ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան, Ս.Հ. Ջիլավյան

Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ առաձգական ներդիրով առաձգական տարածությունում

Աշխատանքում հետազոտվում է անվերջությունից կիսաանվերջ առաձգական ներդիրին ընկնող սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը: Խնդիրը բերվում է Վիներ-Հոփի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծման: Ստացվում են ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտային լարումների համար ներդիրի եզրի մոտակայքում և նրանից հեռու կետերում: Հեռավոր գոտում տրված են տեղափոխության ասիմպտոտական ներկայացումները: Ստվերի և անդրադարձման ալիքի տիրույթներում, կոնտակտի տեղամասում առկա է Լյավի մակերևութային ալիքը:

K.L. Agayan, E.Kh. Grigoryan, S.H. Jilavyan

Diffraction of a plane shear wave on the elastic space with the semi-infinite elastic inclusion

В работе исследована задача дифракции сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности на полубесконечное упругое включение. Задача сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа. Получены асимптотические формулы контактных напряжений в окрестности края включения и в далеких от него точках. В дальней зоне даны асимптотические представления перемещения. Показано наличие поверхностной волны Лява в области тени и отраженной волны, а также на участке контакта.

В работе рассматривается дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом на полубесконечное включение. Решение задачи представляется в виде суммы своей четной и нечетной частей. Рассматривая случай длинных волн, эти задачи (четная и нечетная) моделируются соответствующим образом, после чего каждая из них сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа.

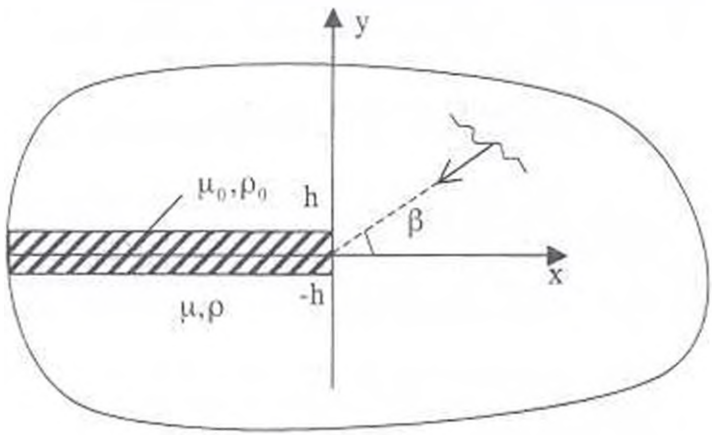
Получены асимптотические формулы для амплитуды перемещения в дальней зоне. В области тени и отраженной волны, а также на участке контакта эти формулы содержат волновую часть, обусловленную локализованной (поверхностной) волной Лява. Получены также асимптотические формулы для амплитуды контактных напряжений в окрестности края включения и в далеких от него точках. Причем отметим, что из решения рассматриваемой задачи предельным переходом получены решения соответствующих предельных задач — трещина или жесткое включение.

В работах [1,2] рассмотрена задача об установившихся сдвиговых колебаниях упругого пространства с полубесконечным упругим включением под действием линейного источника колебаний. Учитывая малость толщины включения, предложена модель поставленной задачи, которая сводит задачу к решению системы двух функциональных уравнений Винера-Хопфа. Однако в полученном таким путем решении отсутствует локализованная (поверхностная) волна Лява — важный компонент волнового поля, следовательно предложенная в [1,2] модель задачи неадекватна поставленной исходной задаче.

1. Рассмотрим упругое пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, содержащее упругое полубесконечное включение в виде занимающего область $\Omega_0\left(\infty < x \le 0, |y| \le h, |z| < \infty\right)$ полубесконечного слоя с малой толщиной $2h$ (фиг.1). Пусть из бесконечности под углом β падает плоская сдвиговая волна (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опускается, т.е. задача решается в амплитудах, t — параметр времени) с амплитудой

$$u_z^{(\infty)}(x,y) = e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta} \tag{1.1}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $c = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения сдвиговой волны μ, ρ и μ_0, ρ_0 — модули сдвига и плотности пространства и упругого включения, соответственно, ω — частота колебаний, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.



Фиг. 1.

Среда находится в условиях антиплоской деформации. Ставится задача определить дифрагированное волновое поле как на участке контакта, так и во всем пространстве. Для решения поставленной задачи представим $u_z^{(\infty)}(x,y)$ в виде суммы своей четной

$$u_{z1}^{(\infty)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{-ikx\cos\beta + iky\sin\beta} + e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta}\right) \tag{1.2}$$

и нечетной

$$u_{z2}^{(\infty)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta} - e^{-ikx\cos\beta + iky\sin\beta}\right) \tag{1.3}$$

частей. Тогда перемещение также представится в виде

$$u_z(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) \tag{1.4}$$

здесь уже $w_1(x,y)$ — четная часть, а $w_2(x,y)$ — нечетная часть амплитуды упругого перемещения пространства. Следовательно, решение поставленной задачи сводится к определению функций $w_1(x,y)$ и $w_2(x,y)$, т.е. к определению перемещений четно и нечетно (относительно y) поставленных задач.

Рассмотрим четную задачу. Пусть из бесконечности падает сдвиговая плоская волна с амплитудой $u_{z1}^{(\infty)}(x,y)$. Уравнение движения для точек пространства имеет вид

$$\Delta w_1(x,y)+k^2 w_1(x,y)=0 \tag{1.5}$$

а для включения —

$$\Delta w_1^{(0)}(x,y)+k_0^2 w_1^{(0)}(x,y)=0, \quad x,y\in\Omega_0 \tag{1.6}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $w_1^{(0)}(x,y)$ — амплитуда упругого перемещения включения, $k_0=\omega/c_0$ — волновое число, $c_0=\sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорость распространения сдвиговой волны включения.

Считая толщину включения достаточно малой, т.е. $hk_0<<1$, осредним перемещение $w_1^{(0)}(x,y)$ по толщине, отождествляя слой с его срединной плоскостью. Тогда из (1.6) приходим к уравнению

$$\frac{d^2u_1^{(0)}(x)}{dx^2}+k_0^2u_1^{(0)}(x)+\frac{1}{h\mu_0}q_1(x)=0, \quad x<0 \tag{1.7}$$

где $$u_1^{(0)}(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}w_1^{(0)}(x,y)dy, \qquad q_1(x)=\tau_{yz}^{(0)}(x,h)=-\tau_{yz}^{(0)}(x,-h) \tag{1.8}$$

$q_1(x)$ — интенсивность контактных напряжений, действующих на контактных участках между слоем и пространством.

Срединная полуплоскость слоя, которая совпадает с полуплоскостью $(y=0,\ x<0,\ |z|<\infty)$, имеет жесткость $h\mu_0$, а жесткость полуплоскости $(y=0,\ x>0,\ |z|<\infty)$ нулевая. Поэтому они не могут контактировать по линии $(x=0,\ y=0)$. Следовательно, имеет место условие

$$\left.\frac{du_1^{(0)}(x)}{dx}\right|_{x=-0}=0 \tag{1.9}$$

указывающее, что следовало изначально пренебрегать контактными напряжениями на участке $(x=0,\ |y|\le h,\ |z|<\infty)$, т.е. $\tau_{xz}^{(0)}(0,y)=0$.

Введем функции

$$f^+(x)=\theta(x)f(x), \quad f^-(x)=\theta(-x)f(x) \tag{1.10}$$

где $\theta(x)$ — известная функция Хевисайда. Тогда уравнение (1.7) при условии (1.9) запишется в виде

$$\frac{d^2u_1^{(0)-}}{dx^2}+k_0^2u_1^{(0)-}(x)=-u_1^{(0)}(0)\delta'(x)-\frac{1}{h\mu_0}q_1^-(x) \ \ (-\infty<x<\infty) \tag{1.11}$$

где $u_1^{(0)}(0)$ — неизвестная постоянная, подлежащая определению. После преобразования Фурье из (1.11) получим

$$\overline{u}_1^{-(0)}(\sigma)=\frac{i\sigma u_1^{(0)}(0)}{k_0^2-\sigma^2}-\frac{\overline{q}_1^-(\sigma)}{h\mu_0(k_0^2-\sigma^2)} \tag{1.12}$$

$$\overline{u}_1^{-(0)}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}u_1^{(0)}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{q}_1^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}q_1^-(x)e^{i\sigma x}dx$$

причем действительная ось (линия интегрирования) обходит точку $-k_0$ сверху, а k_0 – снизу.

Поскольку мы уже считаем, что слой совпадает со своей срединной плоскостью (принимая вышеприведенную модель упругого включения), то имеют место следующие условия контакта:

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=+0}-\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=\frac{2}{\mu}q_1^-(x),\quad(-\infty<x<\infty) \tag{1.13}$$

$$w_1(x,0)=u_1^{(0)}(x)\quad(x<0) \tag{1.14}$$

Приступив к решению уравнения (1.5), введем функцию

$$W_1(x,y)=w_1(x,y)-u_{d1}^{(\infty)}(x,y) \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) и (1.5), после преобразования Фурье получим

$$\frac{d^2\overline{W}_1(\sigma,y)}{dy^2}-\gamma^2\overline{W}_1(\sigma,y)=0;\quad \gamma^2=\sigma^2-k^2 \tag{1.16}$$

Выберем то решение уравнение (1.16), которое представляет уходящую волну

$$\overline{W}_1(\sigma,y)=C_1\overline{e}^{\gamma|y|} \tag{1.17}$$

Предполагается, что $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, а для $|\sigma|<k$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т.е. решение уравнения в виде формулы (1.17) представляет уходящую волну. Для выбора такой ветви двузначной функции $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ разрезы до бесконечности от точек $\sigma=k$ в верхней полуплоскости и $\sigma=-k$ – в нижней полуплоскости. т.е. действительная ось обходит точки ветвления $-k$ сверху, а k – снизу [4].

Применив преобразование Фурье к контактным условиям, из (1.13), имея в виду (1.17), получим

$$C_1(\sigma)=-\overline{q}_1^-(\sigma)/\mu\sqrt{\sigma^2-k^2} \tag{1.18}$$

а из (1.14) получим следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа относительно $\overline{w}_1^+$ и $\overline{q}_1^-$:

$$\overline{w}_1^+(\sigma,0)+\overline{K}(\sigma)\overline{q}_1^-(\sigma)=2\pi\delta(\sigma-k\cos\beta)+\frac{i\sigma u_1^{(0)}(0)}{\sigma^2-k_0^2} \tag{1.19}$$

где
$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\overline{K}_1(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}};\quad \overline{K}_1(\sigma)=\frac{L(\sigma)}{h\mu_0(\sigma^2-k_0^2)}$$

$$L(\sigma)=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}+h\mu_0(\sigma^2-k_0^2) \tag{1.20}$$

Функция Лява $L(\sigma)$ при $k < k_0$ имеет единственный действительный корень

$$\sigma_L = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2k_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_1\sqrt{\lambda_1^2 + 4\left(k_0^2 - k^2\right)}};\ \lambda_1 = \frac{\mu}{\mu_0 h};\quad k < \sigma_L < k_0 \quad (1.21)$$

Очевидно, что $-\sigma_l$ также является нулем функции $L(\sigma)$. При этом действительная ось обходит точку $\sigma = -\sigma_l$ сверху, а $\sigma = \sigma_l$ – снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны.

Отметим, что в дальнейшем, в основном, будем считать, что $k < k_0$.

Для решения функционального уравнения (1.19) факторизуем функцию $\bar{K}(\sigma)$, представив ее в виде [4]

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma)\bar{K}^-(\sigma) \quad (1.22)$$

где $\bar{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а $\bar{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$. $\alpha = \sigma + i\tau$. Здесь

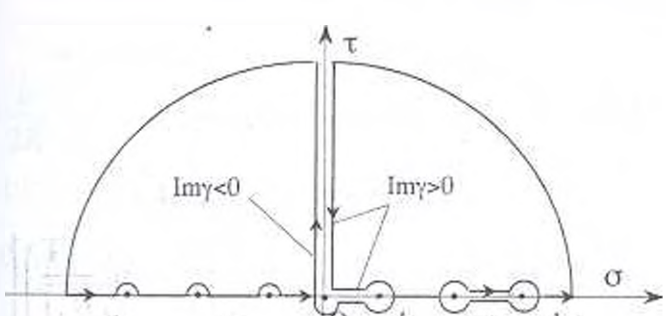
$$\bar{K}^\pm(\sigma) = \bar{K}_1^\pm(\sigma)/\sqrt{\mu(\sigma \pm k)};\qquad \bar{K}_1^\pm(\sigma) = \exp\left(F_1^\pm(\sigma)\right)$$

$$\bar{F}_1^+(\sigma) = \int_0^\infty F_1(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx;\qquad \bar{F}_1^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F_1(x)e^{ix(\sigma-i0)}dx \quad (1.23)$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\bar{K}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1 + \frac{\lambda_1\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sigma^2 - k_0^2}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Из выражения $\bar{K}_1(\sigma)$ (1.20) видно, что $\ln\bar{K}_1(\sigma) = O\left(\lambda_1|\sigma|^{-1}\right)$ при $|\sigma| \to \infty$, т.е. $F_1(x)$ имеет порядок $\ln|x|$ при $|x| \to 0$, тогда из (1.23) следует, что $\bar{F}_1^\pm(\sigma) = O\left(\frac{\ln(\sigma \pm i0)}{\sigma \pm i0}\right)$ при $|\sigma| \to \infty$. Следовательно, функции $\bar{K}^\pm(\alpha)$ стремятся к единице при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Вычислим $\bar{K}_1^-(\sigma)$ методом контурного интегрирования, рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на фиг. 2. Замыкая контур интегрирования (1.23) в верхней полуплоскости при



Фиг. 2

помощи леммы Жордана; получим

$$F_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2+\tau^2}}{k_0^2+\tau^2}e^{\tau x}d\tau+\frac{i}{\pi}\int_0^k\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2-\sigma^2}}{k_0^2-\sigma^2}e^{-i\sigma x}d\sigma+i\int_{\sigma_l}^{k_0}e^{-i\sigma x}dx$$

$$(x<0) \tag{1.24}$$

Тогда из (1.23) будем иметь

$$\overline{F}_1^-(\sigma)=\ln\frac{\sigma-i0-\sigma_l}{\sigma-i0-k_0}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2+\tau^2}}{k_0^2+\tau^2}\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-i0)}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^k\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2-s^2}}{k_0^2-s^2}\frac{ds}{\sigma-i0-s}$$

Следовательно,

$$\overline{K}_1^-(\sigma)=\frac{\sigma-i0-\sigma_l}{\sigma-i0-k_0}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2+\tau^2}}{k_0^2+\tau^2}\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-i0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^k\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2-s^2}}{k_0^2-s^2}\frac{ds}{\sigma-i0-s}\right]$$

$$\overline{K}_1^+(\sigma)=\overline{K}_1^-(-\sigma). \tag{1.25}$$

Надо иметь в виду, что $\dfrac{1}{s-(\sigma-i0)}=\dfrac{1}{s-\sigma}-i\pi\delta(s-\sigma)$.

Приступим теперь к решению функционального уравнения (1.19). После обычной процедуры для решения данного уравнения методом Винера-Хопфа [4], (1.19) сводится к уравнению

$$\overline{M}^-(\sigma)=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma-k}}{\overline{K}_1^-(\sigma)}\overline{w}_1^+(\sigma,0)-\frac{i\sqrt{k+k\cos\beta}}{\overline{K}_1^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma-k\cos\beta+i0}-$$

$$-\frac{iu_1^{(0)}(0)\sqrt{\mu}}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)(\sigma+k_0)}+\frac{1}{\sigma-k_0}\left(\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)}-\frac{\sqrt{k+k_0}}{\overline{K}_1^+(k_0)}\right)\right]=$$

$$=\frac{\overline{K}_1^-(\sigma)}{\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma-k}}\overline{q}_1^-(\sigma)-\frac{i\sqrt{k+k\cos\beta}}{\overline{K}_1^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma-k\cos\beta-i0}+$$

$$+\frac{iu_1^{(0)}(0)\sqrt{\mu}}{2}\frac{\sqrt{k_0+k}}{\overline{K}_1^+(k_0)(\sigma-k_0)}=\overline{M}^-(\sigma)\qquad-\infty<\sigma<\infty \tag{1.26}$$

Отметим, что при получении (1.26) имелось в виду, что

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\beta)=\frac{1}{\sigma-k\cos\beta-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\beta+i0}$$

$$\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^-(\sigma)}\frac{i\sigma}{\sigma^2-k_0^2}=\frac{i}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)(\sigma+k_0)}+\frac{1}{(\sigma-k_0)}\left(\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)}-\frac{\sqrt{k_0+k}}{\overline{K}_1^+(k_0)}\right)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{k_0+k}}{2\overline{K}_1^+(k_0)}\frac{i}{\sigma-k_0}$$

где первое слагаемое регулярно в верхней полуплоскости, а вторая — в нижней.

Дальнейший ход решения уравнения (1.26) такой же, как в [5]. Применив к (1.26) обратное преобразование Фурье, получим

$$M^+(x)=M^-(x), \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.27}$$

которое может иметь место только, если

$$M^+(x)=M^-(x)=\sum_{k=0}^{n} m_k\delta^{(k)}(x) \tag{1.28}$$

где $\delta^{(k)}(x)$ — k-ая производная функции Дирака $\delta(x)$ [6,7]. Применив к (1.28) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$M^+(\sigma)=M^-(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-i)^k m_k\sigma^k \tag{1.29}$$

Так как [8], $q_1^-(x)=O\left(x_-^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $x\to-0$, а $w_1^+(0,0)$ — конечная величина, то из свойств интегралов Фурье следует, что

$$\overline{q}_1^-(\sigma)=O\left((\sigma-io)^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \overline{w}^+(\sigma,0)=O\left((\sigma+io)^{-1}\right) \quad \text{при} \quad |\sigma|\to\infty.$$

Следовательно, с учетом того, что $\overline{K}^+(\sigma)\to1$ при $|\sigma|\to\infty$, из (1.26) и (1.29) следует, что $m_k=0$ $(k=0,1..n)$, т.е.

$$\overline{M}^+(\sigma)=\overline{M}^-(\sigma)\equiv0 \tag{1.30}$$

Таким образом получим решение в виде

$$\frac{1}{\mu}\overline{q}_1^-(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma-k}}{\overline{K}_1^-(\sigma)}\left(\frac{a_1}{\sigma-k_0}-\frac{a_2}{\sigma-k\cos\beta-i0}\right) \tag{1.31}$$

$$\begin{gathered}\overline{w}_1^+(\sigma,0)=\frac{\overline{K}_1^+(\sigma)}{\sqrt{\sigma+k}}\frac{a_2}{\sigma-k\cos\beta+i0}+\\ +\frac{iu_1^{(0)}(0)}{2}\left[\frac{1}{\sigma+k_0}+\frac{1}{\sigma-k_0}\left(1-\frac{\sqrt{k_0+k}}{\overline{K}_1^+(k_0)}\frac{\overline{K}_1^+(\sigma)}{\sqrt{\sigma+k}}\right)\right]\end{gathered} \tag{1.32}$$

где $a_1=\dfrac{iu_1^{(0)}(0)}{2\overline{K}_1^+(k_0)}\sqrt{k+k_0}$; $a_2=\dfrac{i\sqrt{2k}\cos\beta/2}{\overline{K}_1^+(k\cos\beta)}$.

Из (1.12) и (1.31) определяется $u_1^{(0)}(0)$

$$u_1^{(0)}(0)=\frac{4i\lambda_1\cos\beta/2\sqrt{2k(k+k_0)}k_0\overline{K}_1^+(k_0)}{[(2k_0\overline{K}_1^+(k_0))^2+i\lambda_1(k_0+k)]\,(k_0+k\cos\beta)\overline{K}_1^+(k\cos\beta)} \tag{1.33}$$

Имея $\overline{q}_1^-(\sigma)$ из (1.31), с помощью (1.15), (1.17), (1.18) окончательно получим решение поставленной четной задачи.

2. Рассмотрим теперь нечетную задачу. Пусть из бесконечности падает сдвиговая плоская волна $u_{z2}^{(e)}(x,y)$ (1.3)

Уравнение движения имеет вид

$$\Delta w_2(x,y)+k^2 w_2(x,y)=0 \tag{2.1}$$

Введем функцию перемещения

$$W_2(x,y)=w_2(x,y)-u_{z2}^{(e)}(x,y) \tag{2.2}$$

которое удовлетворяет уравнению движения и представляет уходящую волну.

После преобразования Фурье, аналогично четной задаче, получим

$$\overline{W}_2(\sigma,y)=\overline{w}_2(\sigma,y)+2\pi i\sin(ky\sin\beta)\delta(\sigma-k\cos\beta)=C_2(\sigma)\operatorname{sgn}y\, e^{-\gamma|y|} \tag{2.3}$$

Относительно включения, в силу тонкости, полагая, что напряжение $\tau_{yz}^{(0)}(x,y)$ распределено равномерно по толщине, с учетом нечетности задачи $w_2^{(0)}(x,0)=0$ получим:

$$w_2^{(0)}(x,y)=\frac{1}{\mu_0}yq_2^-(x);\qquad q_2^-(x)=\tau_{yz}^{(0)}(x,y),\qquad (x<0) \tag{2.4}$$

где $q_2^-(x)$ – интенсивность искомых контактных напряжений.

Условие контакта имеет вид

$$w_2(x,\pm 0)=w_2^{(0)}(x,\pm h),\qquad (x<0) \tag{2.5}$$

После преобразования Фурье из (2.4), (2.5) получим

$$C_2=\frac{h}{\mu_0}\overline{q}_2^-(\sigma) \tag{2.6}$$

а из (2.3)

$$-\sqrt{\sigma^2-k^2}C_2=\frac{1}{\mu}\overline{q}_2^-(\sigma)+\frac{1}{\mu}\overline{q}_2^+(\sigma)+2\pi ik\sin\beta\delta(\sigma-k\cos\beta) \tag{2.7}$$

причем, здесь имелось в виду, что

$$\left.\frac{\partial\overline{w}_2}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{1}{\mu}\left(\overline{q}_2^-(\sigma)+\overline{q}_2^+(\sigma)\right) \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.7) приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\overline{q}_2^-(\sigma)+R(\sigma)\overline{w}_2^-(\sigma,0)=-2\pi ik\mu\sin\beta\delta(\sigma-k\cos\beta)\qquad(-\infty<\sigma<\infty) \tag{2.9}$$

$$\overline{R}(\sigma)=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}_2(\sigma);\quad \overline{K}_2(\sigma)=1+\lambda_2\left(\sigma^2-k^2\right)^{-\frac{1}{2}};\quad \lambda_2=\frac{\mu_0}{h\mu} \tag{2.10}$$

Таким образом, решение нечетной задачи свелось к функциональному уравнению (2.9) относительно $\overline{q}_2^-(\sigma)$ и $\overline{w}_2^-(\sigma,0)$.

Так как напряжение $\tau_{yz}^{0}(x)$ прямо пропорционально перемещению и конечно, следовательно, $q_2^-(0)$ также конечна и $\overline{q}_2^-(\sigma)\sim O(\sigma-i0)^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$.

Поступая, как при решении четной задачи, получим решения функционального уравнения (2.9) в виде

$$\frac{1}{\mu}\overline{q}_2^+(\sigma)=\frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{\overline{K}_2^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}_2^+(\sigma)}{\sigma-k\cos\beta+i0} \tag{2.11}$$

$$\overline{w}_2^-(\sigma,0)=\frac{h}{\mu_0}\overline{q}_2^-(\sigma)=-\frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{\overline{K}_2^-(k\cos\beta)}\frac{1}{\sqrt{\sigma-k}\,\overline{K}_2^-(\sigma)}\frac{1}{\sigma-k\cos\beta-i0} \tag{2.12}$$

$$\overline{K}_2^-(\sigma)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2}{\sqrt{k^2+\tau^2}}\frac{d\tau}{\tau-i(\sigma-i0)}+\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2}{\sqrt{k^2-s^2}}\frac{ds}{\sigma-i0-s}\right]$$

$$\overline{K}_2^+(\sigma)=\overline{K}_2^-(-\sigma) \tag{2.13}$$

3. Решение поставленной исходной задачи, как уже отметили, представляется в виде суммы решений рассмотренных выше четной и нечетной задач

$$u_z(x,y)=u_z^{(x)}(x,y)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(C_1(\sigma)+\operatorname{sgn} y\,C_2(\sigma)\right)e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.1}$$

$$q^-(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{q}_1^-(\sigma)+\overline{q}_2^-(\sigma)\right)e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.2}$$

где $u_z^{(x)}(x,y)$ представляется формулой (1.1), а $C_1(\sigma),C_2(\sigma),\overline{q}_1^-(\sigma),\overline{q}_2^-(\sigma)$ - формулами (1.18), (2.6), (1.31), (2.11).

