

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՄԿՐԵՄԻԱՅԻ ՏԵԼԵԿՈՄԻՍԻՅԱՆ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2003

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗОНЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АРАВИЙСКОЙ И ЕВРАЗИАТСКОЙ ПЛИТ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ GPS

Արությունյան Ա.Գ., Թոնոյան Վ.Ս., Խաչիկյան Ա.Ս.

Ա.Գ. Հարությունյան, Վ.Ս. Թոնոյան, Ա.Ս. Խաչիկյան
Դեֆորմացիաների դաշտը Արաբական և Եվրասիական սալերի բախման գոտում
GPS տվյալների հիման վրա

Որոշվում է Արաբական և Եվրասիական սալերում լարումների և դեֆորմացիաների դաշտը նրանց բախման գոտում հիմնվելով երկրակենդի քյուրեդային հիմքի շարժման մասին տվյալների վրա՝ չափված GPS համակարգի կողմից 1988-1997թ. 37 կետերում:

Հարումները որոշվում են վերջավոր տարրերի մերոդով, հարթ լարվածային վիճակի գոյության ցնդունելության պայմաններում:

Պիտարկվող գոտու եզրագծի և տեղական տեղափոխությունների ինչպե՞ստե՞սով ստացված լարումների քաղաքնամար արվում է եզրակացություն դիտարկվող գոտու եզրագծով ազդող ուժերի համեմատությամբ սալերի ելմերի վրա ազդող ուժերի զգալի ազդեցության վերաբերյալ:

A. G. Harutyunyan, V. S. Tonoyan, A. S. Khachikyan
The Strain Field in the Arabia-Eurasia Plate Collision Zone
in the Base of GPS Measurements

На основании данных GPS о движении кристаллического фундамента, измеренных в 37 точках в период с 1988г. по 1997г. определяется напряженное состояние Аравийской и Евразийской плит в зоне их коллизии. Напряжения определяются методом конечных элементов в предположении, что имеет место плоское напряженное состояние. Сравнением напряжений, полученных с учетом контурных или локальных перемещений, делается вывод о значительности влияния сил, действующих на подошву плит по сравнению с силами, действующими на контуре рассматриваемого региона.

1. Введение

Изучение кинематики и динамики взаимодействия Аравийской и Евразийской плит привлекает постоянное внимание исследователей благодаря наличию значительных исторических данных о крупных землетрясениях региона [1-3]. Определенное комплексом полевых геологических данных картина исторических движений региона выявляет северо-северозападное движение Аравийской плиты южнее фронта коллизии со средней скоростью 18-25 мм/год и тенденцию континентального материала дилататься в поперечном относительно оси сжатия направлении севернее фронта коллизии [4]. Севернее фронта коллизии имеет место сжатие в направлении СЮ и растяжение в направлении ВЗ [5]. Качественная картина этого движения согласуется с кинематикой современного движения региона, определенной по сейсмологическим данным и механизмам очагов землетрясений. Количественная оценка распределения деформаций по этим данным естественно носит весьма ориентировочный и осредненный по большому региону и времени характер [6,7].

Появление данных измерений системы GPS (система глобального определения местоположения) [8,9], представляющих собой относительные перемещения в течение ряда лет значительного количества точек

поверхности региона, измеренных с большой точностью (менее мм/год) открыло новые возможности для изучения современной кинематики и динамики этого и других регионов [10-13].

Одним из основных вопросов динамики современных движений литосферных плит является определение соотношения ответственности за эти движения сил, действующих на контурах или на подошву этих плит.

Изучая кинематику в регионе СЗ Греции и Ионических островов на основании данных GPS авторы [14] пришли к выводу, что распределения деформаций, определенные методом колокации, указывают на значимость контурных усилий, по сравнению с усилиями, действующими на подошву кристаллического фундамента региона. Исследуя напряженно-деформированное состояние Эгейского сектора Средиземноморского подвижного пояса Шевченко В.И. и др. [12], пришли к выводу об определяющем влиянии процессов, действующих на подошву литосферы, объясняемый авторами движением некоторой глубинной пластины. Исследование кинематики и деформаций центральной Греции привело авторов [15] к заключению, что контурные усилия также играют значительную роль в движении литосферы.

Исследуя современные движения Кавказа и смежных территорий, авторы [13] пришли к выводу, что современная геодинамика региона определяется северным дрейфом Аравийской плиты к югу от офиолитовых полос и процессом внутриплитного тектогенеза к северу от них. Ведущий механизм (по мнению авторов) внутриплитного тектогенеза вероятно связан с увеличением объема региона привнесом в них материала восходящими потоками глубинных флюидов и движение многих поверхностных реперов независимо от каких-либо движений литосферных плит и микроплит.

Здесь рассматривается распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразийской плит севернее фронта коллизии (Армения, Грузия, Юг Европейской части России, СВ Турция) определяемые согласно данным GPS методом конечных элементов.

2. Постановка задачи

Отделим мысленно рассматриваемый регион (границы региона уточняются ниже) и пренебрегая, для простоты, его кривизной, рассмотрим его как плоскую плиту. Толщину плиты также пока не уточняем. Она определяется правомерностью по глубине принимаемых ниже гипотез относительно характера напряженно-деформированного (НДС) состояния рассматриваемого региона. Так как рассматривается только распределение деформаций, связанных с современным наблюдаемым движением поверхности региона, то действие гравитационных сил, атмосферное давление и другие воздействия не учитываем. Вследствие малости наблюдаемых скоростей движений задача статическая.

Таким образом, имеем плоскую плиту, на дневной поверхности которой напряжения отсутствуют и заданы перемещения (скорости перемещений) некоторых точек-реперов GPS. На боковых поверхностях и на подошве плиты действуют неизвестные напряжения.

В таком виде существование однозначного решения задачи не гарантировано из-за неполноты граничных условий даже при предположении о том, что среда сплошная (отсутствие скольжений по некоторым поверхностям разрывов), об известности реологии среды и отсутствии других внутренних процессов (изменение температуры, фазовые переходы).

Однако можно составить интегральные уравнения задачи, например методом ГИУ (граничных интегральных уравнений), и отыскав приближенные решения задачи и сопоставляя результаты решения с полевыми данными, добиться идентификации. Составление этих интегральных уравнений проиллюстрировано ниже.

Другим путем является введение новых гипотез или предположений о НДС коры Земли.

Так, авторы [16], для определения региональных полей напряжений полагают дополнительно известными направления главных напряжений (определенные экспериментально или из других соображений). Другие авторы вводят предположение о двумерности НДС. Наиболее распространено предположение, что перемещения поверхности Земли точно отражают и совпадают с перемещением всей литосферной плиты. Обсуждая этот вопрос относительно вертикальных перемещений, эту гипотезу подтвердили авторы работы [11] для Паннонского бассейна.

При таком предположении относительно горизонтальных перемещений здесь задача рассмотрена методом конечных элементов. Для простоты принимается, что среда упругая, изотропная и однородная.

3. Формулировка задачи методом ГИУ

Обозначим дневную поверхность рассматриваемой плиты через S_0 , а всю поверхность плиты — через S . Рассмотрим плиту как часть бесконечного упругого пространства и приложим мысленно на всю поверхность плиты распределенную нагрузку $\bar{q}(S)$. Тогда в любой точке пространства напряжения σ_{ij} и перемещения u_i могут быть выражены формулами [17]:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \int_S \bar{q}(s) K_i(x, s) ds \\ \sigma_{ij}(x) &= \int_S \bar{q}(s) K_{ij}(x, s) ds \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ядра интегралов $K_i(x, s)$ и $K_{ij}(x, s)$ легко построить по известным выражениям [18] для перемещений и напряжений в точке от приложенных неизвестных нагрузок $\bar{q}(S)$.

На дневной поверхности напряжения отсутствуют

$$\sigma_{ij}(x) = 0 \quad x \in S_0 \quad (2)$$

Полагая изменение перемещений на дневной поверхности линейными (см. ниже формулы (5) и (7)), можно согласно известным перемещениям реперов GPS получить значения перемещений точек всей дневной поверхности в виде непрерывной функции.

$$u_i(x) = U_0(x) \quad x \in S_0 \quad (3)$$

Подставляя (1) в (2) и (3), получим систему уравнений для определения неизвестных усилий $\bar{q}(S)$:

$$\int_s \bar{q}(s) K_i(x, s) ds = U_0(x), \quad x \in S_0$$

$$\int_s \bar{q}(s) K_j(x, s) ds = 0, \quad x \in S_0$$
(4)

Решение сингулярных уравнений (4), возможно, не единственное. Повысить эффективность приближенных решений и возможность их идентификации можно при наличии также адекватно точных значений измерений вертикальных составляющих перемещений реперов GPS, точность которых по сравнению с точностью измерений горизонтальных составляющих пока значительно низка.

4. Формулировка задачи методом конечных элементов

Отделим регион, составляемый выбранными точками-реперами GPS (фиг. 1), средние горизонтальные перемещения которых за 1988-1997 гг. относительно принятой неподвижной Евразийской плиты, взаимодействовавшие нами из работы [9], приведены в табл. 1.

Принимая выбранные точки за узловые точки метода конечных элементов и соединяя отрезками прямых линий все ближайшие точки между собой, не допуская пересечения отрезков, получим систему треугольников (фиг. 2), наложенных на рассматриваемый регион. Построение системы треугольников можно осуществлять разными путями, что не принципиально, но может быть использовано при изучении вопросов о взаимодействии конкретных микроплит на местности. Примем, что полученная область, покрываемая треугольниками, совпадает с рассматриваемой областью. Пронуммеруем все точки и треугольники. Соответствие номеров треугольников и вершин треугольников (реперов системы GPS), приведены в табл. 2.

