ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

МЕХАНИКА
ՄԵԽԱՆԻԿԱ
MECHANICS

2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННЫМИ НАКЛАДКАМИ

Алексанян Р.К., Едоян В.А., Овакимян А.С., Саркисян В.Г.

Ռ.Կ. Ալեքսանյան, Վ.Հ. Եդոյան, Ա.Ս. Հովակիմյան, Վ.Գ. Սարգսյան

Նախապես լարված վերադիրներով ուղղանկյան հարթ խնդիրը

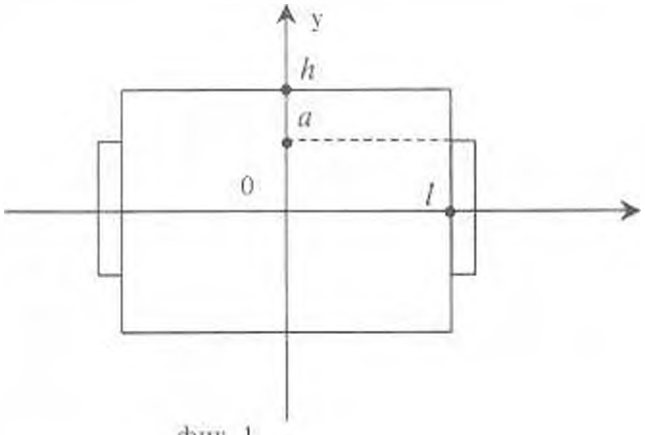
Դիտարկված է ուղղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ ուղղանկյունը ենթարկված է իր նրկու զուգահեռ եզրերով համաչափ դասավորված և նախապես լարված վերադիրների ազդեցությանը Վերադիրը և ուղղանկյան նյութերը ունեն տարբեր ֆիզիկա-մեխանիկական հատկություններ Խնդիրը բերված է քվազի-լիովին ռեգուլար անվերջ հավասարումների համակարգի: Ստացված են լարումների և տեղափոխությունների արտահայտությունները ասբողջ տիրույթում Վերադիրի ծայրակետերի շրջակայքերում ենթադրված են չոչափող լարումների եզակիության գործակիցները

R.K. Aleksanyan, V.H. Yedoyan, A.S. Hovakimyan, V.H. Sargsyan

Plane problem for rectangle with previously strained cover plates

Рассмотрена плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда прямоугольник подвергнут воздействию предварительно напряженных накладок, симметрично расположенных по двум параллельным краям прямоугольника. Материалы, накладка и прямоугольник имеют разные физико-механические свойства. Задача приведена к квазивполне регулярной системе бесконечных уравнений. Получены выражения напряжений и перемещений. Выделены коэффициенты особенностей касательных напряжений в окрестности краевых точек накладки.

1. Рассматривается плоская задача теории упругости, когда прямоугольник подвергается воздействию симметрично расположенных по двум своим параллельным краям предварительно напряженных накладок (фиг. 1).



фиг. 1

Для накладок принимаются известные предположения. Тонкие упругие элементы не оказывают сопротивления при изгибных деформациях и находятся в одномерном напряженном состоянии. Применив эту гипотезу, был решен ряд задач, из которых отметим [1-4].

Материалы накладок и прямоугольника имеют разные физико-механические свойства.

Задача о напряженно-деформационном состоянии прямоугольника приводится к следующей краевой задаче для функции напряжений.

$$\Delta\Delta\phi = 0 \tag{1.1}$$

На линиях $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяются условия симметрии.

$$\tau_{xy}(x;0) = \tau_{xy}(0;y) = 0 \tag{1.2}$$

$$V(x;0) = U(0;y) = 0$$

на краю $y = h$

$$\tau_{xy}(x;h) = 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_y(x;h) = 0 \tag{1.4}$$

на краю $x = l$ при наличии частично-прикрепленной накладки имеем следующие граничные условия

$$\sigma_x(l,y) = 0 \qquad 0 < y < h \tag{1.5}$$

$$\tau_{xy}(l,y) = 0 \qquad a < y < h \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{x=l} = \mu\int_a^y \tau_{xy}\Big|_{x=l} dy - \varepsilon_0 \qquad 0 < y < a \tag{1.7}$$

где ε_0 – предварительная деформация на концах накладки, $\mu = \dfrac{1}{h_1 E_1}$,

h_1 – ширина накладки, E_1 – модуль упругости накладки.

2. Функция напряжений представляется в виде [5]

$$\phi(x,y) = \sum_{k=1}^{n}(A_k \operatorname{ch}\alpha_k y + D_k\,\alpha_k y\,\operatorname{sh}\alpha_k y)\cos\alpha_k x + \tag{2.1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}(E_k \operatorname{ch}\beta_k x + H_k\beta_k x\,\operatorname{sh}\beta_k x)\cos\beta_k y + t_1 x^2 + t_2 y^2$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{h}$$

Напряжения и перемещения определяются формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \tag{2.2}$$

$$EU = \int \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dx - \nu\frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad EV = \int\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dy - \nu\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2.3}$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала прямоугольника.

Краевые условия (1.2) удовлетворяются тождественно:

Удовлетворяя условиям (1.3), (1.4) и (1.5), получаем следующие соотношения:

$$(A_k + D_k)\mathrm{sh}\alpha_k h + \alpha_k h \mathrm{ch}\alpha_k h D_k = 0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\eta_p}{\sqrt[4]{p^3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt[4]{k^3}x_k^{(1)}}{k^2+\eta_p^2}+\frac{4}{\pi}\frac{\eta_p^3}{\sqrt[4]{p^3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt[4]{k^3}x_k^{(2)}}{\left(k^2+\eta_p^2\right)^2}+(-1)^p y_p^{(1)}M_p = 0$$

$$\frac{4\gamma_p^2}{\sqrt[4]{p^3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt[4]{k^3}\,y_k^{(1)}}{(k^2+\eta_p^2)^2}-(-1)^p x_p^{(1)}\mathrm{cth}\gamma_p\pi+(-1)^p x_p^{(2)}N_p = 0 \qquad (2.5)$$

$$2t_1 = -\frac{h}{l\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x_k^{(1)}}{k\sqrt[4]{k}}; \qquad t_2 = 0$$

где

$$\eta_p = \frac{h}{l}p; \quad \gamma_p = \frac{l}{h}p; \quad M_p = \mathrm{cth}\eta_p\pi + \frac{\eta_p\pi}{\mathrm{sh}^2\eta_p\pi}; \quad N_p = \mathrm{cth}\gamma_p\pi + \frac{\gamma_p\pi}{\mathrm{sh}^2\gamma_p\pi}$$

$$\sqrt[4]{k}\cdot\alpha_k^2\ D_k\mathrm{sh}\alpha_k h = y_k^{(1)}; \ \sqrt[4]{k}\cdot\beta_k^2\ H_k\mathrm{sh}\beta_k l = x_k^{(2)} \qquad (2.6)$$

$$\sqrt[4]{k}\cdot\beta_k^2\left[(E_k+H_k)\mathrm{sh}\beta_k l + H_k\beta_k l\mathrm{ch}\,\beta_k l\right] = x_k^{(1)}$$

Удовлетворяя смешанным краевым условиям (1.6) и (1.7), получаем парные уравнения [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}}\cos k\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k^{(1)}\cos k\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}M_k^{(1)}x_k^{(2)}\cos k\gamma + \qquad (2.7)$$

$$+\frac{E\mu h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^{(1)}}{k\sqrt[4]{k}}\cos k\gamma_1 - \varepsilon_0 E + 2t_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{y_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}}f_k(k\gamma) \qquad 0<\gamma<\gamma_1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}}\sin k\gamma = 0 \qquad \gamma_1<\gamma\le\pi$$

где

$$a_k = \frac{1}{\sqrt[4]{k}}(1-\mathrm{cth}\gamma_k\pi), \ M_k^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\left(\mathrm{cth}\gamma_k\pi - \frac{\gamma_k\pi}{\mathrm{sh}^2\gamma_k\pi}\right) \qquad (2.8)$$

$$f_k(k\gamma) = \frac{1}{\mathrm{sh}\eta_k\pi}\left(\mathrm{ch}k\gamma + \frac{\eta_k\pi\,\mathrm{ch}\,\eta_k\pi\,\mathrm{ch}\,\eta_k\gamma - \eta_k\gamma\,\mathrm{sh}\,\eta_k\gamma\,\mathrm{sh}\,\eta_k\pi}{\mathrm{sh}\,\eta_k\pi}\right)$$

Заменой переменной $\gamma = \frac{\pi}{h}y$, интервал $y\in[0;h]$ отображается на интервал $y\in[0,\pi]$. Воспользуясь решением уравнений парных рядов, относительно неизвестного $x_p^{(1)}$ получаем :

$$x_p^{(1)} = \frac{p\sqrt[4]{p}}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k^{(1)}I_{kp} + \sum_{k=1}^{\infty}M_k^{(1)}x_k^{(1)}I_{kp} + \sum_{k=1}^{\infty}(1)^k\frac{V_{kp}}{\sqrt[4]{k}}y_k^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{E\mu h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^{(1)}\cos k\gamma_1}{k\sqrt[4]{k}} - 2(\varepsilon_0 E - 2t_1)\frac{Z_p(\cos\gamma_1)}{p}\right| \qquad (2.9)$$

где

$$I_{kp} = \int_0^{\gamma_1} Y_k(\cos\theta) Y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$V_{kp} = \int_0^{\gamma_1} Y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, g_k(\cos\theta)\, d\theta$$

$$g_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{f_k(k\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}\, d\gamma \qquad (2.10)$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{h} a, \quad Y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad Z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \qquad |x| \le 1$$

$P_i(x)$ – многочлен Лежандра.

Для функций (2.10) составим интегралы Ломмела:

$$\int \frac{Y_k(x) Y_p(x)}{1+x}\, dx = -\frac{kZ_k Y_p - pZ_p Y_k}{k^2 - p^2} \qquad (2.11)$$

$$\int \frac{Y_k(x) g_k(x)}{1+x}\, dx = -\frac{\eta_k F_k(x) + pZ_p(x) g_k(x)}{\eta_k^2 - p^2} +$$

$$+ \frac{\eta_k^2}{(\eta_k^2 + p^2)^2} (\eta_k L_k(x) Y_p(x) + pZ_p(x) l_k(x))$$

где

$$F_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{H_k(k\gamma)\sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}\, d\gamma$$

$$H_k(k\gamma) = \frac{\eta_k \pi \operatorname{ch}\eta_k\pi \operatorname{sh}\eta_k\gamma - \eta_k\gamma \operatorname{ch}\eta_k\gamma \operatorname{sh}\eta_k\pi}{\operatorname{sh}^2\eta_k\pi} \qquad (2.12)$$

$$L_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{2\operatorname{sh}\eta_k\gamma}{\operatorname{sh}\eta_k\pi} \frac{\sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}\, d\gamma$$

$$l_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{2\operatorname{ch}\eta_k\gamma}{\operatorname{sh}\eta_k\pi} \frac{\cos(\gamma/2)}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}\, d\gamma$$

Для вычисления значений функций $g_k(\cos\theta)$, $F_k(\cos\theta)$, $L_k(\cos\theta)$ и $l_k(\cos\theta)$ эти функции представим в виде рядов функций $Y_m(\cos\theta)$ и $Z_m(\cos\theta)$

$$g_k(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\eta_k} + \frac{4\eta_k^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m Y_m(\cos\theta)}{(m^2 + \eta_k^2)^2}$$

$$F_k(\cos\theta) = -\frac{4}{\pi}\eta_k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(-1)^m}{(m^2 + \eta_k^2)^2} Z_m(\cos\theta) \qquad (2.13)$$

$$L_k(\cos\theta) = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+\eta_k^2}Z_m(\cos\theta)$$

$$l_k(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\eta_k} + \frac{4}{\pi}\eta_k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+\eta_k^2}Y_m(\cos\theta)$$

Воспользуясь

$$Y_k(-1) = Z_k(1) = 0;\ \ Y_k(1) = (-1)^{k+1}Z_k(-1) = 2 \qquad (2.14)$$

Получаем

$$g_k(1) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\eta_k} + \frac{4\eta_k^3}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(m^2+\eta_k^2)^2}$$

$$F_k(1) = 0; \qquad L_k(1) = 0 \qquad (2.15)$$

$$l_k(1) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\eta_k} + \frac{4}{\pi}\eta_k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{m^2+\eta_k^2}$$

Выясним поведение этих функций для больших значений индекса k. Для получения асимптотических разложений $g_k(\cos\theta), F_k(\cos\theta), L_k(\cos\theta)$ и $l_k(\cos\theta)$, воспользуясь методом перевала | 7 | для

$$l_k(\cos\theta) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}e^{-k\pi}\int_0^{\theta}\frac{e^{k\gamma}\cos(\gamma/2)}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}d\gamma \qquad (2.16)$$

получим

$$l_k(\cos\theta) = \frac{e^{-k(\pi-\theta)}}{\pi}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k\,\mathrm{tg}(\theta/2)}} + \left(k^{-3/2}\right)\right\} \qquad (2.17)$$

$$l_k(\cos\theta),\ g_k(\cos\theta),\ F_k(\cos\theta),\ L_k(\cos\theta) \sim O\left(\sqrt{k}e^{-k(\pi-\theta)}\right)$$

при $$0 < \theta < \pi \qquad (2.18)$$

$$Y_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \qquad Z_k = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad \text{при} \quad |x| < 1-\varepsilon$$

на основании которых для коэффициентов бесконечных систем (2.5) и (2.9) имеем следующие оценки:

$$\frac{2}{\pi}\frac{\eta_p}{\sqrt[4]{p^3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{k^3}}{k^2+\eta_p^2} + \frac{4}{\pi}\frac{\eta_p^3}{\sqrt[4]{p^3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{k^3}}{\left(k^2+\eta_p^2\right)^2} = O\left(p^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$\frac{4\gamma_p^3}{\sqrt[4]{p^3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{k^3}}{\left(k^2+\eta_p^2\right)^2} = O\left(p^{-\frac{1}{4}}\right) \qquad (2.19)$$

$$\frac{p\sqrt{p}}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k I_{kp}|+\sum_{k=1}^{n}M_k^{(1)}I_{kp}+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{V_{kp}}{\sqrt[4]{k}}\right|+\frac{E\mu h}{\pi}\sum\left|\frac{\cos k\gamma_1}{k\sqrt{k}}\cdot\frac{Z_p(\cos\gamma_1)}{p}\right|\right)=O(p^{-\frac{1}{4}})$$

Следовательно, бесконечные системы уравнений (2.5) и (2.9) квазивполне регулярны.

Для контактного касательного напряжения получается выражение в виде слабо сходящегося ряда в конце линии контакта.

При $x = l$

$$\tau_{xy}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}}\sin\beta_k y \qquad (2.20)$$

Подставляя значение $x_k^{(1)}$ из (2.9) в (2.20) и используя значение ряда

$$\sum_{p=1}^{n}Z_p(\cos\gamma_1)\sin p\gamma=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\gamma_1}} & \gamma<\gamma_1\\ 0 & \gamma>\gamma_1\end{cases} \qquad (2.21)$$

Для τ_{xy} при $x = l$ получаем выражение с выделенной особенностью в конце линии контакта.

$$\tau_{xy}\big|_{x=l}=\frac{-\sqrt{2}\sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\gamma_1}}R+F(x_k^{(1)},x_k^{(2)},y_k^{(1)},\gamma,\gamma_1) \qquad (2.22)$$

где

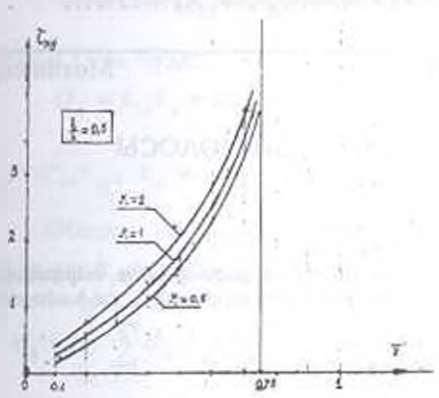
$$R=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k y_k(\cos\gamma_1)x_k^{(1)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}M_k^{(1)}y_k(\cos\gamma_1)x_k^{(2)}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k g_k(\cos\gamma_1)y_k^{(1)}+(\varepsilon_0 E+2t_1) \qquad (2.23)$$

$$F(x_k^{(1)},x_k^{(2)},y_k^{(1)},\gamma,\gamma_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k^{(1)}+M_k^{(1)}x_k^{(2)})k\sin(\gamma/2)\int_{\gamma}^{\gamma_1}\frac{Z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}d\theta-$$

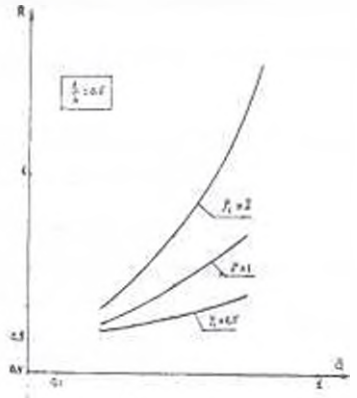
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\eta_k y_k^{(1)}\sin(\gamma/2)\int_{\gamma}^{\gamma_1}\frac{F_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}d\theta$$

При некоторых значениях параметра $\mu_1=\dfrac{Eh}{E_1h_1}$ приведены графики касательного напряжения на линии контакта в зависимости от $\bar{y}=y/h$, $0\le y<a$ и коэффициента особенности касательного напряжения в конце накладки в зависимости от отношения $\bar{a}=a/h$, (фиг. 2 и 3).

Из приведенных расчетов выясняется, что увеличение параметра μ приводит к увеличению значений контактного касательного напряжения и коэффициента особенности, как при конкретных значениях параметров $\bar{a}$ и $\bar{y}$, а также при их увеличении.



Фиг. 2



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein. Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.// Ingr.Arch. 1932. Bd.3. №2. P. 123-129.
2. Theocaris P.S., Dafermos K. The elastic strip under mixed boundary conditions // J. Appl. Mech., ser. E. 1964. V. 31. №4. P. 159-162.
3. Чобанян К.С., Хачикян П.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1967. Т. XX. №6. С.19-29.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 488с.
5. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. // ПММ. 1957. 21. Вып. 1. С.89-101.
6. Баблоян А.А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С.678-689.
7. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Изд. Наука. 1970. 304с.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
26.03.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

ИЗГИБ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Баблоян А.А., Бегларян А.Г.

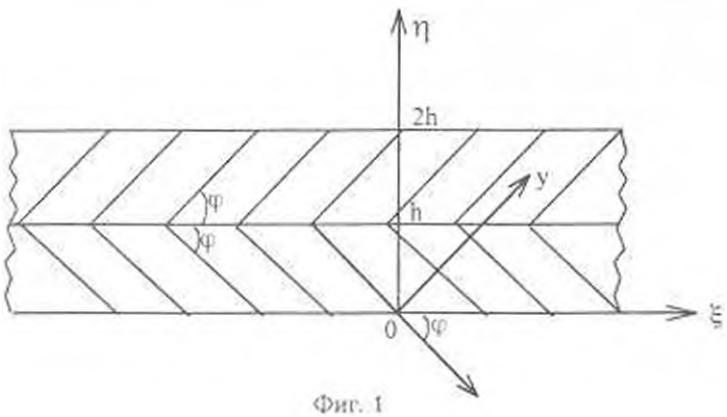
Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Գ. Բեգլարյան
Երկշերտ անիզոտրոպ շերտի ծռումը
Բերվում է առաձգականության տեսության առաջին եզրային խնդրի լուծումը երկու անիզոտրոպ նյութերից բաղկացած անվերջ շերտի համար: Առանձին դիտարկվում են համաչափ և շեղ-համաչափ բեռնավորման դեպքերը:

A.H. Babloyan, A.G. Beglaryan
Bending of Anisotropic two Layered Strip

Приводится решение первой основной задачи теории упругости для симметрично собранной двухслойной полосы. Отдельно рассматриваются случай симметричного и кососимметричного нагружения.

Рассматривается первая основная задача теории упругости для симметрично собранной двухслойной прямолинейно-анизотропной полосы $(-\infty < \xi < \infty,\ 0 \le \eta \le 2h)$. Эта же задача для полосы из одного анизотропного материала рассматривалась в работе [1]. Аналогичные вопросы исследовались в работах [2 – 12].

Вводим ортогональную систему координат (x, y), совпадающую с главными направлениями анизотропии нижнего материала (фиг. 1).



Фиг. 1

Через φ обозначим угол между координатными осями ox и $o\xi$. Тогда переход от одной координатной системы к другой будет осуществляться формулами

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \quad z = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \tag{1}$$

В системе (x, z) уравнения равновесия плоско-деформированного состояния анизотропного материала имеют вид [2, 3, 5]

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = 0$$

$$(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0 \qquad (2)$$

а закон Гука будет

$$\sigma_x=c_{11}\varepsilon_x+c_{13}\varepsilon_z,\quad \sigma_y=c_{12}\varepsilon_x+c_{13}\varepsilon_z,\quad \sigma_z=c_{13}\varepsilon_x+c_{33}\varepsilon_z$$

$$\tau_{xz}=c_{44}\varepsilon_{xz},\ \varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\ \varepsilon_{xz}=\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z},\ \varepsilon_y=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=0 \qquad (3)$$

Общее решение уравнений равновесия (2) для полосы $(|\xi|<\infty,\ h_1\le\eta\le h_2)$ имеет вид [1]

$$u_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}d_pA_p(\lambda)e^{\lambda(i\xi-\beta_p\eta)}d\lambda,\quad u_\eta=-\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}e_pA_p(\lambda)e^{\lambda(i\xi-\beta_p\eta)}d\lambda$$

$$\sigma_\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}c_pA_p(\lambda)\lambda e^{\lambda(i\xi-\beta_p\eta)}d\lambda,\quad \sigma_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}l_pA_p(\lambda)\lambda e^{\lambda(i\xi-\beta_p\eta)}d\lambda \qquad (4)$$

$$\tau_{\xi\eta}=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}s_pA_p(\lambda)\lambda e^{\lambda(i\xi-\beta_p\eta)}d\lambda$$

где $A_p(\lambda)$ – произвольные функции.

Здесь использованы обозначения

$$c_p=\alpha_p^{-1}\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad s_p=\alpha_p^{-1}\sin\varphi-i\cos\varphi$$

$$d_p=[i\gamma_0(\alpha_p)\cos\varphi-\sin\varphi]E_0^{-1}(\alpha_p),\ e_p=[i\gamma_0(\alpha_p)\sin\varphi+\cos\varphi]E_0^{-1}(\alpha_p)$$

$$\beta_p=\frac{i\alpha_p\cos\varphi-\sin\varphi}{\alpha_p\sin\varphi-i\cos\varphi}=\frac{s_p}{ic_p},\ \delta_p=\frac{\cos\varphi+i\alpha_p\sin\varphi}{\alpha_p\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{c_p}{is_p} \qquad (5)$$

$$l_p=\frac{1-\alpha_p^2}{c_p\alpha_p^2}-c_p,\ m_p=\frac{1-\alpha_p^2}{s_p\alpha_p^2}-s_p,\ (p=1,2,3,4)$$

Функции $\gamma_0(\alpha)$ и $E_0(\alpha)$ определяются формулами

$$\gamma_0(\alpha)=\frac{(c_{13}+c_{44})\cdot\alpha}{c_{11}-\alpha^2c_{44}}=-\frac{c_{44}-\alpha^2c_{33}}{(c_{13}+c_{44})\cdot\alpha}$$

$$E_0(\alpha)=\alpha^{-1}[c_{11}\gamma_0(\alpha)-c_{13}\alpha]=-\alpha[c_{13}\gamma_0(\alpha)-c_{33}\alpha]= \qquad (6)$$

$$=c_{44}[\alpha\gamma_0(\alpha)+1]=c_{44}\frac{c_{13}+\alpha^2c_{33}}{c_{13}+c_{44}}$$

где α_p $(p=1;2;3;4)$ являются корнями биквадратного уравнения

$$\Delta_0(\alpha)=(c_{11}-\alpha^2c_{44})(c_{44}-\alpha^2c_{33})+(c_{13}+c_{44})^2\alpha^2=0 \qquad (7)$$

Второе решение уравнений равновесия (2), позволяющее решать краевые задачи для анизотропной полосы $(h_1\le\xi\le h_2,\ |\eta|<\infty)$, записывается в виде

$$u_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}d_pB_p(\mu)e^{\mu(\delta_p\xi+i\eta)}d\mu,\quad u_\eta=-\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}e_pB_p(\mu)e^{\mu(\delta_p\xi+i\eta)}d\mu$$

$$\sigma_\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} s_p B_p(\mu)\mu e^{\mu(\delta_p\xi+i\eta)}d\mu, \quad \sigma_\eta = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} m_p B_p(\mu)\mu e^{\mu(\delta_p\xi+i\eta)}d\mu$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} c_p B_p(\mu)\mu e^{\mu(\delta_p\xi+i\eta)}d\mu \qquad (8)$$

Первая основная задача теории упругости для симметрично собранной полосы можно представить в виде суммы двух задач — симметричной и кососимметричной. В обоих случаях решения задач можно построить только для нижнего материала $(|\xi|<\infty,\ 0\le\eta\le h)$, удовлетворяя при этом условиям симметрии или косой симметрии.

