

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՄԵԴԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2004

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ,
УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.С.

Գրիգորյան Է.Խ., Սարգսյան Կ.Ս.

Կոնտակտային խնդիր երկու անվերջ ստրինգերներով ուժեղացված
առանձնական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ համասեռ սալի խնդիրը, որը ուժեղացված է երկու անվերջ սալով և առանձնական ստրինգերներով: Սալը դեֆորմացվում է ստրինգերների վրա ազդող ուժերի ազդեցության տակ, որոնք ուղղված են ստրինգերների: Ֆորմիչի ձևափոխության օգնությամբ որոշված են կոնտակտային տանգենցիալ լարումները և ստրինգերներում նորմալ լարումները: Այդ լարումների համար ստացված են ասիմպտոտական բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի ազդման կետերի շրջակայքում և ճիշդացնում են լարումների կետերում:

Grigoryan E.Kh., Sargsyan K.S.

The contact problem for elastic plate strengthened by two infinite stringers

В работе рассматривается задача для бесконечной однородной пластины, усиленной двумя бесконечными параллельными упругими стрингерами. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к стрингерам и направленных вдоль стрингеров. С помощью преобразования Фурье определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, действующие в стрингерах. Для этих напряжений получены асимптотические формулы, характеризующие поведение этих напряжений вблизи и вдалеке от точек приложений сил.

1. Пусть бесконечная однородная пластина малой постоянной толщины H усилена двумя параллельными бесконечными стрингерами и деформируется под действием сосредоточенных сил, приложенных к стрингерам и направленных вдоль стрингеров.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений и нормальных напряжений в стрингерах.

Задача для упругой пластины, усиленной одним бесконечным стрингером, рассматривалась в работах [1,2].

В рассматриваемом случае уравнения равновесия пластины запишутся в виде:

$$\begin{aligned}(\lambda' + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda' + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X(x; y) &= 0 \\ \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda' + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$
$$(-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

$$X(x; y) = \frac{1}{H} [P(x; a) \delta(y - a) + P(x; -a) \delta(y + a)]$$

$$P(x; a) = b\tau(x; a); \quad P(x; -a) = b\tau(x; -a),$$

$\tau(x; a); \quad \tau(x; -a)$ – контактные напряжения, b – ширина стрингеров.

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda \text{ и } \mu \text{ – упругие постоянные Ламе.}$$

Учитывая модель контакта по линии, уравнение равновесия стрингера при $y = a$, когда на него действует сосредоточенная сила $R\delta(x)$, запишется в виде:

$$F_x \frac{dq(x; a)}{dx} - P(x; a) + R\delta(x) = 0 \quad (1.2)$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s) ds = R \quad (1.2)$$

где $q(x; a)$ – интенсивность нормальных напряжений стрингера, $F_x = hb$ – площадь поперечного сечения стрингера, h – толщина стрингера.

Отдельно рассмотрим четную задачу, когда силы, действующие на стрингеры, имеют одинаковые направления и величины ($R = R_1; q(x; a) = q_1(x)$) и нечетную задачу, когда действующие силы имеют противоположные направления ($R = R_1; q(x; a) = q_2(x)$).

Рассмотрим четную задачу. В этом случае $P(x; a) = P(x; -a) = P_1(x)$, естественно $u(x; a) = u(x; -a)$, следовательно

$$X(x, y) = \frac{P_1(x)}{H} [\delta(y - a) + \delta(y + a)] \quad (1.3)$$

Применив к уравнениям (1.1) преобразование Фурье по переменной x и разрешив полученные уравнения относительно $\bar{u}_1(\sigma; y)$ и $\bar{v}_1(\sigma; y)$ при $y = a$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\sigma; a) = \bar{P}_1(\sigma) \left\{ \left[\frac{(\lambda^* + 3\mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|} - \frac{(\lambda^* + \mu)}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H} \cdot a \right] e^{-2|\sigma|a} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|} \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\tilde{f}(\sigma) = \int f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Уравнение равновесия стрингера (1.2) запишем в перемещениях, имея в виду, что $q_1(x) = E_s \frac{du_s}{dx}$.

$$\frac{d^2 u_s}{dx^2} - \frac{P_1(x)}{F_s E_s} + \frac{R_1 \delta(x)}{F_s E_s} = 0 \quad (1.5)$$

где E_s — модуль упругости стрингера.

Применив к уравнению (1.5) преобразование Фурье, получим:

$$-\sigma^2 \bar{u}_1(\sigma) = \frac{\bar{P}_1(\sigma)}{F_s E_s} - \frac{R_1}{F_s E_s} \quad (1.6)$$

Далее имея в виду условие контакта

$$u_1(x; a) = u_s(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.7)$$

для $\bar{P}_1(\sigma)$ получим

$$\bar{P}_1(\sigma) = \frac{TR_1}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a - k\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (1.8)$$

где

$$T = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \cdot \frac{H}{F_s E_s}; \quad k = \frac{2(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 3\mu} \quad (1.9)$$

Применив к уравнению (1.2) преобразование Фурье, для определения $\bar{q}(\sigma)$ получим:

$$-i\sigma \bar{q}_1(\sigma) = \frac{\bar{P}_1(\sigma)}{F_s} - \frac{R_1}{F_s} \quad (1.10)$$

Отсюда

$$\bar{q}_1(\sigma) = \frac{i\bar{P}(\sigma)}{\sigma F_s} - \frac{iR_1}{F_s \sigma} + c\delta(\sigma)$$

Так как $q_1(x)$ — нечетная функция, то и $\bar{q}_1(\sigma)$ — нечетная функция, следовательно, $c = 0$.

Таким образом, для $\bar{q}_1(\sigma)$ получим:

$$\bar{q}_1(\sigma) = \frac{iR_1}{F_s} \cdot \frac{k\sigma e^{-|\sigma|a} - 2\operatorname{sgn} \sigma e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a - k\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (1.11)$$

Окончательно для искоемых величин $P_1(x)$ и $q_1(x)$ получим:

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \sigma x d\sigma}{T + 2\sigma e^{-\sigma a} \operatorname{ch} \sigma a - k\sigma^2 e^{-2\sigma a}} \quad (1.12)$$

$$q_1(x) = \frac{R_1}{\pi F_s} \int_0^\infty \frac{(ka\sigma e^{-2\sigma a} - 2e^{-\sigma a} \operatorname{ch} \sigma a) \sin \sigma x}{T + 2\sigma e^{-\sigma a} \operatorname{ch} \sigma a - ka\sigma^2 e^{-2\sigma a}} d\sigma$$

Интересно заметить, что при $a \rightarrow 0$ для $P_1(x)$ получим:

$$P_1(x) = \frac{\pi R_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \sigma x}{T/2 + \sigma} d\sigma$$

из которого видно, что жесткость стрингеров удваивается. Это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается.

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_1(x)$, когда $|x| \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что при $|\sigma| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(\sigma) = R_1 \left\{ 1 - \frac{2|\sigma|}{T} + \frac{(2+k)aT + 4}{T^2} \sigma^2 - \frac{2(1+k)a^2T^2 + 4(2+k)aT + 8}{T^3} |\sigma|^3 + \right. \\ \left. + \frac{(4/3 + 2k)a^3T^2 + (k^2 - 12k + 12)a^2T + 12(2+k)a}{T^3} \sigma^4 \right\} + O(|\sigma|^5) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тогда по известному свойству интеграла Фурье получим при $|x| \rightarrow \infty$:

$$P_1(x) = \frac{R_1}{\pi} \left\{ \frac{2T}{(Tx)^2} - \frac{6T}{(Tx)^3} [2(1+k)a^2T^2 + 4(2+k)aT + 8] \right\} + O(x^{-6}) \quad (1.14)$$

Здесь были использованы формулы [3]

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[|\sigma|^{2n+1} \right] &= (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!}{\pi} x^{-2n-2} \\ F^{-1} \left[\sigma^{2n} \right] &= (-1)^n \delta^{(2n)}(x), \quad n = 0; 1; 2; \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $F[\]$ — обобщенное преобразование Фурье, а $F^{-1}[\]$ — обратное преобразование.

Для получения асимптотической формулы $q_1(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, пользуясь формулой (1.2) и (1.2) выражение $q_1(x)$ запишем в виде:

$$q_1(x) = \frac{1}{F_s} \int_x^\infty P_1(s) ds - \frac{R_1}{F_s} \Theta(-x) \quad (1.16)$$

Далее имея в виду нечетность функции $q_1(x)$ из формулы (1.16) с учетом (1.14) при $|x| \rightarrow \infty$ получим:

$$q_1(x) = \frac{R_1}{\pi F_s} \left\{ \frac{2}{Tx} - \frac{2T}{(Tx)^3} [2(1+k)a^2T^2 + 4(2+k)aT + 8] \right\} + O(x^{-5}) \quad (1.17)$$

Определим асимптотические формулы для $P_1(x)$ и $q_1(x)$ при $|x| \rightarrow 0$.

Для этого представим $P_1(x)$ в виде

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(ks^2 - s)e^{-2s} \cos \frac{sx}{a}}{(T^* + s + se^{-2s} - ks^2 e^{-2s})(T^* + s)} ds + \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma \quad (1.18)$$

$$T^* = Ta$$

Заметим, что при $a \rightarrow \infty$ из (1.18) получится решение задачи для одного стрингера [1.2], который имеет вид

$$\frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma = \frac{TR_1}{\pi} \left\{ \left| \frac{\pi}{2} - \text{Si}(xT) \right| \sin(xT) - \text{Ci}(xT) \cos(xT) \right\}$$

$$0 < x < \infty \quad (1.19)$$

Получим представление интеграла (1.19) в виде ряда, для чего разложим подынтегральное выражение в ряд при $\sigma \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{T + \sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{T^{n+1}}{\sigma^{n+2}}$$

Тогда в силу свойств интеграла Фурье будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} T^{2n} F^{-1} \left[|\sigma|^{-2n-1} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} T^{2n+1} F^{-1} \left[\sigma^{-2n-2} \right] \quad |x| \rightarrow 0 \quad (1.20)$$

где [3]

$$F^{-1} \left[|\sigma|^{-2m-1} \right] = (-1)^m \frac{x^{2m}}{\pi(2m)!} \left\{ \psi(2m+1) - \psi(1) + C - \ln|x| \right\}$$

$$F^{-1} \left[\sigma^{-2m-2} \right] = (-1)^{m+1} \frac{|x|^{2m+1}}{2(2m+1)!}, \quad m = 0; 1; 2; \dots \quad (1.21)$$

где C — неизвестная постоянная, подлежащая определению, $\psi(z)$ — известная функция пси.

Для определения C интеграл (1.20) представим в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma = ix \left[\int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{T}{\sigma} \right) \sin \sigma x d\sigma + \int_0^{\infty} \ln \frac{\sigma}{T} \sin \sigma x d\sigma \right] \quad (1.22)$$

где

$$ix \int_0^{\infty} \ln \frac{\sigma}{T} \sin \sigma x d\sigma = \psi(1) - \ln(Tx)$$

Сопоставляя формулы (1.20) и (1.22) при $|x| \rightarrow 0$, получим $C = \psi(1)$.

Таким образом, получим следующее:

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(xT) \right] \sin(xT) - \text{Ci}(xT) \cos(xT) \right\} = \frac{1}{\pi} [\psi(1) - \ln(Tx)] + \frac{T|x|}{2} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m (Tx)^{2m}}{\pi(2m)!} [\psi(2m+1) - \ln(Tx)] + \frac{1}{2} \frac{|Tx|^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} \quad (1.23)$$

где ряд сходится при любых x .

Окончательно для $P_1(x)$ при $|x| < a$ получим:

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a} \right)^{2m-2} A_m + \psi(1) - \ln(Tx) + \frac{\pi T|x|}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m}}{(2m)!} [\psi(2m+1) - \ln(Tx)] + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(T|x|)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} \quad (1.24)$$

где

$$A_m = \int_0^{\infty} \frac{(ks^2 - s)s^{2(m-1)}e^{-2s} ds}{(T^2 + s + se^{-2s} - ks^2 e^{-2s})(T^2 + s)} \quad (1.25)$$

Можно утверждать, что первый ряд в (1.24) сходится по крайней мере при $|x| < a$.

Для получения асимптотической формулы для $q_1(x)$, когда $|x| \rightarrow 0$, воспользуемся следующим представлением (1.2), (1.2'):

$$q_1(x) = \frac{1}{F_s} \int_0^{\infty} P_1(s) ds = \frac{R_1}{2F_s} \operatorname{sgn} x \quad (1.26)$$

Подставляя выражение $P_1(x)$ из (1.24) для $q_1(x)$ при $|x| \rightarrow 0$ получим:

$$q_1(x) = \frac{TR_1}{\pi F_s} \left\{ a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} A_m}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a} \right)^{2m-1} + x [\psi(2) - \ln(xT)] + \frac{\pi T|x|}{4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m+1}}{2T(2m+1)!} [\psi(2m+2) - \ln(xT)] + \frac{\pi|x|}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Tx)^{2m+1}}{(2m+2)!} \right\} - \frac{R_1}{2F_s} \operatorname{sgn} x$$

2. Рассмотрим нечетную задачу. В этом случае в уравнениях (1.1)

$$X(x; y) = \frac{P_2(x)}{H} [\delta(y-a) - \delta(y+a)] \quad (2.1)$$

где

$$P_2(x) = P(x; a) = -P(x; -a).$$

В рассматриваемом случае для $\bar{u}(\sigma; a)$ получим (1.1):

$$\bar{u}(\sigma; a) = \bar{P}_2(\sigma) \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|} e^{-a|\sigma|} \text{sha}|\sigma| + \frac{\lambda^* + \mu}{\mu(\lambda^* + 2\mu)H} a e^{-2a|\sigma|} \right] \quad (2.2)$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, для $\bar{P}_2(\sigma)$, $\bar{q}_2(\sigma)$ в исследуемой задаче ($R = R_2$; $q(x; a) = q_2(x)$) получим:

$$\bar{P}_2(\sigma) = \frac{TR_2}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \text{sha}|\sigma| + ka\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}} \quad (2.3)$$

$$\bar{q}_2(\sigma) = -\frac{iR_2}{F_s} \frac{ka\sigma e^{-2a|\sigma|} + 2\text{sgn } \sigma e^{-|\sigma|a} \text{sha}|\sigma|}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \text{sha}|\sigma| + ka\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}} \quad (2.4)$$

Таким образом, для искомых величин $P_2(x)$ и $q_2(x)$ находим:

$$P_2(x) = \frac{TR_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \sigma x d\sigma}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \text{sh}|\sigma|a + ka\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (2.5)$$

$$q_2(x) = -\frac{R_2}{\pi F_s} \int_0^\infty \frac{2e^{-\sigma a} \text{sha} \sigma + ka\sigma e^{-2\sigma a}}{T + 2\sigma e^{-\sigma a} \text{sha} \sigma + ka\sigma^2 e^{-2\sigma a}} \sin \sigma x d\sigma \quad (2.6)$$

При $a \rightarrow 0$ $P_2(x) = R_2 \delta(x)$, т.е. жесткость стрингеров стремится к нулю. Значит, в случае нечетной задачи, при приближении стрингеров их жесткость как бы уменьшается.

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_2(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Для $\bar{P}_2(\sigma)$ имеем

$$\bar{P}_2(\sigma) = R_2 \left\{ 1 - \frac{(2+k)ka\sigma^2}{T} + \frac{2(1+k)k^2|\sigma|^3}{T} + \left[\frac{(2+k)^2 a^2}{T^2} - \frac{2(2+3k)a^3}{3T} \right] \sigma^4 + O(|\sigma|^5) \right\}, \quad |\sigma| \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Тогда для $P_2(x)$ получим:

$$P_2(x) = R_2 \frac{12a^2(1+k)}{\pi T} \frac{1}{x^4} + O(x^{-6}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Используя формулу (1.16), для $q_2(x)$ получим:

$$q_2(x) = -R_2 \frac{4a^2(1+k)}{\pi T F_s} \frac{1}{x^3} + O(|x|^{-5}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Аналогичным образом получим формулы для $P_2(x)$ и $q_2(x)$ при $|x| < a$.

$$P_2(x) = \frac{TR_2}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a} \right)^{2m-2} B_m + \psi(1) - \ln(Tx) + \frac{\pi T|x|}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m}}{(2m)!} [\psi(2m+1) - \ln(Tx)] + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(T|x|)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} \quad (2.10)$$

$$q_2(x) = \frac{TR_2}{\pi F_s} \left\{ a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} B_m}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a} \right)^{2m-1} + x[\psi(2) - \ln(xT)] + \frac{\pi T|x|}{4} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m+1}}{2T(2m+1)!} [\psi(2m+2) - \ln(xT)] + \frac{\pi|x|}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Tx)^{2m+1}}{(2m+2)!} \right\} - \frac{R_2}{2F_s} \operatorname{sgn} x \quad (2.11)$$

где

$$B_m = \int_0^{\infty} \frac{(s - ks^2)s^{2(m-1)}e^{-2s}ds}{(T^* + s - se^{-2s} + ks^2e^{-2s})(T^* + s)}$$

Из полученных результатов можно получить решение задачи, когда при $y = a$ по направлению x действует сила $P\delta(x)$, а при $y = -a$ — сила $Q\delta(x)$. В этом случае контактные напряжения равны

$$P(x; a) = P_1(x) + P_2(x); \quad R_1 + R_2 = P$$

$$P(x; -a) = P_1(x) - P_2(x); \quad R_1 - R_2 = Q$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. // Ingenieur-Archiv. 1932. Bd.3. Heft 2. p.123-129.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980. 416с.
3. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 544с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
17.02.2004

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Саргсян А.М.

Ա.Մ. Սարգսյան

Մեպի համար առաձգականության տեսության հակահարթ խնդրում լարումների լոգարիթմական
 էզակիության մասին

Աշխատանքում հետազոտված է մեպի համար առաձգականության տեսության հակահարթ
 խնդիրներում լարումների լոգարիթմական էզակիության առաջացման հնարավորության հարկը կախված
 եզրային պայմանների տեսքից և մեպի անկյան քաղվածքի մեծությունից

Ստացված են պայմաններ, որոնց դեպքում մեպի զազաքի շրջակայքում լարումները ունեն
 լոգարիթմական էզակիություն

A.M.Sargsyan

On logarithmic singularities of stresses in an antiplane problem of elasticity theory for a wedge

В работе исследуется вопрос о возможности появления логарифмической особенности
 напряжений в антиплоских задачах теории упругости для клина в зависимости от вида
 граничных условий и величины угла раствора клина

Получены условия, при которых в окрестности вершины клина напряжения имеют
 логарифмическую особенность

Известно, что решение антиплоской задачи теории упругости для кли-
 на стремится к бесконечности при некоторых значениях угла раствора
 клина. Такой факт в [1] назван парадоксом, для устранения которого было
 привлечено однородное решение. Этот же метод был успешно применен в
 [2] при решении аналогичных задач для цилиндрически-анизотропного
 клина.

В этих и других работах [3, 4] показано, что напряжения в
 окрестности таких углов имеют логарифмическую особенность

В работе [5] установлено, что парадокс, как таковой, не существует и
 его появление связано с выбором метода решения задач.

В данной работе обсуждается вопрос о возможности появления
 логарифмической особенности напряжений в задачах теории упругости
 для однородного изотропного клина, находящегося в состоянии
 продольного сдвига, в зависимости от граничных условий, вида внешних
 воздействий и величины угла раствора клина.

Антиплоская задача для клина, занимающего в цилиндрических
 координатах область $0 \leq r \leq \infty$, $-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1$, $-\infty < z < \infty$
 формулируется в виде следующих трех граничных задач

$$\frac{\partial^2 u_z(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

$$u_z(r, \pm \theta_1) = \begin{cases} u_0^*(r/a)^\alpha, & r < a, \quad \alpha \geq 0 \\ u_0^*((b-r)/(b-a)), & a \leq r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (2)$$

$$\tau_{0z}(r, \pm \theta_1) = \begin{cases} \tau_0 (r/a)^\beta, & r \leq a, \quad \beta > -1 \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (3)$$

$$\tau_{0r}(r, +\theta_1) = \begin{cases} \tau_0 (r/a)^\gamma, & r \leq a, \quad \gamma > -1 \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$u_z(r, -\theta_1) = \begin{cases} u_0^- (r/a)^{\gamma+1}, & r < a, \quad \gamma > -1 \\ u_0^- ((b-r)/(b-a)), & a \leq r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (4)$$

где $u_z(r, \theta)$ — перемещение по направлению оси z , τ_{0z} и τ_{0r} — напряжения

$$\tau_{0z}(r, \theta) = \frac{G}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \tau_{0r}(r, \theta) = G \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

u_0^+ и τ_{0r} — заданные постоянные величины, G — модуль сдвига материала клина.

Применяя к (1)-(4) интегральное преобразование Меллина, для $u_z(r, \theta)$ в случае граничных условий (2)-(4) получим соответственно

$$u_z^{(2)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u_0^+ \sin p(\theta_1 + \theta) + u_0^- \sin p(\theta_1 - \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^{-p}}{(p + \alpha) \sin 2p\theta_1} \left(\frac{r}{a}\right)^{-p} f(p) dp \quad (5)$$

$$u_z^{(3)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{k_1^+ \sin p\theta}{p(p + \beta + 1) \cos p\theta_1} \left(\frac{r}{a}\right)^{-p} dp \quad (6)$$

$$u_z^{(4)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{k_1^- \sin p(\theta_1 - \theta) + u_0^- p f(p) \cos p(\theta_1 - \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^{-p}}{p(p + \gamma + 1) \cos 2p\theta_1} \left(\frac{r}{a}\right)^{-p} dp \quad (7)$$

где путь интегрирования (L) проходит правее мнимой оси комплексной плоскости p , но левее ближайших особых точек подынтегральных функций в (5)-(7),

$$f(p) = 1 + \frac{p + \nu}{b - a} \left(b \frac{(b/a)^p - 1}{p} - a \frac{(b/a)^{p+1} - 1}{p + 1} \right), \quad k_1^+ = \frac{\alpha \tau_0}{G}$$

Для исследования характера распределения напряжений в окрестности вершины клина ($r \rightarrow 0$) дополним прямую (L) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах.

Подынтегральные функции в (5)-(7) имеют только простые полюсы, если среди нулей их знаменателей нет совпадающих. Например, в (5) нули не совпадают, если при данном значении α угол раствора клина $2\theta_1 \neq \pi k / \alpha$, ($k = 1, 2, \dots$). Несовпадение нулей в (5)-(7) имеет место также и в тех случаях, когда $0 < \alpha < 1/2$, $-1 < \beta < -1/2$, $-1 < \gamma < -3/4$ при любом значении θ_1 из области $0 < 2\theta_1 \leq 2\pi$. Во всех этих случаях в окрестности вершины клина поведение упругих перемещений и напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned}
u_r^{(n)}(r, \theta) &= C^{(n)}(\theta) \left(\frac{r}{a}\right)^{v_n} + D^{(n)}(\theta) \left(\frac{r}{a}\right)^{p_1^{(n)}} \\
\tau_{rz}^{(n)}(r, \theta) &= \frac{C^{(n)}(\theta) v_n}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{v_n-1} + \frac{D^{(n)}(\theta) p_1^{(n)}}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{p_1^{(n)}-1} \\
\tau_{\theta z}^{(n)}(r, \theta) &= \frac{dC^{(n)}(\theta)}{ad\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^{v_n-1} + \frac{dD^{(n)}(\theta)}{ad\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^{p_1^{(n)}-1}
\end{aligned} \quad (8)$$

где

$$n = 2, 3, 4; \quad v_2 = \alpha, \quad v_3 = \beta + 1, \quad v_4 = \gamma + 1; \quad p_1^{(2)} = p_1^{(3)} = \pi/2\theta_1, \quad p_1^{(4)} = \pi/4\theta_1$$

$$C^{(2)}(\theta) = \frac{2u_2 \sin v_2 \theta_1 \cos v_2 \theta + 2u_1 \cos v_2 \theta_1 \sin v_2 \theta}{\sin 2v_2 \theta_1}$$

$$C^{(3)}(\theta) = \frac{k_1^* \sin v_3 \theta}{v_3 \cos v_3 \theta_1}, \quad u_{1,2} = \frac{u_0^+ + u_0^-}{2}$$

$$C^{(4)}(\theta) = \frac{k_1^* \sin v_4 (\theta_1 + \theta) + u_0^- v_4 f(-v_4) \cos v_4 (\theta_1 - \theta)}{v_4 \cos 2v_4 \theta_1}$$

$$D^{(2)}(\theta) = -\frac{2u_2 f(-p_1^{(2)}) \cos p_1^{(2)} \theta}{2\theta_1 (p_1^{(2)} - v_2)}, \quad D^{(3)}(\theta) = -\frac{2k_1^* \sin p_1^{(3)} \theta}{\pi (p_1^{(3)} - v_3)}$$

$$D^{(4)}(\theta) = \frac{k_1^* \sin p_1^{(4)} (\theta_1 + \theta) + u_0^- p_1^{(4)} f(-p_1^{(4)}) \cos p_1^{(4)} (\theta_1 - \theta)}{\pi (p_1^{(4)} - v_4)}$$

Из [8] видно, что и в случае граничных условий (2), когда на границах клина заданы значения упругих перемещений, напряжения, кроме обычной степенной особенности, имеют также независящую от угла θ_1 особенность $r^{\alpha-1}$ при $0 < \alpha < 1$. Причем, в отличие от граничных условий (3) и (4), в этой задаче обычная степенная особенность $(r/a)^{p_1^{(2)}-1}$ исчезает при $u_0^+ = -u_0^-$. Во всех задачах независящая от угла θ_1 особенность напряжений не появляется, если $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Заметим, что в случае граничных условий (4) в выражениях для напряжений дополнительно появляется слагаемое $r^{p_2^{(4)}-1}$, где $p_2^{(4)} = 1.5\pi/2\theta_1$ [6].