Из (3.1), проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $-k-i\tau,\ k+i\tau\ (0<\tau<\infty)$, обходя точки $\sigma=k\cos\beta$ и $\sigma=\sigma_L$ снизу, а $\sigma=-\sigma_L$ сверху, и замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, для амплитуды перемещений в контактной зоне $(x<0,y=\pm0)$ получим

$$\begin{gathered}u_z(x,\pm0)=\left(1+A_{01}\pm A_{02}\right)e^{-ikx\cos\beta}+A_Le^{-i\sigma_Lx}+\\+\frac{e^{-i\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi}\int_0^\infty\sqrt{\tau}\left(\lambda_1f_1(\tau)\mp f_2(\tau)\right)e^{\tau x}d\tau\qquad(x<0)\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $A_{01}=\dfrac{k^2\cos^2\beta-k_0^2}{k_0^2-k^2\cos^2\beta+ik\lambda_1\sin\beta}$; $\qquad A_{02}=\dfrac{ik\sin\beta}{ik\sin\beta-\lambda_2}$

$$A_L=\frac{i(\sigma_L+k_0)\sqrt{\sigma_L-k}\,\overline{K}_1^-(\sigma_L)}{\sigma_L\left(\lambda_1+2\sqrt{\sigma_L^2-k^2}\right)}\left(a_2\frac{\sigma_L-k_0}{\sigma_L-k\cos\beta}-a_1\right) \tag{3.4}$$

$$f_1(\tau)=\left(-a_1+a_2\frac{k-k_0+i\tau}{k-k\cos\beta+i\tau}\right)\frac{(k+k_0+i\tau)\overline{K}_1^-(k+i\tau)}{\lambda_1^2\left(2ik\tau-\tau^2\right)-\left(k_0^2-k^2+\tau^2-2ik\tau\right)^2}$$

$$f_2(\tau)=\frac{\sqrt{2k}(2k+i\tau)\sin\beta/2}{(k-k\cos\beta+i\tau)\left(\lambda_2^2+\tau^2-2ik\tau\right)}\frac{\overline{K}_2^+(k+i\tau)}{\overline{K}_2^-(k\cos\beta)},$$

а из (3.2) для контактного напряжения —

$$\frac{1}{\mu}q(x)=A_0^{(q)}e^{-ikx\cos\beta}+A_L^{(q)}e^{-i\sigma_L x}+$$

$$+\frac{e^{-i\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi}\int_0^{\infty}\sqrt{\tau}\left(\left(k_0^2+\tau^2-k^2-2ik\tau\right)f_1(\tau)-\lambda_2 f_2(\tau)\right)e^{\tau x}d\tau \quad (x<0) \tag{3.5}$$

$$A_0^{(q)}=\frac{ik\left(k^2\cos^2\beta-k_0^2\right)\sin\beta}{k_0^2-k^2\cos^2\beta+i\lambda_1 k\sin\beta}+\frac{\lambda_2 k\sin\beta}{k\sin\beta+i\lambda_2} \quad A_L^{(q)}=-\sqrt{\sigma_L^2-k^2}A_l \tag{3.6}$$

Из (3.3) следует, что волновое поле в контактной зоне складывается из следующих компонентов: падающая волна, отраженная волна, поверхностная (локализованная) волна Лява и сдвиговая объемная волна. Отметим, что если $k_0<k$, то в соответствующих выражениях волна Лява отсутствует, а в (1.25) множитель при экспоненте $\dfrac{\sigma-i0-\sigma_L}{\sigma-i0-k_0}$ следует заменить единицей.

Следует особо отметить, что в выражениях (3.3), (3.5) наличие компонент поверхностной волны Лява и сдвиговой объемной волны обусловлено наличием ребра (кромки) упругого включения, так что в случае бесконечного включения эти члены отсутствуют при данной постановке задачи.

Приведем асимптотическое представление контактного напряжения в близкой к концу включения и далекой от него зонах

$$\frac{1}{\mu}q^-(x)=\frac{a_1-a_2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{|x|^{\frac{1}{2}}}+O(1) \quad x\to-0$$

$$\frac{1}{\mu}q^-(x)=A_0^{(q)}e^{-ikx\cos\beta}+A_L^{(q)}e^{-i\sigma_L x}+e^{-i\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{B_q^{(0)}}{2\sqrt{\pi}|x|^{\frac{3}{2}}}+O\left(|x|^{-\frac{5}{2}}\right)\right) \quad x\to-\infty \tag{3.7}$$

где $B_q^{(0)}=\left(\dfrac{\sqrt{2k}\,\overline{K}_2^-(k)}{\lambda_2\sin\dfrac{\beta}{2}\overline{K}_2^-(k\cos\beta)}-\dfrac{\overline{K}_1^-(k)}{k_0-k}\left(a_1+a_2\dfrac{k_0-k}{k-k\cos\beta}\right)\right)$

а перемещение при $x\to-\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$u_z(x,\pm0)=\left(1+A_{01}\pm A_{02}\right)e^{-ikx\cos\beta}+A_L e^{-i\sigma_L x}+e^{-i\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{B_u^{(0)}}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}+O\left(|x|^{-\frac{5}{2}}\right)\right) \tag{3.8}$$

где $B_u^{(0)}=\left(a_1+a_2\dfrac{k_0-k}{k-k\cos\beta}\right)\dfrac{\overline{K}_1^-(k)(k+k_0)\lambda_1}{\left(k_0^2-k^2\right)^2}\pm\dfrac{\sqrt{2k}\,\overline{K}_2^-(k)}{\lambda_2\sin\dfrac{\beta}{2}\,\overline{K}_2^-(k\cos\beta)}$

Из решений рассмотренной задачи можно получить решения задач предельных к рассмотренной – пространство с полубесконечной трещиной или с жестким включением. Рассмотрим эти частные случаи:

а) при $\mu_0 \to 0, \rho_0 \to 0$ (трещина) $\lambda_1 \to \infty, \lambda_2 \to 0$. Тогда из (1.25) $\overline{K}_1^-(\sigma) \to \infty$, из (1.31), (2.12) следует, что $\overline{q}_1^-(\sigma) = \overline{q}_2^-(\sigma) = 0$, т.е. напряжения на берегах трещины отсутствуют, а из (1.18) $C_1 = 0$. С другой стороны, из (2.13) следует, что при $\lambda_2 \to 0$ $\overline{K}_2^\pm(\sigma) \to 1$. Исходя из этих соображений, из (3.1) с помощью (2.6), (2.12) получим, что при $\mu_0 \to 0$, $\rho_0 \to 0$

$$u_z(x,y) = u_z^{(\infty)}(x,y) - \frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{2\pi}\operatorname{sgn} y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma-k}(\sigma - k\cos\beta - i0)}$$

$$\frac{1}{\mu}q(x) = \sqrt{2k}\sin\frac{\beta}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma+k}}{\sigma - k\cos\beta + i0} e^{-i(\sigma+i0)x} d\sigma, \qquad x > 0 \tag{3.9}$$

которое совпадает с решением соответствующей задачи, приведенной в [4].

б) при $\mu_0 \to \infty$ (жесткое включение) $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to \infty$. Тогда аналогичными соображениями, как выше, из (3.1) получим, что при жестком полубесконечном включении волновое поле определяется формулой

$$u_z(x,y) = u_z^{(\infty)}(x,y) + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2k}\cos\beta/2 \; e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}}}{\sqrt{\sigma+k}(\sigma - k\cos\beta - i0)} e^{-ix\sigma} d\sigma \tag{3.10}$$

а напряжения на линии контакта и на ее продолжении

$$q(x) = -ik\mu\sin\beta\, e^{-ikx\cos\beta} + \mu\frac{\sqrt{2k}\cos\beta/2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma-k}\, e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sigma - k\cos\beta - i0} \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.11}$$

Эти решения также совпадают с решениями, приведенными в [4].

Здесь имелось в виду, что при $\mu_0 \to \infty$ $\overline{K}_1^\pm(\sigma) \to 1$ и

$$\lim_{\mu_0 \to \infty} \frac{\overline{K}_2^-(k\cos\beta)}{\overline{K}_2^-(\sigma)} = \sqrt{\frac{k-\sigma}{k - k\cos\beta}}.$$

4. Поле перемещений в пространстве, пользуясь подходом, изложенным в [9], представляется в виде (принимая $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$)

$$u_z(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\beta)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{D_1(\sigma)+D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} - \frac{A_1}{\lambda-\lambda_1}\right)e^{-i\lambda x} d\lambda, \tag{4.1}$$

когда $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

где $\lambda = \sigma\cos\theta - i\sin\theta\sqrt{\sigma^2 - k^2}$, $\sigma(\lambda) = \lambda\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ (4.2)

$$D_1(\sigma) = -\frac{f(\sigma)\sqrt{\sigma - k}}{(\sigma - k\cos\beta - i0)(\sigma - k_0)K_1^-(\sigma)}$$

$$D_2(\sigma) = -\frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{K_2^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\sigma + k}}{(\sigma - k\cos\beta - i0)K_2^-(\sigma)} \tag{4.3}$$

$$f(\sigma) = \sigma(a_1 - a_2) + a_2k_0 - a_2k\cos\beta$$

$$\lambda_L = \lambda(\sigma_L) = \sigma_L\cos\theta - i\sin\theta\sqrt{\sigma_L^2 - k^2} = \sigma_L\cos\theta - \frac{i\sin\theta}{\lambda_1}\left(k_0^2 - \sigma_L^2\right) \tag{4.4}$$

A_1 – вычет функции $D_1(\sigma)/\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ относительно особой точки $\lambda = \lambda_L$, в формуле (4.1) контур интегрирования обходит точку $\lambda = -k$ сверху, а точки $\lambda = k$, $\lambda = k\cos(\theta + \beta)$, $\lambda = k\cos(\theta - \beta)$ – снизу, где $\lambda = k\cos(\theta \pm \beta)$ – нули функции $\sigma(\lambda) - k\cos\beta$.

В случае $\pi/2 < \theta < \pi$ –

$$u_z(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\beta)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(\sigma) + D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}e^{i\lambda r}d\lambda \tag{4.5}$$

где уже $\lambda = -\sigma\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\sigma^2 - k^2}$, $\sigma(\lambda) = -\lambda\cos\theta - i\sin\theta\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ (4.6)

Контур интегрирования обходит точки ветвления $\lambda = -k$ и $\lambda = k$ сверху и снизу, соответственно.

При $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ функция $\sigma(\lambda) - k\cos\beta$ не имеет нулей, но при $\pi - \beta < \theta < \pi$ $\lambda = -k\cos(\theta + \beta)$ является единственным нулем этой функции и контур интегрирования обходит точку $\lambda = -k\cos(\theta + \beta)$ снизу.

Функция $D_1(\sigma)$ имеет простой полюс в точке $\lambda = -\lambda_L$.

В случае $\theta = \pi - \beta$ точка $\lambda = k$ является и простым полюсом функций $\frac{D_1(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$, $\frac{D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$ и точкой ветвления. В этом случае функцию перемещений можно представить в виде

$$u_z(r,\pi - \beta) = e^{ikr\cos 2\beta} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{D_1(\sigma) + D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - \frac{B_1 + B_2}{\lambda - k}\right)e^{i\lambda r}d\lambda + i(B_1 + B_2)e^{ikr} \tag{4.7}$$

где B_1, B_2 – вычеты относительно точки $\lambda = k$ функций $\frac{D_1(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$ и

$\dfrac{D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}$, соответственно

$$B_1 = -\frac{i}{2}A_{01}, \quad B_2 = -\frac{i}{2}A_{02} \tag{4.8}$$

Отметим, что в случае $y<0$, т.е. $-\pi<\theta<0$ в вышеуказанных функциях $u_s(r;\theta)$ в подынтегральных выражениях (4.1), (4.5) следует заменить θ на $-\theta$, а $D_2(\sigma)$ на $-D_2(\sigma)$.

Полагая, что при выборе однозначной ветви $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ разрезы в комплексной плоскости $\alpha=\lambda+i\tau$ проведены по линиям $k+i\tau$, $-k-i\tau$, $(0<\tau<\infty)$, с помощью леммы Жордана выражения перемещений (4.1), (4.5) можно представить в виде (при этом контур интегрирования в случае $0<\theta<\pi/2$ замыкается в нижней полуплоскости, а при $\pi/2<\theta<\pi$ – в верхней)

при $0<\theta<\pi/2$

$$u_s(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-i\left(r\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\left(D_1(\sigma)+D_1(\sigma_2)+D_2(\sigma)+D_2(\sigma_2)\right)d\tau \tag{4.9}$$

где $\alpha=-k-i\tau$,

$$\sigma(\alpha)=\alpha\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2} \qquad \sigma_2(\alpha)=\alpha\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2} \tag{4.10}$$

Волновое поле состоит из падающей волны и объемной сдвиговой волны.

При $\pi/2<\theta<\pi-\beta$

$$u_s(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{i\left(r\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\left(D_1(\sigma)+D_1(\sigma_1)+D_2(\sigma)+D_2(\sigma_1)\right)d\tau+$$

$$+A_L e^{-ir\lambda_L} \tag{4.11}$$

где $\alpha=k+i\tau$,

$$\sigma(\alpha)=-\alpha\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2}, \quad \sigma_1(\alpha)=-\alpha\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2} \tag{4.12}$$

Волновое поле состоит из падающей волны, объемной сдвиговой волны, а также локализованной (поверхностной) волны Лява.

При $\pi-\beta<\theta<\pi$ волновое поле состоит из падающей и отраженной волн, поверхностной волны Лява и объемной сдвиговой волны –

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+\left(A_{01}+A_{02}\right)e^{-ikr\cos(\theta+\beta)}+A_2e^{-ir\lambda_L}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{i\left(r\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\left(D_1(\sigma)+D_1(\sigma_1)+D_2(\sigma)+D_2(\sigma_1)\right)d\tau \tag{4.13}$$

Исходя из того, что подынтегральные выражения экспоненциально убывают, и главный вклад в значениях интегралов дает их поведение в окрестности $\tau=0$, при больших значениях r (дальние от края включения зоны) получим следующие асимптотические представления перемещений, когда $rk\to\infty$:

при $-\pi\le\theta<-\pi+\beta$

$$u_z(r,\theta)=\left(1+A_{01}-A_{02}\right)e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+A_Le^{-ir\bar{\lambda}_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.14}$$

при $\theta=-\pi+\beta$

$$u_z(r,-\pi+\beta)=\left(1+\frac{A_{01}-A_{02}}{2}\right)e^{ikr}+A_Le^{-ir\bar{\lambda}_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}O(rk)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.15}$$

при $-\pi+\beta<\theta<-\pi/2$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+A_Le^{-ir\bar{\lambda}_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.16}$$

при $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.17}$$

при $\pi/2<\theta<\pi-\beta$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+A_Le^{-ir\lambda_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.18}$$

при $\theta=\pi-\beta$

$$u_z(r,\pi-\beta)=e^{ikr\cos 2\beta}+\frac{A_{01}+A_{02}}{2}e^{ikr}+A_Le^{-ir\lambda_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}O(rk)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.19}$$

при $\pi-\beta<\theta\le\pi$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+\left(A_{01}+A_{02}\right)e^{-ikr\cos(\theta+\beta)}+$$
$$+A_Le^{-ir\lambda_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.20}$$

где если $\theta\ne\pm\pi$

$$B(\theta) = -\frac{1}{\cos\theta + \cos\beta} \times$$

$$\times \left(\frac{\cos\dfrac{\theta}{2} f(-k\cos\theta)}{\sqrt{k}(k\cos\theta + k_0)\overline{K}_1^-(-k\cos\theta)} - \frac{i\sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}{\overline{K}_2^-(k\cos\beta)\overline{K}_2^-(-k\cos\theta)} \right) \quad (4.21)$$

а при $\theta = \pm\pi$, $B(\theta) = 0$.

Асимптотическое представление напряжения $\tau_{\theta z}$ вблизи края включения имеет вид

$$\tau_{\theta z} = \mu \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi r}} \left((a_2 - a_1)\sin\frac{\theta}{2} - \frac{i\sqrt{2k}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\overline{K}_2^+(k\cos\beta)} \right) + O(1),\ r \to 0 \quad (4.22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С., Караханян И.М. О факторизации в задаче дифракции гармонической волны на упругое полубесконечное включение. // Уч. записки ЕГУ, 2, 2001г., с.32-39
2. Саркисян В.С., Караханян И.М. Дифракция сдвиговых упругих гармонических волн на полубесконечных включениях. Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван, 2002. С. 266-280.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
4. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир. 1962. 279 с.
5. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. Записки ЕГУ, 1979, 3. С. 29-34.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука. 1965 327 с.
7. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 283 с.
8. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. Т.32. №4. 1968. С. 632-646.
9. Григорян Э.Х., Саркисян А.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего упругого слоя. Изв. НАН Арм. Механика. Т. 52. №1. 1999. С.30-39.

Институт Механики НАН Армении

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 30.01.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж.

Լ. Ա. Աղալովյան, Ռ. Ժ. Հովհաննիսյան

Օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալի դիմային մակերևույթներից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսն ազատ է: Որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, սեփական տատանումների հաճախությունները և տատանման ձևերը: Ապացուցված է, որ օրթոտրոպ սալում կարող են առաջանալ երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկուսը սահքային և մեկը երկայնական:

L. A. Aghalovyan, R. Zh. Hovhannisyan

Free vibrations of orthotropic plates under mixed-boundary conditions on face surfaces

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях ортотропных пластин, когда одна из лицевых поверхностей жестко закреплена, а другая свободна. Найдены асимптотики для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены виды собственных колебаний. Доказано, что в ортотропной пластине могут возникнуть собственные колебания трех видов: два сдвиговых и одно продольное. Определены значения частот и формы собственных колебаний.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Метод оказался особенно эффективным для решения неклассических с точки зрения теории пластин и оболочек краевых задач. Была найдена принципиально новая асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, которая позволила найти решения новых классов статических и динамических краевых задач [2-7]. Некоторые классы задач о собственных и вынужденных колебаниях полос-балок и пластин рассмотрены в [8-14]. Обзор работ по использованию асимптотического метода для определения напряженно-деформированных состояний тонких тел при статических и динамических воздействиях содержится в [15].

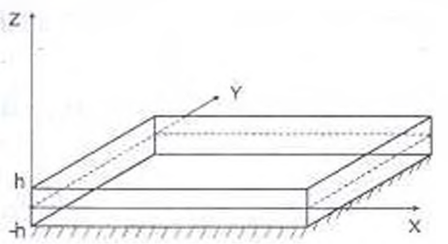
В работе рассматривается задача о собственных колебаниях ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$, где D_0 – срединная поверхность пластинки, а l – ее характерный тангенциальный размер. Предполагается, что нижняя грань пластинки жестко закреплена, а верхняя свободна (фиг.1).

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0 \quad \text{при} \quad z=h \tag{1.1}$$

$$u = v = w = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности конкретизировать не будем, поскольку, как показано в [11], они для этого класса задач непосредственно не влияют на значения частот собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в зоне пограничного слоя.



Фиг.1

Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки и собственные функции, соответсвующие граничным условиям (1.1),(1.2). Для этого необходимо найти ненулевые решения системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропного тела:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (x, y, z; u, v, w)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55}\sigma_{xz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44}\sigma_{yz}$$

при граничных условиях (1.1),(1.2).

Решение системы уравнений (1.3) будем искать в виде [7, 8]:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \sigma_{jk}(x, y, z)\exp(i\omega t)$$

$$(u, v, w) = (u_x, u_y, u_z)\exp(i\omega t) \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad j, k = 1,2,3 \tag{1.4}$$

где ω — искомая частота собственных колебаний.

Подставив (1.4) в уравнения (1.3), получим:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_x = 0 \qquad (x, y; 1, 2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} \qquad (x, y; 1, 2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = a_{66}\sigma_{12}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = a_{55}\sigma_{13}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = a_{44}\sigma_{23}$$

Перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi = x/l, \qquad \eta = y/l, \qquad \zeta = z/h$$
$$U = u_x/l, \quad V = u_y/l, \quad W = u_z/l \tag{1.6}$$

В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}U = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}V = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}W = 0 \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33}$$
$$\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12} \qquad \frac{\partial W}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{13}$$
$$\frac{\partial W}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{23} \qquad \omega_*^2 = \rho h^2\omega^2$$

Эту сингулярно возмущенную систему будем решать асимптотическим методом. Решение системы будем искать в виде [3]:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(s)}$$
$$(U, V, W) = \varepsilon^{s}(U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}) \tag{1.8}$$
$$\omega_*^2 = \varepsilon^{s}\omega_{*s}^2, \qquad s = \overline{0, N}$$

где обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $[0, N]$.

Подставив (1.8) в (1.7), применив правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.8) получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 W^{(s-k)} = 0, \qquad k = \overline{0, s}$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)} + a_{13}\sigma_{33}^{(s)}$$
$$\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)} + a_{23}\sigma_{33}^{(s)} \tag{1.9}$$
$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11}^{(s)} + a_{23}\sigma_{22}^{(s)} + a_{33}\sigma_{33}^{(s)}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)},\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}=a_{55}\sigma_{13}^{(s)},$$

$$\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}=a_{44}\sigma_{23}^{(s)},\quad Q^{(s)}\equiv 0 \text{ при } s<0$$

В (1.9) все величины можно выразить через $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ по формулам:

$$\sigma_{11}^{(s)}=-A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}-A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}+A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right],\quad \sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}\right]$$

где

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^{2}}{\Delta},\quad A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^{2}}{\Delta},\quad A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^{2}}{\Delta}$$

$$A_{12}=\frac{a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23}}{\Delta},\quad A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},\quad A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta} \tag{1.11}$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{22}a_{13}^{2}-a_{11}a_{23}^{2}-a_{33}a_{12}^{2}$$

Для определения же $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2}+a_{55}\omega_{*k}^{2}U^{(s-k)}=R_U^{(s)},\qquad \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2}+a_{44}\omega_{*k}^{2}V^{(s-k)}=R_V^{(s)}$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2}+\omega_{*k}^{2}W^{(s-k)}=R_W^{(s)},\qquad k=\overline{0,s} \tag{1.12}$$

где

$$R_U^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}-a_{55}\left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right]$$

$$R_V^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}-a_{44}\left[\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right] \tag{1.13}$$

$$R_W^{(s)}=A_{23}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}+A_{13}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}-\left[\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right]$$

Очевидно, что $R_U^{(0)}=R_V^{(0)}=R_W^{(0)}=0$.

2. Чтобы определить значения частот, рассмотрим уравнения (1.12) при $s = 0$:

$$\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\omega_{*0}^2 U^{(0)} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}\omega_{*0}^2 V^{(0)} = 0$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \zeta^2} + \omega_{*0}^2 W^{(0)} = 0 \tag{2.1}$$

Решениями уравнений (2.1) являются:

$$U^{(0)} = C_{U1}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}\zeta + C_{U2}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}\zeta \tag{2.2}$$

$$V^{(0)} = C_{V1}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*0}\zeta + C_{V2}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*0}\zeta \tag{2.3}$$

$$W^{(0)} = C_{W1}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\frac{\omega_{*0}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta + C_{W2}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\frac{\omega_{*0}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta \tag{2.4}$$

Используя (2.2) и удовлетворив условиям (1.1),(1.2) относительно σ_{α}, u и учитывая, что $\sigma_{13}^{(0)} = \dfrac{1}{a_{55}}\dfrac{\partial U^{(0)}}{\partial \zeta}$, получим систему алгебраических уравнений относительно функций $C_{U1}^{(0)}$, $C_{U2}^{(0)}$. Из разрешимости этой системы вытекает

$$\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0} = 0 \tag{2.5}$$

откуда следует

$$\omega_{*0n} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1), \qquad n \in N \tag{2.6}$$

Итак, определили некоторый класс значений частот собственных колебаний пластинки, которые будем обозначать индексом "I". С учетом (1.7) имеем:

$$\omega_{0n}^{\mathrm{I}} = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho\, a_{55}}}(2n-1), \qquad n \in N \tag{2.7}$$

Точно так же, удовлетворив остальным условиям (1.1),(1.2), получим

$$\omega_{*0n}^{\mathrm{II}} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{44}}}(2n+1) \quad \text{или} \quad \omega_{0n}^{\mathrm{II}} = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho\, a_{44}}}(2n+1), \quad n \in N \tag{2.8}$$

$$\omega_{*0n}^{\mathrm{III}} = \frac{\pi\sqrt{A_{11}}}{4}(2n+1) \quad \text{или} \quad \omega_{0n}^{\mathrm{III}} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}(2n+1), \quad n \in N \tag{2.9}$$

Имея в виду $a_{55} = \dfrac{1}{G_{13}}$, $a_{44} = \dfrac{1}{G_{23}}$, для ортотропного тела будем иметь следующие главные значения частот собственных сдвиговых колебаний ω_{0n}^{xz}, ω_{0n}^{yz} и собственных продольных колебаний ω_{0n}^{p}:

$$\omega_{0n}^{xz} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_{s}^{xz}(2n+1)$$

$$\omega_{0n}^{yz} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_c^{yz}(2n+1) \quad n \in N$$

$$\omega_{0n}^{p} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_p(2n+1) \tag{2.10}$$

где $\quad v_c^{xz} = \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, \qquad v_c^{yz} = \sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}$ (2.11)

$$v_p = \sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E_3}{\rho}\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{31}(\nu_{12}\nu_{23}+\nu_{13})-\nu_{32}(\nu_{21}\nu_{13}+\nu_{23})}}$$

В (2.10), (2.11) v_c^{xz} и v_c^{yz} – известные скорости распространения сейсмических сдвиговых волн, а v_p – скорость распространения продольных волн в пластине.