Граничные условия симметричной задачи только для нижнего материала будут

$$\sigma_\eta(\xi,0) = f(\xi),\ \tau_{\xi\eta}(\xi,0) = g(\xi),\ \tau_{\xi\eta}(\xi,h) = 0,\ u_\eta(\xi,h) = 0 \qquad (9)$$

а для кососимметричной задачи будем иметь

$$\sigma_\eta(\xi,0) = f(\xi),\ \tau_{\xi\eta}(\xi,0) = g(\xi),\ \sigma_\eta(\xi,h) = 0,\ u_\xi(\xi,h) = 0 \qquad (10)$$

С помощью формул (4) удовлетворим условиям (9) и (10), и применим к получившимся функциональным соотношениям обратное преобразование Фурье. В итоге, для определения неизвестных функций $A_p(\lambda)$ $(p = 1;2;3;4)$ получим систему из четырех алгебраических уравнений:

Для симметричной задачи

$$\sum_{p=1}^{4} c_p A_p = \tilde{f}(\lambda),\ \sum_{p=1}^{4} s_p A_p = \tilde{g}(\lambda),\ \sum_{p=1}^{4} s_p Z_p A_p = 0,\ \sum_{p=1}^{4} e_p Z_p A_p = 0 \qquad (11)$$

Для кососимметричной задачи

$$\sum_{p=1}^{4} c_p A_p = \tilde{f}(\lambda),\ \sum_{p=1}^{4} s_p A_p = \tilde{g}(\lambda),\ \sum_{p=1}^{4} c_p Z_p A_p = 0,\ \sum_{p=1}^{4} d_p Z_p A_p = 0 \qquad (12)$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi,\ \tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi,\ Z_p = e^{\lambda\lambda\delta_p} \qquad (13)$$

Решение системы (11) представляется в виде

$$\Delta_2(\lambda)A_p(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)x_{p1}(\lambda) + \tilde{g}(\lambda)x_{p2}(\lambda) \qquad (14)$$

где $\Delta_2(\lambda)$ — основной определитель системы (11)

$$\begin{aligned}\Delta_2(\lambda) = {} & (e_2s_1 - e_1s_2)(c_2s_3 - c_3s_4)Z_1Z_2 - (e_3s_1 - e_1s_3)(c_4s_2 - c_2s_4)Z_1Z_3 + \\ & +(e_4s_2 - e_2s_4)(c_3s_2 - c_2s_3)Z_2Z_3 + (e_3s_1 - e_1s_3)(c_3s_2 - c_2s_3)Z_1Z_4 - \\ & -(e_4s_2 - e_2s_4)(c_3s_1 - c_1s_3)Z_2Z_4 + (e_4s_3 - e_3s_4)(c_2s_1 - c_1s_2)Z_3Z_4\end{aligned} \qquad (15)$$

а функции $x_{p1}(\lambda)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}x_{11} &= s_4(e_2s_3 - e_3s_2)Z_2Z_3 + s_3(e_4s_2 - e_2s_4)Z_2Z_4 + s_2(e_3s_4 - e_4s_3)Z_3Z_4 \\ x_{21} &= s_4(e_3s_1 - e_1s_3)Z_1Z_3 + s_3(e_1s_4 - e_4s_1)Z_1Z_4 + s_1(e_4s_3 - e_3s_4)Z_3Z_4 \\ x_{31} &= s_4(e_1s_2 - e_2s_1)Z_1Z_2 + s_2(e_4s_1 - e_1s_4)Z_1Z_4 + s_1(e_2s_4 - e_4s_2)Z_2Z_4 \\ x_{41} &= s_3(e_2s_1 - e_1s_2)Z_1Z_2 + s_2(e_1s_3 - e_3s_1)Z_1Z_3 + s_1(e_3s_2 - e_2s_3)Z_2Z_3\end{aligned} \qquad (16)$$

$$x_{12} = -[c_4(e_2s_3 - e_3s_2)Z_2Z_3 + c_3(e_4s_2 - e_2s_4)Z_2Z_4 + c_2(e_3s_4 - e_4s_3)Z_3Z_4]$$
$$x_{22} = -[c_4(e_3s_1 - e_1s_3)Z_1Z_3 + c_3(e_1s_4 - e_4s_1)Z_1Z_4 + c_1(e_4s_3 - e_3s_4)Z_3Z_4]$$
$$x_{32} = -[c_4(e_1s_2 - e_2s_1)Z_1Z_2 + c_2(e_4s_1 - e_1s_4)Z_1Z_4 + c_1(e_2s_4 - e_4s_2)Z_2Z_4]$$
$$x_{42} = -[c_3(e_2s_1 - e_1s_2)Z_1Z_2 + c_2(e_1s_3 - e_3s_1)Z_1Z_3 + c_1(e_3s_2 - e_2s_3)Z_2Z_3]$$

Для кососимметричной задачи неизвестные функции $A_p(\lambda)$ определяются из системы (12)

$$\Delta_1(\lambda)A_p(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)x_{p1}(\lambda) + \tilde{g}(\lambda)x_{p2}(\lambda) \qquad (17)$$

где $\Delta_1(\lambda)$ – определитель системы (12)

$$\begin{aligned}\Delta_1(\lambda) = {} & (c_1d_2 - c_2d_1)(c_4s_3 - c_3s_4)Z_1Z_2 - (c_3d_1 - c_1d_3)(c_4s_2 - c_2s_4)Z_1Z_3 + \\ & +(c_3d_2 - c_2d_3)(c_4s_1 - c_1s_4)Z_2Z_3 + (c_4d_1 - c_1d_4)(c_3s_2 - c_2s_3)Z_1Z_4 - \\ & -(c_4d_2 - c_2d_4)(c_3s_1 - c_1s_3)Z_2Z_4 + (c_4d_3 - c_3d_4)(c_2s_1 - c_1s_2)Z_3Z_4\end{aligned} \qquad (18)$$

а для функции $x_{p4}(\lambda)$ будем иметь

$$x_{11} = s_4(c_3d_2 - c_2d_3)Z_2Z_3 - s_3(c_4d_2 - c_2d_4)Z_2Z_4 + s_2(c_4d_3 - c_3d_4)Z_3Z_4$$
$$x_{21} = s_4(c_1d_3 - c_3d_1)Z_1Z_3 + s_1(c_4d_3 - c_3d_4)Z_3Z_4 - s_3(c_4d_1 - c_1d_4)Z_1Z_4$$
$$x_{31} = s_4(c_2d_1 - c_1d_2)Z_1Z_2 - s_2(c_4d_1 - c_1d_4)Z_1Z_4 + s_1(c_4d_2 - c_2d_4)Z_2Z_4$$
$$x_{41} = s_3(c_1d_2 - c_2d_1)Z_1Z_2 + s_2(c_3d_1 - c_1d_3)Z_1Z_3 - s_1(c_3d_2 - c_2d_3)Z_2Z_3 \qquad (19)$$
$$x_{12} = -[c_4(c_3d_2 - c_2d_3)Z_2Z_3 + c_3(c_4d_2 - c_2d_4)Z_2Z_4 + c_2(c_4d_3 - c_3d_4)Z_3Z_4]$$
$$x_{22} = -[c_4(c_1d_3 - c_3d_1)Z_1Z_3 + c_3(c_4d_1 - c_1d_4)Z_1Z_4 - c_1(c_4d_3 - c_3d_4)Z_3Z_4]$$
$$x_{32} = -[c_4(c_2d_1 - c_1d_2)Z_1Z_2 - c_2(c_4d_1 - c_1d_4)Z_1Z_4 + c_1(c_4d_2 - c_2d_4)Z_2Z_4]$$
$$x_{42} = -[c_3(c_1d_2 - c_2d_1)Z_1Z_2 + c_2(c_3d_1 - c_1d_3)Z_1Z_3 + c_1(c_3d_2 - c_2d_3)Z_2Z_3]$$

Отметим, что определители $\Delta_p(\lambda)$ систем (11) и (12) имеют следующие асимптотические поведения:

$$\begin{aligned}&\Delta_1(\lambda) = 0(\lambda^3),\ \Delta_2(\lambda) = 0(\lambda),\ \lambda \to 0,\\ &\Delta_1(\lambda) \approx \Delta_2(\lambda) = 0(e^{\beta|\lambda|}),\ \beta = \max_{k,p}\left\{\left|\mathrm{Re}\,\beta_k + \beta_p\right|\right\},\ \lambda \to \infty\end{aligned} \qquad (20)$$

Из (20) следует, что в симметричной задаче для сходимости интегралов (4) в формулах напряжений достаточно выполнения только одного условия равновесия статики $\sum F_x = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)d\xi = 0$. В кососимметричной задаче эти же интегралы будут сходиться при выполнении всех условий равновесия статики. В обеих задачах для сходимости интегралов (4) в формулах перемещений, помимо вышеуказанных условий, необходимо еще "закрепить" произвольную точку (точка отсчета) составной полосы.

В качестве конкретного примера рассматривается задача об изгибе двуслойной анизотропной полосы под действием нормальных сил (плоское деформированное состояние), когда внешняя нагрузка распределена кососимметрично относительно линии контакта различных материалов.

$$\sigma_\eta(\xi,0) = -\sigma_\eta(\xi,2h) = \begin{cases} -P_1 & (|\xi| \in (a,b)) \\ P_2 & (|\xi| < l) \\ 0 & (|\xi| \notin (a,b) \cup (0,l)) \end{cases} \qquad (21)$$

$$\tau_{\xi\eta}(\xi,0) = \tau_{\xi\eta}(\xi,2h) = 0, \quad P_1(b-a) = P_2 l$$

Преобразование Фурье (13) этой нагрузки будет

$$\bar{f}(\lambda) = -\frac{P_1}{\pi\lambda^2}(\sin\lambda b - \sin\lambda a) + \frac{P_2}{\pi\lambda^2}\sin\lambda l, \quad \bar{g}(\lambda) = 0 \qquad (22)$$

Пусть материалы полосы – пьезокерамика ЦТБС-3, для которого

$$c_{11} = 15.51\chi, \quad c_{13} = 8\chi, \quad c_{33} = 13.6\chi, \quad c_{44} = 2.9\chi, \quad \chi = 10^5 \text{ кгс/см}^2 \qquad (23)$$

Значения корней α_p и чисел β_p при (23) для нижнего материала приведены в табл. 1.

(α_p и β_p) для нижнего материала (22) Таблица 1

φ	p	1	2	3	4
	α_p	-2.2494	-0.4748	0.4748	2.2494
0	β_p	2.2494	0.4748	-0.4748	-2.2494
$\pi/8$	β_p	1.4107 + 0.9002i	0.5355-0.3089i	-0.5355-0.3089i	-1.4107 + 0.9002i
$\pi/4$	β_p	0.7424 + 0.6700i	0.7749-0.6321i	-0.7749-0.6321i	-0.7424 + 0.6700i
$3\pi/8$	β_p	0.5038 + 0.3214i	1.4012-0.8083i	-1.4012-0.8083i	-0.5038 + 0.3214i
$\pi/2$	β_p	0.4446	2.1063	-2.1063	0.4446

Дальнейшие вычисления проводились для следующих значений параметров (21):

$l = 0.5$ед., $h = 1$ед., $a = 5$ед., $b = 6$ед., $P_1 = 1$ед., $P_2 = 2$ед.

$\sigma_\eta(\xi,\eta)$ Таблица 2

φ	η \ ξ	0	0.5	1	2	3	4	5	6
0	0	17.5944	15.9897	13.6002	10.5187	7.5000	4.4782	1.0057	-0.4946
	0.5	7.1713	7.0735	6.6522	5.2392	3.7506	2.2654	0.9633	0.2133
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\pi/8$	0	12.8325	11.43	9.2552	6.6980	4.3607	2.1936	-0.1888	-1.1808
	0.5	9.3476	9.3944	8.8685	7.1517	5.3188	3.3946	1.6651	0.5357
	1	8.4491	9.0077	9.0455	8.0030	6.4881	4.7445	3.0255	1.4506
$\pi/4$	0	11.437	10.096	8.2752	6.2216	4.2544	2.2571	0.3367	-0.4232
	0.5	9.9545	9.9659	9.3827	7.3619	5.3734	3.3656	1.3560	0.2051
	1	9.7573	10.2069	10.0897	8.4521	6.4888	4.5111	2.3328	0.6473
$3\pi/8$	0	10.8304	9.4100	7.7085	5.8644	3.8759	1.9348	0.2781	-0.2626
	0.5	10.2953	10.1962	9.6167	7.5741	5.5637	3.5247	1.3346	0.1809
	1	11.6745	12.3311	11.4125	9.2976	7.2403	5.3058	2.7439	0.0498
$\pi/2$	0	17.3713	15.8717	13.5883	10.5145	7.5001	4.4822	1.0646	-0.4357
	0.5	7.2425	7.1218	6.6700	5.2421	3.7504	2.262	0.9391	0.1891
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

В различных точках нижнего материала $(0 \le \eta \le 1)$ при различных ориентациях главных осей анизотропии вычислены значения нормального $\sigma_\xi(\xi,\eta)$ и касательного $\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ напряжений. Результаты вычислений приведены в табл. 2; 3 и табл. 4; 5 соответственно:

$\sigma_\xi(\xi,\eta)$ Таблица 3

φ	ξ\η	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1
0	0	17.5944	12.616	8.8088	7.1713	5.6368	2.7577	0
	2.5	9.0067	7.2018	5.3983	4.4967	3.5958	1.7966	0
	5	1.0057	1.1684	1.0810	0.9633	0.8098	0.4299	0
π/8	0	12.833	11.043	9.7635	9.3476	9.0339	8.6309	8.8491
	2.5	5.5037	5.7672	6.0764	6.2481	6.4317	6.8347	7.2845
	5	-0.1888	0.5299	1.3096	1.6651	1.9925	2.5623	3.0255
π/4	0	11.437	10.760	10.146	9.9545	9.8361	9.7465	9.7573
	2.5	5.2662	5.7052	6.1470	6.3681	6.5893	7.0323	7.4759
	5	0.3367	0.7195	1.1468	1.3560	1.5610	1.9560	2.3328
3π/8	0	10.830	10.405	10.231	10.295	10.438	10.932	11.675
	2.5	4.8764	5.5473	6.2244	6.5639	6.9037	7.5829	8.2606
	5	0.2781	0.7151	1.1306	1.3346	1.5433	2.0231	2.7439
π/2	0	17.3713	12.626	8.8783	7.2425	5.7012	2.7941	0
	2.5	9.0052	7.2013	5.3988	4.4977	3.5971	1.7977	0
	5	1.0646	1.1709	1.0598	0.9391	0.7866	0.4159	0

$\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ Таблица 4

φ	η\ξ	0	0.5	1	2	3	4	5	6
0	0.25	0	0.9381	0.7059	0.6611	0.6577	0.6630	0.7972	-0.1409
	0.5	0	1.0588	1.1487	1.1279	1.1259	1.1291	1.0919	0.1331
	0.75	0	1.0989	1.3660	1.4020	1.4050	1.4003	1.2526	0.1537
	1	0	1.1090	1.4310	1.4919	1.4975	1.4889	1.3045	0.1955
π/8	0.25	0.0970	0.9735	0.6139	0.5645	0.5344	0.5142	0.6872	-0.2330
	0.5	0.1151	1.0958	1.1025	1.0465	1.0241	1.0174	0.9929	-0.0453
	0.75	0.0606	1.0779	1.4302	1.4583	1.4777	1.4916	1.3129	0.2086
	1	-0.3610	0.9519	1.6208	1.8155	1.9033	1.9418	1.6871	0.5136
π/4	0.25	0.0953	0.9529	0.5258	0.5044	0.5031	0.4816	0.6295	-0.2264
	0.5	0.0842	1.0726	1.0807	1.0038	1.0020	0.9904	0.9576	0.03627
	0.75	-0.0553	1.0840	1.4911	1.4976	1.4978	1.5153	1.3483	0.2080
	1	-0.3312	1.0184	1.7663	1.9845	1.9925	2.0315	1.8296	0.4908
3π/8	0.25	0.1374	0.8870	0.5269	0.4906	0.5006	0.4697	0.5361	-0.1935
	0.5	0.1221	1.0266	1.0552	0.9932	1.0001	0.9937	0.8756	-0.0133
	0.75	-0.0415	1.1209	1.4708	1.5065	1.4989	1.5308	1.3940	0.1895
	1	-0.6665	1.2973	1.9159	2.0259	2.0017	2.0117	2.2206	0.3514
π/2	0.25	0	0.9209	0.6983	0.6600	0.6573	0.6618	0.7886	-0.1323
	0.5	0	1.0641	1.1460	1.1272	1.1256	1.1283	1.0946	0.1305
	0.75	0	1.1167	1.3716	1.4030	1.4053	1.4013	1.2615	0.1448
	1	0	1.1308	1.4400	1.4937	1.4983	1.4908	1.3154	0.1846

Из табл. 2; 3 следует, что распределение нормального напряжения $\sigma_\xi(\xi_0,\eta)$ по толщине составной полосы сильно отличается от линейного

закона. При наклонной анизотропии $(\varphi \neq 0,\ \pi/2)$ напряжения σ_ξ и $\tau_{\xi\eta}$ имеют конечные разрывы в точках линии контакта двух различных материалов. Для значений угла $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ (не наклонная анизотропия) разрыв напряжения $\sigma_\xi(\xi_{II}, \eta)$ исчезает.

В табл. 6 приведены значения относительных прогибов $V(\xi,\eta) - V(6, 0.5)$ точек линий нижнего материала $(\eta = 0; 0.5; 1;\ 0 \le \xi \le 5)$ при различных ориентациях главных направлений анизотропии.

$\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ Таблица 5

φ	$\xi \setminus \eta$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0.5413	0.9614	1.1256	1.2600	1.4383	1.4975
$\pi/8$	0	0	0.0719	0.1348	0.1151	0.0634	-0.1122	-0.3610
	3	0	0.4313	0.8330	1.0241	1.2094	1.5649	1.9033
$\pi/4$	0	0	0.0849	0.1020	0.0842	0.0452	-0.0998	-0.3312
	3	0	0.4028	0.8029	1.0020	1.2006	1.5968	1.9925
$3\pi/8$	0	0	0.1295	0.1372	0.1221	0.0855	-0.1129	-0.6665
	3	0	0.4005	0.8005	1.0001	1.1996	1.5990	2.0017
$\pi/2$	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0.5419	0.9610	1.1256	1.2600	1.4388	1.4983

$10^5[V(6,0.5) - V(\xi,\eta)]$ Таблица 6

φ	$\eta \setminus \xi$	0	0.5	1	2	3	4	5
0	0	13.069	12.834	12.284	10.658	8.4175	5.7447	2.8057
	0.5	13.216	13.000	12.458	10.794	8.514	5.8007	2.8365
	1	13.255	13048	12.514	10.838	8.5460	5.8197	2.8504
$\pi/8$	0	15.627	14.781	13.362	10.410	7.4400	4.7062	2.3046
	0.5	13.286	12.124	10.746	7.9224	5.2746	2.9699	1.1065
	1	10.919	9.7525	8.4368	5.8579	3.6022	1.7681	0.4129
$\pi/4$	0	13.933	12.588	10.668	7.5623	4.8979	2.7083	0.9281
	0.5	11.616	10.183	8.6814	5.9509	3.6638	1.8607	0.4945
	1	9.4984	8.2793	7.0071	4.6442	2.7396	1.3196	0.4047
$3\pi/8$	0	14.107	12081	9.6999	6.4264	3.8562	1.8767	0.2999
	0.5	12.367	10.431	8.5687	5.5893	3.2519	1.4960	0.2011
	1	10.812	9.1226	7.5387	4.8395	2.7232	1.1955	0.2381

Известно [1,5], что под действием только нормальных сил точки перпендикуляров анизотропной полосы отклоняются от своих первоначальных положений. Для определения угла наклона первоначальных перпендикуляров вычислены относительные горизонтальные смещения $[U(0,\eta) - U(0,1)]$ точек линии $(\xi = 0,\ 0 \le \eta \le 2)$. Результаты вычислений приведены в табл. 7.

Полученные здесь результаты могут быть полезными при расчете деталей машин и строительных конструкций, а также при определении параметров будущего землетрясения методами современных сверхточных геодезических измерений [4].

$10^5[U(0,\eta)-U(0,1)]$ Таблица 7

$\eta \setminus \varphi$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
0	0	-13.943	-6.3639	-2.6546	0
0.2	0	-11.210	-5.0620	-2.1264	0
0.4	0	-8.4007	-3.7514	-1.6058	0
0.6	0	-5.5938	-2.4634	-1.0850	0
0.8	0	-2.7946	-1.2126	-0.5555	0
1	0	0	0	0	0
1.2	0	2.7946	1.2126	0.5555	0
1.4	0	5.5938	2.4634	1.0850	0
1.6	0	8.4001	3.7514	1.6058	0
1.8	0	11.210	5.0620	2.1264	0
2	0	13.943	6.3639	2.6546	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегларян А.Г., Баблоян А.А. Изгиб анизотропной полосы. // Изв. НАН РА . Механика. 2003. Т. 56. №4. С.29-38.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезокерамических и электопроводных тел. М.: Наука. 1988. 472с.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. Киев: Наукова Думка. 1989. 230с.
4. Бегларян А.Г. Разработка и совершенствование методов и приборов для автоматизации геодезических деформационных измерений инженерных сооружений и разломов земной коры. / Дисс. на соиск. уч. ст. докт. тех. наук. Ереван. 1997. 104с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука, 1977. 415С.
6. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Смешанная задача электроупругости для пьезокерамического клина с электродами. // Докл. НАН Арм. 1999. Т.99. №1. С.45-51
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1957. 360с.
8. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок. // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1961. №3
9. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
10. Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц. Оптимальные задачи колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек. // Механика полимеров. 1976. №5. с.871-874
11. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван. Из-во ЕГУ. 1976. 534с.
12. Агаловян М.Л. Краевые задачи на собственные значения для анизотропных тонкостенных тел. / Дисс. на соиск. уч. ст. канд. ф.-м. наук. Ереван. 1998. 109с.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
18.11.2003

Академия наук Армянской ССР
Фундаментальная библиотека

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.Г.

Է.Խ. Գրիգորյան, Կ.Հ. Սարգսյան

Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ դիէլեկտրիկ թափանցելիության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցով

Աշխատանքում ուսումնասիրված են առաձգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (6mm դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահքային կայունացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստության դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ դիէլեկտրիկ թափանցելիության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցով: Միջավայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման կծային աղբյուրի հետևանքով. Օգտվելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորության մեթոդով: Ցույց է տրվում, որ էլեկտրական դաշտի ինդուկցիան և շոշափող լարումները դիէլեկտրիկ շերտի ու պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության հպման տեղամասում ունեն վերջավոր թռիչք՝ պայմանավորված դիէլեկտրիկ թափանցելիության գործակիցների տարբերությամբ:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի, շոշափող լարման և տեղափոխության համար ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, K.H. Sargsyan

On the Shear Vibrations of Piezoelectric Half-Space, on the Boundary Surface of which a Dielectric Elastic Layer with Piecewise Constant Dielectric Permeability Coefficient Is Fixed

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщины с кусочно-постоянным диэлектрическим коэффициентом проницаемости. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению Фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений. Показано, что на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства индукция электрического поля и контактные напряжения на линии раздела диэлектриков имеют конечный скачок. Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля, контактных напряжений и перемещений в далеких точках участка контакта.

Предполагаем, что упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе $x_1x_2x_3$. Плоскость $x_2 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем. Ось x_2 направлена по глубине пьезоэлектрического полупространства. Ось x_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной симметрии.

Рассмотрим динамическую контактную задачу для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический бесконечный слой малой толщины $(k_2 h << 1)$ с кусочно-постоянным коэффициентом диэлектрической проницаемости, причем коэффициент диэлектрической проницаемости при $|x_1| > a$ есть ε_1, а при $|x_1| < a$ – ε_2. Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $P\delta(x_1)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω–частота колебаний, t–параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в определении индукции электрического поля на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Обозначим упругие перемещения пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя $u_*^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $u_*^{(2)}(x_1, x_2, t)$, а электрические потенциалы $\phi_*^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $\phi_*^{(2)}(x_1, x_2, t)$ соответственно.

Упругие перемещения и электрические потенциалы ищем в виде:

$$u_*^{(1)}(x_1, x_2, t) = u^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad u_*^{(2)}(x_1, x_2, t) = u^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

$$\phi_*^{(1)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad \phi_*^{(2)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

Тогда поставленная задача в амплитудах сводится к граничной задаче[1]:

$$\Delta u^{(1)} + k_1^2 u^{(1)} = 0, \quad \Delta\phi^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k_1^2 u^{(1)}, \qquad -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 u^{(2)}(x_1) = \frac{1}{hG_2}\left(P\delta(x_1) - \tau(x_1)\right) \tag{2}$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} c_{44}\left.\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} + e_{15}\left.\dfrac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \tau(x_1) \\ e_{15}\left.\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11}\left.\dfrac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = D_1^{(2)}(x_1, 0) + D_2^{(2)}(x_1, 0) \\ u^{(1)}\big|_{x_2=0} = u^{(2)}(x_1), \quad \phi^{(1)}\big|_{x_2=0} = \phi^{(2)}\big|_{x_2=0} \end{cases} \tag{3}$$

где $\tau(x_1)$–контактное напряжение,

$$D_1^{(2)}(x_1, 0) = \left(\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a)\right)D^{(2)}(x_1, 0),$$

$$D_2^{(2)}(x_1, 0) = \left(\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a)\right)D^{(2)}(x_1, 0), \quad -\infty < x_1 < \infty$$

$D^{(2)}(x_1,0) = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$ при $|x_1| > a$, $D^{(2)}(x_1,0) = -\varepsilon_2 \left.\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$ при $|x_1| < a$, $D^{(2)}(x_1, x_2)$ – индукция электрического поля, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, $c_1^2 = c_{44}/\rho_1$, $k_1^2 = \omega^2/c_1^2(1+\chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ – коэффициент электромеханической связи, e_{15} – пьезоэлектрическое постоянное, ε_{11} – коэффициент диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика, а ε_1, ε_2 – коэффициенты диэлектрической проницаемости диэлектрика, ρ_1 – плотность пьезоэлектрика, c_{44} – коэффициент упругости пьезоэлектрика, $c_2^2 = G_2/\rho_2$, $k_2^2 = \omega^2/c_2^2$, G_2 и ρ_2 – соответственно модуль сдвига и плотность материала диэлектрического слоя.

В силу малости толщины диэлектрического слоя считается, что $D^{(2)}(x_1, x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D^{(2)}(x_1, x_2) = D^{(2)}(x_1, 0)$, тогда в силу $\phi^{(2)}\big|_{x_2=-h} = 0$ для $\phi^{(2)}(x_1, x_2)$ будем иметь:

$$\phi^{(2)}(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1} D_1^{(2)}(x_1,0) - \frac{1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1,0)\right)(x_2 + h), \quad -\infty < x_1 < \infty \qquad (4)$$

Для решения уравнений (1), (2), (4) с контактными условиями (3), применим интегральное преобразование Фурье –

$$\overline{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty.$$

Получим граничную задачу:

$$\frac{d^2\overline{u}^{(1)}}{dx_2^2} - (\sigma^2 - k_1^2)\overline{u}^{(1)} = 0, \quad \frac{d^2\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2^2} - \sigma^2\overline{\phi}^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k_1^2 \overline{u}^{(1)} \qquad (5)$$

$$\overline{u}^{(2)}(\sigma) = \frac{\overline{\tau}(\sigma) - P}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)}, \quad \overline{\phi}^{(2)}(\sigma;0) = -\frac{h}{\varepsilon_1}\overline{D}_1^{(2)}(\sigma;0) - \frac{h}{\varepsilon_2}\overline{D}_2^{(2)}(\sigma;0)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} c_{44} \left.\frac{d\overline{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} + e_{15} \left.\frac{d\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} = \overline{\tau}(\sigma) \\ e_{15} \left.\frac{d\overline{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left.\frac{d\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} = \overline{D}_1^{(2)}(\sigma,0) + \overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) \\ \overline{u}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \overline{u}^{(2)}(\sigma), \quad \overline{\phi}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \overline{\phi}^{(2)}\big|_{x_2=0} \end{cases} \qquad (6)$$

Выше имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точку $\sigma = -k_2$ сверху, а точку $\sigma = k_2$ снизу.