Следуя методу конечных элементов, примем, что перемещения в пределах каждого треугольника изменяются линейным образом [19]:

$$u_1^k = \alpha_1^k + \alpha_2^k x_1 + \alpha_3^k x_2$$

$$u_2^k = \alpha_4^k + \alpha_5^k x_1 + \alpha_6^k x_2$$
(5)

где k — номер треугольника. u_1^k , u_2^k — составляющие перемещений в k -ом треугольнике, α_m^k ($m = 1, \dots, 6$) — неизвестные заранее постоянные. Это приводит к однородности деформаций в пределах каждого треугольника

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right)$$
(6)

Составляя уравнения (5) для каждой вершины каждого треугольника, получим шесть уравнений для каждого треугольника. Разрешая эти уравнения относительно коэффициентов α_i^k , получим значения этих коэффициентов в зависимости от известных перемещений и координат вершин соответствующих треугольников. Подставляя определенные таким образом значения α_i^k в уравнения (5), получим выражения перемещений во всех треугольниках в виде

$$u^k = A^k + B^k x$$
(7)

Обозначая матрицу-столбец перемещений вершин каждого треугольника через $\{\delta\}$, матрицу-столбец деформаций в каждом треугольнике через $\{\varepsilon\}$, матрицу коэффициентов в (7) через $\{B\}$, получим

Таблица 1

N	Репер GPS	долг.	шир.	Данные GPS		Решение по МКЭ	
				u_1 мм/год	u_2 мм/год	u_1 мм/год	u_2 мм/год
1	KAL2	43.34	38.55	-5.3	12	-5.3	12
2	GORI	46.37	39.51	3.3	9.6	3.3	9.6
3	LJEV	45.14	40.91	4	7.4	4	7.4
4	KRES	44.49	42.45	1.3	2.8	1.3	2.8
5	MATS	43.75	42.98	1.5	0.3	1.5	0.3
6	BEUG	42.79	44.01	-0.6	1	-0.6	1
7	ZELB	41.56	43.79	0.5	0.8	0.5	0.8
8	AKTO	39.7	40.97	0.5	1.7	0.5	1.7
9	SINC	37.96	39.45	-18.3	9.9	-18.3	9.9
10	GAZI	37.57	36.9	-8.5	12.3	-8.5	12.3
11	KIZI	40.65	37.25	-6.9	16.1	-6.9	16.1
12	NICH	44.53	41.83	1.1	5.8	2.09	4.22
13	ADYI	38.23	37.75	-7.6	13.4	-10.97	12.26
14	KRCD	39.81	37.85	-7.6	13.9	-9.02	13.66
15	MLTY	38.22	38.46	-12	10.9	-13.71	11.60
16	KMAN	39.16	39.61	-19.6	9.1	-10.95	7.92
17	MERC	40.25	39.73	-2.7	4.9	-6.74	7.13
18	KRKT	41.79	38.75	-5.1	14.4	-5.42	11.58
19	PATN	42.91	39.24	-2.5	8.7	-3.41	10.43
20	ARGI	43.03	39.72	1.2	6.7	-1.98	9.18
21	ERZU	41.3	39.97	-0.9	5	-3.56	7.08
22	ISPI	40.81	40.44	0.2	2.5	-2.21	5.06
23	OLTU	41.99	40.55	2.3	4.3	-1.33	6.16
24	HOPA	41.34	41.37	-0.1	2.6	-0.23	3.79
25	KARS	43.17	40.69	0.7	5.2	-0.03	6.69
26	ARTI	43.95	40.61	2.2	7.2	1.12	7.04
27	MMOR	44.11	40.18	2.5	7	0.67	8.18
28	NSSP	44.5	40.23	3.6	8.1	1.41	8.20
29	GARN	44.74	40.15	2.5	9.1	1.84	8.63
30	JERM	45.66	39.84	4.6	10.1	2.73	9.10
31	NINO	43.89	41.54	0.9	4.2	1.32	4.78
32	VANI	42.47	42.02	1.6	4.1	0.14	3.48
33	SACH	43.4	42.35	2.6	4.8	0.79	2.62
34	INGU	42.06	42.72	0.9	2.7	0.20	2.53
35	BALK	43.35	43.06	-2	-0.4	0.95	1.19
36	ULKA	42.19	43.35	-0.9	-1.2	0.37	1.52
37	SHAT	42.67	43.74	0.3	1.7	-0.09	1.12

$$\{\varepsilon\} = \{B\} \cdot \{\delta\}$$

$$\{\sigma\} = \{D\} \cdot \{\varepsilon\}$$

(8)

где $\{\sigma\}$ – матрица-столбец напряжений, а $\{D\}$ – матрица жесткостей. Для плоского напряженного состояния

$$\{D\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Таблица 2

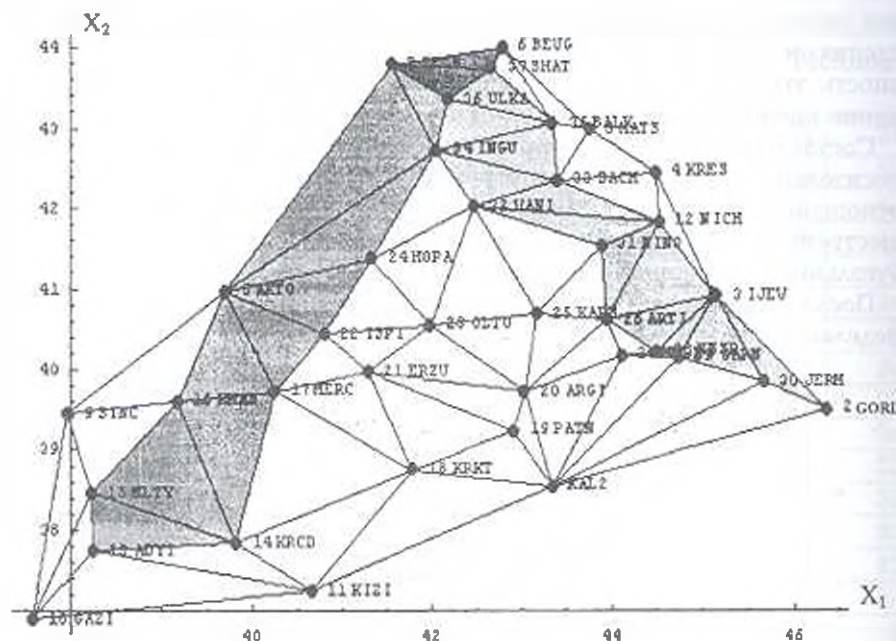
Номер Δ -а	Номер вершин		
	1	2	3
1	10	11	13
2	13	11	14
3	10	13	15
4	10	15	9
5	13	14	15
6	15	16	9
7	15	14	16
8	16	8	9
9	16	17	8
10	14	17	16
11	14	18	17
12	11	18	14
13	11	1	18
14	18	21	17
15	18	19	21
16	1	19	18
17	19	20	21
18	19	1	20
19	1	27	20
20	1	29	27
21	1	30	29
22	1	2	30
23	30	2	3
24	30	3	29
25	29	28	27
26	28	3	26
27	28	26	27
28	27	26	20
29	26	25	20
30	20	25	23

31	20	23	21
32	21	23	22
33	21	22	17
34	22	8	17
35	22	24	8
36	8	24	34
37	8	34	7
38	24	32	34
39	24	22	23
40	23	32	24
41	23	25	32
42	25	31	32
43	25	26	31
44	26	3	12
45	26	12	31
46	12	3	4
47	12	4	33
48	12	32	31
49	12	33	32
50	33	34	32
51	33	4	5
52	33	5	35
53	33	35	34
54	34	35	36
55	34	36	7
56	37	7	36
57	37	6	7
58	37	36	35
59	37	35	6
60	35	5	6
61	28	29	3

Применяя метод возможных перемещений по известной процедуре [19] для каждого треугольника, получим

$$\begin{aligned} \{F\} &= [k] \cdot \{\delta\} \\ [k] &= [B]^T [D] [B] \cdot h \Delta_i \end{aligned} \quad (10)$$

контурных точек (№ 1-11, фиг. 2), которые приведены в последних двух столбцах табл. 1. Были определены также составляющие напряжений во всех треугольниках при тех же условиях. По формулам (8) и табл.1 вычислены также локальные напряжения в каждом треугольнике определяемые только GPS перемещениями его вершин при $\nu = 0,2$, $E = 6 \cdot 10^{10}$ Па.



Фиг. 2

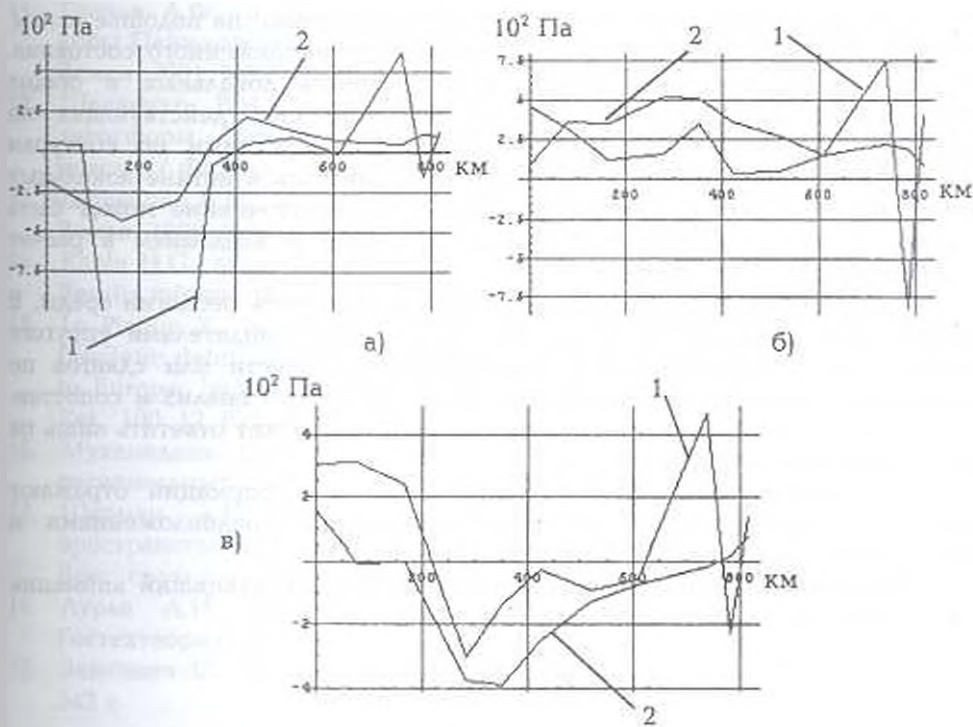
Для иллюстрации приведены графики изменений напряжений по двум трассам (на фиг. 2 эти трассы показаны затемнением), на фиг. 3 трасса СВ и на фиг. 4 трасса СЗ. На графиках отложены по горизонтальной оси расстояния между центрами соответствующих треугольников в километрах, по вертикальной оси значения относительных наращений напряжений в 10^{-2} Па/год, а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — τ_{12} . 1 — локальные напряжения, 2 — напряжения рассчитанных по МКЭ.