В подынтегральных функциях (5)-(7), кроме простых полюсов $p = -\alpha$ и $p = -\pi k/2\theta_1$, $p = -(\beta + 1)$ и $p = -\pi(2k - 1)/2\theta_1$, $p = -(\gamma + 1)$ и $p = -0.5\pi(2k - 1)/2\theta_1$, появляются и полюсы второго порядка при некоторых значениях угла θ_1 , определяемых из условий

$$\pi m/2\theta_1 = \alpha, \quad \pi(2m - 1)/2\theta_1 = \beta + 1, \quad 0.5\pi(2m - 1)/2\theta_1 = \gamma + 1 \quad (9)$$

соответственно ($m = 1, 2, \dots$).

При выполнении условий (9), т.е. при совпадении полюсов подынтегральных функций, для упругих перемещений и напряжений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)}(r, \theta) &= a_n^{(n)} \left[A_m^{(n)}(\theta) + B_m^{(n)}(\theta) \ln \frac{r}{a} \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{v_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k^{(n)}(\theta) \left(\frac{r}{a} \right)^{p_k^{(n)}} \\ \tau_{rz}^{(n)}(r, \theta) &= a_n^{(n)} \left[A_m^{(n)}(\theta) v_n + \left(1 + v_n \ln \frac{r}{a} \right) B_m^{(n)}(\theta) \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{v_n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k^{(n)}(\theta) p_k^{(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{p_k^{(n)}-1} \\ \tau_{\theta z}^{(n)}(r, \theta) &= a_n^{(n)} \left[\frac{dA_m^{(n)}(\theta)}{d\theta} + \frac{dB_m^{(n)}(\theta)}{d\theta} \ln \frac{r}{a} \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{v_n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\bar{B}_k^{(n)}(\theta)}{d\theta} \left(\frac{r}{a} \right)^{p_k^{(n)}-1} \end{aligned} \quad (10)$$

где штрих над суммой означает $k \neq m$.

$$a_m^{(2)} = \frac{(-1)^m}{2\theta_1}, \quad a_m^{(3)} = -\frac{2k_1^* (-1)^m}{\pi(2m-1)}, \quad a_m^{(4)} = \frac{2(-1)^m}{\pi(2m-1)}$$

$$p_k^{(2)} = \frac{\pi}{2\theta_1} k, \quad p_k^{(3)} = \frac{\pi}{2\theta_1} (2k-1), \quad p_k^{(4)} = \frac{\pi/2}{2\theta_1} (2k-1)$$

$$\begin{aligned} A_m^{(2)}(\theta) &= (2\theta_1 u_1 + 2\theta u_1) \cos \frac{\pi}{2} m \cos v_2 \theta - (2\theta_1 u_1 + 2\theta u_2) \sin \frac{\pi}{2} m \sin v_2 \theta + \\ &+ f(-v_2) [2u_2 \sin \frac{\pi}{2} m \cos v_2 \theta + 2u_1 \cos \frac{\pi}{2} m \sin v_2 \theta] \end{aligned}$$

$$A_m^{(3)}(\theta) = \theta \cos v_3 \theta - \frac{2\theta_1}{2\pi(2m-1)} \sin v_3 \theta$$

$$\begin{aligned} A_m^{(4)}(\theta) &= k_1^* [\sin v_4 (\theta_1 + \theta) + (\theta_1 + \theta) \cos v_4 (\theta_1 + \theta)] + \\ &+ u_0 \left[v_4 (\theta_1 - \theta) \sin v_4 (\theta_1 - \theta) + (1 - v_4 f^*(-v_4)) - \frac{2v_4}{\pi} \frac{2\theta_1}{2k-1} \right] \cos v_4 (\theta_1 - \theta) \end{aligned}$$

$$B_m^{(2)}(\theta) = 2u_2 \sin \frac{\pi}{2} m \cos v_2 \theta - 2u_1 \cos \frac{\pi}{2} m \sin v_2 \theta$$

$$B_m^{(3)}(\theta) = \sin v_3 \theta, \quad B_m^{(4)} = \sin v_4 (\theta_1 + \theta)$$

$$\bar{B}_k^{(2)}(\theta) = (-1)^k \frac{(2u_1 \sin p_k^{(2)} \theta_1 \cos p_k^{(1)} \theta + 2u_1 \cos p_k^{(2)} \theta_1 \sin p_k^{(1)} \theta) f(-p_k^{(2)})}{2\theta_1 (p_k^{(2)} - v_2)}$$

$$\bar{B}_k^{(3)}(\theta) = (-1)^{k-1} \frac{2 \sin p_k^{(3)} \theta}{\pi (p_k^{(3)} - v_3)}$$

$$\bar{B}_k^{(4)}(\theta) = (-1)^{k-1} \frac{2(k_1^* \sin p_k^{(4)} (\theta_1 + \theta) + u_0 p_k^{(4)} f(-p_k^{(4)}) \cos p_k^{(4)} (\theta_1 - \theta))}{\pi (p_k^{(4)} - v_4)}$$

Как следует из (10), напряжения при $r \rightarrow 0$ имеют логарифмическую особенность, если $v_n = 1$ ($n = 2, 3, 4$), т.е. когда

$$\text{а) } \alpha = 1, \text{ б) } \beta = 0, \text{ в) } \gamma = 0 \quad (11)$$

а) $\alpha = 1$. Из первого условия (9) следует, что логарифмическая особенность напряжений появляется только при двух значениях угла раствора клина: $2\theta_1 = \pi$ (когда $m = 1$) и $2\theta_1 = 2\pi$ ($m = 2$). В последнем случае, кроме логарифмической особенности, возникает и обычная степенная особенность r^{-1} . Поэтому, при $u_2 = 0$, а $2\theta_1 = \pi$, исчезает логарифмическая особенность, а при $2\theta_1 = 2\pi$ — степенная особенность.

При $u_1 = 0$ исчезает логарифмическая особенность для $2\theta_1 = 2\pi$. Аналогичный результат был получен в работе [4] при изучении антиплоской задачи электроупругости для клина, на границах которого электростатический потенциал линейно зависит от r .

В интервале $0.5 \leq \alpha < 1$ ($\pi < 2\theta_1 < 2\pi$, $m = 1$) возникает обычная степенная особенность $r^{\alpha-1}$ ($\alpha = \pi/2\theta_1$) и особенность смешанного типа $r^{\alpha-1} \ln r$. При $u_2 = 0$ исчезает второй тип особенности, а особенность $r^{\alpha-1}$, представляющая собой обычную степенную особенность, в данном интервале изменения параметра α устранить невозможно.

Если $\alpha > 1$, то возникшая обычная степенная особенность устраняется при $u_2 = 0$.

б) $\beta = 0$. В этом случае логарифмическая особенность возникает только при $2\theta_1 = \pi$ ($m = 1$) и устранить ее невозможно.

Для произвольного значения β из интервала $-0.5 \leq \beta < 0$ ($\pi < 2\theta_1 < 2\pi$, $m = 1$) и в этой задаче появляются особенности типа r^β и $r^\beta \ln r$ ($\beta = \pi/2\theta_1 - 1$), которые также невозможно устранить.

При $\beta > 0$ имеет место обычная степенная особенность, когда $\pi < 2\theta_1 \leq 2\pi$.

в) $\gamma = 0$. Здесь логарифмическая особенность появляется при $2\theta_1 = \pi/2$ ($m = 1$) и $2\theta_1 = 3\pi/2$ ($m = 2$). В последнем случае появляется и обычная степенная особенность $r^{-1/2}$.

В интервале $-3/4 \leq \gamma < -1/4$ ($2\pi/3 < 2\theta_1 \leq 2\pi$, $m = 1$), кроме особенности r^γ и $r^\gamma \ln r$ ($\gamma = 0.5\pi/2\theta_1 - 1$) возникает еще особенность $r^{1.5\pi/2\theta_1 - 1}$, что и следовало ожидать.

При $-1/4 \leq \gamma < 0$ в интервале $\pi/2 < 2\theta_1 < 3\pi/2$ напряжения имеют особенности $r^{-1/2}$ и $r^{-1/2} \ln r$, а в интервале $3\pi/2 < 2\theta_1 < 2\pi$ появляется дополнительное слагаемое типа $r^{-3/2}$.

Для $\gamma > 0$ имеет место обычная степенная особенность.

Таким образом, в настоящей работе установлено, что напряжения в антиплоской задаче теории упругости для изотропного клина могут иметь разные типы особенностей:

1. Независящая от величины угла раствора однородного клина особенность $r^{-\delta}$ ($0 < \delta < 1$).
2. Логарифмическая особенность $\ln r$.
3. Обычная степенная особенность $r^{\alpha-1}$.
4. Особенность смешанного типа $r^{-\delta} \ln r$.

Получены пределы изменения параметров α , β и γ , при которых напряжения имеют те или иные типы особенностей.

В граничной задаче (1)-(2) имеется возможность для устранения особенностей последних трех типов.

Заметим, что такие же особенности напряжений возникают и в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного клина с той лишь разницей, что в данном случае при тех же внешних воздействиях в знаменателях подынтегральных выражений (5)-(7) совпадают нули $p + v_n = 0$ ($n = 2, 3, 4$) и соответствующих трансцендентных уравнений [6].

В заключение отметим следующее. Если в подынтегральном выражении (5) появляются полюсы третьего порядка, что может иметь место, например, при следующих граничных условиях:

$$u_{\pm}(r, \pm 0, \cdot) = \begin{cases} u^{\pm}(r/a)^{\alpha} \ln(r/a), & r \leq a \\ 0, & r > a, \quad a > 0 \end{cases}$$

поведение напряжений в окрестности угловой точки представляется в виде

$$\tau = [\bar{A}_v(\theta) - \bar{B}_v(\theta) \ln r/a + \bar{C}_v(\theta) \ln^2 r/a] (r/a)^{\alpha-1}.$$

Аналогичная ситуация имеет место и для граничных условий (6) и (7).

Исходя из того, что частная производная бигармонической функции $u(x, y, \lambda)$ по параметру λ также есть бигармоническая функция, в работе [7] обсуждены вопросы о возможности появления особенности напряжений $\ln r$ или $\ln^2 r$ в плоской задаче теории упругости для однородного клина.

Так как уравнение (1) и аналогичные граничные условия имеют место и для других физическх полей (тепловых, диффузионных, фильтрационных, электрических, магнитных и т.д.), то метод решения поставленных задач и основные выводы применимы и к этим полям [6, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ting T.C.T. Elastic wedge subjected to antiplane shear tractions — a paradox explained. //Q.J. of Mech. appl. Math, 1985. Vol. 38. Pt. 2. P. 245-255.
2. Саркисян В.С., Белубекян В.М. Об одной антиплоской задаче для клина. //Ученые записки ЕГУ. 1986. №3. С. 36-40.
3. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского ун-та. 1997. 241с.
4. Галлчян П.В. Определение особенностей вблизи вершины сектора из пьезокристалла. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. №5. С. 35-39.
5. Григорян Э.Х. О контактных задачах для полуплоскости и составной плоскости, усиленных кусочно-однородными тонкостенными элементами, и о методе плоских волн в динамических задачах теории упругости. //Диссертация на соискание уч. степ. док. Физ.-мат наук. Ереван. 1991. 384с.
6. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. //Докл. АН АрмССР. 1988. №4. С. 161-165.
7. Sinclair G.B. Logarithmic Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. //Trans. Of the ASME, J. appl. Mech, 1999. Vol. 66. June. P. 556-560.
8. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного клина. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. №1. С. 17-22.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.07.2003



**ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ
НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Атоян А.А., Саркисян С.О.

Ա.Ա. Աթոյան, Ս.Օ. Սարգսյան

Բարակ սալի դինամիկական խնդիրը առածգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հիման վրա

Դիտարկվում է բարակ սալի եռաչափ տիրույթում առածգականության ոչ սիմետրիկ ընդհանուր եռաչափ տեսության (երբ պտույտներն ազատ են) նախնական-եզրային խնդիրը: Խնդրի ուսումնասիրման համար որպես եիմք ընդունելով ասիմպտոտիկ մեթոդը, կառուցվում է ճերքին խնդրի (կիրառական երկչափ տեսության) որոշիչ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը, ինչպես նաև եզրային և նախնական պայմանները: Սահմանային շերտը համարվում է քվադրատուստիկ: Նույն խնդրի համար, որոշակի սահմանափակումներ դնելով սալի նյութի որոշ ֆիզիկական հաստատունների վրա (ասիմպտոտիկ իմաստով), ցույց է տրվում, որ ճերքին խնդրի ասիմպտոտիկ վերլուծութունը այս դեպքում հանգեցնում է միկրոպոլյար բարակ սալի կիրառական տեսության, երբ պտույտները արտահայտվում են տեղափոխություններով (կաշկանդված պտույտներ):

Մոանձին ուսումնասիրվում է նաև այն դեպքը, երբ բարակ սալի եռաչափ տիրույթում եննց սկզբից ստրվում են առածգականության ոչ սիմետրիկ (եռաչափ) տեսության երկրորդ ստորբերակի (այսպես կոչված կաշկանդված պտույտներով տեսության) հավասարումները, նախնական և եզրային պայմանները:

A.A. Atoyan, S.O. Sargsyan

The Problem of the Thin Plate's Dynamics on the basis of the Asymmetrical Theory of Elasticity

В трехмерной области тонкой пластинки рассматривается начально-краевая задача обшей трехмерной несимметричной теории упругости (когда вращения свободны). Для изучения задачи как основу принимая асимптотический метод, построена определяющая система дифференциальных уравнений, а также граничные и начальные условия для внутренней задачи (для прикладной двумерной теории). Задача попересечом принимается как квазистатическая. Для этой же задачи, требуя определенных ограничения (в смысле асимптотики) от некоторых физических констант материала пластинки, доказывается, что асимптотическое разложение для внутренней задачи, для этого случая, приведет к прикладной теории микрополярных пластин, когда повороты выражаются через перемещения (стесненные повороты). Отдельно изучается также тот случай, когда в тонкой трехмерной области пластинки, с самого начала, даны уравнения, граничные и начальные условия второго варианта трехмерной несимметричной теории упругости (так называемая теория со стесненным вращением).

1. Глубокое изучение и детальное математическое описание механики явления, связанное с внутренним взаимодействием частиц в упругих телах, особенно имеющих микроструктуру, привели к обобщению классической математической модели теории упругости и созданию несимметричной (моментной, микрополярной) теории упругости, или иначе, континуума Коссера [1-7]. В настоящее время, накопленные экспериментальные факты свидетельствуют о высокой роли внутренней структуры материала в процессах, сопровождающих его деформирование. Особый интерес в этой области связан с появлением новой технологической возможности не только наблюдать и измерить элементы внутренней структуры твердых тел, но и оказывать влияние на эту структуру, а в случае нанотехнологии и, создавать необходимые или требуемые структурные элементы на микроуровне. Выявление динамических эффектов в твердых телах с микроструктурой является весьма эффективным средством изучения структуры и свойств современных материалов, для разработки новых методов и средств измерения, контроля и диагностики. На основе структурно-феноменологического подхода для изучения подобных динамических задач, а также задач о концентрации напряжений вокруг отверстий и трещин и.т.д. послужит математическая модель несимметричной теории упругости.

Актуальна проблема построения таких математических моделей динамики микрополярных тонких стержней, пластин и оболочек [1], которые могли бы с достаточной математической строгостью адекватно отражать физическую сущность соответствующих трехмерных начально-граничных задач, и которые, были бы приемлемы для их вычислительной реализации.

Асимптотический метод является особенно естественным методом в теории тонких стержней, пластин и оболочек, так как последние представляют собой тонкое деформируемое тело и малый параметр (относительная толщина) в сущности входит в определение самого объекта исследования. Асимптотические методы по классической теории упругости для тонких стержней, пластин и оболочек развиты в работах [8-11].

В работе [12], для задачи статики, развивается асимптотический подход и на этой базе строится общая теория тонких пластин на основе несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ). Изучается внутренний итерационный процесс, результаты которого приводят к общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин. Строится теория погранслоя по НТУ с НППВ. В отличие от классического случая, когда имеем плоский и антиплоский силовые погранслои, доказывается существование четырех типов погранслоев (силовой и моментный плоский и антиплоский погранслои). Изучаются основные свойства указанных типов погранслоев. Строятся функции типа погранслоя. Изучается задача сращивания двух асимптотических разложений (внутреннего итерационного процесса и погранслоя), в результате которого трехмерные граничные условия несимметричной теории упругости, которые поставлены на боковой цилиндрической поверхности пластинки, расщепляются между общей прикладной-двумерной теорией пластин и погранслоями. В результате, общая прикладная-двумерная статическая теория микрополярных тонких пластин выделяется как отдельная красивая задача математической физики. Разделяются также красивые задачи всех четырех типов погранслоев. Имеются результаты построения общей статической теории тонких пластин на основе НТУ со стесненным вращением (НТУ со СВ).

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Отнесем оси x_1, x_2 декартовой прямоугольной системы координат $x_i (i=1,2,3)$ к срединной плоскости пластинки, ось x_3 направим по вертикали вверх.

Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи НТУ с НППВ [2].

Уравнения движения

$$\sigma_{j,i1} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \mu_{j,i1} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = J \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{ij} + \beta \chi_{kk} \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.2)$$

либо в обратной форме

$$\begin{cases} \gamma_{ji} = (\mu' + \alpha') \sigma_{ji} + (\mu' - \alpha') \sigma_{ij} + \lambda' \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ \chi_{ji} = (\gamma' + \varepsilon') \mu_{ji} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{ij} + \beta' \mu_{kk} \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.2')$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ji} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijk} \omega_k, \quad \chi_{ji} = \omega_{j,i} \quad (1.3)$$

где σ_{ij}, μ_{ij} — компоненты силового и моментного тензоров напряжений, γ_{ij}, χ_{ij} — компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения; $\tilde{u}$ —

вектор перемещения, $\bar{\omega}$ —вектор независимого поворота точек тела-пластинки; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ или $\lambda', \mu', \alpha', \beta', \gamma', \varepsilon'$ —упругие константы материала пластинки; $\varepsilon_{,i}$ —символы Леви-Чивита; запятой в индексах обозначается дифференцирование по соответствующей независимой переменной. Индексы i, j принимают значения 1, 2, 3.

На плоскостях $x_3 = \pm h$ пластинки считаются заданными силовые и моментные граничные условия

$$\sigma_{3i} = p_i^*, \mu_{3i} = m_i^* \text{ при } x_3 = \pm h, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

где p_i^*, m_i^* ($i = 1, 2, 3$)—компоненты внешних заданных усилий и моментов на лицевых плоскостях пластинки.

На боковой цилиндрической поверхности ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$) в общем случае считаем заданными граничные условия смешанного типа

$$\begin{cases} \sigma_{ji} \cdot n_j = p_{,i}, \mu_{ji} \cdot n_j = m_{,i} \text{ на } \Sigma_1 \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ \bar{u} = \bar{u}_*, \bar{\omega} = \bar{\omega}_* \text{ на } \Sigma_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

где $p_{,i}, m_{,i}$ ($i = 1, 2, 3$)—компоненты заданных внешних усилий и моментов; $\bar{u}_*, \bar{\omega}_*$ —заданные векторы перемещений и независимого поворота.

Будем считать, что заданы также начальные условия для вектора перемещения $\bar{u}$, вектора независимого поворота $\bar{\omega}$, вектора поступательной скорости $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ и вектора угловой скорости $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}$ для частиц тела при $t = 0$.

Решение поставленной начально-граничной задачи (1.1)–(1.5) для пластинки складывается из суммы решений симметричной по x_3 и обратно-симметричной задач (в симметричной задаче четные по x_3 величины будут $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{13}, \mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_1, \mu_2, \omega_3$, нечетные— $\sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{32}, \sigma_{23}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \omega_1, \omega_2, \mu_3$; в обратно-симметричной задаче—наоборот).

Предполагается, что толщина пластинки мала по сравнению с характерным размером ее a в срединной плоскости ($2h \ll a$, $\delta = h/a \ll 1$ —малый геометрический параметр).

Хотя исходные уравнения и граничные условия (1.1)–(1.5) НТУ с ИППВ не содержат малого параметра δ , при введении надлежащих масштабов для координат и во времени, эти уравнения принимают форму, в которой малый параметр будет стоять перед некоторыми производными.

Поэтому, метод, излагаемый в данной работе, применяемый к решению динамических задач микрополярной упругой тонкой пластинки, будет относиться к категории методов сингулярных возмущений [8–11]. Придерживаясь основополагающего принципа асимптотической теории интегрирования сингулярно-вырождающихся систем дифференциальных уравнений, в основу рассуждений будет положено свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) по НТУ, испытывающий динамическое воздействие, выражаемое структурной формулой

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}}. \quad (1.6)$$

В этом равенстве нижними индексами отмечены по НТУ полное, внутреннее (проникающее) и краевое НДС пластинки. Здесь принято, что краевое НДС пластинки имеет квазистатический характер и, следовательно, оно возникает вблизи

боковой цилиндрической поверхности пластинки Σ и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от нее в глубь трехмерного тела тонкой пластинки. Что касается внутреннего НДС, то оно в каждом приближении будет описываться двумерными динамическими дифференциальными уравнениями (по переменным x_1 и x_2 и времени t).

Концепция расчленения НДС тонкой пластинки по НТУ на внутреннее (ВНДС) и краевое (КНДС) и факт коренного различия между их свойствами (как физического, так и математического характера) приведут к их раздельному исследованию. С этой точки зрения, основным предметом изучения будет вопрос о приближенных методах внутреннего расчета пластинки (определение НДС по НТУ) и краевого расчета (определение квазистатического КНДС по НТУ). Оба метода строятся на базе асимптотического (при малой относительной толщине пластинки) интегрирования трехмерных линейных уравнений (1.1)-(1.3) динамической задачи НТУ с учетом соответствующих граничных условий (1.4), (1.5) и начальных условий трехмерной НТУ с НППВ.

Таким образом, в трехмерных уравнениях НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) выполним замену независимых переменных

$$x_1 = a\zeta, \quad x_2 = a\eta, \quad x_3 = h\zeta, \quad t = t_0\tau \quad (1.7)$$

где $t_0 = \delta^0 h / c_0$.

Здесь c_0 — характеристическая скорость распространения упругих волн в бесконечном стержне (по классической теории упругости).

Величина δ характеризует НДС по времени. Перейдем также к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \frac{u_i}{a}, \quad \bar{\sigma}_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\mu}_\beta = \frac{\mu_\beta}{\rho c_0^2 a}, \quad \delta^k \cdot \bar{J} = \frac{J}{\rho h^2} \\ \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\rho c_0^2 a}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho c_0^2 a^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\rho c_0^2 a^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

и после замены независимых переменных по формулам (1.7), на место уравнений (1.1)-(1.3) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром δ .

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q^{(m)} = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)} \quad (1.9)$$

где Q — любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов; q — натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений (после подстановки (1.7)-(1.9) в систему уравнений (1.1)-(1.3) и приравнявая в каждом уравнении к нулю коэффициенты при всех степенях δ , начиная с самого низкого).

Таким образом, получим (здесь мы изложим только задачу изгиба):

для обратно-симметричной по x_3 задачи (изгиб пластинки по НТУ с НППВ):

$$\begin{cases} q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, u_3, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \omega_1, \omega_2 \\ q = 0 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}, u_1, u_2, \omega_3 \\ \theta = -1, k = -2 \end{cases} \quad (1.10)$$

Специфические свойства внутреннего итерационного процесса для трехмерного тонкого тела пластинки состоят в следующем:

а) так как полученная в асимптотических приближениях система уравнений НТУ с НППВ допускает интегрирование по переменной ξ , то в результате получается, что ВНДС изменяется по толщине пластинки по довольно простому закону;

б) в описании ВНДС остается выяснить роль пространственных переменных (ξ, η) , задающих положение точки на срединной плоскости пластинки.

С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты.

