+1)$$

Таблица 2

n=1	n=2	n=3
2.15092 + 0.63927 i	1.0589	2.08898 + 1.02427 i
2.9967	2.35403 + 0.74517 I	3.32027
4.388 ± 0.67425 i	4.3572 + 0.56477 I	4.56109 + 0.70249 i
5.5958	4.95887	6.64072 + 0.46594 i
6.592 - 0.65711 1	6.57234 + 0.66645 I	6.77315
8.07143	7.64512	12.22275
(A) = T	$\int \frac{1}{4} (2n+1)/4$	Тоблица 3

AV	C BURICOB I	
n=1	n=2	n=3
2.29505 + 0.84699 i	1.99957 + 1.37303 i	4.04025 + 1.0959 i
4.43173	4.30617 + 0.73736 i	5.54629
4.47673 ÷ 0.45353 i	5.24957	6.74924 + 0.74283 i
6.561998 + 0.64499 i	6.73459 + 0.71648 i	8.83449 + 0.57389 i
7.48489	8.31258	9.46195
10.03485	11.56112	12.40489

На основании полученных результатов можно заключить – если собственные колебания с достаточной для практических приложений точностью можно считать независимыми с частотами (1.2)-(1.4), то в зоне пограничного слоя они взвимосвязаны-собственные колебания одного типа (например, сдвиговые) порождают собственные колебания другого типа (например, продольные).

ЛИТЕРАТУРА

- Агаловян Л. А., Оганссян Р. Ж. Собственные колебания ортотропных пластии при смешанных красвых условиях на лицевых поверхностях. // Известия НАН РА Механика. 2003. Т 56. № 4. С. 18-28.
- Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластии и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
- Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ, 1997. С 132-135.
- Агаловян Л. А., Гулгазарян Л. Г. О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотронной пластинки в смешанной краевой задаче. // Известия НАН РА. Механика. 2001. Т 54. № 2. С. 32-41.

Ивститут механики НАН Армении Поступила в редакцию 24.06.2004

Մեխանիկա

57, Nº3, 2004

Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ СЛОЕ С ЧАСТИЧНО ЭЛЕКТРОДИРОВАННОЙ ТУННЕЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л.

Գ.Ի. Բարձոկաս, Մ.I_., Ֆիլյաինսկի

Մասամբ էլեկադողավորված թունելային անցքով այնզոկերամիկ շերաում էլեկարական լիզբի օպաիմալ կառավարումը

Դիտարկվում է պլիկոկիրամիկ շերտում թունելային անցքի մակերևույթի վրա դասավորված ականվ Հլնկտրողների վրա գումարային էլեկտրական լիցքերի սպտիմալ կառավարման մասին խնդիրը։ Որպես կառավարող ներգործաղություններ դիտարկվում են շերտի հիմքերի տրված տեղամասերի վրա անընդնատ բաշխված և ժամանակի ընթացքում ներդաշնակ փոփոխվող սահքի ճիգերը կամ էլեկտրական լիցքերը Հակադարձ խնդրի լուծման համար ոգտագործվում է էլեկտրառաձգականության համապատասխան ուղիղ հակահար եզրային խնդրի լուծումը, որի օգտագործվանը օպտիմալացման իւնդիրը հանգեցվում է

մոմննաննըի / Հայոբյնմին։ Բերվում են մինիմայ էննրգետիկ ծախսերի ղեպրում էլեկտրողների վրա լիցքի կառավարումը թույլատրող ճիգերի և լիցբերի բաշխման տարբեր սպաիմայ ուժգնություններ

D.I. Bardzokas, M.I. Filsblinsky Optimal Control by elektrical charge in a plezoceramic layer with partly electroded tunnel cavity

Рассматривается задача об оптимальном управлении суммарными электрическими заридами на активных электродах, расположенных на поверхности туннельной полости в пьезокерамическом слое. В качестве управляющих воздействий рассмотриваются гармонически изменяющиеся во временя, непрерывно распределенные на заданных участках оснований слоя усилия сдвига или электрические заряды. Для решения обратной задачи используется решение соответствующей прямой антиплоской граничной задачи расктроупругости, с использованием которого оптимизационная задача сводится к 1проблеме моментов. Приводятся различные оптимальные интенсияности распределеным усилий и зарядов, позволяющие управлять зарядом на электродах при минимальные энергетических затратах.

1. Введение

Проблемы оптимального (в том или ином смысле) управления характеристиками прочности и разрушения кусочно-однородных тел, в которых физические поля различной природы связаны между собой, представляют собой новый класс задач, возникающих в современных технологиях. В пьезоэлектрических средах с неоднородностями взаимодействие механических и электрических полей может приводиться к электрическому, механическому или смешанному электромеханическому разрушению [1]. Точный анализ поведения параметров, регламентируюдолжен ших разрушение пьезоэлемента, исходить ИЗ решения соответствующих статических или динамических граничных залач электроупругости.

Методы теории оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами рассмотрены, например. в [2-4]. Математические аспекты приложения проблемы моментов [5], и, в частности, *l*-проблемы моментов, разработанной в [6], к решению задач оптимального управления отражены в [4]. Некоторые вопросы, связанные с управлением разрушением тел с трещинами, а

38

также движениями упругих пластин, рассмотрены в [7, 8]. В зависимости от характера оптимальной задачи управление должно выбираться из некоторого функционального класса.

В данной статье подход к оптимальному (с точки зрения минимизации энергетических затрат) управлению характеристиками сопряженного поля иллюстрирустся на примере модельной антиплоской стационарной динамической задачи электроупругости для пьезокерамического слоя с туннельной полостью. Колебания в слое возбуждаются двумя типами гармонической во времени нагрузки: разностью электрических потенциалов, подаваемых на пару бесконечно длинных электродов, симметрично расположенных на поверхности полости, и непрерывно распределенными на заданных участках оснований слоя усилиями сдвига или электрическими зарядами. Необходимо определить интенсивность распределения нагрузки вдоль участков, принимаемой в качестве функции управления в гильбертовом пространстве L^2 , таким образом, чтобы суммарные электрические заряды на электродах достигали заданных значений. При этом требуется, чтобы норма функции управления в пространстве L^2 была минимальной.

Для решения задачи управления сперва методами граничных интегральных уравнений [9] и функции Грина строится решение соответствующей прямой задачи для слоя с частично электродированной волостью при действии линейных источников типа усилий сдвига и зарядов. Далее оптимизационная задача сводится к *l*-проблеме моментов, решение которой проводится с привлечением простейших фактов из теории гильбертовых пространств. Получены оптимальные функции интенсивности распределения усилий и зарядов, позволяющие, например, разомкнуть электрическую цепь генератора напряжения при заданной частоте гармонического нагружения.

2. Формулировка оптимизационной задачи

Рассмотрим отнесенный к декартовой системе координат Ох, х, х, $(0 \le x_1 \le a, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_1 < \infty),$ пьезокерамический слой содержащий туннельное вдоль оси X₁ отверстие, поперечное сечение которого ограничено гладким контуром С. Основания слоя свободны от напряжений и сопряжены с вакуумом везде, за исключением участков $x_{1} \in [b,d]$ $(x_{1} = 0, a)$, на которых действуют гармонически изменяющиеся во времени, не зависящие от координаты Х₃, усилия сдвига $p(x_2,t) = \operatorname{Re}(P(x_2)e^{-i\omega t})$ электрические или заряды $q(x_{1},t) = \operatorname{Re}(Q(x_{1})e^{-i\omega t}) (t - время, \omega - крутовая частота). На свободной$ от усилий поверхности отверстия симметрично располагаются два бесконечных в направлении оси х, активных электрода с заданной разностью электрического потенциала $2\phi^* = \text{Re}(\Phi^* e^{-i\omega t})$, причем неэлектродированные участки отверстия сопряжены с вакуумом (направление предварительной поляризации керамики параллельно оси X-]. Предполагается, что полеречное сечение полости имеет горизонтальную и вертикальную ось симметрии и она расположена симметрично по отношению к основаниям слоя (фиг.1).

Оптимизационная задача формулируется следующим образом: необходимо определить интенсивность распределения усилий сдвига $P(x_2)$ или электрических зарядов $Q(x_2)$, принимаемых в качестве функций управления, вдоль участков $x_2 \in [b,d]$ $(x_1 = 0, a)$ таким образом, чтобы суммарные электрические заряды на активных электродах достигали заданных значений. Кроме того, требуется, чтобы норма функции управления в пространстве $L_{[b,d]}$ была минимальной. Иными словами, исследуется возможность управления электрическим током во внешней цени генератора напряжения при минимальных энергетических затратах за счет граничной механической или электрической нагрузки.

Решение рассматриваемой обратной задачи будем проводить, опираясь на решение соответствующей прямой граничной задачи электроупругости.

3. Граничная задача электроупругости для слоя с частично

электродированной тупнельной полостью

Рассмотрим пьезокерамический слой с туннельной полостью, волновое электроупругое поле в котором возбуждается подаваемой на два бесконечных электрода разностью электрических потенциалов 2¢°. Основания слоя и поверхность полости свободны от сил, внешней средой является вакуум. Условия на расположение электродов и полости, конфигурацию ее поперечного сечения, данные в разделе 2, остаются в силе и здесь.

Дополнительным фактором возбуждения гармонических колебаний в слое являются сосредоточенные на его основаниях вдоль линий $x_2 = \eta_2$, $-\infty < x_1 < \infty$, $x_1 = 0$ и $x_1 = a$, гармонически изменяющиеся во времени, не зависящие от координаты x_1 усилия сдвига $P_k = \operatorname{Re}(P_k^*\delta(x_2 - \eta_1)e^{-\alpha})$ или электрические заряды $Q_k = \operatorname{Re}(Q^*\delta(x_2 - \eta_2)e^{-\alpha})$ (k = 1, 2). Здесь индекс k = 1 относится к границе $x_1 = 0$, индекс $k = 2 - \kappa x_1 = a$, $\delta(x) -$ дельта-функция Дирака.

В данных условиях в кусочно-однородном слое имеет место электроупругое поле. соответствующее состоянию антиплоской деформации. Полная система уравнений в квазистатическом приближениии включает следующие соотношения [10]:

уравнение движения

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^3}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$
 (3.1)

материальные уравнения среды

$$\sigma_{m1} = c_{44}^{e} \partial_{m} u_{3} - c_{13} E_{m}$$
(3.2)

$$D_m = e_{15}\partial_m u_3 + \Im_{11} E_m \quad (m = 1, 2)$$

и уравнения электростатики

$$div D = 0,$$

(3.3)
$$E = -\text{grad}\phi.$$

В (3.1)-(3.3) σ_{m3} – компоненты тензора напряжения, u_3 – компонента вектора упругого перемещения в направлении оси x_3 : Е и D – векторы напряженности и индукции электрического поля: ϕ – электрический потенциал: c_{44}^E , c_{15} и \Im_{11}^E – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезоэлектрическая константа и дизлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях, соответственно; ρ – массовая плотность материала.

Систему уравнений (3.1)-(3.3) сведем к дифференциальным уравнениям относительно перемещения и, и электрического потенциала ф:

$$c_{44}^{E} \nabla^{2} u_{3} + e_{15} \nabla^{2} \phi = \rho \frac{\partial^{2} u_{3}}{\partial t^{2}}$$

$$e_{15} \nabla^{2} u_{5} - \mathfrak{d}_{15} \nabla^{2} \phi = 0$$
(3.4)

$$\nabla^{2} u_{3} - c^{-2} \frac{\partial^{2} u_{3}}{\partial t^{2}} = 0, \quad \nabla^{2} F = 0$$

$$\phi = \frac{e_{15}}{\vartheta_{11}^{\varepsilon}} u_{3} + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^{\varepsilon} (1 + k_{15}^{2})}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^{\varepsilon} \vartheta_{11}^{\varepsilon}}}$$
(3.5)

где с — скорость волны сдвига в ньезокерамической среде, k_{11} — козффициент электромеханической связи [10].

Механические и электрические величины при учете (3.2), (3.3) и (3.5) можно выразить через функции и, и *F* по формулам

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2\frac{\partial}{\partial z} \left[c_{44}^{\mathcal{E}} \left(1 + k_{15}^2 \right) u_3 + e_{15} F \right]$$
(3.6)

$$D_1 - iD_2 = -2 \mathfrak{s}_{11}^{\mathfrak{s}} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F + \frac{e_{15}}{\mathfrak{s}_{11}^{\mathfrak{s}}} u_3 \right) \quad z = x_1 + ix_2$$

Полагая $u_3 = \operatorname{Re}(U_3 e^{-i\omega t}), \quad \phi = \operatorname{Re}(\phi_* e^{-i\omega t})$ и $F = \operatorname{Re}(F^* e^{-i\omega t}),$ запишем уравнения (3.5) относительно амплитудных величин:

$$\nabla^{2} U_{3} + \gamma^{2} U_{3} = 0, \quad \nabla^{2} F^{*} = 0$$

$$\phi_{*} = \frac{e_{13}}{\sigma_{11}^{c}} U_{3} + F^{*}, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}$$
(3.7)

где у – волновое число. Механическое и электрические граничные условия на поверхности полости при учете (3.5), (3.6) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^{E} \left(1 + k_{15}^{2} \right) u_{3} + e_{15} F \right\} = 0 \quad \text{Ha} \quad C$$

$$\phi = F + \frac{e_{15}}{\Im_{11}^{E}} u_{3} = \phi^{*}(\zeta, t), \quad \zeta \in C_{\phi}$$
(3.8)

41

$$D_n = -\vartheta_{11}^t \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{Ha} \ C \setminus C_{\phi}$$

Здесь *C* – часть контура *C*, соответствующая электродированной поверхности полости; оператор $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к контуру *C*.