Если $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{\mathrm{I}}$, то оно не будет удовлетворять условиям разрешимости систем алгебраических уравнений, соответствующие (2.3) и (2.4), откуда следует, что эти системы будут иметь нулевые решения, т.к. определители систем отличны от нуля, следовательно:

$$V_{n\mathrm{I}}^{(0)} = W_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0 \tag{2.12}$$

Точно так же, если $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{\mathrm{II}}$, то:

$$U_{n\mathrm{II}}^{(0)} = W_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0 \tag{2.13}$$

А при $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{\mathrm{III}}$

$$U_{n\mathrm{III}}^{(0)} = V_{n\mathrm{III}}^{(0)} = 0 \tag{2.14}$$

Итак, мы имеем три типа собственных колебаний:

а) колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{I}} = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{55}}}(2n+1)$ и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$U_{n\mathrm{I}}^{(0)} = C_{Un}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)], \qquad V_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad W_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{13\,\mathrm{I}}^{(0)} = C_{Un}^{(0)}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{55}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.15}$$

$$\sigma_{11\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{22\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{33\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{12\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0$$

б) колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{II}} = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{44}}}(2n+1)$ и следующими собственными функциями и напряжениями:

$$V_{n\mathrm{II}}^{(0)} = C_{Vn}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)], \qquad U_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0, \quad W_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{23\,\mathrm{II}}^{(0)} = C_{Vn}^{(0)}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{44}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.16}$$

$$\sigma_{11\,\mathrm{II}}^{(0)}=0,\qquad \sigma_{22\,\mathrm{II}}^{(0)}=0,\qquad \sigma_{33\,\mathrm{II}}^{(0)}=0,\qquad \sigma_{12\,\mathrm{II}}^{(0)}=0,\qquad \sigma_{13\,\mathrm{II}}^{(0)}=0$$

в) колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{III}}=\dfrac{\pi}{4h}\sqrt{\dfrac{A_{11}}{\rho}}(2n+1)$ и следующими собственными функциями и напряжениями:

$$W_{n\mathrm{III}}^{(0)}=C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)],\qquad U_{n\mathrm{III}}^{(0)}=0,\qquad V_{n\mathrm{III}}^{(0)}=0$$

$$\sigma_{11\,\mathrm{III}}^{(0)}=-C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{23}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$\sigma_{22\,\mathrm{III}}^{(0)}=-C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{13}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.17}$$

$$\sigma_{33\,\mathrm{III}}^{(0)}=C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{11}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$\sigma_{12\,\mathrm{III}}^{(0)}=0,\qquad \sigma_{13\,\mathrm{III}}^{(0)}=0,\qquad \sigma_{23\,\mathrm{III}}^{(0)}=0$$

Несложно показать, что каждое из семейств функций $\{U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\}$, $\{V_{n\mathrm{II}}^{(0)}\}$, $\{W_{n\mathrm{III}}^{(0)}\}$ составляет ортогональную систему на интервале $-1\le\zeta\le 1$. Функции $C_{Un}^{(0)}$, $C_{Wn}^{(0)}$, $C_{Wn}^{(0)}$ определяются из начальных условий известным образом.

3. О приближениях s ≥ 1. Рассмотрим уравнения (1.12) при s = 1. Сперва рассмотрим первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{1}$:

$$\frac{\partial^2 U_{n\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}\right)^2U_{n\mathrm{I}}^{(1)}+a_{55}\left(\omega_{*1n}^{\mathrm{I}}\right)^2U_{n\mathrm{I}}^{(0)}=R_{Un\mathrm{I}}^{(1)} \tag{3.1}$$

Решение $U_{n\mathrm{I}}^{(1)}$ представим в виде ряда по собственным функциям $U_{n\mathrm{I}}^{(0)}$ нулевого приближения [14, 17]:

$$U_{n\mathrm{I}}^{(1)}=\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}U_{m\mathrm{I}}^{(0)} \tag{3.2}$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.1), (1.2), соответствующим u и σ_{xz}. Подставив (3.2) в (3.1), с учетом (2.1) получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_{55}b_{nm}\left[\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}\right)^2-\left(\omega_{*0m}^{\mathrm{I}}\right)^2\right]U_{m\mathrm{I}}^{(0)}=-a_{55}\left(\omega_{*1n}^{\mathrm{I}}\right)^2U_{n\mathrm{I}}^{(0)}+R_{Un\mathrm{I}}^{(1)} \tag{3.3}$$

Умножив (3.3) на $U_{k\mathrm{I}}^{(0)}$ и проинтегрировав по ζ на отрезке [-1, 1], учитывая ортогональность функций $\{U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\}$, получим:

$$a_{55}b_{nk}\left[\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}\right)^2-\left(\omega_{*0k}^{\mathrm{I}}\right)^2\right]=-a_{55}\left(\omega_{*1n}^{\mathrm{I}}\right)^2C_{nk}^{(0)}\delta_{nk}+R_{Unk\mathrm{I}}^{(1)} \tag{3.4}$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, а

$$R_{Unk\mathrm{I}}^{(1)}=\frac{1}{\left(C_{Uk}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1}R_{Un\mathrm{I}}^{(1)}U_{k\mathrm{I}}^{(0)}d\zeta,\qquad C_{nk}^{(0)}=\frac{C_{Un}^{(0)}}{C_{Uk}^{(0)}} \tag{3.5}$$

При $k=n$ из (3.4) будем иметь:

$$\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^{2}=\frac{1}{a_{55}}R_{Unn1}^{(1)} \tag{3.6}$$

а при $k \neq n$

$$b_{nk}=\frac{R_{Unk1}^{(1)}}{a_{55}[(\omega_{*0n}^{1})^{2}-(\omega_{*0k}^{1})^{2}]} \tag{3.7}$$

Из (1.13) и (2.15), следует:

$$R_{Un1}^{(1)}=0 \tag{3.8}$$

следовательно,

$$b_{nk}=0, \qquad k \neq n \tag{3.9}$$

$$\omega_{*1n}^{1}=0, \qquad n \in N \tag{3.10}$$

Для определения b_{nn} нормируем U_{n} [16, 17]:

$$\frac{1}{\left\|U_{n1}^{(0)}\right\|^{2}}\int_{-1}^{1}[U_{n1}^{(0)}+\varepsilon U_{n1}^{(1)}]^{2}d\zeta=1, \quad \text{где} \quad \left\|U_{n1}^{(0)}\right\|^{2}=\int_{-1}^{1}\left[U_{n1}^{(0)}\right]^{2}d\zeta \tag{3.11}$$

откуда получим:

$$\int_{-1}^{1}U_{n1}^{(0)}U_{n1}^{(1)}d\zeta=0 \tag{3.12}$$

Подставив $U_{n}^{(1)}$ в (3.12), используя (3.2), будем иметь:

$$b_{nn}=0 \tag{3.13}$$

Итак, имеем:

$$U_{n1}^{(1)}=0,\ \omega_{*1n}^{1}=0, \qquad n \in N \tag{3.14}$$

Теперь рассмотрим приближение s = 2. Первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{1}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^{2}U_{n1}^{(2)}}{\partial\zeta^{2}}+a_{55}\left(\omega_{*0n}^{1}\right)^{2}U_{n1}^{(2)}+a_{55}\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^{2}U_{n1}^{(1)}+a_{55}\left(\omega_{*2n}^{1}\right)^{2}U_{n1}^{(0)}=R_{Un1}^{(2)} \tag{3.15}$$

Решение снова поищем в виде:

$$U_{n1}^{(2)}=\sum_{r=1}^{\infty}c_{nr}U_{r1}^{(0)} \tag{3.16}$$

Повторив те же действия, получим:

$$\left(\omega_{*2n}^{1}\right)^{2}=\frac{1}{a_{55}}R_{Unn1}^{(2)}, \qquad c_{nk}=\frac{R_{Unk1}^{(2)}}{a_{55}[(\omega_{*0n}^{1})^{2}-(\omega_{*0k}^{1})^{2}]}, \qquad k \neq n$$

$$R_{Unk1}^{(2)}=\frac{1}{\left(C_{Uk}^{(0)}\right)^{2}}\int_{-1}^{1}R_{Un1}^{(2)}U_{k1}^{(0)}d\zeta=\frac{1}{C_{Uk}^{(0)}}\int_{-1}^{1}R_{Un1}^{(2)}\Psi_{k}d\zeta \tag{3.17}$$

$$\Psi_{n}=\frac{U_{n1}^{(0)}}{C_{Un}^{(0)}}=\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{3.18}$$

где функции $\{\Psi_{n}\}$ составляют ортонормальную систему. Из (1.13) имеем:

$$R_{Un1}^{(2)} = -\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11\,1}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12\,1}^{(1)}}{\partial\eta}\right] \tag{3.19}$$

$W_1^{(1)}$ определяется из третьего уравнения (1.12), при $s = 1$ и $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^1$:

$$A_{11}\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial\zeta^2} + \left(\omega_{*0n}^1\right)^2 W_1^{(1)} + \left(\omega_{*1n}^1\right)^2 W_1^{(0)} = R_{W1}^{(1)} \tag{3.20}$$

Вычислив $R_{W1}^{(1)}$ из (1.13) и подставив в (3.20), получим следующее решение этого уравнения:

$$\begin{gathered}
W_{n1}^{(1)} = C_{W1}^{(1)}\sin\frac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\zeta + C_{W2}^{(1)}\cos\frac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\zeta + A_W^{(1)}\cos[(1+\zeta)\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^1] \\
A_W^{(1)} = \frac{(a_{55}A_{23}-1)\left(C_U^{(0)}\right)_\xi'}{(1-a_{55}A_{11})\,\omega_{*0n}^1\sqrt{a_{55}}}
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Для определения констант $C_{W1}^{(1)}$ и $C_{W2}^{(1)}$ удовлетворим вытекающим из (1.1),(1.2) граничным условиям:

$$\begin{gathered}
W_{n1}^{(1)}(\zeta=-1) = 0 \\
\sigma_{33\,1}^{(1)}(\zeta=1) = \left.\left(A_{11}\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial\zeta} - A_{23}\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial\xi}\right)\right|_{\zeta=1} = 0
\end{gathered} \tag{3.22}$$

Используя (3.21), (3.22), получим неоднородную систему алгебраических уравнений, определитель которой отличен от нуля, следовательно, эта система будет иметь единственное ненулевое решение:

$$C_{W1}^{(1)} = \frac{\left(\sqrt{a_{55}}(A_{11}-A_{23})\cos\dfrac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\sin 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^1 + \sqrt{A_{11}}(a_{55}A_{23}-1)\sin\dfrac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\right)C_{U\,\xi}^{(0)\prime}}{\sqrt{a_{55}A_{11}}\,(a_{55}A_{11}-1)\,\omega_{*0n}^1\cos\dfrac{2\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}}$$

$$C_{W2}^{(1)} = \frac{\left(\sqrt{a_{55}}(A_{11}-A_{23})\sin\dfrac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\sin 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^1 + \sqrt{A_{11}}(a_{55}A_{23}-1)\cos\dfrac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\right)C_{U\,\xi}^{(0)\prime}}{\sqrt{a_{55}A_{11}}\,(a_{55}A_{11}-1)\,\omega_{*0n}^1\cos\dfrac{2\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}}$$

Подставив значения $W_{n1}^{(1)}$, $\sigma_{11\,1}^{(1)}$ и $\sigma_{12\,1}^{(1)}$ в (3.19), будем иметь:

$$\begin{gathered}
R_{Un1}^{(2)} = \left[\left(C_{W2}^{(1)}\right)_\xi'(1-a_{55}A_{23})\frac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\right]\sin\frac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\zeta + \\
+\left[\left(C_{W1}^{(1)}\right)_\xi'(a_{55}A_{23}-1)\frac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\right]\cos\frac{\omega_{*0n}^1}{\sqrt{A_{11}}}\zeta +
\end{gathered}$$

$$+\left|\left(A_W^{(1)}\right)_\zeta'\left(1-a_{55}A_{23}\right)\sqrt{a_{55}}\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-a_{55}\left(A_{22}\left(C_{Un}^{(0)}\right)_{\xi\xi}''+\frac{1}{a_{66}}\left(C_{Un}^{(0)}\right)_{\eta\eta}''\right)\right|\times \tag{3.23}$$

$$\times\sin[(1+\zeta)\sqrt{a_{55}}\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}]$$

а используя (3.23), из (3.17) следует:

$$R_{Unk1}^{(2)}=\frac{1}{C_{Uk}^{(0)}}\left\{\frac{(1+2n)(a_{55}A_{23}-1)}{\left((1+2n)^2-(1+2k)^2a_{55}A_{11}\right)}\times\right.$$

$$\times\left(\left(-(1+2k)\sqrt{a_{55}A_{11}}\left(C_{W1}^{(1)}\right)_\zeta'+(-1)^{k+1}(1+2n)\left(C_{W2}^{(1)}\right)_\zeta'\right)\cos[\frac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{55}A_{11}}}]+\right. \tag{3.24}$$

$$\left.+\left(-(1+2k)\sqrt{a_{55}A_{11}}\left(C_{W2}^{(1)}\right)_\zeta'+(-1)^{k+2}(1+2n)\left(C_{W1}^{(1)}\right)_\zeta'\right)\sin[\frac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{55}A_{11}}}]\right)+$$

$$\left.+\left(\left(A_W^{(1)}\right)_\zeta'\left(1-a_{55}A_{23}\right)\frac{\pi}{4}(2n+1)-a_{55}\left(A_{22}\left(C_{Uk}^{(0)}\right)_{\xi\xi}''+\frac{1}{a_{66}}\left(C_{Uk}^{(0)}\right)_{\eta\eta}''\right)\right)\delta_{nk}\right\}$$

В итоге по формулам (3.17) определятся $\left(\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}\right)^2$ и c_{nk}. Для определения c_{nn} поступим так же, как в случае b_{nn}, в результате получим:

$$c_{nn}=0 \tag{3.25}$$

Итак, мы определили $U_{n1}^{(2)}$ и $\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}$, которые отличны от нуля. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases}\omega_{*n}^{\mathrm{I}}=\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}\\ U_{n1}=U_{n1}^{(0)}+\varepsilon^2U_{n1}^{(2)}\end{cases} \tag{3.26}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{\mathrm{II}}$ и $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{\mathrm{III}}$. В итоге будем иметь:

$$\begin{aligned}&V_{n\mathrm{II}}^{(1)}=0,\ V_{n\mathrm{II}}^{(2)}\neq0,\ \omega_{*1n}^{\mathrm{II}}=0,\ \omega_{*2n}^{\mathrm{II}}\neq0\\ &W_{n\mathrm{III}}^{(1)}=0,\ W_{n\mathrm{III}}^{(2)}\neq0,\ \omega_{*1n}^{\mathrm{III}}=0,\ \omega_{*2n}^{\mathrm{III}}\neq0\end{aligned} \tag{3.27}$$

Из полученных результатов следует, что начальное приближение дает достаточно точные значения для частот и форм собственных колебаний. Поэтому, значения частот для исходного приближения назовем главными и в практических приложениях можно ограничиться этими значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414с.
3. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. // Межвуз. сб.: Механика. Изд. ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.

4. Агаловян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера. // В сб.: ХШ Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Часть первая. Таллин. 1983. С. 13-18.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. // В сб.: Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 105-110.
6. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т.42. №3. С. 28-36.
7. Агаловян Л. А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
8. Агаловян Л. А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы. // В сб. Юбил. науч. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри. Изд-во "Высшая школа". 1994. С. 23-26.
9. Агаловян Л. А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. // Тр. XVIII международной конф. по теории оболочек и пластин. Р.Ф. Саратов. 1997. Т. 1. С. 30-38.
10. Агаловян М. Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии. // Докл. НАН Армении. 1996. Т.96. №2-4. С. 23-24.
11. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 132-135.
12. Халатян А. М. О собственных колебаниях анизотропной полосы при смешанных граничных условиях. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 167-170.
13. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во НАН РА. 2002. С. 9-19.
14. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл. НАН РА. 2003. Т. 103. №4. С. 296-301.
15. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Международн. научн. журнал Прикл. механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
16. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398с.
17. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Изд-во Мир. 1976. 456 с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
17.11.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Баблоян А.А, Бегларян А.Г.

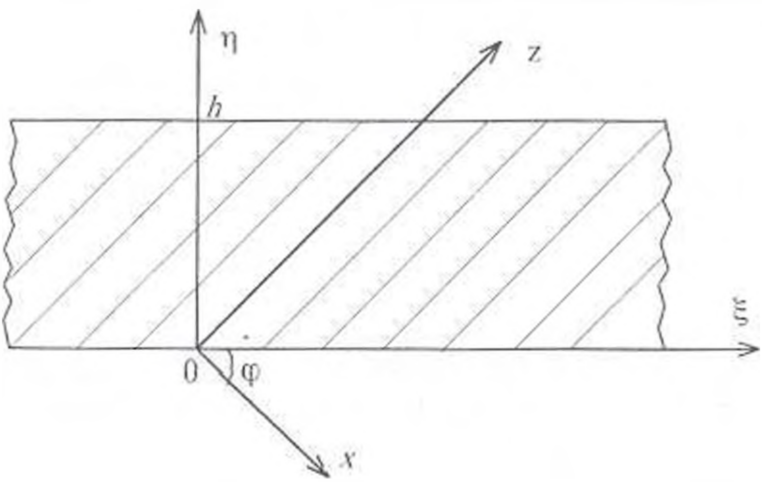
Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Գ. Բեգլարյան
Անիզոտրոպ շերտի ծռումը

Ստացված է առաձգականության տեսության հավասարակշռության հավասարումների ընդհանուր լուծումը ուղղագծորեն անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) շերտի համար: Որպես օրինակ, ուսումնասիրվում է անիզոտրոպ շերտի ծռումը նորմալ ուժերով անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների տարբեր ուղղությունների դեպքում:

A.H. Babloyan, A.G. Beglaryan
Bending of Anisotropic Layer

Приводится общее решение уравнений равновесия теории упругости для прямолинейно-анизотропной (неортотропной) полосы. В качестве конкретного примера изучается изгиб анизотропной полосы нормальными силами при различных направлениях главных осей анизотропии.

Общее решение уравнений равновесия теории упругости для ортотропной полосы построено многими авторами [1-3]. Из этого решения путем использования формул поворота координатных осей для напряжений и перемещений можно получить общее решение уравнений равновесия для прямолинейно-анизотропной полосы (идея С.Г.Лехницкого [4]). Аналогичные задачи рассматривались в работах [5-7]. Эти же вопросы в рамках теории пластин и оболочек подробно изучены в работах [8-14].



Фиг. 1

1. Вывод общего решения. Пусть прямолинейно-анизотропная полоса в координатной системе (ξ,η) занимает область $(-\infty < \xi < \infty,\ 0 \le \eta \le h)$. Вводим ортогональную систему координат (x,z), совпадающую с главными направлениями анизотропии (фиг.1). Через φ обозначим угол между осями $0x$ и 0ξ. Тогда переход от одной координатной системы к другой осуществляется формулами

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \quad z = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \tag{1.1}$$

В системе (x,z) уравнения равновесия плоско-деформированного состояния анизотропного материала имеют вид [2]

$$\begin{gathered} c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z} = 0 \\ (c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z} + c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

а закон Гука будет

$$\begin{gathered} \sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{13}\varepsilon_z, \quad \sigma_y = c_{12}\varepsilon_x + c_{13}\varepsilon_z, \quad \sigma_z = c_{13}\varepsilon_x + c_{33}\varepsilon_z \\ \tau_{xz} = c_{44}\varepsilon_{xy}, \ \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \ \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Фундаментальную систему решений уравнений равновесия (1.2) ищем в виде

$$u_x = i\gamma_0(\alpha)Z_0, \quad u_z = -Z_0, \quad Z_0 = e^{\lambda_0(x+\alpha z)} \tag{1.4}$$

Подставляя выражения (1.4) в (1.2), после ряда преобразований, для определения функции $\gamma_0(\alpha)$ получим два равносильных выражения:

$$\gamma_0(\alpha) = \frac{(c_{13}+c_{44})\cdot\alpha}{c_{11}-\alpha^2 c_{44}} = -\frac{c_{44}-\alpha^2 c_{33}}{(c_{13}+c_{44})\cdot\alpha} \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что α является корнем биквадратного уравнения

$$\Delta_0(\alpha) = (c_{11}-\alpha^2 c_{44})(c_{44}-\alpha^2 c_{33}) + (c_{13}+c_{44})^2\alpha^2 = 0 \tag{1.6}$$

Из закона Гука (1.3), в силу (1.4), для напряжений получим выражения

$$\begin{gathered} \sigma_x = i\lambda_0[c_{11}\gamma_0(\alpha) - c_{13}\alpha]Z_0, \quad \sigma_z = i\lambda_0[c_{13}\gamma_0(\alpha) - c_{33}\alpha]Z_0 \\ \tau_{xz} = -\lambda_0 c_{44}[\alpha\gamma_0(\alpha)+1]Z_0, \quad \sigma_y = i\lambda_0[c_{12}\gamma_0(\alpha) - c_{13}\alpha]Z_0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{gathered} E_0(\alpha) = \alpha^{-1}[c_{11}\gamma_0(\alpha) - c_{13}\alpha] = -\alpha[c_{13}\gamma_0(\alpha) - c_{33}\alpha] = \\ = c_{44}[\alpha\gamma_0(\alpha)+1] = c_{44}\frac{c_{11}+\alpha^2 c_{33}}{c_{13}+c_{44}} \end{gathered} \tag{1.8}$$

если только α – корень уравнения (1.6).

В силу (1.8) формулы для напряжений (1.7) можно представить в виде

$$\sigma_x = i\lambda_0\alpha E_0(\alpha)Z_0, \quad \sigma_z = -i\lambda_0\alpha^{-1}E_0(\alpha)Z_0, \quad \tau_{xz} = -\lambda_0 E_0(\alpha)Z_0 \tag{1.7'}$$

где λ_0 -произвольный параметр.

Имея напряжения (1.7') и перемещения (1.4) в координатной системе (x,z), вычислим эти же величины в системе (ξ,η). Пользуясь формулами поворота координатных осей для перемещений и напряжений из (1.4) и (1.7), получим

$$u_\xi = [i\gamma_0(\alpha)\cos\varphi - \sin\varphi]Z_0, \quad u_\eta = -[i\gamma_0(\alpha)\sin\varphi + \cos\varphi]Z_0$$

$$\sigma_\xi = [i(\alpha\cos^2\varphi - \alpha^{-1}\sin^2\varphi) - \sin 2\varphi]E_0(\alpha)\lambda_0 Z_0$$

$$\sigma_\eta = [i(\alpha\sin^2\varphi - \alpha^{-1}\cos^2\varphi) + \sin 2\varphi]E_0(\alpha)\lambda_0 Z_0$$
$$\tau_{\xi\eta} = -[i(\alpha + \alpha^{-1})\sin\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi]E_0(\alpha)\lambda_0 Z_0 \tag{1.9}$$

Пользуясь формулами (1.1), преобразуем теперь степень экспоненциальной функции Z_0 двумя способами

$$\lambda_0(x + i\alpha z) = \lambda(\beta\eta + i\xi) = \mu(\delta\xi + i\eta) \tag{1.10}$$

$$\lambda = \lambda_0(\alpha\sin\varphi - i\cos\varphi), \quad \beta = \frac{i\alpha\cos\varphi - \sin\varphi}{\alpha\sin\varphi - i\cos\varphi} \tag{1.11}$$

$$\mu = \lambda_0(\alpha\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \delta = \frac{\cos\varphi + i\alpha\sin\varphi}{\alpha\cos\varphi + i\sin\varphi} \tag{1.12}$$

Совокупность функций (1.9) при произвольных значениях параметра λ (или μ) с учетом формул (1.10) – (1.12) будет представлять полный набор частных решений уравнений равновесия (1.2) в координатах (ξ, η), если только корни биквадратного уравнения (1.6) не равны между собою $(\alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j,\ i, j = 1 \div 4)$. Случай равных корней получается из (1.9)-(1.12) путем предельного перехода, когда $\alpha_i \to \alpha_j$. Такой предельный переход целесообразно выполнить после окончательного решения конкретных краевых задач.

С целью компактного представления решения системы (1.2) введем обозначения для приведенных упругих постоянных:

$$c_p = \alpha_p^{-1}\cos\varphi + i\sin\varphi, \quad s_p = \alpha_p^{-1}\sin\varphi - i\cos\varphi$$

$$d_p = [i\gamma_0(\alpha_p)\cos\varphi - \sin\varphi]E_0^{-1}(\alpha_p), \quad e_p = [i\gamma_0(\alpha_p)\sin\varphi + \cos\varphi]E_0^{-1}(\alpha_p)$$

$$\beta_p = \frac{i\alpha_p\cos\varphi - \sin\varphi}{\alpha_p\sin\varphi - i\cos\varphi} = \frac{s_p}{ic_p}, \quad \delta_p = \frac{\cos\varphi + i\alpha_p\sin\varphi}{\alpha_p\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{c_p}{is_p}$$

$$l_p = \frac{1 - \alpha_p^2}{c_p\alpha_p^2} - c_p, \quad m_p = \frac{1 - \alpha_p^2}{s_p\alpha_p^2} - s_p, \quad (p = 1, 2, 3, 4) \tag{1.13}$$

При обозначениях (1.13) общее решение уравнений равновесия (1.2) в координатах (ξ, η) для полосы $(-\infty < \xi < \infty,\ 0 \le \eta \le h)$ представляется в виде интеграла (ряда) Фурье

$$u_\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4} d_p A_p(\lambda)e^{\lambda(i\xi + \beta_p\eta)}d\lambda, \quad u_\eta = -\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4} e_p A_p(\lambda)e^{\lambda(i\xi + \beta_p\eta)}d\lambda$$

$$\sigma_\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4} c_p A_p(\lambda)\lambda e^{\lambda(i\xi + \beta_p\eta)}d\lambda, \quad \sigma_\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4} l_p A_p(\lambda)\lambda e^{\lambda(i\xi + \beta_p\eta)}d\lambda \tag{1.14}$$

$$\tau_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=1}^{4} s_p A_p(\lambda)\lambda e^{\lambda(i\xi + \beta_p\eta)}d\lambda$$

где $A_p(\lambda)$ - произвольные функции. Решение (1.14) получается из (1.9), (1.11) и первого преобразования (1.10).

Второе решение уравнений равновесия (1.2), позволяющее решать краевые задачи для анизотропной полосы $(0 < \xi < h, \ -\infty \le \eta \le \infty)$, можно получить из (1.9), (1.12) и второго преобразования (1.10).

$$u_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} d_p B_p(\mu) e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu, \quad u_\eta = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} e_p B_p(\mu) e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu$$

$$\sigma_\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} s_p B_p(\mu) \mu e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu, \quad \sigma_\eta = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} m_p B_p(\mu) \mu e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{4} c_p B_p(\mu) \mu e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu \tag{1.15}$$

где $B_p(\mu)$ – произвольные функции.