Для задачи изгиба пластинки по НТУ (обратно-симметричная по x_3 задача) этими понятиями будут [12]: усилия $N_{mn}(mn:13,31,23,32)$, моменты $L_{ij}(ij:11,22,33,12,21)$, $M_{ij}(ij:11,22,33,12,21)$ и гипермоменты $\Lambda_{mn}(mn:13,31,23,32)$:

$$N_{mn} = \int_{-h}^h \sigma_{mn} dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad \Lambda_{mn} = \int_{-h}^h \mu_{mn} x_3 dx_3 \quad (1.11)$$

Основная разрешающая система уравнений для ВНДС по НТУ с НППВ для задачи изгиба на уровне исходного асимптотического приближения ($s=0$), т. е. основная разрешающая система уравнений прикладной-двумерной теории тонких пластин по НТУ с НППВ получается относительно величин: $N_{13}^{(0)}, N_{23}^{(0)}, N_{31}^{(0)}, N_{32}^{(0)}, L_{11}^{(0)}, L_{22}^{(0)}, L_{33}^{(0)}, L_{12}^{(0)}, L_{21}^{(0)}, k_{11}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{33}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)}, \Gamma_{13}^{(0)}, \Gamma_{23}^{(0)}, \Gamma_{31}^{(0)}, \Gamma_{32}^{(0)}, W^{(0)}, O_1^{(0)}, O_2^{(0)}$ и выражается так:

уравнения движения

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial x_2} = 2h\rho \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} - 2Z \\ \frac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2} - N_{13}^{(0)} - N_{31}^{(0)} = 2hJ \frac{\partial^2 O_1^{(0)}}{\partial t^2} - 2m \\ \frac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{33}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{23}^{(0)} - N_{32}^{(0)} = 2hJ \frac{\partial^2 O_2^{(0)}}{\partial t^2} - 2p \end{cases} \quad (1.12)$$

соотношения упругости

$$\begin{cases} N_{13}^{(0)} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{13}^{(0)} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}^{(0)}] \quad (1 \rightarrow 3) \\ N_{23}^{(0)} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{23}^{(0)} + (\mu - \alpha)\Gamma_{32}^{(0)}] \quad (2 \rightarrow 3) \\ L_{11}^{(0)} = 2h[(2\gamma + \beta)k_{11}^{(0)} + \beta(k_{22}^{(0)} + k_{33}^{(0)})] \quad \left(\begin{matrix} 11 \rightarrow 22 \rightarrow 33 \\ \text{круг, перест. индексов} \end{matrix} \right) \\ L_{12}^{(0)} = 2h[(\gamma + \epsilon)k_{12}^{(0)} + (\gamma - \epsilon)k_{21}^{(0)}] \quad (1 \rightarrow 2) \end{cases} \quad (1.13)$$

к которым следует присоединить полученные для $N_{31}^{(0)}, N_{32}^{(0)}$ и $L_{33}^{(0)}$ выражения

$$N_{31}^{(0)} = 2hX \quad (1 \rightarrow 2, X \rightarrow Y), \quad L_{33}^{(0)} = 2hq \quad (1.14)$$

геометрические соотношения

$$\begin{cases} \Gamma_{13}^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_1} + O_2^{(0)}, & \Gamma_{23}^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_2} - O_1^{(0)} \\ k_{11}^{(0)} = \frac{\partial O_1^{(0)}}{\partial x_1} (1 \rightarrow 2), & k_{12}^{(0)} = \frac{\partial O_2^{(0)}}{\partial x_1} (1 \rightarrow 2) \end{cases} \quad (1.15)$$

В (1.12) и (1.14) следует учесть также

$$\begin{aligned} X &= \frac{p_1^* - p_1}{2}, \quad Y = \frac{p_2^* - p_2}{2}, \quad Z = \frac{p_3^* + p_3}{2} \\ m &= \frac{m_1^* + m_1}{2}, \quad p = \frac{m_2^* + m_2}{2}, \quad q = \frac{m_3^* - m_3}{2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отметим, что величины $W^{(0)}(x_1, x_2, t)$, $O_1^{(0)}(x_1, x_2, t)$, $O_2^{(0)}(x_1, x_2, t)$ представляют собой вертикальное перемещение и повороты вокруг осей x_1 и x_2 точек срединной плоскости пластинки.

Остальные величины:

$M_{11}^{(0)}, M_{22}^{(0)}, M_{33}^{(0)}, M_{21}^{(0)}, M_{33}^{(0)}, \Lambda_{13}^{(0)}, \Lambda_{23}^{(0)}, \Lambda_{31}^{(0)}, \Lambda_{32}^{(0)}, K_{11}^{(0)}, K_{22}^{(0)}, K_{12}^{(0)}, K_{21}^{(0)}, K_{33}^{(0)}, \iota_{13}^{(0)}, \iota_{23}^{(0)}, \iota_{31}^{(0)}, \iota_{32}^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \Omega_3^{(0)}$ определяются после решения основной разрешающей системы уравнений (1.12)-(1.15) по формулам: формулы типа физических соотношений

$$\begin{cases} M_{11}^{(0)} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} (K_{11}^{(0)} + \nu K_{22}^{(0)}) + \frac{\nu}{1-\nu} M_{33}^{(0)} (1 \rightarrow 2) \text{ где } M_{33}^{(0)} = \frac{2h^2}{3} Z \\ M_{12}^{(0)} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{12}^{(0)} + (\mu - \alpha) K_{21}^{(0)}] (1 \rightarrow 2) \\ \Lambda_{13}^{(0)} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\epsilon}{\gamma + \epsilon} \iota_{13}^{(0)} + \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma + \epsilon} \Lambda_{31}^{(0)} (1 \rightarrow 2), \text{ где } \Lambda_{31}^{(0)} = \frac{2h^2}{3} m (1 \rightarrow 2, m \rightarrow p) \end{cases}$$

формулы типа геометрических соотношений

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^{(0)} = \beta_1^{(0)} - O_2^{(0)}, & \Gamma_{12}^{(0)} = \beta_2^{(0)} + O_1^{(0)}, & K_{11}^{(0)} = \frac{\partial \beta_1^{(0)}}{\partial x_1} (1 \rightarrow 2), & K_{31}^{(0)} = 0 \\ K_{12}^{(0)} = \frac{\partial \beta_2^{(0)}}{\partial x_1} - \Omega_3^{(0)}, & K_{21}^{(0)} = \frac{\partial \beta_1^{(0)}}{\partial x_2} - \Omega_3^{(0)}, & k_{31}^{(0)} = \Omega_3^{(0)}, & \iota_{11}^{(0)} = \frac{\partial \Omega_3^{(0)}}{\partial x_1} (1 \rightarrow 2), & \iota_{31}^{(0)} = 0 (1 \rightarrow 2) \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1^{(0)} &= \frac{1}{2h} \left[\frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} N_{31}^{(0)} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} N_{13}^{(0)} \right] + O_2^{(0)}, \quad \beta_2^{(0)} = \frac{1}{2h} \left[\frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} N_{32}^{(0)} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} N_{23}^{(0)} \right] - O_1^{(0)} \\ \Omega_3^{(0)} &= \frac{1}{2h} \left[\frac{\gamma + \beta}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} L_{11}^{(0)} - \frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} (L_{11}^{(0)} + L_{22}^{(0)}) \right] \end{aligned}$$

Компоненты вектора перемещения и вектора независимого поворота точек трехмерного тела-пластинки выражаются формулами:

$$u_1 = x_3 \beta_1^{(0)} (1 \rightarrow 2), \quad u_3 = W^{(0)}, \quad \omega_1 = O_2^{(0)} (1 \rightarrow 2), \quad \omega_3 = x_3 \Omega_3^{(0)}$$

а компоненты силового и моментного тензоров напряжений, компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения будут определяться по выражениям:

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2h} N_{13}^{(0)} (1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3), \quad \sigma_{ij} = \frac{3}{2h^3} x_3 M_{ij}^{(0)} (ij: 11, 22, 33, 12, 21)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2h} L_0^{(0)} (ij: 11, 22, 33, 12, 21), \quad \mu_{13} = \frac{3}{2h^3} x_3 \Lambda_{13}^{(0)} (1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3)$$

$$\gamma_{13} = \Gamma_{13}^{(0)} (1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3), \quad \gamma_{ij} = x_3 K_{ij}^{(0)} (ij: 11, 22, 12, 21), \quad \gamma_{33} = K_{33}^{(0)}$$

$$\chi_{ij} = k_{ij}^{(0)} (ij: 11, 22, 33, 12, 21), \quad \chi_{13} = x_3 \iota_{13}^{(0)} (1 \rightarrow 2), \quad \chi_{31} = \iota_{31}^{(0)} (1 \rightarrow 2)$$

Вблизи боковой поверхности пластинки возникает напряженное состояние погранслоя по НТУ с НППВ, которое в квазистатическом приближении резко затухает при удалении от нее в глубь тела трехмерной пластинки. Введение этого напряженного состояния по НТУ дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности, сформулированным в терминах трехмерной НТУ с НППВ, установить граничные условия внутренней задачи и определить напряженное состояние вблизи края.

Считаем, что боковая цилиндрическая поверхность пластинки Σ представляет собой замкнутый торец, и выбираем триортогональную систему координат $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ так, чтобы она совмещалась с координатной поверхностью $\alpha_i = \alpha_{i0}$.

Погранслоем около края $\alpha_1 = \alpha_{10}$ имеет большую изменчивость в направлении α_1 и α_3 , а в направлении α_2 и во времени имеет ту же изменчивость, что и внутреннее напряженное состояние.

В трехмерных уравнениях НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) в новых ортогональных криволинейных координатах $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ вводим следующие замены:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = h \xi_1, \quad \alpha_2 = a \eta, \quad \alpha_3 = h \zeta, \quad t = t_0 \tau \quad (1.17)$$

и перейдем к безразмерным величинам (1.8). Кроме того, коэффициенты Ляме и геодезические кривизны координатных линий α_1 и α_2 криволинейной системы координат представим в виде рядов Тейлора вблизи значения $\alpha_1 = \alpha_{10}$.

Решение преобразованных таким образом уравнений НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) представим в виде

$$R = \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s R^{(s)} \quad (1.18)$$

где R — любое из безразмерных силовых и моментных напряжений, линейных безразмерных перемещений и независимых поворотов. Так как силовые и моментные неоднородные условия (1.4), заданные на лицевых плоскостях пластинки $\xi = \pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (1.18) должно удовлетворять однородным граничным условиям на плоскостях $\xi = \pm 1$:

$$\sigma_{11} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0, \quad \mu_{31} = \mu_{32} = \mu_{33} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1.$$

После подстановки (1.18) в преобразованную с помощью (1.17) систему уравнений НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях, начиная с наименьшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно $R^{(s)}$, если

$$\bar{\sigma}_i = \delta^s \sum_{j=0}^s \delta^j \sigma_{ij}^{(s)}, \quad \bar{\mu}_a = \delta^s \sum_{j=0}^s \delta^j \mu_{ij}^{(s)} \quad (ij: 11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32)$$

$$\bar{u}_i = \delta^{r+1} \sum_{j=0}^S \delta^j v_i^{(j)}, \omega_i = \delta^{r+1} \sum_{j=0}^S \delta^j \omega_i^{(j)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

где целое число r характеризует интенсивность погранслоя.

Полученную систему уравнений погранслоя по НТУ с ИППВ в асимптотическом приближении ($S = 0$) можем представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial t_1} = (2\mu' + \lambda')\sigma_{11}^{(0)} + \lambda'(\sigma_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)}) \\ \text{а) } 0 = (2\mu' + \lambda')\sigma_{22}^{(0)} + \lambda'(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)}), \quad \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \zeta} = (2\mu' + \lambda')\sigma_{33}^{(0)} + \lambda'(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial t_1} = (\mu' + \alpha')\sigma_{13}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{31}^{(0)}, \quad \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \zeta} = (\mu' + \alpha')\sigma_{31}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{13}^{(0)}$$

$$\frac{\partial \mu_{11}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \mu_{31}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{11}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \mu_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial t_1} = (2\gamma' + \beta')\mu_{11}^{(0)} + \beta'(\mu_{22}^{(0)} + \mu_{33}^{(0)})$$

$$\text{б) } 0 = (2\gamma' + \beta')\mu_{22}^{(0)} + \beta'(\mu_{11}^{(0)} + \mu_{33}^{(0)}), \quad \frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \zeta} = (2\gamma' + \beta')\mu_{33}^{(0)} + \beta'(\mu_{11}^{(0)} + \mu_{22}^{(0)}) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial t_1} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{13}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{31}^{(0)}, \quad \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \zeta} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{31}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{13}^{(0)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial t_1} = (\mu' + \alpha')\sigma_{12}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{21}^{(0)}$$

$$\text{в) } 0 = (\mu' + \alpha')\sigma_{21}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{12}^{(0)}, \quad 0 = (\mu' + \alpha')\sigma_{23}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{12}^{(0)} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \zeta} = (\mu' + \alpha')\sigma_{32}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{23}^{(0)}$$

$$\frac{\partial \mu_{12}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \mu_{32}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial t_1} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{12}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{21}^{(0)}$$

$$\text{г) } 0 = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{21}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{12}^{(0)}, \quad 0 = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{23}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{32}^{(0)} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \zeta} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{32}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{23}^{(0)}$$

При $S = 0$, уравнения систем (1.19)-(1.22) однородны, независимы и совпадают с соответствующими системами уравнений погранслоя статической задачи НТУ с ИППВ для пластинки [12]. Таким образом, определение квазистатического погранслоя в динамической задаче НТУ с ИППВ также, как и в статике [12], распадается на решение силового (плоского и антиплоского) и моментного (плоского и антиплоского) задач для полуплоскости. Причем для динамических процессов, для которых изменчивость по времени ω определяется по (1.10) (для задачи изгиба), все четыре задачи силового и моментного погранслоев (1.19)-(1.22), как отметили, имеют квазистатический характер, т. е. инерционные члены, (как поступательного движения, так и вращательного движения частиц тела пластинки) вообще не входят в уравнения ряда первых приближений, а в тех приближениях, в которых они проявляются, определяются через величины, известные из предыдущих приближений.

Итак, проблему раздельного построения дифференциальных уравнений внутренней задачи и квазистатических погранслоев в динамической теории пластин по НТУ с НППВ считаем решенной.

Таким образом, на основе структурной формулы (1.6), общее решение поставленной начально-краевой задачи НТУ с НППВ (1.1)-(1.5) можем представить в виде

$$J = \delta^{r+s} Q^{(s)} + \delta^{r+\mu} R^{(\mu)} + \delta^{r+\mu} R^{(s)} \quad (1.23)$$

где целые числа r и μ характеризуют интенсивности соответственно для диплоского и плоского погранслоев (по повторяющемуся индексу s следует подразумевать сложение от $s=0$ до $s=S$). Величины r и μ должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий НТУ с НППВ (1.5) на боковой цилиндрической поверхности пластинки.

Перейдем теперь к изучению проблемы разделения трехмерных граничных условий НТУ с НППВ на $\sum$, в рамках этого исследования необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия надо приписывать к внутренним и какие к погранслоевым дифференциальным уравнениям НТУ с НППВ на каждом уровне асимптотического приближения.

Чтобы осуществить задачу срачивания решения внутренней задачи с решениями всех четырех типов квазистатических погранслоев, нам следует конкретизировать заданные на $\sum$ трехмерные граничные условия НТУ с НППВ. Для этого, далее рассмотрим случай, когда на всей боковой поверхности пластинки ($\alpha_1 = \alpha_{10}$) заданы пространственные граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ ($\sum_1 = \sum$, $\sum_2 = 0$).

Таким образом, чтобы удовлетворить трехмерным граничным условиям (1.5) (при первой граничной задаче НТУ с НППВ), подставим туда (1.23) и приравняем к нулю коэффициенты при соответствующих степенях δ . При удовлетворении указанных граничных условий получим непротиворечивый итерационный процесс, если, как и в статике [12], $\chi = \mu = -1$ (для задачи изгиба пластинки по НТУ). Граничные условия в итерациях имеют такой же вид, как и в статике [12]. Отсюда следует, что двумерным динамическим уравнениям внутренней задачи по НТУ с НППВ (при $s=0$) соответствуют те же граничные условия, что и в статике [12]:

$$N_{11}^{(0)} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-1}^1 p_i^* d\alpha_1, \quad L_{11}^{(0)} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-1}^1 m_i^* d\alpha_1, \quad L_{12}^{(0)} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-1}^1 m_i^* d\alpha_1 \quad (1.24)$$

Разрешающая система уравнений и граничные условия прикладной динамической теории изгиба тонких пластин на основе НТУ с НППВ из себя будут представлять уравнения (1.11)-(1.13) и граничные условия (1.24).

Начальные условия будут относиться к перемещениям, линейным скоростям, независимым поворотам и угловым скоростям точек срединной плоскости пластинки.

Отметим, что дифференциальный оператор системы уравнений прикладной двумерной теории пластин на основе НТУ с НППВ (1.12)-(1.15) с математической точки зрения является гиперболическим.

На основе системы уравнений (1.12)-(1.15) прикладной теории динамического изгиба микроплотной тонкой пластинки (когда трехмерная теория представляет собой НТУ с НППВ) можем изучать различные задачи собственных и вынужденных колебаний пластинки и выявлять соответствующие динамические эффекты.

Особо хотим отметить, что уравнения (1.12)-(1.15) прикладной теории микрополярных пластин (по НТУ с НППВ) весьма идентичны с уравнениями общезвестной уточняющей теории пластин С.А. Амбарцумяна [13,14] и теории Миндлина-Рейснера [14], только в данном случае сдвиги (угловые деформации) определяются по компонентам вектора независимого поворота точек пластинки. Важно на наш взгляд отметить и то, что для прикладной теории микрополярных пластин по НТУ с НППВ (1.12)-(1.15) имеются три граничные условия (1.24) на контуре области срединной плоскости пластинки.

2. При построении асимптотики (1.9), (1.10) для тонкой пластинки на основе НТУ с НППВ не были представлены какие-либо ограничения на материальные константы пластинки.

Оказывается, что если будем над новыми (в смысле микрополярности) безразмерными константами $\bar{\gamma}'$, $\bar{\epsilon}'$ и $\bar{\beta}'$ ставить некоторые ограничения следующего характера

$$\bar{\gamma}' = \delta^{-2} \tilde{\gamma}', \quad \bar{\epsilon}' = \delta^{-2} \tilde{\epsilon}', \quad \bar{\beta}' = \delta^{-2} \tilde{\beta}' \quad (2.1)$$

(где безразмерные величины $\bar{\gamma}'$, $\bar{\epsilon}'$, $\bar{\beta}'$ считаются величинами порядка $\delta^{(n)}$), то для начально-краевой задачи (1.1)-(1.5) НТУ с НППВ для тонкой пластинки будет применима классическая асимптотика [15] (точнее, для перемещений и силовых напряжений верна классическая асимптотика, а для компонентов вектора поворота и моментных напряжений получим соответствующую асимптотику).

Таким образом, преобразуя систему уравнений (1.1)-(1.3) НТУ с НППВ на основе (1.7) и (1.8) с учетом (2.1) и решение внутренней задачи представляя в виде асимптотического разложения (1.9) в случае задачи изгиба, получим следующую асимпотику:

$$\begin{cases} q = 3 \text{ для } u_3, \omega_1, \omega_2 \\ q = 2 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, u_1, u_2, \omega_3 \\ q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21} \\ q = 0 \text{ для } \sigma_{33}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32} \\ \theta = -2, \quad k = -2 \end{cases} \quad (2.2)$$

На основе асимптотики (2.2) из системы уравнений (1.1)-(1.3) (с учетом (1.7), (1.8), (1.9)) получим уравнения в асимптотических приближениях « α ».

При $s=0$ часть полученных уравнений можем интегрировать по ξ , в результате, получим:

$$\bar{u}_i^{(0)} = \bar{w}^{(0)}$$

$$\bar{u}_1^{(0)} = \bar{\zeta} \cdot \bar{v}_1^{(0)}, \quad \text{где } \bar{v}_1^{(0)} = -\frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi}; \quad \bar{u}_2^{(0)} = \bar{\zeta} \cdot \bar{v}_2^{(0)}, \quad \text{где } \bar{v}_2^{(0)} = -\frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \eta}$$

$$\omega_1^{(0)} = \Omega_1^{(0)}, \quad \text{где } \Omega_1^{(0)} = \frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \eta}; \quad \omega_2^{(0)} = \Omega_2^{(0)}, \quad \text{где } \Omega_2^{(0)} = -\frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi}$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(0)} = \bar{\zeta} \cdot \bar{\tau}_{11}^{(0)}, \quad \text{где } \bar{\tau}_{11}^{(0)} = \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{2\bar{\lambda}\bar{\mu}}{2\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \eta}$$

$$\bar{\sigma}_{22}^{(0)} = \bar{\zeta} \cdot \bar{\tau}_{22}^{(0)}, \quad \text{где } \bar{\tau}_{22}^{(0)} = \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{2\bar{\lambda}\bar{\mu}}{2\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{12}^{(0)} &= \bar{\nu}_{12}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\nu}_{21}^{(0)} = (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \xi} + (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \eta} \\ \bar{\mu}_{21}^{(0)} &= \bar{\nu}_{21}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\nu}_{21}^{(0)} = (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \eta} + (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_2^{(0)}}{\partial \xi}\end{aligned} \quad (2.3)$$

Как видно из представления (2.3), повороты $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ выражаются через производные от нормального к срединной плоскости пластинки перемещения $\bar{w}^{(0)}(\xi, \eta, \tau)$. Это означает, что в данном случае имеем дело с проявлением характера НТУ со стесненным вращением и, что главное, это явление получили исходя из теории НТУ с НППВ.

На основе (2.3) можем утверждать, что некоторая часть определяющих задачу величин $(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \bar{\sigma}_{11}^{(0)}, \bar{\sigma}_{22}^{(0)}, \bar{\mu}_{12}^{(0)}, \bar{\mu}_{21}^{(0)})$ выразится через прогиб пластинки $\bar{w}^{(0)}(\xi, \eta, \tau)$. Другая часть величин $(\omega_3^{(0)}, \bar{\sigma}_{31}^{(0)}, \bar{\sigma}_{32}^{(0)}, \bar{\sigma}_{12}^{(0)}, \bar{\sigma}_{21}^{(0)}, \bar{\mu}_{11}^{(0)}, \bar{\mu}_{22}^{(0)})$ выразится кроме этого и через величину $\bar{\mu}_{33}^{(0)}$, для определения которой приходим к дифференциальному уравнению (относительно поперечной к срединной плоскости пластинки координате ζ) с соответствующими граничными условиями при $\zeta = \pm 1$:

$$\frac{\partial^2 \bar{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\bar{\alpha}'} \frac{(2\bar{\gamma}' + 3\bar{\beta}') \bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}' + \bar{\beta}'} \bar{\mu}_{33}^{(0)} = 0 \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_{33}^{(0)} \\ \zeta = \pm 1 \end{aligned} \right| = \pm \bar{m}_3^* \quad (2.5)$$

После решения граничной задачи (2.4), (2.5) и определения $\bar{\mu}_{33}^{(0)}$:

$$\bar{\mu}_{33}^{(0)} = \bar{q} \frac{\text{ch} \bar{P} \zeta}{\text{ch} \bar{P}} \quad \text{где} \quad \bar{q} = \frac{\bar{m}_3^* - \bar{m}_3^-}{2}, \quad \bar{P} = \frac{4\bar{\alpha}'}{2\bar{\gamma}' + \bar{\beta}'} \quad (2.6)$$

указанные выше величины определяются по формулам:

$$\omega_3^{(0)} = \bar{\alpha}' \frac{\partial \bar{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \bar{\mu}_{11}^{(0)} = \frac{2\bar{\gamma}' + \bar{\beta}'}{4\bar{\gamma}'(\bar{\gamma}' + \bar{\beta}')} \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\bar{\beta}'}{4\bar{\gamma}'(\bar{\gamma}' + \bar{\beta}')} \frac{\partial \Omega_2^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\bar{\beta}'}{2(\bar{\gamma}' + \bar{\beta}')} \bar{\mu}_{33}^{(0)}$$

$$\bar{\mu}_{22}^{(0)} = \frac{2\bar{\gamma}' + \bar{\beta}'}{4\bar{\gamma}'(\bar{\gamma}' + \bar{\beta}')} \frac{\partial \Omega_2^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\bar{\beta}'}{4\bar{\gamma}'(\bar{\gamma}' + \bar{\beta}')} \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\bar{\beta}'}{2(\bar{\gamma}' + \bar{\beta}')} \bar{\mu}_{33}^{(0)}$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{(0)} = -\zeta \frac{1}{2\bar{\mu}'} \frac{\partial^2 \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \bar{\sigma}_{21}^{(0)} = -\zeta \frac{1}{2\bar{\mu}'} \frac{\partial^2 \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial \zeta}$$

$$\bar{\sigma}_{31}^{(0)} = -\frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{\partial \tau_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2\bar{\mu}'} \frac{\partial^3 \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - \frac{1}{2\text{ch} \bar{P}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta} (\text{ch} \bar{P} \zeta - 1) + \bar{\tau}_{31}^{(0)}$$

$$\text{где} \quad \bar{\tau}_{31}^{(0)} = \bar{X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2\bar{\mu}'} \frac{\partial^3 \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2\text{ch} \bar{P}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta} (\text{ch} \bar{P} - 1), \quad \bar{X} = \frac{\bar{p}_1^* - \bar{p}_1^-}{2}$$

$$\bar{\sigma}_{32}^{(0)} = -\frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{\partial \tau_{22}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{1}{2\bar{\mu}'} \frac{\partial^3 \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) + \frac{1}{2\text{ch} \bar{P}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi} (\text{ch} \bar{P} \zeta - 1) + \bar{\tau}_{32}^{(0)} \quad (2.7)$$

$$\text{где } \tau_{22}^{(0)} = \bar{Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_{22}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) - \frac{1}{2\text{ch}\bar{P}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi} (\text{ch}\bar{P} - 1), \quad \bar{Y} = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{2}$$

Отметим, что относительно величин $\bar{\mu}_{31}^{(0)}$ и $\bar{\mu}_{32}^{(0)}$ тоже приходим к отдельным дифференциальным уравнениям и граничным условиям (относительно координаты ξ):

$$\left(\frac{1}{4\bar{\alpha}} + \frac{1}{4\bar{\mu}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\mu}_{31}^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \bar{\mu}_{31}^{(0)} = - \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \zeta \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{32}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{4\bar{\alpha}} + \frac{1}{4\bar{\mu}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\mu}_{11}^{(0)}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad (2.8)$$

$$\bar{\mu}_{31}^{(0)} \Big|_{\xi=1} = \pm \bar{m}_1$$

$$\left(\frac{1}{4\bar{\alpha}} + \frac{1}{4\bar{\mu}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\mu}_{32}^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \bar{\mu}_{32}^{(0)} = - \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \zeta \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \xi} \right) -$$

$$- \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{31}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \eta} - \left(\frac{1}{4\bar{\alpha}} + \frac{1}{4\bar{\mu}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\mu}_{21}^{(0)}}{\partial \eta \partial \xi} \quad (2.9)$$

$$\bar{\mu}_{32}^{(0)} \Big|_{\xi=1} = \pm \bar{m}_2$$

После решения граничных задач (2.8) и (2.9) можем определить следующие величины:

$$\bar{\mu}_{13}^{(0)} = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \bar{\mu}_{31}^{(0)} + \frac{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \bar{\mu}_{23}^{(0)} = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \bar{\mu}_{32}^{(0)} + \frac{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \eta}$$

$$\bar{\sigma}_{13}^{(0)} = \bar{\sigma}_{31}^{(0)} + \frac{\partial \bar{\mu}_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mu}_{22}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\mu}_{32}^{(0)}}{\partial \xi} - \bar{J} \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial t^2}$$

$$\bar{\sigma}_{23}^{(0)} = \bar{\sigma}_{32}^{(0)} - \frac{\partial \bar{\mu}_{31}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\mu}_{21}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{\mu}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \bar{J} \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

$$\bar{\sigma}_{33}^{(0)} = \int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial t^2} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{13}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{23}^{(0)}}{\partial \eta} \right) d\zeta$$

После перехода к размерным величинам и к усредненным по толщине пластинки силовым и моментным характеристикам, разрешающую систему уравнений микрополярной тонкой пластинки можем представить в следующем виде:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial x_2} = 2h\rho \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} - 2Z$$

$$\frac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{23}^{(0)} - N_{32}^{(0)} = 2hJ \frac{\partial^2 Q_1^{(0)}}{\partial t^2} - 2m, \quad \text{где } Q_1^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial L_{12}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{31}^{(0)} - N_{13}^{(0)} = 2hJ \frac{\partial^2 O_2^{(0)}}{\partial t^2} - 2p, \quad \text{где } O_2^{(0)} = -\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_1} \quad (2.11)$$

уравнения физических соотношений

$$\begin{aligned} M_{11}^{(0)} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22}^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1+\nu} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} L_{22}^{(0)} - hq \\ M_{20}^{(0)} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} \right), \quad M_{21}^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1+\nu} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2} L_{20}^{(0)} + hq \\ L_{11}^{(0)} &= 4h\gamma \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\beta}{2\gamma + \beta} L_{11}^{(0)}, \quad L_{12}^{(0)} = -2h(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} + 2h(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} \\ L_{22}^{(0)} &= -4h\gamma \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\beta}{2\gamma + \beta} L_{22}^{(0)}, \quad L_{21}^{(0)} = 2h(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} - 2h(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

к которым следует присоединить полученные для $N_{31}^{(0)}$, $N_{13}^{(0)}$ и $L_{33}^{(0)}$ выражения

$$N_{31}^{(0)} = \frac{\partial M_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}^{(0)}}{\partial x_2} + 2hX, \quad N_{13}^{(0)} = \frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}^{(0)}}{\partial x_2} + 2hY \quad (2.13)$$

$$L_{33}^{(0)} = \frac{2\gamma + \beta}{2\alpha} \frac{q}{h} \operatorname{th} \frac{4h^2 \alpha}{2\gamma + \beta}$$

В (2.11)–(2.13) следует учесть также (1.15).