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$\left(\chi^2|\sigma| - \left(1+\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)\cdot \overline{D}_1^{(2)}(\sigma,0) + \qquad (7)$$

$$\left(\chi^2|\sigma| - \left(1+\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_2}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)\cdot \overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}}|\sigma|$$

После этого, имея в виду функциональное уравнение (7), для упругого перемещения, электрического потенциала в пьезоэлектрике и контактных напряжений получим:

$$\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2) = \frac{P/c_{44}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right) + e_{15}/c_{44}\cdot\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h|\sigma|\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]} e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \qquad (8)$$

$$\overline{\varphi}^{(1)}(\sigma,x_2) = \frac{\frac{-Pe_{15}\varepsilon_1}{c_{44}\varepsilon_{11}} - \left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]} e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} +$$

$$+ \frac{Pe_{15}/\varepsilon_{11}c_{44}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right) + \chi^2\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h|\sigma|\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \qquad (9)$$

Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2-k_1^2} \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$ и $\sqrt{\sigma^2-k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$. При этом контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma = -k_1$ сверху, а точку $\sigma = k_1$ снизу [2].

$$\overline{\tau}(\sigma) = \frac{P\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\right) + \frac{e_{15}G_2}{c_{44}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)h^2|\sigma|\left(\sigma^2-k_2^2\right)\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]} \qquad (10)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (7).

Для решение функционального уравнения (7) перепишем его в виде:

$$\overline{D}_1^{(2)}(\sigma,0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) = \left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\overline{K}(\sigma)\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) - \overline{S}(\sigma) \qquad (11)$$

где

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\varepsilon_1\left(\chi^2|\sigma|-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)}{\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)}$$

$$\overline{S}(\sigma)=\frac{Pe_{15}\varepsilon_1|\sigma|}{c_{44}\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)}$$

Далее приступим к исследованию знаменателя $\overline{K}(\sigma)$, $\overline{S}(\sigma)$:

$$\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]=f(\sigma)$$

Легко видеть, что при $k_2>k$ $\left(k^2=\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$ и при любых значениях χ $f(k_1)>0$. $f(k_2)<0$. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial\sigma}<0$ при $\sigma>k_1$ и при любых значениях χ.

Из этого следует, что в интервале $k_1<\sigma<k_2$ функция $f(\sigma)$ имеет единственный нуль $\sigma=\sigma_0$. Из-за четности функции $f(\sigma)$ следует, что $\sigma=-\sigma_0$ в интервале $-k_1<\sigma<-k_2$ также является нулем этой функции. Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точку $\sigma=-\sigma_0$ сверху, а точку $\sigma=\sigma_0$ –снизу. Из вышесказанного следует, что существует электроупругая поверхностная волна Лява, которая распространяется со скоростью $C_L=\omega/\sigma_0$.

Применив к уравнению (11) обратное преобразование Фурье и пользуясь теоремой о свертке, будем иметь:

$$D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)=\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\int_{-a}^{a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl-S(x_1)$$

$$K(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{K}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma,\ S(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{S}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma\quad -\infty<x_1<\infty$$

Требуя, чтобы $|x_1|\le a$, для определения $D^{(2)}(x_1,0)$ получим Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода:

$$D^{(2)}(x_1,0)=\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\int_{-a}^{+a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}S(x_1)\ \text{при}\ |x_1|\le a\ (12)$$

допускающее решение методом последовательных приближений в пространстве непрерывных функции $C[-a;a]$ при

$$\left|\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right|\max_{|x_1|\le a}\int_{-a}^{+a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl<1.$$

После определения $D^{(2)}(x_1,0)$ при $|x_1|\le a$ её значение $|x_1|\ge a$ определится по формуле:

$$D^{(2)}(x_1,0)=\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\int_{-a}^{+a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl-S(x_1)\ \text{при}\ |x_1|\ge a \qquad (13)$$

Поскольку $\overline{K}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеет порядок $|\sigma|^{-1}$, то из свойств интеграла Фурье следует, что $K(|x_1|-l)$ при $x_1=l$ имеет логарифмическую особенность, поскольку $\overline{F}^{-1}\left(|\sigma|^{-1}\right)=-\frac{1}{\pi}\ln|x_1|+\text{const}$, где F – обобщенное преобразование Фурье, F^{-1} – обратное преобразование Фурье. Что касается $S(x_1)$, то она непрерывная функция, поскольку $\overline{S}(\sigma)$ абсолютно интегрируемая функция.

В силу вышесказанного следует, что функция $D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)$ в точках $x_1=\pm a$ непрерывна. Следовательно, функция $D^{(2)}(x_1,0)=D_1^{(2)}(x_1,0)-D_2^{(2)}(x_1,0)$ в точках $x_1=\pm a$ может иметь конечный скачок, поскольку $D^{(2)}(a+0;0)=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D^{(2)}(a-0;0)$.

$D^{(2)}(-a-0;0)=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D^{(2)}(-a+0;0)$ при $\varepsilon_1\ne\varepsilon_2$.

Исходя из функционального уравнения, в силу вышесказанного $D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)$ можно представить в виде:

$$D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\overline{g}(\sigma)-\frac{2A\sigma_0}{\sigma^2-\sigma_0^2}\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma+iAe^{i\sigma_0|x_1|} \qquad (14)$$

где $-\infty<x_1<\infty$, а A является вычетом $\overline{g}(\sigma)$ и определяется в следующем виде:

$$A=\frac{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_{11}\chi^2h\sigma_0^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h\sigma_0}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)D_2^{(2)}(\sigma_0,0)-\frac{Pe_{13}}{c_{44}}\sigma_0}{f'(\sigma)|_{\sigma=\sigma_0}}$$

$$\overline{g}(\sigma)=\frac{\left(\varepsilon_1\chi^2|\sigma|-\varepsilon_1\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)D_2^{(2)}(\sigma,0)-\frac{Pe_{13}}{c_{44}}|\sigma|}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}$$

Если учесть, что функция $D^{(2)}(x_1,0)$ принимает при $x_1 = 0$ конечное значение, то в силу свойств интеграла Фурье можно заключить, что $\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)$ имеет порядок $\frac{2\sin a\sigma}{\sigma}$ при $|\sigma| \to \infty$. Тогда легко видеть, что

$\overline{g}(\sigma) - \frac{2A\sigma_0}{\sigma^2 - \sigma_0^2}$ и $\frac{d}{d\sigma}\left(\overline{g}(\sigma) - \frac{2A\sigma_0}{\sigma^2 - \sigma_0^2}\right)$ – абсолютно интегрируемые функции $(-\infty < \sigma < \infty)$. И после интегрирования по частям, можно убедиться, что интегральный член в выражении $D_1^{(2)}(x_1,0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1,0)$ при $|x_1| \to \infty$ имеет порядок $o(x_1^{-1})$. Таким образом, для $\overline{D}^{(2)}(\sigma,0)$ получим асимптотическую формулу:

$$D^{(2)}(x_1,0) = iAe^{i\sigma_0|x_1|} + o(x_1^{-1}) \quad |x_1| \to \infty \tag{15}$$

Теперь приступим к исследованию $\tau(x_1)$. Для этого $\tau(x_1)$ запишем в виде:

$$\tau(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{L}(\sigma) e^{-i\sigma x_1} d\sigma + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) D_2^{(2)}(x_1,0)$$

где

$$\overline{L}(\sigma) = \frac{P\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}\right)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2 - k_2^2\right)\right]} -$$

$$- \frac{\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\left\{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \varepsilon_1\frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2 - k_2^2\right)\right\} D_2^{(2)}(\sigma_0,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2 - k_2^2\right)\right]}$$

Нетрудно убедиться, что интегральный член является непрерывной функцией в точках $x_1 = \pm a$, значит $\tau(x_1)$ в точках $x_1 = \pm a$ может иметь конечный скачок, как и функция $D_2^{(2)}(x_1,0)$. Далее поступая, как и выше, для $\tau(x_1)$ получим асимптотическую формулу:

$$\tau(x_1) = iBe^{i\sigma_0|x_1|} + o(x_1^{-1}), \quad |x_1| \to \infty \tag{16}$$

$$B = \frac{P\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h\sigma_0\right)\frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma_0^2 - k_2^2\right) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\left\{\sigma_0\frac{G_2 h^2}{c_{44}}\left(\sigma_0^2 - k_2^2\right)\right\} D_2^{(2)}(\sigma_0,0)}{f'(\sigma)\big|_{\sigma=\sigma_0}}$$

Представляет интерес также получение поведения $\tau(x_1)$ при $|x_1| \to 0$. Так как функция $\overline{L}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ имеет вид $\overline{L}(\sigma) = \frac{E}{|\sigma|} + o(\sigma^{-1})$, то в силу свойств интеграла Фурье будем иметь: $\tau(x_1) = -\frac{E}{\pi} \ln|x_1| + O(1)$, $|x_1| \to 0$.

$E = \frac{(1+\chi^2) c_{44} P}{G_2 h}$.

Асимптотическая формула для перемещения $u^{(1)}(x_1, 0)$ имеет вид:

$$u^{(1)}(x_1, 0) = iCe^{\omega x_1/|x_1|} + o(x_1^{-1}) \text{ при } |x_1| \to \infty$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ. 1962. 279с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
29.01.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛИТ

Амбарцумян А. В., Геворкян Г. А.

Ա. Վ. Համբարձումյան, Գ. Ա. Գևորգյան

Սալերի ծռման խնդիրների լուծման վերջավոր տարրերի մեթոդի մի ձևափոխության մասին

Առաջարկվում է ուղղանկյուն տարրերով վերջավոր տարրերի մեթոդի մի ձևափոխություն, որում սալերի ծռման խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդիրների:

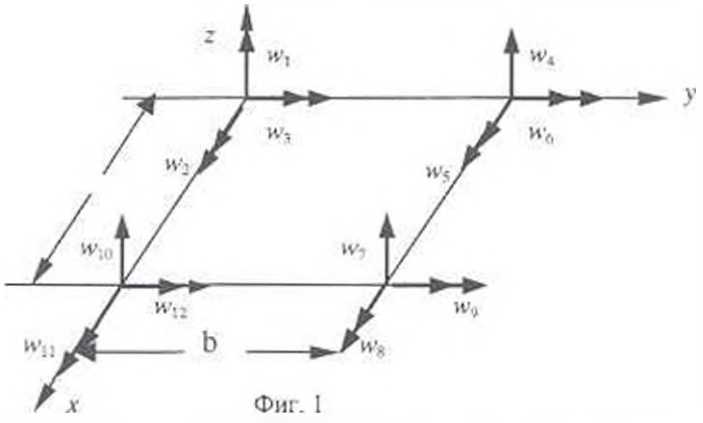
A. V. Hambarcumyan, G. A. Gevorgyan

About a Modification of Finite Elements Method for Plates Bending Problems Solution

Предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения задач изгиба плит сводятся к задачам квадратичного программирования.

§1. Характеристики прямоугольного элемента при изгибе плит

Срединную плоскость плиты представим в виде совокупности $s \in N = \{1,2,....\bar{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Рассмотрим прямоугольный элемент плиты в плоскости xy, показанный на фиг.1. Обозначим через $w_s = (w_1^s, w_2^s, ... w_{12}^s)^t$ вектор узловых перемещений. Нумерация и положительные направления компонентов этого вектора приведены на фиг.1. Здесь вектором с двумя стрелками указано положительное направление поворота, связанное с движением штопора в направлении вектора.



Фиг. 1

Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 12 неизвестных параметров:

$$w^s(x,y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \Phi_i(x,y) \qquad (1)$$

тогда, при $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, для функции Эрмита $\Phi_1(x,y)$ имеем [3]

$$\Phi_1^1(\xi,\eta) = 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3$$

$$\Phi_8^s(\xi,\eta) = b(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3)$$

$$\Phi_2^s(\xi,\eta) = b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3)$$

$$\Phi_3^s(\xi,\eta) = a(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^3\eta)$$

$$\Phi_4^s(\xi,\eta) = 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi\eta^3 + 2\xi^3\eta$$

$$\Phi_5^s(\xi,\eta) = b(-\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^2 - \xi\eta^3)$$

$$\Phi_6^s(\xi,\eta) = a(-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta)$$

$$\Phi_7^s(\xi,\eta) = -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 \qquad (2)$$

$$\Phi_9^s(\xi,\eta) = a(\xi^2\eta - \xi^3\eta)$$

$$\Phi_{10}^s(\xi,\eta) = 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 - 3\xi^2\eta$$

$$\Phi_{11}^s(\xi,\eta) = b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3);\ \Phi_{12}^s(\xi,\eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta)$$

Компоненты вектора перемещения $f_s = (w^s, \frac{\partial w^s}{\partial y}, -\frac{\partial w^s}{\partial x})^T = (w^s, \theta^s, \omega^s)^T$ внутри s-ого элемента соответственно определятся формулой (1) и формулами

$$\theta^s(x,y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \frac{\partial \Phi_i^s(x,y)}{\partial y},\quad \omega^s(x,y) = -\sum_{i=1}^{12} w_i^s \frac{\partial \Phi_i^s(x,y)}{\partial x} \qquad (3)$$

Потенциальная энергия изгиба s-ого элемента определяется выражением[3]

$$\Omega_s = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{ [\nabla^2 w(x,y)]^2 + 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \right\} dxdy \qquad (4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E – модуль упругости, h – толщина плиты, ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя значения $w^s(x,y)$ из выражения (1) в выражение (7), потенциальную энергию изгиба представим в виде

$$\overline{\Omega}_s = \frac{1}{2}(w_s)^T k_s w_s \qquad (5)$$

где $k_s = \|k_{ij}^s\|$ – матрица жесткости, компоненты которой определяются формулой

$$k_{ij}^s = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{ \nabla^2\Phi_i^s \nabla^2\Phi_j^s + 2(1-\nu)\times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_i^s}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_j^s}{\partial x^2} \right] \right\} dxdy$$

Запишем k_{ij} в виде $k_{ij} = \frac{D}{ab}[\bar{k}_{ij}]$, тогда, при $m = \frac{a}{b}$, исходя из соотношений (6), имеем

$$\bar{k}_{11} = \bar{k}_{44} = \bar{k}_{77} = \bar{k}_{10,10} = 4(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\upsilon)$$

$$\bar{k}_{41} = \bar{k}_{10,7} = 2(\frac{1}{m^2} - 2m^2) - \frac{1}{5}(14 - 4\upsilon)$$

$$\bar{k}_{22} = \bar{k}_{55} = \bar{k}_{88} = \bar{k}_{11,11} = [\frac{4m^2}{3} + \frac{4}{5}(1 - \upsilon)]b^2$$

$$\bar{k}_{52} = \bar{k}_{11,8} = [\frac{2m^2}{3} - \frac{1}{15}(1 - \upsilon)]b^2$$

$$\bar{k}_{33} = \bar{k}_{66} = \bar{k}_{99} = \bar{k}_{12,12} = [\frac{4}{3m^2} + \frac{4}{15}(1 - \upsilon)]a^2$$

$$\bar{k}_{32} = -\bar{k}_{65} = \bar{k}_{98} = -\bar{k}_{12,11} = -\nu ab$$

$$\bar{k}_{21} = -\bar{k}_{54} = -\bar{k}_{87} = \bar{k}_{11,10} = [2m^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\upsilon)]b$$

$$\bar{k}_{74} = \bar{k}_{10,1} = -2(\frac{2}{m^2} - m^2) - \frac{1}{5}(14 - 4\upsilon)$$

$$\bar{k}_{43} = \bar{k}_{61} = -\bar{k}_{10,9} = -\bar{k}_{12,7} = [-\frac{1}{m^2} + \frac{1}{5}(1 - 4\upsilon)]a$$

$$\bar{k}_{42} = \bar{k}_{51} = -[2m^2 + \frac{1}{5}(1 - \upsilon)]b$$

$$\bar{k}_{31} = \bar{k}_{63} = -\bar{k}_{97} = -\bar{k}_{12,10} = [-\frac{2}{m^2} - \frac{1}{5}(1 + 4\upsilon)]a$$

$$\bar{k}_{53} = \bar{k}_{12,9} = [\frac{2}{3m^2} - \frac{4}{15}(1 - \upsilon)]a^2 \qquad (6)$$

$$\bar{k}_{72} = -\bar{k}_{81} = -\bar{k}_{10,5} = \bar{k}_{12,4} = [-m^2 + \frac{1}{5}(1 - \upsilon)]b$$

$$\bar{k}_{55} = \bar{k}_{11,2} = [\frac{2m^2}{3} - \frac{4}{15}(1 - \upsilon)]b^2$$

$$\bar{k}_{71} = \bar{k}_{10,4} = -2(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\upsilon) \quad \bar{k}_{96} = \bar{k}_{12,3} = [\frac{2}{3m^2} - \frac{1}{15}(1 - \upsilon)]a^2$$

$$\bar{k}_{73} = -\bar{k}_{64} = \bar{k}_{10,3} = -\bar{k}_{12,1} = [\frac{2}{m^2} + \frac{1}{5}(1 - \upsilon)]a$$

$$\bar{k}_{82} = \bar{k}_{11,5} = [\frac{m^2}{3} + \frac{1}{15}(1 - \upsilon)]b^2$$

$$\bar{k}_{91} = -\bar{k}_{61} = \bar{k}_{10,6} = -\bar{k}_{12,4} = [\frac{1}{m^2} - \frac{1}{5}(1 - \upsilon)]a$$

$$\bar{k}^s_{03} = \bar{k}^s_{12,6} = [\frac{1}{3m^2} + \frac{1}{15}(1-\upsilon)]a^2$$

$$\bar{k}^s_{75} = \bar{k}^s_{84} = -\bar{k}^s_{10,2} = -\bar{k}^s_{11,1} = [-m^2 + \frac{1}{5}(1+4\upsilon)]b$$

$$\bar{k}^s_{10,8} = -\bar{k}^s_{11,7} = [2m^2 + \frac{1}{5}(1-\upsilon)]b$$

$$\bar{k}^s_{53} = \bar{k}^s_{62} = \bar{k}^s_{83} = \bar{k}^s_{86} = \bar{k}^s_{92} = \bar{k}^s_{95} = \bar{k}^s_{11,3} = \bar{k}^s_{11,6} = \bar{k}^s_{11,9} = \bar{k}^s_{12,2} = \bar{k}^s_{12,5} = \bar{k}^s_{12,8} = 0$$

Обозначим через $P_s = (P^s_1, P^s_2, ..., P^s_{12})^T$ вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке. Положительные направления узловых нагрузок соответствуют таковым для обобщенных узловых перемещений (фиг.1) .

В случае равномерно распределенной нагрузки q имеем [3]

$$P_s = \frac{qab}{4}(1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6})^T \qquad (7)$$

Работа узловых нагрузок элемента задается формулой [3]

$$\hat{\Omega}^s = w^I_s P_s \qquad (8)$$

Общая потенциальная энергия s-ого конечного элемента равна разности потенциальной энергии деформации и работы заданных внешних сил [2]

$$\Omega^s = \bar{\Omega}^s - \hat{\Omega}^s$$

откуда, принимая во внимание формулы (5) и (8), находим

$$\Omega^s = \frac{1}{2} w^T_s k_s w_s - w^T_s P_s \qquad (9)$$

§2. Модифицированный метод конечных элементов для решения задач изгиба плит

Учитывая, что срединная плоскость плиты представлена в виде совокупности $\bar{n}$ конечных элементов прямоугольной формы, для потенциальной энергии плиты имеем

$$\Omega = \sum_{s=1}^{\bar{n}} \Omega_s = \sum_{s=1}^{\bar{n}} (\frac{1}{2} w^T_s k_s w_s - w^T_s P_s) \qquad (10)$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [2], для определения искомых векторов $w_s, s \in \{1,2,...,\bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования

$$\min\left\{\sum_{s=1}^{\bar{n}} (\frac{1}{2} w^T_s k_s w_s - w^T_s P_s) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{условие совместности деформации,} \\ \text{кинематические краевые условия} \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Составим условия совместности деформаций в смежном сечении вдоль границы разделов s-ого и $(s+1)$-ого конечных элементов. В зависимости от относительных размеров (длины границ разделов конечных элементы одинаковые или разные) смежных конечных элементов они пишутся в двух разных формах:

$$w_{r,s} = w_{r,s+1} \tag{12}$$

$$w_{r,s} = f_{s-1} \text{ или } f_s = w_{r,s+1} \tag{13}$$

Здесь, через $w_r = (w_r^1, w_r^2, w_r^3)^T$ обозначен вектор перемещения r-ого узла, где w_r^1 – смещение в направлении оси z, w_r^2 – вращение вокруг оси x, w_r^3 – вращение вокруг оси y. В обозначениях $w_{r,s}$ и $w_{r,s-1}$ дополнительные индексы показывают те конечные элементы, к которым принадлежат векторы узловых перемещений. Для точек, не являющихся узловыми, значения компонент векторов f_s или f_{s-1} определяются по формулам (1) и (3).

Обозначим через

$w = (w_1^1, w_2^1, ..., w_n^1)^T = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_2^1, w_2^2, w_2^3, ..., w_n^1, w_n^2, w_n^3)^T$ вектор узловых перемещений, где n – общее число узлов пластины. Тогда, если в i-ом узле сходятся узловые точки r элементов, то между обобщенными узловыми перемещениями элементов и компонентами вектора q имеются следующие связи:

$$w_{i,j} = w_i, \quad j \in r, i \in N = \{1,2,...,n\} \tag{14}$$

Принимая во внимание эти связи, легко увидеть, что все условия совместности деформации (12) автоматически выполняются, а условие (13) перепишется в виде

$$f_i = w_i, \quad i \in \hat{N} = \{1,2,...,\hat{n}\} \tag{15}$$

где через $\hat{n}$ обозначено количество тех узлов, в которых не все сходящиеся элементы имеют узловые точки. Условия (15) с учетом формул (1) и (3) перепишем в виде системы уравнений

$$\hat{H}w = 0 \tag{16}$$

где $\hat{H}$ – матрица порядка $\hat{n} \times n$.

Пусть $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_2^1, P_2^2, P_2^3, ..., P_n^1, P_n^2, P_n^3)^T$ – вектор нагрузок, $K = \|K_{ij}\|$ – матрица жесткости для всей плиты. Тогда, как следует из соотношения (10)

$$P_i^l = \sum_r P_{ij}^l, \quad i \in N = \{1,2,...n\}, \quad j \in \{1,2,3\} \tag{17}$$

$$K_{ij} = \sum_r k_{ij}^l, i \in N, j \in N \tag{18}$$

В формулах (17) и (18) знак суммы распространяется на все соединяемые в узле стороны конечных элементов.

Как известно [3], функция поперечного смещения w^1, задаваемая формулой (1), обеспечивает непрерывность перемещения, но не обеспечивает совместности наклона нормали вдоль границы разделов элементов. Так как вдоль граничной поверхности элементов наклон нормали изменяется параболически, то для обеспечения непрерывности необходимо ввести на этой поверхности дополнительный узел, на котором будет задано условие непрерывности. Возьмем эти узлы в центре сторон конечных элементов, и, используя формулы (3), найдем в этих

точках величины вращений вокруг осей x и y, т. е. $\theta_i^s, \theta_i^{s-1}, i \in \{1,2,...,\overline{m}\}$ и $\omega_j^s, \omega_j^{s-1}$, $j \in \{1,2,...,\tilde{m}\}$, где $\overline{m}$ и $\tilde{m}$ – соответственно количество сторон конечных элементов, параллельных осям x и y. Подставляя эти значения в условие непрерывности вида

$$\theta_i^s = \theta_i^{s-1}, i \in \{1,2,...,\overline{m}\}\ ,\ \omega_j^s = \omega_j^{s-1}, j \in \{1,2,...,\tilde{m}\},$$

получаем систему уравнений

$$Hw = 0 \tag{19}$$

где H – матрица порядка $m \times n$, $m = \overline{m} + \tilde{m}$.

Отметим, что, исходя из формул (3), в дополнительных узлах для определения соответствующих вращений имеем

$$\begin{aligned}
\theta^s(\frac{a}{2},b) &= \frac{a}{8b}w_3^s + \frac{1}{2}w_5^s - \frac{a}{8b}w_6^s + \frac{1}{2}w_8^s + \frac{a}{8b}w_9^s - \frac{a}{8b}w_{12}^s \\
\theta^s(\frac{a}{2},0) &= \frac{1}{2}w_2^s + \frac{a}{8b}w_3^s - \frac{a}{8b}w_4^s + \frac{a}{8b}w_{10}^s + \frac{1}{2}w_{11}^s - \frac{a}{8b}w_{12}^s \\
\omega^s(a,\frac{b}{2}) &= \frac{b}{8a}w_2^s - \frac{b}{8a}w_5^s + \frac{b}{8a}w_8^s + \frac{1}{2}w_9^s - \frac{b}{8a}w_{11}^s + \frac{1}{2}w_{12}^s \\
\omega^s(0,\frac{b}{2}) &= \frac{b}{8a}w_2^s + \frac{1}{2}w_5^s - \frac{b}{8a}w_7^s + \frac{1}{2}w_8^s + \frac{b}{8a}w_9^s - \frac{b}{8a}w_{11}^s
\end{aligned} \tag{20}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&w_1^1 + K_{12}^{(0)}w_1^2 + K_{13}^{(0)}w_1^3 + K_{14}^{(0)}w_2^1 + K_{15}^{(0)}w_2^2 + K_{16}^{(0)}w_2^3 + ... \\
&... + K_{1(3n-2)}^{(0)}w_n^1 + K_{1(3n-1)}^{(0)}w_n^2 + K_{1(3n)}^{(0)}w_n^3 = -z_1 \\
&w_1^2 + K_{23}^{(1)}w_1^3 + K_{24}^{(1)}w_2^1 + K_{25}^{(1)}w_2^2 + K_{26}^{(1)}w_2^3 + ... \\
&... + K_{2(3n-2)}^{(1)}w_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(1)}w_n^2 + K_{2(3n)}^{(1)}w_n^3 = -z_2 \\
&w_1^3 + K_{24}^{(2)}w_2^1 + K_{25}^{(2)}w_2^2 + K_{26}^{(2)}w_2^3 + ... + K_{2(3n-2)}^{(2)}w_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(2)}w_n^2 + K_{2(3n)}^{(2)}w_n^3 = -z_3 \\
&.....\\
&w_n^3 + K_{(3n-1)(3n)}^{(3n-2)}w_n^3 = -z_{3n-1}
\end{aligned} \tag{21}$$

найдем произведение узловых перемещений. Подставив их в выражение потенциальной энергии (11), определим

$$\Omega = \frac{1}{2}(w^T \hat{D} w + z^T \bar{I} z) - w^T P \tag{22}$$

где $\hat{D} = \|\hat{d}_i\|$ – диагональная матрица порядка $3n$, $\bar{I}$ – единичная матрица порядка $3n-1$.

$$\begin{aligned}
&z = (z_1, z_2, ..., z_{3n-2})^T;\ K_{ii}^{(0)} = -K_{ii}, i \in M = \{1,2,...,3n\} \\
&K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2,3,...,3n\} \\
&K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)}K_{ij}^{(r-1)}, r \in \overline{M} = \{1,2,...,3n-1\} \\
&i \in \{r,...,3n\},\ j \in \{r+1,...,3n\}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\hat{d}_{ii} = K_{ii}^{(i)} - \sum_{s=1}^{i-1}(K_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \overline{M};\ \hat{d}_{(3n)(3n)} = K_{(3n)(3n)}^{(0)} - \sum_{i=1}^{3n-1}(K_{i(3n)}^{(3n)})^2$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$ – векторы-столбцы порядка $6n-1$,

$D = \|d_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \tilde{D} & 0 \\ 0 & \tilde{I} \end{Vmatrix}$ – диагональная матрица порядка $6n-1$, тогда выражение (22) примет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} X^T DX + C^T X$$

Обозначим через $A = (A_1, A_2, ..., A_{6n-1})$ матрицу коэффициентов системы уравнений (16), (19) и (21), где $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{3n+m-4-1})^T$. Тогда, взамен задачи (11) для определения искомого вектора X получим следующую задачу квадратичного программирования:

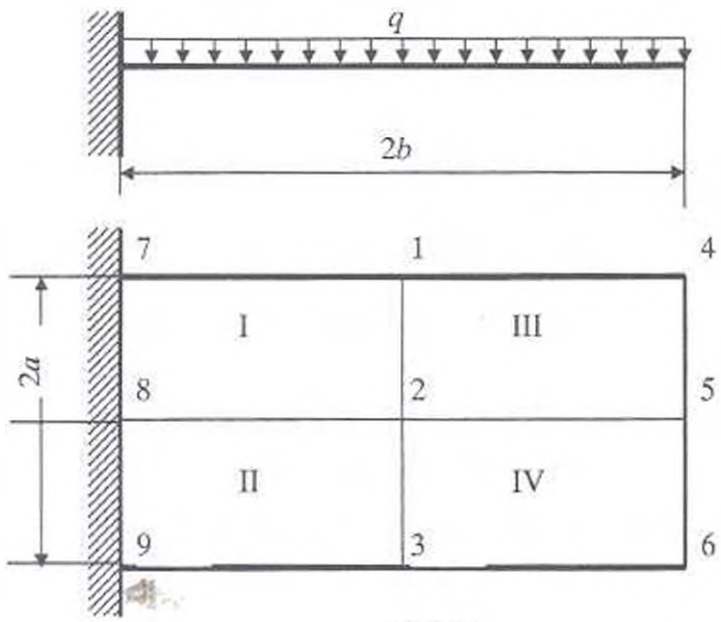
$$\min\{C^T X + \frac{1}{2} X^T DX \mid AX = 0, \text{ кинематические краевые условия}\} \quad (24)$$

Отметим, что если в ограничения не включить систему уравнений (19), то задача (24) будет соответствовать расчету плит с "несогласующимися" элементами.