6. Заключение

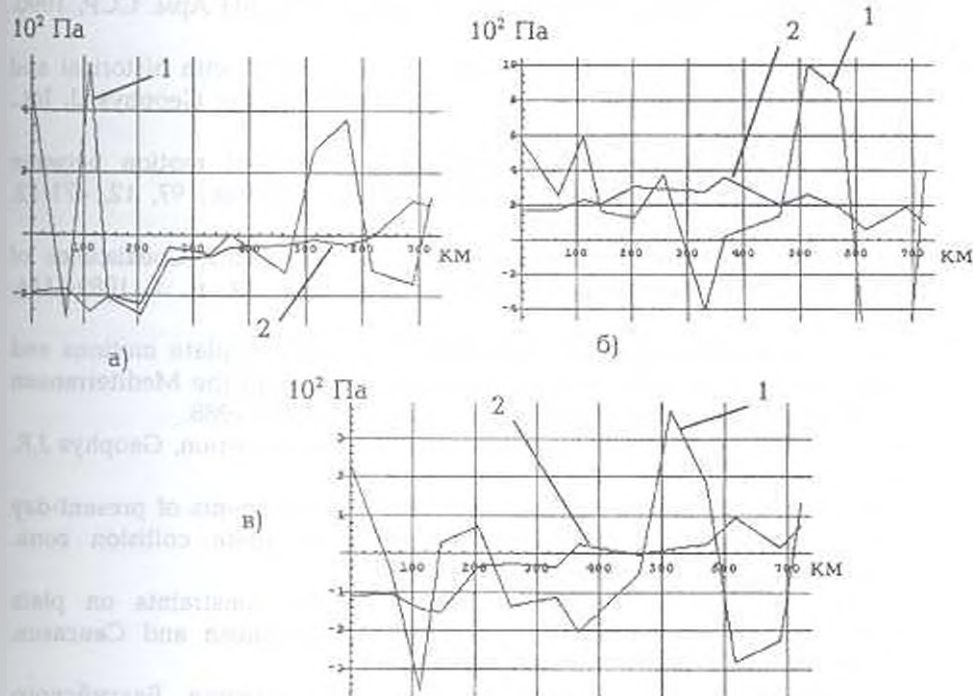
В рамках данной статьи мы воздерживаемся от детального обсуждения полученного распределения напряжений и только отметим некоторые общие соображения.

Близость к истине полученных полей напряжений и соответствующих им распределений деформаций может быть поставлена под сомнение по нескольким основаниям.

Переопределенность в двумерной постановке задачи может быть снята приложением внешней распределенной нагрузки, равной разности общих (рассчитанных по МКЭ) и локальных напряжений, в плоскости симметрии рассматриваемой плиты. Однако в действительности такая



Фиг. 3



Фиг. 4

нагрузка приложена, и может быть приложена, только на подошве плиты, что нарушает условия существования плоского напряженного состояния. Во всяком случае такая значительная разность локальных и общих напряжений указывает на большое значение сил, действующих на подошву плиты по сравнению с силами, действующими по контурам плиты, что перекликается с выводами [13]. Близость к истине локальных напряжений, кажется, более обоснованной и их уточнение может быть связано с существенной трехмерностью задачи и введением в расчет вертикальных перемещений.

Другим важным фактором является неизвестность реологии среды. В какой мере являются наблюдаемые перемещения свидетелями упругого накопления деформаций, или выражением ползучести или сдвигов по отдельным поверхностям разрывов? Более детальный анализ и сопоставление результатов расчетов с полевыми данными может ответить лишь на некоторые из этих вопросов.

Полученные распределения напряжений и деформаций отражают реальную картину лишь с этими известными предположениями и ограничениями.

Авторы благодарны проф. Баласаняну С.Ю., направивший внимание авторов на эту задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян Н.К. Механизм возникновения землетрясений Армянского нагорья (сейсмические условия). Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1986. 228с.
2. Карапетян Н.К. Сейсмогеодинамика и механизм возникновения землетрясений Армянского нагорья. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1990. 264 с.
3. Ambraseys N.N. and Jackson J.A. Faulting associated with historical and recent earthquakes in the eastern Mediterranean region. *Geophys. J. Int.*, 133, 390-406, 1998.
4. Jackson J. Partitioning of strike-slip and convergent motion between Eurasia and Arabia in eastern Turkey, *Geophys. J. Res.*, 97, 12, 471-12, 479, 1992.
5. Rebai S., et al. Active tectonics in the Lesser Caucasus: Coexistence of compressive and extensional structures. *Tectonics*, 12, n. 5, 1089-1114, 1993.
6. Jackson J. and McKenzie D. The relationship between plate motions and seismic tremors, and the rates of active deformation in the Mediterranean and Middle East. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 93, 45-73, 1988.
7. McKenzie D.P. Active tectonics of the Mediterranean region, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 30, 109-185, 1972.
8. Reiliger R., et al. Global Positioning System measurements of present-day crustal movements in the Arabia-Africa-Eurasia plate collision zone. *Geophys. J. Res.*, 102, 9083-9999, 1997.
9. McClusky S., et al. Global Positioning System constraints on plate kinematics and dynamics in the eastern Mediterranean and Caucasus. *Geophys. J. Res.*, 105, №. B3, 5695-5719, 2000.
10. Прилепин М.Т., и др., GPS изучение геодинамики Балтийского шита. // *Физика Земли*. 2002. №9. С. 49-58.

11. Грачев А.Ф., и др. Современные вертикальные движения земной коры Паннонского бассейна и проблема их интерпретации. // Физика Земли. 2001. №12. С. 21-29.
12. Шевченко В.И., и др. Напряженно-деформированное состояние литосферы Эгейского сектора средиземноморского подвижного пояса. // Физика Земли. 2001. №12. С. 52-63.
13. Шевченко В.И. и др. Современная геодинамика Кавказа. // Физика Земли. 1999. №9. С. 3-18.
14. Kahle H.G., et al. The strain field in NW Greece and the Ionian islands: Results inferred from GPS measurements. Tectonophysics. 249. 41-52. 1995.
15. Le Pichon X., N. Chamot-Rooke, S. Lallemand, R. Noomen, and G. Veris, Geodetic determination of the kinematics of central Greece with respect to Europe: Implications for eastern Mediterranean tectonics. J. Geophys. Res., 100, 12, 675-12, 690. 1995.
16. Мухамедиев Ш.А., Галыбин А.Н. Прямой подход к определению региональных полей напряжений. Физика Земли, 8, 2001, стр. 23-41.
17. Шерман Д.И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. / Тр. III Всес. съезда по теор. и прикл. мех. М. 1962. С. 405-467.
18. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1995. 492 с.
19. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
6.06.2003

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОЛОГИХ ПОКРЫТИЙ ДВОЯКОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ЗАДАННОГО ВЕСА МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЁСТКОСТИ

Гнунի В.Շ., Նշանյան Ս.Ս.

Վ. Յ. Գնունի, ՅՈՒ. Ս. Նշանյան

Հաստատում քաշի մաքսիմալ կոշտության երկակի հաստատում
փոքր կորության ծածկույթների նախագծում

Դիտարկվում է տրված մակերեսը ($s_0 = a \times b$, չափերի ուղղանկյուն) ծածկող նյութի տրված հաստատում ծափի բաղանջի նախագծման խնդիրը: Ենթադրվում է, որ բաղանջի համար ապահովվում է փոքր կորության պայմանը ($H / \min(a, b) \leq 0.2$; H – վերելքի չափը): Ստացվել է արագ ալգորիթմերի տարրերակ: Տույգ է տրված ծածկույթների կոշտության վրա վերելքի չափի ազդեցության առաձեռնահասկությունները կախված հատակագծի սկզբնական չափերից:

V. Ts. Gnuni, Yu. S. Nshanyan

Designing of Given Weight Low Grade Double Constant Curvature Surface with Maximal Stiffness

Рассматривается задача нахождения панели заданного объема материала, обладающего наибольшей жёсткостью и покрывающего заданную площадь. Полагается, что для панели выполняется условие пологости ($H / \min(a, b) \leq 0.2$; H – стрела подъёма). Получен вариант быстрых алгоритмов. Показаны специфические особенности влияния стрелы подъёма на жёсткость покрытия для различных исходных геометрий плана.

Пусть задан прямоугольник с размерами $a_0 \times b_0$. Ставится задача проектирования покрытия максимальной жёсткости из заданного объёма материала $V = V_0 = s_0 \times h_0$, где h_0 – толщина плоского покрытия. Рассматривается множество покрытий типа оболочек двойкой постоянной кривизны $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$ с размерами a, b, h – однородного изотропного материала с упругими характеристиками E, ν .