На основании систем уравнений (2.11)–(2.13) можем приходить к решению следующего разрешающего уравнения относительно перемещения $W^{(0)}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \left[2h(\gamma + \varepsilon) + \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \right] \nabla^2 \nabla^2 W^{(0)} = \\ = 2h \left(J \nabla^2 \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} \right) + 2Z + 2h \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \right) + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\partial m}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогичным образом (как в пункте 1) изучая погранслоное явление около боковой поверхности пластинки (имеем ввиду погранслоя квазистатического характера), и далее, методом сращивания внутренней задачи и погранслоя (для первой граничной задачи НТУ с НППВ) получим следующие граничные условия (которые необходимо присоединить к дифференциальному уравнению (2.14)):

$$\begin{aligned} M_{11}^{(0)} + L_{12}^{(0)} &= \int_{-h}^h p_1^* x_3 dx_3 + \int_{-h}^h m_2^* dx_3 \\ N_{13}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{12}^{(0)} - L_{11}^{(0)}) &= \int_{-h}^h p_3^* dx_3 + \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial x_2} (p_2^* x_3 - m_1^*) dx_3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

К уравнению (2.14) следует присоединить также начальные условия для $W^{(0)}(x_1, x_2, t)$ и $\partial W^{(0)}(x_1, x_2, t) / \partial t$.

Рассмотрим теперь пластинку на основе НТУ со стесненным вращением (псевдоконтинуума Коссера) [2,16]. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи НТУ со стесненным вращением (СВ) [2,16]:

уравнения движения

$$\sigma_{\mu, j} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad \mu_{\mu, j} + \varepsilon_{\mu k} \sigma_{\mu k} = J \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

соотношения упругости

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \quad \mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)k_{ij} + (\gamma - \varepsilon)k_{ji} \quad (2.17)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad k_{ij} = \omega_{i,j}, \quad \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}u_{k,j} \quad (2.18)$$

К уравнениям будем присоединять граничные условия на плоскостях $\xi = \pm 1$; граничные условия на боковой цилиндрической поверхности пластинки и начальные условия.

В трехмерных уравнениях НТУ со СВ (2.16)-(2.18) перейдем к безразмерным величинам (1.8) и выполним замену независимых переменных (1.7). Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения (1.9). Далее, получим рекуррентную систему уравнений в асимптотических приближениях, если асимптотика поставленной задачи будет выражаться именно по (2.2).

При ($s = 0$) из полученной системы часть величин можно получить интегрированием по переменной ξ , в результате получим:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{(0)} &= \bar{w}^{(0)} \\ \bar{u}_1^{(0)} &= \xi \cdot \bar{v}_1^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{v}_1^{(0)} = -\frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi}; \quad \bar{u}_2^{(0)} = \xi \cdot \bar{v}_2^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{v}_2^{(0)} = -\frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \eta} \\ \omega_1^{(0)} &= \Omega_1^{(0)}, \quad \text{где} \quad \Omega_1^{(0)} = \frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \eta}; \quad \omega_2^{(0)} = \Omega_2^{(0)}, \quad \text{где} \quad \Omega_2^{(0)} = -\frac{\partial \bar{w}^{(0)}}{\partial \xi} \\ \bar{\sigma}_{11}^{(0)} &= \xi \cdot \bar{\tau}_{11}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\tau}_{11}^{(0)} = \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{2\bar{\lambda}\bar{\mu}}{2\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \eta} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(0)} &= \xi \cdot \bar{\tau}_{22}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\tau}_{22}^{(0)} = \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{2\bar{\lambda}\bar{\mu}}{2\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \xi} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(0)} &= \xi \cdot \bar{\tau}_{12}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\tau}_{12}^{(0)} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{v}_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_1^{(0)}}{\partial \eta} \right) \quad (1 \rightarrow 2) \\ \bar{\sigma}_{31}^{(0)} &= -\frac{\xi^2}{2} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{21}^{(0)}}{\partial \eta} \right) + \bar{\tau}_{31}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\tau}_{31}^{(0)} = \bar{X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \eta} \right) \\ \bar{\sigma}_{32}^{(0)} &= -\frac{\xi^2}{2} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \eta} \right) + \bar{\tau}_{32}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{\tau}_{32}^{(0)} = \bar{Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{21}^{(0)}}{\partial \eta} \right) \\ \bar{\mu}_{12}^{(0)} &= \bar{v}_{12}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{v}_{12}^{(0)} = (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_2^{(0)}}{\partial \xi} + (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \eta} \\ \bar{\mu}_{21}^{(0)} &= \bar{v}_{21}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{v}_{21}^{(0)} = (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \eta} + (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \Omega_2^{(0)}}{\partial \xi} \\ \bar{\mu}_{11}^{(0)} &= \bar{v}_{11}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{v}_{11}^{(0)} = 2\bar{\gamma} \frac{\partial \Omega_1^{(0)}}{\partial \xi}; \quad \bar{\mu}_{22}^{(0)} = \bar{v}_{22}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \bar{v}_{22}^{(0)} = 2\bar{\gamma} \frac{\partial \Omega_2^{(0)}}{\partial \eta} \\ \bar{\mu}_{33}^{(0)} &= 0, \quad \omega_3^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Отметим, что относительно величин $\bar{\mu}_{31}^{(0)}$ и $\bar{\mu}_{32}^{(0)}$ тоже приходим к отдельным дифференциальным уравнениям и граничным условиям (относительно координаты ζ):

$$\frac{1}{4\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{\mu}_{31}^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \bar{\mu}_{31}^{(0)} = -\frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \zeta \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{32}^{(0)}}{\partial \zeta}$$

$$\bar{\mu}_{31}^{(0)} \Big|_{\zeta=\pm 1} = \pm \bar{m}_1^*$$
(2.20)

$$\frac{1}{4\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{\mu}_{32}^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \bar{\mu}_{32}^{(0)} = -\frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \zeta \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{31}^{(0)}}{\partial \zeta}$$

$$\bar{\mu}_{32}^{(0)} \Big|_{\zeta=\pm 1} = \pm \bar{m}_2^*$$
(2.21)

После решения систем уравнений (2.20) и (2.21) остальные величины (связанные с $\bar{\mu}_{31}^{(0)}$ и $\bar{\mu}_{32}^{(0)}$) определяются (также как и в предыдущем случае) по формулам (2.10).

Переходя к размерным величинам и к интегральным характеристикам (1.11), можем разрешающую систему уравнений представить в следующем виде:

уравнения типа уравнений движения

$$\frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}^{(0)}}{\partial x_2} = 2h\rho \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} - 2Z$$

$$\frac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{13}^{(0)} - N_{22}^{(0)} = 2hJ \frac{\partial^2 O_1^{(0)}}{\partial t^2} - 2m, \quad \text{где } O_1^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial L_{12}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{31}^{(0)} - N_{13}^{(0)} = 2hJ \frac{\partial^2 O_2^{(0)}}{\partial t^2} - 2p, \quad \text{где } O_2^{(0)} = -\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_1}$$
(2.22)

уравнения типа физических соотношений

$$M_{11}^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22}^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1+\nu} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$M_{22}^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} \right), \quad M_{11}^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1+\nu} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$L_{11}^{(0)} = 4h\gamma \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{12}^{(0)} = -2h(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2} + 2h(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2}$$

$$L_{22}^{(0)} = -4h\gamma \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{21}^{(0)} = 2h(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2} - 2h(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2}$$
(2.23)

к которым следует присоединить полученные для $N_{21}^{(0)}$, $N_{32}^{(0)}$ и $L_{33}^{(0)}$ выражения

$$N_{31}^{(0)} = \frac{\partial M_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}^{(0)}}{\partial x_2} + 2hX, \quad N_{32}^{(0)} = \frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}^{(0)}}{\partial x_2} + 2hY, \quad L_{33}^{(0)} = 0 \quad (2.24)$$

Отметим, что в исходном ($S=0$) асимптотическом приближении внутреннего итерационного процесса из систем уравнений (2.22)-(2.24) и в данном случае тоже, приходим к разрешающему уравнению (2.14).

Аналогичным образом, как и в предыдущем случае, изучая погранслоем (квазистатический) около боковой поверхности пластинки и применяя метод сраживания асимптотических разложений, приходим к граничным условиям (2.15) (для первой граничной задачи НТУ со СВ).

Здесь следует заметить, что при $\alpha \rightarrow \infty$ все величины и уравнения микрополярной пластинки со СВ на основе НТУ с НППВ ((2.3)-(2.15), принимая $q = 0$) будут совпадать с их аналогами по НТУ со СВ ((2.19)-(2.24)).

Отметим, что для статического случая уравнение (2.14) и граничные условия (2.15) совпадают со соответствующим уравнением и граничным условием, которые получены в работах [17,18], используя метод гипотез в НТУ со СВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999.-214 с.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity.: Oxford New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986.-384 p.
3. Ильющин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54-59.
4. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.-256 с.
5. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories 1999 Springer-Verlag New York, Inc. I: Foundations and Solids.-325 p. II: Fluent Media.-342 p.
6. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
7. Азро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399-1409.
8. Воронич И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и приклад. механике. Вып. 3. М.: Наука, 1966. С. 116-136.
9. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976.-512 с.
10. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.-415 с.
11. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992.-260 с.
12. Саркисян С.О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Посвященной 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С. 285-296.
13. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987.-360 с.
14. Christian Decolon Analysis of Composite Structures. Paris Hermes Science Publications, 2002.-336 p.
15. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1072-1078.
16. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перся, иностр. статей. 1965 №3 С. 89-112.
17. Геворгян Г.А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // ПМ. 1966. Т. 2. Вып. 10. С. 36-43.
18. Хоффман О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // ПМ Тр. американск. об-ва инж. мех. Серия Е. 1964. Т. 31. №4. С. 149-150.

ЗАДАЧИ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Белубекян М. В., Чил-Акопян Э. О.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Է. Օ. Շիլ-Ակոպյան
Ազատ էնթրոփ սալի տեղայնացված անկայունության խնդիրները

Հետազոտվում է հավասարաչափ սեղմված օղողանկյուն առանցքավոր սալի ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունության խնդիրը։ Ստացված են տեղայնացված անկայունության առկայության պայմանները տարբեր տեսակի եզրային պայմանների համար։ Այդ պայմանների հիման վրա կառուցված են աղյուսակներ, որոնք ցույց են տալիս կրիտիկական բնոր կախվածությունը սալի կողմերի հարաբերությունից և Պուասսոնի գործակիցներից։

M.V. Belubekyan, E.O. Chil-Akopyan
The Problems of the Localized Instability of the Plate with Free Edge

Рассматривается вопрос неустойчивости равномерно сжатой упругой прямоугольной пластинки, локализованной в окрестности кромки. „Очень часто в механике рассматриваются краевые и начально-краевые задачи для неограниченных областей. Между тем, ясно, что в реальности любая сплошная среда является ограниченной. Реже, чем следовало бы, подчеркивают, что задачи для неограниченных сред могут иметь физический смысл лишь как предельные, когда вся внешняя граница или ее часть удаляется на бесконечность. Естественно встает вопрос, при каких условиях модель неограниченной среды достаточно хорошо описывает реальность [1].“ Исследование данных задач, в частности, покажет, как далеко должна быть расположена внешняя граница среды, чтобы ее влиянием можно было пренебречь и считать, что она уже „ушла на бесконечность“. Задачи с подобного рода граничными условиями уже были рассмотрены, в том числе, в [2, 3], но нас интересует именно вопрос о пределе удаления внешней границы ($a \rightarrow \infty$).

1. Пусть прямоугольная пластинка $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h\}$ равномерно сжата по направлению Oy нагрузкой интенсивностью P_0 .

По теории тонких пластин Кирхгофа [4] уравнение задачи устойчивости имеет вид:

$$D_1 \Delta^2 w + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (1.1)$$

где D_1 – жесткость пластины, w – прогиб, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, Δ – двухмерный оператор Лапласа.

Принимаем, что кромки пластинки $y = 0, b$ свободно оперты, т.е. граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

Выпишем решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2) в следующем виде:

$$w = W_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi/b, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим:

$$W_n^{IV} - 2\lambda_n^2 W_n'' + \lambda_n^4 (1 - \alpha_n^2) W_n = 0, \quad \alpha_n^2 = P_0 / D \lambda_n^2 \quad (1.4)$$

Далее необходимо искать решение уравнения (1.4) в виде $W_n = A e^{\lambda_n k x}$, для чего составим характеристическое уравнение

$$k^4 - 2k^2 + 1 - \alpha_n^2 = 0, \quad k = \pm \sqrt{1 \pm \alpha_n} \quad (1.5)$$

В данном случае нас интересуют решения, удовлетворяющие следующему условию:

$$\alpha_n < 1 \quad (1.6)$$

Так же принимаются следующие обозначения:

$$P_1 = \sqrt{1 + \alpha_n}, \quad P_2 = \sqrt{1 - \alpha_n} \quad (1.7)$$

Следовательно, корни уравнения (1.5) будут следующие:

$$k_1 = P_1, \quad k_2 = -P_1, \quad k_3 = P_2, \quad k_4 = -P_2 \quad (1.8)$$

Здесь принято во внимание утверждение [3, с. 131].

„Заметим, что β есть число вещественное ($\beta = \sqrt{\alpha_n - 1}$), т.е.

$$\alpha_n > 1 \quad (1.9)$$

В самом деле, если бы $\alpha_n \leq 1$, то величина критической сжимающей силы рассматриваемого случая равнялась бы Эйлеровой нагрузке или была бы меньше её. Между тем, как удерживание одной из продольных сторон пластинки, наверное, увеличивает её жесткость, и следовательно, должно иметь место неравенство (1.9).” В настоящей статье, в отличие от утверждения цитаты (1.9), рассматривается противоположный случай (1.6). Обозначения цитаты из монографии Гимошенко соответствуют обозначениям (1.4), (1.7).

Интеграл уравнения (1.4) будет иметь следующий вид:

$$W_n = C_1 \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 x) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 x) + C_3 \operatorname{ch}(\lambda_n P_2 x) + C_4 \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 x) \quad (1.10)$$

2. Рассмотрим два варианта граничных условий:

Один из ненагруженных краев при $x = a$ закреплен шарнирно, а второй при $x = 0$ свободен.

Граничные условия в данном случае будут следующие:

$$\text{При } x = 0 \quad W_n'' - \nu \lambda_n^2 W_n = 0, \quad W_n''' - (2 - \nu) \lambda_n^2 W_n' = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{При } x = a \quad W_n = 0, \quad W_n'' = 0 \quad (2.2)$$

Подставляя уравнение (1.10) в граничные условия (2.1), получим следующую систему уравнений:

$$x = 0 \quad \begin{cases} C_1(P_1^2 - v) + C_3(P_2^2 - v) = 0 \\ C_2P_1(P_1^2 + 2 - v) + C_4P_2(P_2^2 + 2 - v) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Используя условие (2.2), получим:

$$C_1 = -C_2 \cdot \text{th}(\lambda_n P_1 a), \quad C_3 = -C_4 \cdot \text{th}(\lambda_n P_2 a) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и решая систему, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\text{th}(P_2 n \pi a / b)}{\text{th}(P_1 n \pi a / b)} = \frac{P_2(P_2^2 - 2 + v) \cdot (P_1^2 - v)}{P_1(P_1^2 - 2 + v) \cdot (P_2^2 - v)} \quad (2.5)$$

Используя обозначения (1.6), уравнение (2.5) можно преобразовать следующим образом:

$$L_1(\alpha_n, \xi_n) = \frac{\text{th}(P_2 \xi_n)}{\text{th}(P_1 \xi_n)} - \frac{P_2(P_1^2 - v)^2}{P_1(P_2^2 - v)^2} = 0, \quad \xi_n = \frac{n \pi a}{b} \quad (2.6)$$

Данная функция при $0 < \alpha < 1$ и согласно естественному условию $0 < v < 0.5$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L_1(0, \xi_n) &= \frac{\text{th} \xi_n}{(1-v)^2} - \frac{\text{th} \xi_n}{(1-v)^2} = 0 \\ L_1(1, \xi_n) &= \frac{\xi_n}{(2-v)^2} - \frac{\text{th}(\sqrt{2} \xi_n)}{\sqrt{2} \cdot v^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Так как

$$\left. \frac{\partial L_1}{\partial \alpha_n} \right|_{\alpha_n=0} = \frac{-\xi_n}{(1-v)^2 \text{ch}^2 \xi_n} - \frac{(1+v) \cdot (3-v)}{(1-v)^3} \cdot \text{th} \xi_n < 0 \quad (2.8)$$

то отсюда следует, что для существования решения уравнения (2.6), удовлетворяющего условию (1.6), необходимо, чтобы было выполнено неравенство $L_1(1, \xi_n) > 0$, т.е.

$$F(\xi_n, v) = \frac{v^2}{(2-v)^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \xi_n - \text{th}(\sqrt{2} \cdot \xi_n) > 0 \quad (2.9)$$

Примем следующее обозначение:

$$\sqrt{2} \cdot \xi_n = \chi_1 \quad (2.10)$$

Исследование функции (2.9) показало, что функция имеет положительные значения в зависимости от v и χ_1 .

Результаты вычислений приведены в табл.1 и условием существования локализованной неустойчивости является неравенство:

$$\chi_1 > \chi_{1*} \quad (2.11)$$

Таблица 1

ν	χ_{1*}	a/b
0.5	9	2,026
0.4	16	3,601
0.3	32,2	7,248
0.2	81	18,231
0.1	361	81,254

3. Один из ненагруженных краев при $x = a$, жестко закреплен, а второй при $x = 0$ свободен.

Граничные условия при жестком закреплении будут следующими:

$$\text{При } x = 0 \quad W_n'' - \nu \lambda_n^2 W_n = 0, \quad W_n''' - (2 - \nu) \lambda_n^2 W_n' = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{При } x = a \quad W_n = 0, \quad W_n' = 0 \quad (3.2)$$

Подставляя уравнение (1.10) в граничные условия (3.1) и (3.2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1(P_1^2 - \nu) + C_3(P_2^2 - \nu) &= 0 \\ C_2P_1(P_1^2 + 2 - \nu) + C_4P_2(P_2^2 + 2 - \nu) &= 0 \\ C_1 \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 a) + C_3 \operatorname{ch}(\lambda_n P_2 a) + C_4 \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 a) &= 0 \\ C_1 P_1 \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 a) + C_2 P_1 \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a) + C_3 P_2 \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 a) + C_4 \operatorname{ch} P_2 (\lambda_n P_2 a) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решая эту систему, после ряда преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} -2P_2 - \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 a) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 a) \cdot \frac{P_2^2(P_1^2 - \nu)^2 + P_1^2(P_2^2 - \nu)^2}{P_1(P_2^2 - \nu) \cdot (P_1^2 - \nu)} + \\ + \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_n P_2 a) \cdot \left[\frac{P_2(P_1^2 - \nu)^2 + P_2(P_2^2 - \nu)^2}{(P_2^2 - \nu) \cdot (P_1^2 - \nu)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приведем данное уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{-2P_2}{\operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_n P_2 a)} - \left[\frac{P_2^2(P_1^2 - \nu)}{P_1(P_2^2 - \nu)} + \frac{P_1(P_2^2 - \nu)}{(P_1^2 - \nu)} \right] + \\ + \left[\frac{P_2(P_1^2 - \nu)}{(P_2^2 - \nu)} + \frac{P_1(P_2^2 - \nu)}{(P_1^2 - \nu)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее переходим к исследованию уравнения (3.5). После ряда преобразований данное характеристическое уравнение приходит к виду:

$$L_2(\alpha_n) \equiv 2P_1(P_1^2 - \nu) \cdot (P_2^2 - \nu) \frac{\text{ch}[\lambda_n(P_1 - P_2)a] - 1}{(P_1 - P_2)^2} -$$

$$- (P_1P_2 + \nu)^2 \text{sh}(\lambda_n P_1 a) \frac{\text{sh}(\lambda_n P_2 a)}{P_2} +$$

$$+ P_1(P_1 + P_2)^2 \text{ch}(\lambda_n P_1 a) \cdot \text{ch}(\lambda_n P_2 a) = 0 \quad (3.6)$$

Разложив в ряд член $\frac{\text{ch}[\lambda_n(P_1 - P_2)a] - 1}{(P_1 - P_2)^2}$ выражения (3.6), получим следующее:

$$L_3(\alpha_n) \equiv P_1(P_1^2 - \nu) \cdot (P_2^2 - \nu) \lambda_n^2 a^2 -$$

$$- (P_1P_2 + \nu)^2 \text{sh}(\lambda_n P_1 a) \frac{\text{sh}(\lambda_n P_2 a)}{P_2} +$$

$$+ P_1(P_1 + P_2)^2 \text{ch}(\lambda_n P_1 a) \cdot \text{ch}(\lambda_n P_2 a) = 0 \quad (3.7)$$

Функция $L_3(\alpha_n)$ обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} L_3(\alpha_n) \equiv (1 - \nu)^2 \cdot \lambda_n^2 a^2 - (1 + \nu)^2 \cdot \text{sh}^2(\lambda_n a) + 4 \cdot \text{ch}^2(\lambda_n a) > 0 \quad (3.8)$$

Так как данная функция всегда положительна, то для существования локализованной неустойчивости необходимо, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} L_3(\alpha_n) = -\frac{\nu(2 - \nu)}{\sqrt{2}} \chi_2^2 - \frac{\nu^2}{\sqrt{2}} \chi_2 \cdot \text{sh}(\chi_2) + 2\sqrt{2} \text{ch}(\chi_2) < 0 \quad (3.9)$$

Здесь принято следующее обозначение:

$$\sqrt{2} \cdot \lambda_n \cdot a \equiv \chi_2 \quad (3.10)$$

Исследование функции (3.9) показало, что она имеет отрицательные значения в зависимости от ν и χ_2 , т.е. локализованная неустойчивость существует при $\chi_2 > \chi_{2*}$.

Результаты расчетов приведены в табл.2.

Таблица 2

ν	χ_{2*}	a/b
0.5	16	3,6
0.4	25	5,627
0.3	44,5	10
0.2	100	22,5
0.1	400	90

При $a \rightarrow \infty$ уравнения (2.5) и (3.6) полностью совпадают с характеристическим уравнением задачи локализованной неустойчивости

полубесконечной пластинки-полосы со свободным краем [5]. Аналогичные уравнения получаются также для задачи распространения локализованной у свободной кромки изгибной волны [6].