Механические и электрические граничные условия на основаниях слоя формально представимы в виде

$$\sigma_{13} = 0, \quad D_1 = 0 \quad (x_1 = 0, a)$$
 (3.9)

Таким образом, краевая задача электроупругости сводится к определению функций U_3 и F^* из дифференциальных уравнений Гельмгольца и Лапласа (3.7), граничных условий (3.8), (3.9), а также условий на бесконечности.

Для сведения поставленной задачи к системе граничных интегральных уравнений необходимо иметь корректные интегральные представления искомых функций в (3.7).

При этом условия (3.9) целесообразно выполнить автоматически, построяв соответствующие функции Грина уравнений (3.7).

Волновое поле гармонического источника в однородном пьезокерамическом слое можно определить из системы уравнений типа (3.4), записанной относительно амплитуд перемещения и электрического потенциала [11]

$$c^{\varepsilon} \nabla^{2} U_{3} + e_{15} \nabla^{2} \phi_{*} + \rho \omega^{2} U_{3} = -P^{*} \delta(x_{1} - \eta_{1}, x_{2} - \eta_{2})$$

$$e_{15} \nabla^{2} U_{3} - \vartheta^{\varepsilon} \nabla^{2} \phi_{*} = Q^{*} \delta(x_{1} - \eta_{1}, x_{2} - \eta_{2})$$
(3.10)

Здесь P^* и Q^* – линейные плотности сосредоточенных сдвиговых усилий и зарядов, действующих во внутренней точке области $\mu = \eta_1 + i\eta_2$.

Для этого необходимо рассмотреть следующие граничные задачи, соответствующие равенствам (3.9). (3.10):

$$\nabla^{2}G + \gamma^{2}G = \frac{e_{15}Q^{*} - \mathfrak{I}_{11}^{*}P^{*}}{e_{44}^{*}\mathfrak{I}_{11}^{*}(1+k_{15}^{*})}\delta(x_{1} - \eta_{1}, x_{2} - \eta_{2}), \quad \partial_{1}G = 0 \quad (x_{1} = 0, a) \quad (3.11)$$
$$\nabla^{2}E = -\frac{Q^{*}}{\mathfrak{I}_{11}^{*}}\delta(x_{1} - \eta_{1}, x_{2} - \eta_{2}), \quad \partial_{1}E = 0 \quad (x_{1} = 0, a) \quad (3.12)$$

$$\phi_* = E + \frac{e_{15}}{\vartheta_{11}}G$$

Следуя [11], находим

$$G(\mu, z) = \frac{e_{1}Q^{*} \rightarrow P^{*}}{c_{44}^{E} \rightarrow (1+k_{15}^{*})} \left\{ -\frac{|x_{2} - \eta_{2}|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin\frac{\pi(\mu - z)}{2a}\sin\frac{\pi(\mu + \overline{z})}{2a} \right| + \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\gamma|x_{2} - \eta_{2}|} - \frac{1}{a} \sum_{m} c_{m}(x_{2} - \eta_{2})\cos a_{m}\eta_{1}\cos a_{m}x_{1} \right\}$$
(3.13)

$$E(\mu,z) = -\frac{Q^*}{\Im_{11}^*} \left\{ -\frac{|x_2 - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin\frac{\pi(\mu - z)}{2a}\sin\frac{\pi(\mu + z)}{2a} \right| \right\}$$

$$a_{m} = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_{m} = \begin{cases} \sqrt{a_{m}^{2} - \gamma^{2}}, & \gamma < a_{m} \\ -\sqrt{\gamma^{2} - a_{m}^{2}}, & \gamma > a_{m} \end{cases}$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad \mu = \eta_1 + i\eta_2$$

Функции $G(\mu, z)$ и $E(\mu, z)$. определенные формулами (3.13), представляют собой функции Грина граничных задач (3.11), (3.12) для пназокерамического слоя. Условия излучения в задаче (3.11) и затухания в задаче (3.12) выполняются.

Если линейные источники расположены на основаниях слоя вдоль линий $x_2 = \eta_2, -\infty < x_3 < \infty, x_1 = \eta_1^{(1)} = 0$ и $x_1 = \eta_1^{(2)} = a$, то, и силу принципа суперпозиции решений, формулы (3.13) обобщаются и записываются в виде

$$G^{*}(\eta_{2},z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_{k} - \vartheta_{11}}{c_{44}^{2}} \vartheta_{11} \left(1 + k_{15}^{2}\right) \left\{ -\frac{|x_{2} - \eta_{21}|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} + z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a$$

$$+\frac{1}{2ia\gamma}e^{i\gamma(x_{1}-\eta_{1})}-\frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty}c_{m}(x_{2}-\eta_{2})\cos\alpha_{m}\eta_{1}^{(r)}\cos\alpha_{m}x_{1}\bigg\}$$
(3.14)

$$E^{*}(\eta_{2},z) = -\sum_{k=1}^{2} \frac{Q_{k}^{*}}{\vartheta_{11}^{*}} \left| -\frac{|x_{2} - \eta_{2}|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} + \overline{z})}{2a} \right| \right|$$

Здесь $\eta_1^{(1)} = 0$, $\eta_1^{(2)} = a$, $\mu_1 = i\eta_2$, $\mu_2 = a + i\eta_2$.

Суммарное волновое поле в пьезокерамическом слое с полостью складывается из полей вызванных действием линейного источника и электрического напряжения на электродах, а также поля, рассеянного неоднородностью. Поэтому, с учетом построенных выше функций Грина интегральные представления решений уравнений (3.7) можно записать в виде

$$U_{1}(x_{1}, x_{2}) = \int_{C} v(\zeta) G(\zeta, z) ds + G^{*}(\eta_{2}, z)$$

$$F^{*}(x_{1}, x_{2}) = \int f(\zeta) \frac{\partial E(\zeta, z)}{\partial \eta} ds + E^{*}(\eta_{2}, z), \quad \zeta \in C$$
(3.15)

Здесь ds — элемент длины дуги контура C; под функциями $G(\zeta, z)$ и б(с.) понимаются выражения (3.13), в которых множители перед фигурными скобками приняты равными единице. Представления (3.15) автоматически удовлетворяют граничным условиям (3.9) на основаниях слоя, а также условиям излучения на бесконечности. Подставляя предельные значения функций (3.15) и их производных при $z \to \zeta_0 \in C$ в граничные условия (3.8), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$v(\zeta_{0}) + \int_{C} v(\zeta)g_{1}(\zeta_{*}\zeta_{0})ds + \int_{C} f'(\zeta)g_{2}(\zeta_{*}\zeta_{0})ds = N_{1}(\zeta_{0})$$

$$-\frac{1}{2}f(\zeta_{0}) + \int_{C} \{v(\zeta)g_{3}(\zeta,\zeta_{0}) + f(\zeta)g_{4}(\zeta,\zeta_{0})\}ds = N_{2}(\zeta_{0}), \quad \zeta_{0} \in C_{4} \quad (3.16)$$

$$\int_{C} f'(\zeta)g_{5}(\zeta,\zeta_{0})ds = N_{1}(\zeta_{0}), \quad \zeta_{0} \in C \setminus C_{4}$$

в которой ядра $g_m(m=1,2,...,5)$ и правые части определяются выражениями:

$$\begin{split} g_{1}(\zeta_{5},\zeta_{0}) &= \frac{1}{2a} \operatorname{Re} \left[\operatorname{e}^{i_{W_{0}}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_{0}-\zeta_{0})}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_{0}+\overline{\zeta})}{2a} \right] \right] + P_{1} e^{i_{W_{0}}} + P_{2} e^{-i_{W_{0}}} \\ g_{2}(\zeta_{5},\zeta_{0}) &= \frac{2e_{15}}{c_{44}^{\mathcal{E}}(1+k_{15}^{2})} g_{5}(\zeta_{5},\zeta_{0}) \\ g_{3}(\zeta_{5},\zeta_{0}) &= \frac{e_{15}}{2i_{11}^{\mathcal{E}}} \left\{ -\frac{|\xi_{20}-\xi_{2}|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4\sin \frac{\pi(\zeta-\zeta_{0})}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta+\overline{\zeta}_{0})}{2a} \right| + \frac{1}{2a} \frac{1}{2a} \operatorname{re}^{i_{1}(\xi_{m}-\xi_{1})} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20}-\xi_{2}) \cos a_{m}\xi_{1} \cos a_{m}\xi_{10} \right\} \\ g_{4}(\zeta_{5},\zeta_{0}) &= \frac{1}{4a} \operatorname{Re} \left[\operatorname{e}^{i_{W}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta-\zeta_{0})}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta+\overline{\zeta}_{0})}{2a} \right] \right] + \frac{\sin \psi}{2a} \operatorname{sign}(\xi_{20}-\xi_{2}) \right] \\ g_{5}(\zeta_{n},\zeta_{0}) &= \frac{1}{4a} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{e}^{i_{W}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta-\zeta_{0})}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\overline{\zeta}+\zeta_{0})}{2a} \right] \right\} \\ P_{1} &= S - \frac{1}{a} (A_{0} - iB_{0}), P_{2} = -S - \frac{1}{a} (A_{0} + iB_{0}) \\ S &= \frac{1}{2ia} \operatorname{sign}(\xi_{2} - \xi_{20}) (1 - e^{i\gamma|\xi_{2}-\xi_{10}|}) \\ A_{0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1k} \alpha_{k} \cos \alpha_{k} \xi_{1} \sin \alpha_{k} \xi_{10} \\ B_{0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{0k} \operatorname{sign}(\xi_{20} - \xi_{2}) \cos \alpha_{k} \xi_{1} \sin \alpha_{k} \xi_{10} \\ \beta_{mk} &= \frac{1}{\alpha_{k}} e^{-\alpha_{k}(\xi_{2}-\xi_{10})} - \frac{1}{\lambda_{k}}} e^{-\lambda_{k}(\xi_{2}-\xi_{10})}, f'(\zeta) &= \frac{df}{ds} \\ c_{m}(\xi_{20}^{-\zeta_{2}}) &= \frac{1}{\lambda_{k}} e^{-\lambda_{n}(\xi_{20}-\xi_{1})} - \frac{1}{\alpha_{k}} e^{-\alpha_{n}(\xi_{20}-\xi_{2})} \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} N_{1}(\zeta_{0}) &= \sum_{k=1}^{2} \frac{P_{k}^{*}}{ac_{44}^{*}(1+k_{11}^{*})} \Big\{ \text{sign}(\xi_{20} - \eta_{1}) \text{sin} \psi_{0} \Big(e^{\pi(4\omega - \eta_{1})} - 1 \Big) + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Re} \Big[e^{\eta_{0}} \Big(\text{cig} \frac{\pi}{2a} (\mu_{k} + \zeta_{0}) - \text{cig} \frac{\pi}{2a} (\mu_{k} - \zeta_{0}) \Big) \Big] - 2(A_{k} \cos \psi_{0} + B_{k} \sin \psi_{0}) \Big\} - \\ &- \sum_{k=1}^{2} \frac{k_{10}^{*}Q_{k}^{*}}{ae_{11}(1+k_{12}^{*})} \Big[\sin \psi_{0} \text{sign}(\xi_{20} - \eta_{2}) e^{\pi(4\omega - \eta_{2})} - 2(A_{k} \cos \psi_{0} + B_{k} \sin \psi_{0}) \Big] \\ &- \sum_{k=1}^{2} \frac{k_{10}^{*}Q_{k}^{*}}{ae_{11}(1+k_{12}^{*})} \Big[\sin \psi_{0} \text{sign}(\xi_{20} - \eta_{2}) e^{\pi(4\omega - \eta_{2})} - 2(A_{k} \cos \psi_{0} + B_{k} \sin \psi_{0}) \Big] \\ &- \sum_{k=1}^{2} \frac{k_{10}^{*}Q_{k}^{*}}{ae_{11}(1+k_{12}^{*})} \Big[\sin \psi_{0} \text{sign}(\xi_{20} - \eta_{2}) e^{\pi(4\omega - \eta_{2})} - 2(A_{k} \cos \psi_{0} + B_{k} \sin \psi_{0}) \Big] \\ &- \sum_{k=1}^{2} \frac{k_{10}^{*}Q_{k}^{*}}{ae_{11}(1+k_{12}^{*})} \Big[- \frac{|\xi_{20} - \eta_{2}|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln |4\sin \frac{\pi(\mu_{k} - \zeta_{0})}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_{k} + \zeta_{0})}{2a} \Big] \\ &+ \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{11}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \cos \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \cos \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \\ &+ \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{11}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \cos \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \cos \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \Big] \\ &- k_{13}^{2} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{2}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \cos \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \cos \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \Big] \\ &- k_{13}^{2} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{2}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \cos \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \cos \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \Big] \\ &- k_{13}^{\infty} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{2}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \cos \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \cos \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \Big] \\ &- k_{13}^{\infty} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{2}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \cos \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \cos \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \Big] \\ &- k_{13}^{\infty} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{2}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \exp \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \sin \alpha_{m} \xi_{10} \Big] \\ &- k_{13}^{\infty} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{20}|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m}(\xi_{20} - \eta_{2}) \exp \alpha_{m} \eta_{1}^{(k)} \sin \alpha_{m} \eta_{20} \Big] \\ &- k_{14}^{\infty} \Big[\frac{1}{2ia\gamma} e^{i\eta|\xi_{20} - \eta_{20}|} - \frac{1}{a}$$

здесь $\Psi(\zeta_0)$ – кусочно-постоянная функция, определяющая значения электрического потенциала на электродах. Ψ – угол между нормалью к контуру C и осью x_1 в точке $\zeta \in C$. Ядра $g_2(\zeta, \zeta_0)$, $g_2(\zeta, \zeta_0)$ являются сингулярными (типа Гильберта). остальные ядра в силу предположения о гладкости контура C могут обладать не более чем слабой особенностью.