Предполагается, что покрытие нагружено нормальной следящей нагрузкой q и радиально оперто по краям. Тогда, представляя прогиб оболочки и нагрузку в виде [1]

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{m, n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta \quad (1)$$

$$\lambda_m = \pi m t_1 / a_0; \mu_n = \pi n t_2 / b_0; t_1 = a_0 / a; t_2 = b_0 / b$$

$$q(\alpha, \beta) = \sum_{m, n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta \quad (2)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \iint_{0 \leq \alpha \leq a, 0 \leq \beta \leq b} q(\alpha, \beta) \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta d\alpha d\beta$$

для коэффициентов разложения w_{mn} получается

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D \left[(\lambda_{m0}^2 + \mu_{n0}^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2 \lambda_{m0}^2 + k_1 \mu_{n0}^2)^2 \right]}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

В случае покрытия типа пластинки ($k_1 = 0, k_2 = 0$)

$$w_{mn} = w_{mn}^0 = \frac{q_{mn}}{D_0 (\lambda_{m0}^2 + \mu_{n0}^2)^2}; \quad \lambda_{m0} = \pi m / a_0$$

$$\mu_{n0} = \pi n / b_0; \quad D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

Полагая

$$\gamma_i = \frac{4\delta_i}{1 + 4\delta_i^2} \quad (5)$$

где $\delta_1 = \frac{H_1}{a_0}, \delta_2 = \frac{H_2}{b_0}$ — относительные стрелы подъёма, а H_1, H_2 — соответственно стрелы подъёма в координатных плоскостях, $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$. Учитывая условие постоянства объёма материала покрытия, получим

$$h = t_1 t_2 h_0, \quad t_i = \frac{\gamma_i}{\arcsin \gamma_i}, \quad k_1 = 2\gamma_1 / a_0, \quad k_2 = 2\gamma_2 / b_0 \quad (6)$$

Для общей (суммарной) стрелы подъёма оболочки двоякой постоянной кривизны справедливы соотношения

$$H = H_1 + H_2, \quad H / \min(a_0, b_0) \leq 0.2 \text{ — условия пологости оболочки.}$$

Обозначим через K коэффициент совершенства конструкции, определяемый в данном случае как отношение наибольших прогибов пластинки и оболочки равного веса, покрывающей данную прямоугольную площадь:

$$K = \frac{\max_{\alpha, \beta} w''(\alpha, \beta)}{\max_{\alpha, \beta} w(\alpha, \beta)} \quad (7)$$

Величина K характеризует относительное увеличение жёсткости конструкции при переходе от плоского покрытия (пластина) к выпуклому (оболочка двоякой постоянной кривизны) покрытию. При заданных весе (толщине h_0) и размере покрытия в плане, проект определится величинами δ_1, δ_2 и рассматриваемая задача построения проектов наибольшей жёсткости может быть представлена в виде:

$$\text{найти } \delta_1 = \frac{H_1}{a_0}, \delta_2 = \frac{H_2}{b_0} \text{ из условия } K = \frac{\max_{\alpha, \beta} w''(\alpha, \beta)}{\max_{\alpha, \beta} w(\alpha, \beta)} \rightarrow_{\delta_1, \delta_2} \max \quad (8)$$

$$\text{при ограничении } \delta_1 + \mu_0 \delta_2 = \delta \leq 0.2; \quad \mu = b_0 / a_0; \quad \delta = H / a_0$$

Так как прогиб $w(\alpha, \beta)$ — монотонно убывающая функция толщины покрытия h , то в рамках построения проектов максимальной жёсткости, представляется целесообразным отдельно рассмотреть следующую задачу построения проекта покрытия наибольшей толщины при заданном исходном объеме материала :

найти $\delta_1 = H_1 / a_0$, $\delta_2 = H_2 / b_0$ из условия

$$h = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\arcsin \gamma_1 \arcsin \gamma_2} \rightarrow_{\delta_1, \delta_2} \max \quad (9)$$

при ограничении $\delta_1 + \mu \delta_2 = \delta \leq 0.2$; где γ_1, γ_2 определяются из (5).

Задача (9) приводится к системе трансцендентных уравнений

$$\left(\operatorname{ctg} \varphi_1 - \frac{1}{\varphi_1}\right) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \mu \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2}\right) + \left(\operatorname{ctg} \varphi_2 - \frac{1}{\varphi_2}\right) \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2} - \mu \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \mu \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = 2\delta; \quad \varphi_1 = 2 \operatorname{arctg} 2\delta_1$$

Очевидное решение системы (9) при значении $\mu = 1$ (квадратный план покрытия)

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \delta_1 = \delta_2$$

и решение задачи (9) реализуется в классе сферических покрытий ($\gamma_1 = \gamma_2$).

В частном случае цилиндрического покрытия ($\delta_2 = 0$) задача (9) сводится к решению уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \varphi_1 \quad (10)$$

которое в интервале $0 < \varphi_1 < 2 \operatorname{arctg} 2\delta_1$, $0 < \delta_1 < 0.2$ не имеет решений. Следовательно, в этом случае оптимальными в смысле (9) являются цилиндрические покрытия с $\delta_1 = 0.2$ максимальной относительной стрелой подъема.

В общем случае решение системы (9) определяет семейство

$$(\varphi_1^*, \varphi_2^*) \Leftrightarrow (\delta_1^*(\mu, \delta), \delta_2^*(\mu, \delta)),$$

на которых реализуются оптимальные в смысле (7) проекты.

Результаты численных расчётов приведены в табл. 1.

Отметим общую тенденцию, которая сохраняется и для основной задачи — для более короткой в плане стороны предпочтительная стрела подъема всегда меньше и с возрастанием $\mu = b_0 / a_0$ отношение δ_2^* / δ_1^* относительных стрел подъема, на которых реализуются оптимальные в смысле (9) проекты, также возрастает. При переходе от цилиндрической к оптимальной в смысле (9) форме, для квадратного в плане покрытия, увеличение толщины (при сохранении веса) при $\delta = 0.2$ составляет 4.7% и убывает с увеличением μ .

В общем случае, как было отмечено, задача нахождения геометрии покрытия двоякой постоянной кривизны заданного веса для заданного плана, обеспечивающего минимум для максимального прогиба (максимальной жёсткости) задаётся решениями задачи (8). Параметрический анализ при

$\delta = 0,2$ для покрытий с исходной относительной толщиной $h_0/a_0 = 1/20$ приведён в табл. 2, где представлены значения коэффициента совершенства K в зависимости от геометрии плана покрытия и относительной стрелы подъёма. (Здесь и далее представленные расчёты произведены для случая $q_{\infty} = 0$ при $m, n \neq 1$)

Таблица 1.

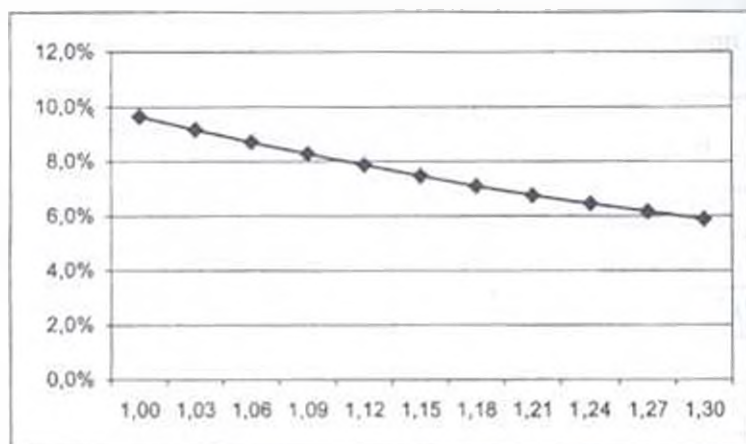
$\delta =$ H/a_0	$\mu = \frac{b_0}{a_0}$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
0,12	$\delta_1^* \times 100$	6,0	5,0	4,2	3,6	3,2	3,0	2,5	2,1	1,8
	$\delta_2^* \times 100$	6,0	5,6	5,2	4,8	4,4	4,0	3,8	3,6	3,4
	$(h^* - h)/h \times 100$	0,2	1,1	1,7	2,2	2,5	2,8	3,0	3,1	3,2
0,20	$\delta_1^* \times 100$	10,0	8,4	7,1	6,0	5,2	4,5	4,0	3,5	3,2
	$\delta_2^* \times 100$	10,0	9,3	8,6	8,0	7,4	6,9	6,4	6,0	5,6
	$(h^* - h)/h \times 100$	4,7	5,9	6,8	7,5	8,0	8,4	8,7	8,9	9,1

Таблица 2

		$\delta_1 = H_1/a_0$										
$\mu =$ b_0/a_0	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	
1,00	6,44	6,66	6,83	6,96	7,04	7,07	7,04	6,96	6,83	6,66	6,44	
1,03	6,49	6,70	6,87	6,99	7,06	7,08	7,06	6,98	6,85	6,68	6,46	
1,06	6,51	6,72	6,88	7,00	7,06	7,08	7,05	6,97	6,84	6,67	6,46	
1,09	6,52	6,72	6,87	6,98	7,04	7,06	7,02	6,94	6,81	6,65	6,45	
1,12	6,50	6,69	6,84	6,95	7,01	7,03	6,98	6,89	6,77	6,61	6,41	
1,15	6,47	6,66	6,80	6,90	6,95	6,96	6,92	6,83	6,71	6,55	6,36	
1,18	6,43	6,60	6,74	6,83	6,88	6,88	6,84	6,76	6,64	6,48	6,30	
1,21	6,37	6,54	6,67	6,76	6,80	6,80	6,75	6,67	6,55	6,40	6,22	
1,24	6,30	6,46	6,59	6,67	6,70	6,70	6,65	6,57	6,46	6,31	6,14	
1,27	6,22	6,37	6,49	6,57	6,60	6,59	6,55	6,47	6,35	6,21	6,04	
1,30	6,13	6,28	6,39	6,46	6,49	6,48	6,43	6,35	6,24	6,10	5,94	

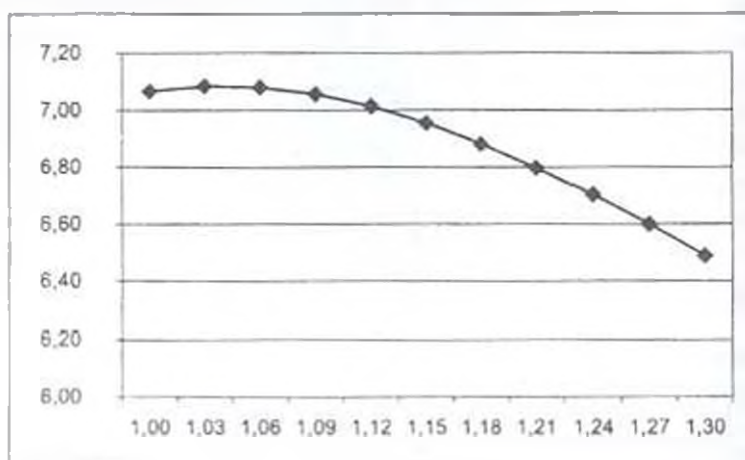
Нетрудно заметить, что в диапазоне исходных геометрий, близких к квадрату ($1 \leq \mu \leq 1,3$) $\delta_1^* = 0,1$ и, следовательно, $\delta_2^*/\delta_1^* = 1/\mu$, а предельные значения $\delta_1 = 0$, соответствующие цилиндрическим формам, наименее жёсткие в классе пологих покрытий. Совершенный в смысле (8) проект в достаточно широком диапазоне исходных геометрий реализуется для значений $0,05 \leq \delta_1 \leq 0,1$ и с высокой точностью может аппроксимироваться решениями задачи (9). Относительный выигрыш за счёт оптимального выбора δ_1 при различных геометриях плана приведен на фиг. 1. Выигрыш в жёсткости при переходе на пологую форму двоякой кривизны наибольший

при квадратном плане и составляет около 10 %. С отклонением плана от квадратного влияние этого фактора на жёсткость падает и форма оптимальной панели приближается к цилиндрической.