Из сравнения табл. 1 и 2 следует, что возможность локализованной устойчивости для пластины с шарнирным краем $x = a$ намного реальнее, чем с закрепленным. Например, при $\nu = 0.5$ соотношение сторон a/b , при котором появляется локализованная неустойчивость, отличается приблизительно в восемь раз.

В случае, когда на краю $x = a$ заданы условия скользящего контакта:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad \text{всегда (независимо от длины } a) \text{ существует решение,}$$

удовлетворяющее условию (1.6), т.е. критическая нагрузка меньше критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости пластинки по форме цилиндрической поверхности. Тем более, критическая нагрузка будет удовлетворять условию (1.6) при условии свободного края $x = a$, независимо от размера a .

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики. // Успехи Механики. 2002. Т.1. №1. С. 90-102.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1963. 880 с.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М.: Наука. 1971. 808 с.
4. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1991. 336 с.
5. Белубекян М. В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд-во Ереванского Госуниверситета. 1997. С. 95 – 99.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. // ПМ. 1994. Т. 30. №2. С. 61 – 68.

Институт Механики
НАН РА

Поступила в редакцию
10.03.2004

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Мовсисян А.А.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Անհամասեռ զլանային քաղաքի մոմենտային վիճակի կայունության մասին

Շատ բարձրության անհամասեռ զլանային քաղաքի համար մոմենտային վիճակի կայունության միաչափ հավասարումները բերվում են նախնական վիճակի բոլոր ուժային մեծությունների հաշվառումով: Դիտարկված մի քանի խնդիրներում ցույց է տրվում անհամասեռության և մոմենտայնության ազդեցությունը կրիտիկական պարամետրերի վրա:

L.A.Movsisyan

On the Stability of Momentically State of Nonhomogeneous Cylindrical Shell

Классические уравнения устойчивости оболочек выводятся в предположении, что начальное состояние безмоментное. Даже в задачах с начально-моментным состоянием члены — моментного происхождения моменты и перерезывающие усилия обычно не учитываются. Для однородной пластинки система уравнений с учетом поперечных сдвигов получена в [1]

В настоящей работе приводятся уравнения устойчивости моментного состояния для неоднородной цилиндрической оболочки: неоднородность может быть как естественной, так и связана с изменением свойства материала, находящегося в температурном поле. Целью является исследование влияния новых членов и неоднородности на значения критических параметров. Так как рассмотренные примеры одномерные, то общие уравнения также записываются для этого случая (кольцо).

1. Линеаризованные уравнения устойчивости получим из трехмерных уравнений статики, записанных в полярных координатах [2] обычным образом, принимая гипотезу прямых нормалей, моментность начального состояния и сообщая ему возмущения. При сохранении основных членов они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(T + T^0 \varepsilon + M^0 \kappa - N^0 \frac{dw}{dx} \right) + \frac{1}{R} \frac{dM}{dx} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} (M + M^0 \varepsilon) + T^0 \frac{dw}{dx} \right] - \frac{1}{R} \left(T + N^0 \frac{d^2 v}{dx^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Нулевыми индексами обозначены величины невозмущенного состояния. Обозначения обычные. В предположении того, что неоднородность материала меняется только по высоте, соотношения упругости будут

$$T = J_1 \varepsilon + J_2 \kappa, \quad M = J_2 \varepsilon + J_3 \kappa \quad (1.2)$$

где

$$\varepsilon = \frac{dv}{dx} + \frac{w}{R}, \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad J_i = \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} E(z) (1, z, z^2) dz \quad (1.3)$$

2. Рассмотрим устойчивость кольца под совместным равномерным внешним давлением q и сдвигающими усилиями S на внешнем и внутреннем поверхностях. Тогда начальное состояние будет характеризоваться усилиями

$$T^0 = -Rq, \quad N^0 = Sh, \quad M^0 = 0 \quad (2.1)$$

Уравнения устойчивости в перемещениях будут

$$\left(J_1 + \frac{1}{R}J_2\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} + \frac{w}{R}\right) - \left(J_2 + \frac{1}{R}J_3\right) \frac{d^3w}{dx^3} - Sh \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(J_2 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{R}J_1\right) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{w}{R}\right) - \left(J_1 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{R}J_2\right) \frac{d^2w}{dx^2} - Rq \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{Sh}{R} \frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

Решение (2.2) будем искать в виде

$$v = \varphi_1 \sin \frac{nx}{R} + \varphi_2 \cos \frac{nx}{R} \quad (2.3)$$

$$w = f_1 \cos \frac{nx}{R} + f_2 \sin \frac{nx}{R}$$

где n — целое число. Подставляя (2.3) в (2.2) из условия разрешимости однородной системы относительно φ_i и f_i получим (при пренебрежении

$\frac{1}{R}J_2$ по сравнению с J_1 , см. чуть ниже $\frac{h}{R} < 1$)

$$Rq + \frac{S^2 h^2}{RJ_1} = \frac{J_3}{R^2} \left\{ \left[1 - \frac{J_2}{J_1 J_3} \left(J_2 + \frac{1}{R} J_3 \right) \right] n^2 - 1 \right\} \quad (2.4)$$

Критическое сочетание S и q будет

$$Rq_{кр} + \frac{S_{кр}^2 h^2}{RJ_1} = J_3 \frac{1}{R^2} \left\{ 4 \left[1 - \frac{J_2}{J_1 J_3} \left(J_2 + \frac{1}{R} J_3 \right) \right] - 1 \right\} \quad (2.5)$$

Надо заметить, что здесь $n = 2$ вовсе не значит, что потеря устойчивости происходит по двум волнам.

Пусть изменение $E(z)$ по толщине задано

$$E(z) = E \left(1 + \frac{2z}{h}, \beta \right), \quad E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \beta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \quad (2.6)$$

($0 \leq \beta \leq 1$), $\beta = 0$ — однородное тело.

Кстати, даже в общем случае изменение $E(z)$ естественнее его представления в линейной форме, что вполне соответствует принятию гипотезы прямых нормалей. Тогда

$$J_1 = Eh, \quad J_2 = E\beta \frac{h^2}{6}, \quad J_3 = E \frac{h^3}{12} \quad (2.7)$$

тогда для предельных случаев

$$Rq_{кр} + \frac{S_{xy}^2 h}{RE} = \frac{Eh^3}{12R^2} \begin{cases} 3 & \text{при } \beta = 0 \\ \frac{5}{3} & \text{при } \beta = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Из (2.8) получится известная формула для кольца при внешнем давлении [3]

$$q_{кр} = \frac{Eh^3}{4R^3}$$

3. Для выяснения влияния неоднородности на значение критической силы рассмотрим обычную задачу устойчивости стержня при осевом сжатии ($T^0 = -p$):

$$\frac{d}{dx} \left(T - p \frac{dv}{dx} \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} (M - pw) = 0 \quad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d^2 v}{dx^2} - J_2 \frac{d^3 w}{dx^3} - p \frac{d^2 v}{dx^2} &= 0 \\ J_2 \frac{d^3 v}{dx^3} - J_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - p \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Между прочим, так как здесь уравнение для стержня (пластинки) оболочечного типа (плоская задача и задача изгиба не распадаются), то тангенциальные граничные условия, т.е. условия относительно v или T имеют существенное влияние на значения критической силы.

При условиях

$$w = M = T = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и } x = l \quad (3.3)$$

решение (3.2) будем искать

$$w = f \sin \lambda x, \quad v = \varphi \cos \lambda x, \quad \lambda = \frac{m\pi}{l} \quad (3.4)$$

и для критической силы будем иметь

$$p = \frac{1}{2} \left\{ (J_1 + J_2 \lambda^2) \pm \left[(J_1 - J_2 \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 J_2^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.5)$$

Без последнего члена в первом уравнении (т.е. обычная постановка)

$$p = \left(J_3 - \frac{J_2^2}{J_1} \right) \lambda^2 = J \lambda^2 \quad (3.6)$$

Вот значения критической силы по (2.7)

$$P_{кр} = \begin{cases} J_3 \frac{\pi^2}{l^2} & \text{при } \beta = 0 \\ \frac{2}{3} J_3 \frac{\pi^2}{l^2} & \text{при } \beta = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Причем значение $P_{кр}$ при $\beta = 1$ из (3.5) получено при пренебрежении $\frac{h^4}{l^4}$ по сравнению с единицей. Таким образом, как и следовало ожидать, членом $T^0 \epsilon$ в первом уравнении (1.1) можно пренебречь, что и было сделано в п.2.

Теперь рассмотрим случай, когда вместо $T = 0$ в (3.3) заданы $v = 0$.

Система последовательно интегрируется и после удовлетворения всем условиям для определения критической силы получим

$$\epsilon g \frac{kl}{2} + \delta \frac{kl}{2} = 0, \quad k^2 = \frac{P}{J}, \quad \delta = \frac{J_1 J_2}{J_2^2} \quad (3.8)$$

Критическая сила, определяемая из (3.8), отлична от (3.7) и, к тому же, при $\beta = 0$ ($\delta \rightarrow \infty$) известная

$$P_{кр} = J_2 \frac{\pi^2}{l^2} \quad (3.9)$$

т.е. при однородности не имеет значения, какие условия ($T = 0$ или $v = 0$) ставятся на концах.

Интересно, что в задаче устойчивости стержня при сдвигающих усилиях $N^0 = Sh$ получаются критические усилия независимо от вышеприведенных условий

$$S_{кр} h = \sqrt{J_1 J_2} \frac{\pi}{l} \quad (3.10)$$

Однако формы потери устойчивости различные.

4. Рассмотрим задачи уже с начальным изгибающим моментом. Для начала рассмотрим устойчивость стержня, подвергнувшегося чистому изгибу и осевому сжатию

$$T^0 = -p, \quad M^0 = M_1 \quad (4.1)$$

Тогда из системы (1.1) при граничных условиях (3.3) для критической силы получим

$$P_{кр} = \left(J_3 - \frac{(M_1 + J_2)^2}{J_1} \right) \frac{\pi^2}{l^2} \quad (4.2)$$

Из формулы (4.2) видно, что, во-первых, не имеет смысла постановка задачи устойчивости только при чистом изгибе [4] и, во-вторых, наличие

начального момента играет как бы роль неоднородности и в данном случае уменьшает значение критической силы.

Однако имеет смысл изучить случай динамической устойчивости, т.е. когда изгибающий момент — периодическая функция времени

$$M^v = M_1 + M_2 \cos \theta t \quad (4.3)$$

В системе (1.1), добавляя инерционные члены и поискав решение по (3.4), но уже с переменными по t коэффициентами, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 \varphi - a(1 + 2\mu \cos \theta t) f &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 f - a(1 + 2\mu \cos \theta t) \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\omega^2 = \frac{J_1 \lambda^2}{\rho h}, \quad \Omega^2 = \frac{J_3 \lambda^2}{\rho h}, \quad a = \frac{\lambda^3}{\rho h} (M_1 + J_2), \quad 2\mu = \frac{M_2}{M_1 + J_2}$$

Области главных параметрических колебаний находятся обычным путем [3] и есть

$$\theta = \pm \sqrt{2 \left[\Omega^2 + \omega^2 \pm \sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4a^2(1 \pm \mu)^2} \right]} \quad (4.5)$$

5. Еще пару слов о случае вязкоупругого тела. Если вязкоупругое тело находится в стационарном температурном поле и, начиная с некоторого значения температуры, свойства материала меняются [5,6] так, что верна температурно-временная аналогия, то определяющий закон записывается

$$\sigma = E(z) \left[e - \Gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)\nu(z)} \psi(z) e d\tau \right] \quad (5.1)$$

здесь t — истинное время, $\psi(z)$ — некоторая функция от температуры [6], а последняя функция — только от координаты z . Так как в теории оболочек перемещения и деформации берутся в линейном приближении по нормальной координате (z), то естественно, что здесь функции $\psi(z)$ и $e^{-\alpha(t-\tau)\nu(z)}$ также следует разложить в ряды по z и довольствоваться только линейными приближениями. Тогда вместо соотношения (1.2), сохраняя только главные члены, будем иметь

$$T = J_1 \varepsilon + J_2 \kappa - \Gamma a_0 \int_0^t b_0 \{ J_1 \varepsilon + [J_2 + \Gamma_1(t-\tau)] \kappa \} d\tau \quad (5.2)$$

$$M = J_2 \varepsilon + J_3 \kappa - \Gamma a_0 \int_0^t b_0 \{ J_3 \kappa + [J_2 + \Gamma_2(t-\tau)] \varepsilon \} d\tau$$

здесь

$$\Gamma_1(t - \tau) = \frac{h^2}{12} \frac{a_1}{a_0} [1 - a_0 \alpha(t - \tau)] \cdot b_0 = e^{-a(t-\tau)a_n},$$

а a_0 и a_1 — первых два коэффициента ряда $\psi(z)$ по z .

В вопросах устойчивости наследственно-упругих систем расчетные величины — мгновенная и длительная критическая силы. Так вот, что интересно, но не неожиданно, хотя в (5.2) под интегралом помимо экспоненциального члена есть и член, явно зависящий от времени, однако, длительная критическая сила и для неоднородного тела будет мгновенной. умноженной на коэффициент, т.е. в окончательных выражениях мгновенные модули упругости нужно заменить на длительные. В частности, для стержня при осевом сжатии наряду с мгновенной критической силой имеем длительную по

$$P_{кр}^{(дл)} = J \left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha} \right) \frac{\pi^2}{l^2} \quad (5.3)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Пештмаджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.26. №6. С.18-29.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-А.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967.984с.
4. Мовсисян Л.А. К динамической устойчивости пластин с начальным моментным состоянием. Проблемы механики тонких деформируемых тел (Сб. трудов, посвященных 80-летию С.А.Амбарцумяна), Ереван: 2002. С.224-233.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
6. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Т. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
7. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
23.01.2004

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН УПРУГИЙ СЛОЙ, СОСТОЯЩИЙ ИЗ
ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЧАСТЕЙ

Саркисян К.Г.

Կ.Հ. Սարգսյան

Խնդիր պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահմանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է առաձգական շերտ՝ քաղկացած երկու կիսանվերջ դիէլեկտրիկներից

Այսատարածում ուսումնասիրված են առաձգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (ծոռ դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահմանին կախումացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստությամբ առաձգական շերտ՝ քաղկացած երկու կիսանվերջ դիէլեկտրիկներից: Միջավայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման զնային աղբյուրի հետևանքով: Օգտվելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի խնդրին:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և շոշափող լարման համար ասիմպտոտական բանաձևեր դիէլեկտրիկների բաժանման զծի տեղամասում և կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում, որոնցից հետևում է, որ էլեկտրական դաշտի ինդուկցիան կոնտակտի տեղամասում, դիէլեկտրիկների բաժանման զծի վրա ունի վերջավոր քոչիջ, իսկ շոշափող լարումները պարունակում են խզվող գումարիչի՝ պայմանավորված դիէլեկտրիկ քափանցելիության տարբեր գործակիցներով:

K.H. Sargsyan

On the Shear Vibrations of Piezoelectric Half-Space on the Boundary Surface of which a Dielectric Elastic Layer Consisting of two Semi-infinite Dielectrics is Fixed

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса $6mm$ гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщины, состоящий из двух полубесконечных диэлектрических частей. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению задачи Римана в теории аналитических функций.

Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля и контактных напряжений в окрестности линии раздела диэлектриков и в далеких точках участка контакта, из которых следует, что индукция электрического поля на контактном участке, на линии раздела диэлектриков имеет конечный скачок, а контактные напряжения содержат разрывное слагаемое, обусловленное разностью коэффициентов диэлектрических проницаемостей.

Рассмотрим сдвиговые колебания пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен бесконечный диэлектрический слой малой толщины ($k_2 h \ll 1$), состоящий из двух полубесконечных частей с разными коэффициентами диэлектрической проницаемости, причем коэффициент диэлектрической проницаемости при $x_1 > 0$ – ϵ_1 , а при $x_1 < 0$ – ϵ_2 . Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $P\delta(x_2)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω – частота колебаний, t – параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в

определении индукции электрического поля на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Предполагам, что упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе $Ox_1x_2x_3$. Плоскость $x_2 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем. Ось Ox_2 направлена в глубь пьезоэлектрического полупространства. Ось Ox_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса бтп гексагональной симметрии.

Обозначим упругие перемещения пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя $u^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $u^{(2)}(x_1, x_2, t)$, а электрические потенциалы $\phi^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $\phi^{(2)}(x_1, x_2, t)$, соответственно. Упругие перемещения и электрические потенциалы ищем в виде:

$$u^{(1)}(x_1, x_2, t) = u^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad u^{(2)}(x_1, x_2, t) = u^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

$$\phi^{(1)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad \phi^{(2)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

Тогда поставленная задача в амплитудах сводится к граничной задаче [1]:

$$\Delta u^{(1)} + k_1^2 u^{(1)} = 0, \quad \Delta \phi^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k_1^2 u^{(1)}, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 u^{(2)}(x_1) = \frac{1}{hG_2} (P\delta(x_1) - \tau(x_1)), \quad -\infty < x_1 < \infty \quad (2)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} c_{44} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} + e_{15} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \tau(x_1) \\ e_{15} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = D^+(x_1, 0) + D^-(x_1, 0) \\ u^{(1)} \Big|_{x_2=0} = u^{(2)}(x_1), \quad \phi^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \phi^{(2)} \Big|_{x_2=0} \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau(x_1)$ – контактное напряжение.

$$D^+(x_1, 0) = \theta(x_1)D(x_1, 0), \quad D^-(x_1, 0) = \theta(-x_1)D(x_1, 0), \quad D(x_1, 0) = -\epsilon_1 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}$$

при $x_1 > 0$, $D(x_1, 0) = -\epsilon_2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}$ при $x_1 < 0$. $D(x_1, x_2)$ – индукция электрического поля на контактном участке,

$\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$, $c_1^2 = c_{44} / \rho_1$, $k_1^2 = \omega^2 / c_1^2 (1 + \chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2 / c_{44} \epsilon_{11}$ – коэффициент электромеханической связи, e_{15} – пьезоэлектрическое постоянное, ϵ_{11} и ϵ_1, ϵ_2 – коэффициенты диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика и диэлектрика соответственно, ρ_1 – плотность пьезоэлектрика, c_{44} – коэффициент упругости пьезоэлектрика,

$c_2^2 = G_2 / \rho_2$, $k_2^2 = \omega^2 / c_2^2$, G_2 и ρ_2 — соответственно модуль сдвига и плотность материала диэлектрического слоя.

В силу малости толщины диэлектрического слоя считается, что $D(x_1, x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D(x_1, x_2) = D(x_1, 0)$. тогда в силу $\phi^{(2)}|_{x_2=-h} = 0$ для $\phi^{(2)}(x_1, x_2)$ будем иметь:

$$\phi^{(2)}(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1} D^+(x_1, 0) - \frac{1}{\varepsilon_2} D^-(x_1, 0) \right) (x_2 + h), \quad -\infty < x_1 < \infty \quad (4)$$

Для решения уравнений (1), (2), (4) с контактными условиями (3) применим интегральное преобразование Фурье $\bar{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx$, $-\infty < \sigma < \infty$.

Получим граничную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}^{(1)}}{dx_2^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{u}^{(1)} &= 0, \quad \frac{d^2 \bar{\phi}^{(1)}}{dx_2^2} - \sigma^2 \bar{\phi}^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cdot k_1^2 \cdot \bar{u}^{(1)} \\ \bar{u}^{(2)}(\sigma) &= \frac{\bar{\tau}(\sigma) - P}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)}, \quad \bar{\phi}^{(2)}(\sigma; 0) = -\frac{h}{\varepsilon_1} \bar{D}^+(\sigma; 0) - \frac{h}{\varepsilon_2} \bar{D}^-(\sigma; 0) \end{aligned} \quad (5)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} e_{44} \left. \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} + e_{15} \left. \frac{d\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} = \bar{\tau}(\sigma) \\ e_{15} \left. \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left. \frac{d\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} = \bar{D}^+(\sigma, 0) + \bar{D}^-(\sigma, 0) \\ \bar{u}^{(1)}|_{x_2=0} = \bar{u}^{(2)}(\sigma), \quad \bar{\phi}^{(1)}|_{x_2=0} = \bar{\phi}^{(2)}|_{x_2=0} \end{cases} \quad (6)$$

Выше имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точку $\sigma = -k_2$ сверху, а точку $\sigma = k_2$ — снизу.

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\chi^2 |\sigma| - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1} h |\sigma| \right) \left[\left(1 + \chi^2 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right) \right] \cdot \bar{D}^+(\sigma, 0) + \right. \\ \left. + \left(\chi^2 |\sigma| - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_2} h |\sigma| \right) \left[\left(1 + \chi^2 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right) \right] \cdot \bar{D}^-(\sigma, 0) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}} |\sigma| \right. \end{aligned} \quad (7)$$

После этого, имея в виду функциональные уравнения (7), для контактных напряжений, упругого перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрике получим:

$$\bar{u}^{(0)}(\sigma, x_2) = \frac{P/c_{44}(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) + \varepsilon_{13}/c_{44}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2)h|\sigma| \cdot \bar{D}^-(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \cdot e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^{(0)}(\sigma, x_2) = & \frac{-Pe_{13}\varepsilon_{11}/c_{44}\varepsilon_{11} - (1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2)h \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \bar{D}^-(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \cdot e^{-|\sigma| x_2} \\ & + \frac{Pe_{13}/\varepsilon_{11}c_{44}(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) + \chi^2(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2)h|\sigma| \bar{D}^-(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \cdot e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} \quad (9) \end{aligned}$$

Для удовлетворения условий уходящей волны однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$. При этом контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma = -k_1$ сверху, а точку $\sigma = k_1$ - снизу [2].

$$\bar{\tau}(\sigma) = \frac{P \left[\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (1 + \chi^2) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{\varepsilon_{13}G_2}{c_{44}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) h^2 |\sigma| (\sigma^2 - k_2^2) \right] \bar{D}^-(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \quad (10)$$

Таким образом, задача свелась к решению задачи Римана теории аналитической функции относительно $\bar{D}^-(\sigma, 0)$ и $\bar{D}^+(\sigma, 0)$ [(7)].

Для решения уравнения, (7) перепишем в виде

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \bar{K}(\sigma) \bar{D}^-(\sigma, 0) + \bar{D}^-(\sigma, 0) = -\frac{Pe_{13}}{c_{44}} \bar{S}(\sigma) \quad (11)$$

где $\bar{K}(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \bar{K}(\sigma) = & \frac{\chi^2 \varepsilon_2 |\sigma| - (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \\ \bar{S}(\sigma) = & \frac{\varepsilon_1 |\sigma|}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \end{aligned}$$

Для решения уравнения (11) факторизуем функцию $\bar{K}(\sigma)$, представив ее в виде [3]. $\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) \cdot \bar{K}^-(\sigma)$, где $\bar{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} \alpha > 0$, $\bar{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} \alpha < 0$ ($\alpha = \sigma + i0$).

$$\bar{K}^+(\sigma) = \exp \bar{L}^+(\sigma), \quad \bar{K}^-(\sigma) = \exp \bar{L}^-(\sigma), \quad \bar{L}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} L(x_1) e^{i(\sigma+i0)x_1} dx_1,$$

$$\bar{L}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 L(x_1) e^{i(\sigma-i0)x_1} dx_1$$

$$L(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\chi^2 |\sigma| - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h (\sigma^2 - k_2^2)}{c_{44}} \right] \right)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}) h |\sigma| \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h (\sigma^2 - k_2^2)}{c_{44}} \right]} \right) e^{-i\sigma x_1} d\sigma$$

Затем, уравнения (11) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \bar{K}^-(\sigma) \bar{D}^-(\sigma, 0) + \frac{\bar{D}^-(\sigma, 0)}{\bar{K}^+(\sigma)} = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}} \cdot \bar{R}^+(\sigma) - \frac{Pe_{15}}{c_{44}} \bar{R}^-(\sigma)$$

$$\text{где } \bar{R}^+(\sigma) + \bar{R}^-(\sigma) = \bar{R}(\sigma) = \frac{\bar{S}(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)}, \quad \bar{R}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} R(x_1) e^{i(\sigma+i0)x_1} dx_1,$$

$$\bar{R}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 R(x_1) e^{i(\sigma-i0)x_1} dx_1, \quad R(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}(\sigma) e^{-i\sigma x_1} d\sigma$$

После чего будем иметь:

$$\bar{F}^-(\sigma) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \bar{K}^-(\sigma) \bar{D}^-(\sigma, 0) + \frac{Pe_{15}}{c_{44}} \bar{R}^-(\sigma) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}} \bar{R}^+(\sigma) - \frac{\bar{D}^-(\sigma, 0)}{\bar{K}^+(\sigma)} = \bar{F}^+(\sigma) \quad (12)$$

Дальнейшие рассуждения приводятся, как в [4]. Применив к (12) обратное преобразование Фурье, получим $F^-(x_1) = F^+(x_1)$, где $F^-(x_1) = 0$ при $x_1 > 0$,

$$F^+(x_1) = 0 \text{ при } x_1 < 0, \text{ следовательно, [5-6]. } F^-(x_1) = F^+(x_1) = \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(x_1)$$

(*), где $\delta^{(0)}(x_1) = \delta(x_1), \dots, \delta^{(k)}(x_1)$ - производные $\delta(x_1)$ ($k = 1, \dots, n$). Применив интегральное преобразование Фурье к (*), получим

$$\bar{F}^-(\sigma) = \bar{F}^+(\sigma) = \sum_{k=0}^n a_k (-i)^k \sigma^k.$$

Так как $1 - \bar{K}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ имеет порядок $|\sigma|^{-1}$, то в силу свойства интеграла Фурье следует, что $L(x_1)$ имеет порядок $\ln|x_1|$ при $|x_1| \rightarrow 0$, поскольку

$$\bar{F}^{-1}(|\sigma|^{-1}) = -\frac{1}{\pi} \ln|x_1| + \text{const}, \text{ где } F^{-1} \text{ - обобщенное преобразование Фурье, } F^{-1} \text{ -}$$

обратное преобразование Фурье. Тогда $\bar{L}^+(\sigma) = O\left(\frac{\ln(\sigma + i0)}{\sigma + i0}\right)$ и

$\bar{L}^-(\sigma) = O\left(\frac{\ln(\sigma - i0)}{\sigma - i0}\right)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Отсюда легко видеть, что $\bar{K}^-(\sigma) \rightarrow 1$, когда

$|\sigma| \rightarrow \infty$. Далее так как $\bar{\Phi}^-(\sigma; 0) = -\frac{h}{\varepsilon_1} \bar{D}^-(\sigma; 0)$, $\bar{\Phi}^+(\sigma; 0) = -\frac{h}{\varepsilon_2} \bar{D}^+(\sigma; 0)$ и

поскольку $\Phi(x_1)$ имеет конечное значение в точке $x_1 = 0$, следовательно:

$$\bar{D}^-(\sigma; 0) = O\left(\frac{1}{\sigma - i0}\right), \quad \bar{D}^+(\sigma; 0) = O\left(\frac{1}{\sigma + i0}\right) \quad \text{при } |\sigma| \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\bar{R}(\sigma)$ — абсолютно интегрируемая функция, то $R(x_1)$ — непрерывная функция, следовательно, $R^-(0) = R(0)/2$, $R^+(0) = R(0)/2$.

$$\bar{R}^-(\sigma) = O\left(\frac{1}{i(\sigma - i0)}\right), \quad \bar{R}^+(\sigma) = O\left(\frac{1}{i(\sigma + i0)}\right) \quad \text{при } |\sigma| \rightarrow \infty.$$

Из вышесказанного следует, что $\bar{F}^-(\sigma)$ и $\bar{F}^+(\sigma)$ стремятся к нулю при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что $a_k = 0$ ($k = 0, \dots, n$), т.е. $\bar{F}^-(\sigma) = \bar{F}^+(\sigma) = 0$.