Полученные общие решения (1.14) и (1.15) представлены в виде интегралов (или рядов) Фурье по координатам ξ и η соответственно.

2. Частные решения уравнений равновесия. Рассмотрим только те частные решения уравнений равновесия (1.2), когда перемещения зависят от координат линейным образом.

$$u_\xi = a_1 \xi + b_1 \eta + d_1, \ u_\eta = a_2 \xi + b_2 \eta + d_2, \ (a_3 = b_1 + a_2) \tag{2.1}$$

Отсюда, путем неоднократного использования формул поворота и закона Гука, для напряжений получим

$$\begin{gathered}
\sigma_\xi = a_1[c_{11} \cos^4 \varphi + c_{33} \sin^4 \varphi + (0.5c_{13} + c_{44}) \sin^2 2\varphi] + \\
+ 0.25b_2[4c_{13} + c_{00} \sin^2 2\varphi] - 0.25a_3[c_{11} - c_{33} + c_{00} \cos 2\varphi] \sin 2\varphi \\
\sigma_\eta = 0.25a_1[4c_{13} - c_{00} \sin^2 \varphi] + b_2[c_{33} \cos^4 \varphi + c_{11} \sin^4 \varphi + \\
+ (0.5c_{13} + c_{44}) \sin^2 2\varphi] - 0.25a_3(c_{11} - c_{33} - c_{00} \cos 2\varphi) \sin 2\varphi \\
\tau_{\xi\eta} = c_{44}[a_3 \cos 2\varphi + (a_1 - b_2) \sin 2\varphi] \cos 2\varphi + 0.25\{(c_{11} - 2c_{13} + c_{33}) \times \\
\times [a_3 \sin 2\varphi + (b_2 - a_1) \cos 2\varphi] - (c_{11} - c_{33})(a_1 + b_2)\} \sin 2\varphi \\
c_{00} = c_{11} - 2c_{13} + c_{33} - 4c_{44}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для сравнения здесь же приводим формулы напряжений, действующих на площадках с нормалями, совпадающими с главными направлениями анизотропии:

$$\sigma_x = a_1(c_{11} \cos^2 \varphi + c_{13} \sin^2 \varphi) + b_2(c_{11} \sin^2 \varphi + c_{13} \cos^2 \varphi) - 0.5a_3(c_{11} - c_{13}) \sin 2\varphi$$

$$\sigma_z = a_1(c_{33} \sin^2 \varphi + c_{13} \cos^2 \varphi) + b_2(c_{33} \cos^2 \varphi + c_{13} \sin^2 \varphi) + 0.5a_3(c_{33} - c_{13}) \sin 2\varphi$$

$$\tau_{xz} = c_{44}[a_3 \cos 2\varphi + (a_1 - b_2) \sin 2\varphi]; \qquad (\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_z) \tag{2.3}$$

Отметим, что все напряжения не зависят от параметров a_2 и b_1 в отдельности, а зависят только от суммы $a_3 = a_2 + b_1$.

На основе формул (2.1)-(2.3) рассмотрим некоторые случаи частных нагружений анизотропного прямоугольника.

Задача 1. Пусть граничные условия анизотропного прямоугольника имеют вид

$$\sigma_\xi(\pm l, \eta) = 1, \quad \sigma_\eta(\xi, \pm h) = 0, \quad \tau_{\xi\eta}\big|_\Gamma = 0 \tag{2.4}$$

Из приведенных условий для коэффициентов формул (2.1) получим

$$a_1 = \Delta_1/\Delta, \qquad b_2 = \Delta_2/\Delta, \qquad a_3 = \Delta_3/\Delta_0 \tag{2.5}$$

где

$$\Delta_0 = 4c_{44}(c_{11}c_{33} - c_{13}^2), \qquad \Delta = 4(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - c_0 \sin^2 2\varphi)$$

$$\Delta_1 = 4(c_{11}\sin^2\varphi + c_{33}\cos^2\varphi) - c_{00}\sin^2 2\varphi + 2a_3[c_{44}(c_{11} - c_{33}) + c_0\cos 2\varphi]\sin 2\varphi$$

$$\Delta_2 = -4c_{11} - c_{00}\sin^2 2\varphi + 2a_3[c_{44}(c_{11} - c_{33}) - c_0\cos 2\varphi]\sin 2\varphi \tag{2.6}$$

$$\Delta_3 = 2c_{44}(c_{11} - c_{33})\sin 2\varphi + c_0 \sin 4\varphi, \quad c_0 = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - c_{44}(c_{11} + 2c_{13} + c_{33})$$

Подставляя (2.5) – (2.6) в формулы (2.1), получим значения перемещений с точностью до жесткого смещения и поворота. Так как

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} = b_1 + a_2 = a_3$$

то первоначальный прямоугольник после нагружения по закону (2.4) переходит в параллелограмм с углами $90^\circ \pm \operatorname{arctg} a_3$.

Наибольший сдвиг получается при угле $\varphi = \varphi_0$, где φ_0, согласно (2.6), определяется формулой

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-A_0 \pm \sqrt{A_0^2 + 32c_0^2}}{8c_0}\right), \quad A_0 = 2c_{44}(c_{11} - c_{33}), \quad 0 < |\varphi_0| < 90^\circ$$

Задача 2. Пусть граничные условия анизотропного прямоугольника имеют вид

$$\sigma_\xi(\pm l, \eta) = \sigma_\eta(\xi, \pm h) = 0, \quad \tau_{\xi\eta}\big|_\Gamma = 1 \tag{2.7}$$

Здесь постоянные a_1, b_2 и a_3 определяются по формулам (2.5), где

$$\Delta_1 = a_3[2c_{44}(c_{11} - c_{33})\sin 2\varphi + c_0\sin 4\varphi], \quad \Delta_0 = c_{44}(c_{11}c_{33} - c_{13}^2), \ \Delta = 4\Delta_3$$

$$\Delta_2 = a_3[2c_{44}(c_{11} - c_{33})\sin 2\varphi - c_0 \sin 4\varphi], \quad \Delta_3 = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - c_0\sin^2 2\varphi$$

3. Первая основная задача теории упругости для анизотропной полосы. Как первое применение полученных общих формул (1.14) и (1.15), приведем решение задачи для анизотропной полосы $(-\infty < \xi < \infty, \ 0 \le \eta \le h)$, когда на ее границах заданы компоненты напряжений (фиг. 1).

$$\sigma_\eta(\xi,h) = f_2(\xi), \ \tau_{\xi\eta}(\xi,\eta) = g_2(\xi), \ \sigma_\eta(\xi,0) = f_1(\xi), \ \tau_{\xi\eta}(\xi,0) = g_1(\xi), \ (|\xi| < \infty) \tag{3.1}$$

Будем считать, что граничные функции удовлетворяют условиям равновесия статики, а на бесконечности стремятся к нулю.

Решение задачи ищем в виде (1.14). Удовлетворяя граничным условиям, для определения неизвестных функций $A_p(\lambda)$ получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^{4} c_p z_p A_p = \tilde{f}_2, \ \sum_{p=1}^{4} s_p z_p A_p = \tilde{g}_2, \ \sum_{p=1}^{4} c_p A_p = \tilde{f}_1, \ \sum_{p=1}^{4} s_p A_p = \tilde{g}_1 \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{f}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi, \ \tilde{g}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} g_k(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi, \ z_p = e^{i\lambda h\beta_p}$$

$$(k = 1;2, \ p = 1;2;3;4) \tag{3.3}$$

Решение системы (3.2) представим в виде

$$\Delta(\lambda)A_p(\lambda) = i\alpha_p[\bar{f}_2(\lambda)x_{p1} + \bar{g}_2(\lambda)x_{p2} + \bar{f}_1(\lambda)x_{p3} + \bar{g}_1(\lambda)x_{p4}] \tag{3.4}$$

где α_p – корни характеристического уравнения (1.6), а $\Delta(\lambda)$ – основной детерминант системы (3.2)

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(z_1z_2 + z_3z_4) - \\ -(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)(z_1z_3 + z_2z_4) + (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(z_2z_3 + z_1z_4)\end{gathered} \tag{3.5}$$

функции $x_{pk}(\lambda)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
x_{11} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_3s_3z_3 + (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_2s_2z_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_4s_4z_4\\
x_{21} &= (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_1s_1z_1 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_3s_3z_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_4s_4z_4\\
x_{31} &= (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_1s_1z_1 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_2s_2z_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_4s_4z_4\\
x_{41} &= (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1s_1z_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2s_2z_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_3s_3z_3\\
x_{12} &= (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_3c_3z_3 + (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_2c_2z_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_4c_4z_4\\
x_{22} &= (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_1c_1z_1 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_3c_3z_3 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_4c_4z_4\\
x_{32} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_1c_1z_1 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_2c_2z_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4c_4z_4\\
x_{42} &= (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1c_1z_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2c_2z_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_3c_3z_3\\
x_{13} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_3s_3z_2z_4 + (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_2s_2z_3z_4 + (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_4s_4z_2z_3\\
x_{23} &= (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_1s_1z_3z_4 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_3s_3z_1z_4 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_4s_4z_1z_3\\
x_{33} &= (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_1s_1z_2z_4 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_2s_2z_1z_4 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_4s_4z_1z_2\\
x_{43} &= (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1s_1z_2z_3 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2s_2z_1z_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_3s_3z_1z_2\\
x_{14} &= (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_2c_2z_3z_4 + (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_3c_3z_2z_4 + (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_4c_4z_2z_3\\
x_{24} &= (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_1c_1z_3z_4 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_3c_3z_1z_4 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_4c_4z_1z_3\\
x_{34} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_1c_1z_2z_4 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_2c_2z_1z_4 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4c_4z_1z_2\\
x_{44} &= (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1c_1z_2z_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2c_2z_1z_3 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_3c_3z_1z_2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Преобразуем к более простому виду основной детерминант $\Delta(\lambda)$ системы (3.2). Рассмотрим два случая:

а) корни уравнения (1.6) действительны: $\alpha_1 = -\alpha_4$, $\alpha_2 = -\alpha_3$. Тогда числа β_p принимают значения $\beta_1 = -\bar{\beta}_4 = e_1 + id_1$, $\beta_2 = -\bar{\beta}_3 = e_2 + id_2$. При этом функция $\Delta(\lambda)$ преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda) = 2\Delta_1(\lambda,\varphi)e^{i(d_1+d_2)\lambda h}; \qquad \Delta_1(\lambda,\varphi) = \{4\alpha_1\alpha_2\cos[(d_1 - d_2)\lambda h] - \\ -(\alpha_1 + \alpha_2)^2\operatorname{ch}[(e_1 - e_2)\lambda h] + (\alpha_1 - \alpha_2)^2\operatorname{ch}[(e_1 + e_2)\lambda h]\}\end{gathered} \tag{3.7}$$

б) корни уравнения (6) комплексны: $\alpha_1 = -\alpha_4 = -(a + bi)$, $\alpha_2 = -\alpha_3 = -(a - bi)$. Числа β_p при этом будут $\beta_1 = -\bar{\beta}_3 = e_1 + id_1$, $\beta_2 = -\bar{\beta}_4 = e_2 + id_2$. Для функции $\Delta(\lambda)$ получается выражение

$$\Delta(\lambda) = -8\Delta_2(\lambda,\varphi)e^{i(d_1+d_2)\lambda h} \tag{3.8}$$

$$\Delta_2(\lambda,\varphi) = \{a^2\cos[(d_1-d_2)\lambda h] + b^2\mathrm{ch}[(e_1-e_2)\lambda h] - (a^2+b^2)\mathrm{ch}[(e_1-e_2)\lambda h]\}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что корни функции $\Delta(\lambda)$ расположены симметрично относительно координатных осей комплексной плоскости λ, причем $\lambda = 0$ всегда является четырехкратным корнем $\Delta(\lambda)$. При этом, интегралы (1.14) будут сходящимися только при выполнении условий равновесия статики и "закрепления" произвольной точки (точка отсчета) полосы.

4. Численный пример. В качестве конкретного примера рассматривается задача об изгибе анизотропной полосы под действием нормальных сил (плоское деформированное состояние).

$$f_1(\xi) = \begin{cases} P_1, & (|\xi| \in (a,b)) \\ 0, & (|\xi| \notin (a,b)) \end{cases}, \qquad f_1(\xi) = \begin{cases} P_2, & (|\xi| < l) \\ 0, & (|\xi| > l) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$g_1(\xi) = g_2(\xi) = 0, \qquad P_1(b-a) = P_2 l = P_0$$

Преобразование Фурье (3.3) этой нагрузки будет

$$\tilde{f}_1(\lambda) = \frac{P_1}{\pi\lambda^2}(\sin\lambda b - \sin\lambda a), \qquad \tilde{f}_2(\lambda) = \frac{P_1}{\pi\lambda^2}\sin\lambda l \tag{4.2}$$

Пусть материал полосы-пьезокерамика ЦТБС-3, для которого

$$c_{11} = 15.51\chi,\ c_{13} = 8\chi,\ c_{33} = 13.6\chi,\ c_{44} = 2.9\chi,\ \chi = 10^5\ \text{кгс/см}^2 \tag{4.3}$$

Значения корней уравнения (1.6) и числа β_p для этого материала приведены в табл. 1

$(\alpha_p$ и $\beta_p)$ для материала (4.3) Таблица 1

φ	p	1	2	3	4
	α_p	-2.2494	-0.4748	0.4748	2.2494
0	β_p	2.2494	0.4748	-0.4748	-2.2494
$\pi/8$	β_p	$1.4107+0.9002i$	$0.5355-0.3089i$	$-0.5355-0.3089i$	$-1.4107+0.9002i$
$\pi/4$	β_p	$0.7424+0.6700i$	$0.7749-0.6321i$	$-0.7749-0.6321i$	$-0.7424+0.6700i$
$3\pi/8$	β_p	$0.5038+0.3214i$	$1.4012-0.8083i$	$-1.4012-0.8083i$	$-0.5038+0.3214i$
$\pi/2$	β_p	0.4446	2.1063	-2.1063	0.4446

Трансцендентная функция $\Delta(\lambda)$, согласно (3.7), записывается в виде

$$\Delta(\lambda) = 2\Delta_1(\lambda,\varphi)\cdot e^{ia_0\lambda h}$$

$$\Delta_1(\lambda,\varphi) = 4.27166\cdot\cos(a_1\lambda h) - 7.42097\cdot\mathrm{ch}(a_2\lambda h) + 3.14931\cdot\mathrm{ch}(a_3\lambda h) \tag{4.4}$$

Значения параметров a_k $(k = 0 \div 3)$, в зависимости от угла φ, приведены в табл. 2.

Значения a_k $(k = 0,1,2,3)$ Таблица 2

φ \ a_k	a_0	a_1	a_2	a_3
0	0	0	1.77463	2.72415
$\pi/8$	0.59131	1.20907	0.87515	1.94619
$\pi/4$	0.03791	1.30208	0.032462	1.51727
$3\pi/8$	0.48692	1.12971	0.897396	1.90491
$\pi/2$	0	0	1.66177	2.55090

Для материала (4.3) вычислены корни трансцендентного уравнения (4.4) при различных направлениях главных осей анизотропии. Значения первых шести корней $w_k = \lambda_k h$ функции $\Delta_1(\lambda,\varphi)$ приведены в табл. 3.

Корни $w_k = \lambda_k h$ функции $\Delta(\lambda)$ Таблица 3

k \ φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
1	2.94978i	2.24493+3.50168 i	3.20308+3.48366 i	2.23785+3.67903 i	3.15012 i
2	4.06055i	3.74816+5.74557 i	5.23130+5.86284 i	3.75978+6.02264 i	4.33632 i
3	7.00033i	5.17409+8.08192 i	7.27873+8.24750 i	5.17800+8.46845 i	7.47575 i
4	7.82883 i	6.62572+10.4128 i	9.32528+10.6323 i	6.63122+10.9118 i	8.36052 i
5	9.96480 i	8.07230+12.7414 i	11.3719+13.0171 i	8.07773+13.3505 i	10.6415 i
6	11.0676 i	9.51944+15.0710 i	13.4184+15.4019 i	9.52478+15.7910 i	11.8192 i

Дальнейшие вычисления проводились для следующих значений параметров (4.1) и (4.2):

$$l = 0.5\text{ед.},\ h = 1\text{ед.},\ a = 5\text{ед.},\ b = 6\text{ед.},\ P_1 = 1\text{ед.},\ P_2 = 2\text{ед.}$$

$\sigma_\xi(\xi,\eta)$ Таблица 4

φ	η \ ξ	0	0.5	1	2	3	4	5	6
0	0	32.32	30.51	27.12	21.01	15.00	9.00	2.74	-0.26
	0.5	0.095	0.015	-0.044	-0.004	-0.001	-0.007	-0.007	-0.007
	1	-32.61	-30.52	-26.99	-21.01	-15.01	-9.00	-2.75	0.25
$\pi/8$	0	31.57	30.66	28.14	22.19	16.18	10.18	3.55	0.163
	0.5	0.1403	-0.2490	-0.5963	-0.5928	-0.5911	-0.5985	-0.4201	-0.1609
	1	-31.93	-29.27	-25.76	-19.83	-13.82	-7.812	-2.078	0.327
$\pi/4$	0	31.297	30.106	27.222	21.069	15.073	9.0067	3.108	-0.0337
	0.5	0.1812	-0.0403	-0.1365	-0.0349	-0.0379	-0.0373	-0.0391	0.0005
	1	-31.767	-29.860	-26.88	-20.936	-14.927	-8.9269	-2.9098	0.0147
$3\pi/$	0	31.62	29.67	26.14	20.02	14.02	8.034	2.215	-0.282
	0.5	0.1227	0.1987	0.3602	0.4894	0.4871	0.4834	0.3398	0.1551
	1	-31.94	-30.60	-27.74	-21.98	-15.98	-9.983	-3.653	-0.2213
$\pi/2$	0	32.24	30.45	27.09	21.01	15.00	9.00	2.78	-0.225
	0.5	0.0781	0.0106	-0.0367	-0.0022	-0.0003	-0.0051	0.0053	0.0053
	1	-32.46	-30.45	-26.97	21.01	-15.01	-9.00	-2.78	0.224

$\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)$, $(\tau_{\xi\eta}(\xi,0) = \tau_{\xi\eta}(\xi,1) = 0)$ Таблица 5

φ	η \ ξ	0	0.5	1	2	3	4	5	6
0	0.25	0	0.9820	1.1486	1.1267	1.1249	1.1218	1.1650	-0.0400
	0.5	0	1.2934	1.4876	1.500	1.500	1.500	1.396	0.1033
	0.75	0	1.2050	1.1101	1.1234	1.1251	1.1287	1.0535	0.0715
π/8	0.25	-0.1056	0.8351	1.0981	1.1267	1.1250	1.1213	1.2330	-0.0011
	0.5	-0.0204	1.3176	1.5274	1.4995	1.4999	1.5018	1.4088	0.0931
	0.75	0.1139	1.3409	1.1411	1.1237	1.1251	1.1276	0.9801	0.0372
π/4	0.25	-0.0203	0.9030	1.1802	1.1230	1.1252	1.1208	1.1936	-0.0613
	0.5	-0.0007	1.3247	1.5201	1.5001	1.5000	1.4993	1.4123	0.0881
	0.75	0.0215	1.2622	1.0575	1.1270	1.1248	1.1296	1.0140	0.1035
3π/8	0.25	0.0724	1.038	1.2130	1.1240	1.1251	1.1184	1.1340	-0.0961
	0.5	0.0181	1.3197	1.5017	1.5012	1.5000	1.5029	1.4098	0.0887
	0.75	-0.0785	1.1430	1.0369	1.1252	1.1248	1.1302	1.0815	0.1314
π/2	0.25	0	0.9924	1.1465	1.1262	1.1249	1.1225	1.163	-0.0363
	0.5	0	1.3061	1.4898	1.499	1.5000	1.4994	1.4031	0.0969
	0.75	0	1.1975	1.1104	1.1240	1.1251	1.1279	1.0587	0.0663

В различных точках полосы при различных ориентациях главных осей анизотропии вычислены значения нормального $\sigma_\xi(\xi,\eta)$ и касательного $\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ напряжений. Результаты вычислений приведены в табл. 4. 5 соответственно.

В табл. 6 приведены значения относительного прогиба $[v(\xi,\eta) - v(6.0)]$ в различных граничных точках полосы, когда $(-5 \le \xi \le 5,\ \eta = 0$ и $\eta = 1)$.

$10^{?}[v(6.0) - v(\xi,\eta)]$ Таблица 6

φ	η \ ξ	0	0.5	1	2	3	4	5
0	0	18.113	13.245	9.368	3.516	0.989	0.132	0.162
	1	18.182	13.278	9.369	3.517	0.990	0.132	0.169
π/8	0	27.379	20.426	14.777	6.719	2.231	0.293	0.043
	1	27.471	20.497	14.808	6.748	2.260	0.321	0.066
π/4	0	37.113	27.960	20.372	9.583	3.484	0.733	0.011
	1	37.226	27.927	20.399	9.610	3.510	0.760	0.028
3π/	0	29.450	21.984	15.877	7.249	2.439	0.358	0.045
	1	29.536	22.008	15.946	7.315	2.505	0.424	0.067
π/2	0	20.954	15.381	10.930	4.656	1.265	0.162	0.048
	1	21.068	15.468	10.985	4.701	1.297	0.171	0.068

Полученные здесь результаты могут быть полезными при расчете деталей машин и строительных конструкций, а также при определении параметров будущего землетрясения методами современных сверхточных геодезических измерений [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезокерамических и электропроводных тел. М.: Наука. 1988. 472с.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. электроупругость. Киев: Наукова думка. 1989. 230с.
3. Бегларян А.Г. Разработка и совершенствование методов и приборов для автоматизации геодезических деформационных измерений инженерных сооружений и разломов земной коры. /Дисс. на соиск. уч. ст. докт. тех. наук. Ереван. 1997. 104с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука. 1977. 415с.
5. Ray M.C., Bhattacharya R., Samanta B. Exact-solutions for static analysis of intelligent structures. // AIAAJ. 1993. V.3. №9. p.1684-1691
6. Brooks S.P., Heyliger P.R. Static behavior of piezoelectric laminates with distributed and patchet electrodes. // J. Intelligent Mat. Sist. Struct. V.5. №5. 1994. p.635-646
7. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Смешанная задача электроупругости для пьезокерамического клина с электродами. // Докл. НАН Арм. 1999. Т.99, №1, С.45-51
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1957. 360с.
9. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок. // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1961. №3.
10. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
11. Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц. Оптимальные задачи колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек. // Механика полимеров. 1976. №5. С. 871-874.
12. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван. Из-во ЕГУ. 1976. 534с.
13. Агаловян М.Л. Краевые задачи на собственные значения для анизотропных тонкостенных тел. / Дисс. на соиск. уч. ст. канд. ф-м. наук. Ереван. 1998. 109с.
14. Бархударян А.М., Бегларян А.Г., Амбарцумян П.В. Гидродинамический нивелир. А.С. 1075075 (СССР)

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
2.10.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКОСТИ, УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Гнуни В.Ц.

Վ.Ց. Գնունի
Երկակի հաստատուն փոքր կորության թաղանթների կոշտության, կայունության և տատանումների բնութագրիչների վրա լայնական սահքերի ազդեցության վերլուծությունը

Աշխատանքում երկակի հաստատուն փոքր կորության թաղանթների կոշտության, տատանումների և կայունության խնդիրների օրինակների վրա կատարվում է լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցության վերլուծությունը թաղանթի հաշվարկային բնութագրիչների վրա։ Տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված, եզրակետերում ամրացված թաղանթի համար գտնված են թաղանթի կորության պարամետրի սահմանները, որոնցից հետո լայնական սահքերի ազդեցությունը կարելի է անտեսել 5%-ի ճշտությամբ

V. Ts. Gnuni
Analysis of Influence of Transverse Shear on Rigidness, Stability and Vibration of Shallow Shells of Double Constant Curve

В работе на примерах задач жесткости, колебаний и устойчивости весьма пологих оболочек двоякой постоянной кривизны делается анализ влияния учета поперечных сдвигов на расчетные характеристики. Для радиально опертой по четырем краям оболочки, изготовленной из трансверсально-изотропного материала, найдены границы параметра кривизны оболочки, после которых влиянием учета поперечных сдвигов можно пренебречь с точностью до 5%.

1. Пусть оболочка двоякой постоянной кривизны k_1, k_2 с размерами a, b, h и техническими постоянными материала E, ν, G' загружена давлением

$$q(x,y) = q_1 \sin\lambda_1 x \sin\mu_1 y \qquad \left(\lambda_1 = \frac{\pi}{a},\ \mu_1 = \frac{\pi}{b}\right) \tag{1.1}$$

При (1.1) для наибольшего по координатам x, y прогиба оболочки (прогиб в точке $x = 0{,}5a$, $y = 0.5b$) получается формула [1]

$$w_{11} = q_1 \left[\frac{D\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2}{1 + k_{11}} + Eh\frac{\left(k_2\lambda_1^2 + k_1\mu_1^2\right)^2}{\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2}\right]^{-1} \tag{1.2}$$

где $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$, $\quad k_{11} = Eh^2\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)/10\left(1-\nu^2\right)G'$

Здесь k_{11} характеризует влияние поперечных сдвигов и приводит к увеличению максимального прогиба оболочки. В случае пластинки [2]

$$w_1 = \frac{q_1}{D\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2}\left(1 + k_{11}\right) = w_1^0\left(1 + k_{11}\right)$$

где w_1^0 – наибольший прогиб пластинки по классической теории.

При $k_{11} \le 0.05$ влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь уже для пластинок $(k_1 = k_2 = 0)$. В этом случае для относительных толщин

$$\frac{h^*}{a} \le 0.225\sqrt{\frac{(1-\nu^2)G'}{(1+\chi^2)E}} \quad (\chi = a/b) \tag{1.3}$$

влияние поперечных сдвигов на максимальный прогиб пластинки не превышает 5%.