Следует отметить, что действие лицейных источников на основаниях слоя должно вызывать появление электрических зарядов разных знаков на активных электродах. Поэтому в (3.16) следует принять $P_1^* = -P_2^*$, $Q_1^* = -Q_2^*$. При нарушении этого требования система (3.16) становится неразрешимой.

Вычисляя функции $\nu(\zeta)$ и $f(\zeta)$ из системы (3.16), по формулам (3.6) с привлечением интегральных представлений (3.15) можно определить все компоненты электроупругого поля в слое.

Найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов $q_{(\beta)}$ на j-м электроде Вводя параметризацию контура C с помощью равенства $\zeta = \zeta(\beta)$ ($0 \le \beta \le 2\pi$) и учитывая то, что ловерхность отверстия сопряжена с вакуумом, запишем

$$q_{j}(\beta) = D_{\alpha}^{(j)}, \quad \beta_{2j-1} < \beta < \beta_{2j} \quad (j = 1, 2)$$
 (3.17)

Здесь $D^{(j)}(\beta)$ представляет собой амплитуду нормальной компоненты вектора электрической индукции на *ј*-м электроде, величины β , определяют расположение электродов

В силу (3.6), (3.15), (3.17) находим

$$q_{j}(\beta_{0}) = q_{j}^{\bullet}(\beta_{0}) + \sum_{k=1}^{1} Q_{k}^{*} R_{k}(\eta_{2}, \zeta_{0}) \quad \left(\zeta_{0} \in C_{\phi_{j}}\right)$$

$$q_{j}^{*}(\beta_{0}) = -\frac{\lambda_{1}}{4a} \int f(\zeta) \operatorname{Im} \left[e^{\alpha_{0}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_{0})}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \zeta_{0})}{2a} \right] \right] ds$$

$$R_{k}(\eta_{2}, \zeta_{0}) = \frac{1}{2a} \operatorname{sign}(\eta_{2} - \xi_{20}) \operatorname{sin} \psi_{0} + \frac{1}{4a} \operatorname{Re} \left[e^{\alpha_{0}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a} (\overline{\mu}_{k} + \zeta_{0}) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a} (\mu_{k} - \zeta_{0}) \right] \right]$$
(3.18)

где C, — часть контура C, на которой расположен J-й электрод.

Интегрируя выражение (3.18) по переменной β_0 в пределах от β_{2j-1} до β_{2j} , получим амплитудное значение суммарного заряда Q_j *j*-го электрода, отнесенное к единице его длины. Ток. протекающий через данный электрод и равный току проводимости в цепи генератора, можно определить по формуле

$$I_{j}(t) = \operatorname{Re}\left\{ i \omega e^{-i\omega t} \int q_{j}(\beta_{0}) s'(\beta_{0}) d\beta_{0} \right\}, \quad s'(\beta_{0}) = \frac{ds}{d\beta_{0}}$$
(3.19)

4. Обратная задача

Возращаясь к поставленной в п. 2 задаче управления, запишем ее в формализованном виде. Амплитуда суммарного заряда /-го электрода с учетом (3.18) может быть представлена в форме

$$Q_{j} = Q_{j}^{\bullet} + Q_{j}^{(\Lambda)}$$

$$Q_{j}^{\bullet} = \int_{\beta_{2j-1}}^{\beta_{2j}} q_{j}^{\bullet}(\beta_{0}) x^{\bullet}(\beta_{0}) d\beta_{0} \qquad (\beta_{2j-1} < \beta_{0} < \beta_{2j}, \quad j = 1, 2)$$
(4.1)

Здесь $Q_{\ell}^{(\Lambda)}$ – дополнительный заряд появляющийся вследствие действующих на заданных участках $x_{2} \in [b,d]$ оснований слоя усилий

сдвига $p(x_2,t)$ или зарядов $q(x_2,t)$ Величину $Q^{(1)}$ можно определить по формуле

$$Q_{j}^{(\Lambda)} = \int_{\beta_{2j+1}} q_{j}^{*}(\beta_{0}) s'(\beta_{0}) d\beta_{0} \qquad (\beta_{2j+1} < \beta_{0} < \beta_{2j}, \ j = 1, 2)$$

$$q_{j}^{*}(\beta_{0}) = \int_{C} \left\{ \int_{\delta}^{d} \Lambda(\eta_{2}) f'_{(\Lambda)}(\eta_{2}, \zeta) d\eta_{2} \right\} G(\zeta, \zeta_{0}) ds + g \int_{\delta} Q(\eta_{2}) L(\eta_{2}, \zeta_{0}) d\eta_{2}$$

$$L(\eta_{2}, \zeta_{0}) = R_{t}(\eta_{2}, \zeta_{0}) - R_{2}(\eta_{2}, \zeta_{0})$$

$$G(\zeta, \zeta_{0}) = -\frac{1}{4a} \operatorname{Im} \left\{ e^{i \pi} \left[\operatorname{ctr} \frac{\pi(\zeta - \zeta_{0})}{2a} + \operatorname{ctr} \frac{\pi(\overline{\zeta} + \zeta_{0})}{2a} \right] \right\}$$

$$(4.2)$$

где $f_{(\Lambda)}(\eta_1, \zeta)$ – "стандартное" решение системы (3.16), соответствующее действию в точках $x_2 = \eta_2$, $x_1 = \eta_1 = 0$ и $x_1 = \eta_1^{-1} = d$ линейных источников (силы или заряда) единичной интенсивности Гюд функцией $\Lambda(\eta_2)$ понимается либо интенсивность усилий $P(\eta_2)$, либо интенсивность зарядов $Q(\eta_2)$, интерпретируемых в качестве управления. Величина g = 0, если $\Lambda(\eta_2) = P(\eta_2)$ и g = 1 при $\Lambda(\eta_2) = Q(\eta_2)$.

Равенство (4.2) удобно записать в следующем виде

$$Q_{j}^{(\Lambda)} = \int_{b}^{a} \Lambda(\eta_{2})m_{1}(\eta_{2})d\eta_{1} \quad (j = 1, 2)$$

$$m_{j}(\eta_{2}) = \int_{\beta_{1,-1}}^{\beta_{1}} S_{j}^{(\Lambda)}(\eta_{2}, \zeta_{0})s'(\beta_{0})d\beta_{0}$$

$$\Lambda(\eta_{2}, \zeta_{0}) = -\frac{\vartheta_{1}}{4a} \int_{c} f'_{(\Lambda)}(\eta_{2}, \zeta) \operatorname{Im} \left[e^{i\psi_{0}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_{0})}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\overline{\zeta} + \zeta_{0})}{2a} \right] \right] ds + gL(\eta_{2}, \zeta_{0}) \quad (\zeta_{0} \in C_{\phi_{j}})$$

$$(4.3)$$

Требуя, чтобы суммарные заряды на электродах принимали заданные значения, с учетом (4.1), (4.3) приходим к соотношениям

$$Q_{j} = Q_{j}^{\diamond} + \int_{b} \Lambda(\eta_{2}) m_{j}(\eta_{2}) d\eta_{2} = k_{j} \quad (j = 1, 2)$$
(4.4)

где k, - заданные комплексные числа

S

Таким образом, обратная задача свелась к 1-проблеме моментон необходимо определять функцию управления $\Lambda(\eta_x)$ так, чтобы ныполнялись моментные равенства

$$\int_{b}^{a} \Lambda(\eta_{2}) m_{j}(\eta_{2}) d\eta_{2} = k_{j} - Q^{\dagger} \quad (j = 1, 2)$$
(4.5)

при соблюдении условия минимума нормы управления

$$\|\Lambda(\eta_2)\|_{L^{p,q}_{p,q}} = \iint_{\eta_2} |\Lambda(\eta_2)|^2 d\eta_2 \to \min$$
(4.6)

Условие (4.6) регламентирует оптимальный с точки зрения минимальных "энергетических" затрат процесс управления.

Для решения поставленной задачи введем в L^2 подпространство M с базисом $\langle \overline{m_j}(\eta_2) \rangle_{j=1}^2$. Всякий элемент $\Lambda \in L^2$ можно представить в виде

$$\Lambda(\eta_2) = \sum_{j=1}^2 \chi_j \overline{m_j}(\eta_2) + h^{\perp}$$
(4.7)

где h^2 принадлежит ортогональному дополнению M до L^2 . Константы χ_j однозначно определяются из уравнений (4.5). Имеем

$$\sum_{j=1}^{2} \chi_{j} \left(m_{l}, \overline{m_{j}} \right) = k_{l} - Q_{l}^{4} \quad (l = 1, 2)$$
(4.8)

Определитель системы (4.8) (определитель Грама) отличен от нуля, поэтому она однозначно разрешима.

В силу равенства

$$\left\|\Lambda\right\|^{2} = \left\|\sum_{j=1}^{2} \chi_{j} \overline{m_{j}}\right\|^{2} + \left\|h^{\perp}\right\|^{2}$$

и произвольности элемента h^{\perp} , из условий (4.6) получаем $h^{\perp}=0$.

Таким образом, экстремальный элемент $\Lambda(\eta_2) = \sum_{j=1}^2 \chi_j \overline{m_j}(\eta_2)$, где

константы 🎢 определяются из системы (4.8).

5. Численные результаты

В качестве примера рассмотрим слой из пьезокерамики РZT-4 [12] с круговой туннельной полостью. На пару электродов подается напряжение с разностью амплитуд потенциалов $2\Phi^*$. Требуется определить интенсивности распределения усилий сдвига $P(n_2)$ либо зарядов $Q(\eta_2)$ из условий типа (4.5) при ограничении (4.6). Система интегродифференциальных уравнений (3.16) была реализована численно по схеме метода квадратур [11].

Фиг.2 иллюстрирует изменение модуля функции оптимального управления $\lambda = |P(\eta_2)/\Phi^*|$ для значений параметров R/a = 0.1, b/a = -0.3, d/a = 0.3, $\gamma a = 3$, $k_i = 0$ (l = 1, 2) (внешняя цепь генератора напряжения "размыкается"). График величины $\delta = |Q(\eta_2)/\Phi^*|$ для тех же значений параметров представлен на фиг.3.







Фиг.2. Изменение модуля амплитуды функции оптимального управления $\lambda = \left| P(\eta_2) / \Phi^* \right|$, размыхающего цепь генератора напряжения





Фиг. 3. Изменение модуля амплитуды Фиг. 4. Изменение аргументов амплитуд функции оптимального управления оптимальных усилий сдвига и зарядов $\delta = |Q(\eta_2)/\Phi^*$, размыкающей цепь на заданных участках нагружения тенератора напряжения

Онг 5. Линии уровня модуля амплитуды веремещения в кусочно-однородном слое при действии оптимальных усилий сдвига $P(n_{2})$.



Аргументы функций оптимального управления показаны на фиг. 4. Линии уровня модуля амплитуды перемещения в слое с отнерствием при действии оптимальных усилий сдвига для этого случая даны на фиг.5.

Численное исследование показывает, что вид функции управления в значительной мере определяется частотой гармонического возбуждения, длиной и расположением участков нагружения, а также конфигурацией неоднородности.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Афинским Национальным Техническим Университетом и Институтом Механики НАН Армении.

ЛИТЕРАТУРА

- Bardzokas D, Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges. - Strength of Materials, 1994, No.7, pp.510-513 [in Russian].
- Lee E.B., Markus L. Foundations of optimal control theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1967.
- Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
- Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. 568с.
- 5. Shohat J., Tamarkin J, The Problem of Moments, New York, 1943, 140p.
- 6 Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. 551с.
- Filshtinsky V.A., Filshtinsky M.L. О выборе минимизируемого функционала при оптимальном переводе упругой пластины из начального состояния в заданное конечное // Prikl. Mekhs. 1986. Vol.22. No2, pp.90-94.
- Filshtinsky M.I., Control on fracture of a piezoceramic body with crack // Dynamics and Strength of Machines, Kharkov, 1987, Vol.15, pp.93-96.
- 9. Brebbia C.A., Telles, J.C.F., Wrobel L. Boundary element techniques Theory and applications, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity. New York: Gordon & Breach, 1988.
- Bardzokas D., Filshtinsky M.L. Electroelasticity of piecewise-uniform bodies. Sumy (Ukraine): University Book Publ., 2000. -308p. [in Russian].
- Berlincourt D.A., Curran D.R., & Jaffe H., In: Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. Physical Acoustics. Vol.1A, Mir, Moscow, 1966.

Афинский национальный технический университет, Греция Сумский государственный университет, Украина. Поступила в редакцию 31.05.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԳԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

57. Nº3, 2004

Механика

УДК 519.95

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ Габриелян М.С., Члингарян А.С.