Из этого следует, что $\bar{D}^-(\sigma, 0)$ и $\bar{D}^+(\sigma, 0)$ определяются в виде:

$$\bar{D}^-(\sigma, 0) = -\frac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1} \cdot \frac{\bar{R}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)}, \quad \bar{D}^+(\sigma, 0) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}} \bar{R}^+(\sigma) \cdot \bar{K}^+(\sigma) \quad (13)$$

где $\bar{R}^-(\sigma)/\bar{K}^-(\sigma)$ и $\bar{R}^+(\sigma) \cdot \bar{K}^+(\sigma)$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\bar{R}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \frac{\varepsilon_1|\sigma| - \left[\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left| (1 - \chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2) \right| \right] \bar{R}^-(\sigma) \cdot \bar{K}^-(\sigma)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left| (1 + \chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2) \right|} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\bar{R}^+(\sigma) \cdot \bar{K}^+(\sigma) = \frac{\varepsilon_1|\sigma| - \left[\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left| (1 - \chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2) \right| \right] \bar{R}^-(\sigma) \cdot \bar{K}^-(\sigma)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left| (1 + \chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2) \right|}$$

Далее приступим к исследованию знаменателей $\bar{R}^-(\sigma)/\bar{K}^-(\sigma)$ и $\bar{R}^+(\sigma) \cdot \bar{K}^+(\sigma)$:

$$\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left| (1 + \chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2) \right| = f_1(\sigma)$$

$$\chi^2\varepsilon_2|\sigma| - (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11}h|\sigma|) \left| (1 + \chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2) \right| = f_2(\sigma) \quad (14)$$

Исследуем первое выражение из уравнения (14). Легко видеть, что при $k_2 > k_1$ ($k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}$) и при любых значениях χ $f_1(k_1) > 0$, $f_1(k_2) < 0$. Кроме того,

$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} < 0$ при $\sigma > k_1$ и при любых значениях χ . Из этого следует, что в интервале

$k_1 < \sigma < k_2$ функция $f_1(\sigma)$ имеет единственный нуль $\sigma = \sigma_1$. Из-за четности функции $f_1(\sigma)$ следует, что $\sigma = -\sigma_1$ в интервале $-k_2 < \sigma < -k_1$, также является

нулем этой функции. Аналогично можно показать, что $f_2(\sigma)$ в интервале $k_1 < \sigma < k_2$ имеет единственный нуль $\sigma = \sigma_2$, а в интервале $-k_2 < \sigma < -k_1$ — $\sigma = -\sigma_2$. Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точки $\sigma = -\sigma_1$, $\sigma = -\sigma_2$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$ — снизу. Из вышесказанного следует, что существуют электроупругие поверхностные волны Лява, которые распространяются со скоростями $C_{\pm 1} = \frac{\omega}{\sigma_1}$, $C_{\pm 2} = \frac{\omega}{\sigma_2}$, соответственно по положительным и отрицательным направлениям оси x_1 .

Далее, применив к уравнению (13) обратное преобразование Фурье, для $D^-(x_1, 0)$ и $D^+(x_1, 0)$ получим следующие представления:

$$D^-(x_1, 0) = -\frac{Pe_{13}\epsilon_2}{c_{44}\epsilon_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\epsilon_2|\sigma| - f_2(\sigma)\bar{R}^-(\sigma)\bar{K}^-(\sigma)}{f_2(\sigma)} \cdot \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{A_s}{\sigma - \sigma_2} \right) e^{-i\sigma x_1} d\sigma + \\ + \frac{Pe_{13}\epsilon_2}{c_{44}\epsilon_1} \cdot iA_s e^{-i\sigma_2 x_1}$$

$$D^+(x_1, 0) = -\frac{Pe_{13}}{c_{44}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\epsilon_2|\sigma| - f_2(\sigma)\bar{R}^-(\sigma)/\bar{K}^-(\sigma)}{f_1(\sigma)} - \frac{B_s}{\sigma + \sigma_1} \right) e^{-i\sigma x_1} d\sigma + \\ + \frac{Pe_{13}}{c_{44}} \cdot iB_s e^{-i\sigma_1 x_1}$$

Поскольку $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\bar{R}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} - \frac{A_s}{\sigma - \sigma_2} \right)$ и $\frac{d}{d\sigma} \left(\bar{R}^-(\sigma) \cdot \bar{K}^-(\sigma) - \frac{B_s}{\sigma + \sigma_1} \right)$ — абсолютно интегрируемые функции, то после интегрирования по частям, можно убедиться, что имеют место следующие асимптотические формулы:

$$D^-(x_1, 0) = \frac{Pe_{13}\epsilon_2}{c_{44}\epsilon_1} \cdot iA_s e^{-i\sigma_2 x_1} + o(x_1^{-1}) \quad x_1 \rightarrow -\infty \quad (15)$$

$$D^+(x_1, 0) = \frac{Pe_{13}}{c_{44}} \cdot iB_s e^{-i\sigma_1 x_1} + o(x_1^{-1}) \quad x_1 \rightarrow +\infty$$

$$A_s = \frac{\sigma_1 - \frac{\chi^2 \sigma_1^2 h \epsilon_{11} (1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1)}{(1 + \sigma_1 h \epsilon_{11} / \epsilon_2)} \cdot \bar{R}^-(\sigma_1) \cdot \bar{K}^-(\sigma_1)}{f_1(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma_1}}$$

$$B_s = \frac{-\sigma_2 - \frac{\chi^2 \sigma_2^2 h \epsilon_{11} (1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1) \epsilon_2}{(1 - \sigma_2 h \epsilon_{11} / \epsilon_1) \epsilon_1} \cdot \bar{R}^-(\sigma_2)}{f_2(\sigma) \Big|_{\sigma=-\sigma_2}}$$

Далее так как $\bar{D}^-(\sigma) = \frac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1} \cdot \frac{R(0)}{2i(\sigma - i0)} + O\left(\frac{\ln(\sigma - i0)}{\sigma - i0}\right)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $\bar{D}^+(\sigma) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}} \frac{R(0)}{2i(\sigma + i0)} + O\left(\frac{\ln(\sigma + i0)}{\sigma + i0}\right)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то в силу свойств интеграла Фурье получим:

$$D(x_1, 0) = \frac{Pe_{15}R(0)}{2c_{44}} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \theta(-x_1) + \theta(x_1) \right) + O(x_1 \ln|x_1|) \quad (16)$$

при $|x_1| \rightarrow 0$.

Отсюда следует, что $D(x_1, 0)$ имеет конечный скачок на линии раздела ($x_1 = 0$) диэлектрика.

Поступая как выше, можно получить асимптотические формулы для $\tau(x_1)$.

$$\tau(x_1) = -\frac{(1+\chi^2)\varepsilon_{44}P}{G_2h} \cdot \frac{1}{\pi} \ln|x_1| + \frac{P\chi^2 R(0)}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \theta(-x_1) + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \theta(x_1) \right] + O(1) \quad (17)$$

$|x_1| \rightarrow 0$

Асимптотические формулы для $\tau(x_1)$ при $|x_1| \rightarrow \infty$ получим в виде:

$$\begin{aligned} \tau(x_1) &= iE_1 e^{i\sigma_1 x_1} + O(x_1^{-1}) \quad \text{при } x_1 \rightarrow +\infty \\ \tau(x_1) &= iE_2 e^{-i\sigma_2 x_1} + O(x_1^{-1}) \quad \text{при } x_1 \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$E_1 = \frac{P(\varepsilon_1 - \varepsilon_{11}h\sigma_1) \frac{G_2h}{c_{44}} (\sigma_1^2 - k_2^2) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \frac{G_2h^2}{c_{44}} \sigma_1 (\sigma_1^2 - k_2^2) D^-(\sigma_1, 0)}{f_1'(\sigma)_{\sigma=\sigma_1}}$$

$$E_2 = \frac{P(\varepsilon_2 - \varepsilon_{11}h\sigma_2) \frac{G_2h}{c_{44}} (\sigma_2^2 - k_2^2) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{G_2h^2}{c_{44}} \sigma_2 (\sigma_2^2 - k_2^2) D^-(\sigma_2, 0)}{f_2'(\sigma)_{\sigma=\sigma_2}}$$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э.Х. Григоряну за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирева М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ. 1962. 279с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Изд. 3-е, перераб. и дополн. М.: Наука. 1977. 640с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Ученые записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №3. С.29-34.
5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 283с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 328с.

УДК 539.3

ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Худаяров Б. А.

Բ. Ա. Խուդայարով

Գազի գերձայնային հոսանքով շրջառվող առաձգամածուցիկ զլանային
բաղանջների ֆլատերի խնդիրներ

Դիտարկված են գազի գերձայնային հոսանքով շրջառվող առաձգամածուցիկ զլանային բաղանջների ֆլատերի խնդիրները: Բուրնով-Փալերկինի մեթոդով խնդիրները բերված են սովորական ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների, որոնց լուծումները գտնված են բվային մեթոդով: Որոշված են եռաշերտ բաղանջների ֆլատերի կրիտիկական արագությունները:

В.А. Khudayarov

Problem of Flutter of Viscoelastic Cylindrical Shells in Supersonic Flow of Gas

Исследуются задачи о флаттере вязкоупругих цилиндрических трехслойных оболочек, обтекаемых потоком газа. При помощи метода Бубнова - Галеркина задачи сведены к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи. Определены критические скорости флаттера трехслойных оболочек.

Рассмотрим вязкоупругую трехслойную цилиндрическую круговую оболочку несимметричной структуры, состоящую из двух наружных слоев и с жестким заполнителем. Оболочка длиной L при нулевом угле атаки обтекается потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью V , направленной вдоль образующих.

Нелинейные уравнения движения вязкоупругих трехслойных цилиндрических оболочек выпишем в виде:

$$\begin{aligned} D(1-R^*)(1-\Theta h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \nabla^4 \chi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] + \\ + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - q = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Phi = E(1-R^*)h \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} \end{aligned}$$

Здесь $\chi(x, y, z)$ – функция перемещений, связанная с прогибом $W(x, y, z)$ соотношением [1, 2]:

$$W = (1-h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

Величины D, Θ, β_3 характеризуют соответственно цилиндрическую жесткость трехслойного пакета, изгибную жесткость несущих слоев и жесткость заполнителя на сдвиг; h — толщина пакета; R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$: $R^*\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений.

Поперечная нагрузка $q(x, y, t)$ складывается из сил инерции, сил аэродинамического демпфирования и аэродинамического давления

$$q(x, y, t) = -\Omega \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - B \frac{\partial W}{\partial t} + \Delta p \quad (2)$$

Аэродинамическое давление Δp в случае одностороннего обтекания имеет вид [3]:

$$\Delta p = -\kappa p_\infty \left[M^* \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\kappa+1}{4} M^{*2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] \quad (3)$$

где Ω — удельная масса трехслойного пакета; $B = \kappa p_\infty / V_\infty$; κ — показатель политропы газа; p_∞ и V_∞ — соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке; $M^* = V/V_\infty$ — число Маха для невозмущенного потока.

Будем искать приближенное решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} \chi(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \chi_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y) \\ \Phi(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Phi_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $\varphi_{nm}(x, y)$, $\psi_{nm}(x, y)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (4) удовлетворял граничным условиям на кромках оболочки, а $\chi_{nm}(t)$, $\Phi_{nm}(t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (4) в уравнение (1) и применяя к этому уравнению метод Бубнова — Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов (4). Введя следующие безразмерные параметры

$$\frac{x}{L}, \frac{y}{R}, \frac{V_\infty}{L} t, \frac{W}{h}, \frac{L}{V_\infty} R(t)$$

и сохраняя прежние обозначения, систему ИДУ сводим к уравнению относительно χ_{nm} :

$$A_{kl} \ddot{\chi}_{kl} + B_{kl} \dot{\chi}_{kl} + (1 - R^*) C_{kl} \chi_{kl} + V_\infty \sum_{k=1}^N F_{knl} \chi_{kl} + V_\infty^2 \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M D_{klmn} \chi_{nm} =$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{P_1}{2\pi\beta_1} \sum_{k,j=1}^N \sum_{m,r=1}^M F_{k \ln m r} \chi_{km} (1-R^*) \chi_{jr} + \frac{P_1}{2\pi^3 \lambda^2 \beta_1} \sum_{k,j=1}^N \sum_{m,r=1}^M K_{k \ln m r} (1-R^*) \chi_{km} \chi_{jr} - \\
& - \frac{P_1}{4\pi^3 \lambda^2} \sum_{n,l,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{k \ln m r j s} \chi_{nm} (1-R^*) \chi_{lr} \chi_{js} = 0
\end{aligned} \quad (5)$$

Здесь A_{kb} , B_{kb} , C_{kb} , E_{kb} , F_{kln} , K_{klnmr} , F_{klnmr} , $a_{klnmrjs}$, p_l , $V_* = \pi p_* R^3 M^* / D$ — безразмерные параметры.

Интегрирование системы (5) при ядре Колтунова-Ржаницына ($R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$) проводилось численным методом, предложенным в работах [4, 5]. Результаты вычислений представлены в таблице.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{*кр}$, принимаем условие, что при этих скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При $V > V_{*кр}$ происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V < V_{*кр}$, амплитуда колебаний затухает [6].

Из таблицы видно, что увеличение коэффициента вязкости A приводит к уменьшению критической скорости $V_{*кр}$ флаттера на 54%. При $A=0$ и $A=0,1$ скорость флаттера соответственно равна 83 и 38,3.

Таблица

A	α	β	κ_1	λ	Θ	$V_{*кр}$
0						83
0,001						81,5
0,01	0,25	0,05	0,2	10	0,05	55
0,1						38,3
	0,1					30,5
0,1	0,4	0,05	0,2	10	0,05	42
	0,7					47
0,1	0,25	0,01	0,2	10	0,05	38,5
		0,1				38,1
			0,01			172
0,1	0,25	0,05	0,04	1	0,05	146,3
			0,08			133,9
			0,3			122,95
				4		132,2
0,1	0,25	0,05	0,2	6	0,05	91,3
				8		59
					0,01	115
					0,05	124,2
0,1	0,25	0,05	0,2	1	0,08	130,95
					0,1	135,3
					0,2	156,4

С увеличением реологического параметра α критическая скорость флаттера возрастает. Рост критической скорости более сильно заметен при значениях $\alpha=0,7$ в отличие от значения $\alpha=0,1$. Разница между ними

составляет 54,1%. Для критической скорости флаттера влияние реологического параметра β незаметно.

Изучено влияние параметра k_1 ($k_1 = h^2 \beta_1^{-1} / L^2$) на критическую скорость $V_{кр}$ флаттера. Расчеты были проведены при $k_1 = 0,01; 0,04; 0,08$ и $0,3$. Полученные результаты показывают, что с уменьшением жесткости заполнителя на сдвиг (ростом коэффициента k_1) критическая скорость флаттера трехслойной оболочки уменьшается.

Как показали вычисления, если увеличим параметр λ , то критическая скорость флаттера существенно уменьшается. Это объясняется тем, что по поверхности оболочки аэродинамические нагрузки увеличиваются с ростом параметра λ из-за увеличения длины оболочки L .

Изучено влияние параметра Θ , характеризующее изгибную жесткость несущих слоев. Увеличение параметра Θ благоприятно влияет на флаттерные характеристики.

В заключение отметим, что вязкоупругие свойства материала уменьшают критическую скорость флаттера трехслойных оболочечных конструкций. Увеличение жесткости заполнителя на сдвиг и изгибную жесткость несущих слоев приводит к возрастанию критической скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Михайлов А.П. Флаттер трехслойных цилиндрических оболочек // Инженерный журнал. 1965. Т. V. Вып. 6. С. 1087-1091.
2. Смирнов А.И. Собственные колебания и флаттер трехслойных цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Докл. Акад. Наук СССР. 1969. Т. 186. № 3. С. 533-536.
3. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. XX. Вып. 6. С. 733-755.
4. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат. 1987. 271с.
5. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. 1987. Т. 51. № 5. С. 867-871.
6. Худаяров Б.А. Алгоритмизация задачи о флаттере вязкоупругих пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Вычислительные технологии. СО РАН, Новосибирск. 2003. Т. 8. № 6. С. 100-103.

Ташкентский институт инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства

Поступила в редакцию
24.02.2004

УДК 62-50

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ЗАХВАТОМ ЦЕЛЕВОГО ОБЪЕКТА РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Аветисян В.В., Барсегян А.Р.

Վ.Վ. Ավետիսյան, Բարսեղյան Ա.Ր.

Ոչ լրիվ ինֆորմացիայի պայմաններում ռոբոտ մանիպուլյատորի կողմից նպատակային օբյեկտը բռնելու ղեկավարման օպտիմիզացիան

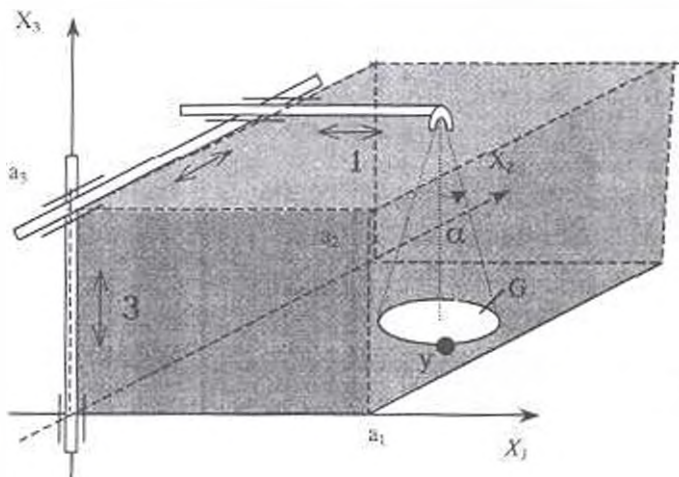
Դիտարկվում են ռոբոտ մանիպուլյատորի կողմից նախապես անհայտ կոորդինատներով նպատակային անշարժ օբյեկտը բռնելու ղեկավարման երկու միատիպ եղանակներ: Ի տարբերություն [2-4]-ի նախատակային օբյեկտը փնտրելու ղեկավարման փուլը ուղեկցվում օբյեկտին մանիպուլյատորի բռնիչի միաժամանակյա մոտեցմամբ: Մանիպուլյատորի աշխատանքային զոնայի երկրաչափական պարամետրերի հարթության մեջ կառուցված դիագրամների օգնությամբ լուծվում է կառուցված ղեկավարումներից այն ղեկավարման ընտրության խնդիրը, որի դեպքում նպատակային օբյեկտը բռնելու երաշխավորված ժամանակը նվազագույնն է:

V.V. Avelisyan, A.R. Barsегhyan

The optimization as control in catching of goal object by robot-manipulator under the incomplet information

Рассматриваются два однотипных способа управления захватом роботом манипулятором неподвижного целевого объекта с заранее неизвестными координатами. В отличие от [2-4] этап управляемого поиска целевого объекта сопровождается с одновременным приближением схвата манипулятора к последнему. При помощи диаграмм, построенных на плоскости геометрических параметров рабочей зоны манипулятора, решается задача выбора управления из двух построенных, при котором захват целевого объекта осуществляется за минимальное гарантированное время.

Пусть имеется трехзвенный манипулятор, работающий в декартовой системе координат, т.е. манипулятор, звенья которого перемещаются друг



Փիգ. 1

относительно друга в трех взаимно-перпендикулярных направлениях (фиг. 1). Управление движением рассматриваемого манипулятора осуществляется с помощью электроприводов, состоящих из электродвигателей

постоянного тока с независимым возбуждением и редукторов. Пусть имеют место следующие допущения [1]: а) редукторы приводов обладают большими передаточными числами; б) электромагнитные постоянные времени и характерные времена выхода электродвигателей на стационарный режим вращения намного меньше времени рабочей операции манипулятора.

При таких предположениях управление движением схвата $X(x_1, x_2, x_3)$ манипулятора по каждой координате x_i — кинематическое, а уравнения движения имеют следующий простой вид:

$$p_i k_i \dot{x}_i = u_i, \quad |u_i| \leq U_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Здесь u_i — управляющее напряжение i -го электродвигателя, U_i — заданные постоянные, k_i — константа (параметр электродвигателя), p_i — размерное (обратное размерности длины) передаточное отношение, связывающее угловую скорость якоря i -го электродвигателя и линейную скорость соответствующего звена ($\omega_i = p_i \dot{x}_i$).

В соответствии с конструкцией рассматриваемого манипулятора, рабочее пространство манипулирования схвата манипулятора представляет собой параллелепипед

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_i \leq c_i, \quad i = 1, 2, 3\} \quad (1.2)$$

Пусть в некотором прямоугольном основании $\bar{D}(a_1, a_2) = \{(x_1, x_2, 0) : 0 \leq x_i \leq a_i, \quad a_i \leq c_i, \quad i = 1, 2\}$ рабочего пространства манипулятора (1.2) имеется некоторый точечный неподвижный объект Y , координаты которого управляемой стороне неизвестны. Предположим, что управляемой стороне в процессе движения доступна полная информация о соотношениях (1.1) и параметрах рабочей зоны манипулятора (1.2) за исключением начального состояния объекта $Y - y(t_0) = y^0$. Однако на схвате X манипулятора расположено сенсорное устройство, при помощи которого на прямоугольном основании $\bar{D}$ образуется подвижная и изменяющаяся круговая информационная область чувствительности $G(x(t))$ (фиг. 1), позволяющая уточнить информацию о координатах местоположения объекта Y в случае попадания последнего в эту область $y \in G(x(t))$.

Определим область $G(x)$ для любого положения $x \in D \subset R^3$ следующим образом:

$$G(x(t)) = G(\bar{x}(t), x_3(t), C) = \left\{ \bar{\xi} \in R^2 : \left| \bar{\xi} - \bar{x} \right| \leq h/2 = Cx_3, \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \bar{D}, \right. \\ \left. 0 < x_3 \leq c, \quad C > 0 \right\} \quad (1.3)$$

Область $G(x(t))$ (1.3) представляет собой круг с центром в точке $\bar{x}(t) = (x_1, x_2) \in \bar{D}$ и с диаметром $h = 2Cx_3$, $C = \operatorname{tg} \alpha$ (фиг. 1), где x_3 — расстояние схвата манипулятора до прямоугольного основания $\bar{D}$, а C, a_1, a_2 — такие числа, для которых при $h_{\max} = 2C \max_{0 \leq x_3 \leq c} x_3$ имеет место неравенство $h_{\max} < a_i \leq c, \quad i = 1, 2$. Такой выбор параметров a_1, a_2 и

C (угла $\alpha, |\alpha| < \pi/2$) позволяет обходить тривиальный случай $G \supset \tilde{D}$.

При фиксированном параметре C (1.3) эволюция крутовой области $G(\bar{x}, x_3, C) = G(\bar{x}, h/2)$ (с учетом $h/2 = C|x_3|$) в прямоугольнике $\tilde{D}$ определяется движением ее центра $\bar{x}$ с помощью вектора управления $\tilde{u}$ и расширением или сужением области $G(\bar{x}, x_3, C)$ путем изменения координаты x_3 с помощью скалярного управления u_3 или, что тоже самое, изменением ее диаметра $h = 2Cx_3$ с помощью управления Cu_3 .