§3. Пример

Прямоугольная консольная плита (фиг. 2) загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, соотношения сторон $m = 0.5$.

По формулам (6) вычисляем компоненты матрицы жесткости s-ого прямоугольного элемента пластины. Далее, принимая $b = 1$ и $a = 2$, с учетом связей (18), находим матрицу жесткости для всей плиты, имеем



Фиг. 2

19,56	0	-4,44	-18,06	0	-8,14	0	0	0	2,22	0,64	-1,78	-2,97	0,11	-1,93	0	0	0
0	2,08	0	0	-0,08	0	0	0	0	-0,64	0,24	0	-0,11	0,26	0	0	0	0
-4,44	0	5,52	8,14	0	2,62	0	0	0	-1,78	0	1,24	1,93	0	0,69	0	0	0
-18,06	0	8,14	39,12	0	0	-18,06	0	-8,14	-2,97	0,11	1,93	4,44	1,28	0	-2,97	0,11	-1,93
0	-0,08	0	0	4,16	0	0	-0,08	0	-0,11	0,26	0	-1,28	0,46	0	-0,11	0,26	0
-8,14	0	2,62	0	0	11,04	8,14	0	2,62	-1,93	0	0,69	0	0	2,48	1,93	0	0,69
0	0	0	-18,06	0	8,14	19,56	0	8,44	0	0	0	-2,97	0,11	1,93	2,22	0,64	1,78
0	0	0	0	-0,08	0	0	2,08	0	0	0	0	-0,11	0,26	0	-0,64	0,24	0
0	0	0	-8,14	0	2,62	8,44	0	5,52	0	0	0	-1,93	0	0,69	1,78	0	1,24
2,22	-0,64	-1,78	-2,97	-0,11	-1,93	0	0	0	9,78	-0,94	-4,22	-9,03	0,19	-4,07	0	0	0
0,64	0,24	0	0,11	0,26	0	0	0	0	-0,94	1,04	0,3	0,19	-0,04	0	0	0	0
-1,78	0	1,24	1,93	0	0,69	0	0	0	-4,22	0,3	2,76	4,07	0	1,31	0	0	0
-2,97	-0,11	1,93	4,44	-1,28	0	-2,97	-0,11	-1,93	-9,03	0,19	4,07	19,56	-1,88	0	-9,03	0,19	-4,07
0,11	0,26	0	1,28	0,48	0	0,11	0,26	0	0,19	-0,04	0	-1,88	2,08	0	0,19	-0,04	0
-1,93	0	0,69	0	0	2,48	1,93	0	0,69	-4,07	0	1,31	0	0	5,52	4,07	0	1,31
0	0	0	-2,97	-0,11	1,93	2,22	-0,64	1,78	0	0	0	-9,03	0,19	4,07	9,78	-0,94	4,22
0	0	0	0,11	0,26	0	0,64	0,24	0	0	0	0	0,19	-0,04	0	-0,94	1,04	-0,3
0	0	0	-1,93	0	0,69	1,78	0	1,24	0	0	0	-4,07	0	1,31	4,22	-0,3	2,76

Исходя из формул (7) и (17), определим вектор нагрузок

$$P = -\frac{qa^2b^2}{4}\left(-100-200-100-0{,}5\,\frac{b}{6}-\frac{a}{6}-1\,\frac{b}{3}-\frac{a}{3}-0{,}5\,\frac{b}{6}-\frac{a}{6}\right)^T$$

Составим условия непрерывности (19). Принимая во внимание формулы (20), найдем

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Для формирования задачи (28), исходя из вышеприведенных значений вектора P, матриц K, H и формул (27), находим вектор C и матрицы D, A. Далее, используя алгоритм решения задач квадратичного программирования, приведенный в [1], вычисляем вектор узловых перемещений. В пятом узле получим

$$w_5 = (-32{,}3822a \quad -10{,}8506 \quad -0{,}128794)^T \frac{qab^2}{4D} \qquad (25)$$

При расчете плит с "несогласующимися" элементами соответственно получается

$$w_5 = (-33{,}0372a \quad -11{,}1172 \quad -0{.}436628)^T \frac{qab^2}{4D}$$

Наибольшие значения прогиба и угла поворота защемленной в одном конце балки длиной l, загруженной равномерно распределенной по всей длине нагрузкой q, определяются формулами

$$w_{max} = -0{,}125\frac{ql^4}{D}\ ,\ \theta_{max} = -0{,}16667\frac{ql^3}{D} \qquad (26)$$

Принимая $a = l/4$, находим эти же величины, исходя из полученного решения (25), получим

$$w_{max} = -0.126493\frac{ql^4}{D}\ ,\ \theta_{max} = -0.169541\frac{ql^3}{D} \qquad (27)$$

Сопоставляя соответствующие значения задаваемыми формулами (26) и (27), легко увидеть, что их разность меньше двух процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г.А. Об одном методе расчета усилий в элементах фермы// Известия НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. № 2. С.56-62.
2. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение. 1974. 384 с.

Ереванский государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
9.10.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мкртчян К.Ш.

Կ. Շ. Մկրտչյան

Պատական չարժման հաշվառումով ուղղանկյուն սալի հարկադրական տատանման մասին

Հետազոտվում է առաձգական, իզոտրոպ, եզրապնով ազատ հենված սալի հարկադրական տատանումները ուղղանկյուն, կենտրոնացված, ըստ ժամանակի պարբերական ուժի ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծվում է [1]-ում շարադրված մերոդով, օգտագործելով կոմբինացված պայմաններ, որը ներառում է սալի մակերևույթին դինամիկ ազդեցությունը և ուժի ազդեցության կետի նկատմամբ պատական չարժումը ելքած կետով անցնող, սալի միջին մակերևույթին ուղղահայաց տարբեր հարթությունների մեջ: Դիտարկվող խնդրի լուծումը կառուցվում է սեփական տատանման ձևերի կրկնակի շարքերի տեսքով: Սալի համար ստացված են երկու տիպի հարկադրական տատանումներ և նոր ռեզոնանսային հաճախականություններ: Հաշվարկների թվային արդյունքները բերված են գրաֆիկների տեսքով և առաջված արդյունքների համար կատարված է անալիզ:

K. Sh. Mkrtchyan

On forced vibrations of the rectangular plate with regard to the rotational motion

Исследуются вынужденные колебания упругой, изотропной, шарнирно-опертой пластинки под действием нормальной, сосредоточенной, периодической во времени, силы. Задача решается методом, предложенным в [1], с использованием комбинированных условий, включающих динамическое воздействие на поверхность пластинки и вращательное движение относительно точки приложения силы в различных плоскостях, перпендикулярных срединной плоскости пластинки и проходящих через вышеуказанную точку. Используемый метод позволяет решать широкий класс краевых задач, в частности, он может быть применен для решения задач изгибных колебаний упругой прямоугольной пластинки при различного рода нагрузках и граничных условиях. Решение поставленной задачи строится в виде двойных рядов собственных форм колебаний. Получены два типа вынужденных колебаний и новые резонансные частоты для пластинки. Численные результаты расчетов приведены в виде графиков и дан анализ полученных результатов.

Рассмотрим вынужденные колебания упругой, изотропной, шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластинки с размерами a, b, h, вызванные нормальной, сосредоточенной, во времени, периодической силой, приложенной в точке $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$. Вынужденные колебания пластинки, отнесенные к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ (оси x_1, x_2 расположены в срединной плоскости), с учетом эффектов поперечного сдвига и инерции вращения описываются следующими уравнениями и граничными условиями [2]:

$$D\left[(1-\nu)\Delta\psi_1 + (1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right] - 2k^2Gh\left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = 2\rho J\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}$$

$$D\left[(1-\nu)\Delta\varphi_1 + (1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right] - 2k^2Gh\left(\varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\right) = 2\rho J\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} \qquad (1)$$

$$k^2Gh(\Delta w + \Phi) - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q\delta(x_1 - c_1)\delta(x_2 - c_2)\sin\omega t$$

$$(x_1 = 0, b) \quad w_1 = 0, \; M_{x_1} = 0, \; \varphi_1 = 0$$
$$(x_2 = 0, a) \quad w_1 = 0, \; M_{x_2} = 0, \; \psi_1 = 0$$

где

$$M_{x_1} = D\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right), \; M_{x_2} = D\left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right), \; \Phi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}$$

$D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ –цилиндрическая жесткость; ν, ρ, E, G–соответственно: коэффициент Пуассона, плотность материала и модули упругости при растяжении и сдвиге; J - момент инерции поперечного сечения; k^2 –численный коэффициент; Δ-оператор Лапласа; $\delta(\xi)$ – дельта-функция, q – амплитуда силы; w_1 – прогиб пластинки; ψ_1, φ_1 – средние по толщине углы поворота элемента относительно осей x_1 и x_2.

Граничные условия (2) будут удовлетворены, если решение системы (1) представить в виде двойных тригонометрических рядов

$$w_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi x_2}{a} \sin\omega t$$
$$\psi_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{1mn} \cos\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi x_2}{a} \sin\omega t \qquad (3)$$
$$w_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{2mn} \sin\frac{m\pi x_1}{b} \cos\frac{n\pi x_2}{a} \sin\omega t$$

Подставляя значения w_1, ψ_1, φ_1 из (3) в систему уравнений (1), для искомых коэффициентов f_{mn}, c_{1mn}, c_{2mn} получаем

$$f_{mn} = -\frac{4q}{ab} \frac{\dfrac{1}{\rho h} - \dfrac{J\omega^2}{k^2 Gh} + \sqrt{\dfrac{D}{\rho h}} \dfrac{k_{mn}}{k^2 Gh}}{k_{mn}^2 - \beta_{mn}\omega^2 + c\omega^4} \sin\frac{m\pi c_1}{b} \sin\frac{n\pi c_2}{a}$$

$$c_{1mn} = \frac{m\pi}{b} a_{mn}, \; c_{2mn} = \frac{n\pi}{a} a_{mn}, \; c = \frac{\rho J}{k^2 Gh}$$

$$a_{mn} = \frac{2k^2 Ghf_{mn} - D(1+\nu)d_{mn}}{2\rho J\omega^2 - (1-\nu)\sqrt{D\rho h}k_{mn} - 2k^2 Gh}$$

$$d_{mn} = \left(\sqrt{\frac{\rho h}{D}} k_{mn} - \frac{\rho\omega^2}{k^2 G}\right) f_{mn} - \frac{4q}{abk^2 Gh} \sin\frac{m\pi c_1}{b} \sin\frac{n\pi c_2}{a}$$

$$\beta_{mn} = 1 + \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\left(\frac{D}{k^2 Gh} + \frac{J}{h}\right) k_{mn}, \quad k_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)$$

Отметим, что система уравнений (1) обладает волновыми свойствами [3] и допускает решения в виде движения волн изгиба и волн сдвига в пластинке. Из условия непрерывности угла поворота элемента пластинки на фронте волны изгиба [3] невозбужденная часть осуществляет вращательное движение. Получается, что точки пластинки внутренней части фронта волны изгиба будут упруго колебаться, а внешняя часть будет вращаться. Для изучения вращательного движения пластинки необходимо выделить упругие колебания точек пластинки. Это можно получить

если фиксировать распространение волн изгиба относительно точки приложения силы. В этом случае $w_1=0$, а влияние вращательного движения на невозбужденные части пластинки переместится в неподвижную точку приложения силы. Отсюда очевидно, что прямая линия, проходящая от неподвижной точки к краю пластинки по направлению φ (φ – полярный угол в неподвижной точке приложения силы), будет совершать вращательные движения по закону $\theta(t,\varphi)$ в плоскости, перпендикулярной к пластинке, проходящей через эту линию (θ–угол поворота элемента пластинки на фронте волны изгиба). Можно исследовать вращательное движение линии по направлению φ, если по тому же закону и в той же плоскости вращать пластинку вокруг оси, проходящей через неподвижную точку и перпендикулярно к этой плоскости, приложив к неподвижной точке вращательный момент $M(t,\varphi)$. Отсюда получим точки на линии, которые по направлению φ совершают новые упругие колебания. Для получения упругих колебаний других точек следует изменять параметр φ в пределах $0+2\pi$. Отметим, что в случае распространения волны изгиба в пластинке, при ее вращательном движении, она приводит края пластинки к неподвижным положениям. В этом случае краевые условия пластинки во время его вращательного движения будут соответствовать условиям первой задачи.

Линейное интегро-дифференциальное уравнение вращательного движения пластинки в вертикальной плоскости по направлению φ и система уравнений упругих вынужденных поперечных колебаний на основе [4] имеют вид:

$$\rho h\iint_{\Omega} x_1'\left(x_1'\ddot{\theta}+\ddot{w}_2\right)d\Omega = M-\rho g h\iint_{\Omega}\left(x_1'\cos\theta-w_2\sin\theta\right)kd\Omega \tag{4}$$

$$D\left\{(1-\nu)\Delta\psi_2+(1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\cos\varphi+(1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\sin\varphi\right\}-$$

$$-2k^2Gh\left\{\psi_2+\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\cos\varphi-\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\sin\varphi\right\}=2\rho J\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$$

$$D\left\{(1-\nu)\Delta\varphi_2-(1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\sin\varphi+(1-\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\cos\varphi\right\}- \tag{5}$$

$$-2k^2Gh\left\{\varphi_2-\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\sin\varphi+\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\cos\varphi\right\}=2\rho J\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}$$

$$k^2Gh\left(\Delta w_2+\Phi_2\right)-\rho h\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=-\rho h\left(x_1'\ddot{\theta}+g\cos\varphi\right)$$

с граничными условиями

$$(x_1=0,b;\ \varphi=0)\qquad w_2=0,\ M_{x_1}=0,\ \varphi_2=0$$

$$(x_2=0,a;\ \varphi=\pi/2)\qquad w_2=0,\ M_{x_2}=0,\ \psi_2=0 \tag{6}$$

Здесь

$$x_1'=(x_1-c_1)\cos\varphi+(x_2-c_2)\sin\varphi$$

$$\theta=(\psi_1\cos\varphi+\varphi_1\sin\varphi)\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=x_2'}}$$

$$x_1^* = \begin{cases} (\nu t - 2jd)\cos\varphi + c_1 & \text{при } t > 2jd/\nu \\ \left[2(j+1)d - \nu t\right]\cos\varphi + c_1 & \text{при } t < 2(j+1)d/\nu \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} (\nu t - 2jd)\sin\varphi + c_2 & \text{при } t > 2jd/\nu \\ \left[2(j+1)d - \nu t\right]\sin\varphi + c_2 & \text{при } t < 2(j+1)d/\nu \end{cases}$$

$(j = (0,1,...)$

при $t > 2jd/\nu$

$$\ddot{\theta} = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q\alpha_{mn}}{ab}\left\{a_{mn}(\varphi)\left[\theta''_{mn}(\varphi) - \theta''_{mn}(\varphi)\right] - a_{mn}(-\varphi)\left[\theta''_{mn}(-\varphi) - \theta''_{mn}(-\varphi)\right]\right\}$$

$$\theta''_{mn}(\varphi) = \left[\omega - a_{mn}(\varphi)\nu\right]^2\cos\left[\left(\omega - a_{mn}(\varphi)\nu\right)t + b_{mn}(\varphi)\right]$$

$$\theta''_{mn}(\varphi) = \left[\omega + a_{mn}(\varphi)\nu\right]^2\cos\left[\left(\omega + a_{mn}(\varphi)\nu\right)t - b_{mn}(\varphi)\right]$$

$$a_{mn}(\varphi) = \frac{m\pi}{b}\cos\varphi + \frac{n\pi}{a}\sin\varphi,\ \nu = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

$$b_{mn}(\pm\varphi) = 2jda_{mn}(\pm\varphi) + \frac{m\pi c_1}{b} \pm \frac{n\pi c_2}{a}$$

ν–скорость распространения волн изгиба по пластинке, d определяется при численных расчетах.

Решение системы (5) (без учета собственного веса) при $t > 2jd/\nu$ представим в виде

$$w_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[f_{1mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + f_{2mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + f_{3mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t) + \right.$$

$$\left. + f_{4mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\right]\sin\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi x_2}{a}$$

$$\psi_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\begin{matrix} A_{11mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + A_{12mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + A_{13mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + A_{14mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{matrix}\right]\cos\varphi\cos\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi x_2}{a} +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\begin{matrix} A_{21mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) - A_{22mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + A_{23mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + A_{24mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{matrix}\right]\sin\varphi\sin\frac{m\pi x_1}{b}\cos\frac{n\pi x_2}{a} \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\begin{matrix} B_{11mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + B_{12mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + B_{13mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + B_{14mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{matrix}\right]\cos\varphi\sin\frac{m\pi x_1}{b}\cos\frac{n\pi x_2}{a} +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\begin{matrix} B_{21mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + B_{22mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + B_{23mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + B_{24mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{matrix}\right]\sin\varphi\cos\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi x_2}{a}$$

которая удовлетворяет всем условиям шарнирно-опертой по всему контуру прямоугольной пластинки. Подставляя значения w_2, ψ_2, φ_2 в систему уравнений (5), для искомых коэффициентов f_{imn}, A_{1imn}, A_{2imn}, B_{1imn}, B_{2imn} $(i = 1 \div 4)$ получаем выражения, которые здесь приводятся только для коэффициентов f_{1mn}. Остальные ввиду их громоздкости не приводятся.

$$f_{1mn}(\varphi) = -D_{mn}\left[d^{-}_{mn}(\varphi) - 1\right]a_{mn}(\varphi)l^{-}_{mn}(\varphi),\ f_{3mn}(\varphi) = -f_{1mn}(-\varphi)$$

$$f_{2mn}(\varphi) = D_{mn}\left[d^{+}_{mn}(\varphi) - 1\right]a_{mn}(\varphi)l^{+}_{mn}(\varphi),\ f_{4mn}(\varphi) = -f_{2mn}(-\varphi)$$

$$d^{\pm}_{mn}(\varphi) = \frac{J\rho}{k^2 Gh}\left[\omega \pm a_{mn}(\varphi)\nu\right]^2$$

$$D_{mn} = \frac{4q\alpha_{mn}}{abmn\pi^2}\left\{\begin{array}{l}\left[(c_1 - b)\cos m\pi - c_1\right](1 - \cos n\pi)\cos\varphi + \\ + \left[(c_2 - a)\cos n\pi - c_2\right](1 - \cos m\pi)\sin\varphi\end{array}\right\}\sin\frac{m\pi c_1}{b}\sin\frac{n\pi c_2}{a}$$

$$l^{\pm}_{mn}(\varphi) = \left\{k^2_{mn} - \beta_{mn}\left[\omega \pm a_{mn}(\varphi)\nu\right]^2 + c\left[\omega \pm a_{mn}(\varphi)\nu\right]^4\right\}^{-1}$$

Вынужденные колебания при $t < 2(j+1)d/\nu$ можно получить с помощью формулы (7), заменив j и ν на $-(j+1)$ и $-\nu$.

Новые резонансные частоты w_2 определяются из условий $\left[l^{\pm}_{mn}(\pm\varphi)\right]^{-1} = 0$ и имеют вид

$$\omega_{mni} = \pm\gamma_{mni} \pm a_{mni}(\pm\varphi)\nu \qquad (i = 1,2)$$

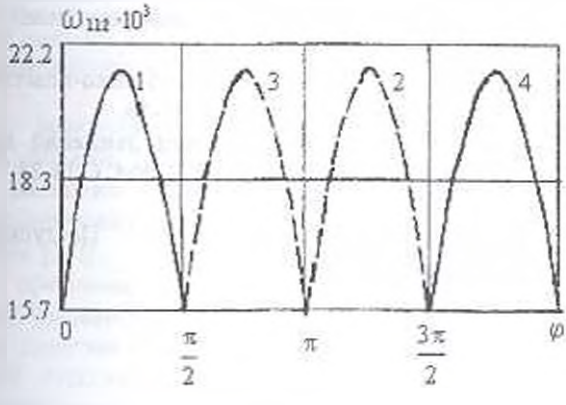
$$\gamma_{mni} = (2c)^{-1/2}\sqrt{\beta_{mn} + (-1)^{i-1}\sqrt{\beta^2_{mn} - 4ck^2_{mn}}}$$

Чтобы вращательное движение пластинки и полученные резонансные частоты были совместимы, необходимы тригонометрические функции, описывающие указанные частоты по величине и по знаку, соответствовали направляющим косинусам (изменения параметра φ в каждой четверти), направления вращения пластинки.

Рассмотрим в качестве конкретного примера пластинку со следующими параметрами.

a=100 см, b=100 см, c_1=30 см, c_2=20 см, ν=0.3, E=2×10^6 Кг/см^2, ρ=7.8×10^{-3} Кг/см^3, h=0,25 см, q=8 Кг, ω=10 с$^{-1}$.

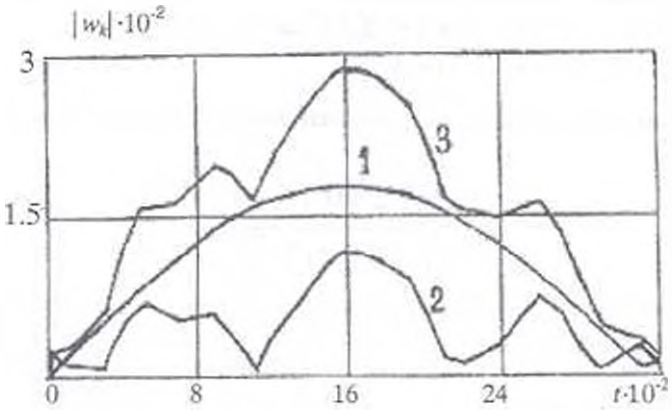
На фиг.1 показана зависимость резонансных частот ω_{112} от параметра φ. Сплошными линиями показаны кривые 1, 4, соответствующие резонансным частотам ω_{112} при $\omega_{112} = \gamma_{112} + a_{11}(\pm\varphi)\nu$. Штриховыми линиями показаны кривые 2, 3, соответствующие ω_{112} при $\omega_{112} = \gamma_{112} - a_{11}(\pm\varphi)\nu$.



Фиг 1

Видно, что с увеличением параметра φ, значение ω_{112} сначала возрастая достигает своего максимального значения, а затем начинает убывать.

Наибольшей величины ω_{112} достигает при значениях $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$. Для $\omega_{112} = -\gamma_{112} \pm a_{11}(\pm\varphi)\nu$ получаются аналогичные графики, а для случая $\omega_{111} = \pm\gamma_{111} \pm a_{11}(\pm\varphi)\nu$ получаются большие значения. На фиг. 2 приведены численные расчеты для двух типов вынужденных колебаний пластинки в зависимости от времени при $x_1 = \frac{b}{2}$, $x_2 = \frac{a}{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a-2c_2}{b-2c_1}$.



Фиг. 2

Кривые 1, 2 представляют прогибы $|w_1|$ и $|w_2|$, рассчитанные, соответственно, по формулам (3) и (7). Кривая 3 представляет $|w_3| = |w_1 + w_2|$. Видно, что значения прогиба $|w_3|$ больше $|w_1|$, $|w_2|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мкртчян К. Ш. О двойственном характере поперечных колебаний упругого стержня // ПММ. 1999. Т.63. №6. С.1055-1058.
2. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. Киев: Наукова думка, 1989. 204с.
3. Никитин Л. В. Распространение поперечных упруго-вязко-пластических волн в балках и пластинах.// Инж. Сборник. 1960. Т.30. С.31-46.
4. Гукасян А. А., Саркисян С. В. О колебательном движении прямоугольной пластинки // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т.43. №4. С.13-23.

Институт Геофизики и инженерной сейсмологии имени акад. А. Г. Назарова НАН Армении

Поступила в редакцию 22.04.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПО НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Мутафян М.Н., Саркисян С.О.

Մ. Ն. Մութաֆյան, Ս. Հ. Սարգսյան
Բարակ ուղղանկյան համար առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծումները

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյուն բարակ տիրույթի համար, երբ ուղղանկյան երկայնական կողմերի վրա տրված են ուժային և մոմենտային լարումների թենզորների համապատասխան բաղադրիչները, իսկ ուղղահայաց եզրային կողմերի վրա տրված են առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հարթ խնդրի եզրային պայմաններից որևէ մի տարբերակ: Կառուցվում է ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, որը տարբեր ասիմպտոտիկ մոտավորություններում բերվում է առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության կիրառական միաչափ տեսության (ձողերի տեսության): Կառուցվում է նաև սահմանային շերտի տիպի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, ուսումնասիրվում է այդ վերլուծության հատկությունները: Ցույց է տրվում, որ գոյություն ունեն երկու տիպի սահմանային շերտեր (ուժային և մոմենտային): Կառուցված են սահմանային շերտի տիպի ֆունկցիաները և ցույց է տրված նրանց քննարկված օրինաչափությունը: Ուսումնասիրվում է ներքին և սահմանային շերտի ասիմպտոտիկ վերլուծությունների համակցման խնդիրը, որի արդյունքում ուղղանկյան ուղղահայաց եզրերի վրա տրված առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հարթ խնդրի եզրային պայմանները վերաբաշխվում են ներքին և սահմանային շերտի տիպի խնդիրների միջև և, այդ պատճառով, ներքին և սահմանային շերտերի տիպի խնդիրները առանձնանում են միմյանցից որպես ինքնուրույն եզրային խնդիրներ:

M.N. Moutafyan, S.H. Sargsyan
Asimptotic solutions of boundary problems of thin rectangle by the asymmetrical theory of elasticity

Рассматривается задача плоской несимметричной теории упругости для области тонкого прямоугольника, когда на продольных сторонах заданы соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений, а на перпендикулярных граничных кромках один из вариантов граничных условий плоской задачи несимметричной теории упругости.