Մ.Ս. Գարբինյան, Ա.Ս. Չլինգարյան

Շատ նպատակային բազմություններին մոտեցվան-չեղման խաղային խնդրի կայունության մասին

Գիտարկվում է ա նպատակային բազմություններին մոտեցման-չեղման խաղային իւնդրի լուծման կայունությունը, հրթ օբյեկտը ենթարկվում է հաստատուն դինամիկայով ու զծային, ոչ ստացիոնար դիֆֆծրենցիալ հավասարումների համակարգին։ Ենթադրվում է, որ նպատակային բազմությունների հետ հանդիպման հերթականությունը ֆիկսված է։ Դրա հետեանքով *Ա* – ստաբիլ բազմությունների ընտանիջից ընտրվում է մեկ ճյուղ։ Օգտագործվում են ըստ այդ ճյուղի էքստրեմալ կտորլ աս կտոր դիդքային ստրատեզիան և Ն.Ն. Կրասովսկու կողմից ուսումնասիրված՝ ըստ ինֆորմացիոն չեղումների մեկ նպատակային բազմության մոտեցման-չեղման խաղային խնդրի լուծման կայունության բեռրեմը։ Ապացուցվում է, որ ու նպատակային բազմություններին մոտեցման-չեղման խաղային կսնդրի լուծումը նույնպես կայուն է ըստ ինֆորմացիոն չեղումների։

M.S. Gabrielyan, A.S. Chlingaryan

About the solution's stability of approach-deviation to several goal sets game problem

Рассматривается устойчивость решения игровых задач сближения-уклонения с *т* делевыми множествами, когда объект подчиняется системе нелинейных нестационарных анфференциальных уравнений с постоянной динамикой. Предполагается, что последовательность встреч с целевыми множествами зафиксирована. Вследствие этого, из семействе в-стабильных мостов выбирается одла ветвь. Используются кусочно-позиционная с тратегия экстремальная к этой ветви, и теорема об устойчивости решения игровых задач сближенияудонения с одним целевым множеством относительно информационных помех. изученная Н.Н. Красовским. Доказывается, что решения игровых задач сближенияустойчивых задач сближения с *т* целевыми множествами также устойчивы относительно информационных помех.

 Постановка задачи. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\mathbf{x} = f(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{v}) \tag{1.1}$$

Здесь $f:[t_0,\infty) \times R^n \times P \times Q \to R^n$ – непрерывная функция: $P \subset R^n$. $Q \subset R^n$ – компакты, характеризующие возможности игроков.

Предполагается [1], что функция f(t, x, u, v) удовлетворяет:

1 Условию бесконечной продолжимости решения, т.е.

 $\left|x'f(t,x,u,\mathbf{v})\right| \leq \chi(1+\left\|x\right\|^{2}) \text{ при } (t,x,u,\mathbf{v}) \in [t_{0},\infty) \times \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q}.$

гле х - постоянное число:

2. Для любой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^{n+1} = [\{t, x\} : t \in [-\infty, \infty], x \in \mathbb{R}^n]$ условию Липшица: $\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \le \lambda_G \|x^{(1)} - x^{(2)}\|$ при $(t, x^{(i)}, u, v) \in G \times P \times Q$ (i = 1, 2).

Предполагается также, что выполняется условие седловой точки маленькой игры ([2], с.38), т.е.

51

$$\min_{u \in P} \max_{u \in Q} s'_{\bullet} f(t_{\bullet}, x_{\bullet}, u, v) = \max_{u \in P} \min_{u \in P} s'_{\bullet} f(t_{\bullet}, x_{\bullet}, u, v)$$

$$(1.2)$$

$$\pi p_{H} s_{\bullet} \in \mathbb{R}^{*} (t_{\bullet}, x_{\bullet}) \in [t_{0}, \infty) \times \mathbb{R}^{*}.$$

Допустим, что заданы замкнутые и ограниченные множества M_k ($k \in I$) и N в пространстве $\{I, x\} \in [-\infty, \infty] \times R^*$ (I = (1, 2, ..., m)). И плата определяется равенством

$$\gamma(x[\cdot]) = \sigma(\tau_1(x[\cdot]), \tau_m(x[\cdot])) \tag{1.3}$$

Здесь $x[\cdot] = \{x[t]: t \ge t_0\}$ — реализовавшееся движение системы (1.1):

 $\sigma: [t_0, \infty]^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ – заданная функция:

 $\tau_k(x[\cdot]) = \min\{\tau : \tau \in T(x[\cdot], M_1, N), r_{A}e\}$

 $T(x[\cdot], M_k, N) = \{\tau : \tau \ge t_0, (t, x[t]) \in N\}$ при $t_0 \le t \le \tau, (\tau, x[\tau]) \in M_k\};$ в случае $T(x[\cdot], M_k, N) = \emptyset$ полагаем $\tau_k(x[\cdot]) = \infty$ $(k \in I)$ [1].

Предпологается [1]. что функция о удовлетворяет следующим условиям:

I. На множестве $[t_0,\infty)^n$ функция σ принимает конечные значения и непрерывна.

II $\sigma(\tau_1,...,\tau_m) = \infty$, если хотя бы одно $\tau_i = \infty$,

III. Множество $\Sigma(c) = \{(\tau_1, ..., \tau_m) : \sigma(\tau_1, ..., \tau_m) \le c\}$ ограниченно для любого конечного числа c:

IV. Неравенство $\sigma(\tau_1,...,\tau_1,...,\tau_m) \leq \sigma(\tau_1,...,\tau',...,\tau_m)$ справедливо для любых наборов $(\tau_1,...,\tau',...,\tau_m)$ н $(\tau_1,...,\tau',...,\tau_m)$, удовлетворяющих неравенству $\tau' \leq \tau'$.

Сформулируем следующие игровые задачи:

Задача 1. Заданы начальные условия $\{t_0, x_0\}$ и система (1.1) Требуется найти КПС $U \neq u(t, x, \tau_1, ..., \tau_m)$ (кусочно-позиционную стратегию $U \neq u(t, x, \tau_1, ..., \tau_m)$), обеспечивающую встречи

$$\{\tau_s, x[\tau_s]\} \in M_s, \qquad \{t, x[t]\} \in M_s;$$

$$\{t, x[t]\} \in N \qquad (t_o \le t < \tau_b; \ k \in I)$$

$$(1.4)$$

и среди них найти КПС $U^{v} \div u(t, x, \tau_1, ..., \tau_n)$, удовлетворяющую условию минимакса

$$\sup_{x \in I} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, U^0]) = \min_{U} \sup_{x \in I} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, U])$$
(1.5)

Задача 2. Заданы начальные условия {*t*₀, *x*₀} и система (1.1). Требуется найти КПС <u>Из</u> *v*(*t*, *x*, *x*₁,...,*x*_m). исключающую котя бы одну из встреч

(1.4). Если такой стратегии не существует, то требуется найти хотя бы КПС $V^0 \neq \mathbf{v}^{(t)}(t, x, \tau_1, ..., \tau_m)$, удовлетворяющую условию

$$\inf_{x_{1}} \gamma(x[\cdot, t_{0}, x_{0}, V^{0}]) = \sup_{U} \inf_{x_{1}} \gamma(x[\cdot, t_{0}, x_{0}, V])$$
(1.6)

здесь нижняя грань считается по всем движениям, для которых $\gamma(x[\cdot])$ из (1.3) оказывается конечной [1].

В случае, когда последовательность встреч с целєвыми множествами не зафиксирована, для этих игровых задач построено семейство множеств W $i \in I \setminus \{l_1, ..., l_{m-j}\}$) (j = 0, ..., m-1), которые являются u -стабильными относительно целевых компактов $L_1(t_i) \in I \setminus \{l_1, ..., l_{m-j}\}$) [1]. Причем мосты $W_i(\cdot)$ обрываются на соответствующих целевых множествах не позже, чем в момент времени 9. И определяется КПС $U^{(e)}$, экстремальная к системе мостов $W_i(t_i) i \in I \setminus \{l_1, ..., l_{m-j}\}$) j = 0, ..., m-1 [1].

2. Устойчивость решения по отношению к информационным помехам.

Рассмотрим вопросы устойчивости решения вышепоставленных задач во отношению к информационным помехам. Пусть последовательность астреч с целевыми множествами зафиксирована. Тогда мы имеем моменты встреч $_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m \leq 9$ с целевыми множествами $M_1,...,M_m$ соответственно. Здесь $[t_0, 9]$ – интервал, на котором рассматриваются авижения. В случае фиксированности последовательности встреч с из семейства и – стабильных мостов $W_1(t_1 | t \in I \setminus \{t_1, ..., t_{m-k}\})$ k = 0,...,m-1 выбирается одна вствь u – стабильных мостов $W_1(t_1, ..., t_{m-k})$. здесь k = 0,...,m-1.

Итак, при прицеливании на множество M_1 , т.е. при $t \in [t_0, t_1]$ нужно воспользоваться управлением $u^r[t]$ экстремальным к мосту $W_0(\cdot)$; аналогично для множества M_2 – берем управление $u^r[t]$ $t \in [t_1, t_2]$ экстремальное к мосту $W_1(t_1)$, где t_1 – момент встречи с целевым иножеством M_1 и так далее.

Т.к. конструктивные движения являются пределом ломаных Эйлера, то целесообразно определение устойчивости дать для ломаных Эйлера (для конструктивных движений оно получается автоматически, если взять δ→0).

Определение устойчивости. Скажем, что КПС $U^{(e)} \div u^{(e)}(t, x, t, ..., t_{-})$. экстремальная к семейству мостов $W_{1}(t_{1}, t_{2}, ..., t_{m-k})$ (k = 0, ..., m-1), гарантирует решение задачи сближения, устойчивое по отношению к информационным помехам, если для любых $\delta > 0$ и $\zeta > 0$ можно указать числа $\varepsilon_1(\zeta, \delta), \varepsilon_2 = \varepsilon_1(\varepsilon_1(\zeta, \delta)), \dots, \varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta))$ такие, что управление

$$u_{\Delta}^{i}[t] = u^{i(t)}(\tau_{i}, x_{\Delta}^{i}[\tau_{i}], \{t_{k}\}), \ \tau_{i} \leq t < \tau_{i+1}, \ (k = 1, ..., m)$$
(1.7)

к моментам гарантирует попадание ломаной Эйлера $x_{\Delta}[t]$ $(t \ge t_{\Delta})$ в $\varepsilon_{k}(\zeta, \delta)$ -окрестности целевых множеств M k = 1,...,m соответственно, при сохранении его в $\varepsilon(\zeta, \delta)$ -окрестности множества N, если только полуинтервалы $[\tau_{i}, \tau_{i+1})$ (i = 0, 1, ...) произвольного разбиения Δ полуоси $[t_{0}, \infty)$ удовлетворяют условиям $\tau_{i+1} - \tau_{i} \le \delta$ (i = 0, 1, ...). Причем $x_{\Delta}[\tau_{i}]$ эго результаты неточного измерения фазового вектора системы $x_{\Delta}[\tau_{i}]$, в начальный момент времени они удовлетворяют соотношению

Здесь величина $\varepsilon(\zeta, \delta)$ определяется из условия $\varepsilon(\zeta, \delta) = \max_{k=1,...,m} (\varepsilon_k(\zeta, \delta))$. Докажем следующее утверждение:

Теорема 2.1. Пусть для всех позиций $\{t_{*}, x_{*}\}$ и векторов *s*. маленькая игра имеет седловую точку. Предположим, что существует семейство u = стабильных мостов k = 0, ..., m - 1, обрывающееся к моментам времени i = 1, ..., m на целевых множествах $M_{1}, ..., M_{m}$ соответственно, и пусть начальная позиция $\{t_{0}, x_{0}\}$ принадлежит множеству $W_{0}(\cdot)$. Предположим также, что сечения $W_{k}(t)$ множеств $W_{k}(t_{1}, t_{2}, ..., m - 1)$ гиперплоскостями t = const есть строго выпуклые множества. Тогда $\text{KIICU}^{(e1} \div u^{e}(t, x, t_{m}, t_{m})$, экстремальная к семейству мостов $W_{1}(t_{1}, t_{2}, ..., m - 1)$ гиперплоскостями $t = \text{const} [t_{0}, t_{1}]$ $\varepsilon_{1}(\zeta, \delta)$ отклонение ломаной Эйлера от целевого множества M_{1} , на интервале $[t_{1}, t_{2}] = \varepsilon_{2}(\varepsilon_{1}(\zeta, \delta))$ -отклонение от целевого множества M_{2} , и так далее, на интервале $[t_{m-1}, t_{m}] = (t_{m-1}, \delta)$)-отклонение ломаной Эйлера от целевого множества M_{2} и так далее, на интервале $[t_{m-1}, t_{m}] = (t_{m-1}, t_{m})$

Доказательство.

Здесь, как и в случае *m* = 1, используется основная оценка, которая имеет следующий вид:

$$\rho^{2}(t) \leq \rho^{2}(t_{*})e^{2\lambda(t-t_{*})} + (\varphi(\delta) + \varphi_{*}(\zeta))\frac{1}{2\lambda}[e^{2\lambda(t-t_{*})} - 1]$$
(1.8)

где $\rho^2(t) = \left\| x_{t}^{(1)}[t] - x^{(2)}(t) \right\|^2$, а $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$ $(t, \le t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\mathbf{x}^{(1)}[t] = f(t, \mathbf{x}^{(1)}[t], u^*, \mathbf{v}[t])$$
(a)

$$x^{(1)}(t) \in co[f: f = f(t, x^{(2)}(t), u, v); u \in P, v = v^*]$$
 (b)

с начальными условиями $x^{(1)}[t_*] = x_*^{(1)}, \quad x^{(2)}(t_*) = x_*^{(2)}$. В (а) и (b) постоянные векторы $u^* \in P$ и $v^* \in Q$ определяются из условий:

$$\max_{\mathbf{v}\in\mathcal{Q}} s^{*} f(t_{\bullet}, x^{*}, u^{*}, \mathbf{v}) = \min_{u\in\mathcal{P}} \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{Q}} s^{*} f(t_{\bullet}, x^{*}, u, \mathbf{v})$$
(1.9)

$$\min_{u \in P} s^* f(t_{\bullet}, x^*, u, v^*) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s^* f(t_{\bullet}, x^*, u, v)$$
(1.10)

В (1.9) и (1.10) предполагается, что *s* и *x* — некоторые векторы, удовлетворяющие оценкам: $\|s^* - (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})\| \le \sigma(\zeta)$, $\|x^* - x_*^{(1)}\| \le \zeta$, причем $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$, *t*. — начальный момент, а $t \ge t_*$ — произвольный консеный момент времени.