Введем следующие безразмерные переменные и обозначения (с дальнейшим опусканием штрихов):

$$\begin{aligned} t' = t/\gamma, \quad x'_i = x_i/c, \quad \tilde{c}'_i = \tilde{c}_i/c, \quad i = 1, 2, 3, \quad U'_1 = U_1/\rho_1 k_1, \quad U'_2 = U_2/\rho_2 k_2, \quad U'_3 = 1 \\ a'_i = a_i/c, \quad i = 1, 2, \quad h' = h/c, \quad c' = 1, \quad \tilde{U}' = \min(U'_1, U'_2), \quad \gamma = \rho_3 k_3 c / U_3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4) \\ u'_i = u_i/\rho_i k_i, \quad u'_2 = u_2/\rho_2 k_2, \quad u'_3 = u_3/U_3 \end{aligned}$$

В переменных и обозначениях (1.4) плоское и вертикальное движения схвата манипулятора описываются, соответственно, первым, вторым и третьим уравнениями следующей системы:

$$\dot{x}'_i = u'_i, \quad i = 1, 2, 3: \quad \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2} \leq \tilde{U}', \quad |u'_3| \leq 1 \quad (1.5)$$

Область D при этом запишется в виде

$$D(a_1, a_2, 1) = \{(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_i \leq a_i, \quad 0 \leq x_3 \leq 1, \quad h_{\max} \leq a_i, \quad i = 1, 2\} \quad (1.6)$$

Пусть процесс управления схватом манипулятора начинается в момент $t = t_0$ из начальной точки $x'' = (\bar{x}''^0, x_3'') \in D$ и заканчивается в момент $t = T$, когда выполняется условие

$$\begin{aligned} x(T) = x^1 \in \tilde{D}, \\ x^1 = (\bar{x}^1, x_3^1), \quad \bar{x}^1 = y, \quad x_3^1 = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Целью управления схватом является выполнение условия (1.7) за возможно минимальное время T .

2. Разобьем процесс управляемого движения схвата X на два этапа — этапы поиска и приведения на искомый точечный объект Y . В связи с этим допустимыми будем считать комбинированные управляющие функции вида [2]

$$u = \begin{cases} u^0(x^0; t), & t_0 \leq t \leq t', \\ u^1(x^*, t^*, x^1; t), & t' \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь величины x^0, x^*, x^1, t^*, T являются параметрами, $x^0, x^*, x^1 \in D$, $T \geq t' \geq t_0$. Управлению u^0 соответствует этап поиска, а управлению u^1 — этап приведения на искомый объект.

Движение системы (1.1) при управлении вида (2.1) строится следующим образом. На интервале $[t_0, t']$ используется управление поиска u^0 , а затем после момента обнаружения t' , когда вектор x^1 становится известным, на интервале $[t', T]$ используется управление u^1 .

приводящее систему из обнаруженной точки x^* в точку x^1 . Вопрос существования конечного момента $t^* \geq t_0$ является основным в задаче поиска и ее решение зависит от способа управления схватом. Если проекция траектории системы (1.1) (при управлении u^0) на прямоугольное основание $\bar{D}$ — покрывающая [2], то время t^* , при котором обнаружение искомого объекта происходит в конечной точке этой траектории, назовем гарантированным временем поиска.

Полное время процесса поиска и приведения, складывающееся из времени, прошедшего до обнаружения, и оставшегося времени $t^1 = T - t^*$ приведения в x^1 , зависит как от управления и начального положения схвата, так и от геометрических параметров рабочей зоны манипулирования

$$T(D, x^0, u) = t^*(D, x^0, u^0) + t^1(x^*(x^0, u^0), u^1), \quad D = D(a_1, a_2, 1) \quad (2.2)$$

Пусть начальные плоские координаты $(x_1^0, x_2^0) = \bar{x}^0$, $0 \leq x_1^0, x_2^0 \leq a_1, a_2$, и параметр C (1.3) заданы. Тогда каждому значению вертикальной координаты x_3^0 , $0 \leq x_3^0 \leq 1$ и каждому допустимому управлению $u = \{u^0, u^1\}$ соответствует некоторое время гарантированного поиска и приведения (2.2).

Рассмотрим следующую задачу.

Найти минимальное суммарное время гарантированного поиска и приведения $T^*(a_1, a_2)$, управление $u^* = \{u^{0*}, u^{1*}\}$ и начальный диаметр круга обнаружения $h_0^* = 2C(x_3^{0*})$ (или начальную координату (x_3^{0*})) доставляющие минимум

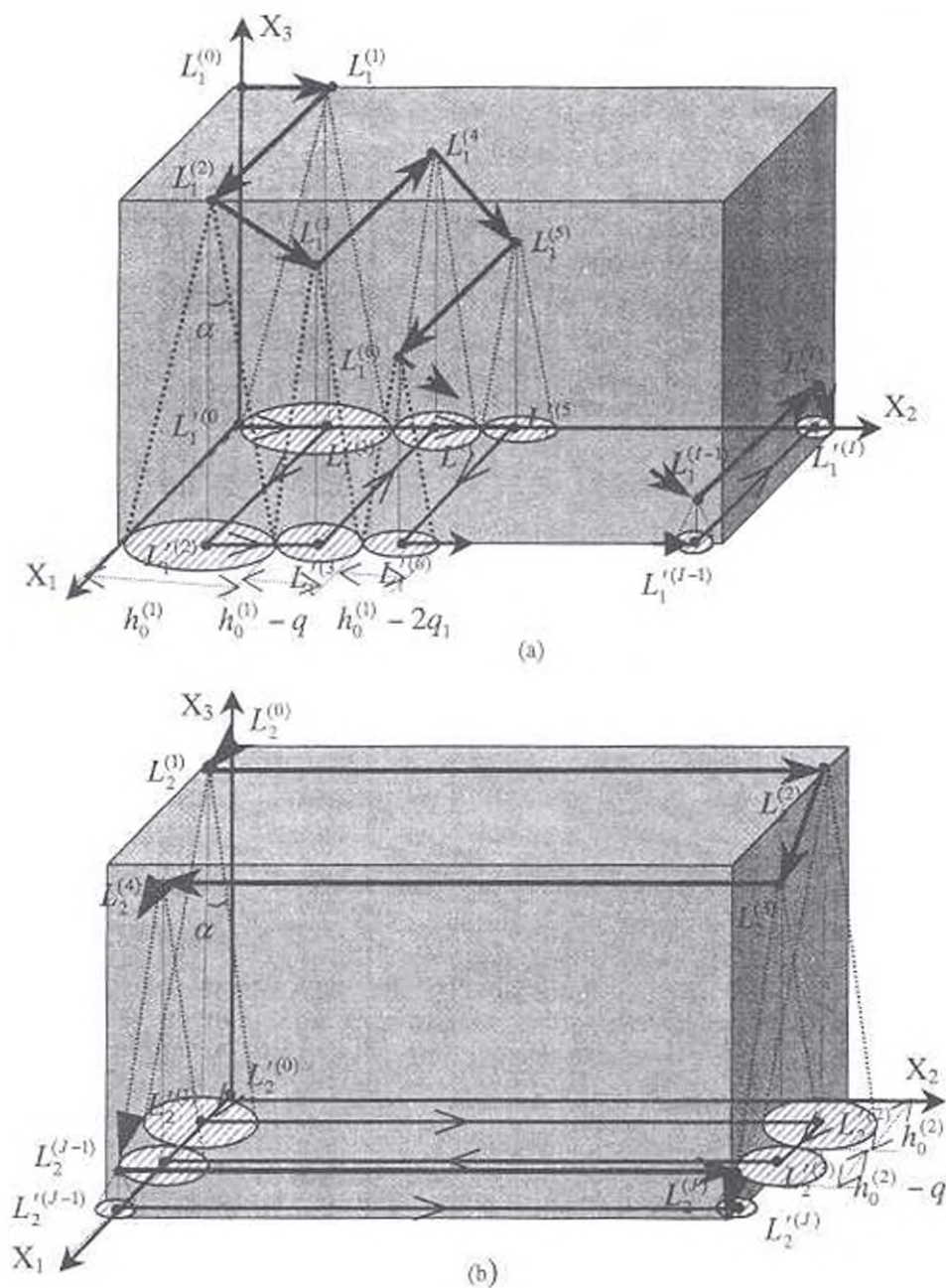
$$T^*(a_1, a_2) = \min_{0 \leq x_3^0 \leq 1} \min_{u \in U} T(a_1, a_2, x_3^0, u), \quad h_{\max} \leq a_1, a_2 \leq 1 \quad (2.3)$$

3. Опишем сначала два однотипных способа управления движением схвата, а затем укажем условия на входящие в него параметров, при которых определяется наилучшее между ними управление, в смысле (2.3).

Рассмотрим исходящие из начальной точки $(x^0)_i = (0, 0, x_3^{(0)})$, $0 < x_3^{(0)} \leq 1$, $i = 1, 2$ две пространственные ломаные L_1 и L_2 , проекции L_1' и L_2' которых на прямоугольное основание $\bar{D}$ в плоскости Ox_1x_2 изображены на фиг. 2а и 2б соответственно. Двигаясь по ломаной L_1 , проекция схват манипулятора осуществляет сканирование прямоугольника $\bar{D}$ по ломаной L_1' . Пусть длины участков ломаных, лежащих на боковых сторонах прямоугольника, уменьшаются по закону арифметической прогрессии с некоторой постоянной величиной q_i , $0 < q_i < h_0^{(1)}$, где $h_0^{(1)} = 2Cx_3^{(0)}$ — начальный диаметр круга обнаружения. Тогда сумма диаметров кругов обнаружения, лежащих на боковых сторонах прямоугольника, выражается формулой

$$a_i = (2h_0^{(1)} - (n_i - 1) \cdot q_i) n_i / 2 \quad (3.1)$$

где n_i — целое число, определяющее количество указанных участков.



Фиг. 2

В отличие [3], рассмотрим случай "медленного поиска" [4], когда оптимальное время плоского перемещения центра круга обнаружения на расстояние, равное радиусу круга $h_0^{(i)}/2\tilde{U}$ больше оптимального времени вертикального перемещения $x_3^{opt}/U_3 = C^{-1}h_0^{(i)}/2$, т.е. $\tilde{U} \leq CU_3$, $U_3 = 1$. Тогда управления, при которых движение схвата X происходит по траекториям $L_i, i = 1, 2$, задаются следующим образом:

$$u_{L_1} = \begin{cases} u_1(t) = 0, & u_2(t) = \tilde{U}, & u_3 = 0; & t_0^{(1)} \leq t \leq t_1^{(1)}, \\ u_1(t) = \tilde{U}, & u_2(t) = 0, & u_3 = 0; & t_{j+1}^{(1)} \leq t \leq t_{j+2}^{(1)}, \quad j = 4r, r = 0, 1, \dots, p, \\ u_1(t) = -\tilde{U}, & u_2(t) = 0, & u_3 = 0; & t_{j+3}^{(1)} \leq t \leq t_{j+4}^{(1)}, \quad j = 4r, r = 0, 1, \dots, p, \\ & p = [(n_2 + 1)/2] \\ u_1(t) = 0, & u_2(t) = \tilde{U}, & u_3 = q_2 \tilde{U} / (2h_0^{(2)} - q_2) C; & t_{j+2}^{(1)} \leq t \leq t_{j+3}^{(1)}, \quad j = 2r, \\ & r = 0, 1, \dots, n_2 - 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$u_{L_2} = \begin{cases} u_1(t) = 0, & u_2(t) = \tilde{U}, & u_3 = 0; & t_0^{(2)} \leq t \leq t_1^{(2)}, \\ u_1(t) = \tilde{U}, & u_2(t) = 0, & u_3 = 0; & t_{j+1}^{(2)} \leq t \leq t_{j+2}^{(2)}, \quad j = 4r, r = 0, 1, \dots, p, \\ u_1(t) = -\tilde{U}, & u_2(t) = 0, & u_3 = 0; & t_{j+3}^{(2)} \leq t \leq t_{j+4}^{(2)}, \quad j = 4r, r = 0, 1, \dots, p, \\ & p = [(n_1 + 1)/2], \\ u_1(t) = 0, & u_2(t) = \tilde{U}, & u_3 = q_1 \tilde{U} / (2h_0^{(1)} - q_1) C; & t_{j+2}^{(2)} \leq t \leq t_{j+3}^{(2)}, \quad j = 2r, \\ & r = 0, 1, \dots, n_1 - 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

где $[x]$ означает целую часть x .

В (3.2), (3.3) моменты времени $t_j^{(1)}, t_{j+1}^{(1)}, t_{j+2}^{(1)}, i = 1, 2$ определяются из уравнения движения (1.1) подстановкой управлений (3.2), (3.3) в эти уравнения и интегрированием последних при краевых условиях, представляющих координаты вершин $L_1, L_1^{(1)}, L_1^{(2)}, i = 1, 2$.

Движение схвата X при управлении (3.2) (3.3) происходит следующим образом. На участке $L_1^{(1)} L_1^{(2)} L_1^{(2)} (L_2^{(1)} L_2^{(1)} L_2^{(2)})$ рассматриваемой ломаной $L_1 (L_2)$ плоское движение схвата X происходит с максимальной скоростью $\tilde{U} = \tilde{U}$ и с постоянным диаметром обнаружения $h_0^{(2)} = 2C \cdot x_3^{(2)} (h_0^{(1)} = 2C \cdot x_3^{(1)})$, т.е. при $u_3 = 0$. Начиная с вершины $L_1^{(2)} (a_1, h_0^{(2)}/2, x_3^{(2)}) (L_2^{(2)} (h_0^{(1)}/2, a_2, x_3^{(1)}))$ движение объекта X по координатам $x_2(x_1), x_3$ происходит одновременно. За время $t = h_0^{(2)}/(\tilde{U} + Cu_3) (t = h_0^{(1)}/(\tilde{U} + Cu_3)), 0 \leq u_3 \leq 1$ нижняя точка пересечения окружности круга обнаружения с линиями $x_1 = a_1 (x_2 = a_2)$ и $x_1 = 0 (x_2 = 0)$ перемещается из положения $(a_1, 0) ((0, a_2))$ в положение $(a_1, h_0^{(2)}) ((h_0^{(1)}, a_2))$ со скоростью $\tilde{U} + Cu_3$, а центр круга обнаружения — из положения $(a_1, h_0^{(2)}/2) ((h_0^{(1)}/2, a_2))$ в положение $(a_1, h_0^{(2)} + h_0^{(2)(1)}/2) ((h_0^{(1)} + h_0^{(1)(1)}/2, a_2))$ со скоростью $\tilde{U}$, где $h_0^{(1)(1)} = h_0^{(1)} - q_1, q_1 = 2h_0^{(1)} Cu_3 / (\tilde{U} + Cu_3)$. По описанному способу движение по заключительному участку траектории обеспечивает приведение схвата в конечную точку траектории L_1 . Проекция $L_1', i = 1, 2$

траекторий $L_i, i = 1, 2$ покрывают $\tilde{D}$ ([2]), поэтому движение схвата X по траекториям $L_i, i = 1, 2$ при соответствующих управлениях обеспечивает обнаружение искомого объекта, находящийся в $\tilde{D}$, за конечное время. Как показали исследования, проведенные аналогично [5], одна из траекторий $L'_i, i = 1, 2$ в зависимости от геометрических параметров $\tilde{D}$ имеет минимальную длину среди целого множества покрывающих прямоугольную область с заданной точностью траекторий, построенных на основе двух исходных траекторий $L'_i, i = 1, 2$.

Полное время процесса управления при прохождении схвата X по траекториям $L_i, i = 1, 2$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{L_i}(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) &= t_{L_i}^* + t_{L_i}^1, \quad (i = 1, j = 2); \quad (i = 2, j = 1) \quad (3.4) \\ t_{L_i}^*(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) &= d_{L_i}^*(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) / \tilde{U}, \quad t_{L_i}^1(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) = d_{L_i}^1(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) / \tilde{U} \\ d_{L_i}^*(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) &= h_0^{(j)} / 2 + (2h_0^{(j)} - (n_j - 1)q_j)(n_j - 1) / 2 \\ d_{L_i}^1(h_0^{(j)}, q_j) &= (h_0^{(j)} - (n_j - 1)q_j) / 2, \\ (i = 1, j = 2); \quad (i = 2, j = 1) \end{aligned}$$

В (3.4) $t_{L_i}^*$ — гарантированное время "просмотра" прямоугольника $\tilde{D}$ при прохождении проекции схвата X по траектории с длиной $d_{L_i}^*$, а $t_{L_i}^1$ — время приведения на уже обнаруженную точку по заключительному участку с длиной $d_{L_i}^1$.

Из (3.4) имеем

$$\begin{aligned} T_{L_i}(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) &= d_{L_i} / \tilde{U}, \quad (i = 1, j = 2); \quad (i = 2, j = 1) \quad (3.5) \\ d_{L_1}(a_1, a_2, h_0^{(2)}, q_2, n_2) &= d_{L_1}^* + d_{L_1}^1 = a_2 + n_2(a_2, h_0^{(2)}, q_2) \cdot a_1 \\ d_{L_2}(a_1, a_2, h_0^{(1)}, q_1, n_1) &= d_{L_2}^* + d_{L_2}^1 = a_1 + n_1(a_1, h_0^{(1)}, q_1) \cdot a_2 \end{aligned}$$

Таким образом, $\square\square$ {2.3}, с учетом (3.4), (3.5), получим

$$\begin{aligned} T^*(a_1, a_2) &= \min_{i=1,2} \min_{0 < h_0^{(j)} \leq h_{\max}^{(j)}} \min_{0 < q_j \leq h_0^{(j)}} T_{L_i}(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) = \\ &= \min_{i=1,2} \min_{0 < h_0^{(j)} \leq h_{\max}^{(j)}} \min_{0 < q_j \leq h_0^{(j)}} d_{L_i}(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) / \tilde{U} = \\ &= \min_{i=1,2} d_{L_i}^*(a_1, a_2) / \tilde{U} = d^*(a_1, a_2) / \tilde{U} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$h_{\max}^{(j)} = h_{\max} \leq a_1, a_2 \leq 1, \quad (i = 1, j = i + 1); \quad (i = 2, j = i - 1)$$

В (3.6) задача минимума

$$\begin{aligned} d_{L_i}(a_1, a_2, h_0^{(j)}, q_j) &\rightarrow \min_{0 < h_0^{(j)} \leq h_{\max}^{(j)}} \min_{0 < q_j \leq h_0^{(j)}} \\ (i = 1, j = i + 1); \quad (i = 2, j = i - 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

с учетом (3.5), равносильна задаче

$$n_i(a_1, h_0^{(j)}, q_j) \rightarrow \min_{0 < h_0^{(j)} \leq h_{\max}^{(j)}} \min_{0 < q_j \leq h_0^{(j)}}, \quad n_i \in Z \quad (3.8)$$

где $n_i, i = 1, 2$ определяются из (3.1) и имеют вид

$$n_i(a_i, h_0^{(i)}, q_i) = [2h_0^{(i)} + q_i - \sqrt{(2h_0^{(i)} + q_i)^2 - 8a_i q_i}] / 2q_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

Первый внутренний минимум в (3.8) по q_i , с учетом (3.9), достигается при

$$q_i^* = 4a_i - 2h_0^{(i)} - 4\sqrt{a_i(a_i - h_0^{(i)})}, \quad i = 1, 2 \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.9) и разрешая последние относительно $h_0^{(i)}$, получим следующие два соотношения:

$$h_0^{(i)} = a_i(2n_i - 1) / n_i^2, \quad i = 1, 2 \quad (3.11)$$

Функции (3.11) — монотонно убывающие относительно параметров $n_i, i = 1, 2$. Поэтому определение внешнего минимума в (3.8) равносильно нахождению наименьших значений $n_i^*, i = 1, 2, \dots$ и, соответственно, максимальных значений диаметров круга обнаружения $(h_0^{(i)})^*, i = 1, 2$ (3.11), при которых не нарушаются условия

$$(h_0^{(i)})^* \leq h_{\max}^{(i)} = 2C, \quad i = 1, 2 \quad (3.12)$$

Таким образом, решение задачи (3.7) можно представить в следующей последовательности: для фиксированных $a_i, i = 1, 2$ из (3.11) и (3.12) определяются количество шагов сканирования — n_i^* , и начальный диаметр круга обнаружения (или начальная координата по вертикали) — $(h_0^{(i)})^*$. Затем находится q_i^* из (3.10). При найденном наборе значений $n_i^*, (h_0^{(i)})^*, q_i^*$ определяются управления (3.2), (3.3), при которых выполняется условие (1.7).

4. Перейдем, согласно (3.6), к решению задачи

$$d^*(a_1, a_2) = \min_{i=1,2} d_{L_i}^*(a_1, a_2), \quad h_{\max} \leq a_1, a_2 \leq 1 \quad (4.1)$$

т.е. к задаче определения из двух траекторий L_1 и L_2 траектории минимальной длины.

Минимум в (4.1) зависит от знака функции

$$F(a_1, a_2) = d_{L_2}^* - d_{L_1}^* = a_2 - a_1 + n_2^* a_1 - n_1^* a_2 \quad (4.2)$$

и определяется следующим образом:

$$d^*(a_1, a_2) = \begin{cases} d_{L_1}(a_1, a_2), & F(a_1, a_2) > 0 \\ d_{L_2}(a_1, a_2) = d_{L_1}(a_1, a_2), & F(a_1, a_2) = 0 \\ d_{L_2}(a_1, a_2), & F(a_1, a_2) < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

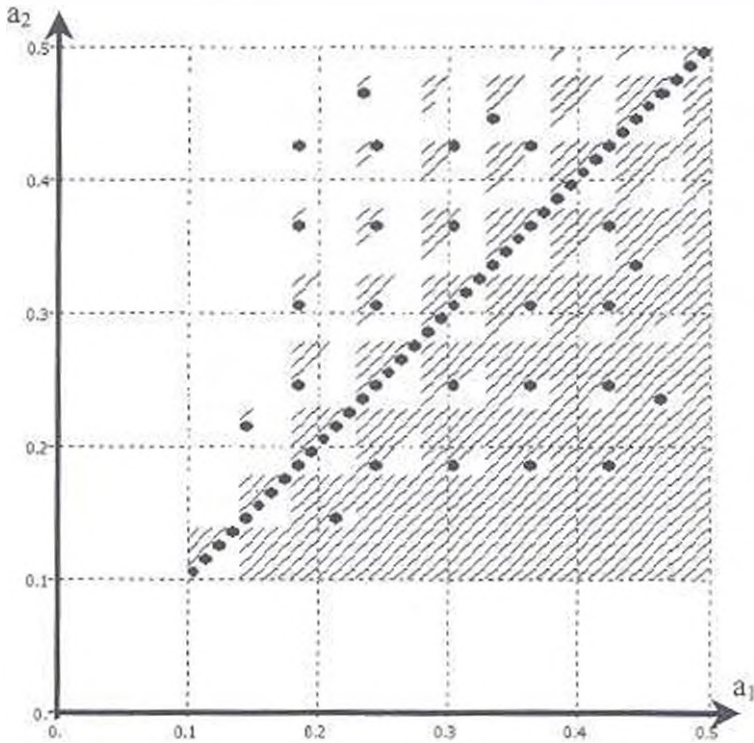
Определение минимума (4.3), в соответствии с предлагаемым алгоритмом, проводилось численным путем. Был рассмотрен манипулятор со следующими размерными электромеханическими и геометрическими параметрами:

$$c = 1 \text{ м}, \quad C = 0.05, \quad p_1 = 3600 \text{ м}^{-1}, \quad p_2 = 3260 \text{ м}^{-1}, \quad p_3 = 150 \text{ м}^{-1}$$

$$k_1 = 0.3 \text{ Н м/А}, \quad k_2 = 0.233 \text{ Н м/А}, \quad k_3 = 0.316 \text{ Н м/А}.$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = 110 \text{ В}$$

На фиг. 3 результаты расчетов по изложенному алгоритму (3.7)-(3.12), (4.1)-(4.3) представлены в виде диаграммы. Вычисления проведены после перехода к безразмерным переменным с помощью формул (1.4), где за единицу измерения времен взята величина $\gamma = p_3 k_3 c U_3^{-1} \approx 0.43 \text{ с.}$, равная времени вертикального перемещения схвата манипулятора на 1 м с постоянной скоростью $\dot{x}_3 = (p_3 k_3)^{-1} U_3 \approx 2.32 \text{ м.с.}^{-1}$



Фиг. 3

По осям на фиг. 3 отложены значения длин сторон прямоугольника a_1 и a_2 , изменяющихся в пределах $h_{\min} \leq a_1, a_2 \leq 0.5$, где $h_{\min} = 0.1$. Диаграмма типа фиг. 3 позволяет рассчитать оптимальную траекторию из двух исходных траекторий L_1 и L_2 и соответствующее управление. Если точка (a_1, a_2) совпадает с жирными точками, то L_1 и L_2 равносильны, т.е. $T^* = T_{L_1} = T_{L_2}$; тогда можно использовать управление (3.2) или (3.3). Если точка (a_1, a_2) принадлежит заштрихованным областям, то оптимальной является траектория L_1 , т.е. $T^* = T_{L_1}$, а оптимальное управление определяется согласно (3.2). В остальном оптимальной является L_2 , т.е. $T^* = T_{L_2}$ и оптимальное управление определяется согласно (3.3).