В случае квадратной изотропной пластинки $(a = b)$ и при $\nu = 0.3$ получается $h^*/a \le 0.0941$.

В случае оболочек вклад второго члена в знаменателе (1.2) приводит к уменьшению максимального прогиба w_1 и влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь при относительных толщинах больше, чем в (1.3). Требование, чтобы поправка от учета влияния поперечных сдвигов была меньше 5%, приводит к условию

$$\frac{w_1}{w_1^0} = \frac{A + B}{\dfrac{A}{1 + k_{11}} + B} \le 1{,}05 \tag{1.4}$$

где w_1^0 – наибольший прогиб оболочки по классической теории

$$A = D\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2, \quad B = Eh\frac{\left(k_2\lambda_1^2 + k_1\mu_1^2\right)^2}{\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2} \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует

$$B \ge \frac{20(k_{11} - 0{,}05)}{k_{11} + 1}A \tag{1.6}$$

Здесь следует отметить, что при $k_{11} \le 0.05$ влиянием поперечных сдвигов с точностью до 5% можно пренебречь уже для пластинки.

Из условия (1.6), с учетом обозначений (1.5), для параметра кривизны получается

$$\left(k_2 + k_1\chi^2\right)a \ge 12.7\left(1 + \chi^2\right)^2\frac{h}{a}\sqrt{\frac{k_{11} - 0{,}05}{\left(1 - \nu^2\right)\left(1 + k_{11}\right)}} \tag{1.7}$$

В случае квадратной в плане $(a = b)$ сферической оболочки $(k_1 = k_2 = 1/R)$, при $\nu = 0.3$ из (1.7) получается

$$\frac{a^2}{hR} \ge 26{,}7\sqrt{\frac{k_{11} - 0{,}05}{k_{11} + 1}} \tag{1.8}$$

В табл. 1 в зависимости от k_{11} приведены значения параметра кривизны оболочки a^2/Rh, при котором поправка от учета влияния поперечных сдвигов не превышает 5%.

Последняя строка табл 1 показывает увеличение наибольшего прогиба пластинки при учете влияния поперечных сдвигов по сравнению с классической теорией. Между тем, для оболочек при данных k_{11} влияние учета поперечных сдвигов пренебрежимо с точностью до 5% .

Таблица 1

k_{11}	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
a^2/hR	10.9	14.6	16.9	18.4	19.5	20.3	21.0	21.5
w_1/w_1^0 $R=0$	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00

Определим теперь параметр кривизны оболочки, для которой влиянием первого слагаемого в знаменателе формулы (1.2) можно пренебречь по сравнению со вторым, т.е. пренебрегается влияние моментного состояния на наибольший прогиб оболочки

$$B \geq \frac{20A}{1+k_{11}} \qquad (1.9)$$

Из (1.9) для параметра кривизны оболочки получается

$$\left(k_2 + k_1\chi^2\right)a \geq 12{,}7\frac{\left(1+\chi^2\right)^2}{\sqrt{\left(1+k_{11}\right)\left(1-\nu^2\right)}} \qquad (1.10)$$

Для сферической оболочки $\left(k_1 = k_2 = 1/R\right)$ при $a = b$ и $\nu = 0{,}3$ получается оценка

$$\frac{a^2}{Rh} \geq \frac{26{,}7}{\sqrt{1+k_{11}}} \qquad (1.11)$$

При (1.10) оболочку в смысле наибольшего прогиба можно считать безмоментной $w_1 = q_1/B = q_1\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2 / Eh\left(k_2\lambda_1^2 + k\mu_1^2\right)^2$, откуда для вышеприведенной сферической оболочки получается $w_1 = q_1 R^2/Eh$.

2. Рассмотрим теперь вопрос влияния поперечных сдвигов на частоты свободных колебаний оболочки.

Для частот собственных колебаний оболочки с учетом влияния поперечных сдвигов имеется формула [1]

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left[\frac{D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2}{1+k_{mn}} + Eh\frac{\left(k_1\mu_n^2 + k_2\mu_m^2\right)^2}{\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2}\right] \qquad (2.1)$$

где $\lambda_m = m\pi/a$, $\mu_n = n\pi/b$, m, n — числа полуволн по направлениям координатных осей $0x, 0y$. $k_{mn} = Eh^2\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)/10\left(1-\nu^2\right)G'$.

Очевидно, что первая (наименьшая) частота собственных колебаний пластинки достигается при $m = n = 1$ и равна

$$\omega_{11} = \omega_{11}^0/\sqrt{1+k_{11}}\ , \qquad \omega_{11}^0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\frac{\pi^2}{a^2}\left(1+\chi^2\right) \qquad (2.2)$$

где ω_{11}^0 — первая частота собственных колебаний пластинки, найденной по классической теории.

Учет влияния поперечных сдвигов приводит к уменьшению частот собственных колебаний.

Из (2.2) получается, что при

$$\frac{\omega_{11}^{0}}{\omega_{11}} = \sqrt{1 + k_{11}} \le 1{,}05 \Rightarrow k_{11} \le 0.1025 \qquad (2.3)$$

влиянием поперечных сдвигов на первую частоту собственных колебаний пластинки можно пренебречь.

В случае квадратной $(\chi = 1)$, изотропной пластинки, при $\nu = 0.3$ получается $h^{*}/a \le 0.135$.

В случае оболочек требование 5% точности классической теории приводит к условию

$$\frac{\omega_{mn}^{0}}{\omega_{mn}} = \sqrt{\frac{A_{mn} + B_{mn}}{\dfrac{A_{mn}}{1 + k_{mn}} + B_{mn}}} \le 1{,}05 \Rightarrow B_{mn} \ge 9{,}76\frac{k_{mn} - 0{,}1025}{k_{mn} + 1}A_{mn} \qquad (2.4)$$

где

$$A_{mn} = D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2 \quad , \qquad B_{mn} = Eh\frac{\left(k_2\lambda_m^2 + k_1\mu_n^2\right)^2}{\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2} \qquad (2.5)$$

Для сферической оболочки $(k_1 = k_2 = 1/R)$ найдем форму собственных колебаний, при которой достигается первая частота собственных колебаний. Для частот собственных колебаний сферической оболочки

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left[\frac{D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2}{1 + k_{mn}} + \frac{Eh}{R^2}\right] \qquad (2.6)$$

Нетрудно показать, что ω_{mn} – монотонно возрастающая функция от λ_m и μ_n, и следовательно, $\min\omega_{mn} = \omega_{11}$. В этом случае из второй формулы (2.4) для параметра кривизны оболочки получается

$$\frac{a^2}{Rh} \ge 18.7\sqrt{\frac{k_{11} - 0.1025}{k_{11} + 1}} \qquad (2.7)$$

В табл. 2 в зависимости от k_{11} приведены значения параметра кривизны сферической оболочки a^2/Rh, при котором поправка от учета влияния поперечных сдвигов не превышает 5%

Таблица 2.

k_{11}	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
a^2/Rh	14.0	14.9	15.5	15.9	16.2	16.5	16.7	16.9
$\omega_{11}/\omega_{11}^{0}$ $R = \infty$	0.632	0.577	0.534	0.500	0.471	0.447	0.426	0.408

Как видно из табл.2, учет влияния поперечных сдвигов на первую частоту оказывает более слабое влияние, чем на наибольший прогиб. При изменении k_{11} в достаточно широком диапазоне при значениях параметра кривизны, соответствующих теории весьма пологих оболочек, первая частота собственных колебаний оболочки практически (с точностью до 5%) не меняется при учете влияния поперечных сдвигов. Между тем, для

$k_{11} \in [1{,}5;\, 5]$ первая частота собственных колебаний пластинки уменьшается от 1.58 до 2.45 раз.

Отметим, что для квадратной в плане сферической оболочки при

$$\frac{a^2}{Rh} \ge \frac{17.7}{\sqrt{(1+k_{11})(1-\nu^2)}} \tag{2.8}$$

влиянием моментного состояния на первую частоту можно пренебречь и для первой частоты принять

$$\omega_{11} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим теперь вопрос учета влияния поперечных сдвигов на критическую нагрузку на примере весьма пологой прямоугольной в плане axb сферической оболочки. Пусть оболочка загружена постоянным давлением q, тогда для собственных значений задачи устойчивости получается формула

$$q^{*}_{mn} = \frac{2D}{R}\left[\frac{\lambda_m^2+\mu_n^2}{1+k\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)} + \frac{\alpha}{\lambda_m^2+\mu_n^2}\right] \tag{3.1}$$

где

$$\alpha = Eh/R^2D = 12\left(1-\nu^2\right)/h^2R^2\ , \qquad k = Eh^2/10\left(1-\nu^2\right)G' \tag{3.2}$$

Нетрудно показать, что наименьшее значение q^{*}_{mn} достигается при

$$\lambda_m^2+\mu_n^2 = \sqrt{\alpha}/\left(1-k\sqrt{\alpha}\right) \tag{3.3}$$

и критическое значение давления –

$$q_{\text{кр}} = \frac{4D}{R}\sqrt{\alpha}\left(1-\frac{1}{2}k\sqrt{\alpha}\right)$$

или с учетом обозначений (3.2)

$$q_{\text{кр}} = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}R^2}\left(1-\frac{\sqrt{3}E}{10\sqrt{1-\nu^2}\,G'}\frac{h}{R}\right) \tag{3.4}$$

В случае оболочки из изотропного материала при $\nu = 0.3$

$$q_{\text{кр}} = 1.21E\frac{h^2}{R^2}\left(1-0.472\frac{h}{R}\right) \tag{3.5}$$

Из формулы (3.4) видно, что в отличие от задач жесткости, собственных колебаний, в задаче устойчивости сферической оболочки при внешнем давлении, поправка от учета влияния поперечных сдвигов имеет порядок h/R, а не h^2/a^2.

В случае весьма пологой сферической оболочки из изотропного материала поправка от учета поперечных сдвигов менее 2.5% , т.к. для пологой оболочки $h/R \le 1/20$.

В случае оболочки из трансверсально-изотропного материала только при $E/G' > 110$ учет влияния поперечных сдвигов может повлиять на значение критической нагрузки.

4. На примере одномерной задачи изгиба длинной пластинки

$(h >> a)$ оценивается влияние учета поперечных сдвигов на напряженное состояние.

Пусть пластинка по длинным сторонам $(x = 0,\ y = a)$ шарнирно оперта и загружена давлением $q = q_1 \sin\lambda_1 x$, тогда для определения ненулевых напряжений из [1] можно получить формулы

$$\sigma_{11} = \frac{12a^2 z}{\pi^2 h^3}\left[1 + k_1 - 5k_1\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2}\right)\right] q_1 \sin\lambda_1 x, \quad \left(k_1 = \frac{\pi^2 E h^2}{10(1-\nu^2)a^2 G'}\right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{6a}{\pi h}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) q_1 \cos\lambda_1 x \qquad (4.1)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{12z}{h}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2}\right)\right] q_1 \sin\lambda_1 x$$

Следует отметить, что значения σ_{13}, σ_{33} не отличаются от соответствующих значений классической теории, а значение σ_{11} не удовлетворяет уравнению равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} = 0 \qquad (4.2)$$

причем наибольшая ошибка $(x = 0,\ y = a,\ z = \pm h/2)$ по абсолютному значению равна

$$\frac{ak_1}{\pi h} = \frac{\pi E h}{10(1-\nu^2)aG'} \qquad (4.3)$$

что на порядок больше поправки от учета влияния поперечных сдвигов.

Отметим также, что поправка от учета влияния поперечных сдвигов на наибольшее значение нормального напряжения $\sigma_{11}(0{,}5a : 0{,}5h)$

$$\max_{x,\,z} \sigma_{11} = \frac{6a^2}{\pi^2 h^2}\left(1 + \frac{k_1}{6}\right) \qquad (4.4)$$

в шесть раз меньше, чем на наибольший прогиб и для изотропной пластинки влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь уже при $h/a \geq 0{,}326$

С целью обеспечения удовлетворения уравнения (4.2) следует σ_{13} определить не по формуле (4.1)

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x)$$

что принято на стадии гипотез, а из (4.2) при значении σ_{11} по первой формуле (4.1), откуда

$$\sigma_{13} = \frac{6a}{\pi h}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) - \frac{1}{96}k_1\left(1 - 24\frac{z^2}{h^2} + 80\frac{z^4}{h^4}\right)\right] q_1 \cos\lambda_1 x \qquad (4.5)$$

Наибольшие значения $\sigma_{13}(0{,}0) = \sigma_{13}(a{,}0)$, найденные по формулам (4.1), (4.5), суть

$$\sigma_{13} = \frac{3a}{2\pi h}, \quad \sigma_{13} = \frac{3a}{2\pi h}\left(1 - \frac{k_1}{24}\right), \text{ если } k_1 \le 4 \tag{4.6}$$

При $k_1 = \pi^2 Eh^2 / 10(1-\nu^2)G' a^2 > 4$ наибольшее значение σ_{13} достигается при

$$\frac{z}{h} = \pm\sqrt{0{,}15k_1 - 0{,}6} \tag{4.7}$$

Условие (4.7) для изотропной пластинки при $\nu = 0{,}3$ дает $h/a > 1{,}19$, что бессмысленно. Однако, для пластинки из трансверсально-изотропного материала при $\nu = 0{,}3$, $k_1 > 4$, $h\sqrt{E}/a\sqrt{a} > 1{,}92$ и относительных толщинах $h/a = 1/3,\ 1/4,\ 1/5$, для E/G' соответственно получается $E/G' > 33{,}2 : 59{,}0 : 92{,}2$.

В случае $k_1 > 4$ уменьшение наибольшего значения σ_{13}, найденного по формуле (4.5), становится существенным по сравнению со значением по второй формуле (4.1).

В заключение следует отметить, что вышеизложенное не относится к задачам распространения упругих волн, где учет влияния поперечных сдвигов необходим.

ЛИТЕРАТУРА

1.Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 440 с.
2.Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластинок. М.: Физматгиз. 1967. 360 с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
19.08.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3:537.2

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

(Исследование поведения коэффициента электромеханической связи)

Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А.

Զ.Ն. Դանոյան, Ն.Զ. Դանոյան, Գ.Ա.Մանուկյան
Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները դիէլեկտրիկ շերտով և պյեզոէլեկտրիկ հիմքով շերտավոր համակարգում
(Էլեկտրամեխանիկական կապի գործակցի վարքի հետազոտումը)

Աշխատանքում հետազոտվում է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը 6,4,622,422,6mm,4mm դասի պյեզոէլեկտրիկ հիմքով և կամայական հաստությամբ իզոտրոպ դիէլեկտրիկ շերտով համակարգում՝ կախված շերտավոր համակարգի ֆիզիկա-մեխանիկական բնութագրիչներից և շերտի հարաբերական հաստությունից: Ստացվել է մակերևութային ալիքի բնութագրիչ հավասարումը որոնելի ալիքի տարածման փուլային արագության նկատմամբ կախված վերը բերված պարամետրերից: Մանրամասն պարզաբանված է բնութագրիչ հավասարման մեջ մտնող մակերևութային ալիքի էլեկտրամեխանիկական կապի գործակցի (ԷՄԿԳ) վարքը՝ կախված համակարգի բնութագրիչներից և շերտի հարաբերական հաստությունից: Ըստ ԷՄԿԳ-ի հատկությունների դիտարկվող շերտավոր համակարգերը տրոհվել են մի քանի խմբերի: Հոդվածում ստացված արդյունքները կօգտագործվեն հետագայում մակերևութային ալիքի բնութագրիչ հավասարման, նրա գոյությունը և ձևերի վարքը ուսումնասիրելու համար

Z.N.Danoyan,.N. Z Danoyan, G.A.Manukyan
The Surface Electroelastic Love's Waves in a Layered System with a Piezoelectric Substructure and Dielectric Layer
(The investigation of the behaviour of the electromechanical connection coefficient)

В работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в слоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 и изотропного диэлектрического слоя произвольной толщины в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и относительной толщины слоя. Получено характеристическое уравнение искомой поверхностной волны относительно фазовой скорости распространения, зависящей от вышеуказанных параметров. Подробно выяснено поведение коэффициента электромеханической связи (КЭМС), входящего в характеристическое уравнение поверхностной волны, в зависимости от характеристик слоистой системы и относительной толщины слоя. По свойствам КЭМС рассматриваемые слоистые системы разделены на определенные группы. Полученные в работе результаты будут использоваться в дальнейшем для исследования характеристического уравнения, существования и поведения мод поверхностной волны.

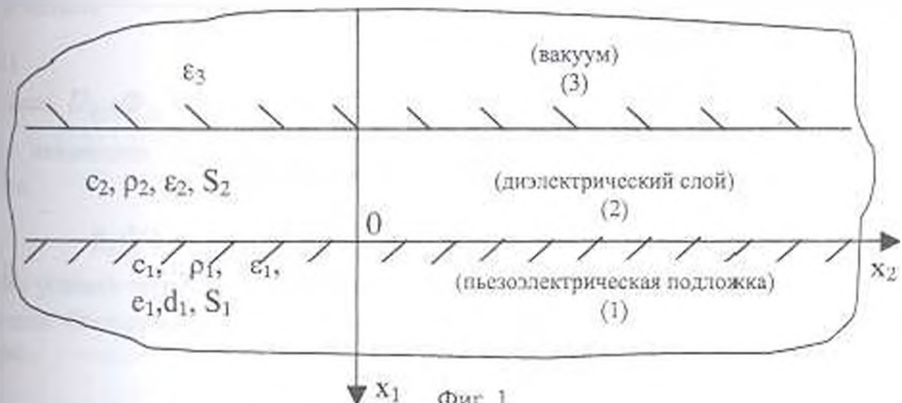
Введение

Известно [1,2,10,12], что в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться сдвиговые поверхностные упругие волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява. Волны Лява существуют только в случае мягкого слоя, когда скорость распространения объемной упругой волны в слое S_{02} меньше, чем скорость распространения упругой объемной волны в подложке S_{01}, причем скорость V_{0l} волны Лява удовлетворяет условию $S_{02} < V_{0l} < V_{01}$. Представляет интерес исследование волн Лява в слоистых системах, когда подложка или слой является пьезоэлектриком [3-10]. В [3,4,7,9] исследован вопрос существования волн Лява, когда слой является диэлектриком, а подложка – пьезоэлектриком. В [5-6] рассмотрена электроупругая задача Лява, когда слой является проводником, а подложка – пьезоэлектриком. В [8] рассматривается случай, когда слой является пьезоэлектриком, а подложка – диэлектриком.

В настоящей работе рассматриваются электроупругие волны Лява для пьезоэлектрических подложек классов 6,4,6mm, 4mm, 622, 422 с диэлектрическим слоем, дополняя и уточняя результаты работ [3,4,7]. Подробно исследуется поведение коэффициента электромеханической связи (КЭМС), входящего в характеристическое уравнение поверхностной волны, в зависимости от характеристик слоистой системы и относительной толщины слоя. По свойствам КЭМС рассматриваемые слоистые системы разделены на определенные группы. Полученные в работе результаты будут использоваться в дальнейшем для исследования характеристического уравнения, существования и поведения мод поверхностной волны.

1. Основные соотношения задачи

Пусть слоистая система, состоящая из диэлектрического изотропного слоя толщины h и полубесконечной пьезоэлектрической подложки классов 4, 6, 4mm, 6mm, 422, 622, находящихся в жестком контакте, отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ (фиг.1). Ось Ox_3 совпадает с главной осью симметрии (L_4 или L_6) пьезоэлектрической подложки и лежит в плоскости $x_1 = 0$ границы раздела слоя и подложки, ось Ox_1 направлена в глубь подложки. Вне слоистой системы (в области $x_1 < -h$) предполагается вакуум (или диэлектрическая среда, которая граничит со слоем без акустического контакта). Границы слоя $x_1 = 0$ и $x_1 = -h$ электрически свободны (неметаллизированны), граница $x_1 = -h$ механически свободна.



Фиг. 1

Далее рассматривается антиплоская задача:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \ u_2 = 0 \ u_3 = u(x_1, x_2, t), & -h \le x_1 < +\infty \\ \varphi = \varphi(x_1, x_2, t), & -\infty < x_1 < +\infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

где u_k – компоненты упругого смещения, φ - потенциал электрического поля, связанный с вектором напряженности электрического поля $\bar{E}$ соотношением:

$$E_i = -\partial\varphi / \partial x_i \tag{1.2}$$

Учитывая (1.1), из уравнений и соотношений электроупругости пьезоэлектрических сред рассматриваемых классов, получим следующие уравнения и граничные условия [2-4, 6–10]:

1. Уравнения:

1) в области $x_1 > 0$ (в подложке):

$$\Delta u_1 = \frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \Delta\varphi_1' = 0 \tag{1.3}$$

2) в области $-h < x_1 < 0$ (в слое):

$$\Delta u_2 = \frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \qquad \Delta\varphi_2 = 0 \tag{1.4}$$

3) в области $x_1 < -h$ (в вакууме):

$$\Delta\varphi_3 = 0 \tag{1.5}$$

2. Граничные условия:

1) на границе $x_1 = 0$:

$$\begin{gathered} u_1 = u_2, \;\; \bar{e}_1 u_1 + \varphi_1' = \varphi_2, \; -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x_1} + d_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \\ \bar{c}_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - e_1\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x_1} - d_1\bar{e}_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - d_1\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x_2} = c_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{gathered} \tag{1.6}$$

1. на границе $x_1 = -h$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \;\; \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \;\; -\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\varepsilon_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} \tag{1.7}$$

Для получения поверхностных волн решения должны удовлетворять условиям затухания на бесконечности:

$$\begin{gathered} u_1 \to 0, \; \varphi_1' \to 0 \;\; \text{при}\, x_1 \to +\infty \\ \varphi_3 \to 0 \;\; \text{при}\, x_1 \to -\infty \end{gathered} \tag{1.8}$$

Выше приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered} S_1 = \sqrt{\bar{c}_1/\rho_1}, \quad S_2 = \sqrt{c_2/\rho_2}, \quad \bar{c}_1 = c_1(1+\chi_1^2) \\ \chi_1^2 = e_1^2/\varepsilon_1 c_1, \quad c_1 = c_{44}^{(1)}, \quad c_2 = c_{44}^{(2)}, \; d_1 = e_{14}^{(1)} \\ e_1 = e_{15}^{(1)}, \quad \bar{e}_1 = e_1/\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{11}^{(2)}, \; \varepsilon_3 = \varepsilon_{11}^{(3)} \\ \varphi_1' = \varphi_1 - \bar{e}_1 u_1, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Нижние индексы 1-3 относятся к подложке, слою и вакууму соответственно. S_1 и S_2 – скорости сдвиговых объемных волн, χ_1 – коэффициент электромеханической связи для объемной волны, c_1 и c_2 – упругие постоянные, e_1 и d_1 – пьезомодули, ε_1, ε_2, ε_3 – диэлектрические проницаемости, ρ_1 и ρ_2 – массовые плотности, φ_1' – новая неизвестная, выражающаяся через φ_1 и u_1.

2. Решение граничной задачи. Характеристическое уравнение поверхностной волны

Решение граничной задачи (1.3)-(1.8) будем искать в виде плоских гармонических волн, распространяющихся в направлении оси Ox_2, с упругим смещением и электрическим потенциалом:

$$u = U(x_1)\exp i(px_2 - \omega t), \quad -h < x_1 < +\infty$$
$$\varphi = \Phi(x_1)\exp i(px_2 - \omega t), \quad -\infty < x_1 < +\infty \tag{2.1}$$

где ω – частота, p – волновое число, $U(x_1)$ и $\Phi(x_1)$ – амплитуды смещения и потенциала, которые удовлетворяют условию затухания (1.8):

$$U(x_1) \to 0 \quad \text{при } x_1 \to +\infty$$
$$\Phi(x_1) \to 0 \quad \text{при } x_1 \to \pm\infty \tag{2.2}$$

В дальнейшем предполагается, что

$$\omega > 0, \quad p > 0 \tag{2.3}$$

а фазовая скорость волны определяется выражением:

$$V = \omega / p \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2) в уравнениях (1.3)-(1.5) и удовлетворяя условиям затухания (2.2), получим решение вида:

В области $x_1 > 0$:

$$u_1 = U_{01}\exp(-p\beta_1(V)x_1 \exp i(px_2 - \omega t)$$
$$\varphi_1 = \left[U_{01}\bar{e}_1\exp(-p\beta_1(V)x_1) + \Phi_{01}\exp(-px_1)\right]\exp i(px_2 - \omega t) \tag{2.5}$$

В области $-h < x_1 < 0$:

$$u_2 = [U^+_{02}\exp(ip\beta_2(V) + U^-_{02}\exp(-ip\beta_2(V)x_1]\exp i(px_2 - \omega t)$$
$$\varphi_2 = [\Phi^+_{02}\exp(px_1) + \Phi^-_{02}\exp(-px_1)]\exp i(px_2 - \omega t) \tag{2.6}$$

В области $-\infty < x_1 < -h$:

$$\varphi_3 = \Phi_{03}\exp(px_1)\exp i(px_2 - \omega t). \tag{2.7}$$

Здесь $U_{01}, \Phi_{01}\, U^+_{02}, U^-_{02}, \Phi^+_{02}, \Phi^-_{02}, \Phi_{03}$ – произвольные постоянные (которые также называются амплитудами), $\beta_1(V)$ и $\beta_2(V)$ – коэффициенты затухания, причем

$$\beta_1(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_1^2)}, \quad \beta_2(V) = \sqrt{(V^2 / S_2^2) - 1}$$

Из условия затухания (2.2) при $x_1 \to +\infty$ следует, что $\beta_1(V)$ положительная величина. Отсюда получается необходимое условие существования поверхностной волны:

$$0 < V_l < S_1 \tag{2.8}$$

и следует, что парциальная волна в подложке всегда должна быть неоднородной. Величина $\beta_2(V)$ можеть быть как действительной, так и мнимой. В первом случае она должна быть положительной, что дает условие:$V_L > S_2$. В этом случае в слое распространяются однородные упругие волны, испытывая полное внутреннее отражение от ограничивающих слои поверхностей (как и в случае обычной волны Лява). Во втором случае, когда $\beta_2(V)$ мнимая, имеет место условие $V_l < S_2$. В этом случае в слое будут распространяться неоднородные упругие парциальные волны, рождая волны Лява щелевого типа.