Заметим, что информационные помехи в оценке (1.8) характеризуются слагаемым $\varphi_{\bullet}(\zeta) \frac{1}{2\lambda} [e^{2\lambda(t-t_{\bullet})} - 1].$

Вернемся к доказательству теоремы. Последовательность встреч с пелевыми множествами зафиксирована. Поэтому сначала возьмем интервал $[t_0, t_1]$ и рассмотрим сближение произвольной ломаной Эйлера с целевым множеством M_1 . В этом случае из выбранной ветви u - стабильных мостов $W_k(t_1, t_2, ..., t_{m-k})$ выбирается мост $W_0(\cdot)$. Согласно условиям доказываемой теоремы. сечения $W_0(t)$ множества $W_0(\cdot)$ гиперплоскостями t = сопst являются строго выпуклыми. Тогда для каждой позиции $\{t, x\}$ ближайшая к ней позиция $\{t, w(t, x)\} \in W_0(t)$ будет единственной. следовательно вектор s(t, x) = x - w(t, x) также определяется единственным образом, причем от x он зависит равномерно непрерывно. Т.е.

$$|s(t, x_{\bullet}) - s(t, x^{\bullet})| \leq \sigma(\zeta) \operatorname{прu} ||x_{\bullet} - x^{\bullet}|| \leq \zeta$$
(1.11)

для всех $t \in [t_0, t_1]$: $x_* \in E_n$, $x^* \in E_n$; здесь $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$. Таким образом, малые погрешности измерения фазовой точки x_* влекут за собой малые погрешности в определении вектора s_* направленного на x_* на ближайшей точки сечения $W_0(t)$ множества $W_0(\cdot)$.

Пусть первый игрок выбирает произвольное разбиение Δ нолуоси $[t_0,\infty)$, удовлетворяющее условию $\tau_1 - \tau_{i+1} \leq \delta$, где $\delta > 0$ есть произвольное положительное маленькое число, причем $\tau_0 = t_0$.

55

Построим на интервале $[t_0, t_1]$ ломаную Эйлера $x_{\Delta}[t] = x_{\Delta}[t, t_0, x_0, u_{\Delta}[\cdot], v[\cdot]]$. соответствующую управлению, экстремальному к мосту $W_0(\cdot)$:

 $u_{\Delta}[t] = u^{(\epsilon)}(\tau_i, x_{\Delta}^{\epsilon}[\tau_i])$, где $t_0 \leq \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \leq t_1$ (i = 0, 1, ...) (1.12) Здесь $x_{\Delta}[\tau_i]$ это результаты неточного измерения фазового вектора системы $x_{\Delta}[\tau_i]$. которые в начальный момент времени задаются условием $\|x_{\Delta}[t_0] - x_{\Delta}^{\epsilon}[t_0]\| \leq \zeta$. Тогда согласно теореме 56.1 [2], построенная ломаная Эйлера, сохраняясь в некоторой $\varepsilon_1(\zeta, \delta)$ -окрестности моста $W_0(\cdot)$, т.е. в $W_0^{(\epsilon_1)} = [\{t', x'\} : t_0 \leq t' \leq t_1, \|x' - x\| \leq \varepsilon_1(\zeta, \delta), x \in W_0(\cdot)], \kappa$ моменту $t = t_1$ нопадет в $\varepsilon_1(\zeta, \delta)$ -окрестность множества М., т.е. в $M_1^{(\epsilon_1)} = [\{t', x'\} : t' = t_1, \|x' - x\| \leq \varepsilon_1(\zeta, \delta), x \in M_1].$ Причем $\varepsilon_1(\cdot)$ удовлетворяет условию:

 $\varepsilon_1^{-}(\zeta,\delta) \leq \rho^2(t_0)e^{2\lambda(t-t_0)} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta))\frac{1}{2\lambda}[e^{2\lambda(t-t_0)} - 1]. \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.$

Тогда имеют место оценки

 $\rho(\{t, x_{\Delta}^{*}[t]\}, W_{0}(\cdot)) \le \varepsilon_{1}(\zeta, \delta)$ при $t_{0} \le t \le t_{1}$ $\rho(\{t_{1}, x_{\Delta}^{*}[t_{1}]\}, M_{1}) \le \varepsilon_{1}(\zeta, \delta)$

причем $\varepsilon_1(\zeta, \delta) \to 0$ при $\zeta \to 0$ и $\delta \to 0$.

Теперь возьмем интервал $[t_{i+1}]$ и рассмотрим сближение ломаной Эйлера с целевым множеством M_2 . Для этого интервала из ветви u =стабильных мостов выбирается мост $W_1(t_1)$. Для каждой позиции $\{t, x\}$ $(t \in [t_1, t_2])$ вектор s(t, x) = x - w(t, x) будет единственным. здесь $\{t, w(t, x)\} \in W_1(t)$. Причем от x этот вектор зависит равномерно непрерывно. Для этого интервала роль информационных помех будет играть величина $\varepsilon_1(\zeta, \delta)$. т.е. имеют место условия $\|x_{\delta}[t_1] - x_{\Delta}^*[t_1]\| \le \varepsilon_1(\zeta, \delta)$, где $t_1 \le \tau_1 < \tau_{1,1} \le t_2$. Тогда согласно теореме 56.1 [2] экстремальное к мосту $W_1(t_1)$ управление

 $u_{\Delta}^{*}[t] = u^{(d)}(\tau_{i}, x_{\Delta}^{*}[\tau_{i}]), \text{ for } t_{1} \leq \tau_{i} \leq t < \tau_{i+1} \leq t_{2} \qquad ($

гарантирует попадание ломаной $x^{*}[t]$ $t \in [t_1, t_1]$ в $M_2^{(\epsilon_2)}$ к моменту $t = t_2$ при сохранении ее в $W_1^{(\epsilon_1)}(t_1)$. Здесь $W_1^{(\epsilon_2)}(t_1)$ и $M_2^{(\epsilon_3)}$ есть некоторые $\varepsilon_2(\zeta, \delta)$ -окрестности множеств $W_1(t_1)$ и M_2 соответственно, т.е.
$$\begin{split} & W_1^{(t_1)} = [\{t', x'\} : t_1 \le t' \le t_2, \ \|x' - x\| \le \varepsilon_2(\cdot), \ x \in W_1(t_1)], \\ & M_2^{(t_1)} = [\{t', x'\} : t' = t_2, \ \|x' - x\| \le \varepsilon_2(\cdot), \ x \in M_2]. \\ & \Pi \text{ричем} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta, \delta)) \qquad \text{удовлетворяет} \qquad \text{условию:} \\ & \varepsilon^*(\zeta, \delta) \le \rho^2(t_1) e^{2\lambda(t-t_1)} + (\phi(\delta) + \phi_*(\varepsilon_1(\zeta, \delta))) \frac{1}{2\lambda} [e^{2\lambda(t-t_1)} - 1], \quad \text{где} \quad t_1 \le t \le t_2. \\ & \text{Тогда имеют места оценки} \end{split}$$

$$\begin{split} &\rho(\{t, x_{\Delta}[t]\}, W_1(t_1)) \leq \varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta, \delta)) \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2 \\ &\rho(\{t_2, x_{\Delta}[t_2]\}, M_2) \leq \varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta, \delta)) \end{split}$$

причем $\varepsilon_2(\zeta, \delta) \to 0$ при $\varepsilon_1(\zeta, \delta) \to 0$, т.е при $\zeta \to 0$ и $\delta \to 0$

Продолжая эти рассуждения, на конечном *m* -ом интервале $[t_{m-1}, t_m]$ будем иметь $\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta) = \varepsilon_{m-1}(\varepsilon_{m-2}(\varepsilon_{m-3}(\cdot)))$. Соответственно величине (6) по теореме 56.1 [2] получим, что экстремальное к мосту $\mathcal{W}_{m-1}(t_1, t_2, ..., t_{m-1})$ управление

 $u_{\Delta}[t] = u^{(c)}(\tau_i, x_{\Delta}[\tau_i]), \text{ ray } t_{m-1} \leq \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \leq t$

прантирует попадание ломаной $X_{\Lambda}[t]$ к моменту $t = t_m$ в $M_m^{(t_m)}$ при сохранении её в $W_{m-1}^{t_m}(t_1, t_2, ..., t_{m-1})$. Здесь $W_{m-1}^{t_m}(t_1, t_2, ..., t_{m-1})$ и $M_m^{(t_m)}$ есть векоторые $\varepsilon_m(\zeta, \delta)$ -окрестности множеств $W_{m-1}(t_1, t_2, ..., t_{m-1})$ и M_m соответственно, т.е.

$$\begin{split} & W_{m}^{(t_{1},\ldots,t_{m-1})} = \left[\{t',x'\} : t_{m-1} \leq t' \leq t_{m}, \ \left\| x' - x \right\| \leq \varepsilon_{m}(\zeta,\delta), \ x \in W_{m-1}(t_{1},\ldots,t_{m-1}) \right] \ & \\ & M_{m}^{(t_{m})} = \left[\{t',x'\} : \ t' = t_{m}, \ \left\| x' - x \right\| \leq \varepsilon_{m}(\zeta,\delta), \ x \in M_{m} \right]. \end{split}$$

Причем $\varepsilon_m(\zeta, \delta) = \varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\cdot))$ удовлетворяет условию: $\varepsilon_m^2(\zeta, \delta) \le \rho^2(t_{m-1})e^{2\lambda(t-t_{m-1})} + (\phi(\delta) + \phi_*(\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta)))\frac{1}{2\lambda}[e^{2\lambda(t-t_{m-1})} - 1]$

 $\operatorname{FAE} \ l_{m-1} \leq t \leq l_m \,.$

p({

Тогда имеют место оценки

$$t, x_{\Delta}[t]\}, W_{m-1}(t_1, t_2, ..., t_m)) \le \varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta))$$
 при $t_{m-1} \le t \le t_m$
 $\rho(\{t_m, x_{\Delta}[t_m]\}, M_m) \le \varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta))$

аричем $\varepsilon_m(\zeta, \delta) \to 0$ при $\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta) \to 0$, т.е при $\zeta \to 0$ и $\delta \to 0$.

Т.е. приходим к следующему результату: взяв КПС $U^{1\times i} \div u_{\Delta}^{*}[\cdot]$. экстремальную к семейству мостов $W_{k}(t_{1},t_{2},...,t_{m-k})$, получаем, что соответствующая ей ломаная Эйлера $x_{\Delta}^{*}[t] = x_{\Delta}^{*}[t_{1}t_{0},x_{0},u_{\Delta}[\cdot],v[\cdot]]$ при выполнении всех условий теоремы 2.1 к моменту $t = t_{1}$ попадает в $M_{1}^{(v_{1})}$, к моменту $t = t_{2}$ попадает в $M_{2}^{(v_{2})}$ и так далее. К моменту $t = t_{m}$ ломаная попадает в M Причем отклонения от k-1-ого целевого множества для k-ого целевого множества являются информационными помехами, т.е. $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\varepsilon_{k-1}(\zeta, \delta))$, и они стремятся к нулю при $\zeta \to 0$ и $\delta \to 0$. Т.е. для данных информационных помех ζ и диаметра δ произвольного разбиения Δ построены $\varepsilon_1(\zeta, \delta), ..., \varepsilon_m(\zeta, \delta)$. характеризующие отклонения ломаной Эйлера x.[t] системы (1.1) от целевых множеств M соответственно. Тем самым вышесформулированная теорема 2.1 полностью доказана.

Замечание. Для того, чтобы получить вышесформулированную теорему 2.1 для конструктивных движений, надо в величинах $\varepsilon_1(\zeta, \delta), \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta, \delta)), ..., \varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta))$ принять $\delta = 0$, т.е. перейти к пределу в ломаных Эйлера при $\delta \to 0$.

Если воспользоваться семейством V-стабильных мостов и $\operatorname{KIIC} V^{(e)} \div v_{\Delta}^{*}[i]$ экстремальной относительно этого семейства [1], то при предположении фиксированности последовательности встреч с целевыми множествами можно сформулировать и доказать теорему об устойчивости решения второй игровой задачи относительно информационных помех, аналогичную теореме 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

- Габрислян М.С., Субботин А.И. Игровые задачи о встрече с и целевыми множествами. // ПММ. 1979. Т.43. №2. С. 204-208.
- Красонский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.

Ереванский государственный университет

4

Поступила в редакцию 29.07.2004

КОНТЕКТИТЕ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Միրանիկա

57, Nº3, 2004

Механика

539.4, 621.891

О СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ С ПИКОВЫМИ ПЕРЕГРУЗКАМИ Гаспарян С А., Саркисян Н. Н, Шекян Л. А.

U. Հ. Գասպարյան, Ն.Ն. Սարզսյան, Լ.Ա. Շեկյան Գազաբնային գերքեռնվածքով պատահական բեռնավորման ղեպքում նրկարակեցության վիճակագրական նմանակների վերաբերյալ

Առաջարկվում է հոգմածային երկարակեցության վիճակագրական նմանակ Վեյբուլի ամենաթույլ օգակի սկզբունքի հիման վրա երկարակեցության գնահատման դհպբում կարճատև գազաթնային զիբբեռնվածբի ազդեցության մեկնաբանման համար Մեթոդը մշակված է կառուցվածբի բեռնավորման պատահական պրոցեսի համար փոփոխական լարումների Ռեյեյի և նորմալ բաշխումներով Լկաբագրման ենթաղությամբ

S. H. Gasparyan, N. N. Sargsyan, L. A. Shekyan On Statistical Models of Fatigue Life at Random Londing with Single Overloads

Осмовой современных методов расчетов деталей манши и конструкций на усталостную врачность и долговечность при действии циклических напряжений является условне чинейного суминрования усталостных повреждений с мероя, принимаемой равной единице к иохенту исчерпания несущей способяюсти, предложенное Пальмгреном Майнером При этом, как правило, параметры, определяющие напряжения при случайном нагружении, визывающие усталостное повреждение, рассматриваются как детерминированные, министрических характеристик процесса нагружения в виде функции испределения напряжений.