Построено внутреннее разложение, которое при различных приближениях приводится к прикладной одномерной теории по несимметричной теории упругости (теория стержней). Построено также асимптотическое разложение типа погранслоя и исследуются свойства этого разложения. Показывается, что существуют два типа погранслоя (силовой и моментный). Построены функции типа погранслоев. Исследуется задача сопряжения внутренней задачи и пограничных слоев, при котором граничные условия плоской задачи несимметричной теории упругости на граничных кромках прямоугольника расщепляются между внутренней задачей и задачами погранслоев, в результате которого внутренняя задача и задачи погранслоев отделяются друг от друга как самостоятельные граничные задачи.

Наряду с различными известными подходами к построению классической модели сплошной среды в последние десятилетия интенсивное развитие получили новые, неклассические подходы к описанию механических процессов, особенно в твердых телах сложной микроструктуры [1-3].

Актуальна проблема построения таких математических моделей микрополярной (моментной, несимметричной) теории упругости для тонких стержней, пластин и оболочек [1], которые могли бы с достаточной математической строгостью адекватно отражать физическую сущность соответствующих двумерных или трехмерных граничных задач, и которые были бы приемлемы для их вычислительной реализации.

В математической физике и его приложениях асимптотические методы получают в последнее время все более широкие и разнообразные применения. Особенно естественным является использование таких подходов в теории тонких стержней, пластин и оболочек [4,5], так как последние представляют собой тонкое деформируемое тело и малый параметр (относительная толщина) в сущности входит в определение самих объектов исследования.

В работах [6,7] асимптотический метод применен для анализа напряженно-деформированного состояния упругого изотропного и ортотропного прямоугольника по классической теории упругости.

В работе [8] на основе асимптотического метода изучена задача определения напряженно-деформированного состояния микрополярной упругой тонкой пластинки.

В данной работе, используя отдельные результаты, полученные в работах [9-11], изучается задача построения общей асимптотической теории изгиба и растяжения-сжатия микрополярного упругого тонкого прямоугольника.

1. Рассмотрим упругий прямоугольник длиной a, высотой $2h$: $S = \{(x_1, x_2): x_1 \in [0, a], |x_2| \le h;\ 2h << a,\ \delta = h/a$ – малый геометрический параметр$\}$. Будем исходить из уравнений плоской задачи несимметричной теории упругости [2,3,12-14], которые составляют следующую группу уравнений.

Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \qquad \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Физические соотношения

$$\gamma_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}),\ \gamma_{12} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} = \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21},\ \chi_{13} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13}\ (1 \leftrightarrow 2) \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\ (1 \leftrightarrow 2),\ \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3,\ \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3,\ \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\ (1 \leftrightarrow 2) \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_{ij}\ (ij: 11,22,12,21)$ и $\mu_{mn}\ (mn: 13,23)$ – компоненты тензоров силовых и моментных напряжений; $\gamma_{ij}\ (ij: 11,22,12,21)$ – компоненты несимметрического тензора деформаций; $\chi_{mn}\ (mn: 13,23)$ – компоненты тензора изгиба-кручения; (u_1, u_2) – компоненты вектора перемещения точек прямоугольника относительно осей x_1, x_2; ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника относительно оси x_3;

$E,\ \upsilon,\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)},\ \alpha,\ \gamma,\ \varepsilon$ – упругие константы материала пластинки.

На продольных сторонах прямоугольника $(x_2 = \pm h)$ считаем заданными значения силовых и моментных напряжений по НТУ:

$$\sigma_{21} = \pm X^{\pm}(x_1), \quad \sigma_{22} = \pm Y^{\pm}(x_1), \quad \mu_{23} = \pm M^{\pm}(x_1) \text{ на } x_2 = \pm h \qquad (1.4)$$

и на торцах $x_1 = 0,\ a$ – одна из комбинаций следующих типов граничных условий НТУ:

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \quad \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \text{ (задача 1)} \qquad (1.5_1)$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad u_2 = \varphi_2(x_2), \quad \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \text{ (задача 2)} \qquad (1.5_2)$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \quad \omega_3 = \varphi_3(x_2) \text{ (задача 3)} \qquad (1.5_3)$$

Функционал общего вариационного принципа плоской задачи НТУ для прямоугольной области имеет вид [12]:

$$I = \int_S \left\{ W(\gamma_{ij}, \chi_{i3}) - \sigma_{ij}\left[\gamma_{ij} - (\nabla_i u_j - \vartheta_{3ij}\cdot\omega_3)\right] - \mu_{i3}\left[\chi_{i3} - \nabla_i \omega_3\right] \right\} dS -$$

$$- \int_{a^-} (p_i^- u_i + m_3^- \omega_3) da^- - \int_{a^+} (p_i^+ u_i + m_3^+ \omega_3) da^+ -$$

$$- \int_{\Sigma_1} (p_{\sigma i} u_i + m_{\sigma 3}\omega_3) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} (p_{\sigma i}(u_i - u_{\sigma i}) + m_3(\omega_3 - \omega_{\sigma 3})) d\Sigma$$

Вариационное уравнение ($\delta I = 0$) содержит в качестве уравнений Эйлера и естественных граничных условий определяющие уравнения и граничные условия (1.1) – (1.5) плоской задачи НТУ для прямоугольной области.

Возможны и другие варианты граничных условий на торцах прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_2 = a$, которым будет посвящена отдельная работа.

Во всех случаях считаем обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела.

Решение поставленной плоской краевой задачи НТУ (1.1)-(1.5) для прямоугольной области складывается из суммы решений симметричной по x_2 и обратно-симметричной задач (в симметричной задаче четные по x_2 величины будут $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{23}$, а нечетные – $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \mu_{13}, \omega_3$; в обратно-симметричной задаче – наоборот).

В двумерных уравнениях НТУ (1.1)-(1.3) перейдем к безразмерной системе координат

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \qquad \zeta = \frac{x_2}{h} \qquad (1.6)$$

после которого, из системы (1.1)-(1.3) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром δ.

Придерживаясь основополагающего принципа асимптотической теории интегрирования сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений, в основу рассуждений положим свойство напряженно-деформированного состояния (НДС), испытывающего статическое воздействие, выражаемое структурной формулой:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}} \qquad (1.7)$$

В этом равенстве нижними индексами отмечены полное, внутреннее (проникающее) и краевое НДС тонкого прямоугольника по НТУ. Последнее возникает вблизи боковых граней прямоугольника ($x = 0,\ x = a$) и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от них в глубь двумерной области. Концепция разчленения НДС тонкого

прямоугольника на внутреннее (ВНДС) и краевое (КНДС) и факт коренного различия между их свойствами (как физического, так и математического характера) будет приводить к их раздельному исследованию. С этой точки зрения, основным предметом изучения будет вопрос о приближенных методах внутреннего расчета (определение ВНДС по НТУ) и краевого расчета (определение КНДС по НТУ). Оба метода строятся на базе асимптотического интегрирования двумерных линейных уравнений (1.1)-(1.3) статической задачи НТУ.

2. Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения:

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \cdot Q^{(s)} \qquad (2.1)$$

где Q – любое из напряжений (силовых и моментных), безразмерных перемещений – $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ или поворот – ω_3; $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 0$; S – число приближений; q – натуральное число, которое различно для различных величин [9]:

Для симметричной по ξ задачи: $q = 2$ для $\sigma_{11}, u_1, \mu_{23}$; $q = 1$ для $\sigma_{21}, \sigma_{12}, u_2, \mu_{13}, \omega_3$; $q = 0$ для σ_{22};

Для обратно-симметричной по ξ задачи: $q = 1$ для $\sigma_{21}, \sigma_{12}, u_2, \mu_{13}, \omega_3$; $q = 0$ для $\sigma_{11}, \sigma_{22}, u_1, \mu_{23}$.

Специфические свойства внутреннего итерационного процесса для тонкого прямоугольника состоит в следующем:

а) так как полученная в асимптотических приближениях система уравнений плоской задачи НТУ допускает интегрирование по переменной ξ, то в результате получается, что ВНДС изменяется по толщине пластинки по весьма простому закону;

б) в описании ВНДС остается выяснить роль переменного ξ, задающего положение точки на средней линии прямоугольника.

С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентных усилий, моментов и гипермоментов.

Для задачи изгиба прямоугольника по НТУ (обратно-симметричная по x_2 задача) этими понятиями будут усилия N_{12}, N_{21}, моменты L_{13}, M_{11}, M_{22} и гипермомент Λ_{23}:

$$N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_2 \ (1 \to 2), \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dx_2$$
$$M_{11} = \int_{-h}^{h} x_2 \sigma_{11} dx_2 \ (1 \to 2), \quad \Lambda_{23} = \int_{-h}^{h} x_2 \mu_{23} dx_2 \qquad (2.2)$$

Для задачи растяжения-сжатия прямоугольника по НТУ (симметричная по x_2 задача), осредненные по толщине прямоугольника силовые и моментные характеристики, будут: усилия T_{11}, T_{22}, моменты L_{23}, M_{12}, M_{21} и гипермомент Λ_{13}:

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dx_2 \ (1 \to 2), \quad L_{23} = \int_{-h}^{h} \mu_{23} dx_2$$

$$M_{12} = \int_{-h}^{h} x_2 \sigma_{12} dx_2 \ (1 \leftrightarrow 2), \ \Lambda_{13} = \int_{-h}^{h} x_2 \mu_{13} dx_2 \tag{2.3}$$

Основная разрешающая система уравнений для ВНДС по НТУ для задачи изгиба прямоугольника на уровне асимптотического приближения s получается относительно величин $N_{12}^{0(s)}, N_{21}^{0(s)}, L_{13}^{0(s)}, k_{13}^{0(s)}, \Gamma_{12}^{0(s)}, w^{0(s)}, \Omega^{0(s)}$ и выражается так:

Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{12}^{(s)}}{dx_1} = -\left(Y^{s} + Y^{s} \right) \\ \dfrac{dL_{13}^{(s)}}{dx_1} + N_{12}^{(s)} - N_{21}^{(s)} = -\left(M^{s} + M^{s} \right) \end{cases} \tag{2.4}$$

Соотношения упругости

$$N_{12}^{2m(s)} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left| (\mu + \alpha) \cdot \Gamma_{12}^{2m(s)} + (\mu - \alpha) \cdot \Gamma_{21}^{2m(s)} \right| \ (1 \leftrightarrow 2)$$

$$L_{13}^{2m(s)} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \cdot \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \cdot k_{13}^{2m(s)} \tag{2.5}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{12}^{2m(s)} = \frac{d\, w^{2m(s)}}{dx_1} - \Omega^{2m(s)}, \ k_{13}^{2m(s)} = \frac{d\, \Omega^{2m(s)}}{dx_1} \tag{2.6}$$

Здесь, начиная с приближения $s = 2$ и для $m = 1, 2, ..., [s/2]$, имеют место следующие соотношения:

$$w^{2m(s)} = \frac{2m+1}{4mE\, h^{2m+1}} \left| M_{22}^{2m-1(s-2)} - \upsilon \cdot M_{11}^{2m-1(s-2)} \right|, \quad \Omega^{2m(s)} = \frac{2m+1}{4mh^{2m+1}} \cdot \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma \cdot \varepsilon} \cdot \Lambda_{23}^{2m-1(s-2)}.$$

Здесь следует иметь в виду также, что в уравнениях равновесия

$$P^{(s)} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} P^{2m(s)}$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} Y^{s} = Y^{s}, \ Y^{s} = 0 \text{ при } s \geq 1, \ M^{s} = M^{s}, \ M^{s} = 0 \text{ при } s \geq 1 \\ N_{21}^{(0)} = h\left(X^{+} - X^{-} \right), \ N_{21}^{(1)} = 0, \ N_{21}^{(s)} = \dfrac{dM_{11}^{(s-2)}}{dx_1} \text{ при } s \geq 2 \end{cases}$$

Остальные величины выражаются так:

$$M_{11}^{2m-1(s)} = \frac{2Eh^{2m+3}}{2m+3} \cdot K_{11}^{2m+1(s)} + \upsilon \cdot M_{22}^{2m-1(s)}, \quad K_{11}^{2m+1(s)} = \frac{d\, \beta^{2m-1(s)}}{dx_1}$$

$$\Gamma_{22}^{(0)} = \Gamma_{22}^{(1)} = 0, \quad {}^{2m-1(s)}\Gamma_{22} = 2m \cdot {}^{2m(s)}w \quad \text{при } s \geq 2,$$

$$k_{23}^{(0)} = k_{23}^{(1)} = 0, \quad {}^{2m-1(s)}k_{23} = 2m \cdot {}^{2m(s)}\Omega \quad \text{при } s \geq 2.$$

$${}^{2m+1(s)}\beta = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left(\frac{\mu+\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot {}^{2m(s)}N_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot {}^{2m(s)}N_{12}\right) - \frac{1}{2m+1}{}^{2m(s)}\Omega$$

$${}^{2m+1(s)}M_{22} = -\frac{2h^{2m+3}}{(2m+3)(2m+1)}\cdot\left[(\mu+\alpha)\cdot\frac{d\,{}^{2m(s)}\Gamma_{12}}{dx_1} + (\mu-\alpha)\cdot\frac{d\,{}^{2m(s)}\Gamma_{21}}{dx_1}\right] \quad \text{при } s \geq 2$$

$$M_{22}^{(0)} = \frac{1}{3}\cdot h^2\left(Y^+ + Y^-\right), \quad M_{22}^{(1)} = 0$$

$${}^{2m+1(s)}\Lambda_{23} = -\frac{2h^{2m+3}}{(2m+3)(2m+1)}\cdot\left[\frac{4\gamma\cdot\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{d\,{}^{2m(s)}k_{13}}{dx_1} + 2\alpha\left({}^{2m(s)}\Gamma_{12} - {}^{2m(s)}\Gamma_{21}\right)\right] \quad \text{при } s \geq 2$$

$$\Lambda_{23}^{(0)} = \frac{1}{3}\cdot h^2\left(M^+ + M^-\right), \quad \Lambda_{23}^{(1)} = 0$$

Основная разрешающая система ВНДС по НТУ для задачи растяжения-сжатия будет выражаться так (система уравнений относительно величин ${}^{0(s)}T_{11}, {}^{0(s)}\Gamma_{11}, {}^{0(s)}u$):

Уравнения равновесия

$$\frac{d\,{}^{(s)}T_{11}}{dx_1} = -\left(X^+ + X^-\right) \tag{2.7}$$

Соотношения упругости

$${}^{2m(s)}\Gamma_{11} = \frac{2m+1}{2E\,h^{2m-1}}\left({}^{2m(s)}T_{11} - \upsilon\cdot {}^{2m(s-2)}T_{22}\right) \tag{2.8}$$

Геометрические соотношения

$${}^{2m(s)}\Gamma_{11} = \frac{d\,{}^{2m(s)}u}{dx_1} \tag{2.9}$$

Здесь, начиная с приближения $s = 2$ и для $m = 1, 2, \ldots, [s/2]$, имеет место следующее соотношение:

$${}^{2m(s)}u = \frac{1}{2m}\cdot\frac{2m+1}{2h^{2m-1}}\left(\frac{\mu+\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot {}^{2m-1(s-2)}M_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot {}^{2m-1(s-2)}M_{12}\right) - \frac{1}{2m}{}^{2m-(s-2)}O$$

В уравнении равновесия (2.7) нужно иметь в виду, что

$$X^+ = X^+, \quad X^- = 0 \text{ при } s \geq 1 \text{ , а также } P^{(s)} = \sum_{m=0}^{[s/2]_{2m}(s)} P$$

Остальные величины выражаются так:

$$\overset{2m+1}{O}{}^{(s)} = \frac{1}{2h^{2m+1}} \cdot \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\cdot\varepsilon} \cdot \overset{2m}{L}{}_{23}^{(s)}$$

$$\overset{2m}{L}{}_{23}^{(s)} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{d\ \overset{2m-1}{\Lambda}{}_{13}^{(s-2)}}{dx_1} + \overset{2m+1}{M}{}_{12}^{(s-2)} - \overset{2m-1}{M}{}_{21}^{(s-2)} \right) \quad \text{при } s \geq 2, m > 0,$$

$$L_{23}^{(0)} = h\left(M^{+} - M^{-}\right),\ L_{23}^{(1)} = 0$$

$$\overset{2m}{M}{}_{21}^{(s)} = -\frac{h^2}{(2m+3)} \cdot \frac{d\ \overset{2m}{T}{}_{11}^{(s)}}{dx_1} \quad \text{при } s \geq 2,\ M_{21}^{(0)} = \frac{1}{3}\cdot h^2\left(X^{+} + X^{-}\right),\quad M_{21}^{(1)} = 0$$

$$\overset{2m+1}{M}{}_{12}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3} \cdot \frac{4\mu\cdot\alpha}{\mu+\alpha} \cdot \overset{2m+1}{K}{}_{12}^{(s)} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} \cdot \overset{2m+1}{M}{}_{21}^{(s)}$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}_{13}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3} \cdot \frac{4\gamma\cdot\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \overset{2m+1}{t}{}_{13}^{(s)}?$$

$$T_{22}^{(s)} = \frac{dM_{12}^{(s)}}{dx_1} + h\cdot Y_1^{(s)},\ \text{где } Y_1^{(0)} = Y^{+} - Y^{-};\ Y_1^{(s)} = 0 \text{ при } s \geq 1$$

$$\overset{2m+2}{T}{}_{22}^{(s)} = -\frac{1}{2m+2} \cdot \frac{d\ \overset{2m+1}{M}{}_{12}^{(s)}}{dx_1},$$

$$\overset{2m}{\Gamma}{}_{22}^{(s)} = (2m+1)\ \overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)},\quad \overset{2m+1}{t}{}_{13}^{(s)} = \frac{d\ \overset{2m+1}{O}{}^{(s)}}{dx_1}$$

$$\overset{2m+2}{K}{}_{12}^{(s)} = \frac{d\ \overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}}{dx_1} - \overset{2m+1}{O}{}^{(s)},\quad \overset{2m}{k}{}_{23}^{(s)} = (2m+1)\cdot \overset{2m+1}{O}{}^{(s)}$$

$$\overset{2m+1}{K}{}_{21}^{(s)} = (2m+2)\ \overset{2m+2}{u}{}^{(s)} + \overset{2m+1}{O}{}^{(s)} \quad \text{при } m < [s/2],\ \text{а при } m = [s/2],\ \overset{2m+1}{K}{}_{21}^{(s)} = \overset{2m+1}{O}{}^{(s)}$$

$$\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)} = \frac{1}{2Eh^{2m+1}}\left(\overset{2m}{T}{}_{22}^{(s-2)} - \upsilon\cdot \overset{2m}{T}{}_{11}^{(s)} \right)$$

Следует отметить, что компоненты вектора перемещения и независимый поворот, компоненты тензоров силовых и моментных напряжений, деформаций и изгиба-кручения, как в задаче изгиба, так и в задаче растяжения-сжатия по НТУ, будут определяться по соответствующим формулам после решения основной разрешающей системы уравнений.

Отметим, что на основании определяющих уравнений (2.4)-(2.6) (для задачи изгиба) и (2.7)-(2.9) (для растяжения-сжатия) можно получить соответствующие прикладные (одномерные) теории по НТУ (теория стержней по НТУ).

3. Обратимся к изучению краевых упругих явлений по НТУ в тонком прямоугольнике. Краем прямоугольника, вблизи которого будем исследовать напряженное состояние типа погранслоя, пусть будет сторона прямоугольника $x_1 = 0$.

Введем в уравнения плоской задачи НТУ (1.1)-(1.3) преобразование растяжения $t = \xi/\delta, \zeta = x_2/h$. Вводим также безразмерные перемещения $(v_i = u_i/a,\ i = 1,2)$.

Решение вновь полученных уравнений отыщем в виде асимптотического разложения

$$R = \sum_{s=0}^{\lambda} \delta^{\chi s+s} \cdot R^{(s)} \tag{3.1}$$

где $R^{(s)}$ – любое из величин рассматриваемой задачи. Так как силовые и моментные неоднородные граничные условия (1.4), заданные на лицевых линиях прямоугольника $\zeta = \pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (3.1) должно удовлетворять однородным граничным условиям:

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = 0,\ \ \mu_{23} = 0 \ \text{ при } \ \zeta = \pm 1 \tag{3.2}$$

После подстановки (3.1) в преобразованную систему уравнений (1.1)-(1.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях, начиная с наинизшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно величин $R^{(s)}$, если

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{\lambda} \delta^{s} \sigma_{ij}^{(s)},\ \ (ij:11,22,12,21,) \ \ \mu_{i3} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \mu_{i3}^{(s)}\ (i=1,2) \\ v_i = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} v_i^{(s)},\ (i=1,2), \qquad \omega_3 = \delta^{\chi-1} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \omega_3^{(s)} \end{cases} \tag{3.3}$$

где целое число χ характеризует интенсивность погранслоя.

Эту систему уравнений можем представить в виде следующих двух групп уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}^{(s)}}{\partial t} + \dfrac{\partial \sigma_{21}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \dfrac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial t} + \dfrac{\partial \sigma_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \\ \dfrac{\partial v_1^{(s)}}{\partial t} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{11}^{(s)} - \upsilon \cdot \sigma_{22}^{(s)}\right), \quad \dfrac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{22}^{(s)} - \upsilon \cdot \sigma_{11}^{(s)}\right) \\ \dfrac{\partial v_2^{(s)}}{\partial t} = \dfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}^{(s)} - \dfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}^{(s)} + \omega_3^{(s-1)}, \quad \dfrac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \zeta} = \dfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}^{(s)} - \dfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}^{(s)} - \omega_3^{(s-1)} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mu_{13}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} = a\sigma_{21}^{(s-1)} - a \cdot \sigma_{12}^{(s-2)}, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial t} = -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon} a \cdot \mu_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon} a \cdot \mu_{23}^{(s)} \tag{3.5}$$

Отметим, что при любом s решение погранслойных уравнений (3.4), (3.5) обладает некоторыми важными свойствами:

$$\int_{-1}^{1} \sigma_{11}^{(s)}(t=0)d\zeta = 0\ \ (j=1,2), \quad \int_{-1}^{1} \mu_{13}^{(s)}(t=0)d\zeta = \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} \left(a\sigma_{12}^{(s-1)} - a\sigma_{21}^{(s-1)}\right)dt$$

$$\int_{-1}^{1} \zeta \sigma_{12}^{(s)}(t=0)d\zeta + \frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\int_{-1}^{1} v_2^{(s)}(t=0)d\zeta = -\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} \omega_3^{(s-1)} dt$$

$$\int_{-1}^{1}\omega_3^{(s)}(t=0)d\zeta = -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\cdot a\int_0^{\infty}tdt\int_{-1}^{1}\left(a\sigma_{12}^{(s-1)}-a\sigma_{21}^{(s-1)}\right)d\zeta,$$
$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{12}^{(s)}(t=0)d\zeta+\frac{E}{\nu}\int_{-1}^{1}v_1^{(s)}(t=0)d\zeta=0. \qquad (3.6)$$

При $s=0$ система уравнений как (3.4), так и (3.5), однородна, а при $s\geq 1$ неоднородна.

Система уравнений погранслоя (3.4), (3.5) (при $s=0$) распадается на две группы независимых однородных уравнений. Отметим, что в первую группу уравнений (3.4) будут входить величины $\sigma_{11}^{(0)},\sigma_{22}^{(0)},\sigma_{12}^{(0)},\sigma_{21}^{(0)},v_1^{(0)}v_2^{(0)}$ и поэтому ее назовем силовым погранслоем, а во вторую группу будут входить величины $\mu_{13}^{(0)},\mu_{23}^{(0)},\omega_3^{(0)}$, которую назовем моментным погранслоем. Факт существования силового и моментного погранслоев — одно из существенных проявлений погранслоя для тонкого прямоугольника по НТУ.

Для построения функций типа погранслоев рассмотрим (при $s=0$) системы уравнений силового (3.4) и моментного (3.5) погранслоев.

Каждая указанная система при этом однородна, независима и затухающее решение можем получить методом разделения переменных:

$$\overset{c}{R}_p^{(0)}=\sum_{(n)}e^{-\lambda_n t}\cdot\overset{c}{R}^{(0)}(\zeta)\quad (\text{с}\to\text{м}) \qquad (3.7)$$

где $\overset{c}{R}_p^{(0)}$ (с→м) — любое из силовых (моментных) напряжений, линейных перемещений или независимый поворот.

Решение силового погранслоя (при $s=0$) можем привести к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно перемещения $\overset{c}{v}_{2p}^{(0)}$:

$$\frac{d^4\overset{c}{v}_{2p}^{(0)}}{d\zeta^4}+2\lambda^2\cdot\frac{d^2\overset{c}{v}_{2p}^{(0)}}{d\zeta^2}+\lambda^4\cdot\overset{c}{v}_{2p}^{(0)}=0 \qquad (3.8)$$

к которому следует присоединить вытекающие из (3.2) граничные условия

$$\left(\overset{c}{v}_{2p}^{(0)\prime\prime\prime}+A\cdot\lambda_n^2\cdot\overset{c}{v}_{2p}^{(0)\prime}\right)_{\zeta=\pm1}=0,\quad\left(\overset{c}{v}_{2p}^{(0)\prime\prime}+B\cdot\lambda_n^2\cdot\overset{c}{v}_{2p}^{(0)}\right)_{\zeta=\pm1}=0 \qquad (3.9)$$

где A и B — некоторые постоянные, зависящие от упругих констант материала прямоугольника.