Таким образом, решения (2.5)-(2.7) типа (2.1) уравнений (1.3)-(1.5), удовлетворяющих условию (2.8), состоят из одной неоднородной электроупругой волны в подложке, двух упругих (однородных или неоднородных) волн в слое, четырех неоднородных электростатических волн: одной в вакууме, двух в слое и одной в подложке. Совокупность указанных волн, которые удовлетворяют граничным условиям (1.6)-(1.7), образуют сложную семипарциальную поверхностную волну, которую мы и называем электроупругой волной Лява.

Подставляя решение (2.5)-(2.7) в граничные условия (1.6)–(1.7), получим однородную систему алгебрических уравнений относительно искомых амплитуд:

$$\begin{gathered}U_{01} = U_{02}^{+} + U_{02}^{-}, \quad \bar{e}_1 U_{01} + \Phi_{01}' = \Phi_{02}^{+} + \Phi_{02}^{-} \\ (\bar{c}_1\beta_1 + i\bar{e}_1 d_1)U_{01} + (e_1 + id_1)\Phi_{01}' = ic_2\beta_2(U_{02}^{+} - U_{02}^{-}) \\ \varepsilon_1\Phi_{01}' + id_1 U_{01} = -\varepsilon_2(\Phi_{02}^{+} - \Phi_{02}^{-}),\ \Phi_{02}^{+}e^{-k} + \Phi_{02}^{-}e^{k} = \Phi_{03}e^{-k} \\ \beta_2(U_{02}^{+}e^{-i\beta_2 k} - U_{02}^{-}e^{i\beta_2 k}) = 0, \quad \varepsilon_2(\Phi_{02}^{+}e^{-k} - \Phi_{02}^{-}e^{k}) = \varepsilon_3\Phi_{03}e^{-k}\end{gathered} \tag{2.9}$$

В (2.9) обозначено:

$$k = ph = 2\pi h/\lambda \tag{2.10}$$

где k – относительная толщина слоя, λ – длина волны, p – волновое число.

Предпоследнее уравнение системы (2.9) равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{aligned}&\beta_2(V) = 0,\\ &U_{02}^{+}e^{-i\beta_2 k} - U_{02}^{-}e^{i\beta_2 k} = 0\end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

На основании выражений (2.5)–(2.7) из (2.9) следует, что первое уравнение (2.11) является частным случаем второго. Поэтому в дальнейшем вместо предпоследнего уравнения (2.9) мы будем использовать второе уравнение из (2.11).

Условие существования нетривиального решения системы (2.8) дает характеристическое уравнение поверхностной волны:

$$\beta_1(V) = c\beta_2(V)\mathrm{tg}[k\beta_2(V)] + R(k) \tag{2.12}$$

где приняты следующие обозначения:

$$R(k) = \frac{R_1^2\varepsilon_2(\bar{\varepsilon}_2\mathrm{th}k + 1) - K_1^2\bar{\varepsilon}_1(\bar{\varepsilon}_2 + \mathrm{th}k)}{\bar{\varepsilon}_2(\bar{\varepsilon}_2\mathrm{th}k + 1) + \bar{\varepsilon}_1(\bar{\varepsilon}_2 + \mathrm{th}k)} \tag{2.13}$$

$$c = c_2/\bar{c}_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_2, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_3 \tag{2.14}$$

$$R_1^2 = e_1^2/\varepsilon_1\bar{c}_1, \quad K_1^2 = d_1^2/\varepsilon_1\bar{c}_1 \tag{2.15}$$

Здесь R_1^2 и K_1^2 – коэффициенты электромеханической связи объемных волн, $R(k)$ – коэффициент электромеханической связи поверхностной волны.

Характеристическое уравнение (2.12) неявно определяет зависимость фазовой скорости электроупругой волны Лява от относительной толщины слоя k и физико-механических параметров слоистой системы.

Таким образом, мы приходим к заключению: для того, чтобы выражения (2.5)-(2.7) представляли собой волну Лява, необходимо, чтобы характеристическое уравнение поверхностной волны (2.12) при фиксированном значении параметров задачи имело решение $V = V_t(k)$, которое удовлетворяет условию затухания (2.8).

3. Исследование коэффициента электромеханической связи

Из соотношений (2.12)-(2.15) следует, что при отсутствии пьезоэффекта $e_1 = d_1 = 0$ КЭМС $R(k)$ обращается в нуль, а характеристическое уравнение (2.12) совпадает с характеристическим уравнением обычной волны Лява [1,2]. При $V > S_2$ обе величины $\beta_1(V)$ и $\beta_2(V)$ действительны, а фазовая скорость искомой волны определяется из характеристического уравнения (2.12). Если же $V < S_2$, то $\beta_2(V)$ становится мнимой, волны Лява становятся щелевого типа, а их скорость распространения будет определяться из преобразованного характеристического уравнения:

$$\beta_1(V) = -c\gamma_2(V)\mathrm{th}[k\gamma_2(V)] + R(k) \tag{3.1}$$

где
$$\gamma_2(V) = \sqrt{1-(V^2/S_2^2)} \tag{3.2}$$

Следует подчеркнуть, что вклад пьезоэффекта в характеристических уравнениях (2.12) и (3.1) проявляется двумя факторами: наличием коэффициента $R(k)$ и зависимостью скорости объемной волны $S_1 = (c_1/\rho_1)\sqrt{1+\chi_1^2}$ от пьезоэффекта. Отметим также, что характеристические уравнения (2.12) и (3.1) получены для классов 6 и 4. Для классов 6mm и 4mm следует в этих уравнениях и в других соответствующих выражениях положить $d_1 = 0$, а для классов 622, 422 положить $e_1 = 0$.

Далее примем следующее ограничение:

$$|R(k)| << 1 \tag{3.3}$$

что имеет место для большинства известных пьезоэлектриков [3.10].

Для исследования поведения функции $R(k)$ найдем ее производную:

$$R'(k) = \frac{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2(R_1^2+K_1^2)(\bar{\varepsilon}_2-1)}{\mathrm{ch}^2k[\bar{\varepsilon}_2(1+\bar{\varepsilon}_2\mathrm{th}k)+\bar{\varepsilon}_1(\bar{\varepsilon}_2+\mathrm{th}k)]^2} \tag{3.4}$$

Отсюда непосредственно следует знак $R'(k)$ и монотонность коэффициента $R(k)$, а именно:

$$\begin{aligned} &R'(k) > 0 \quad \bar{\varepsilon}_2 > 1 \\ &R'(k) = 0 \quad \bar{\varepsilon}_2 = 1 \\ &R'(k) < 0 \quad \bar{\varepsilon}_2 < 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

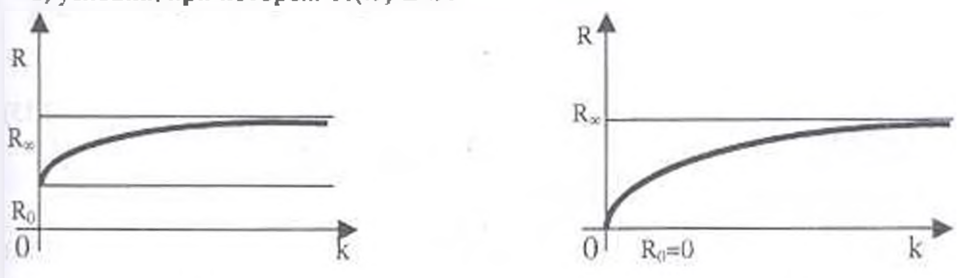
Согласно (3.5) знак функции $R(k)$ определяется знаками ее значений на концах промежутка $0 \le k \le \infty$

$$R_0 = R(0) = \frac{R_1^2 - K_1^2\bar{\varepsilon}_1}{1+\bar{\varepsilon}_1} = \frac{1}{\varepsilon_1\bar{c}_1}\frac{e_1^2 - d_1^2\bar{\varepsilon}_1}{1+\bar{\varepsilon}_1} \tag{3.6}$$

$$R_\infty = R(\infty) = \frac{R_1^2\bar{\varepsilon}_2 - K_1^2\bar{\varepsilon}_1}{\bar{\varepsilon}_2+\bar{\varepsilon}_1} = \frac{1}{\varepsilon_1\bar{c}_1}\frac{e_1^2\bar{\varepsilon}_2 - d_1^2\bar{\varepsilon}_1}{\bar{\varepsilon}_2+\bar{\varepsilon}_1} \tag{3.7}$$

На основании (3.5)-(3.7) получаем следующие характерные случаи поведения функции $R(k)$ в зависимости от значений параметров $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_1$, e_1 и d_1, рассматриваемой слоистой системы:

а) условия, при которых $R(k) \ge 0$:



а) б)

Фиг.2

1) $\bar{\varepsilon}_2 > 1, d_1 = 0$ или $\bar{\varepsilon}_2 > 1, \quad \bar{\varepsilon}_1 < \varepsilon_*$. (3.8)

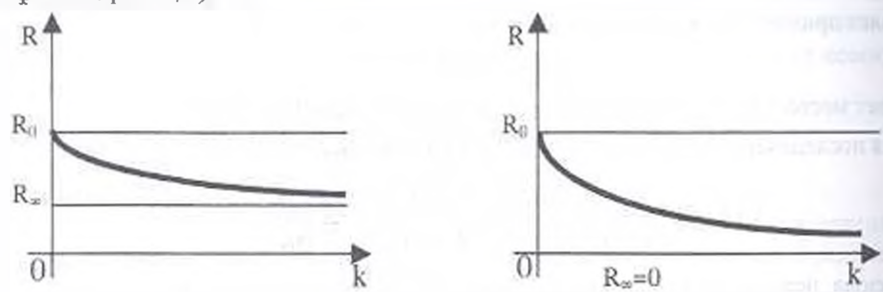
$R(k) > 0, \ k \in [0;\infty]$; $R(k)$ монотонно возрастает от значения $R_0 > 0$ до значения $R_\infty > 0$ (фиг.2.а);

2) $\bar{\varepsilon}_2 > 1, \ \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_*$: (3.9)

$R(k) > 0, \ k \in [0;\infty]$; $R(k)$ монотонно возрастает от значения $R_0 = 0$ до значения $R_\infty > 0$ (фиг. 2, б);

3) $\bar{\varepsilon}_2 < 1, \ d_1 = 0$ или $\bar{\varepsilon}_2 < 1, \bar{\varepsilon}_1 < \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_*$: (3.10)

$R(k) > 0, k \in [0;\infty]$; $R(k)$ монотонно убывает от значения $R_0 > 0$ до значения $R_\infty > 0$ (фиг. 3, а);



а) б)

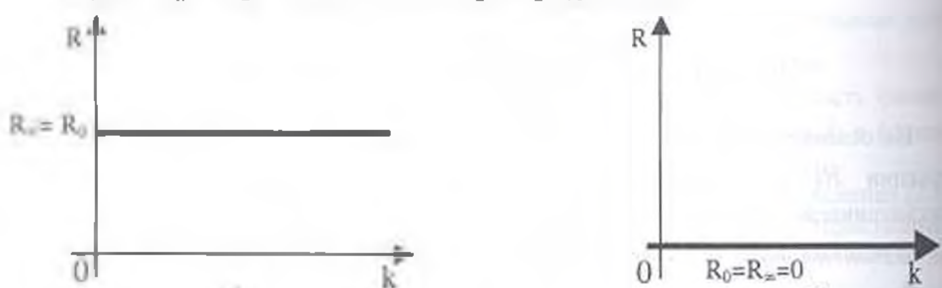
Фиг.3

4) $\bar{\varepsilon}_2 < 1, \ \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_*$: (3.11)

$R(k) > 0, \ k \in [0;\infty]$; $R(k)$ монотонно убывает от значения $R_0 > 0$ до значения $R_\infty = 0$ (фиг. 3, б);

5) $\bar{\varepsilon}_2 = 1, \ d_1 = 0$ или $\bar{\varepsilon}_2 = 1, \ \bar{\varepsilon}_1 < \varepsilon_*$: (3.12)

$R(k) \equiv R_0 = R_\infty = \text{const} > 0, \ k \in [0;\infty]$; (фиг. 4, а);



а) б)

Фиг.4

6) $\bar{\varepsilon}_2 = 1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_*$: (3.13)

$R(k) \equiv R_0 = R_\infty = 0 = \text{const}, \quad k \in [0;+\infty]$, (фиг.4.б)

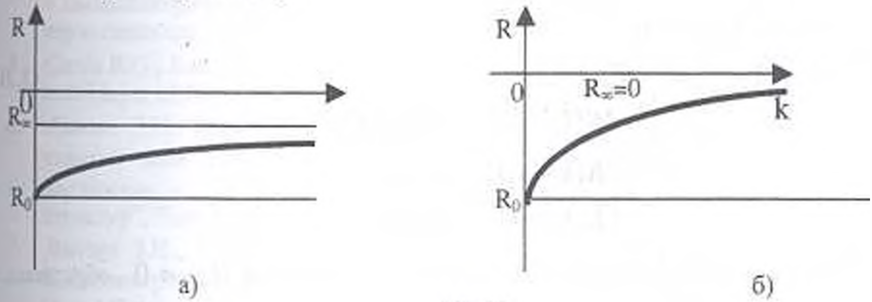
б) условия, при которых $R(k) \leq 0$:

$\bar{\varepsilon}_2 > 1, d_1 = 0$ или $\bar{\varepsilon}_2 > 1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_*$. (3.14)

$R(k)<0$, $k\in[0;\infty]$: $R(k)$ монотонно возрастает от значения $R_0<0$ до значения $R_\infty<0$ $R_\infty<0$ (фиг. 5.а);

2) $\bar{\varepsilon}_2>1, \quad \bar{\varepsilon}_1=\bar{\varepsilon}_2\varepsilon_*$: (3.15)

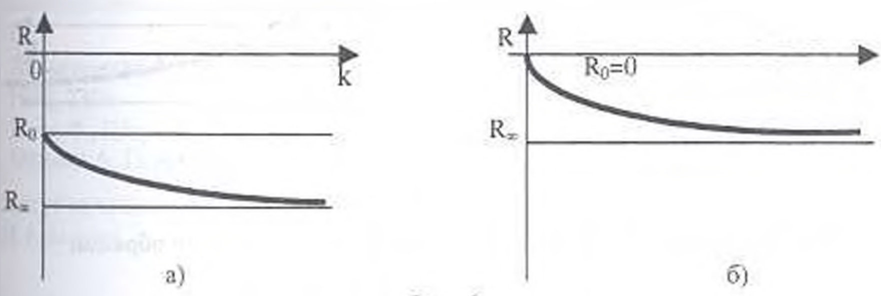
$R(k)<0$, $k\in[0;\infty]$; $R(k)$ монотонно возрастает от значения $R_0<0$ до значения $R_\infty=0$ (фиг. 5,б);



Фиг.5

3) $\bar{\varepsilon}_2<1, \quad e_*=0$ или $\bar{\varepsilon}_2<1, \quad \bar{\varepsilon}_1>\varepsilon_*$: (3.16)

$R(k)<0$, $k\in[0;\infty]$; $R(k)$ монотонно убывает от значения $R_0<0$ до значения $R_\infty<0$ (фиг.6, а);



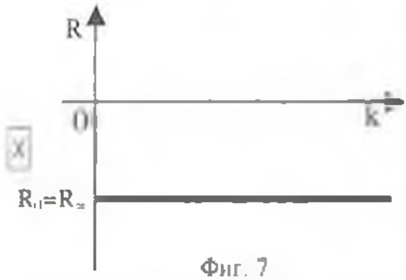
Фиг. 6

4) $\bar{\varepsilon}_2<1, \qquad \bar{\varepsilon}_1=\varepsilon_*$: (3.17)

$R(k)<0$, $k\in[0;\infty]$; $R(k)$ монотонно убывает от значения $R_0=0$ до значения $R_\infty<0$ (фиг. 6, б);

5) $\bar{\varepsilon}_2=1, \quad e_*=0$ или $\bar{\varepsilon}_2=1, \quad \bar{\varepsilon}_1>\varepsilon_*$: (3.18)

$R(k)=R_0=R_\infty=\text{const}<0$ (фиг.7.);



Фиг. 7

в) условия, при которых $R(k)$ знакопеременная:

1) $\bar{\varepsilon}_2 > 1, \quad \varepsilon_* < \bar{\varepsilon}_1 < \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_*$: (3.19)

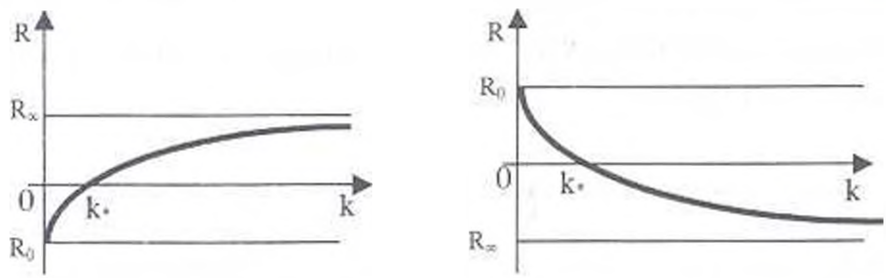
$$\begin{aligned} &R(k) < 0 \quad k \in [0; k_*) \\ &R(k) = 0 \quad k = k_* \\ &R(k) > 0 \quad k \in [k_*; \infty] \end{aligned}$$

монотонно возрастает от значения $R_0 < 0$ до значения, $R_\infty > 0$, обращаясь в нуль в точке k_* ($R(k)$ фиг.8 а):

2) $\bar{\varepsilon}_2 < 1, \quad \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_* < \bar{\varepsilon}_1 < \varepsilon_*$: (3.20)

$$\left| \begin{aligned} &R(k) > 0 \quad k \in [0; k_*) \\ &R(k) = 0 \quad k = k_* \\ &R(k) < 0 \quad k \in (k_*; \infty] \end{aligned} \right.$$

$R(k)$ монотонно убывает от значения $R_0 < 0$ до значения $R_\infty < 0$, обращаясь в нуль в точке k_* (фиг.8 б):



а) б)

Фиг. 8

Критические величины ε_* и k_* определяются следующим образом:

$$\varepsilon_* = (e_1 / d_1)^2, \quad \operatorname{th} k_* = \frac{(d_1^2\bar{\varepsilon}_1 - e_1^2)\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_2 e_1^2 - \bar{\varepsilon}_1 d_1^2} \tag{3.21}$$

Из вышеизложенного следует, что в зависимости от значений параметров $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, e_1, d_1$, характеризующих слоистую систему, КЭМС $R(k)$ для поверхностных электроупругих волн Лява может иметь поведения, определяемые условиями (3.8)-(3.22), причем:

$R(k) > 0$ для подложек классов 6mm, 4mm, 6,4;

$R(k) \geq 0$ для подложек классов 6,4;

$R(k) < 0$ для подложек классов 622,422,6,4;

$R(k) \leq 0$ для подложек классов 6,4;

$R(k)$ знакопеременная для подложек классов 6,4.

Полученные результаты необходимы для исследования существования и поведения характеристического уравнения и мод поверхностной волны, что будет сделано в следующей статье авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A.E.H. Some problems of Geodinamics.– Cambrige University Press, London, 1911, 180p.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука. 1982. 424с.
3. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Шувалов Л.А. О поверхностных волнах Лява в пьезоэлектриках.// Кристаллография. 1982. Т.27. №3. С.437-443
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. Материалы Всесоюз. науч. семинара, Ереван, 1991. С.49-54
5. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carring a metal layer of finite thickness. // J. Appl. Phys., 1973, vol.44, №5, p.2002-2007
6. Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электро-упругих волн Лява в гексагональных и тетрогональных пьезоэлектрических подложках с проводящим слоем. Тезисы докладов "Механика неоднородных структур", Львов, 1991. С. 101.
7. Даноян З.Н., Манукян Г.А. О поверхностных электроупругих волнах Лява в пьезоэлектрических подложках с металлизированным диэлектрическим слоем. // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1995. Т. 48. №3. С.43-52.
8. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Филиппов В.В. Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем. // Акуст. журнал. 1985. Т.31. вып.4. С.492-495
9. Аветисян А.С. Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем –III Всесоюзн. симпоз. « Теоретические вопросы магнитоупругости » (тезисы докладов), Ереван - Цахкадзор, 1984, с. 7-10.
10. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках.– Новосибирск: Наука, 1982, 240с.
11. Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы.–М.:Мир,1965
12. Олинер А. Поверхностные акустические волны.–М.:Наука,1981, 281 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.10.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա | 56, №4, 2003 | Механика

УДК 539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ И СОЛИТОНЫ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ВОЛН РАСШИРЕНИЯ И КРУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ КРУГОВОМ СТЕРЖНЕ

Минасян М.М.

Մ.Մ.Մինասյան

Ոչ գծային առաձգական կլոր ձողում ընդարձակման և ոլորման փոխազդող ալիքների պարամետրական ուժեղացումը և սոլիտոնները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է Մուրնագանի մոդելով ոչ գծային առաձգական ձողում ընդարձակման և ոլորման ալիքների պարամետրական փոխազդեցությունները: Ուսումնասիրման հիմքում ընկած է ալիքային փաթեթների սինքրոն եռահաճախական ռեզոնանսային փոխազդեցությունը: Արտածված է այդ փոխազդեցությունը նկարագրող կարճեցված հավասարումների համակարգը: Քննարկվել է ցածր հաճախության ոլորման ալիքների պարամետրական ուժեղացումը և անկայունության վարքը բարձր հաճախության մոնոքրոմատիկ ընդարձակման ալիքի դաշտում: Կառուցվել է ալիքային համակարգի միասոլիտոն լուծումներ: Բացահայտվել է երրորդ կարգի առաձգական մոդուլների նշանի ազդեցությունը սոլիտոնների ինտենսիվության և արագության վրա:

M.M.Minasyan

Parametric Amplification and Solitons in the System of Longitudinal and Torsional Waves in the Nonlinear Elastic Circular Bar

В работе рассматривается трехчастотное взаимодействие волн расширения и кручения в нелинейно-упругом стержне кругового сечения. Принята нелинейная модель Мурнагана. Перемещения в волне расширения даны по Миндлину-Герману. Выведены укороченные нелинейные уравнения на базе нелинейной оптики и фазового синхронизма взаимодействующих волн. Рассмотрено параметрическое усиление низкочастотных волн кручения в поле накачки высокочастотной волны расширения. Выяснен характер неустойчивости усиливаемых волн. Рассмотрено солитонное решение. Выявлена определяющая роль знаков модулей третьего порядка на интенсивности и скорости солитонов. Для стекла-пирекса и никелевой стали проведен численный расчет.

Укороченные уравнения, описывающие нелинейное трехчастотное взаимодействие волн, неоднократно выводились в физике плазмы, в нелинейной оптике и радиофизике, в нелинейной акустике и гидродинамике [1-3].

В данной работе рассматривается пространственно-временная эволюция волн расширения и кручения в нелинейном упругом стержне, выводятся укороченные уравнения связанных волн в квазиоптическом приближении, исследуется параметрическое усиление двух связанных волн в поле третьей волны накачки и находятся односолитонные решения в системе трех связанных волн.

1. В цилиндрической системе координат r, θ, z перемещения точек кругового стержня, как и в [4], представим в виде

$$u_z = u(z,t), \quad u_r = r w(z,t)/a, \quad u_\theta = r\theta(z,t) \qquad (1.1)$$

где z — осевая координата, a — радиус цилиндра. Первые два соотношения соответствуют теории Миндлина-Германа [5].

Будем считать, что стержень изготовлен из нелинейно-упругого тела Мурнагана, внутреннюю энергию которого представим в виде [6]

$$U = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 \tag{1.2}$$

$$I_1 = \varepsilon_{kk},\ I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\ I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}\ \ \varepsilon_{ij} = 1/2\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

A, B, C — упругие модули третьего порядка. I_i — инварианты тензора малых деформаций (запятые в индексе далее означают дифференцирование по координатам и времени).

С учетом (1.2) для внутренней энергии получим выражение

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_{,z}^2 + \frac{8\lambda}{a} u_{,z} w + \frac{2(\lambda+\mu)}{a^2} w^2 + \frac{\mu r^2}{2a^2} w_{,z}^2 + \frac{\mu r^2}{2}\theta_{,z}^2 + \\ + \left[\frac{Ar^2}{4}\left(u_{,z} + \frac{w}{a}\right) + \frac{Br^2}{2}\left(u_{,z} + \frac{2}{a} w\right)\right]\theta_{,z}^2 + \ldots \tag{1.3}$$

в котором не выписаны те нелинейные кубические члены, которые не входят в окончательные уравнения. Функция Лагранжа, осредненная по поперечному сечению стержня, получается в виде

$$L = \frac{\rho}{2}\left(u_{,t}^2 + \frac{1}{2} w_{,t}^2 + \frac{1}{2}\theta_{,t}^2\right) - \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} u_{,z}^2 + \frac{\mu}{4} w_{,z}^2 + \frac{\mu}{4} a^2 \theta_{,z}^2 + \\ + \frac{2\lambda}{a} w u_{,z} + \frac{2(\lambda+\mu)}{a^2} w^2\right] - \left[\frac{A + 2B}{8} a^2 u_{,z} + \frac{A + 4B}{8} a w\right]\theta_{,z}^2 \tag{1.4}$$

Отметим, что заменой $A + 2B$ и $A + 4B$ на $2(\lambda + 2\mu)$ и $2(\lambda + \mu)$ (1.4) переходит в функцию Лагранжа для линейного тела при конечных деформациях [4].