По общирным эксплуатационным данным, обработанным в [1] для стальных образцов, значение меры повреждения D = 0,75...1.19, что вполне соответствует оценке случайных колебаний о правомерности линейной гилотезы. Определение оптимальных конструктивных параметров усталостной долговечности представляет интерес особенно для случаев неблагоприятных режимов нагружения, когда расширение полосы нагружения, особенно при спектрах с пиковыми, весьма кратковременными перегрузками, приводит к значениям D = 0,1...0,2 и менее.

Известно, что нагрузочные условия, наблюдаемые как узко- и широковолосые случайные процессы изменения напряжений по времени, у большинства машин и оборудования в областях энергетики, транспортных средств и разнородных производств в подавляющих случаях носят потастический характер. При рассмотрении проблемы надежности конструхций необходимо учитывать влияние кратковременных шиковых перегрузок. Решение этой проблемы требует определения вероятностных характеристик этого процесса, особенно распределение частоты перегрузок. В случае узкополосого случайного процесса амплитуды выряжений описываются функцией распределения максимумов этого процесса. При рассмотрении характерных видов энергетических спектров нагруженности конструкций (фиг. 1) при различных условиях их эксплуатации видно, что положение и величина пиков спектров определяются динамическими свойствами масс механических систем и скорости движения объекта, и случайный процесс нагружения можно считать узкополосным [2]. Поэтому случай нагружения широкополосого спектра заменяется узкополосым процессом на основе выделения амплитуд напряжений, причиняющих накопление усталостных повреждений посредством хорошо известных методов максимумов, или "дождя" [1] - более удобного для программирования и автоматизации обработки экспериментальных данных нагружения. Продолжительное представление нагружение рассматривается как алияний среды на нормальный стационарный случайный процесс. уловлетворяющий эргодической гипотезе и может быть описан нормальным распределением стохастических значений переменных напряжений.



Фиг. | Характерный вид энергетических спектров нагруженности конструкций.

При схематизации случайного стационарного процесса изменение напряжений в детали во времени по одному из вышеупомянутых методов по определяемой плотности вероятности распределения максимумов напряжений, а также по среднему числу их в единицу времени можно рассчитать долговечность детали.

Оценка долговечности может быть осуществлена посредством опытов. производимых на вибрационных стендах, симулирующих реальные процесса **УСЛОВИЯ** заданного нагружения, используя условие эквивалентности реального S₄(ω) и экспериментального S⁴₄(ω) нагружения, посредством $S'_{\sigma}(\omega) = S'_{\sigma}(\omega)$, полученным спектров определением спектральной плотности процесса, стандартного отклонения переменных напряжений И функции вероятностной плотности мгновенных значений напряжений распределения В элементе конструкции как результат статистической обработки данных для конкретной реальной системы. Подобные испытания проводились на установке программного нагружения, разработанной и изготовленной в институте механики АН Украины, работающей по низкочастотному (до 30

60

Γ<u>μ</u>) резонансному принципу. B результате соответствующей обработки данные аппроксимированы статистической нормальным законом распределения случайной величины посредством проверки х² Пирсона с выбранным уровнем значимости Р_в в критерием согласия пределах 0,01...0,1 [2]. В качестве примера на фиг. 2 иллюстрирована функция плотности напряжений, возникающих в раме конструкции типа цистерна автомобильного транспорта по дорогам различного покрова на основе исследований, проведенных в зависимости от скорости движения в пределах v=4...20 м/сек, что подтверждает правомерность использования закона распределения. Предположение о нормальном нормального распределении напряжений оправдывается результатами непосредственных измерений напряжений в рамах тележек локомотивов. электровозов и в полуосях автомобилей [1].





построенные при $\sqrt{(\sigma^*)} = 60 M \Pi a$.

Райсом [3] получены формулы для плотности вероятности и среднего числа максимумов в единицу времени, которые для использования усталость дсталей машин при случайном расчетов на нагружении в [1]. Приведенная окончательная приведены формула Райса λля вероятности максимумов нормального стационарного ПЛОТНОСТИ случайного процесса, выраженная через безразмерную величину h = $\xi_{\rm p}/\sigma_{\rm s}$, имеет вид

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[v e^{-\frac{h^2}{2v^2}} + \sqrt{2\pi(1-v^2)} h e^{-\frac{h^2}{2}} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}h\right) \right]$$
(1)

где ξ_{ит} / — — отношение среднего числа нулей процесса к среднему числу экстремумов. Таким образом, плотность распределения максимумов

зависит лишь от одного параметра $v^2 = 1 - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_c^2 \sigma_c^2}$ (см. [1]), который может

изменяться от 0 до 1. При v-о получается закон распределения Релея

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}h\right) \to 1$$
 и $f(h) \to h \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$. При v $\to 1$ второе слагаемое

в квадратных скобках (1) стремится к нудю, т.е. получается нормальный закон распределения относительных максимумов случайного процесса.

Таким образом, если входной случайный процесс является гауссовским и динамическая система линейна, то функция распределения вероятности долговечности при заданном значении напряжений в элементах конструкции может быть выражена нормальным законом или законом распределения Релея.

Для обеспечения интерпретации влияния приложенных пиковых перегрузок с целью оценки долговечности предложено статистическое исследование усталостного разрушеня на основе концепции Вейбулла "слабого звена" [4]. В соответствии с этой концепцией предполагается, что каждый элемент конструкции состоит из звеньев наподобие цепи. Тогда стохастические модели долговечности элемента (цепи) и его слабейшего звена эквивалентны. В предположении, что усталостные долговечности всех звеньев независимые случайные величины, распределенные одним и тем же законом F(x) с функцией плотности f(x), долговечность элемента определится законом распределения наименьшего значения порядковой статистики выборки размера.

Предполагается, что вариация кумулятивного усталостного повреждения при случайном стационарном линейном процессе динамического нагружения может быть аппроксимирована нормальной функцией распределения мгновенных значений циклических напряжений в элементах конструкций. Исходя из предположения, что ресурс звена распределен нормальным законом с

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$
(2)

можно использовать результат Крамера (6) для y = nF(x), что плотность $g_1(y)$ распределения наименьших значений для y стремится к когда число звеньев $n \to \infty$. С учетом того, что плотность распределения ресурса элемёнта, составленного из п звеньев, $f_1(x) = g_1(y) \cdot |dy/dx|$, и

так как y = nF(x), а |dy/dx| = nf(x), плотность распределения элемента может быть выражена

$$f_1(x) = \frac{1}{A \cdot \sigma} e^{-nF - \frac{1}{2} \frac{x - \mu}{\sigma}}, \qquad \frac{x - \mu}{\sigma} = t$$
(3)

Аппроксимируя кусочно-линейной функцией F(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu - \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{x - \mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}, & x \in \left[\mu - \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \mu + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \\ 1, & x > \mu + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$
(4)

которая удовлетворяет условиям $F(-\infty) = 0, F'(\mu) = f(\mu), F(\infty) = 1.$ получим

$$f_{1}(t) = \frac{1}{A \cdot \sigma} \begin{cases} e^{-\frac{t^{2}}{2}}, & t < -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ e^{-\frac{t^{2}}{2} \cdot s\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right)}, & t \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \\ e^{-\frac{t^{2}}{2} \cdot s}, & t > \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$
(5)

где *A* определяется из условия $F_1(\infty) = 1$

$$A = \left\{ 2 \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \int_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{nt}{\sqrt{2\pi}} - \frac{n}{2}\right) dt \right\}$$
(6)

и распределение будет $F_1(x) = |f_1(x)dx$, откуда усталостная

долговечность может быть получена при заданном уровне напряжений

В соответствии с приведенными в табл. 1 значениями построены кривые плотности полученного распределения при разных значениях числа звеньев n (фиг.3). Очевидно, что в процессе увеличения порядка п кривые распределения плотности перемещаются влево и правдоподобность испытания стремится к определенному значению.

При использовании закона распределения Релея (приводится в общепринятом виде)

Таблица 1

п	0	1	2	3	≥4
t _{max}	0	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$	$-\frac{3}{\sqrt{2\pi}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$f_t(t_{max})$	1	$e^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)}$	$e^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{2\pi}\right)}$	$e^{-\frac{1}{2}\left(3-\frac{9}{2\pi}\right)}$	e ^{-#}



Фит. 3. Функция плотности распределения при различных значениях п.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\mu}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & x \ge \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & x \ge \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$$
(8)

статистическая модель долговечности с использованием распределения Вейбулла, подобно [5], получится в виде

$$f_{2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{n-1} \exp\left[-nF_{1}(x) - \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{n} \right] & x \ge \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$$

$$F_{2}(x) = \begin{cases} \int_{\mu}^{n} f(x) dx & x \ge \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$$
(10)

где A определяется из условия $F_2(\infty) = 1$.

64

Таким образом, предложенные статистические модели для описания ОВСПОСЛЕНИЯ АОЛГОВЕЧНОСТЕЙ СИЛОВЫХ КОНСТОУКЦИЙ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ. работающих в условиях случайных процессов нагружения, построены на лостаточно належных теоретических основаниях. Использование представленных статистических моделей позволяет лучше оценить влияние кратковременных пиковых перегрузок с учегом достижения определенной объективности. При **JTOM** имеется возможность прогнозирования долговечности пои промежуточных значениях нагрузки. а также получения лучшей оценки при заданных значениях нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 230с.
- Саркисян Н.Н. Спектральные характеристики нагруженности элементов конструкций при случайном нагружении. // Тр. НАН и ГИУА Армении. Сер. ТН. Т. LIII, № 1. С.22-27, Ереван, 2000.
- Райс С. Теория флуктуационных шумов. / В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М.: ИЛ. 1953. 157с.
- 4. Као Дж. Модели долговечности и их применение. / Справочник по надежности, М.: Мир, 1969. Т. 1, 339 с.
- Гаспарян С.А., Шекян А.А. Оценка усталостной долговечности валовшпоночных соединений. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т.55. № 4. С. 79-84.
- 6. Крамер Г. Математические методы статистики.М.: ИЛ, 1948.

Государственный инженерный университет Армснии

Поступила в редакцию 16.06.2004

Մեխանիկա

57, №3, 2004

Механика

УДК 621.81.(075) К РАСЧЕТУ НАДЕЖНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ ГЕНЕРАТОРОВ Белуян З.А., Шекян Г.Г.

Ω.Ա. Բելույան, Հ.Հ.Շեկյան Գեներատորների առանցքակալային հանգույցների հուսալիության և երկարակեցության հաշվարկի վերաբերյալ

Աշխատանքում բերված է սինխրոն գեներատորների առանցքակալային հանգույցների հուսալիության և երկարակեցության հաշվարկման եղանակ, որը հաշվի է առնում վնասվածքների և քայքայումների զարգացումը դեֆորմացիայի և մաշման ընքացքում փոփոխական ուժերից և ջերմասաիճանից։

Ստացված են ածանցքակալային հանգույցի անխափան աշխատանքի հավանականությունն ու երկարակեցությունը հաշվարկելու ոեկուրենտ արտահայտություններ։

Z.A. Bellyan, G.G. Shekyan

On calculation of reliability and longevity of bearing packs of synchronous generators

В работе приведена методика расчета надежности подпинниковых узлов синхронями генераторов мощностью до 100квт с учетом развития повреждения и разрушения в процессе деформирования и изнашивания при переменных нагрузках и температурах.

Получены рекуррентные выражения для расчета вероятности безотказной работы и срока службы подшилникового узав.

Вероятность безотказной работы подшилников узла синхронных генераторов является одним из основных показателей при расчете на надежность.

Статистическую оценку вероятности безотказной работы можно получить, имея результаты испытаний на надежность достаточно больших выборок Вероятность отказа на отрезке [0,1] можно выразить [1]

$$Q(t) = 1 - P(t) \tag{1}$$

где P(t) – надежность рассматриваемого узла.

В расчетах на надежность широко применяется еще один показатель — интенсивность отказа, который связан с функцией надежностя выражением [1].

$$\lambda(t) = -P'(t)/P(t)$$
⁽²⁾

Поскольку подшипники являются невосстанавливаемыми изделями, то время до первого отказа приобретает смысл срока службы. Тогда, считая интенсивность отказа заданным при начальных условиях P(0)=1, будем иметь

$$P(t) = \exp\left[-\int_{0}^{t} \lambda(t) dt\right]$$
(3)

Ресурсные испытания и наблюдения над большими выборками подшинниковых узлов синхронных генераторов показывают, что интенсивность отказа изменяется по закону распределения Вейбулла и имеет вид:

$$\lambda(t) = (t/t_c)^p \qquad (4)$$

где *l* — назначенный срок службы подшилника. *l_e* — математическое ожидание плотности вероятности отказов.

Для подшипниковых узлов электрических машин математическое ожидание случайной величины будет [1]:

$$t_{e} = \sum_{i=1}^{n} t_{ei} t_{i}$$
(5)

где п — число наблюдений,

 l_{μ} — вероятность случайной величины за время $l_{\mu} = \alpha_{\mu} T_{\mu}$.

T_o - расчетное время наработки подшилника.

Для генераторов мощностью до 100 квт при выборке 100 из каждого типоразмера получены следующие распределения вероятности случайной величины *l*_n, приведенные в табл. 1.