Решение моментного погранслоя (при $s=0$) аналогичным образом приводится к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно $\overset{\text{м}}{\omega}_{3p}^{(0)}$:

$$\frac{d^2\overset{\text{м}}{\omega}_{3p}^{(0)}}{d\zeta^2}+\lambda^2\cdot\overset{\text{м}}{\omega}_{3p}^{(0)}=0,\quad\left.\frac{d\overset{\text{м}}{\omega}_{3p}^{(0)}}{d\zeta}\right|_{\zeta=\pm1}=0 \qquad (3.10)$$

Общее решение краевых задач (3.8)-(3.9) или (3.10) можем представить соответственно в виде рядов ($A_n^{(0)}, B_n^{(0)}$ – произволы соответствующих погранслоев)

$$v_2^{c(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(0)} \cdot F_n, \qquad \omega_3^{M(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(0)} \cdot \varphi_n \tag{3.11}$$

где F_n и φ_n – собственные функции соответствующих краевых задач.
Здесь для симметричной по ζ задачи:

$$F_n(\lambda_n,\zeta) = -\left(\operatorname{ctg}\lambda_n - \frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{b_1}{b_2}\right)\cdot\sin\lambda_n\zeta + \zeta\cdot\cos\lambda_n\zeta$$

λ_n – корень уравнения ($\operatorname{Re}\lambda_n > 0$)

$$k\cdot\sin 2\lambda + 2\lambda = 0, \quad k = 1 - \frac{4\alpha}{\alpha(1-\upsilon)-\mu(1+\upsilon)}, \quad \varphi_n(\lambda_n,\zeta) = \sin\lambda_n\zeta$$

λ_n – корень уравнения

$$\cos\lambda_n = 0, \quad \text{т.е.}\ \lambda_n = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Для антисимметричной по ζ задачи

$$F_n(\lambda_n,\zeta) = -\left(\operatorname{tg}\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{b_1}{b_2}\right)\cdot\cos\lambda_n\zeta + \zeta\cdot\sin\lambda_n\zeta$$

λ_n – корень уравнения ($\operatorname{Re}\lambda_n > 0$)

$$k\cdot\sin 2\lambda - 2\lambda = 0, \quad \varphi_n(\lambda_n,\zeta) = \cos\lambda_n\zeta$$

λ_n – корень уравнения

$$\sin\lambda_n = 0, \quad \text{т.е.}\ \lambda_n = \pi n \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Для силового погранслоя

$$v_2^{p(s)} = \sum_{(n)} A_n^{p(s)} \tilde{v}_{2n}^{p} e^{-\lambda_n\zeta}, \quad v_1^{p(s)} = \sum_{(n)} A_n^{p(s)} \tilde{v}_{1n}^{p} e^{-\lambda_n\zeta}, \quad \sigma_{11}^{p(s)} = \sum_{(n)} A_n^{p(s)} \tilde{\sigma}_{11n}^{p} e^{-\lambda_n\zeta}$$

$$\sigma_{22}^{p(s)} = \sum_{(n)} A_n^{p(s)} \tilde{\sigma}_{22n}^{p} e^{-\lambda_n\zeta}, \quad \sigma_{12}^{p(s)} = \sum_{(n)} A_n^{p(s)} \tilde{\sigma}_{12n}^{p} e^{-\lambda_n\zeta}, \quad \sigma_{21}^{p(s)} = \sum_{(n)} A_n^{p(s)} \tilde{\sigma}_{21n}^{p} e^{-\lambda_n\zeta}$$

где

$$\tilde{v}_{2n}^{p} = F(\zeta,\lambda_n); \qquad \tilde{v}_{1n}^{p} = \frac{1}{\lambda_n}a_1\cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n^3}a_2\cdot F_n''$$

$$\tilde{\sigma}_{12n}^{p} = \lambda_n b_1\cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n}b_2\cdot F_n''; \quad \tilde{\sigma}_{21n}^{p} = \lambda_n c_1\cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n}c_2\cdot F_n''$$

$$\tilde{\sigma}_{11n}^{p} = d_1\cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n^2}d_2\cdot F_n''; \qquad \tilde{\sigma}_{22n}^{p} = e_1\cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n^2}e_2\cdot F_n''$$

Отметим, что a_i, b_i, c_i, d_i, e_i $(i = 1,2)$ из себя представляют постоянные, которые выражаются соответствующими формулами через упругие константы материала пластинки.
Для моментного погранслоя:

$$\mu_{13}^{p(s)} = \sum_{(\lambda_n)} B_n^{p(s)} \tilde{\omega}_{13n}^{p} e^{-\lambda_n \rho}, \quad \mu_{23}^{p(s)} = \sum_{(\lambda_n)} B_n^{p(s)} \tilde{\mu}_{23n}^{p} e^{-\lambda_n \rho}$$

где

$$\tilde{\omega}_{13n}^{p} = \varphi_n(\zeta, \lambda_n), \quad \tilde{\mu}_{13n}^{p} = -\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \frac{1}{a} \cdot \varphi_n, \quad \tilde{\mu}_{23n}^{p} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \frac{1}{a} \cdot \varphi_n'$$

Можем показать, что решение типа погранслоя (для силового погранслоя) удовлетворяет следующему условию типа обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} \left(\sigma_{11m}^{(0)} \cdot v_{1n}^{(0)} - \sigma_{12m}^{(0)} \cdot v_{2m}^{(0)} \right) d\zeta = 0 \quad (m \neq n) \tag{3.12}$$

Соотношение обобщенной ортогональности (3.12) при некоторых граничных условиях (1.5) могут играть важную роль при определении произволов силового погранслоя (в первой формуле (3.11)) при сращивании асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоев.

При $s \geq 1$ системы уравнений двух погранслоев (силового и моментного) становятся неоднородными (с известными из предыдущих приближений правыми частями). В зависимости от природы правых частей, каждый погранслой проявляется в двух качествах: в основном и конкурирующем.

Структура общего решения для задачи каждого из двух типов погранслоев (при $s \geq 1$) можем представить в виде следующего равенства:

$$R_p^{c(s)} = \sum_{(\lambda_n)} A_n^{(s)} \cdot R_{pn}^{c(s)}(\zeta) \cdot e^{-\lambda_n \rho} + \tilde{R}_p^{c(s)} \quad (c \to м,\ A_n \to B_n) \tag{3.13}$$

где $A_n^{(s)}(B_n^{(s)})$ – произволы погранслоя, λ_n – собственные числа соответствующего погранслоя при $s = 0$; $\tilde{R}_p^{c(s)}$ – частное решение соответствующей неоднородной системы, удовлетворяющее условиям (3.2).

Таким образом, мы построили два типа решений – решение внутренней задачи и решения для пограничных слоев. Их сумма

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \tag{3.14}$$

является асимптотическим решением исходной сингулярно-возмущенной краевой задачи плоской НТУ для прямоугольной области. Здесь Q – решение внутренней задачи, $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$ – решения погранслоев, построенные соответственно вблизи $x_1 = 0$ и $x_1 = a$.

Таким образом, проблему раздельного построения дифференциальных уравнений внутренней задачи и погранслоя для тонкого прямоугольника по НТУ считаем решенной и на основе структурной формулы (1.7) выражение (3.14) будет представлять общее решение поставленной краевой задачи НТУ (1.1)-(1.5).

Перейдем теперь к изучению проблемы разделения двумерных граничных условий НТУ на граничных кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$, в рамках которого необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия на каждом уровне асимптотического приближения надо приписывать к внутренним и какие к пограничным

дифференциальным уравнениям.

Чтобы осуществить задачу сращивания решения внутренней задачи с решениями обоих типов погранслоев, нам следует конкретизировать заданные на кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ двумерные граничные условия НТУ. Рассмотрим некоторые варианты граничных условий НТУ (1.5_1) -(1.5_3).

4. Рассмотрим первую граничную задачу НТУ. Подставляя (3.14) в $(1.5)_1$ и учитывая (2.1), (3.1), а также то, что при $x_1 = 0$ проявляет себя только $R_p^{(1)}$, (т. е. продольный размер a прямоугольника таков, что влиянием погранслоя $R_p^{(2)}$ на этом торце можем пренебречь) в результате получим непротиворечивый итерационный процесс, если для задачи растяжения-сжатия $\chi = -2$ и $\chi = -1$ – для задачи изгиба. Далее рассмотрим задачу изгиба. Таким образом, для задачи изгиба получим следующие граничные условия в итерациях (на $t = 0$):

$$\begin{cases} \overset{(s-1)}{\sigma_{11}} + \overset{(s)}{\sigma_{11}^{p}} = \overset{(s-1)}{\tilde{\varphi}_1} \\ \overset{(s)}{\sigma_{12}} + \overset{(s)}{\sigma_{12}^{p}} = \overset{(s)}{\tilde{\varphi}_2} \\ \overset{(s)}{\mu_{13}} + \overset{(s)}{\mu_{13}^{p}} = \overset{(s)}{\tilde{\varphi}_3} \end{cases} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta^{-2}\tilde{\varphi}_1 \ , \varphi_2 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_2, \varphi_3 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_3 \\ \overset{(1)}{\tilde{\varphi}_i} = \tilde{\varphi}_i, \ \overset{(s)}{\tilde{\varphi}_i} = 0 \text{ при } s \geq 1 \ \ (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

При изучении проблемы сращивания асимптотических разложений внутренней задачи и задач погранслоев (при $s = 0$) неоценимую роль играют так называемые условия разделимости двумерных краевых условий между ВНДС и КНДС для прямоугольной области. Такие условия можем получить на основании свойств (3.6) погранслойного решения.

Если применить (3.6) (при $s = 0$) к граничным условиям (4.1), то легко убедиться, что краевые условия (1.5) расщепляются между ВНДС и КНДС. Это означает, что внутренняя задача изгиба прямоугольника по НТУ со своими уравнениями и граничными условиями отделится как самостоятельная граничная задача, которая будет выражаться следующим образом:

Уравнение равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{d\overset{0}{N}_{12}^{(0)}}{dx_1} = -\left(Y^+ + Y^-\right), \ \dfrac{d\overset{0}{L}_{13}^{(0)}}{dx_1} + \overset{0}{N}_{12}^{(0)} - \overset{0}{N}_{21}^{(0)} = -\left(M^+ + M^-\right) \end{cases} \tag{4.2}$$

Физические соотношения

$$\begin{cases} \overset{0}{N}_{12}^{(0)} = 2h\left|(\mu+\alpha)\overset{0}{\Gamma}_{12}^{(0)} + (\mu-\alpha)\overset{0}{\Gamma}_{21}^{(0)}\right| (1 \to 2), \ \overset{0}{L}_{13}^{(0)} = 2h \cdot \frac{4\gamma \cdot \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \overset{0}{k}_{13}^{(0)} \cdot \overset{0}{N}_{21}^{(0)} = h\left(X^+ - X^-\right) \end{cases} \tag{4.3}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{cases} \overset{0}{\Gamma}{}^{(0)}_{12} = \dfrac{d\overset{0}{w}{}^{(0)}(x_1)}{dx_1} + \overset{0}{\Omega}{}^{(0)}(x_1) \\ \overset{0}{\chi}{}^{(0)}_{13} = \dfrac{d\overset{0}{\Omega}{}^{(0)}(x_1)}{dx_1} \end{cases} \tag{4.4}$$

Граничные условия

$$\overset{0}{N}{}^{(0)}_{12}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2 \cdot dx_2, \qquad \overset{0}{L}{}^{(0)}_{13}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3 \cdot dx_2 \tag{4.5}$$

После решения основной краевой задачи ВНДС все расчетные величины поставленной плоской задачи (1.1)-(1.5) НТУ для прямоугольника определяются по соответствующим формулам.

Краевая задача (4.2)-(4.5) представляет собой прикладную (одномерную) теорию изгиба (для стержней) по НТУ.

Для КНДС прямоугольника по НТУ получим следующие граничные задачи:

для силового погранслоя:

$$\begin{cases} L_1\left(\overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}, \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{22}, \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{12}, \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{21}, \overset{p}{v}{}^{(0)}_{1}, \overset{p}{v}{}^{(0)}_{2}\right) = 0 \\ \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}\Big|_{t=0} = 0, \quad \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{12}\Big|_{t=0} = f_2(\zeta), \quad \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{21}\Big|_{\zeta=\pm 1} = \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{22}\Big|_{\zeta=\pm 1} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

для моментного погранслоя:

$$\begin{cases} L_2\left(\overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{13}, \overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{23}, \overset{p}{\omega}{}^{(0)}_{3}\right) = 0, \\ \overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{13}\Big|_{t=0} = \Psi(\zeta), \quad \overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{23}\Big|_{\zeta=\pm 1} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

где

$$f_2(\zeta) = \tilde{\Phi}_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_2 \cdot d\zeta, \quad \Psi(\zeta) = \tilde{\Phi}_3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_3 \cdot d\zeta \tag{4.8}$$

Здесь L_1, L_2 представляют собой дифференциальные операторы соответственно для силового (3.4) и моментного (3.5) погранслоев.

Важно здесь отметить следующее. Так как из (4.6) имеем

$$\overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}\Big|_{t=0} = 0$$

то это одновременно означает, что

$$\int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}(t=0)d\zeta = 0$$

и следовательно, из (3.6) (при $s=0$) будет вытекать следующее равенство:

$$\int_{-1}^{1} \overset{p}{v}{}^{(0)}_{2}(t=0)d\zeta = 0 \tag{4.9}$$

Погранслой вблизи противоположного торца $x_1 = a$ можем строить аналогичным образом. Данные для этого погранслоя получим из приведенного выше ($x_1 = 0$) формальной заменой t на $t_1 = \dfrac{a - x_1}{h}$.

При изучении КНДС пластинки при задаче изгиба прямоугольника по НТУ в исходном ($s = 0$) асимптотическом приближении имеем общее решение каждого из двух типов погранслоев (соответствующие формулы (3.11)) и, фактически, решение каждого из указанных погранслоев сводится к определению произволов погранслоев.

Отметим, что для определения произволов погранслоев $A_n^{(0)}$ и $B_n^{(0)}$ $(n = 1,2,...)$ можем использовать вариационный подход. Для этого следует обратиться к вариационной постановке рассматриваемой плоской задачи НТУ для прямоугольной области. Функционал плоской задачи НТУ имеет вид (1.6). На этой основе составим вариационное уравнение рассматриваемой задачи, подставим туда все величины соответственно внутренней задачи и погранслоев при $s = 0$. Вариационное уравнение плоской задачи НТУ для прямоугольника будет почти полностью удовлетворяться тождественно и, в окончательном итоге, превращаться в вариационное соотношение на граничных кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$:

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{вн}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1\right)\delta\overset{p}{v}_1+\left(\overset{вн}{\sigma}_{12}+\overset{p}{\sigma}_{12}-\varphi_2\right)\delta\overset{p}{v}_2+\left(\overset{вн}{\mu}_{13}+\overset{p}{\mu}_{13}-\varphi_3\right)\delta\overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=0} dl + \quad (4.10)$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{вн}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1\right)\delta\overset{p}{v}_1+\left(\overset{вн}{\sigma}_{12}+\overset{p}{\sigma}_{12}-\varphi_2\right)\delta\overset{p}{v}_2+\left(\overset{вн}{\mu}_{13}+\overset{p}{\mu}_{13}-\varphi_3\right)\delta\overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=a} dl = 0$$

где штрихами отмечены граничные данные на $x_1 = 0$, а двумя штрихами – данные на $x_1 = a$.

Если теперь, в вариационном соотношении (4.10) подставить общие решения для погранслоев (3.11), в итоге, для определения произволов погранслоев приходим к следующему результату.

Для произволов силового погранслоя получим алгебраическую систему уравнений вида:

$$\overset{p}{a}_{mn}\overset{p^{(0)}}{A}_n = \overset{p^{(0)}}{c}_m, \text{ где } \overset{p}{a}_{mn} = \int_{-1}^{1}\left[\overset{p}{\tilde{\sigma}}_{11n}\overset{p}{\tilde{v}}_{1m} - \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{12n}\overset{p}{\tilde{v}}_{2m}\right]_{\zeta=\pm 1} d\zeta$$

$$\overset{p^{(0)}}{c}_m = \int_{-1}^{1} f_2(\zeta)\overset{p}{\tilde{v}}_{2m}d\zeta, \quad (m,n = 1,2,...) \qquad (4.11)$$

(здесь будем считать, что по индексу "n" происходит суммирование).

Для произволов моментного погранслоя получим:

$$\overset{p^{(0)}}{B}_n = -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\cdot a\cdot\frac{1}{\lambda_n}\cdot\overset{p^{(0)}}{b}_n, \quad \text{где } \overset{p^{(0)}}{b}_n = \int_{-1}^{1}\Psi(\zeta)\overset{p}{\tilde{\omega}}_{3n}d\zeta, \ (n = 1,2,...) \qquad (4.12)$$

5. Пусть теперь на граничных кромках $x_1 = 0$, $x_1 = a$ прямоугольника заданы граничные условия (1.5) плоской задачи НТУ.

Чтобы удовлетворить граничным условиям (1.5_2), подставим туда (3.14) и приравним к нулю коэффициенты при соответствующих степенях δ, тогда получим непротиворечивый итерационный процесс, если $\chi = -2$ как для задачи растяжения-сжатия, так и для задачи изгиба. Далее рассмотрим задачу изгиба.

Граничные условия (1.5_2) в итерациях имеют вид (задача изгиба):

$$\begin{cases} {}^{вн(s-2)}_{\sigma_{11}} + {}^{p(s)}_{\sigma_{11}} = \bar{\varphi}_1^{(s-2)} \\ {}^{вн(s)}_{u_2} + {}^{p(s)}_{u_2} = \tilde{\varphi}_2^{(s)} \\ {}^{вн(s-1)}_{\mu_{13}} + {}^{p(s)}_{\mu_{13}} = \tilde{\varphi}_3^{(s-1)} \end{cases} \qquad (5.1)$$

где

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta^{-2}\tilde{\varphi}_1 \quad , \varphi_2 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_2, \varphi_3 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_3 \\ \tilde{\varphi}_k^{(0)} = \tilde{\varphi}_k, \quad \tilde{\varphi}_k^{(s)} = 0 \text{ при } s \geq 1 \quad (k = 1,2,3) \end{cases}$$

Рассмотрим приближение $s = 0$, тогда будем иметь:

$$\overset{p(0)}{\sigma_{11}} = 0, \qquad \overset{0(0)}{v_2} + \overset{p(0)}{v_2} = \tilde{\varphi}_2 \quad , \qquad \overset{p(0)}{\mu_{13}} = 0 \text{ при } t = 0 \qquad (5.2)$$

Используя первое равенство из (5.2), можем написать тождество

$$\int_{-1}^{1} \xi \cdot \overset{p(0)}{\sigma_{11}}(t = 0) d\xi = 0 \qquad (5.3)$$

следовательно, на основании свойств погранслоев (3.6) получим важное равенство:

$$\int_{-1}^{1} \overset{p(0)}{v_2}(t = 0) d\xi = 0 \qquad (5.4)$$

Из (5.4) и второго условия (5.2) приходим к одному из граничных условий внутренней задачи при $t = 0$:

$$\left. \overset{0(0)}{v_2} \right|_{x_1 = 0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_2 d\xi \qquad (5.5)$$

Для получения второго граничного условия внутренней задачи, из третьего условия (5.1) сначала будем иметь

$$2\overset{0(0)}{v_{13}} + \overset{p(1)}{\mu_{13}} = \tilde{\varphi}_3^{(0)} \quad \text{при } t = 0 \qquad (5.6)$$

На основании равенств (3.6) (при $s = 1$), используя соответствующие значения при $s = 0$, можем показать, что

$$\int_{-1}^{1} \overset{p(1)}{\mu_{13}}(t = 0) d\xi = 0 \qquad (5.7)$$

Тогда, с учетом (5.7) из условия (5.6) получим

$$\left. \overset{0(0)}{v_{13}} \right|_{x_1 = 0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_3 d\xi \qquad (5.8)$$

Объединяя (5.5) и (5.8), для внутренней задачи получим граничные условия вида:

$$\overset{0}{w}{}^{(0)}\Big|_{x_1=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi_2\cdot dx_2, \qquad \overset{0}{L}{}_{13}^{(0)}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}\varphi_3\cdot dx_2 \tag{5.9}$$

Таким образом, граничная задача (4.2)-(4.4) и (5.9) определяет внутреннюю задачу (задачу изгиба) для приближения $s=0$.

Погранслойные граничные задачи определяются так.

Для силового погранслоя имеем систему уравнений (4.6), к которой необходимо присоединить однородные граничные условия на $\zeta=\pm1$ (как в (4.6)), а граничные условия на $t=0$ необходимо заменить условиями:

$$\overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(0)}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \overset{p}{v}{}_{2}^{(0)}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_2\cdot d\zeta \tag{5.10}$$

Для моментного погранслоя получим следующее однородное граничное условие:

$$\overset{p}{\mu}{}_{13}^{(0)}\Big|_{t=0} = 0$$

Так как (при $s=0$) уравнения указанного погранслоя однородны, следовательно, в этом случае моментный погранслой превращается в нуль. Для определения произволов погранслоев необходимо использовать вариационное соотношение

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{вн}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1'\right)\delta\overset{p}{u}_1+\left(\varphi_2'-\left(\overset{вн}{u}_2+\overset{p}{u}_2\right)\right)\delta\overset{p}{\sigma}_{12}+\left(\overset{вн}{\mu}_{12}+\overset{p}{\mu}_{12}-\varphi_3'\right)\delta\overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=0} d\zeta +$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{вн}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1''\right)\delta\overset{p}{u}_1+\left(\varphi_2''-\left(\overset{вн}{u}_2+\overset{p}{u}_2\right)\right)\delta\overset{p}{\sigma}_{12}+\left(\overset{вн}{\mu}_{13}+\overset{p}{\mu}_{13}-\varphi_3'\right)\delta\overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=h} d\zeta = 0$$

которое получается на основе вариационного уравнения плоской задачи НТУ для прямоугольника с использованием (3.14) и результатов (при $s=0$) внутренней и погранслойных задач. Аналогичным образом, как в предыдущей задаче, для определения $\overset{p}{A}{}_n^{(0)}$ приходим к соответствующей линейной системе алгебраических уравнений, где при использовании формулы обобщенной ортогональности (3.12) получим выражения, индувидуально определяющие постоянные $\overset{p}{A}{}_n^{(0)}$ $(n=1,2....)$.

6.Рассмотрим граничные условия (1.5_3). Приводим рассуждения для задачи изгиба $(\chi=-2)$.

Граничные условия в итерациях для задачи изгиба имеют вид:

$$\begin{cases} \overset{вн}{\sigma}{}_{11}^{(s-2)} + \overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(s)} = \tilde{\varphi}_1^{(s-2)} \\ \overset{вн}{\sigma}{}_{12}^{(s-1)} + \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(s)} = \tilde{\varphi}_2^{(s-1)} \\ \overset{вн}{\omega}{}_{3}^{(s)} + \overset{p}{\omega}{}_{3}^{(s)} = \tilde{\varphi}_3^{(s)} \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases}\varphi_1 = \delta^0\tilde{\varphi}_1 \quad , \varphi_2 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_2, \varphi_3 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_3 \\ \tilde{\varphi}_k^{(0)} = \tilde{\varphi}_k, \ \tilde{\varphi}_k^{(s)} = 0 \text{ при } s \geq 1 \ \ (k = 1,2,3)\end{cases}$$

При $s = 0$ из (6.1) получим:

$$\overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(0)}\Big|_{t=0} = 0, \quad \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(0)}\Big|_{t=0} = 0, \quad \overset{0}{\Omega}{}_3^{(0)}\Big|_{t=0} + \overset{p}{\omega}{}_3^{(0)}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_3 \tag{6.2}$$

Так как на основании свойств погранслоев (3.6), при $s = 0$ имеет место равенство

$$\int_{-1}^{1} \overset{p}{\omega}{}_3^{(0)}(t=0)d\zeta = 0 \tag{6.3}$$

следовательно, из последнего условия (6.2) получим одно из двух граничных условий внутренней задачи

$$\overset{0}{\Omega}{}_3^{(0)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_3 d\zeta \tag{6.4}$$

Теперь, подставив $s = 1$ во второе условие (6.1), получим условие следующего вида:

$$\overset{0}{\tau}{}_{12}^{(0)} + \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(1)} = \tilde{\varphi}_2^{(0)} \quad \text{при } t = 0. \tag{6.5}$$

На основании (3.6) легко получить

$$\int_{-1}^{1} \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(1)}(t=0)d\zeta = 0 \tag{6.6}$$

Используя (6.6), из (6.5) получим второе граничное условие внутренней задачи:

$$\overset{0}{\tau}{}_{12}^{(0)}\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_2 d\zeta \tag{6.7}$$

Таким образом, для задачи изгиба определяющая система внутренней задачи (при $s = 0$) будет выражаться уравнениями (4.2)-(4.4), к которым следует присоединить следующие граничные условия:

$$\overset{0}{N}{}_{12}^{(0)}\Big|_{x_2=0} = \int_{-h}^{h}\varphi_2 \cdot dx_2, \quad \overset{0}{\Omega}{}^{(0)}\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi_3 \cdot dx_2$$

Для силового погранслоя будем иметь однородные граничные условия и если учитывать, что (при $s = 0$) однородны также соответствующие определяющие уравнения, то получим, что силовой погранслой просто обращается в нуль.

Что касается моментного погранслоя, то уравнения этого погранслоя совпадают с уравнением (4.7), граничные условия на $\zeta = \pm 1$, как и в (4.7), однородны, а граничные условия на $x_1 = 0$ необходимо заменить на условие вида:

$$\overset{p}{\omega}{}_3^{(0)}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_3 \cdot d\zeta$$

Вариационное соотношение, из которого необходимо определить произволы погранслоев для рассматриваемого случая граничных условий плоской задачи НТУ для прямоугольника, имеет вид

$$\int_{-1}^{1}\left|\left(\overset{(m)}{\sigma}_{11}+\overset{(p)}{\sigma}_{11}-\varphi_1\right)\delta\overset{(p)}{v}_1+\left(\overset{(m)}{\sigma}_{12}+\overset{(p)}{\sigma}_{12}-\varphi_2\right)\delta\overset{(p)}{v}_2+\left(\varphi_3-\left(\overset{(m)}{\omega}_3+\overset{(p)}{\omega}_3\right)\right)\delta\overset{(p)}{\mu}_{13}\right|_{x_1=0}dl+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\left(\overset{(m)}{\sigma}_{11}+\overset{(p)}{\sigma}_{11}-\varphi_1\right)\delta\overset{(p)}{v}_1+\left(\overset{(m)}{\sigma}_{12}+\overset{(p)}{\sigma}_{12}-\varphi_2\right)\delta\overset{(p)}{v}_2+\left(\varphi_3-\left(\overset{(m)}{\omega}_3+\overset{(p)}{\omega}_3\right)\right)\delta\overset{(p)}{\mu}_{13}\right|_{x_1=a}dl=0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с
3. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
4. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512с.
5. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
6. Агаловян Л. А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977.Т. 30. N5. С. 48-62.
7. Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М. О некоторых плоских задачах для ортотропной полосы// Уч. записки Ереванск. ун-та. Естеств. науки. 1977. N 2(135). С. 20-26.
8. Саркисян С. О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Посвященный 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН Армении. 2002. С. 285-296.
9. Саркисян С. О., Мутафян М. Н. Внутренняя задача изотропного упругого прямоугольника по несимметричной теории упругости/ Изв. ВУЗ-ов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. N 3. С. 141-142.
10. Мутафян М. Н. Погранслой для упругого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Материалы XII республиканской конференции молодых ученых. Механика. Ереван. 2003. С. 151-156.
11. Мутафян М. Н. Сопряжение асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя для тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости//Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван. 2002. С.185-190.
12. Саркисян С.О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости//Докл. НАН Армении. 1999.Т.99.N2. С.138-148.
13. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117-1120.
14. Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Плоская деформация в асимметричной теории упругости // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 543-547.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 19.02.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Худаяров Б. А.