Фиг. 1. Прирост коэффициента совершенства от оптимального выбора соотношения относительных стрел подъёма при различных $\mu = b_0/a_0$ ($h_0/a_0 = 1/20$)

Как было отмечено, переход к пологим оболочкам даёт наиболее ощутимый выигрыш в жёсткости для квадратного плана покрытия (более семи раз при $h_0/a_0 = 1/20$). С увеличением одной из сторон плана покрытия выигрыш падает, тем не менее, оставаясь достаточно значительным (более шести раз для $\mu = b_0/a_0 = 1,3$). Как и следовало ожидать, стороны с большей длиной плана более чувствительны к величине стрелы подъёма.



Фиг. 2. Изменение величины коэффициента совершенства в зависимости от $\mu = b_0/a_0$ ($h_0/a_0 = 1/20$)

Во всем рассматриваемом диапазоне отклонение коэффициента совершенства на решениях задачи (8) от кантушских просктов не превышает

0,1%, что позволяет рассматривать задачу (8) как достаточно удачный быстрый алгоритм исходной задачи (7). С уменьшением h_0/a_0 чувствительность проекта к выбору пары (δ_1, δ_2) падает, а к суммарной величине стрелы подъёма, параметру δ увеличивается, превышая первый на порядок.

Для квадратного плана выбором любого набора стрел подъёма в сумме равных 0,2 имеем выигрыш в жёсткости более чем в 7 раз. Следует отметить, что если жёсткость элемента с увеличением δ возрастает (максимальные прогибы падают) для всего диапазона геометрий, то вместе с тем чувствительность изучаемого параметра к изменению стрелы подъёма существенно не меняется с изменением исходных геометрий.

Отметим, что чем легче исходное покрытие, тем большего эффекта можно достигнуть за счёт параметра δ . Так, при $h_0/a_0 = 1/50$ в случае квадратного плана для относительной стрелы подъёма равной 0,1 выигрыш в жёсткости превышает 12, а увеличивая δ_{II} до предельного значения 0,2, можно довести этот эффект до 40. При $\mu = h_0/a_0 = 1,3$ эти величины – соответственно 10 и 36. С изменением относительной толщины исходного покрытия h_0/a_0 сохраняется качественная зависимость от геометрии плана – эффективность перехода к пологим покрытиям падает с отклонением плана от квадратного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 251с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.11.2002

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПРИ УЧЕТЕ
ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ОБЖАТИЯ

Киракосян Р.М., Саркисян М.С.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Մ. Ս. Սարգսյան
Օրթոտրոպ սալ-գոտու լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը ընդլայնական
սահիքի և սեղմման հաշվառմամբ

[11] տեսության շրջանակներում տրվում է եզրերում հողակապորեն հեցված հաստատուն հաստության սալ-գոտու խնդրի ճշգրիտ լուծումը մակերևութային հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի դեպքում: Կատարվում է ստացված անալիտիկ փակ լուծումների բազմակողմանի վերլուծություն և արվում հաշվային մեծությունների վրա ընդլայնական սահիքի և սեղմման ազդեցությունների վերաբերյալ որակական և քանակական եզրակացություններ: Զննարկվում են հարթ խնդրի հետ ծոման խնդրի կապի, ինչպես նաև սալ-գոտու հենման զծերի ազդեցության հարցերը: Կատարվում է [2,3] և [11] տեսություններով միջին հարրության համար ստացվող մաքսիմում ճկվածքների համեմատություն:

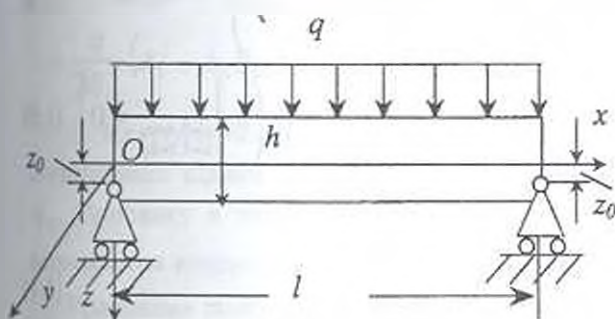
R.M. Kirakosyan, M.S. Sarkisyan
The Stress-Strain State of Orthotropic Strips Taking into Account the
Transverse Shears and Normal Compression

В работе [11] предложен один вариант основных уравнений и соотношений ортотропных пластин переменной толщины, учитывающих влияние как поперечных сдвигов так и обжатия. В качестве приложения там же дано решение задачи изгиба ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины. Из-за сложности полученных аналитических выражений заключения в этой работе сделаны только на основе анализа безразмерных численных результатов. Аналогичные заключения, непосредственно из аналитических замкнутых решений, можно сделать для простейшего случая — случая пластинки-полосы постоянной толщины. Во избежание раскрытия ряда неопределенностей, целесообразно эти решения получить не как частный случай решений задачи пластинки-полосы линейно-переменной толщины, а путем отдельного рассмотрения случая пластинки-полосы постоянной толщины, что и делается в настоящей работе. Помимо задачи изгиба решается также плоская задача. Обсуждается вопрос связи задачи изгиба с плоской задачей, а также вопрос влияния места расположения опорных линий полосы. Сравниваются значения максимальных прогибов срединной плоскости пластины, вычисленные по теориям [2, 3] и [11].

1. Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу постоянной толщины h и ширины l . Координатную плоскость xu совместим со срединной плоскостью, выбрав начало на левом краю пластинки-полосы. Ось x направим перпендикулярно краям, ось z — вертикально вниз, а ось y так, чтобы образовалась правая система координат (фиг. 1). Пусть пластинка-

полоса находится под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности q , приложенной на поверхности $z = -h/2$.

Пластика-полоса шарнирно оперта вдоль линий $x=0, z=z_0$ и $x=l, z=z_0$, где $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$.



Фиг.1

Задачу определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластинки-полосы с одновременным учетом влияния поперечного сдвига и обжатия будем решать на основе уравнений, предложенных в работе [11].

Поскольку в данном случае перемещение вдоль оси y равно нулю, а перемещение вдоль оси x не зависит от y , то второе уравнение плоской задачи удовлетворяется автоматически, а первое уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (1.1)$$

Аналогично третье уравнение задачи изгиба удовлетворяется автоматически, а первые два принимают вид:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{3q}{2h} \quad (1.2)$$

$$B_{11} h^2 \frac{d^3 w}{dx^3} + 8\varphi_1 = 0$$

Здесь u — перемещение по оси x , w — прогиб срединной плоскости, φ_1 — функция, характеризующая распределение касательного напряжения τ_{xz} , B_{11} — параметр, который выражается через упругие постоянные материала по известным формулам [3].

Граничные условия плоской задачи имеют вид:

$$\left(B_{11} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} A_1 q \right)_{x=0} = 0, \quad (\tau_{xz})_{x=0} = 0 \quad (1.3)$$

$$u|_{x=l/2} = 0$$

Параметры, с помощью которых учитывается влияние нормального напряжения σ_z , в общеизвестных обозначениях определяются формулами [3]

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}, \quad A_2 = a_{23}B_{22} + a_{13}B_{12} \quad (1.4)$$

Граничные условия задачи изгиба при полном выражении нормального перемещения u_z [11] формулируются следующим образом:

$$\left[B_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - (\chi + A_1) \frac{d\varphi_1}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(M_x \right)_{x=0}^{x=l} = 0 \quad (1.5)$$

$$\left[w + z_0 \left(A_1 \frac{du}{dx} + \Delta_1 \frac{q}{2} \right) - \frac{z_0^2}{2} \left(A_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \Delta_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right]_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(u_z \right)_{x=0, z=z_0}^{x=l, z=z_0} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi &= a_{33}B_{11}, \quad \Delta_1 = a_{13}A_1 + a_{23}A_2 - a_{33} \\ \Delta_2 &= a_{13}(\chi + A_1) + a_{23} \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \chi + A_2 \right) - a_{33} \end{aligned} \quad (1.7)$$

a_{ij} — упругие постоянные материала, χ учитывает влияние поперечного сдвига. В выражении (1.6) член с множителем z_0 относится к плоской задаче, а член с множителем z_0^2 — к задаче изгиба.

Нетрудно заметить, что как разрешающее уравнение (1.1), так и граничные условия плоской задачи (1.3) не содержат величин изгибного характера, в силу чего эту задачу всегда можно решать отдельно, независимо от задачи изгиба. Аналогичное утверждение относительно задачи изгиба неверно. Это понятно, поскольку при $z_0 \neq 0$, т.е. когда линия опирания не находится на срединной плоскости, в граничных условиях (1.6) фигурирует член du/dx , в силу чего задача изгиба становится связанной с плоской задачей.

Решения уравнений (1.1) и (1.2) при граничных условиях (1.3) и (1.5), (1.6) имеют вид

$$u = \frac{A_1 q}{4B_{11}} (l - 2x) \quad (1.8)$$

$$\varphi_1 = \frac{3q}{4h} (l - 2x) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{qx}{2B_{11}h^2} (l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3q}{4B_{11}h} (\chi + A_1)x(l - x) + \\ &+ \frac{qz_0}{2B_{11}} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) - \frac{3qz_0^2}{4B_{11}h} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для перемещений произвольной точки пластинки-полосы с учетом (1.8)–(1.10) получим формулы

$$u_x = -\frac{qz}{2B_{11}h^3}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) + \frac{A_1 q}{4B_{11}h}(h - 3z)(l - 2x) \quad (1.11)$$

$$u_z = \frac{qx}{2B_{11}h^3}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3q}{4B_{11}h^3}[(\chi + A_1)h^2 + 4A_1z^2]x(l - x) - \\ - \frac{q}{2B_{11}}(A_1^2 - \Delta_1 B_{11})(z - z_0) + \frac{3q}{4B_{11}h}(A_1^2 - \Delta_1 B_{11})(z^2 - z_0^2) \quad (1.12)$$

2. Из (1.11) видно, что u_x не содержит параметра χ , т.е. учет поперечного сдвига не влияет на значение тангенциального перемещения u_x . Поправку в значение этого перемещения вносит учет обжатия, что выражается вторым слагаемым (1.11), содержащим параметр A_1 .