Из принципа Гамильтона получим систему нелинейных уравнений

$$\rho u_{,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{,zz} - \frac{2\lambda}{a} w_{,z} = \frac{a^2(A + 2B)}{8}\left(\theta_{,z}^2\right)_{,z} \tag{1.5}$$

$$\rho w_{,tt} - \mu w_{,zz} + \frac{4\lambda}{a} u_{,z} + \frac{8(\lambda+\mu)}{a^2} w = -\frac{A + 4B}{7} a \theta_{,z}^2 \tag{1.6}$$

$$\rho \theta_{,tt} - \mu \theta_{,zz} = \frac{A + 2B}{2}\left(u_{,z}\theta_{,z}\right)_{,z} + \frac{A + 4B}{2a}\left(w\theta_{,z}\right)_{,z} \tag{1.7}$$

Как видно из системы (1.5)-(1.7), в линейном приближении волны расширения, представленные осевыми и радиальными перемещениями u, w, из-за различия в поляризованности не взаимодействуют с волнами кручения θ. Однако с учетом нелинейности эти волны уже взаимосвязаны.

Дисперсионное уравнение линейных волн расширения получается в виде

$$X(\omega,k)Y(\omega,k)-8\lambda^2k^2/a^2=0 \tag{1.8}$$

$$X(\omega,k)=\rho\omega^2-(\lambda+2\mu)k^2 \quad Y(\omega,k)=\rho\omega^2-\mu k^2-8(\lambda+\mu)/a^2 \tag{1.9}$$

Уравнение (1.8) определяет две ветви из бесконечного числа ветвей из точного решения Похгамера-Кри [5]. Для первой ветви имеем

$$\omega^2=\frac{c_0^2k^2}{4m}\left[3-4\nu+\frac{8}{a^2k^2}-\sqrt{\left(\frac{8}{a^2k^2}-1\right)^2+\frac{128\nu^2}{a^2k^2}}\right] \tag{1.10}$$

где $m=(1+\nu)(1-2\nu)$, ν — коэффициент Пуассона, $c_0=\sqrt{E/\rho}$ — "стержневая" скорость. Эта ветвь достаточно близка к точной во всем диапазоне изменения длины волны. В теории Миндлина-Германа для лучшего совпадения первых ветвей во второе линейное уравнение вводятся поправочные коэффициенты, мало отличающиеся от единицы. Для качественной картины нелинейных взаимодействий основной волны расширения с волнами кручения эти поправки несущественны.

Решение системы (1.5)-(1.7) в квазиоптическом приближении представим в виде

$$\begin{aligned} u(z,t)&=U(z,t)\exp i(\omega t-kz)+k.c.\\ w(z,t)&=W(z,t)\exp i(\omega t-kz)+k.c.\\ \theta(z,t)&=\Theta(z,t)\exp i(\omega t-kz)+k.c.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Считая комплексные амплитуды квазимонохроматических волн U,W,Θ медленно меняющимися функциями в пространстве и во времени, из первых двух уравнений системы (1.5)-(1.7) с учетом (1.9) получим

$$2\rho\omega i\frac{\partial U}{\partial t}+2ki(\lambda+2\mu)\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{2\lambda}{a}\frac{\partial W}{\partial z}-X(\omega,k)U+\frac{2i\lambda k}{a}W=$$

$$=\left|\frac{a^2(A+2B)}{8}\theta_{,z}^2\right|_{,t}\exp(-i\Delta\varphi)$$

$$2\rho\omega i\frac{\partial W}{\partial t}+2ik\mu\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{4\lambda}{a}\frac{\partial U}{\partial z}-Y(\omega,k)W-\frac{4\lambda ik}{a}U=$$

$$=-\left|\frac{A+4B}{4}a\theta_{,z}^2\right|_{,z}\exp(-i\Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi=i(\omega t-kz) \tag{1.12}$$

Чтобы выделить первую ветвь волн расширения, удобно перейти к нормальным волнам [2]. Для этого вводим функцию A_1 так, чтобы

$$U=\frac{Y}{X+Y}A_1,\quad W=\frac{-4\lambda ik}{a(X+Y)}A_1,\quad \left(A_1=U+\frac{iaX}{4\lambda k}W\right) \tag{1.13}$$

Из системы (1.12) для A_1 получим уравнение

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{a^2}{2\rho\omega i}\left[\frac{A+2B}{8}\left(\theta_{,r}^{2}\right)_{,z} - \frac{iX}{4\lambda k}\frac{A+4B}{4}\theta_{,r}^{2}\right]\exp(-i\Delta\varphi) \quad (1.14)$$

$$v_1 = \frac{\mu k X + (\lambda + 2\mu)kY + 8\lambda^2 k / a^2}{\rho\omega(X+Y)}$$

где $v_1 = d\omega / dk$ – групповая скорость волны расширения.

Приняв условие фазового синхронизма для резонансной тройки расширение-кручение-кручение

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad k_1 = k_2 + k_3 \quad (1.15)$$

из уравнений (1.14) и (1.7) с учетом (1.8), (1.9) получим систему для трех связанных волн

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = \gamma_1 A_2 A_3, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} = \gamma_2 A_1 A_3^*$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} = \gamma_3 A_1 A_2^* \quad (1.16)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{k_1 k_2 k_3}{8\rho\omega_1} n, \quad \gamma_2 = -\frac{k_1 k_2 k_3 Y}{4\rho\omega_2(X+Y)} n, \quad \gamma_3 = -\frac{k_1 k_2 k_3 Y}{4\rho\omega_3(X+Y)} n,$$

$$n = A + 2B + \frac{A+4B}{2\lambda k_1} X, \quad v_2 = c_t, \quad v_3 = -c_t, \quad c_t^2 = \mu / \rho \quad (1.17)$$

(Звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины).

Система уравнений (1.15) и описывает пространственно-временную эволюцию нелинейно-связанных волн расширения и кручения. Свойства взаимодействий всецело определяются величинами и знаками групповых скоростей v_i и коэффициентов нелинейных связей γ_i [1]. В нашем случае γ_2 и γ_3 имеют одинаковый знак – противоположный знаку γ_1. k_2 и k_3 имеют противоположные знаки и один из них того же знака, что и k_1. В таком же отношении находятся знаки групповых скоростей. В силу симметрии и для определенности будем считать v_1 и k_1 положительными. Итак, речь пойдет о взаимодействии высокочастотной попутной (вдоль оси x) волны расширения с попутной и встречной низкочастотными волнами кручения.

Поскольку фазовая скорость волны расширения меньше объемной скорости упругой волны $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, то согласно (1.9) $X < 0, Y < 0$ и $Y/(X+Y) > 0$.

С учетом (1.10) имеем

$$\frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{2} + \frac{8 - a^2 k_1^2}{2\sqrt{(8 - a^2 k_1^2)^2 + 128 a^2 k_1^2 \nu^2}} \quad (1.18)$$

$$\frac{X}{2\lambda k_t^2} = \frac{8 - a^2k_t^2 - \sqrt{\left(8 - a^2k_t^2\right)^2 + 128a^2k_t^2\nu^2}}{8a^2k_t^2\nu} \tag{1.19}$$

при этом (1.18) монотонно убывает от 1 до 0, а (1.19) – от $-\nu$ до $-1/4\nu$ при изменении ak_t от 0 до ∞. Таким образом, после выбора знаков ν_t и k_t знаки коэффициентов нелинейной связи γ_i определятся знаком n, т.е. модулями третьего порядка A, B.

В табл. 1 приведены заимствованные из [6] материальные данные для некоторых материалов (приведены средние значения).

Таблица 1

Материал	ρ, г/см^3	ν	$c_l \times 10^{-5}$ см/с	$c_\tau \times 10^{-5}$ см/с	$c_0 \times 10^{-5}$ см/с	$A \times 10^{-1}$ дин/см^2	$B \times 10^{-1}$ дин/см^2
Полистирол	1.46	0.37	2.35	1.12	2.05	-1.00	-0.83
Железо армко	7.7	0.29	5.89	3.21	5.10	110	-158
Стекло пирекс	2.32	0.24	5.64	3.28	5.17	42	-11.8
Никелевая сталь	8.4	0.31	5.81	3.04	4.92	-73	-22.5

Как видно из табл. 1, упругие модули третьего порядка для приведенных материалов резко отличаются и по знакам, и по величинам так, что величина n, определяющая знаки γ_i, может быть и положительной и отрицательной в зависимости от материала и длины волны расширения.

2. Рассмотрим параметрическое усиление волн кручения в заданном поле монохроматической волны при фазовом синхронизме [1]. Считая амплитуду волны накачки вещественной $A_1 = A_0 = \text{const}$, для амплитуд огибающих волн кручения получим систему уравнений

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + c_\tau \frac{\partial A_2}{\partial z} = \gamma_2 A_0 A_3^*, \qquad \frac{\partial A_3}{\partial t} - c_\tau \frac{\partial A_3}{\partial z} = \gamma_3 A_0 A_2^* \tag{2.1}$$

Исключив из системы A_3, для A_2 получим уравнение

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} = \gamma_2\gamma_3 A_0^2 A_2 \tag{2.2}$$

Такое же уравнение получается и для A_3.

Представив решение (2.2) через его спектральные компоненты $\exp i(\Omega t - qz)$, где Ω – частотная расстройка и q – поправка к волновому числу, получим

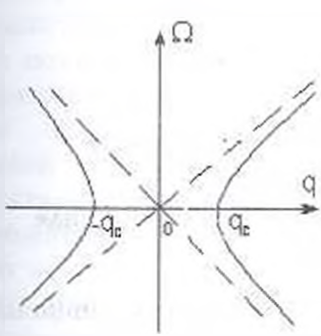
$$\Omega^2 - c_\tau^2 q^2 + \Gamma_0^2 = 0, \qquad \left(\Gamma_0^2 = \gamma_2\gamma_3 A_0^2 > 0\right) \tag{2.3}$$

На фиг. 1 представлен график зависимости $\Omega(q)$. Как видно, вещественным q из интервала $(-q_c; q_c)$, где $q_c = \Gamma_0 / c_\tau$, соответствуют мнимые Ω. Это означает, что в данной полосе поправок к волновому числу k_2 из окрестности фазового синхронизма попутная волна кручения неустойчива. Для выяснения характера неустойчивости (абсолютной или конвективной), применим известные критерии (Старрока) [7].

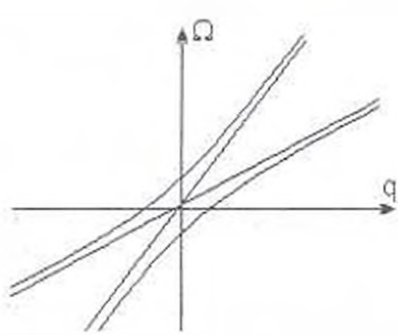
Функция $q(\Omega)$ в комплексной плоскости Ω имеет точку ветвления $-i\Gamma_0$ в нижней полуплоскости. Поскольку в этой точке "встречаются" волны противоположных направлений, то неустойчивость имеет абсолютный характер.

Мы рассмотрели случай, когда волна накачки не истощается. Если же волна накачки представляет мощный волновой пакет, то уравнение (2.2) описывает лишь начальную стадию усиления волн кручения. Поскольку в системе отсутствуют потери, то согласно закону сохранения энергии (а также закону Мэнли-Роу [1,2]) высокочастотная волна накачки, передавая свою энергию низкочастотным волнам, ослабевает, т.е. имеем распадную неустойчивость волны расширения. Для описания полной картины следует решить систему (1.16), т.к. все три волны взаимосвязаны. Хотя построение точного решения этой задачи в общей постановке затруднительно, однако найдено много решений частного характера, а также разработаны различные приближенные и асимптотические методы [1,2,7].

В случаях пространственной или временной однородности, т.е. при $\partial/\partial t = 0$ или $\partial/\partial z = 0$ система допускает точное решение в эллиптических функциях. В работе [3] это решение использовано в задаче о взаимодействии изгибных и продольных волн в тонкой упругой пластинке, а в работе [4] – в задаче о взаимодействии волн расширения и кручения в упругой круговой пластинке. В обеих работах рассмотрена геометрическая нелинейность и пространственная однородность волн.



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае, когда волной накачки является одна из волн кручения, то имеем взаимодействие волн суммарной и разностной частот. В этих случаях $\gamma_1\gamma_2 < 0, \gamma_1\gamma_3 < 0$ и система волн стабильна:

промодулированная волна накачки не истощается, а сигнальная и холостая волновые пакеты не усиливаются. В результате взаимодействия двух последних волн происходит их пространственно-временное биение. На фиг. 2 представлен график зависимости $q(\Omega)$, когда волной накачки является встречная волна кручения. Здесь вещественным q соответствуют вещественные Ω и, наоборот. Такую устойчивость принято называть снятием вырождения. Если накачка на попутной волне кручения, то система опять стабильна. График зависимости $q(\Omega)$ имеет вид фиг. 1, однако с перестановкой осей координат. То, что в этом случае вещественным Ω в некоторой полосе будут соответствовать мнимые q, то такую устойчивость принято называть непропусканием: сигнальная и холостая волны затухают .

Таким образом, в системе одной высокочастотной волны расширения и двух волн кручения в круговом нелинейно-упругом стержне параметрически могут усиливаться только волны кручения при распадной неустойчивости высокочастотной волны расширения.

3. Как известно в нелинейной оптике и плазме, при трехчастотном взаимодействии волн и при расстройке групповых скоростей волн в среде с квадратичной нелинейностью могут распространяться стационарные волны (солитоны). В таких системах обмен энергиями между солитонами волнами не происходит, или как говорят, взаимодействие волн носит реактивный характер [1].

Рассмотрим односолитонные решения системы (1.16). Если начальная фазовая модуляция волновых пакетов отсутствует, то амплитуды волн можно считать вещественными. Прежде введем безразмерные величины

$$t = a\tau/c_\tau,\quad z = a\xi,\ A_i = \Lambda_1 B_i,\ v_i = c_i b_i,\ \xi = c_i/c_\tau,\quad (\Lambda_i = 2\pi/k_1) \quad (3.1)$$

и представим систему в виде

$$\frac{\partial B_j}{\partial \tau} + b_j \frac{\partial B_j}{\partial \xi} = \beta_j \frac{B_1 B_2 B_3}{B_j} \qquad (j = 1,2,3) \qquad (3.2)$$

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{16}\frac{n}{\mu}\left(\xi - \xi^{-1}\right)ak_1,\quad \beta_{2,3} = \frac{\pi}{4}\frac{n}{\mu}\frac{Y}{X+Y}(\xi \mp 1)ak_1$$

Стационарное решение системы (3.2) представим в виде

$$B_j = B_j(\xi - D\tau)$$

где D – безразмерная (относительно к c_*) скорость стационарных волн.

Односолитонное решение (стационарные волны с исчезающей амплитудой при $\xi \to \pm\infty$) существует только на двух частотах ("светлые солитоны"), а на третьей частоте распространяется так называемый "темный" солитон типа ударной волны. "Темный" солитон представляется функцией

$$B_T = B_{0T}\,\mathrm{th}(\xi - D\tau/\xi_c) \tag{3.3}$$

а "светлые" солитоны – функцией

$$B_c = B_{0c}\,\mathrm{sekh}(\xi - D\tau/\xi_c) \quad (B_c = B_{0c}/\mathrm{ch}(\xi - D\tau/\xi_c)) \tag{3.4}$$

где ξ_c – характерная ширина солитонов. Из системы (3.1) получим

$$(b_T - D)B_{0T}^2 = \beta_j B_{01}B_{02}B_{03}\xi_c, \quad (D - b_j)B_{0j}^2 = \beta_j B_{01}B_{02}\xi_{cB_{0i}} \quad (j \neq T) \tag{3.5}$$

Система (3.5) содержит пять неопределенных величин – $B_{01}, B_{02}, B_{03}, D, \xi_c$.

Поскольку "темный" солитон не может образоваться из локального волнового пакета, то его амплитуду следует считать заданной и тогда амплитуды и скорость "светлых" солитонов можно выразить через параметры B_{0T} и ξ_c.

Пусть "темный" солитон представляет волну расширения. Тогда из системы

$$(b_1 - D)B_{01} = \beta_1 B_{02}B_{03}\xi_c, \quad (D-1)B_{02} = \beta_2 B_{01}B_{03}\xi_c$$
$$(D+1)B_{03} = \beta_3 B_{01}B_{02}\xi_c \tag{3.6}$$

для скорости солитонов получим

$$D = \pm\sqrt{1 + \beta_2\beta_3 B_{01}^2\xi_c^2} \tag{3.7}$$

при этом, если $\beta_1 < 0$, $(\beta_{2,3} > 0)$, то $D > b_1$, а если $\beta_1 > 0$, $(\beta_{2,3} < 0)$, то $D < -1$.

Для амплитуд получим

$$B_{02}^2 = B_{01}^2 \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{b_1 - D}{D - 1}, \qquad B_{03}^2 = B_{01}^2 \frac{\beta_3}{\beta_1}\frac{b_1 - D}{D + 1} \tag{3.8}$$

4. Итак, нелинейная упругость помимо искажения профиля волн приводит еще к тому, что эти волны взаимодействуют. Кроме теоретического интереса результаты исследований по такому взаимодействию могут быть использованы для определений упругих модулей третьего порядка. Они могут также использованы для создания различных параметрических устройств.

Для измерения модулей третьего порядка необходимо проведение по крайней мере трех независимых экспериментов. Сложность проблемы заключается в том, что, как правило, из экспериментов нельзя получить каждый из модулей отдельно [6]. Поэтому особенно значимы те теоретические результаты, которые содержат два, а в лучшем случае один из трех модулей. В частности, в полученных в данной работе результатах не входит модуль C.

Акустические исследования нелинейных свойств требуют большой интенсивности волн накачки: при малых интенсивностях влияние затухания велико. Современная техника позволяет получить высокие интенсивности уже в области ближнего ультразвука ($\sim 10^5$ гц), а в последние годы интенсивно осваивается область гиперзвука ($\sim 10^9$ гц).

Приведем некоторые вычисления.

Наиболее простые соотношения получаются при $ak_1 = \sqrt{8}$. При этом получим

$$c_1 = \sqrt{2}c_\tau, \quad v_1 = 3\sqrt{2}c_\tau/4, \quad Y/X+Y = 1/2, \quad n = A/2 \tag{4.1}$$

Интересно, что в данном случае из трех модулей третьего порядка остался только один $- A$. Безразмерные коэффициенты нелинейной связи получаются в виде

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{8}\frac{n}{\mu}, \quad \beta_{2,3} = \frac{\pi}{4}\frac{n}{\mu}\left(2 \mp \sqrt{2}\right) \tag{4.2}$$

а из соотношений (3.7) и (3.8) получим

$$\left(\frac{B_{02}}{B_{01}}\right)^2 = 2\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{D-3\sqrt{3}/4}{D-1}, \quad \left(\frac{B_{02}}{B_{01}}\right)^2 = 2\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{D-3\sqrt{3}/4}{D+1}$$

$$D = \pm\sqrt{1+\beta_2\beta_3\xi_s B_{01}} \tag{4.3}$$

Табл. 2 представляет значения частот (в Гц-ах) и коэффициентов β_i для двух материалов с разными знаками модуля A. Для радиуса стержня принято значение $a = 0.2\times10^{-2}$ м. Для длины волны расширения получается значение $\Lambda_1 = 4.4\times10^{-3}$ м.

Таблица 2

материал	ω_1	ω_2	ω_3	β_1	β_2	β_3
Стекло пирекс	2.8×10^6	2.7×10^6	0.1×10^6	- 0.82	0.97	5.63
Никелевая сталь	2.6×10^6	2.5×10^6	0.1×10^6	0.46	- 0.54	- 3.15

Табл. 3 представляет значения скоростей солитонов и отношений B_{02}/B_{01} и B_{03}/B_{01} для тех же материалов и вычисленных по формулам (4.3).

Таблица 3

материал	$\xi_s B_{01}$	D	B_{02}/B_{01}	B_{03}/B_{01}
Стекло пирекс	0.20	-1.1	1.10	12.15
	0.28	-1.2	1.10	8.78
никелевая сталь	0.35	1.1	0.67	1.36
	0.51	1.2	0.91	0.66

Из табл. 3 видно существенное значение знака модуля A. Для стекла он положителен. В результате интенсивности солитонов крутильных волн больше интенсивности "темного" солитона волны расширения. Для стали же — наоборот. В обоих случаях направление распространения солитонов совпадает с направлением более интенсивной солитонной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 230с.
2. Вильхельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергиздат, 1981. 222с.
3. Kovrigine D.A., Potapov A.I. On nonlinear oscillations of a thin bar. // Arch. Appl. Mech. 1996. 66. pp.168-176.
4. Минасян М.М. Нелинейное взаимодействие волн расширения и кручения в упругом круговом стержне. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1. С. 62-68.
5. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х. Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках. // Проблемы механики (сб/ст), вып. 3. М.: ИЛ. 1961. С.24-90.
6. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. 520с.
7. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука. 1981. 175с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 24.09.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

Localized Bending Waves in an Elastic Orthotropic Plate

Mkrtchyan H.P.

Локализованные изгибные волны в упругой ортотропной пластинке

А.П. Мкртчян

В работе приведены результаты исследования вопроса существования изгибных локализованных волн в окрестности свободного края прямогольной ортотропной пластинки.

Հ. Պ. Մկրտչյան

Լոկալիզացված ծռման ալիքները առաձգական օրթոտրոպ սալում

Աշխատանքում բերված են ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալի ազատ եզրի շրջակայքում ծռման լոկալիզացված ալիքների գոյության խնդրի արդյունքները:

The aim of this work is the theoretical study of bending localized waves in a thin elastic orthotropic cantilever plate. These waves are spatially non-uniform bending perturbations varying in time, localized near the vicinity of limiting free surface of a plate and practically immaterial outside this relatively narrow zone. The first studies related to the localized bending waves in elastic plates were first presented in [1] and further developed in [2], where for semi-infinite plate the existence of surface bending waves near the free edge have been shown. For two semi-infinitive plates being in conditions of elastic contact, a similar problem was investigated in [3].

The dynamic problem is considered for elastic bending propagation waves in an orthotropic cantilever plate, one edge of which is free from mechanical stresses and restrictions.

In Cartesian system (x, y), where the plate occupy domain $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$ the equation for plate middle plane normal displacement $W(x, y)$ can be expressed as [4]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^4} + 2k\frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} + \frac{3\rho(1-\nu_1\nu_2)}{h^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

In (1) $\alpha = xE_1^{-1/4}, \beta = yE_2^{-1/4}$, $k = (E_1E_2)^{-1/2}\left[\nu_1 E_1 + 2(1-\nu_1\nu_2)G\right]$, $E_1, E_2, G, \nu_1, \nu_2$ are elastic constants, ρ is the bulk density of plate material, h and is the thickness of plate. In the case of an isotropic plate one has $k = 1$. For cantilever plate the equation (1) is supplemented by the following boundary conditions:

Free edge (the bending moment and the generalized transverse force are vanished)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}=0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2}+(2k-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}\right]=0 \text{ at } \beta=0 \qquad (2)$$

Where the following notation are used

$$\nu=\frac{\nu_1 E_1}{\sqrt{E_1 E_2}}=\frac{\nu_2 E_2}{\sqrt{E_1 E_2}}$$

Simply supported edges (the displacement and bending moment are vanished)

$$W=0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2}=0, \quad \text{at} \quad \beta=bE_2^{-1/4} \qquad (3)$$

$$W=0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}=0, \text{ at } \alpha=0; \quad \alpha=aE_1^{-1/4} \qquad (4)$$

In (1-4) a time-harmonic plane wave solution be considered

$$W(\alpha,\beta,t)=W_0(\beta)\sin(p_n\alpha)\exp(i\omega t) \qquad (5)$$

where ω is the vibration frequency, $p_n=\pi n E_1^{1/4}/a$

Substituting (5) in (2-4) we have the following self-adjoint eigenvalue boundary problem for displacement function $W_0(\beta)$

$$\frac{1}{p_n^4}\frac{d^4 W}{d\beta^4}-\frac{2k}{p_n^2}\frac{d^2 W}{d\beta^2}=\lambda W \quad \beta\subseteq\left[\ 0,\ bE_2^{-1/4}\right]$$

$$\frac{d^2 W}{d\beta^2}-\nu p_n^2 W=0; \quad \frac{d}{d\beta}\left[\frac{d^2 W}{d\beta^2}-(2k-\nu)p_n^2 W\right]=0 \text{ at } \beta=0 \qquad (6)$$

$$W=0; \quad \frac{d^2 W}{d\beta^2}=0 \text{ at } \beta=bE_2^{-1/4}$$

Here $\lambda=\dfrac{3\rho(1-\nu_1\nu_2)\omega^2}{h^2 p_n^4}-1$ are eigenvalues of the boundary problem (6).

Negative eigenvalues λ of the boundary problem, if they exist, define the localized mode of vibration [5]; positive eigenvalues correspond to periodic modes.

Using common procedure of self adjoint boundary value problem solution [2,6,7] we have the following equation determining the frequencies of localized mode of vibration for negative eigenvalues $\mu=-|\lambda|$

$$F^{(+)}(\mu)=F^{(-)}(\mu) \qquad (7)$$

where

$$F^{(\pm)}(\mu)=\frac{\left(k-\nu\pm\sqrt{k^2-\mu}\right)^2}{\sqrt{k\pm\sqrt{k^2-\mu}}}\,\mathrm{th}\left(\gamma_n\sqrt{k\pm\sqrt{k^2-\mu}}\right);\gamma_n=(E_1/E_2)^{1/4}b\pi n/a$$

In the case of elongated plate $b/a>>1$ replacing function

$\mathrm{th}\left(\gamma_n\sqrt{k\pm\sqrt{k^2-\mu}}\right)\to 1$ we can obtain the results of [6].