Բ. Ա. Խուդայարով

Առաձգամածուցիկ եռաշերտ սալերի ֆլատերի խնդրի թվային լուծումը

Դիտարկված է առաձգամածուցիկ երկար եռաշերտ սալերի ֆլատերի խնդիրը: Ուսումնասիրված է ռեոլոգիական պարամետրերի ազդեցությունը ֆլատերի կրիտիկական արագությունների վրա:

B. A. Khudayarov

Numerical Solution of a Problem about a Flutter of Visco-elastic Sandwich Plates

Рассматриваются задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных удлиненных пластин. Изучено влияние реологических параметров на критические скорости флаттера.

В связи с широким применением в технике композиционных материалов наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе все больший интерес исследователей. Об этом свидетельствует выход в свет за последние годы значительное число публикаций, посвященных решению задач расчета характеристик вязкоупругих конструкций [1-3].

В настоящей работе исследуется в линейно-вязкоупругой постановке задача об устойчивости удлиненных трехслойных пластинок с жестким, сопротивляющимся поперечному сдвигу заполнителем, обтекаемой с внешней стороны сверхзвуковым потоком.

Ранее в работах [4-6] и других уже рассматривались подобные задачи для упругих как однослойных, так и трехслойных пластин в сверхзвуковом потоке газа.

Рассмотрим вязкоупругую удлиненную трехслойную пластинку, обтекаемую с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью V, направленной вдоль оси Ox. Аэродинамическое давление учитываем по линейной поршневой теории [7].

Уравнение движения вязкоупругой трехслойной пластины в потоке газа в случае отсутствия сдвигающих усилий примет вид:

$$D(1-R^*)(1-\Theta h^2\beta_3^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial^4\chi}{\partial x^4} - P_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1-h^2\beta_3^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \\ + \Omega\frac{\partial^2}{\partial t^2}(1-h^2\beta_3^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\chi - q = 0 \qquad (1)$$

Здесь $\chi(x,t)$ – функция перемещений, связанная с прогибом $W(x,t)$ соотношением [8] :

$$W = (1-h^2\beta_3^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\chi \qquad (2)$$

Величины D, Θ, β_3. Ω характеризуют соответственно цилиндрическую жесткость трехслойного пакета, изгибную жесткость несущих слоев, жесткость заполнителя на сдвиг и удельную массу трехслойного пакета; h – толщина пакета; P_x – внешние сжимающие (растягивающие) усилия в продольном направлении; $q(x,t)$ – аэродинамическая нагрузка; R^* – интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$: $R^*\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\chi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n(t)\varphi_n(x) \qquad (3)$$

где функции $\varphi_n(x)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (3) удовлетворял граничным условиям на кромках пластинки, а $\chi_n(t)$ – некоторые функции, подлежащие определению. Подставляя (3) в уравнение (1) и применяя к этому уравнению метод Бубнова – Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов (3). Введя следующие безразмерные параметры:

$$\frac{x}{a}, \quad \frac{V_x}{a}t, \quad \frac{a}{V_x}R(t)$$

и сохраняя прежние обозначения, получим

$$A_k \ddot{\chi}_k + B_k \dot{\chi}_k + \left[(1-R^*)C_k + E_k\right]\chi_k + V_* \sum_{n=1}^{N} F_{kn}\chi_n = 0 \qquad (4)$$

Здесь A_k, B_k, C_k, E_k, F_{kn}, $V_* = æ p_x a^3 M^* / D$ – безразмерные параметры.

Интегрирование системы (4) при ядре Колтунова–Ржаницына $\left(R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1},\ 0 < \alpha < 1\right)$ проводилось численным методом, предложенным в работах [9, 10]. Результаты вычислений представлены в таблице.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{*кр}$, принимаем условие, что при этих скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При $V > V_{*кр}$ происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V < V_{*кр}$, амплитуда колебаний затухает [11].

Проведено исследование влияния вязкости. Расчеты показали, что учет вязкого сопротивления приводит к снижению критической скорости $V_{*кр}$ флаттера. Полученное критическое значение $V_{*кр}$ для вязкоупругой (A=0,1) пластинки на 60% ниже по сравнению с упругим (A=0) значением $V_{*кр}$.

С увеличением реологического параметра α критическая скорость флаттера возрастает. Рост критической скорости более сильно заметен при значениях α=0,5 в отличие от значения α=0,05. Разница между ними

составляет 31,5%. Для критической скорости флаттера влияние реологического параметра β незаметно.

Изучено влияние внешних сжимающих (растягивающих) усилий в продольном направлении. Из таблицы видно, что с ростом сжимающих усилий p_x ($p_x = P_x a^2 / D$) в направлении скорости потока приводит к снижению критической скорости флаттера. Напротив, растягивающие усилия p_x приводят к такому же пропорциональному росту критической скорости флаттера.

Таблица

A	α	β	$-p_x$	k_1	Θ	ε	$V_{кр}$
0 0,001 0,01 0,1	0,25	0,05	0,75	1	0,05	0,1	15,5 14,6 9,9 6,08
0,01	0,05 0,1 0,5	0,05	0,75	1	0,05	0,1	7,8 9,15 10,26
0,01	0,25	0,01 0,08 0,1	0,75	1	0,05	0,1	9,96 9,95 9,94
0,01	0,25	0,05	1,5 1 0 -0,5 -1	1	0,05	0,1	7,86 8,8 13,34 15.7 18,0
0,01	0,25	0,05	0,75	0,1 0,2 0,5 1,5	0,05	0,1	41,5 27,0 14,9 8,18
0,1	0,25	0,05	0,75	1	0,05	0,1	17,67 23,5 36,82
0,01	0,25	0,05	0,75	1	0 0,03 0,06 0,08	0,1	1,28 6,85 11,45 14,3
0,01	0,25	0,05	0,75	1	0,05	0 0,5 2,5 3,5	9,93 10,2 11,1 11,5

Увеличение параметра k_1 ($k_1 = h^2 \beta_3^{-1} / a^2$) приводит к существенному изменению $V_{кр}$. Исследования были проведены при k_1=0,1; 0,2; 0,5 и 1,5. Видно, что с уменьшением жесткости заполнителя на сдвиг (ростом коэффициента k_1) критическая скорость флаттера трехслойной пластинки уменьшается.

Изучено влияние параметра Θ, характеризующее изгибную жесткость несущих слоев. Увеличение параметра Θ приводит к увеличению критической скорости флаттера (см. табл.).

Также изучено влияние параметра ε (аэродинамическое демпфирование). С ростом коэффициента ε наблюдается повышение безразмерной критической скорости флаттера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.Д. Исследование динамической устойчивости вязкоупругих систем с помощью показателей Ляпунова // Изв. АН. МТТ. 2000. №6. С.82-89.
2. Бондарев Э.А., Будугаева В.А., Гусев Е.Л. Синтез слоистых оболочек из конечного набора вязкоупругих материалов // Изв. АН. МТТ. 1998. №3. С.5-11.
3. Каминский А.А., Подильчук И.Ю. Об одном методе решения граничных задач линейной теории вязкоупругости // Прикладная механика. 1998. Т. 34. №12. С. 77-85.
4. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №4. С. 91-96.
5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок, обтекаемых сверзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №5. С. 96-99.
6. Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверзвуковом потоке газа // Изв. АН Армянской ССР. Сер. физ.-мат. наук 1961. Т. 14. №5. С. 21-30.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. XX. Вып.6. С.733-755.
8. Смирнов А.Н. Динамическая устойчивость и колебания трехслойных панелей в сверхзвуковом потоке газа // ДАН СССР. 1968. Т.180. №5. С.1060-1063.
9. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат. 1987. 271 с.
10. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. 1987. Т.51. № 5. С.867-871.
11. Худаяров Б.А. Алгоритмизация задачи о флаттере вязкоупругих пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Вычислительные технологии. СО РАН. Новосибирск. 2003. Т.8. №6. С.100-103.

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

Поступила в редакцию 24.02.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

Мартиросян Э. В.

Է. Վ. Մարտիրոսյան

Մագնիսաառաձգական մակնրևույթային սահքի ալիքներ իդեալական հաղորդիչ կիսատարածության եզրի

Դիտարկվում է կիսատարածություն առաձգական իդեալ հաղորդիչ նյութից, որը սահմանափակված է վակուումի շերտով: Արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությունը, որը գործում է կիսատարածության ձորին ուղղահայաց հարթությունում, ապահովում է փոխազդեցություն գրգռված էլեկտրա-մագնիսական դաշտի և կիսատարածության առաձգական տեղափոխումների դաշտի միջև: Ցույց է տրվում որ նշված փոխազդեցությունը բերում է մակերևույթային սահքի ալիքների առաջացմանը:

E. V. Martirosyan

Magnetoelastic surface shear waves along the boundary of perfectly conducting semi-space

Рассматривается упругое полупространство из идеально-проводящего материала, граничащее со слоем вакуума. Наличие внешнего постоянного магнитного поля, действующего в плоскости, перпендикулярной границе полупространства, обусловливает взаимодействие возмущенных электромагнитного поля и поля упругих перемещений полупространства. Показывается, что указанное взаимодействие приводит к появлению поверхностных сдвиговых волн.

§ 1. Вначале исследуется вопрос существования поверхностных сдвиговых волн в случае полупространства из упругого идеально-проводящего материала, граничащего с вакуумом.

Рассмотрим упругое идеально - проводящее полупространство $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 < x_2 < +\infty$, $-\infty < x_3 < +\infty$. Плоскость $x_2 = 0$ отделяет полупространство от вакуума ($x_2 < 0$). В начальном невозмущенном состоянии полупространство находится в постоянном магнитном поле, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости $x_1 O x_2$):

$$\vec{H}_0 = H_{01}\,\vec{i} + H_{02}\,\vec{j}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ -орты осей x_1, x_2, соответственно. Задача состоит в изучении вопроса существования сдвиговой поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы полупространства.

Отметим, что в случае поперечного магнитного поля, т. е. когда $H_{02} = 0$, поставленная задача исследовалась в [4]. Похожая задача, однако без полного анализа полученных результатов, изучалась в [5].

В случае антиплоской упругой деформации $u = v = 0$, $w = w(x_1, x_2, t)$, а также при предположении, что все искомые величины возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты x_3, линеаризованное уравнение магнитоупругости [3] имеет вид: при $x_2 > 0$

$$\left(C_t^2 + V_1^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \left(C_t^2 + V_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2V_1 V_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

Здесь

$$V_k^2 = \frac{\mu}{4\pi\rho} H_{0k}^2, \quad k = 1,2 \qquad (1.2)$$

$C_t^2 = G\rho^{-1}$, G –модуль сдвига, ρ – плотность материала среды , μ –ее магнитная проницаемость.

Уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в области $x_2 < 0$ приводятся к виду

$$c^2 \Delta h_3 = \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = c \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \qquad (1.3)$$

где e_1 –компонента напряженности вектора возмущенного электрического поля, h_3 – компонента напряженности вектора возмущенного магнитного поля, Δ –оператор Лапласа, c – электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

На плоскости $x_2 = 0$ решения уравнений (1.2) и (1.3) должны удовлетворять следующим граничным условиям :

$$G \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\mu}{4\pi} H_{01} \left(H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{4\pi} H_{02} h_3 \qquad (1.4)$$

$$\frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} = e_1$$

Первое из условий (1.4) означает, что на границе $x_2 = 0$ выполняется граничное условие типа свободной границы [1]–[3]. Второе условие из (1.4) обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты напряженности e_1 возмущенного электрического поля при переходе через границу $x_2 = 0$.

Решения типа поверхностной волны должны удовлетворять также следующим условиям затухания :

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} w = 0 , \quad \lim_{x_2 \to -\infty} h_3 = 0 \qquad (1.5)$$

Таким образом , задача сводится к решению уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5) .

Для решения уравнений (1.1) , (1.3) введем обозначения

$$\chi_k = \frac{V_k^2}{C_t^2}, \quad k = 1,2 \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.1) и второе уравнение из (1.3) примут, соответственно, следующий вид:

$$(1+\chi_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (1+\chi_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\sqrt{\chi_1 \chi_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x^2} + \sqrt{\chi_2} \left(\sqrt{\chi_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \sqrt{\chi_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu G}} h_3$$

Решения уравнений (1.1), (1.3) будем искать в виде гармонических волн с частотою ω и волновым числом k :

$$w = f(x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$h_3 = g(x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$e_1 = p(x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где f, g, p -неизвестные функции (f, g из класса $C^2(-\infty,+\infty)$, p -класса $C(-\infty,+\infty)$).

Так как для уравнения (1.1) ищется затухающее решение, удовлетворяющее первому условию из (1.5), то функция $f(x_2)$ должна иметь следующий вид:

$$f(x_2) = A\exp(-k\alpha x_2)$$

где A, α – постоянные, причем $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$. Подставляя значение w в уравнение (1.1), приведем его к виду

$$(1+\chi_2)\alpha^2 + 2i\sqrt{\chi_1\chi_2}\,\alpha - (1+\chi_1-\eta) = 0$$

где $\eta = \dfrac{\omega^2}{k^2 C_t^2}$ – безразмерная характеристика квадрата фазовой скорости волны.

Анализ полученного квадратного уравнения показывает, что для обеспечения условия $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ нужно требовать выполнение ограничения

$$0 < \eta < 1 + \frac{\chi_1}{1+\chi_2} \tag{1.7}$$

и взять $\alpha = \dfrac{\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta} - i\sqrt{\chi_1\chi_2}}{1+\chi_2}$ (1.8)

Итак, при выполнении условия затухания (1.7) имеем

$$w = A\exp(-k\alpha x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где α определяется по (1.8), A – произвольная постоянная.

Аналогично, из уравнений (1.3) с учетом второго условия из (1.5) получим значения функций g и p:

$$g(x_2) = B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)$$
$$p(x_2) = \frac{Bck}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right.$$
$$p(x_2) = \frac{ck}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\;\;B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)$$

где $\theta_1 = C_t^2 c^{-2}$, B – произвольная постоянная.

Следовательно, решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие (1.5), выражаются формулами

$$w = A\exp(-k\alpha x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$h_3 = B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$e_1 = \frac{ck}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\,B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)\exp\left[i\,(\omega t - kx_1)\right]$$

Для нахождения произвольных постоянных A, B используем граничные условия (1.4). Подставляя в них значения w, h_3, e_1, получим систему линейных

уравнений относительно неизвестных A, B:

$$k\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta}A+\frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu G}}B=0$$

$$\frac{\omega^2\mu}{c^2k}H_{02}A+\sqrt{1-\theta_1\eta}B=0$$

Чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, ее определитель должен равняться нулю. Определитель последней системы равен $kN(\eta)$, где

$$N(\eta)=\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta}\ \sqrt{1-\theta_1\eta}-\chi_2\theta_1\eta$$

Таким образом, для решения изучаемой задачи требуется найти корень уравнения

$$N(\eta)=0 \qquad (1.9)$$

удовлетворяющий условию затухания (1.7).

Легко проверить, что если $\chi_2>0$, т. е. с учетом (1.2) и (1.6) $H_{02}\neq 0$, то уравнение (1.9) имеет единственный корень, удовлетворяющий (1.7); если же $\chi_2=0$, т. е. $H_{02}=0$, то уравнение (1.9) не имеет корней, удовлетворяющих (1.7). Следовательно, в приведенной постановке поверхностная сдвиговая волна существует, если только $H_{02}\neq 0$. Однако, квадрат фазовой скорости поверхностной волны очень мало отличается от C_2^2 (т. е. η близка к $1+\frac{\chi_1}{1+\chi_2}$) даже в случае сверхсильных магнитных полей. Это обстоятельство хорошо видно из численных данных, приведенных ниже в табл. 1. Поэтому представляется интересным рассмотреть видоизмененную постановку задачи, в которой эффект магнитного поля, обусловливающий существование сдвиговых поверхностных волн, мог бы быть более существенным.

§ 2. Рассмотрим следующий аналог задачи из § 1. Пусть полупространство из упругого идеально-проводящего материала $-\infty<x_1<+\infty$, $0<x_2<+\infty$, $-\infty<x_3<+\infty$ граничит с параллельным слоем $-\infty<x_1<+\infty$, $-h<x_2<0$, $-\infty<x_3<+\infty$, свойства которого отождествляются со свойствами вакуума, причем на границе $x_2=0$ выполняется граничное условие типа свободной границы, а плоскость $x_2=-h$ является экраном для электрического поля. В начальном невозмущенном состоянии полупространство находится в постоянном магнитном поле, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости (x_1Ox_2). Задача состоит в изучении вопроса существования сдвиговой поверхностной волны вдоль границы полупространства.

Решение рассматриваемой задачи во многом сходно с решением ее предельного случая из § 1. Уравнения (1.1), (1.3), граничные условия (1.4) и первое из условий

затухания (1.5) остаются без изменений; второе из условий (1.5) нужно заменить условием

$$e_1 = 0 \text{ при } x_2 = -h \tag{2.1}$$

Решения уравнений (1.1) , (1.3) , удовлетворяющие первому условию из (1.5), выражаются следующими формулами :

$$w = A \exp(-k\alpha x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$h_3 = \left[B \exp(kx_2\sqrt{1-\theta_1\eta}) + D \exp(-kx_2\sqrt{1-\theta_1\eta})\right] \cdot \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$e_1 = \frac{c\,k}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\left[\left(B \exp(k x_2 \sqrt{1-\theta_1\eta}\right) - D \exp\left(-k x_2 \sqrt{1-\theta_1\eta}\right)\right] \times$$

$$\times \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где A , B , D – произвольные постоянные и предполагается выполненным ограничение (1.7) . Подставляя в граничные условия (1.4) и условие (2.1) значения функций w , h_3 , e_1 , найдем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных A , B , D

$$k\left[\left(1+\chi_2\right)\alpha + i\sqrt{\chi_1\chi_2}\right]A + \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu\, G}}(B + D) = 0$$

$$\frac{\omega^2\mu}{c^2 k} H_{02} A + \sqrt{1-\theta_1\eta}\ (B - D) = 0$$

$$D = B \exp(-2k\,h\sqrt{1-\theta_1\eta})$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим следующее дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи :

$$N_1(\eta) = 0 \tag{2.2}$$

где

$$N_1(\eta) = \sqrt{1-\theta_1\eta}\ \sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta} -$$

$$-\theta_1\chi_2\eta\ \mathrm{cth}\,(k\,h\sqrt{1-\theta_1\eta})$$

Таким образом, решение изучаемой задачи сводится к нахождению корней уравнения (2.2), удовлетворяющих условию затухания (1.7).

Анализ полученного результата приводит к заключению, что в рассмотренной постановке , как и выше в § 1, поверхностная сдвиговая упругая волна существует, если только $H_{02} \neq 0$. Однако теперь , сравнение дисперсионных уравнений (2.2) и (1.9) показывает, что влияние магнитного поля на величину сдвиговой поверхностной волны зависит от порядка величины $k\,h$. Этот факт иллюстрируют числовые данные из табл. 2. В частности, при $k\,h \to +\infty$ имеем $\mathrm{cth}\,(k\,h\sqrt{1-\theta_1\eta}) \to 1$, поэтому из (2.2) в пределе получается уравнение (1.9) .

Если же $k\,h \to 0$, то имеем $\mathrm{cth}\,(k\,h\sqrt{1-\theta_1 h}) \sim (k\,h\sqrt{1-\theta_1\eta})^{-1}$ и более существенно проявляется влияние экрана .

Таблица 1

χ_1	χ_2	θ_1	η	Re α	$k\,y_1$
0	0,1	10^{-10}	$1-9\,10^{-2}$	$9{,}0453\,10^{-6}$	0
0,01	0,1	10^{-4}	$1+909\,10^{-5}$	$0{,}9091\,10^{-3}$	109,251
0,01	0,1	10^{-10}	$1+909\,10^{-5}$	$0{,}9091\,10^{-3}$	109,251
0,02	0,1	10^{-4}	$1+1818\,10^{-5}$	$0{,}9091\,10^{-3}$	77,2338
0,02	0,1	10^{-10}	$1+1818\,10^{-5}$	$1{,}2856\,10^{-3}$	77,2338
0,05	0,1	10^{-4}	$1+4545\,10^{-5}$	$1{,}2856\,10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	$1+4545\,10^{-5}$	$1{,}2856\,10^{-3}$	48,8469
0,08	0,1	10^{-4}	$1+7272\,10^{-5}$	$2{,}5713\,10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	$1+7272\,10^{-5}$	$2{,}5713\,10^{-3}$	38,6169
0,1	0,1	10^{-4}	$1+909\,10^{-4}$	$2{,}8748\,10^{-3}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	$1+909\,10^{-4}$	$2{,}8748\,10^{-3}$	34,54

Таблица 2

χ_1	χ_2	θ_1	kh	η	Re α	ky_1
0	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1-9{,}091\,10^{-11}$	$9{,}09545\,10^{-9}$	–
0	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1-9{,}091\,10^{-13}$	$9{,}09545\,10^{-9}$	–
0	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1-9{,}091\,10^{-11}$	$9{,}09545\,10^{-9}$	–
0	0,1	10^{-8}	10^{-4}	$1-9{,}091\,10^{-11}$	$9{,}09545\,10^{-9}$	–
0	0,1	10^{-10}	10^{-1}	$1-9{,}091\,10^{-21}$	$9{,}09545\,10^{-11}$	–
0	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1-9{,}091\,10^{-19}$	$9{,}09095\,10^{-10}$	–
0	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1-9{,}091\,10^{-17}$	$9{,}09068\,10^{-9}$	–
0	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1-9{,}091\,10^{-15}$	$9{,}09091\,10^{-8}$	–
0,01	0,1	10^{-8}	10^{-4}	$1+9{,}09\,10^{-5}$	$9{,}0909\,10^{-4}$	109,225
0,01	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1+9{,}09\,10^{-5}$	$9{,}0909\,10^{-4}$	109,225
0,02	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+1{,}818\,10^{-4}$	$1{,}2856\,10^{-3}$	77,2338
0,05	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1+4{,}545\,10^{-4}$	$2{,}0328\,10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+4{,}545\,10^{-4}$	$2{,}0328\,10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+4{,}545\,10^{-4}$	$2{,}0328\,10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+4{,}545\,10^{-4}$	$2{,}0328\,10^{-3}$	48,8469
0,08	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1+7{,}2727\,10^{-4}$	$4{,}9793\,10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+7{,}2727\,10^{-4}$	$4{,}9793\,10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+7{,}2727\,10^{-4}$	$4{,}9793\,10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+7{,}2727\,10^{-4}$	$4{,}9793\,10^{-3}$	38,6169
0,1	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1+9{,}0909\,10^{-4}$	$2{,}8748\,10^{-3}$	34,54
0,1	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+9{,}0909\,10^{-4}$	$2{,}8748\,10^{-3}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+9{,}0909\,10^{-4}$	$2{,}8748\,10^{-3}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+9{,}0909\,10^{-4}$	$2{,}8748\,10^{-3}$	34,54

Пояснения к таблицам :

1. Амплитуда поверхностной волны w равна $A\exp(-ky\,\mathrm{Re}\,\alpha)$, поэтому величина $\exp(-2\pi\,\mathrm{Re}\alpha)$ показывает, во сколько раз уменьшается величина амплитуды при уменьшении y на величину, равную длине волны $2\pi / k$.

2. Волна $w = \mathrm{E}\exp\left[i\left(ky\frac{\sqrt{\chi_1\chi_2}}{1+\chi_2}\right)\right]$, где $E \neq 0$, является волной типа шепчущей волны Галилея. Вдоль оси y она имеет нули, определяемые уравнением

$$\mathrm{Re}\, E\cos(ky\,\mathrm{Im}\,\alpha) - \mathrm{Im}\, E\sin(ky\,\mathrm{Im}\,\alpha) = 0$$

В частном случае, когда $\mathrm{Re}\, E = 0$ и $\mathrm{Im}\, E \neq 0$, первый нетривиальный нуль y_1 приводится в таблицах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян А. В., Казарян К. Б. Отражение и преломление магнитоупругой сдвиговой волны от упругого слоя. – В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1984. С.111-115.
2. Геворкян А. В. Магнитоупругие волны Лява в случае диэлектрического слоя и идеально проводящего полупространства. – В сб.: "Исследования по механике твёрдого деформируемого тела". Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1981. С.81-86.
3. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic field in the case of perfect conductor. // Proc. of Vibr. Probl.. 1960. № 5. pp. 63 – 80.
4. Белубекян М. В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны. – В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред", Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1984. С.70-74.
5. Chakraborty S., Chattopadhyay M. On Love-type magnetoelastic surface waves. // Journal of Applied Mechanics (Trans. of the ASME). 1998. v. 65. № 2. pp. 535 539.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.02.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 517.9:62.50

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Барсегян В. Р.

Վ.Ռ.Բարսեղյան

Բաշխված պարամետրերով համակարգի վիճակի օպտիմալ վերականգնման խնդիրը թերի և սխալով չափումների դեպքում

Դիտարկված է բաշխված պարամետրերով համակարգի վիճակի օպտիմալ վերականգնման խնդիրը թերի և սխալով չափումների դեպքում: Փոփոխականների անջատման եղանակով խնդրի լուծումը բերված է հաստատուն գործակիցներով սովորական ածանցյալով դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգի: Ուժեղացնելով յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար ստացվող ազդակը, կառուցված է բոլոր կետերում համակարգի վիճակը վերականգնող ունիվերսալ օպտիմալ գործողություն:

V.R. Barseghyan

The problem of systems condition optimal recovery with distributed parameters in the presence of incomplete measurements errors

Рассматривается задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях. Методом разделения переменных решение задачи приводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для каждой гармоники усиливая поступающий сигнал, строится универсальная оптимальная операция, позволяющая восстановить состояние всех точек в любой момент времени.

Теория оптимального управления и наблюдения системами с распределенными параметрами непрерывно расширяет область приложения. Для задачи оптимального управления динамическими системами необходимо знать текущее состояние процесса. С помощью непосредственных измерений переменные состояния точно определить невозможно. Наблюдаемые переменные представляются функционалом, определенным состоянием системы и содержащим погрешности измерений. В таких случаях возникает задача восстановления переменных состояния системы с наибольшей точностью. В работах [1,2] обсуждаются вопросы восстановления неизвестных характеристик и управления динамических систем с распределенными параметрами и приведены обширные библиографии.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления состояния систем при наличии распределенного управляющего воздействия с помощью реальных (содержащих ошибки) сигналов, поступающих через измерительные устройства.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = A_x w(x,t) + u(x,t) \qquad (1.1)$$

определенное для $t \geq t_0$ в области X с граничными условиями на границе S области X

$$\alpha_s w(s,t) = 0, \quad s = x \in S \tag{1.2}$$

Здесь $w(x,t)$ и $u(x,t)$ – векторы состояния и управления, A_x и α_s – матрицы линейных дифференциальных операторов, характеризующих объект и его воздействие с окружающей средой.

В частном случае уравнение (1.1) будет описывать управляемый процесс теплопроводности [3]. Тогда в однородном случае ($0 \le x \le l$ объект – стержень конечной длины) задается одна из краевых условий

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \qquad w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0$$

$$w_x(0,t) + \lambda w(0,t) = 0, \qquad w_x(l,t) + \mu w(l,t) = 0$$

и

$$A_x = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad a^2 = \frac{K}{c\rho_0}$$

K – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ_0 – удельная плотность материала стержня.