Согласно значениям табл. 1 математическое ожидание 1, будет

$$t_{c} = 5.112T_{c}$$

С учетом (3) и (5) надежность подшипникового узла выразится соотношением [2]

$$P(t) = \exp\left[-\frac{1}{5.112T_{p}}\right]^{\beta}$$
(6)

Таблица 1

Распределение вероятности 1 для подшипниковых узлов генераторов

	1	2	3	4	5	6	7	8	ġ	10
a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f _{ci}	0.998	0.979	0.969	0.9588	0.95	0.9387	0 9287	0.9191	0.9097	0.9

Имея экспериментальные значения надожности подшипникового узла для произвольно выбранных *i*-ых промежутков времени, можно определить усредненное значение показателя β.

Усредненное значение показателя β с учетом (6) имеет вид [3]

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \ln(-\ln P_i(t)) / \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{t_i}{5.112T_p}\right)$$
(7)

где $P_i(t)$ – надежность подшипникового узла для i-то промежутка времени,

 $t_i - t$ -ый промежуток времени в долях T_a .

Усредненное значение β для синхронных генераторов мощностью до 100 квт будет $\beta = 1.34$.

Тогда окончательное выражение надежности подшишникового узла генераторов будет:

$$P_i = \exp\left[-\frac{t}{5112T_p}\right]^{24} \tag{8}$$

Здесь расчетное время наработки подшилника T_p с учетом динамических перегрузок и температурных воздействий определяется выражением [4]

$$T_p = L_n \exp\left[2 - \left(\frac{\Pi_k - \Pi_p}{\Pi_k - \Pi_0}\right)^{m_1} - \left(\frac{t_k - t_p}{t_k - t_0}\right)^{m_2}\right]$$
(9)

где П. – предельное число оборотов для данного типа подшипников.

П_о – минимальное число оборотов, при котором образуется маслянная пленка, для испытуемых машин П_о = 250 ÷ 300.

П"-рабочая скорость вращения ротора.

 t_0 — максимальная температура смазки, которая не влияет на срок службы подшинников данного типа смазки, $t_0 = 70^{\circ}C$.

1, - температура каплепадения для данной смазки.

t_v – рабочая температура.

$$L_n = \frac{10^6}{60\Pi_p} \cdot \left(\frac{C}{Q}\right)^3 - \text{долговечность подшилника:}$$

Q-эквивалентная нагрузка.

*m*₁,*m*₂ – постоянные, которые зависят от типа смазки и скорости вращения подшипника [3].

Для реализации методики расчета долговечности и надежности подшипниковых узлов генераторов составлена программа расчета на ЭВМ.

Сравнительные результаты расчетов и экспериментальных значений долговочности и надежности подшипниковых узлов генераторов серии ЕСС ЕСС5, ОС и 2С приведены в табл 2 и 3.

Таблица 2

Результаты расчетов и экспериментальных значений долговечности подшипниковых узлов генератора

Тип	Расчетная	Расчетная	Экспериментальное					
двигате	долговечность по	долговечность	значение					
АЯ	ля ГОСТу 18855-82 по пр		ДОЛГОВЕЧНОСТИ					
	тыс.час	ной методике	тыс.час					
		тыс.час						
ECC	1250	24.2	22.5					
ECC	975	24.0	23.0					
OC	772	23.8	22.0					
2C	652	24.0	20.0					
	2.41							

Как видно из табл. 2 и 3, предложенная методика позволила за счет учета температурных и динамических воздействий на подшипниковый 68 узел уменьшить погрешность расчетной оценки долговечности и надежности

Таблица З

Результаты расчетов и экспериментальных значений надежности подшипниковых генераторов

Тип генератора	Расчетные зна- чения ВБР по существующим методикам за 10.000 час	Расчет ВБР по предложенной методике	Экспериментальные эначения ВБР		
ECC	0.996	0.905	0.9		
ECC5	0.994	0.91	0.9		
CC	0.995	0.93	0.9		
2C	0.999	0.9	0.89		

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Вентцель Е.С., Овчеров А.А. Теория вероятности. М.: Наука, 1973. 364с.
- 2 Шекян Г.Г. Расчет долговечности подшипников электрических машин.// Изв. ВУЗов. Электромеханика. №8. М.: 1989. С.38-41.
- 3. Шекян Г.Г. Выбор подшилников качения высокоскоростных электрических машин. //Электротехническая промышленность (ЭП). Сер. ЭМ. №10. Энергия, 1973. С.15-17.
- 4. Шекян Г.Г. Надежность подшипниковых узлов электрических машин, как функции от собственных вибраций. // Изв. АН Арм ССР. Сер. тех наук. 1990. Т.XLIII. №1. С.29-32.

Институт механики НАН Армении Государственный инженерный учиверситет Армении Поступила в редакцию 4.12.2004

Մելսանիկա

57, №3, 2004

Механика

УДК 531.539.376 ВАИЯНИЕ АЕ

ВЛИЯНИЕ ДЕСОРБЦИИ ХИМИЧЕСКИ НЕСВЯЗАННОЙ ВОДЫ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЕТОНА ПРИ КРАТКОВРЕМЕННЫХ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ Каралетян К. А.

Կ. Ա. Կարապետյան

Քիմիապես չկապված ջրի ղեսորբցիայի ազդեցությունը բետոնի մեխանիկական հատկությունների վրա կարձատե բեռնավորումների ղեպքում

Հնտազոտված է խոնավության դնարբցիայի ազդնցությունը 63 ամիս տեողությամբ հիդրոմնկուսացված վիճակում պահված լիթոիդպնմզաբնտոնի ամրության և դնֆորմսածիվ հւստկությունների վրա միասանցը ձգող և սեղմող ուժային գործոնների կարճատն ազդեցությունների դնաքում։

Ստացված է, որ խոնավության դեսորբցիան, գործնականում, չազդելով բետոնի ձգման ամրության վրա, բերում է սեղմման ամրության նվազմանը, ինչպես նաև նչած բեռնավոռումների դեպրում բետոնի ղեֆորմացվելու հատկության էական մեծացմանը։

K. A. Karapetyan

Effect of Description of Cchemically Inconnected Water on Mechanical Properties of Concrete under Shorttime Loadings

Исследовано влияние десорбции влаги на прочность и деформативные свойства литондпемзобетона, хранившегося в гидроизолированном состоянии в течение 63 месяцев при кратковременных силовых воздействиях.

Получено, что десорбция влаги, практически не влияя на прочность при растяжении, приводит к существенному сцижению прочности на сжатие и увеличению способности бетова к деформированию в обоих случаях.

Известно, что при вызревании бетона в условиях невысокой влажности среды (ниже 75%, [1]) интенсивность процесса гидратации цементных зерен не высока и он может преждевременно прекратиться [2-6 и др.]. Чем меньше влажность среды, тем раньше останавливается процесс твердения, при этом одновременно имеют место следующие явления, которые могут оказаться причиной частичной потери прочности бетона:

 возникновение внутренних напряжений в результате неодинаковой усадки цементного камня и крупного заполнителя и возможное микротрещинообразование;

— образование пустот (дефектов) вследствие десорбции химически несвязанной (свободной) воды, накопленной в бетоне в результате технологически требуемого для приготовления смеси избытка воды [7].

Изменения механических свойств бетонов, обусловленные только последним фактором, могут оказаться существенными [8]. причем однозначного мнения об этих изменениях по известным нам работам составить невозможно.

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования деформативных и прочностных свойств бетона при одноосном растажении и сжатии с учетом его влагосодержания и ориентации слосв укладки бетона по отношению к направлению действия нагрузки. Эксперименты были поставлены на цилиндрических образцах с диаметром 5,5см и высотой 18см, выбуренных из исходных литоидпемзобетонных призм и восьмерок с сечением 10×10 см, высотой соответственно 40 и 60см. Одна часть исходных элементов была бетонирована в вертикальном положении, а другая часть – в горизонтальном. После освобождения от форм призмы и восьмерки сразу гидроизолировались и в течение 63 мес. (до выбуривания из них опытных цилиндрических образцов) хранились в лабораторном помещении.

Был использован вибрированный легкий бетон состава в массе 1:1,513:2,368, В/Ц=0.88, Ц=310кг/м³. Для приготовления бетона применялись песок ($\gamma_n = 1050кг/м^3$), щебень ($\gamma_m = 851кг/м^3$) с фракцией 5-30 мм из литоидной пемзы, взятой из карьера Джрабер (Республика Армения), и портландцемент активностью З8МПа из Араратского цементно-шиферного завода.

Кратковременные испытания, осуществленные согласно методике, описанной в работе [9], были проведены сразу после выбуривания опытных цилиндрических образцов, а также после подвержения их десорбции влаги (высыхания) в лабораторном помещении в течение определенного количества дней. Аналогичным образом были проведсны эксперименты на кубических образцах с ребром 10 см. изготовленных из того же состава литоидпемзобетона.Повторность опытов в каждом случае была принята 3-5 кратной. При этом максимальный разброс показателей измеренных механических характеристик по отношению к их среднему арифметическому значению при испытании 3-х образцов составил + 4,8 и - 6,8%, а величина коэффициента вариации при испытании 5 образцов -±0,05. Температура лабораторного помещения в период проведения экспериментов составляла 21±4°С, а относительная влажность - 64±7%.

Полученные экспериментальные результаты представлены в табл. 1 и 2 и на фиг. 1 и 2. Часть результатов, относящихся к прочности и модулю деформации литоиднемзобетона, в случае сжатия была опубликована в работе [10].

По проведенным измерениям влажность W литоидпемзобетона в возрасте 28 сут. составляла 11.8%. Согласно расчетам, проведенным по данным работы (7), в случае надежной гидроизоляции влажность бетона в возрасте 63 мес. должна была составлять приблизительно 10.8%. По данным же табл. в указанном возрасте влажность цилиндрических образцов, выбуренных из исходных элементов по направлениям перпендикулярном (ПЕС) и параллельном (ПАС) по отношению к слоям укладки бетона. составляла соответственно 9,6 ы 10,2% 410 свидетельствует о не очень надежной гидроизоляции.

Согласно результатам, приведенным в табл. 1, изменения показателей прочности на одноосное растяжение старого литоидпемзобетона в зависимости от степени его влагосодержания практически не наблюдаются независимо от направления действия нагрузки по отношению к слоям укладки бетона.

В случае же сжагия с уменьшением влажности вследствие десорбции влаги имеет место монотонный спад прочности как кубических, так и цилипдрических опытных образцов (табл.1). В итоге, при уменьшении начальной влажности опытных цилиндрических образцов ПЕС и ПАС соответственно на 5,6 и 4,7% (через 63 мес. высыхания) величина спада прочности составляет соответственно 28 и 16%. Упомянутая разница прочности для кубических образцов составляет приблизительно 21%.

Таблица 1

Продол- житель- ность процес- са десор-	Направ- ление пагрузки по отнош. к слоям бетониро-	аправ- кение грузки отнош, слоям сониро- кания		Прочность, М			
			Кубиче- ских образцов	Цилинд обра	онческих ізцов	Отношение прочности образцов, подвергнутых десорбния влаги, к прочностя изолированных	
бции Влаги	вания			При рас- тяжевия	При сжатии	При рас- тяжении	Пря сжатия
0	первенд	9,6		2.10	38,9	1.00	1.00
	Паралл	10,2	42.2	2,66	39,0	1,00	1,00
7 сут.	перпенд	8,7	-	2,00	38,6	0,95	0,99
	порала.	9,4	42,3	2,50	39.2	0,94	1,01
1	перпенд	7,3	-	2,10	35,6	1,00	0,92
I MEC.	паралл.	7.9	39,1	2,50	36,9	0,94	0,95
2 1100	перпенд.	6,7	-	2,19	31,2	1,04	0,80
J MEC.	паралл.	7,7	37.8	2,60	34.4	0,98	0,88
6 мес.	лерпенд.	4,5	-	2,20	29,0	1,05	0,75
	паралл	5.7	36,2	2,77	33,3	1.04	0,85
63 мес	перпена,	4.0	-	2,07	27.9	0,99	0,72
	Паралл.	5.5	33,4	2,59	32,9	0,97	0,84

Из графиков, приведенных на фиг.1, следует, что уменьшение влажности оказывает существенное влияние на деформативность старого литоидпемзобетона как в случае одноосного растяжения, так и при сжатии: по мере уменьшения влажности имеет место существенное увеличение способности образцов к деформированию в обоих рассматриваемых случаях ориентации слоев укладки бетона по отошению к направлению действия нагрузки.

По графикам, приведенным на фиг. 2.1, в случае одноосного растяжения кривая продольных деформаций образцов ПАС (кривая 2) всегда проходит выше кривой деформации образцов ПЕС (кривая 1). Уменьшение начальной влажности опытных образцов ПЕС и ПАС на 2,9 и 2,5% соответственно (продолжительность процесса десорбции влаги — 3 мес.) приводит к некоторому их сближению. При дальнейшем уменьшении степени влажности бетона указанные кривые снова расходятся.

Согласно фиг. 2.11 в случае сжатия кривые как продольных, так и поперчных деформаций гидроизолированных образцов ПЕС и ПАС почти сливаются. С уменьшением степени влажности бетона имеет место все большее расхождение этих кривых. Из этой же фигуры также можно заключить, что влияние десорбции влаги на продольные и поперечные деформации в случае образцов ПЕС более существенно, чем в случае образцов ПАС.

Приведенные в табл.2 значения касательного модуля деформации при различных уровнях относительного напряжения σ/R (*R*-предел прочности опытных образцов) дают более ясное количественное представление о влиянии влагосодержания на способность бетона к деформированию при кратковременных силовых воздействиях.








Фиг. 2. Кривые деформаций литоидпемзобетонных образцов ПЕС (1) и ПАС (2) при одноосном растяжении (продольные) I и сжатии (продольные и поперечные) II.

d)...