Based on equation (7) the necessary and sufficient conditions are obtained regarding localized wave existence in depend of on anisotropy coefficients k,ν. It is shown that equation (7) may have only one root that correspond to localised bending wave.

References

1. Konenkov Y. W. On Rayleigh type bending waves. // Akust. Zh. 1960. №6 p.124-126. (In Russian).
2. Ambartsumyan S. A., Belubekyan M.V. On bending waves localized along the edge of a plate. // Int. App. Mech.J. (Translation of Prikladnaya Mechanica) 1994. 30. p. 135-140.
3. Mkrtchyan H.P. Localized Bending Waves on Plates Junction. Reports of Armenian NAS. 2000. №3, pp. 245-249. (In Russian).
4. Sarkisyan V.S. Some problems of elasticity theory of anisotropic body. Yerevan: State Univ. 443. 1970. (In Russian)
5. Belubekyan M.V., Makaryan V.S., Ghazaryan K.B. TH-type surface waves in non-homogeneous elastic half-space. In: Mathematical problems of mechanics of nonhomogeneous structure. NAS Ukraine 2000. 30. №2. p.162-165.
6. Bagdasaryan R.A, Ghazaryan K.B. Rayleigh type waves in an orthotrope semi-infinite plate. // Reports of NAS of Armenia.1991. 91. p.245-249. (In Russian).
7. Gulgazaryan G.P. Waves on genetrix of thin goffered half infinite orthotrope cylindrical shell. / In: Mathematical analysis and its applications. Yerevan. 2003. p.41-92. (In Russian).

Institute of Mechanics of the
National Academy of Sciences, Armenia

Received
7.10.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛОПАТКИ ТУРБИНЫ ИЗ ГРАНЕЦЕНТРИРОВАННОГО КУБИЧЕСКОГО МОНОКРИСТАЛЛА

Гулканян В.В, Симонян А.М.

Վ.Վ. Գուլքանյան, Ա.Մ. Սիմոնյան
Նիստակենտրոնացված խորանարդ միաբյուրեղից պատրաստված տուրբինների թիակների նախագծման հարցի մասին

Ելնելով ամենաբարձր կրողունակության պայմանից աշխատանքում դիտարկվում է բյուրեղային առանցքների կողմնորոշման հարցը: Հետազոտությունը հիմնված է այն հիպերոզի վրա, որ դիսլոկացիաների շարժումը այս կամ այն սահքի համակարգում որոշվում է միայն համապատասխան սահքի լարման մեծությամբ (կամ նրա պատմությամբ), որը հաստատված է փորձարարական արդյունքներով:

W.W. Gulcanyan, A.M. Simonyan
To a Problem on Projection of a Blade of the Turbine from Face-Centered Cubic Monocrystal

В работе рассматривается вопрос об ориентации кристаллических осей монокристалла относительно осей лопатки турбины с целью достижения ее наибольшей несущей способности. Полагается, что лопатка турбины подвергается растяжению, изгибу и кручению [1].

Исследование базируется на гипотезе о том, что движение дислокаций в той или иной системе скольжения определяется лишь значением (или историей изменения) касательного напряжения, соответствующего этой системе.

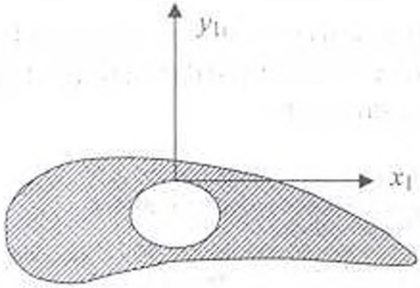
Как известно [2,3], для лопаток турбин и других ответственных конструкций, эксплуатируемых в условиях высоких температур, целесообразно использовать монокристаллы на никелевой основе, имеющие гранецентрированную кубическую структуру.

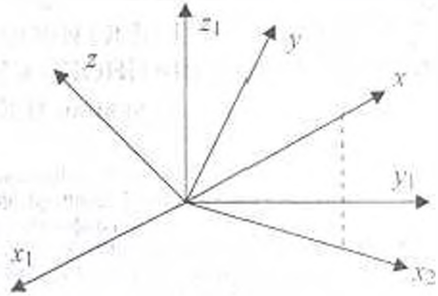
Механизмы деформирования монокристаллов различны: они связаны со скольжением дислокаций в различных системах скольжения и с двойникованием, однако основной механизм деформирования и накопления повреждений таких кристаллов в условиях эксплуатации связан со скольжением в системе [111]<110>.

При изгибе и растяжении лопаток возникают лишь нормальные напряжения, направленные вдоль оси лопатки, при этом как экспериментально [4,5], так и теоретически [6] показано, что самой выгодной ориентацией оси лопатки является ось [111]. Однако, при этом остается произвол в отношении поворота кристалла вокруг оси лопатки, что не имеет значения в случае отсутствия кручения.

Положим, что оси x, y и z соответствуют кристаллическим осям [001], [010] и [100], ось z_1 направлена вдоль продольной оси лопатки, оси x_1 и y_1 вдоль и поперек касательной контура поперечного сечения лопатки в наиболее нагруженной ее части (фиг.1)

Пусть ось z_1 имеет ориентацию [101], то есть она равнонаклонена к осям x, y и z (фиг.2). При этом проекция x_2 оси x на плоскость x_1Oy_1 составляет угол φ с осью x_1. В этом случае будем иметь нижеследующие значения для направляющих косинусов между системами x_1, y_1, z_1 и x, y, z (табл.1):





Фиг. 1

Фиг. 2

Таблица 1

	x_1	y_1	z_1
x	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z	α_{31}	α_{32}	α_{33}

$$\alpha_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi,\ \alpha_{21} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{6}),\ \alpha_{31} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\varphi - \frac{\pi}{6}),\ \alpha_{12} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\varphi$$

$$\alpha_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\varphi + \frac{\pi}{6}),\ \alpha_{32} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\varphi - \frac{\pi}{6}),\ \alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad (1)$$

Как известно, в лопатках турбин возникают нормальные (σ_{z_1}) и касательные ($\tau_{x_1z_1}$) напряжения, причем, как правило, их расчетные значения определяются конфигурацией лопаток и эксплуатационными условиями вне зависимости от механических свойств материала.

Будем считать, что в результате расчетов получены некоторые значения σ_{z_1} и $\tau_{x_1z_1}$.

Рассмотрим, какие напряжения сдвига будут возникать в системах скольжения.

Соответственно кристаллическим направлениям x, y и z напряженное состояние в наиболее нагруженной части лопатки определяется следующими составляющими:

$$\sigma_x = \alpha_{13}^2\sigma_{z_1} + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\tau_{x_1z_1}$$

$$\sigma_y = \alpha_{23}^2\sigma_{z_1} + 2\alpha_{21}\alpha_{23}\tau_{x_1z_1}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z &= \alpha_{33}^2\sigma_{z_1} + 2\alpha_{31}\alpha_{33}\tau_{x_1z_1} \qquad (2)\\
\tau_{xy} &= \alpha_{13}\alpha_{23}\sigma_{z_1} + (\alpha_{21}\alpha_{13} + \alpha_{11}\alpha_{23})\tau_{x_1y_1}\\
\tau_{yz} &= \alpha_{23}\alpha_{33}\sigma_{z_1} + (\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{31}\alpha_{23})\tau_{x_1y_1}\\
\tau_{zx} &= \alpha_{13}\alpha_{33}\sigma_{z_1} + (\alpha_{31}\alpha_{13} + \alpha_{11}\alpha_{33})\tau_{x_1y_1}
\end{aligned}
$$

Для определения касательных напряжений, соответственных системам скольжения при использовании формул, приведенных в работе [6], получим

$$
\begin{aligned}
&\tau_{[01\bar{1}]}(111) = -\tau_{x_1z_1}\sin(\varphi + \pi/3);\\
&\tau_{[\bar{1}01]}(111) = -\tau_{x_1z_1}\sin(\varphi - \pi/3)\\
&\tau_{[1\bar{1}0]}(111) = \tau_{x_1z_1}\sin\varphi\\
&\tau_{[0\bar{1}\bar{1}]}(11\bar{1}) = \frac{1}{6\sqrt{3}}(7\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1} - \frac{2\sigma_{z_1}}{3\sqrt{6}} \qquad (3)\\
&\tau_{[101]}(11\bar{1}) = -\frac{1}{6\sqrt{3}}(7\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1} + \frac{2\sigma_{z_1}}{3\sqrt{6}}\\
&\tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) = -\frac{\sin\varphi}{3}\tau_{x_1z_1}\\
&\tau_{[01\bar{1}]}(1\bar{1}\bar{1}) = -\frac{\sin(\varphi + \pi/3)}{3}\tau_{x_1z_1}\\
&\tau_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2\cos\varphi + 4\sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1} - \frac{2\sigma_{z_1}}{3\sqrt{6}}\\
&\tau_{[\bar{1}0\bar{1}]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5\cos\varphi - 3\sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1} + \frac{2\sigma_{z_1}}{3\sqrt{6}}\\
&\tau_{[011]}(1\bar{1}1) = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5\cos\varphi + 3\sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1} + \frac{2\sigma_{z_1}}{3\sqrt{6}}\\
&\tau_{[10\bar{1}]}(1\bar{1}1) = \frac{1}{6\sqrt{3}}(-3\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1}\\
&\tau_{[\bar{1}\bar{1}0]}(1\bar{1}1) = \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2\cos\varphi - 4\sqrt{3}\sin\varphi)\tau_{x_1z_1} - \frac{2\sigma_{z_1}}{3\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

Задача оптимального ориентирования кристаллических осей сводится к выбору такого значения угла φ, при котором наибольшее абсолютное значение из двенадцати касательных напряжений, приведенных в (3), было бы по возможности малым.

Очевидно, наибольшее касательное напряжение следует искать в той системе скольжения, где фигурирует превалирующее растягивающее напряжение σ_{z_1}.

Представим абсолютные значения касательных напряжений в системах скольжения в форме

$$|\tau| = \frac{2}{3\sqrt{6}}\left|\sigma_{z_1} + \beta(\varphi)\tau_{z_1 z_3}\right| \qquad (4)$$

где $\beta(\varphi)$ определяет влияние касательного напряжения от кручения.

В табл. 2 даны значения $\beta(\varphi)$

Таблица значений $\beta(\varphi)$ для систем скольжения Таблица 2

φ	$\tau_{[0\bar1\bar1]}(11\bar1)$	$\tau_{[101]}(11\bar1)$	$\tau_{[110]}(\bar1\bar11)$	$\tau_{[\bar10\bar1]}(1\bar1\bar1)$	$\tau_{[011]}(1\bar11)$	$\tau_{[\bar1\bar10]}(1\bar11)$
0°	-2,473	-2,473	0,707	1,767	1,767	0,707
15°	-2,549	-2,232	0,049	1,232	2,183	1,317
30°	-2,449	-1,837	-0,612	0,612	2,449	1,837
45°	-2,183	-1,317	-1,232	-0,049	2,549	2,232
60°	-1,768	-0,707	-1,768	-0,707	2,473	2,473
75°	-1,232	0,049	-2,183	-1,317	2,232	2,549
90°	-0,612	0,612	-2,449	-1,837	1,837	2,449
105°	0,049	1,232	-2,549	-2,232	1,317	2,183
120°	0,707	1,768	-2,473	-2,473	0,707	1,768
135°	1,232	2,183	-2,232	-2,549	0,049	1,232
150°	1,837	2,449	-1,837	-2,449	-0,612	0,612
165°	2,232	2,549	-1,317	-2,183	-1,232	-0,049
180°	2,473	2,473	-0,707	-1,767	-1,767	-0,707

Как можно заключить из табл. 2, из всех систем скольжения наибольшее абсолютное значение $\beta(\varphi)$ от угла φ изменяется незначительно, однако при $\varphi = 0^0$ или при $\varphi = 120^0$ увеличение напряжения скольжения $\beta > 0$ адекватно увеличению превалирующего напряжения σ_{z_1} лишь на значение $1{,}767\tau_{z_1z_3}$.

Простейший анализ показывает, что эта ситуация является наиболее оптимальной. Наихудшая ориентация при z_1, совпадающем с [111], соответствует $\varphi = 46.1^0$, при этом β равно 2.54951. Таким образом, выбирая оптимальные значения угла φ, можно уменьшить добавочное влияние от касательного напряжения на 30,6% по сравнению с наименее благоприятной ориентацией. Углы φ ориентации кристаллических осей, равные 0^0 и 120^0, создают абсолютно адекватную ситуацию. Следует иметь в виду, что угол φ фактически отсчитывается от направления действия касательного напряжения $\tau_{z_1z_3}$. Если изменить направление $\tau_{z_1z_3}$ на противоположное, то эта выбранная ориентация кристаллических осей не будет оптимальной, а оптимальным углом ориентации будет 60^0 или 180^0, которые тоже равноценны.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Расчеты на прочность в машиностроении. Т.3. М.: Машгиз. 1959. 1186с.
2. Каблов Е.Н., Голубовский Е.Р.Жаропрочность никелевых сплавов.М.: Машиностроение. 1998. 463с.
3. Tshihara T. Strength of metal matrix composites for supersonic aeroplane engines. Composites: Fracture mechanics and technology. Russian Composite Society. Chernogolovka. 1992. 91p.
4. Голубовский Е.Р., Толораия В.Н., Светлов И.Л., Хвацкий К.К., Подъячев А.П. К вопросу о влиянии кристаллической ориентации на длительную прочность и ползучесть никелевого сплава. // Проблемы прочности. 1987. №9. С.11-17.
5. Светлов И.Л., Суханов Н.Н., Кривко А.И., Рошина И.Н., Хацинская И.М., Самойлов А.И. Температурно-ориентационная зависимость характеристик кратковременной прочности, модуля Юнга и КЛТР монокристаллического сплава ЖС6Ф.// Проблемы прочности. 1987. №1. С. 51-56.
6. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн. 1999. 255с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
28.08.2003

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АНТИФРИКЦИОННЫХ ПОРОШКОВЫХ КОМПОЗИТОВ

Казарян А.Н., Касьян В.Л., Петросян А.С.

Ա.Ն. Ղազարյան, Վ.Լ. Կասյան, Հ.Ս. Պետրոսյան
Հակաշփական փոշեկոմպոզիտների ֆիզիկա-մեխանիկական և շահագործողական հատկությունները

Բերվում են <Fe-C>, <Fe-Mo>, <Fe-Mo-Se>, <Fe-Cu-Mo-Se> փոշեկոմպոզիտների համալիր հատկությունների հետազոտման արդյունքները: Ցույց է տրված մեքենաների և մեխանիզմների բարձր ջերմաստիճանային պայմաններում աշխատող շփման հանգույցներում այդ նյութերի օգտագործման նպատակահարմարությունը:

A.N. Kazaryan, V.L. Kasyan, H.S. Petrosyan
Physico-mechanical and operating characteristics of antifriction powder materials

Представлены результаты исследования комплекса свойств порошковых композитов <Fe-C>, <Fe-Mo>, <Fe-Mo-Se>, <Fe-Cu-Mo-Se>. Показана целесообразность применения этих материалов в узлах трения механизмов и машин, работающих при повышенных температурах.

Развитие современной техники непосредственно связано с созданием новых материалов, способных работать при низких и высоких температурах, больших нагрузках и скоростях, в агрессивных средах и вакууме, а также в условиях граничного и сухого трения. Традиционные материалы, получаемые на основе черных и цветных металлов, во многих случаях не отвечают этим требованиям.

В этой связи, практический интерес представляет получение легированных порошковых сталей и сплавов для деталей машин и элементов конструкций, работающих в условиях больших нагрузок и интенсивного износа, а также для режущего и штампового инструментов, изделий электротехнического назначения. В организации такого производства технология порошковой металлургии, безусловно, имеет определенные преимущества. На фиг.1 представлена типовая технология изготовления изделий из железографита, включающая: приготовление шихты, прессование, спекание, пропитку маслом и калибрование. В ряде случаев получаемые изделия подвергают термической или химико-термической обработке, в частности, сульфидированию или оксидированию с целью повышения их эксплуатационных характеристик. В последнем случае графит (1-4%) частично растворяется в железе (матрице), а следовательно, упрочняет его, а оставшаяся часть выполняет роль твердой смазки. Спекание осуществляют при 1000-1200 °С в течение 1,5 — 3,0 ч.

В табл. 1 приведены свойства железографитовых материалов, нашедших широкое применение в общемашиностроительном производстве.

Характерным свойством железографитовых материалов является структурная пористость, посредством которой осуществляется процесс самосмазывания. Прочностные же свойства этих материалов вследствие пористости ($\theta = 15...25\%$) существенно снижаются, особенно прочность ($\sigma_в$), твердость (HB) и ударная вязкость (KC), что неадекватно эффекту самосмазывания.

Фиг 1. Технологическая схема получения железомедьграфитовых изделий [1]

В конечном счете работоспособность узла трения определяется не коэффициентом трения (f) и износостойкостью (J), а несущей способностью (PV) антифрикционного материала.

К первым разработкам, отвечающим требованиям адгезионно-деформационной теории трения износа, относятся антифрикционные материалы на основе Fe-Mo-S и Fe-Mo-Se [4]. В системе <Fe-Mo> железо и молибден образуют твердые растворы Fe[Mo] и интерметаллидные соединения, фазы σ-(FeMo), λ-(Fe_2Mo), R-(Fe_5Mo_3), μ - (Fe_3Mo_2)). Максимальная растворимость Mo в γ-Fe при 1140°C составляет 1,69%, а α-Fe ~ 2,26 % ат. (~ 3,8 % мас); при комнатной температуре ~ 3,15 % мас. Границы σ-фазы точно не установлены. При 1235°C она содержит 55% ат. Mo (~ 67 % мас. Mo) и имеет тетрагональную структуру $D8_6$. При температурах < 950°C образуется λ-фаза. При 900°C в λ-фазе содержится 36,1% ат. Mo (~ 48,6 % мас. Mo). При температуре ~ 1490 °C твердые растворы (ОЦК) находятся в равновесии с R-фазой, образующейся по перитектической реакции. Эвтектоидная температура R-фазы составляет 1200°C. μ-фаза образуется по перитектоидной реакции при 1370°C и имеет ромбоедрическую структуру $D8_5$, изотипическую с Fe_7Mo_6. По данным [5] область гомогенности определяется концентрациями 39...40 % ат. Mo.

Таблица 1

Свойства антифрикционных металлокерамических материалов на основе железа [2, 3]

Марка материала	Θ, %	$\sigma_и$, МПа	HB, МПа	f, (со смазкой)	Параметры (максимальные)		
					p, МПа	v, м/с	T, °C
ЖГр2	15...25	130	500...1300	0,05...0.07	3,5...5.0	5.0	100...180
ЖГр2Д2,5	15...20	270	900...1500	0,06...0,10	10,0	3.0	200
ЖГр1Цс4	15...20	200	900...1200	0,05	10,0	4,5	150
ЖГр3М15	15...20	-	1000...1800	0.04...0,10	5.0...8.0	-	250...400
Х23Н18КБ	20...25	95	50...96 (HRC)	0.30...0,20 (в воде)	30...50	1,5	600

Примечание: Ж – железо (Fe); Гр – графит (C); Д – медь (Cu); Цс – цинка сульфид (ZnS); М – молибден (Mo); Х – хром (Cr); Н – никель (Ni); К – сера (S); Б – бор (B);

Антифрикционные порошковые сплавы Fe-Mo-S(AM-3), Fe-Mo-Se (AM-4), Fe-Mo-Cu-Se (AM-5) предназначены для средне- и тяжелонагруженных узлов трения.Результаты предварительных испытаний показали, что стабильные антифриционные характеристики можно получить при содержаниях компонентов (3...5%)Mo, (1,0...1,25)%S, (1,5...3,5)%Cu, (0,5...2,5)%Se.

В табл. 2 приведены некоторые свойства ферромолибденовых сплавов, содержащих селен [4]. Отличительной особенностью сплавов является то, что в них реализованы оба механизма упрочнения: растворный Fe[Mo], Fe[Cu] и интерметаллидный (FeMo, Fe_2Mo). В этой связи надобность в углероде отпадает (речь идет об углеродном упрочнении, хотя для материалов, работающих в тяжелых условиях нагружения, применение углерода, например в пределах 0,4 ... 0,8 %, не исключается, т.е. сплавы <Fe-C-Mo-S>, <Fe-C-Mo-Se>).

Легирование медью не только повышает теплопроводность и ударную вязкость, но и значительно снижает износ пар трения. Как видно из табл.2, при сравнительно высокой несущей способности сплавов (40 и 50 *МПа м/с*, т.е. АМ-3 и АМ-4) коэффициент трения $f = 0{,}1$, а при трении со смазкой $f = 0{,}003$ ... 0,006, что недостаточно для многих антифрикционных материалов [4].

Таблица 2

Антифрикционные и механические свойства сплавов
(образцы беспористые, т.е. Θ = 0%; трение - сухое)

	V = 10 м/с					
Наименование материалов	p, *МПа*	f	$\sigma_в$, *МПа*	HB, *МПа*	KC, кДж/м^2	δ, %
АМ – 3 (Fe-Mo-S)	2,5	0,15	423	1800	400	5,5
АМ – 4 (Fe-Mo-Se)	4,0	0,1	504	2100	800	8,0
АМ – 5 (Fe-Cu-Mo-Se)	5,0	0,1	482	2000	850	8,6

С целью оценки возможности применения разработанных материалов при повышенных температурах (400...600°С), нами проведены испытания на специальной установке МФТ-18, представляющей собой машину торцевого трения с коэффициентом взаимного перекрытия пары трения, равным 1. Образцы изготовлялись в виде втулок с размерами дорожки трения Ø 28х20 мм. Контртелом служили втулки из молибдена (сортового проката). Технические характеристики установки следующие: давление среды - 1,013 *Па*, скорость вращения подвижного образца – 10 ... 6000 *об/мин*, усилие прижима образцов – 0...3500 Н, удельное давление на образец – 0...11 *МПа*. Испытания проводили в вакууме $666{,}5 \cdot 10^{-5}$ *Па* при нагрузке 5 *МПа* и температуре 150 ... 700 °С.

Некоторые результаты этих испытаний приведены в табл. 3, из которой следует, что разработанный материал Fe-Mo-Se и его модификации отличаются достаточно высокими антифрикционными свойствами, в частности, работоспособностью в условиях повышенных температур порядка 500...600°С. Эти материалы следует отнести к третьему поколению металлокерамических материалов. Напомним, что первое поколение – порошковые материалы со структурной пористостью. Второе поколение – беспористые порошковые материалы. Третье поколение – композиционные материалы (беспористые) с интерметаллидным и дисперсным упрочнением, включая армирование волокнами.

Таблица 3

Результаты испытаний на установке МФТ – 1В

Пара трения		Скорость скольжения, v, м/с	Продолжительность испытания $\tau_и$, *мин*	Износ, г	
неподвижный образец	подвижный образец			неподвижный образец	подвижный образец
Fe-Mo-Se	Mo	0,25	5,0	0,37	0,646
Mo	Mo	0,25	5,0	0,01	0,001

Впервые использованы армирующие стальные волокна для упрочнения антифрикционного сплава Fe-Mo-S (АМ-3). С целью улучшения теплофизических характеристик, в состав композиций вводили медь <(Fe-Mo-S)-Cu-Fe'>. При этом, как известно, механические и антифрикционные свойства несколько возрастают [7].

Таблица 4

Основные свойства армированного сплава <(Fe-Mo-S)-Сталь'>

Свойства	**Численные значения**
Предел прочности на разрыв, $\sigma_в$, *МПа*	465...560
Твердость (НВ), *МПа*	2300
Ударная вязкость (КСИ), *Кдж/м²*	360...420
Коэффициент трения при смазке (f)	0,006...0,016
Допустимая нагрузка (Р), *МПа*	2,5...3,0

Известно, что втулки поршневой группы, изготовленные из БрОЦ 10-2, работают в крайне тяжелых условиях при знакопеременных нагрузках и под действием высоких температур. Износ втулок и вкладышей нарушает динамический цикл двигателя, а следовательно, приводит к весьма нежелательным последствиям.

Работоспособность армированных втулок <(Fe-Mo-S) - Cu-Fe'>, в которых содержание волокон (Fe') колеблется в пределах 15...16 об.%, в 1,5...2,5 раза превышает базовые, изготовленные из оловянистой бронзы марки БрОЦ10-2. Это дает возможность использовать разработанный материал с целью изготовления втулок поршней и шатунов двигателей внутреннего сгорания транспортной техники. Замена бронзы на менее дефицитный по стоимости материал, а также в результате применения передовой технологии (экструзии), сокращающей не только количество операций, но и отходы при механической обработке, дает значительный экономический эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Порошковая металлургия на пороге 3000-летия / Под ред. Н.В. Манукяна. - Ереван, Тигран Мец, 2000. — 205 с.
2. Федорченко И.М., Пугина Л.И. Композиционные спеченные антифрикционные материалы. Киев: Наукова думка, 1980. 404 с.
3. Анциферов В.Н., Бобров Г.В. и др. Порошковая металлургия и напыленные покрытия. М.: Металлургия, 1987. 792 с.
4. Манукян Н.В. Технология порошковой металлургии. Ереван: Айастан, 1986 234 с.
5. Kibaschewski O. Iron — Binary Phase Diagrams, New York, 1982.
6. Карапетян Г.Х., Генджян М.А., Зурначян М.К., Петросян А.С. Порошковые сплавы антифрикционного назначения на основе меди // Структура и свойства порошковых материалов: Межвузовский сборник научных трудов. — Ереван, 1988. С. 79-82.
7. Петросян А.С. Формирование структуры и свойств армированных металлокерамических материалов при экструзии / Автореф. докт. дисс. — Ереван, ГИУА, 2002. — 32 с.

Государственный инженерный университет Армении

Поступила в редакцию 23.04.2003