Характерным для систем с распределенными параметрами является то, что управляющие воздействия могут быть распределены не по всей области X, а по некоторым ее подобластям X_u. Область X_u называется пространственной базой управляющего воздействия.

Для синтеза оптимального управления по принципу обратной связи необходима полная информация о состоянии системы, т.е. в каждый момент времени необходимо знание состояния $w(x,t)$ в каждой точке области X. Однако точно измерить состояние системы в каждой точке области X в принципе невозможно. Обычно в реальной ситуации наблюдаемые переменные являются некоторыми функционалами, определенными состоянием системы. Кроме полезного сигнала, наблюдаемые переменные могут содержать и погрешности измерения.

Предположим, что наблюдаемый m-мерный реальный сигнал $Z(\tau)$ связан с состоянием системы $w(x,t)$ и погрешности измерения $\omega(x,\xi(\tau))$ ($\omega(x,\xi(\tau))$ – случайный процесс) уравнением

$$Z(\tau) = \int_X N(x,\tau)\left[w(x,\tau) + \omega(x,\xi(\tau))\right]dx \tag{1.3}$$

Матрица $N(x,\tau)$ характеризует способ и участки объекта, подлежащие измерению. Элементы матрицы $N(x,\tau)$ могут быть δ-функции и их производные.

Примерами функционалов типа (1.3) являются состояние процесса в фиксированных точках области X, среднее по значению состояния и т.д.

Множество $X_N = \{x : x \in X, \quad N(x,\tau) \neq 0\}$ называется пространственной базой измерительного устройства. Множество X_N может состоять из изолированных точек области X, быть подмножеством X (объединение нескольких подмножеств X) или совпадать с ним. Пусть, например, измеряется состояние поля в некоторой фиксированной точке $x = x_0 \in X$, тогда

$$Z(\tau) = W(x_0,\tau) + \omega(x_0,\xi(\tau)) = \int_X \delta(x-x_0)[W(x,\tau) + \omega(x,\xi(\tau))]dx$$

Здесь $N(x,\tau) = \delta(x-x_0)$, а пространственной базой измерителя будет только одна точка $x = x_0$.

Пусть величина $Z(\tau)$ (1.3) измеряется на промежутке времени $[t-\vartheta, t]$, где $\vartheta > 0$ постоянное число – длина интервала, в течение которого учитывается некоторая предыстория поступающего сигнала. Число ϑ определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу наблюдений, и зависит от физических возможностей измерительных устройств.

Требуется по известному наблюдаемому сигналу $Z(\tau)$, $\tau \in [t-\vartheta, t]$ восстановить состояние $w(x,t)$ в момент времени t. Восстанавливаемая функция $w(x,t)$ используется в ходе процесса его контроля и обеспечения определенного технологического качества. Такова ситуация, например, в процессах электрошлакового переплава [4], в которых по ходу процесса требуется определять и контролировать температуру агрессивного шлака для обеспечения правильного течения процесса.

2. Сведение исходной задачи к задаче восстановления состояния системы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что функция состояния $w(x,\tau)$, управляющее воздействие $u(x,\tau)$ и погрешность измерения $\omega(x,\xi(\tau))$ могут быть представлены в виде разложения

$$w(x,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\tau)\Phi_i(x), \quad u(x,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\tau)\Phi_i(x)$$

$$\omega(x,\xi(\tau)) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(\tau)\Phi_i(x) \qquad (2.1)$$

где $\Phi_i(x)$ – некоторая полная система ортонормированных собственных функций оператора A_x с дискретными и простыми собственными числами λ_i, а коэффициенты разложения $w_i(\tau)$, $u_i(\tau)$ и $\omega_i(\tau)$ определяются по формулам

$$w_i(\tau) = \int_X w(x,\tau)\Phi_i(x)dx, \qquad u_i(\tau) = \int_X u(x,\tau)\Phi_i(x)dx$$

$$\omega_i(\tau) = \int_X \omega(x,\xi(\tau))\Phi_i(x)dx$$

Подставляя $w(x,\tau)$ и $u(x,\tau)$ из (2.1) в исходное уравнение (1.1) и умножая скалярно обе части уравнения на функции $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x),\ldots,\Phi_i(x),\ldots$, учитывая, что для собственных функций $\Phi_i(x)$ выполняются условия нормировки

$$\int_X \Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = \delta_{ij}$$

получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i(\tau) = \lambda_i w_i(\tau) + u_i(\tau) \qquad (i = 1,2,\ldots) \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1), из (1.3) будем иметь

$$Z(\tau) = \int_X N(x,\tau)\left[\sum_{i=1}^{\infty} w_i(\tau)\Phi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(\tau)\Phi_i(x)\right]dx = \sum_{i=1}^{\infty}\left(N_i(\tau)w_i(\tau) + \Delta_i(\tau)\right)$$

где приняты следующие обозначения:

$$N_i(\tau) = \int_X N(x,\tau)\Phi_i(x)dx, \qquad \Delta_i(\tau) = N_i(\tau)\omega_i(\tau)$$

Таким образом, для каждой гармоники поступающий реальный сигнал можно представить в следующем виде:

$$Z_i(\tau) = N_i(\tau)w_i(\tau) + \Delta_i(\tau), \qquad \tau \in [t-\vartheta, t]$$

Погрешность $\Delta_i(\tau)$ неизвестна (т.к. неизвестна $\omega_i(\tau)$), однако можно принять, что из физических условий процесса измерения вытекает некоторая оценка этой погрешности. Пусть $\Delta_i(\tau)$ является элементом пространства L_2, тогда оценку возможной помехи $\Delta_i(\tau)$ можно записать в виде

$$\rho[\Delta_i(\cdot)] = \left(\int_{t-\vartheta}^{t} \Delta_i^2(\tau)d\tau\right)^{1/2} \le \delta_i \tag{2.3}$$

здесь $\delta_i (i = 1,2,\ldots)$ – положительные постоянные. Если погрешность измерения отсутствует, то измерение является точным (а поступающий сигнал идеальным), но неполным.

Требуется найти операцию $\varphi_i^0[t, Z_i(\tau)]$, которая удовлетворяет условию

$$\sup_{Z_i}\left|\varphi_i^0[t, Z_i(\tau)] - w_i(t)\right| = \min_{\varphi_i}\sup_{Z_i}\left|\varphi_i[t, Z_i(\tau)] - w_i(t)\right| \tag{2.4}$$

по всевозможным реализациям $Z_i(\tau)$ и по всевозможным операциям φ_i.

Отметим, что операция φ_i, которая при каждом t обеспечивает конечную верхнюю грань (2.4), удовлетворяет условию

$$\varphi_i[t, N_i(\tau)w_i(\tau)] = w_i(t) \tag{2.5}$$

Из (2.5) и линейности операции φ_i получим

$$\varphi_i[t, Z_i(\tau)] - w_i(t) = \varphi_i[t, \Delta_i(\tau)]$$

но так как

$$\sup_{\Delta_i}\left|\varphi_i[t, \Delta_i(\tau)]\right| = \delta_i\rho^*[\varphi_i] \tag{2.6}$$

при условии (2.3), следовательно [5], для решения поставленной задачи надо найти операцию

$$\varphi_i^0[t, N_i(\tau)w_i(\tau)] = w_i(t)$$

и имеющую при каждом рассматриваемом значении t наименьшую возможную норму $\rho^*[\varphi_i^0]$. Поэтому необходимо строить разрешающую операцию для идеального сигнала

$$N_i(\tau)w_i(\tau), \qquad \tau \in [t-\vartheta, t] \tag{2.7}$$

При сигнале $\{N_i(\tau)w_i(\tau), u_i(\tau)\}$, где для $N_i(\tau)w_i(\tau)$ $\tau \in [t-\vartheta, t]$, а для $u_i(\tau)$, $\tau \in [t-\vartheta, t)$ необходимо строить линейную операцию так, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_i[t, \{N_i(\tau)w_i(\tau), u_i(\tau)\}] = w_i(t) \qquad (i = 1,2,\ldots) \tag{2.8}$$

Для каждого $i = 1,2,\ldots$ будем рассматривать по отношению к (2.7) "усиленный" сигнал [6].

$$y_i(\tau) = \lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} N_i(\tau)w_i(\tau) \qquad \tau \in [t-\vartheta, t] \tag{2.9}$$

где $\alpha = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – малое число.

3. Решение задачи. Для каждого $i = 1,2,\ldots$ решение однородной части уравнения (2.2) запишется в виде

$$w_i(\tau) = w_i(t)e^{\lambda_i(\tau - t)} \qquad \tau \in [t-\vartheta, t] \tag{3.1}$$

Операции, вычисляющие функции $w_i(t)$, по сигналу (2.9) с учетом (3.1) будем искать в виде

$$\int_{t-\vartheta}^{t} V_i(t,\tau)\lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} N_i(\tau)w_i(t)e^{\lambda_i(\tau - t)}d\tau = w_i(t)$$

или

$$\lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} \int_{t-\vartheta}^{t} V_i(t,\tau)N_i(\tau)e^{\lambda_i(\tau - t)}d\tau = 1 \tag{3.2}$$

Для каждого $i = 1,2,\ldots$ найдем функцию $V_i(t,\tau)$, удовлетворяющую интегральному условию (3.2) и являющуюся оптимальным в смысле

$$\int_{t-\vartheta}^{t} V_i^2(t,\tau)d\tau \to \min \tag{3.3}$$

Решая изопериметрическую задачу (3.2), (3.3), получим

$$V_i^0(t,\tau) = N_i(\tau)e^{\lambda_i(\tau - t)}\left(\lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} \int_{t-\vartheta}^{t} N_i^2(\tau)e^{2\lambda_i(\tau - t)}d\tau\right)^{-1} \tag{3.4}$$

При стационарной матрице $N(x)$ коэффициенты разложения N_i будут постоянными числами, тогда из (3.4) будем иметь

$$V_i^0(t,\tau) = \frac{2e^{-\lambda_i(t-\tau-\vartheta)}}{\lambda_i^{\varepsilon} N_i\left(e^{2\lambda_i \vartheta} - 1\right)} \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$\left(V_i^0(\cdot)\right)^2 = \int_{t-\vartheta}^{t}\left(V_i^0(t,\tau)\right)^2 d\tau = \frac{2}{\lambda_i^{1+2\varepsilon} N_i^2\left(e^{2\lambda_i \vartheta} - 1\right)} = \frac{1}{\lambda_i^{1+2\varepsilon} N_i^2 e^{\lambda_i \vartheta} \operatorname{sh}(\lambda_i \vartheta)} \tag{3.6}$$

Учитывая (2.6) и (3.6), будем иметь

$$\left|\varphi_i^0[t, \Delta_i(\tau)]\right| \le \frac{2\delta_i}{N_i\sqrt{\lambda_i^{1+2\varepsilon}\left(e^{2\lambda_i \vartheta} - 1\right)}} \tag{3.7}$$

Для нормы бесконечномерного вектора $V^0(t,\tau)$ получим

$$\left\|V^0\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left\|V_i^0\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\lambda_i^{1-2\varepsilon}N_i^2\left(e^{2\lambda_i\varepsilon}-1\right)} \qquad (3.8)$$

Этот ряд сходится и ясно, что выбором функции $N(x)$ и ε можно улучшить его сходимость. Поэтому найденная функция $V_i^0(t,\tau)$ (3.5) является оптимальной и универсальной.

Таким образом, оптимальная операция φ_i^0, восстанавливающая $w_i(t)$ с наименьшей погрешностью, будет

$$\varphi_i^0[t, y_i(\tau)] = \int_{t-\theta}^{t} y_i(\tau)V_i^0(t,\tau)d\tau$$

при этом оценка ошибки выражается соотношением (3.7).

Разрешающая операция $\varphi_i[t\{y_i(\tau), u_i(\tau)\}]$ согласно (2.8) будет иметь следующий вид

$$\varphi_i[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}] = \varphi_i^0[t, y_i(\tau)] - \varphi^0\left[t, \lambda_i^0 e^{\lambda_i t}\int_t^0 e^{\lambda_i(t-\tau)}u_i(\tau)d\tau\right]$$

Таким образом, имея оптимальные функции $V_i^0(t,\tau)$ в явном виде (3.4) (или (3.5)), а также значение измерения $y_i(\tau)$, получим $w_i(t)$ с наибольшей точностью. Подставляя полученное значение $w_i(t)$ в (2.1), будем иметь функцию состояния. Сходимость полученного ряда следует из сходимости нормы (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткий А.И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами.//Изв. ВУЗов. Математика. 1995. №11. С.101-124
2. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т. К. Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния (обзор).//Изв. АН СССР. Кибернетика. 1983. № 2. С.123-136
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 736с
4. Тепловые процессы при электрошлаковом переплаве. Под ред. Б.И. Медовара. Киев: Наукова думка. 1978. 305 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с
6. Барсегян В.Р. Задача наблюдения колебаниями струны.// Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. №1. С. 72-78

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 23.03.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 534.1, 539.1

К УПРАВЛЕНИЮ ДВИЖЕНИЕМ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

Габриелян М.С., Мовсисян Л.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մովսիսյան

Առաձգամածուցիկ հեծանի շարժման դեկավարման մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ (Մաքսվելի և Մաքսվել-Թոմսոնի մոդելներ) հեծանի դեկավարման խնդիրը: Օպտիմիզացման հարցը դրվում է սովորական ձևով և խնդիրը լուծվում է մոմենտների պրոբլեմի միջոցով: Սակայն ի տարբերություն առաձգական խնդիրներից, այստեղ օպտիմալ բեռները որոշվում են հաստատուն գումարելիների ճշտությամբ, որի հասար անհրաժեշտ է լինում դարձյալ կատարել միսիմիզացիա

M.S.Gabrielyan, L.A.Movsisyan

On Control of Motion of Viscoelastic beam

В работах [1-3 и др.] были рассмотрены задачи управления движением упругих систем в различных постановках. В настоящей статье изучается задача управления наследственно-упругих систем (на примере балки и для всех деформируемых систем, уравнения движением которых допускает разделения переменных решения строятся аналогичным образом). Задачи для систем с наследственно-упругими свойствами принципиально отличаются от [1-3] не только техникой их решения, но и разнообразием понятия оптимальности. В отличие от упругих задач, когда для заданного времени требуется, чтобы перемещения и скорость принимали определенные значения, для наследственно-упругих систем вследствие ползучести материала необязательно, чтобы интервалы действия нагрузки и желаемого результата совпадали. Так что возможны различные постановки, однако здесь изучается лишь один вариант, аналогичный упругой задаче.

Задача решается с помощью проблемы моментов [4]. Однако в отличие от предыдущих задач, здесь управляющая нагрузка определяется с точностью произвольных постоянных, так что их можно определить, исходя из каких-то соображений целесообразности или еще раз из минимальных условий

1.Уравнение движения балки возьмем в виде

$$\tilde{E}I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,t) \tag{1.1}$$

здесь $\tilde{E}$ – оператор и будем изучать два вида материалов:

а) материал с затухающей памятью, в частности, материал Томпсона-Максвелла

$$\tilde{E}u=E\left[u-\frac{E-H}{En}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}u(\tau)d\tau\right] \tag{1.2}$$

здесь E – мгновенный модуль упругости, H – длительный модуль, n – время релаксации,

б) материал с памятью типа Максвелла – в (1.2) отсутствует H.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\Gamma=\frac{E-H}{En},\qquad \frac{1}{n}=\kappa \tag{1.3}$$

для второго материала $\Gamma=\kappa$.

В (1.1) под $q(x,t)$ подразумевается сумма двух величин: заданная действующая нагрузка $q^{(1)}(x,t)$ и искомая $q^{(2)}(x,t)$ нагрузка, которая оптимальным образом управляет движением объекта. Причем, не обязательно, чтобы интервалы действия $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ совпадали и были расположены по всей длине балки.

К уравнению (1.1) должны быть присоединены еще начальные условия

$$w = \Psi_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Psi_2(x) \text{ при } t = 0 \tag{1.4}$$

Вопрос ставится обычным образом: в момент времени $t = t_1$ движение (1.1) с начальными условиями (1.4) привести к заданному положению и скорости

$$w = \Psi_3(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Psi_4(x) \text{ при } t = t_1 \tag{1.5}$$

при этом минимизируя некоторый функционал (подробно об этом чуть позже).

2. Если перейти к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\tau = at/l$, $a = (E/\rho)^{1/2}$ и искать решение (1.1) в виде

$$w = \sum_{m=1}^{n} f_m(\tau) X_m(\xi) \tag{2.1}$$

где $X_m(\xi)$ – фундаментальные (собственные) функции соответствующей однородной задачи (по этим функциям разлагаются также $q(\xi,\tau)$ и условия (1.4), (1.5)), то для $f_m(\tau)$ будем иметь

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \left[f_m - \Gamma \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\kappa(\tau-\theta)} f_m(\theta) d\theta \right] = q_m(\tau) \tag{2.2}$$

здесь $\omega_m^2 = \dfrac{EI}{\rho S} k_m^4$ – собственные частоты упругой балки, k_m – собственные значения соответствующей однородной задачи.

Преобразованные условия (1.4) и (1.5) для (2.2) соответственно будут

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \psi_m^{(1)}, \quad & f_m(0) &= \psi_m^{(2)} \\ f_m(\tau) &= \psi_m^{(3)}, \quad & f_m(\tau) &= \psi_m^{(4)}, \quad T = at_1/l \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вместо интегродифференциального уравнения (2.2) исключением интегрального члена можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} &\frac{d^3 f_m}{d\tau^3} + \kappa \frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \frac{df_m}{d\tau} + \omega_m^2 (\kappa - \Gamma) f_m = F_m \\ &F_m = F_m^{(0)} + F_m^{(1)} = \left(\frac{dq_m^{(0)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(0)} \right) + \left(\frac{dq_m^{(1)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь к первым условиям (2.3) должны быть добавлены

$$\ddot{f}_m(0) = \psi_m^{(1)} = -\omega_m^2 \psi_m^{(1)} \tag{2.5}$$

В дальнейшем, там, где не создается путаница, для краткости индексы m будем опускать.

В случае а) характеристическое уравнение для (2.4) имеет один действительный и два комплексных (сопряженных) корня, причем действительная часть отрицательна

$$\begin{gathered}
p_1 = -2\sqrt{\frac{a}{3}}\operatorname{ctg} 2\varepsilon = \alpha < 0 \\
p_{2,3} = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\operatorname{ctg} 2\varepsilon \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\varepsilon\right) = \beta \pm i\gamma, \quad (\beta < 0,\ \gamma > 0) \\
\operatorname{tg} 2\varepsilon = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}, \quad \left(|\varepsilon| \le \frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2}{b}\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}, \quad \left(|\delta| \le \frac{\pi}{2}\right) \\
a = \omega^2 - \frac{\kappa^2}{3}, \quad b = 2\left(\frac{\kappa}{3}\right)^3 - \frac{\kappa\omega^2}{3} + \omega^2(\kappa - \Gamma)
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Для случая б) $(\kappa = \Gamma)$ корни характеристического уравнения суть

$$\begin{gathered}
p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \beta \pm i\gamma \\
\beta = -\frac{\kappa}{2}, \quad \gamma = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Поставленную задачу будем решать с помощью проблемы моментов [4].

В качестве минимизируемого функционала будем изучать два случая:

а) можно минимизировать квадратичный функционал от искомой нагрузки $q^{(1)}(x,t)$, т.е.

$$I_1 = \int_0^T \int_0^1 \left[q^{(1)}(\xi,\tau)\right]^2 d\xi d\tau \tag{2.8}$$

Учитывая, что фундаментальные функции $X_m(\xi)$ ортогональны и $q_m^{(1)}(\tau)$ независимы, минимизация функционала (2.8) равносильна минимизации

$$I_m^{(1)} = \int_0^T \left[q_m^{(1)}(\tau)\right]^2 d\tau \tag{2.9}$$

б) так как в дифференциальном уравнении правая часть есть $F = F^{(0)} + F^{(1)}$, по аналогии (2.8) можно минимизировать $F^{(1)}$, которая приводит к условиям типа (2.9), т.е

$$I_m^{(2)} = \int_0^T \left[F_m^{(1)}(\tau)\right]^2 d\tau = \int_0^T \left[\frac{dq_m^{(1)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(1)}\right]^2 d\tau \tag{2.10}$$

3.Построим теперь фундаментальную матрицу. Для первого материала

$$y_{11} = \frac{1}{\Delta}\left\{\sigma Y_1 + Y_2\left[\alpha(\alpha - 2\beta)Y_4 - \frac{\alpha}{\gamma}(\gamma^2 - \beta\alpha + \beta^2)Y_3\right]\right\}$$

$$y_{21} = \frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha\sigma Y_1 + Y_2\sigma\left[\frac{\alpha}{\gamma}(\alpha - \beta)Y_3 + \alpha Y_4\right]\right\}$$

$$y_{31} = \frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha^2\sigma Y_1 + \frac{\alpha}{\gamma}Y_2\left[(\alpha\beta(\beta^2 + 2\gamma^2) - \sigma^2)Y_3 + \alpha\beta\sigma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{12} = \frac{1}{\Delta}\left\{2\beta Y_1 + Y_2\left[\frac{1}{\gamma}(\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2)Y_3 - 2\beta Y_4\right]\right\}$$

$$y_{22} = \frac{1}{\Delta}\left\{2\alpha\beta Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2\left[\beta(\sigma - \alpha^2)Y_3 - \gamma(\alpha^2 + \sigma)Y_4\right]\right\}$$

$$y_{32} = \frac{1}{\Delta}\left\{2\alpha^2\beta Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2\left[(\sigma^2 + \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2))Y_3 - 2\alpha^2\beta\gamma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{13} = \frac{1}{\Delta}\left\{-Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2\left[(\beta - \alpha)Y_3 + \gamma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{23} = \frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2\left[(\alpha^2 - \sigma)Y_3 + \alpha\gamma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{33} = \frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha^2 Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2\left[(\alpha(\beta^2 - \gamma^2) - \beta\sigma)Y_3 + \gamma(2\alpha\beta - \sigma)Y_4\right]\right\}$$

здесь

$\Delta = \gamma^2 + (\alpha - \beta)^2$, $\sigma = \beta^2 + \gamma^2$, $Y_1 = e^{\alpha\tau}$, $Y_2 = e^{\beta\tau}$, $Y_3 = \sin\gamma\tau$, $Y_4 = \cos\gamma\tau$

Для второго материала элементы фундаментальной матрицы получатся из предыдущих, положив $\alpha = 0$.

Имея фундаментальную матрицу (y_{ij}), по формуле Коши решение системы (2.4) запишем

$$y(\tau) = Y(\tau,0)y(0) + \int_0^\tau \begin{pmatrix} y_{13}(\tau,\theta) \\ y_{23}(\tau,\theta) \\ y_{33}(\tau,\theta) \end{pmatrix}\left(F^{(0)}(\theta) + F^{(1)}(\theta)\right)d\theta \qquad (3.1)$$

Учитывая начальные и конечные значения для функций $y_i(\tau)$, получим следующее интегральное условие:

$$\int_0^t h_i(\theta)F^{(1)}(\theta)d\theta = c_i \qquad (3.2)$$

здесь

$$h_i(\theta) = y_{i3}(T,\theta), \qquad i = 1,2,3$$

$$c_i = y_i(0) - \left(y_{ij}(0,T)\right)\psi_i - \int_0^T \begin{pmatrix} y_{13}(0,\theta) \\ y_{23}(0,\theta) \\ y_{33}(0,\theta) \end{pmatrix} F^{(0)}(\theta)\,d\theta \tag{3.3}$$

$$\psi_i = \Psi\left(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(5)}\right)$$

При (3.3) норма основного пространства определится

$$\rho_0^2 = \min_{\sum_{i=1}^{3} l_i c_i = 0} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{3} l_i h_i(\theta)\right]^2 d\theta > 0 \tag{3.4}$$

т.к. функции $h_i(\theta)$ линейно независимы. Если обозначить через

$$s_{ij} = \int_0^T h_i(\theta) h_j(\theta)\,d\theta. \quad (i, j = 1,2,3) \tag{3.5}$$

то (3.4) можно записать в виде

$$\rho_0^2 = \min_{\sum_{i=1}^{3} l_i c_i = 0} \sum_{i,j=1}^{3} s_{ij} l_i l_j$$

Учитывая, что матрица $\|s_{ij}\|$ симметричная и определенно положительная, для минимизирующих l_i получим

$$l_i^0 = A_i \Big/ \sum_{i=1}^{3} A_i c_i, \qquad i = 1,2,3$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} c_1 & s_{12} & s_{13} \\ c_2 & s_{22} & s_{23} \\ c_3 & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} s_{11} & c_1 & s_{13} \\ s_{21} & c_2 & s_{23} \\ s_{31} & c_3 & s_{33} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & c_1 \\ s_{21} & s_{22} & c_2 \\ s_{31} & s_{32} & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = |s_{ij}| > 0$$

Тогда для оптимальной $F_0^{(1)}$ получим

$$F_0^{(1)}(\tau) = \frac{1}{\rho_0^2}\sum_{i=1}^{3} l_i^0 h_i(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i h_i(\tau)}{\sum_{i=1}^{3} A_i c_i} \tag{3.7}$$

Однако, оптимальная нагрузка определится, исходя из связи (2.4)

$$\frac{dq^{(1)}}{d\tau} + \kappa q^{(1)} = F_0^{(1)}(\tau) \tag{3.8}$$

то есть

$$q_0^{(1)}(\tau) = Ce^{-\kappa\tau} + \int_0^{\tau} e^{-\kappa(\tau-\theta)} \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i h_i(\theta)}{\sum_{i=1}^{3} A_i c_i} d\theta \qquad (3.9)$$

Оптимальную нагрузку можно определить и исходя из (2.9). Если в (3.2) поставить связь между $q^{(1)}$ и $F^{(1)}$ по (2.4) и совершить интегрирование по частям, то взамен (3.2) будем иметь

$$\tilde{c}_i = \int_0^T \tilde{h}_i(\tau) q^{(1)}(\tau) d\tau, \qquad (i = 1,2,3) \qquad (3.10)$$

где уже

$$\tilde{c}_i = c_i + \left(h_i(0) q^{(1)}(0) - h_i(\tau) q^{(1)}(\tau)\right)$$
$$\tilde{h}_i(\tau) = \kappa h_i(\tau) - \kappa h_i(\tau) \qquad (3.11)$$

Окончательные выражения для $q_0^{(1)}$ будут определяться по виду (3.7), но уже соответствующие величины должны быть заменены величинами с волной по (3.11).

Как видно из (3.9) и из последнего выражения для $q_0^{(1)}$, они определяются с точностью до постоянных слагаемых, в частности, значения $q_0^{(1)}(0)$ и $q_0^{(1)}(\tau)$. Произвольные постоянные можно выбирать как из специфики и удобства осуществления оптимальной нагрузки, так и, что еще естественно, из новых минимальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы.//Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №3. С.15-23.
2. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Некоторые задачи оптимального управления движением упругих систем./Сб.научн.тр.конференции. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: 1997. с.67-70.
3. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем.//Изв.НАН РФ. МТТ. 1999. №6. С.146-153.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
23.01.2004