Уравнение поверхности, на которой u_x равно нулю, имеет вид

$$z_H = \frac{A_1 h^3 (l - 2x)}{2(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) + 3A_1 h^2 (l - 2x)} \quad (2.1)$$

При пренебрежении обжатием ($A_1 = 0$) эта поверхность совпадает со срединной плоскостью $z = 0$.

Поверхность (2.1), которую условно можно назвать нейтральной, пластинку-полосу делит на две части. Выше этой поверхности, т.е. при $-h/2 \leq z < z_H$ происходит укорачивание, а ниже нее, т.е. при $z_H < z \leq h/2$ — удлинение горизонтальных волокон.

Раскрывая неопределенность (2.1) при $x = l/2$, находим

$$z_H|_{x=l/2} = \frac{A_1 h^3}{3(l^2 + A_1 h^2)} \quad (2.2)$$

Пользуясь тем, что $A_1 < 0$, $|A_1| h^2 \ll l^2$, можно показать

$$\frac{dz_H}{dx} > 0 \text{ при } 0 \leq x < l/2, \quad \left. \frac{dz_H}{dx} \right|_{x=l/2} = 0, \quad \frac{dz_H}{dx} < 0 \text{ при } l/2 < x \leq l \\ \frac{d^2 z_H}{dx^2} < 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l \quad (2.3)$$

На фиг. 2 представлен примерный вид нейтральной поверхности.

Таким образом, независимо от значения z_0 , т.е. от места расположения линии опирания, нейтральная поверхность целиком расположена выше срединной плоскости.

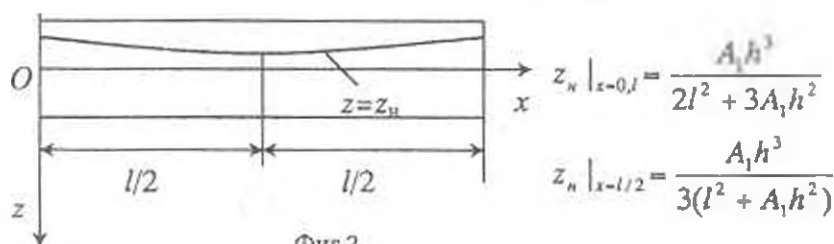
Тангенс угла α , на который поворачиваются поперечные сечения пластинки-полосы вследствие изгиба, определяется формулой [11]

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dw}{dx} + u_{ss} \varphi_1 \quad (2.4)$$

С учетом (1.9) и (1.10) из (2.4) получим

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{q}{2B_{11}h^3}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) - \frac{3A_1q}{4B_{11}h}(l - 2x) \quad (2.5)$$

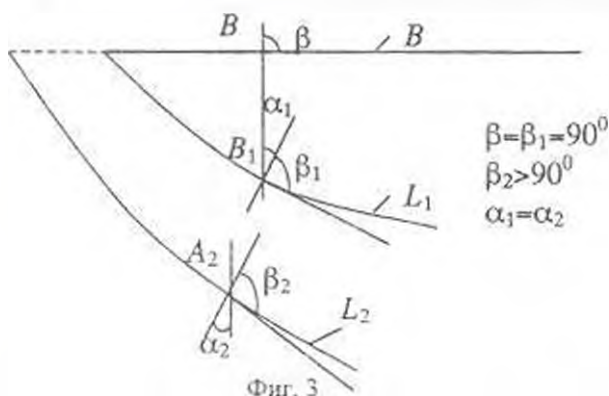
Из этой формулы видно, что угол поворота α не зависит от параметра χ , т.е. учет поперечного сдвига не влияет на значения этого угла. С другой стороны известно, что учет поперечных сдвигов приводит к увеличению прогибов срединной плоскости пластинок. Нетрудно убедиться в том, что здесь нет противоречия. Дело в том, что при учете поперечных сдвигов прямые элементы, перпендикулярные к срединной плоскости



Фиг. 2

недеформированной пластинки, после деформации остаются также прямыми, но, в отличие от классической теории, они не перпендикулярны к той поверхности, в которую переходит срединная плоскость вследствие деформации.

На фиг. 3 показаны примерные формы поверхностей L_1 и L_2 , в которые переходит срединная плоскость L после деформации по классической теории пластинок и по теории [11] соответственно.



Фиг. 3

Там же показаны положения произвольной точки B , срединной плоскости. Углы поворота нормального элемента α_i и углы β_i , образованные этим элементом и срединной поверхностью деформированной пластинки-полосы по обшим теориям, соответствуют случаю неучета обжатия.

Поскольку параметр A_1 фигурирует в (2.5), то учет обжатия влияет на значения угла поворота. Естественно, что в середине пролета $x = l/2$ угол поворота равен нулю. Наибольшую величину угол поворота имеет на опорах —

$$\operatorname{tg} \alpha|_{x=0} = -\operatorname{tg} \alpha|_{x=l} = -\frac{ql^3}{2B_{11}h^3} \left(1 + \frac{3}{2} A_1 \frac{h^2}{l^2} \right) \quad (2.6)$$

В силу того, что $A_1 < 0$, учет обжатия уменьшает абсолютное значение α . Это влияние имеет порядок h^2/l^2 . В случае изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$, ($A_1 = -1/2$) при $h/l = 1/4$ и $1/5$ поправка наибольшего значения $\operatorname{tg} \alpha$ составляет 4,7% и 3% соответственно. Разумеется, в общем случае анизотропной пластинки переменной толщины эти цифры могут существенно изменяться.

3. Выражение (1.12) содержит как параметр χ , так и параметры A_1, Δ_1 . Это означает, что на значение нормального перемещения u_z влияет учет как поперечного сдвига, так и обжатия. В отличие от тангенциального перемещения u_x нормальное перемещение u_z зависит от z_0 , т.е. от положения линий опирания пластинки-полосы.

Для точек срединного сечения пролета из (1.12) имеем:

$$u_z|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{5ql^4}{32B_{11}h^3} \left[1 + \frac{6}{5} \chi \frac{h^2}{l^2} + \frac{6}{5} A_1 (1 + 4\bar{z}^2) \frac{h^2}{l^2} - \frac{16}{5} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{h^4}{l^4} + \right. \\ \left. + \frac{24}{5} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) (\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2) \frac{h^4}{l^4} \right] \quad (3.1)$$

$$\text{Здесь } \bar{z} = z/h, \quad \bar{z}_0 = z_0/h \quad (3.2)$$

Внутри больших скобок фигурируют пять слагаемых. Первое слагаемое, т.е. "1", представляет классическое значение прогиба срединной плоскости, которое получается без учета как поперечного сдвига, так и обжатия. Второе слагаемое представляет поправку, вносимую в значение максимального прогиба срединной плоскости, только учетом поперечного сдвига. Эта поправка имеет порядок h^2/l^2 . Остальные слагаемые представляют поправки, обусловленные учетом обжатия. Они относятся к точкам как срединной плоскости $z = 0$, так и любой точке

$-1/2 \leq \bar{z} \leq 1/2$. Третье слагаемое соответствует задаче изгиба при пренебрежении влиянием места расположения линий опирания. Подобно поправке от поперечного сдвига, эта поправка также имеет порядок h^2/l^2 .

Четвертое и пятое слагаемые соответствуют плоской задаче и задаче изгиба соответственно. Обе эти поправки имеют порядок h^4/l^4 и учитывают влияние обжатия и, связанное с ним, влияние места расположения линий опирания. Очевидно, что при обычных значениях относительной толщины h/l и при обычных ортотропных материалах можно без заметного ущерба точности пренебречь членами порядка h^4/l^4 . Тогда из выражения нормального перемещения u_z [11] можно отбросить слагаемое, соответствующее плоской задаче, что позволит упростить граничное условие (1.6), заменив его следующим условием:

$$\left[w - \frac{z_0^2}{2} \left(A_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \Delta_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right]_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(u_z \right)_{x=0, z=z_0}^{x=l, z=z_0} = 0 \quad (3.3)$$

Благодаря этому, задача изгиба полностью отделится от плоской задачи и ее также можно решать отдельно.

Для более наглядности рассмотрим случай изотропного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Пользуясь [3], имеем

$$B_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \chi = \frac{2}{1-\nu}, \quad A_1 = A_2 = -\frac{\nu}{1-\nu}, \quad (3.4)$$

$$B_{12} = \nu B_{11}, \quad A_1^2 - \Delta_1 B_{11} = 1$$

С учетом (3.4) из (3.1) при $\nu = 1/3$ и $h/l = 1/4$ получим

$$u_z \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{36} \frac{ql^4}{Eh^3} \left[1 + 0.225 - 0.0375(1 + 4\bar{z}^2) - \right. \\ \left. - 0.0125(\bar{z} - \bar{z}_0) + 0.01875(\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2) \right] \quad (3.5)$$

Наибольшие значения поправок, вносимых тремя последними членами, составляют 7.5%, 1.25% и 0.47% соответственно. Следовательно, вклады последних двух слагаемых (3.5), на самом деле, существенно малы по сравнению с вкладами его первых трех слагаемых. Это убедительно подтверждает допустимость пренебрежения членами порядка h^4/l^4 . Кроме полного отделения задачи изгиба от плоской задачи, это приведет еще и к независимости решений от значения z_0 , т.е. от места расположения линий опирания. Хотя приведенный численный пример относится к случаю изотропного материала, сделанное заключение, бесспорно, будет справедливым и для случаев материалов с умеренной ортотропией.