Для следующих значений параметров $a_2 = 0.5$ и $a_1 = 0.1, 0.11, \dots, 0.5$ проведены расчеты определения оптимальных значений параметров управления (3.2), (3.3) — $(h_0^{(i)})^*, n_i^*, q_i^*, i=1,2$ и соответствующих оптимальных времен гарантированного приведения. Так, например, при $a_1 = 0.3$ и $a_2 = 0.4$ в размерных переменных имеем $(h_0^{(1)})^* = 0.0916 м$, $n_1^* = 6$, $q_1^* = 0.0166 м$ и $(h_0^{(2)})^* = 0.0937 м$, $n_2^* = 8$, $q_2^* = 0.0125 м$, которым соответствуют значения $T_{1*} = 27.4909 с$ и $T_{2*} = 26.5090 с$, т.е. $T^* = T_{1*}$. Анализ полученных результатов показали, что оптимизация управления гарантированного приведения дает существенный выигрыш во времени. Во всем диапазоне изменения параметра a_1 , $0.1 \leq a_1 \leq 0.5$ выигрыш во времени составляет до 30%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.А., Болотник., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука. 1989. 386 с.
2. Аветисян В.В. О задаче оптимального гарантированного приведения динамической системы в целевую точку в ограниченной области при неполной информации // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. № 3. С. 65-72.
3. Avetisyan V.V. The problem of optimal guaranted search and capture of immobile object in rectangular domain // 10-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Proceodings, v.1. St. Petersburg, Russia, 2002, p. 65-68.
4. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному суммарному времени гарантированный поиск и приведение динамической системы в неподвижную точку в прямоугольной области // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 38-46.
5. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 62-69.

Институт Механики НАН
Республики Армения
Государственный инженерный
университет Армении

Поступила в редакцию
23.02.2004

УДК 539.3

О ПРОЧНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Хачикян А.С., Ширинян Р.А.

Ա.Ս. Խաչիկյան, Ռ.Ա. Շիրինյան

Տարասեմ նյութերից կազմված միացությունների ամրության մասին հարվածային բեռների դեպքում
Դիտարկված են հարվածային բեռների դեպքում տարասեմ նյութերից միացությունների ամրության
հնարները: Փորձերը կատարված են ճոճանակային ցցահարի (копер) վրա, ըստ Շարպի փորձի նմուշների
նմանատիպ նմուշների վրա, որոնք պատրաստված են ոլորալուծումից և Լպօրսիդային կոմպաունդից
մասերի տեսնման միջոցով Փորձարկված են նմուշներ, որոնց մեջ լարումների ուժեղ խտացման
(եզակիության) կամ բերլարվածության գոտիները գտնվում են միացման մակերևույթի ինչպես ներքին
անկյունային կետում, այնպես էլ արտաքին եզրերում: Արդյունքների անալիզը ցույց է տալիս ստատիկ
փորձարկումների արդյունքների հետ որակական համաձայնեցվածությունը և բայթայան ձևի ու
ցուցանիշների բավարար կայունությունը: Միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում լարումների ուժեղ
խտացումը լիովին փոխարինում է ըստ Շարպի փորձում նախատեսվող արհեստականորեն ստեղծվող
լարումների կոնցենտրատորին:

A.S. Khachikyan, R.A. Shirinian

On the Strength of Joint from Heterogeneous Materials under the Shock Loadings

Рассмотрены вопросы прочности соединений из разнородных материалов при ударных
нагрузках. Эксперименты проведены на маятниковом копре на образцах аналогичных
образцам для испытаний по Шарпи, изготовленных склеиванием частей из эпоксидного
компаунда и дюралюминия. Испытаны образцы с зонами сильной концентрации напряжений
или малонапряженного состояния как на внешних краях, так и на внутренних ребрах
поверхности соединений. Анализ результатов показывает качественное согласие с данными
статических испытаний и удовлетворительная устойчивость характера разрушений и
показателей прочности. Сильный концентратор в окрестности ребра или края поверхности
соединения полностью заменяет искусственный концентратор, создаваемый в испытаниях по
методу Шарпи.

Экспериментально рассматривается влияние сингулярного и малонапряженного распределений напряжений, появляющихся в окрестностях ребер и краев поверхности соединения, на характер разрушения клеевого соединения при импульсной нагрузке.

Клеевые соединения находят широкое применение в разных отраслях техники и многие вопросы их прочности достаточно хорошо исследованы [1,2]. В [3,4] обсуждены вопросы распределения напряжений и прочности в клеевых соединениях из разнородных материалов при статических и циклических нагрузках. В работах, включенных в справочник [5], рассматривается напряженное состояние неоднородных тел при наличии трещин, выходящих на поверхность соединения разнородных материалов, или находящихся на этой поверхности. Прочность клеевых соединений при ударных нагрузках сравнительно мало исследована [1].

1. Вопросы сопротивления материалов и конструкций ударным нагрузкам очень актуальны [6]. Проведены многочисленные исследования разрушений волнами напряжений и динамического распространения трещин [7-9]. В распространенном, особенно для металлов, методе определения ударной вязкости материалов по Шарпи на образце заранее делается искусственный концентратор-остроконечный надрез. Этот

концентратор, по идее, обеспечивает если не замену зарождающейся трещины, то одинаковые условия ее зарождения, определяемые остротой надреза, размеры которого стандартизируются [10]. Конструкции типа клеевого соединения из разнородных материалов имеют на ребрах и краях поверхности соединения сингулярность напряжений (КС) или малонапряженное состояние (МС) [11]. Степень особенности напряжений определяется по местным решениям задачи линейной теории упругости, а коэффициент при особенности можно оценить по фотоупругим картинам [11,12]. Влияние этих специфических распределений напряжений на прочность соединения при статических и циклических нагрузках рассмотрено в [13]. Эти исследования показали хорошее соответствие показателей прочности соединений характеру распределения напряжений, определенных теоретически и по фотоупругим картинам.

Исследования прочности соединений из разнородных материалов при импульсных нагрузках нам неизвестны.

Здесь приводятся результаты наших экспериментов по выявлению влияния специфического распределения напряжений в кусочно-однородном теле на характер разрушения клеевого соединения из эпоксидного компаунда и дюралюминия при импульсной нагрузке. Испытывались образцы, аналогичные Шарпи без искусственных концентраторов. Роль концентраторов напряжений выполняют особенности напряжений на ребрах поверхности соединения. Испытаны образцы с концентрационными и малонапряженными зонами распределения напряжений как на внешней поверхности образцов, так и на внутренних ребрах поверхности соединений разнородных частей образцов.

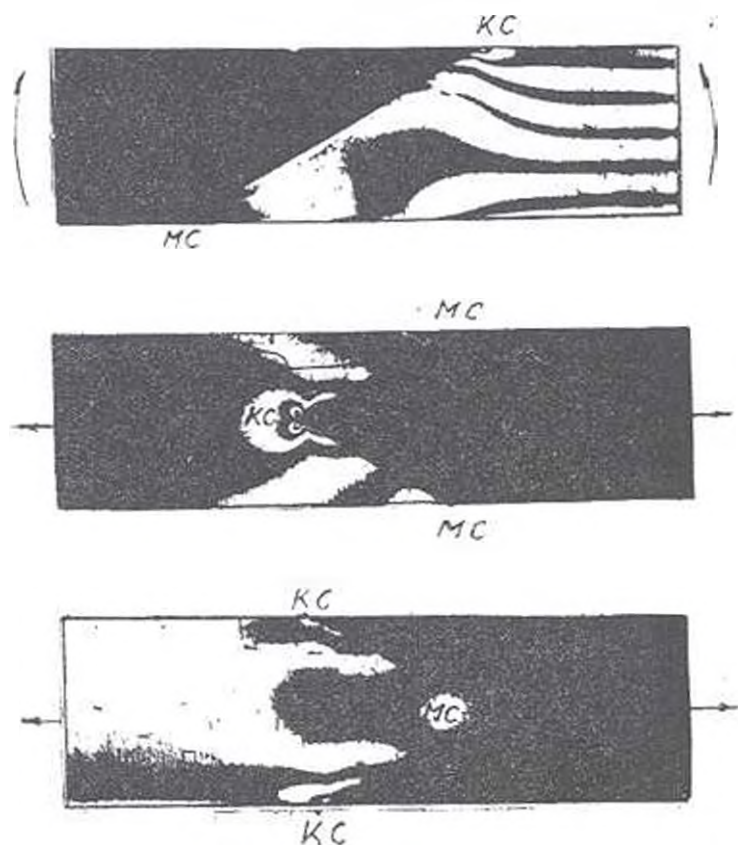
Скорость приложения нагрузки и температура образцов при испытаниях не менялись. Не менялись также углы отделки склеиваемых частей соединений, что равносильно постоянству параметров поведения напряжений в угловых точках — коэффициента при особенности и степеней особенности или стремления к нулю.

2. Были испытаны четыре типа образцов, изготовленных из эпоксидного компаунда (ЭД6-МТГФА) и дюралюминия (Д16-АТ). Склеивание проводилось эпоксидным клеем. Технология изготовления и склеивания образцов описана в [14]. В [15-17] приведены также результаты статических и циклических испытаний этих же образцов, а также фотоупругие картины напряжений при изгибе и растяжении, некоторые из которых приведены здесь (фиг. 1). Конструкция образцов с размерами 0.6×1.3×6.0 см и схемы нагружения показаны на фиг. 2.

Испытания проводились на маятниковом копре МК-0.5-1. Предварительными испытаниями нескольких образцов был определен диапазон энергии разрушения для образцов разных типов и выбрана скорость начала удара 2.5 м/с.

С целью исключения влияний возможных случайных факторов изготовлены и испытаны две группы образцов. Для каждого типа были испытаны пять образцов в первой группе и по три образца типа А, Б, Г — во второй. Были также испытаны две группы по три и пять однородных образца (фиг. 3) по методу Шарпи с разной остротой искусственного концентратора для определения когезионной прочности эпоксидного компаунда. Результаты испытаний приведены в табл. 1-4.

В табл. 1 и 2 приведены экспериментальные значения работ разрушений первой и второй групп образцов соответственно, а также величины площадей поверхностей, образованных разрушением когезионно по эпоксидному компаунду и адгезионно по плоскости склеивания. В табл. 3 приведены значения работ разрушения однородных образцов из эпоксидного компаунда при двух разных значений остроты надреза концентратора. В табл. 4 приведены средние (по двум группам образцов) и удельные значения энергии образования поверхностей адгезионным разрушением, рассчитанных согласно значениям удельных расходов энергий на когезионное разрушение для двух разных концентраторов-надрезов.

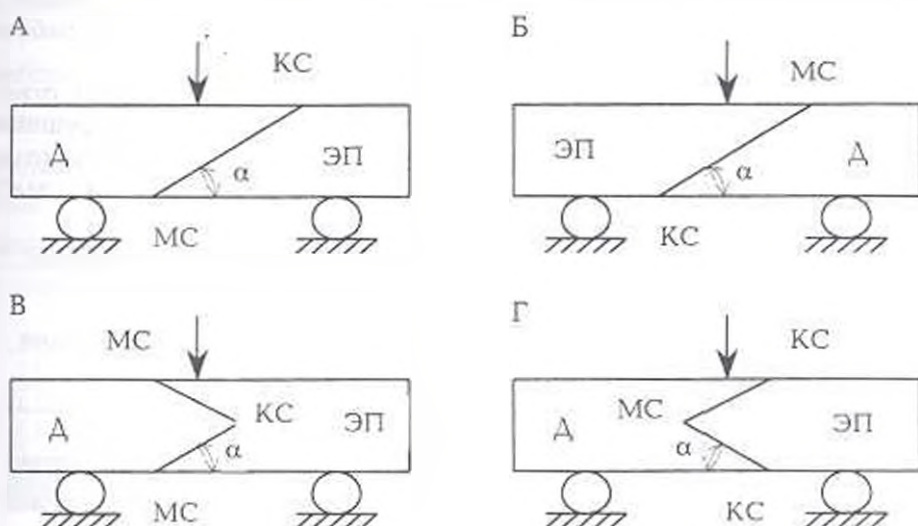


Фиг. 1. Фотоупругие картины напряжений при статическом нагружении. КС — концентрационное состояние, МС — малонапряженное состояние

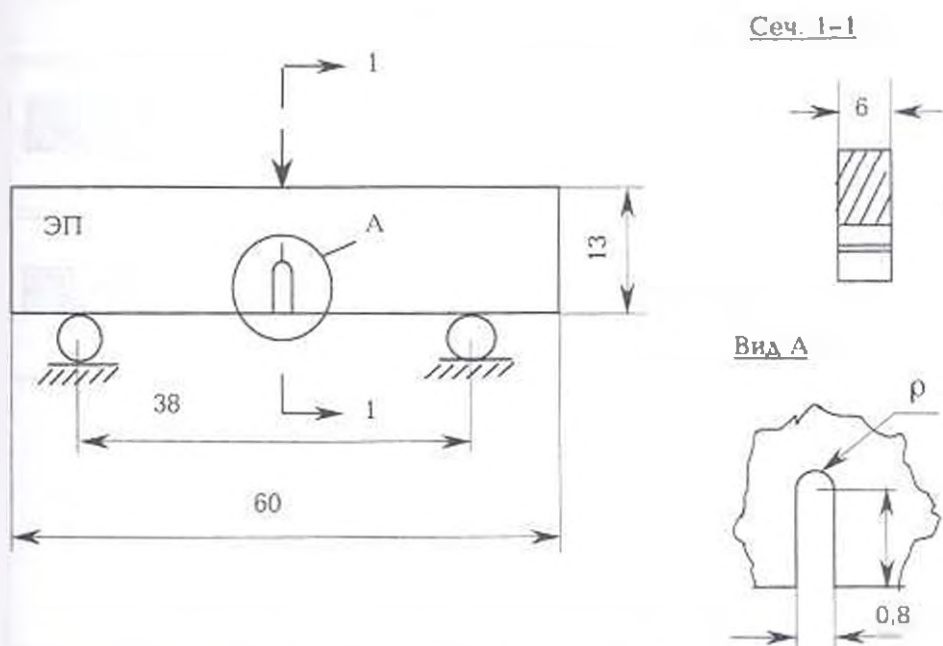
3. Рассматривая результаты испытаний, прежде всего следует отметить достаточно хорошую, для таких экспериментов, устойчивость значений энергии, затрачиваемой на разрушение образцов каждого типа. Можно отметить также устойчивость характера разрушения и отношения величин площадей вновь образованных поверхностей, разрушенных адгезионным и когезионным образом. Из 37 образцов забракованы результаты испытаний 6 образцов. Еще только 5 образцов дали значительно отличающиеся от средних значений результаты. Остальные

26 образцов дали стабильные в своей группе результаты.

Во-вторых, можно отметить согласованность с результатами статических испытаний и с фотоупругими картинками напряжений этих же образцов [13]. Образцы типа А (с концентратором на сжатой зоне изгибаемой полосы) прочнее образцов типа Б (с концентратором на растянутой зоне), образцы типа Г (с КС на границах полосы) слабее образцов типа В (с КС на нейтральной линии). Отметим еще, что



Фиг. 2. Тип образцов и схемы нагружения Д – дюралюминий, ЭП – эпоксидный компаунд, $\alpha = 30^\circ$.



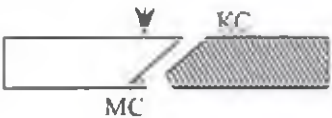
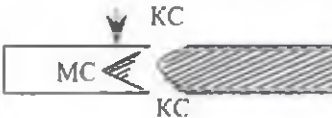
Фиг. 3. Образцы для испытаний на вязкость разрушения с переменной остротой концентратора. ρ – радиус закругления на кончике концентратора.

исключительно во всех образцах в окрестности МС поверхность соединения не раскрылась (нет адгезионного и вообще никакого разрушения), а в окрестности КС поверхность соединения раскрылась (имеет место адгезионное разрушение).

Важно еще отметить большую разницу удельной когезионной работы на разрушение однородных образцов по Шарпи из эпоксидного компаунда с различной остротой надреза (табл. 4). Менее острый надрез дает слишком завышенные значения удельной работы, что приводит к противоречию (табл. 4, отрицательные значения адгезионной работы разрушения).

4. Один из интересующих нас вопросов имеет однозначный ответ: при импульсных нагрузках (как и при статических нагрузках) разрушение никогда не начинается в зоне МС и поверхность разрушения не проходит через зоны МС. Это предсказано теоретически [11] и здесь подтверждается экспериментально.

Таблица 1

Тип образца	№ образца	Q	$S_{\text{ког}}$	$S_{\text{адг}}$	q	$q_{\text{ср}}$	Характер разрушения
А	1	0.81	0.3	1.14	0.56	0.58	
	2	0.75	0.42	0.84	0.60		
	3	1.09	0.24	1.14	0.72		
	4	0.60	0.36	1.0	0.45		
	5	0.60	0.72	0.27	0.60		
Б	1	0.24	0.93	0.06	0.24	0.15	
	2	0.24	0.36	0.82	0.20		
	3	0	1.11	0.06	-		
	4	0.04	0.93	0.06	0.04		
	5	0.10	1.02	0	0.10		
В	1	0.20	0.42	0.90	0.15	0.17	
	2	0.05	0.54	0.42	-		
	3	0.19	0.60	0.66	0.15		
	4	0.30	0.42	0.72	0.17		
	5	0.25	0.48	0.72	0.20		
Г	1	0	0.66	0.12	-	0.08	
	2	0.04	0.66	0.24	0.04		
	3	0.05	0.72	0.18	0.06		
	4	0.16	0.66	0.18	0.19		
	5	0.04	0.66	0.15	0.05		

Q — энергия разрушения в Дж

$S_{\text{ког}}$ — площадь поверхности когезионного разрушения в см^2

$S_{\text{адг}}$ — площадь поверхности адгезионного разрушения в см^2

$q = \frac{Q}{S_{\text{ког}} + S_{\text{адг}}}$ — удельная работа разрушения в Дж/см^2

$q_{\text{ср}}$ — средняя удельная работа разрушения в Дж/см^2

В противоположность этому разрушение начинается в зоне КС и проходит по поверхности соединения (адгезионно), по крайней мере, в

малой окрестности сингулярной точки КС во всех испытанных образцах.

Противоречие, полученное при расчете адгезионной части энергии разрушения (табл. 4), показывает, что работа, затрачиваемая на зарождение трещины, составляет значительную часть баланса энергии в этих экспериментах. Представим баланс энергии на разрушение образца в следующем виде:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Здесь Q — суммарная работа разрушения образца по показаниям прибора, Q_1 — работа, расходуемая на динамическое зарождение трещины, Q_2 — работа, расходуемая на образование новой поверхности когезионным разрушением, Q_3 — работа, расходуемая на образование новой поверхности адгезионным (по поверхности склеивания) разрушением, Q_4 — другие слагаемые расходуемой энергии, включая расход энергии на местные и упругие деформации в образце и ударнике.

Таблица 2

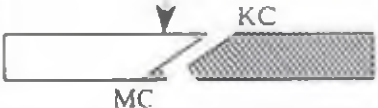
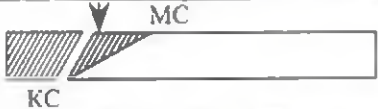
Тип образца	№ образца	Q	$S_{\text{ког}}$	$S_{\text{адг}}$	q	$q_{\text{ср}}$	Характер разрушения
А	1	0.32	0.21	1.02	0.26	0.23	
	2	0.24	0.24	0.96	0.20		
	3	0	0.18	1.14	—		
Б	1	0.06	0.60	0.36	0.06	0.08	
	2	0.08	0.90	0.06	0.08		
	3	0.10	0.96	0	0.10		
Г	1	0.10	0.72	0.06	0.13	0.12	
	2	—	0.60	0.18	—		
	3	0.10	0.66	0.24	0.11		

Таблица 3

Радиус концентратора мм	№ образца	Q	S	$q_{\text{ког}}$	$q_{\text{ср}}$
$\rho = 0.4$	1	0.24	0.72	0.33	0.30
	2	0.03	0.60	—	
	3	0.25	0.72	0.35	
	4	0.24	0.71	0.34	
	5	0.12	0.68	0.18	
$\rho = 0.05$	1	0.04	0.60	0.07	0.09
	2	0.06	0.60	0.10	
	3	0.08	0.66	0.11	

$q_{\text{адг}}$ — удельная работа разрушения эпоксидного компаунда

На основании отсутствия заметных местных деформаций в окрестности точки удара и некоторых других соображений мы полагаем,

что $Q_{\text{адг}}$ составляет малую долю в балансе энергии и в первом приближении можно ее не учитывать. Тогда, пользуясь данными испытаний однородных образцов (табл. 3), можно вычислить значения части энергии, расходуемой на когезионное образование новой поверхности при разрушении и, вычитая из суммарного расхода энергии эту слагаемую, определить значение суммы энергии, расходуемой на динамическое зарождение трещины и на адгезионное разрушение (табл. 4). Для краткости эту величину мы называем адгезионной частью расхода энергии на разрушение образца.

Таблица 4

Тип образца	$Q_{\text{ср}}$	$S_{\text{ког ср}}$	$S_{\text{адг ср}}$	$q_{\text{ког}} = 0.30$		$q_{\text{адг}} = 0.09$		$q_{\text{адг}}$
				$Q_{\text{ког ср}}$	$Q_{\text{адг ср}}$	$Q_{\text{ког ср}}$	$Q_{\text{адг ср}}$	
А	0.52	0.28	1.10	0.08	0.44	0.03	0.49	0.44
Б	0.12	0.96	0.06	0.30	-0.18	0.08	0.04	0.67
В	0.20	0.50	0.75	0.15	0.05	0.06	0.14	0.19
Г	0.09	0.66	0.15	0.20	-0.11	0.06	0.03	0.20
$Q_{\text{ср}}$ — средняя работа разрушения, $Q_{\text{ког ср}} = q_{\text{ког}} S_{\text{ког ср}}$ — средняя работа на когезионное разрушение, $Q_{\text{адг ср}} = Q_{\text{ср}} - Q_{\text{ког ср}}$ — средняя работа на адгезионное разрушение, $q_{\text{адг}} = \frac{Q_{\text{адг ср}}}{S_{\text{адг ср}}}$ — средняя удельная работа адгезионного разрушения								

Отрицательные значения адгезионной части энергии разрушения, полученные при использовании удельной когезионной энергии разрушения при менее остром концентраторе, показывает, что в этом случае значение удельной когезионной энергии образования новой поверхности сильно завышено. Мы полагаем, что это происходит вследствие значимости части энергии, расходуемой на динамическое образование трещины при менее остром концентраторе. Это подтверждает также чувствительность испытаний по Шарпи к остроте концентратора-надреза.

Аналогичные расчеты удельного адгезионного расхода энергии, основанные на значениях когезионного расхода энергии при более остром концентраторе-надрезе, дают в целом непротиворечивый, приемлемый результат. В результате можно утверждать, что энергия, необходимая для динамического образования трещины в концентрационной зоне на ребре или крае поверхности склеивания образца из разнородных материалов, сравнима с энергией образования трещины в однородном образце с остроконечным надрезом.

5. Суммируя сказанное, можно утверждать, что:

- зоны малонапряженного состояния в разрушении клеевого соединения не участвуют;
- образование новой поверхности при разрушении клеевого соединения не проникает в зону малонапряженного состояния;
- характер разрушения и относительная прочность образцов при динамическом нагружении находятся в согласии с результатами статических испытаний этих же образцов;
- количество расхода энергии на образование трещины в зоне

концентрационного состояния на ребре или крае поверхности склеивания в клеевом соединении разнородных материалов сравнимо с расходом энергии на образование трещины в однородном образце в зоне остроконечного надреза-концентратора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кинлок Э. Адгезия и адгезивы. М.: Мир, 1991. 484 с.
2. Майлониас К. и Дебройна Н. Статические проблемы склеивания. /В кн. Адгезия, клен, цементы, припои. Под редакцией Н. Дебройна и Р. Гувника. М.: ИЛ, 1954. С. 108-174.
3. Давидян Д.Б., Домбаева И.А., Хачикян А.С., Ширинян Р.А. О влиянии напряженного состояния краев поверхности стыка на сопротивление усталости соединений из разнородных материалов. //Изв. АН Арм. ССР. Сер. техн. наук. 1989. Т. XLII. №4. С. 195-198.
4. Давидян Д.Б., Ширинян Р.А. Прочность клеевых нахлесточных соединений и явление малонапряженности. // Изв. АН Армении. Механика. 1992. Т. 45. №1-2. С. 69-73.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений в двух томах. Под ред. Ю. Мураками. Пер. с англ. Т. 1. М.: Мир, 1990. С. 1-448. Т. 2. С. 449-1016.
6. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.
7. Крысин В.Н. Слоистые клеевые конструкции в самолетостроении. М.: Машиностроение. 1980. 231 с.
8. Кольский Г., Рейдер Д. Волны напряжений и разрушение. /В кн. Разрушение. Том 1. С. 570 - 608.
9. Разрушение. Под ред. Г. Либовица. Т. 4. М.: Машиностроение. 1977. 400 с.
10. Испытание материалов. Справочник. Под ред. Х. Блюменауера. М.: Металлургия. 1979. 448 с.
11. Чобаян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН АрмССР. 1987. 338 с.
12. Theocaris P.S. The mesophase concept in composites. Springer Verlag. 1987. 292.
13. Ширинян Р.А. Исследование полей напряжений в составных упругих телах методом фотоупругости. Автореферат. Диссер. на соискание степени к.т.н. по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела. Ереван. 2001. 22 с.
14. Кардашов Д.А. Синтетические клен. М.: Химия. 1976. 504с.
15. Ширинян Р.А. Поле напряжений в окрестности внутренней угловой точки поверхности соединения растянутой составной полосы. //Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. №4. С. 84-88.
16. Чобаян К.С., Ширинян Р.А. Исследование явления малонапряженности края стыка соединения из разнородных материалов. /В сб.: Материалы VIII Всесоюзной конф. по методу фотоупругости. Т. III. Таллин. 1979. С. 291-296.
17. Давидян Д.Б., Домбаева И.А. Исследование явления малонапряженности в стыковых соединениях металлов с эпоксидным компаундом. //Изв АН Арм ССР. Сер. ТН. 1981. №2. С. 8-14.