Таблища 2

Продолжи- тельность процесса десорбции влаги	Направле- ние наг- рузки по отноше- нию к слоям бетопиро- вания	Модуль дефэрмацин по касательной X10 ⁻² в МПа при относительном напряжении σ/R						Отношение модуля деформации образцов, подвергнутых десорбции влаги к модулю деформации изолированных образцов при относительном напряжении σ/R									
		при растяжении				при сжатии				при растяжении				при сжатии			
		0	0.25	0.5	0.75	0	0.25	0.5	0.75	0	0.25	0.5	0.75	0	0.25	0.5	0.75
0	периенд.	271	226	184	147	217	203	190	177	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	паралл.	319	251	192	140	215	204	194	184	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
7 сут.	перпенд.	258	215	176	140	201	188	176	164	0.95	0.95	0.96	0.95	0.93	0.93	0.93	0.93
	паралл.	294	230	174	126	208	200	192	184	0.92	0.92	0.91	0.90	0.97	0.98	0.99	1.00
1 мес.	перпенд.	244	202	164	130	171	165	159	154	0.90	0.89	0.89	0.88	0.79	0.81	0.84	0.87
	паралл.	281	220	167	121	176	168	161	153	0.88	0.86	0.87	0.86	0.82	0.82	0.83	0.83
3 мес.	перленд.	222	186	153	123	148	143	138	133	0.82	0.82	0.83	0.84	0.68	0.70	0.73	0.75
	паралл	236	187	144	106	164	159	154	150	0.74	0.74	0.75	0.76	0.76	0.78	0.79	0.82
б мес.	перленд.	206	171	138	110	139	134	128	123	0.76	0.76	0.75	0.75	0.64	0.66	0.67	0.69
	наралл.	234	185	142	105	163	156	149	142	0.73	0.74	0.74	0.75	0.76	0.76	0.77	0 77
63 мес.	перпенд.	178	147	120	95	131	123	116	108	0.66	0.65	0.65	0 65	060	0.61	0.61	0.61
	паралл.	212	169	131	97	158	148	138	129	0.66	0.67	0.68	0.69	073	0.73	0.71	0.70

Согласно данным этой таблицы, с момента начала процесса десорбции влаги наблюдается монотонное уменьшение показателя модуля деформации старого литоидпемзобетона, которое при обоих рассматриваемых видах нагружения практически не зависит от уровня приложенного относительного напряжения. В случае одноосного растяжения упомянутый спад модуля деформации практически не зависит также от направления действия нагрузки по отношению к слоям укладки бетопа, в то время как при сжатии указанный спад более существенен в направлении, перпендикулярном к слоям бетонирования.

По данным табл. 2 уменьшение начальной влажности литоидпемзобетонных образцов ПЕС и ПАС соответственно на 5,6 и 4,7% (через 63 мес. высыхания) в случае растяжения приводит практически к одинаковому уменьшению значений модуля деформации на 31-35%, а при сжатии – на 39-40% и 27-30% соответственно для образцов ПЕС и ПАС.

Таким образом, уменьшение степени влажности вследствие десорбции влаги из пор и капилляров литоидпемзобетона, вызревавшегося в течение многих лет в благоприятных для нарастания прочности условиях (в гидроизолированном состоянии), практически не влияя на прочность при растяжении, приводит к существенному снижению его прочности на сжатие и увеличению способности к деформированию в обоих рассматриваемых видах нагружения. При этом обусловленность указанных изменений механических свойств бетона, образованием микротрещин практически исключается, поскольку при растяжении микротрещины должны были привести к спаду прочности, что не наблюдалось (табл.1).

Наблюдаемые изменения механических свойств литоидпемзобетона при сжатии можно объяснить, в основном, уменьшением фактического рабочего сечения бетонного элемента вследствие удаления свободной воды из его пор и капилляров. В связи с этим, следует отметить, что наличие свободной воды в порах и капиллярах бетона играет положительную роль, так как при действии внешней сжимающей нагрузки вода принимает на себя определенное усилие, тем самым способствуя облегчению объемного напряженного состояния бетона [11;12].

Увеличение способности старого литондпемзобетона, вследствие десорбции влаги, к деформированию при растяжении, вероятно, обусловлено внутренними растягивающими напряжениями, возникающими в результате неодинаковой усадки затвердевшего цементного камня и крупного заполнителя.

ЛИТЕРАТУРА

- Строительные нормы и правила. Часть II. Нормы проектирования. Глава 21. Бетонные и железобстонные конструкции. (СНиП 2.03.01-84^{*}). М.: Стройиздат, 1998. 77с.
- 2. Цискрели Г.Д. О сопротивлении бетона разрыву. // Гидротехническое строительство, 1953. №3. С. 16-19.
- Худавердян В.М. О некоторых свойствах летнего бетона. /В сб.: Труды сонещания по теории технологии бетонов. Ереван. Изд. АН АрмССР, 1956. С.287-304.
- 4. Михайлов АЗ В. Прочность бетона в зависимости от его влагосодержания. // Бетон и железобетон, 1974. №2 С.19.

- Kasai Yoshio, Matui Isamu. Studies on concrete strenght of structure in Japan. // Qual. Contr. Concr. Struct RIZEM. Symp., Stockholm, 1979, Prepr. vol.1. Stockholm, 1979, p. 89-96.
- Карапетян К.С. О закономерностях изменения прочностных и деформативных свойств бетона во времени в условиях различной влажности среды. // Докл. АН Арм. ССР, 1990. Т.90. №17 С.29-33.
- 7. Симонов М.З. Основы технологии легких бетонов. М.: Изд. лит по строительству, 1973. 584с.
- Басевич А.З., Массивные гидротехнические сооружения с искусственным обжатием бетона. Л. – М.: ГИЗ лит. по строит. и архит. 1957. 199с.
- 9. Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1964. Т.17. №4. С.71 – 90.
- Карапетян К.С., Карапетян К.А. Влияние высыхания на анизотропию прочности и модуль деформации бетона. В кн.: Теоретична и приложна механика. Варна, 1981, Докл. Кн.1. София: Издательство Българската Академия На Наукате. 1981. с.262-267.
- Элбакидзе М. Г., Июльман Э.Р., Енукашвили И.Р. Влияние водонасыщения бетона на его прочность и деформативность. Тр. координац. совещ. по гидротехнике, 1971. Вып. 68. С.97-102.
- Карапстян К.С. О вторичном твердении и изменении анизотропных свойств бетона при водонасыщении. // Докл. АН Арм. ССР. 1973. Г.57. №3. С.158-166.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 10.06.2004

203003000 чезпередовано поставание изаправование известия национальной академии наук армении известия национальной академии наук армении

Մեխանիկա

57, №3, 2004

Механика

УДК 622.552

ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕРИАЛА ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ЕЕ РАЗРУШЕНИИ Ордян А. С., Саркисян Ю. С.

Ա. Ս. Օրդյան, Յու. Ս. Սարգսյան Լիոնային ապարների բնութագիրը նրանց քայքայման ժամանակ

Ուսումնասիրվում են մի չարք լեռնային ապարներ, որոնք ունեն քերություններ, ճեղքեր, խզվածքներ, անհամասեռություններ և այլն։ Ուսումնասիրությունները կատարվում են ըստ Ա. Ա. Գրիֆֆիտսի կողմից մշակված տեսության։ Բերվում է վործերի արդյունքներին համապատասխանող աղյուսակը։ Վերոհիշյալ արդյունքներից հետևում է, որ լեռնային ապարների քայքայումը ուսումնասիրելու համար հարկավոր է հարցին մոտենալ սկզբնական ճեղը պարունակող փխրուն ապարի քայքայման մեխանիկայի տեսանկյունից

A. S. Ordyan, Yu. S. Sargsyan Description of layer of mountainous stuff during destruction

Любое тело, подвергающееся разрушению, характеризуется двумя величинами прочности: теоретической и фактической. Для определения величины теоретической прочности нужно произвести расчет потенциальной энергии ионов в кристаллах данного материала Фактическая прочность определяется на практике иля с помощью эксперимента с фиксацией той нагрузки, при которой произошло разрушение. Как правило, экспериментально полученные величины прочности в сотни, а иногда и я тысячи раз меньше теоретических. Причной такого расхождения является наличие различных дефектов в кристаллах, которые и приводят к снижению взаимосвязи между частицоми кристаллической решетки. Дефекты могут быть точечными, линейными или поверхностными. На прочность материала большей частью влияют поверхностные и линейные дефекты.

11/11	Тип камня	Плотность	Водопоглощение	Пористость	
		г/см ^э	по весу %		
1	Гранит янцевский	2,62-2,82	0,16-2,24	0,37-2,66	
2	Гранит кудашевский	2,68-2,72	0,30 - 0,53	0,75-2.45	
3	Гранит	2,76 - 2,80	0,30 - 0,50	1,5-2.8	
	лезниковский				
4	Гранит	2.67-2,71	0,01-0,15	1,11-2,21	
	новоданиловский				
5	Гранит памбакский	2,78 - 2,97	0,11-0,42	0,46-2,63	
6	Базальт	2,82-2,97	0.97 - 2,33	0,40-3,31	
7	Мрамор коелгиский	2.73-2.82	0,12-0,59	0,30 - 2,40	
8	Туф бюраканский	2.52-2.74	5,30-25,70	20,6-4,91	

Основные физико-механические свойства материалов. Таблица 1

Эксперименты проводились по методике, указанной в [5] при постоянном весе образца при температуре 20°С. Использовано центральное статическое нагружение.

С целью обеспечения нормальной работы той или иной конструкции, проделывают соответствующие расчеты по классическим теориям

78

прочности. Однако, зачастую результаты расчетов по этим теориям прочности дают расхождение с теми величинами, при которых конструкция разрушается или, наоборот, может принимать большие нагрузки. Это объясняется тем, что существующие эти теории не основаны на каком-либо внутреннем механизме, ведущем к разрушению.

Поскольку в любом куске горной породы существует некоторос количество дефектов - мелкие трещины, поры, неоднородности и т.д., то очевидно, что формулы для расчетов должны включать параметры, характеризующие дефекты, так как они являются причинами расхождения результатов фактических и теоретических расчетов. Такой теориой является теория трещин хрупкого разрушения, разработанная А. А Гриффитсом

Согласно теории А. А. Гриффитса тело, внутри которого имеется. трещина длиной 2/ элиптической формы, подвергается равномерному растяжению о. Трещина, достигнув критической длины при напряжении о., становится неустоячивой и возникает хрушкое разрушение. Напряжение о и длина распространяющейся трещины - ℓ СВЯЗАНЫ ЗАВИСИМОСТЬЮ:

$$\sigma = \sqrt{2E\gamma/(\pi\ell)}$$

где Е — модуль упругости материала

у – поверхностная энергия материала

ℓ – полудлина трещины

Выражение σ πί = κ характеризует коэффициент интенсивности напряжений, который по достижении критических энергий напряжения о, и длины трещины *l*, также принимает критическое значение к. :

$$\kappa_{c} = \sigma_{k} \sqrt{\pi \ell}_{k} \tag{1}$$

Критическое значение коэффициента интенсивности напряжений связано с энергетическим критерием разрушения по формуле:

$$\kappa_c = \sigma_s \sqrt{2E\gamma}$$

Из приведенной формулы видно, что величина к, является характеристикой материала, отражающей сопротивление возникновению хрупкого разрушения при налични исходной трещины.

Для определения величины к_и (индекс 1 указывает, что трещина в материале образовалась при растяжении) для некоторых горных пород были проделаны эксперименты. Образцы изготовлялись по форме, указанной на фиг. 1. Эксперименты проводились по методикс, указанной в литературе [5].

Критическое значение коэффициента интенсивности напряжения к_и определялось зависимостью от силы изгиба, приложенной посередине пролета [5].

$$\kappa_{1c} = \frac{P_{\kappa}L}{2\sqrt{2}HB^{3/2}}\sqrt{31.7(\ell/B) - 64.8(\ell/B)(\ell/B) + 211(\ell/B)(\ell/B)(\ell/B)}$$
(2)

где P_{*} — величина силы, разрушающей образец.

- Н толщина образца,
- L расстояние между опорами,

В – высота образца,

l – глубина трещины.



Фиг. 1

Средние значения величины критического коэффициента интенсивности напряжений для некоторых горных пород приведены в табл. 2.

		Таблица 2
п/п	Породы	К ₁₆ КГС/ММ ^{3/2}
1	Гранит янцевский	4.7
2	Гранит кудашевский	4.4
3	Гранит лезниковский	4.0
4	Гранит новоданиловский	3.5
5	Гранит памбакский	3.2
6	Базальт	2.8
7	Мрамор коелгиский	2.0
8	Туф бюраканский	0.5

Как видно из табл. 2, полученные значения величины к_и изменяются прямо пропорционально величине напряжения о. Кроме того, полученныс величины лежат в пределах данных, приведенных в работе [4]. Из высшесказанного следует, что при изучении разрушения горных пород 80 необходимо подойти с точки зрения механики хрупкого разрушения с начальной трещиной Для каждого материала необходимо определить величниу критического коэффициента интенсивности напряжений, являющегося характеристикой материала, который может рассматриваться как силовым критерием хрупкого разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

- Ржевский В. В., Новак Г. Я. Основы физики горных пород. М.: Недра, 1973.
- 2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М. Наука, 1976.
- 3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов, М.: Наука, 1986.
- 4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
- 5. Серенсен С. Б. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению. М.: Атомиздат, 1975
- Ацагорцян З.А. Облицовочные камни Советского Союза. Ереван Айастан, 1987.

Армянский Государственный педагогический университет им. Х. Абовяна Поступила в редакцию 24.03.2004