4. В рассмотренной задаче касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} отсутствуют. Относительно напряжений σ_x , σ_y и τ_{xz} задача статически определима, в силу чего учет поперечного сдвига и обжатия не влияет на

их значения. Выражения этих напряжений по [11] совпадают с соответствующими формулами классической теории пластинок —

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{6q}{h^3} xz(l-x), \quad \sigma_z = -\frac{q}{2} + \frac{3qz}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \\ \tau_{xz} &= \frac{3q}{4h^3} (l-2x)(h^2 - 4z^2)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Определенный интерес представляет напряжение σ_y , которое возникает из-за отсутствия перемещения вдоль оси y .

В рамках теории [11] с учетом (1.9) и (1.10) для этого напряжения имеем:

$$\sigma_y = \frac{6q}{h^3} \frac{B_{12}}{B_{11}} xz(l-x) + \frac{q}{2h} \left(A_2 - A_1 \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) (h - 3z) \quad (4.2)$$

Первая часть этого выражения совпадает с соответствующей формулой классической теории пластин. Вторая же часть (4.2) является результатом учета обжатия. Классическая часть зависит от x и z . Поправка же является функцией только от z . Наибольшее по абсолютному значению напряжение $\sigma_y^{\max}$ возникает в точках $x = l/2$, $z = -h/2$. Для конкретности рассмотрим случай изотропного материала.

С учетом (3.4) из (4.2) находим:

$$\sigma_y^{\max} = \sigma_y \Big|_{x=l/2, z=-h/2} = -\frac{3qvl^2}{4h^2} \left(1 + \frac{5h^2}{3l^2} \right) \quad (4.3)$$

Величина $\frac{5h^2}{3l^2}$ и есть поправка, вносимая учетом обжатия в значение $\sigma_y^{\max}$. Она не зависит ни от E ни от ν . Поправка имеет порядок h^2/l^2 и при $h/l = 1/4$ и $1/5$ составляет 10.4% и 6.7% соответственно.

5. По итерационной теории [2, 3] для нормального перемещения u_z при опирании пластины вдоль линий $x = 0, z = h/2$ и $x = l, z = h/2$, после первого приближения получится формула

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{qx}{2B_{11}h^3} (l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3qa_{11}}{5h} x(l-x) + \frac{9qA_1}{20B_{11}h} x(l-x) + \\ &+ \frac{3qA_1}{B_{11}h^3} z^2 x(l-x) + \frac{qa_{11}}{32} (3h - 16z) + \frac{3qa_{11}}{4h} z^2 - \frac{qa_{11}}{2h^3} z^4\end{aligned}\quad (5.1)$$

Подобно (1.12) здесь также первое слагаемое представляет классическое выражение прогиба срединной плоскости, второе слагаемое — поправку от поперечного сдвига, а остальные слагаемые — поправки, вносимые учетом нормального напряжения σ_z и обжатия.

С целью количественного сравнения вычислим значения u_z в точках срединного сечения изотропной пластины по обеим формулам при $\nu = 1/3$ и $h/l = 1/4$.

По формуле (5.1) имеем

$$u_z|_{z=l/2} = w_0 \left(1.1601 - 0.0141 \frac{z}{h} - 0.1289 \frac{z^2}{h^2} - 0.0141 \frac{z^4}{h^4} \right) \quad (5.2)$$

По формуле (1.12) —

$$u_z|_{z=l/2} = w_0 \left(1.1890 - 0.0125 \frac{z}{h} - 0.1312 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (5.3)$$

где $w_0 = 5ql^2/36Eh^3$ — максимальное значение прогиба пластины по классической теории. В нижеприведенной таблице представлены значения полной поправки

$$\Delta = \frac{u_z - w_0}{w_0} 100\% \quad (5.4)$$

для некоторых точек сечения $x = l/2$, подсчитанные по формулам (5.2) и (5.3).

Таблица

z/h		-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
Δ	По (5.3)	16.24	18.39	18.90	17.77	15.00
	По (5.2)	13.41	15.54	16.01	14.84	11.99

Данные таблицы показывают, что значения полной поправки по формуле (5.3) получаются несколько больше, чем по формуле (5.2). Наибольшее расхождение имеет место в точке $z = h/2$ и составляет 3.01%.

Таким образом, в рассматриваемой задаче теория [11], которая предложена для пластин переменной толщины, приводит к результатам, мало отличающимся от соответствующих результатов первого приближения итерационной теории пластин постоянной толщины [2.3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E.—Trans. ASME, 1945. V.67, p. A69-A77.
2. Амбарцумян С.А. Еще одна уточненная теория анизотропных оболочек. // Механика полимеров. 1970. №5. С. 884-896.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
4. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. //Вестник МГУ. 1957. №3. С. 42-51.
5. Хачатурян Т.Т. Об учете влияния касательных напряжений в теории изгиба плит. // Изв. АН Арм ССР. Сер. физ-мат наук. 1961. Т. XIV. №1. С. 67-78.
6. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин. //Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С.65-72.
7. Васильев В.В. Классическая теория пластин — история и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.46-58.
8. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова Думка. 1981. 544с.
9. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: 2002. С.155-166.
10. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА. 2000. 122с.
11. Киракосян Р. М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия. //Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-23.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.07.2003

УДК 539.3

Stability of Bending Form of Piezoactive Bimorphic Plates

M. Belubekyan, M. Karapetyan, M. Sarkisyan

The devices, which function based on direct and converse piezoeffects, are widely spreaded in contemporary technics. The interest in estimating the piezoceramical actuators is conditioned by their wide application in practical and scientific activity of human and permanently extending application area.

Due to wide application of layered piezoactuators, and in particular bimorphs, in technical devices, the effective model developing problems and the problems of estimating electric and magnetic fields generated in piezoelectric, are very actual.

Bimorphic elastic plates are being bended on application the reverse directed electric potential to the facing surface. But at the same time the compression stresses occur in piezoelectric, which may lead to instability of the estimated bending condition. In particular, by means of the electric field, it is possible a state of the plate when the cylindricity of bending takes place. In this connection the compression stresses occur along the generatrix of the cylindrical surface. The critical electric intensity which leads to losing the stability of cylindrical form of bending of the plate is being estimated.

The problem of losing the stability of cylindrical form of bending of the bimorphic piezoceramical plate is being solved analytically within the limits of Kirchhoff's plate theory.

Устойчивость изгибной формы пьезоэлектрической биморфной пластинки

Белубекян М. В., Карпетян М. Э., Саркисян М. Г.

Биморфная пьезоэлектрическая пластинка изгибается под действием электрических потенциалов разных знаков, приложенных на лицевых поверхностях пластинки и на поверхности раздела. Показывается, что при этом появляются сжимающие напряжения, которые могут привести к неустойчивости пластинки. Определяются критические значения напряженности электрического поля в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик пластинки.

Պիեզոէլեկտրիկ բիմորֆ սալի ծնունդ ձևի կայունությունը

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Մ.Է. Կարապետյան, Մ.Գ. Սարգիսյան

Պիեզոէլեկտրիկ բիմորֆ սալը ծնվում է դրսևային և բաժանով տարբերությունների վրա ազդող տարբեր նշանի պոտենցիալների հետևանքով. Յույց է տրվում, որ այդ դեպքում առաջանում է սեղմող լարում, որը կարող է բերել սալի անկայունությանը. Որոշվում էն էլեկտրական դաշտի արվածությունների տիպական արժեքները. կախված սալի ֆիզիկա-մեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

INTRODUCTION

Two thin plates of a different thickness made of piezoelectric material (class 6mm) are glued along the front-face area. The plates are polarized by the thickness. The front-face areas are electrified to establish the potential difference between the front-face areas with the help of the electric field. It is necessary to determine the strain-stress state of a thin bimorphic plate, conditioned by the electric field. It is considered that the electric field is given and the influence of the converse piezoelectric effect is neglected. The influence of the thickness of the gluing material is also neglected.

Many authors investigated the case, when the thickness of the plates is the same. The review of the mentioned manuals is given in [1].

1. (XOY) coordinate space coincides with the contact plane (Pic. 1). The electric field in the plate is set up with the help of the applied potential difference between the front-face areas $z = h_1$, $z = -h_2$ and the interface surface $z = 0$. Only the direct piezoeffect is taken into consideration and the electric field is given in the following way (Pic. 2):

$$E_3 = \begin{cases} -E_0(x, y), & 0 < z < h_1 \\ E_0(x, y), & -h_2 < z < 0 \end{cases}$$

$$\vec{E} = E_3 \vec{k}, \quad E_1 = \begin{cases} -E_0(x, y) & \text{when } 0 < z \leq h_1 \\ E_0(x, y) & \text{when } -h_2 \leq z < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

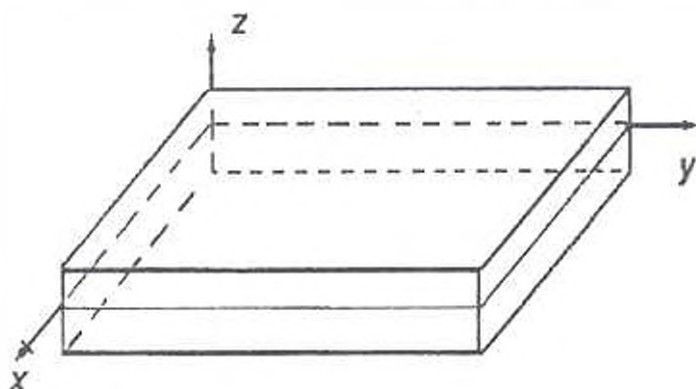
Taking into account the assumptions of the Kirchoff's theory for the package in general, the constitutive equations for the principal stresses of the piezoelectric material (class 6mm) have the following appearance [2]

$$\sigma_{11} = a_{11}\epsilon_{11} + a_{12}\epsilon_{22} - sE_3, \quad \sigma_{22} = a_{12}\epsilon_{11} + a_{11}\epsilon_{22} - sE_3$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\epsilon_{12} \quad (1.2)$$

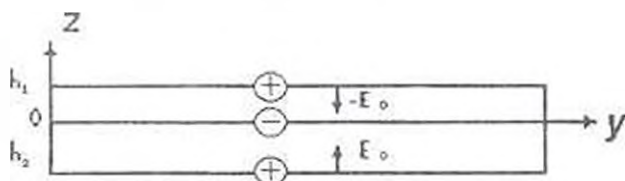
where

$$a_{11} = c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{33}}, \quad a_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad s = e_{31} - \frac{e_{31}c_{13}}{c_{33}} \quad (1.3)$$



Pic. 1

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h_2 \leq z \leq h_1$$



Pic.2

Taking into consideration the assumptions concerning the character of displacements' modification by plate thickness the (1.2) equations take the following forms:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - s E_3 \\ \sigma_{22} &= a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{11} \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - s E_3 \\ \sigma_{12} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.4)$$

where u, v, w are the appropriate displacements of plate's $z = 0$ plane

In averaged equations of balance

$$\int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dz = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \int_{-h_2}^{h_1} z \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dz = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.5)$$

Strains and moments are defined in the following way

$$\begin{aligned}T_1 &= \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_{11} dz = 2h \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - s(h_2 - h_1) E_0 \\ T_2 &= 2h \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{11} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \left(a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - s(h_2 - h_1) E_0 \\ S &= h(c_{11} - c_{12}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h_1^2 - h_2^2}{2h} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{h_1^3 - h_2^3}{2} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{h_1^3 + h_2^3}{3} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + s \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} E_0 \\ M_2 &= \frac{h_1^3 - h_2^3}{2} \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{11} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{h_1^3 + h_2^3}{3} \left(a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + s \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} E_0 \\ H &= \frac{h_1^3 - h_2^3}{4} (c_{11} - c_{12}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}$$

The substitution of (1.6) to the averaged equations (1.5) brings to the following equations concerning the planar displacements u, v and w flexure:

$$\Delta u + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{(h_1 - h_2) a_{11}}{c_{11} - c_{12}} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{s(h_1 - h_2)}{h(c_{11} - c_{12})} \frac{\partial E_0}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$\Delta v + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{(h_1 - h_2) a_{11}}{c_{11} - c_{12}} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{s(h_1 - h_2)}{h(c_{11} - c_{12})} \frac{\partial E_0}{\partial y}$$

$$D \Delta^2 w = h_1 h_2 s \Delta E_0 \quad (1.8)$$

where

$$D = \frac{2h^3}{3} a_{11}, \quad 2h = h_1 + h_2, \quad \theta = \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11} - c_{12}} - \frac{2c_{13}^2}{(c_{11} - c_{12})c_{33}} \quad (1.9)$$

Hereby the expressions for the intersecting strains look like

$$\begin{aligned} N_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + h_1 h_2 s \frac{\partial E_0}{\partial x} \\ N_2 &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + h_1 h_2 s \frac{\partial E_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.10)$$

It is necessary to mention that the equation (1.8), which defines the bending, is autonomous. In particular, when $h_1 = h_2$ the equations defining the planar displacements are also being separated.

2. The boundary conditions of the problem are determined in accordance with Kirchhoff's theory of plate. Hereinafter are the versions of known conditions for the plate's $x = \text{const}$ edge.

For the fixed edge these conditions are not changed and have the following appearance:

$$u = v = 0, \quad w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0 \quad (2.1)$$

Boundary conditions of free supporting

$$T_1 = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0$$

after some transformations take the following form (with regard to (1.6) expressions)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{h_1 - h_2}{12D} h_1^2 \zeta s E_0, \quad v = 0 \quad \left(\zeta = -1 + 4 \frac{h_2}{h_1} - \frac{h_2^2}{h_1^3} \right) \\ w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{h_1 h_2}{D} s E_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Conditions of sliding contact

$$u = 0, \quad S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0$$

are transformed to

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{h_1 h_2}{D} s \frac{\partial E_0}{\partial x} \quad (2.3)$$

At last the conditions of free edge

$$T_1 = 0, \quad S = 0, \quad M_1 = 0, \quad \tilde{N}_1 = 0, \quad \left(\tilde{N}_1 = N_1 + \frac{\partial H}{\partial y} \right)$$

take the following form

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{h_1 - h_2}{2} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{s}{h} E_0 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= (h_1 - h_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{3h_1 h_2}{2h^3} s E_0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_{11} + c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = \frac{3h_1 h_2}{2h^3} s \frac{\partial E_0}{\partial x}$$

3. From the equation (1.8) and boundary conditions follow, that the electric field leads to bending of the plate. Hereby, in accordance with equations (1.7) the planar displacements appear in the plate's $z = 0$ plane, which brings to the T_x, T_y forces appearance. These forces, in general, can be compressive, which will bring to the plate stability losing [3].

As an example a rectangular plate occupying area

$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1$, is under consideration. It is assumed that

$$E_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

On the $y = 0, b$ edges of plate the conditions of sliding contact are given which look like (according to (2.3) and condition (3.1))

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, v_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad (3.2)$$

In case when the plate's $x = 0, a$ edges are freely supported (2.2), the plate is bending to a form of cylindrical surface.

$$w_0 = -\frac{h_1 h_2}{2D} s E_0 a x \left(1 - \frac{x}{a} \right) \quad (3.3)$$

For the planar strains the following expressions are received

$$T_{10} = 0, T_{20} = (h_1 - h_2) (c_{11} - c_{12}) s a_{11}^{-1} E_0, S_0 = 0 \quad (3.4)$$

In case when plate's $x = 0$ edge is fixed (2.1), and the $x = a$ edge is free (2.4), cylindrical form of the plate's bending surface looks like

$$w_0 = \frac{h_1 h_2}{2D} s E_0 x^2 \quad (3.5)$$

and the appropriate strains are determined in the following way:

$$T_{10} = 0, T_{20} = (h_1 - h_2) \left(1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) s E_0, S_0 = 0 \quad (3.6)$$

From (3.4) and (3.5) follows that T_{20} strain will be compressive under the following condition:

$$(h_1 - h_2) s < 0 \quad (3.7)$$

4. The equation of the stability of the plate with given strains ((3.4) or (3.5)) take the following form:

$$D \Delta^2 w - T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

The solution of (4.1) equation with the appropriate boundary conditions has a following appearance:

$$w = w_0(x) + \bar{w}(x, y) \quad (4.2)$$

where w_0 is the initial form of the bending of plate, $\tilde{w}(x, y)$ – is arbitrary disturbance. The substitution (4.2) to (4.1) and boundary conditions brings to the homogeneous equation and homogeneous boundary conditions relative to $\tilde{w}$, i.e. brings to the known problems of the stability of plate. In case when the conditions of sliding contact are given on the plate's $y = 0, b$ edges and $x = 0, a$ edges are hinged, for the critical values of the intensity of electric field E_0 the following expression is received:

$$E_{ms} = \frac{(\mu_n^2 + \lambda_n^2)^2 a_{11} D}{\lambda_n^2 (h_2 - h_1) s (c_{11} - c_{12})}, \quad \mu_n = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \quad (4.3)$$

It is obvious that the minimal critical value will be received when $m = 1$. The value of n for the minimal critical value depends on relative dimensions of the plate.

For the square plate ($b = a$) $n = 1$ the value of the minimal intensity of the electric field has the following appearance:

$$E_* = \frac{4\pi^2 a_{11} D}{(h_2 - h_1) s (c_{11} - c_{12}) a^2} \quad (4.4)$$

An appropriate expression for the plate with dimensions $b = 2a$ ($n = 2$) looks like

$$E_* = \frac{25\pi^2 a_{11} D}{(h_2 - h_1) s (c_{11} - c_{12}) a^2} \quad (4.5)$$

The typical values of a_{11} and s (in SI system) calculated on the base of electro elastic modules from [2] are listed in the table 1.

Table 1

Material	10^{10} N/m^2				c/m^2			10^{-11} F/m		10^{10}	c/m^2
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	e_{31}	e_{31}	e_{33}	ϵ_{11}	ϵ_{33}	a_{11}	s
PZT – 4	13,9	7,8	7,4	11,5	12,7	-5,2	15,1	650	560	9,14	-14,92
ZnO	20,97	12,11	10,51	21,09	-0,59	-0,61	1,14	7,38	7,83	15,73	-1,18
CdS	8,56	5,32	4,62	9,36	-0,21	-0,24	0,44	7,99	8,44	6,28	-0,46

In a particular case of bimorphic construction $h_2 = 2h_1$, the expression (4.4) defining the critical value of the intensity of electric field, can be expressed in a more suitable way:

$$E_* = k \left(\frac{2h_1}{a} \right)^2 \cdot 10^{10} \quad \text{v/m} \quad (4.6)$$

For the materials listed in Table 1 the k coefficient has the following values:

$$\alpha = 0.92 \text{ (PZT – 4)}, \quad \alpha = 23.65 \text{ (ZnO)}, \quad \alpha = 26.47 \text{ (CdS)}$$

From the expression (4.6) it follows that the critical value of the intensity of electric field is essentially dependent on the relative thickness of the plate.

REFERENCES

1. Saravanos D.A, Heyliger P.R. Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates and shells.// Appl. Mech. Rev 1999, vol 52, N 10, p.305-320.
2. Royer D, Dieulesaint E. Elastic Waves in Solids. Masson 1999, v1. 446p.
3. Ambartsumyan S.A., Belubekyan M.V. On an approach to defining effective moduli of nonsymmetrically assembled multilayered plates. In "Problems of Strength and Plasticity". Higher School Collection. Nizhni Novgorod state University Publishers. 2000, p.26-30. (In Russian)

Institute of Mechanics NAS Armenia
Yerevan State Engineering University

Received
24.08.2003

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН
В АНИЗОТРОПНЫХ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Даноян З.Н.

Զ.Ն. Դանոյան

Հարթ մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրերում

Մեխանիկի Մոսկովի կոմպլեքս լուծումների մեթոդի ինչպես վրա կառուցված են մագնիսա-առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումները, չորս առաձգական հաստատուններ ունեցող անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրերի համար: Այդ լուծումներից առանձնացված են լուծում-ների որոնք ներկայացնում են հարթ մագնիսաառաձգական ալիքներ: Ռեզլում է ալիքների դասակարգումը արագ և դանդաղ կամ քվադրկայանական ու քվադրկայանական ալիքների՝ կախված միջավայրի ֆիզիկա-մեխանիկական հատկություններից և արտաքին մագնիսական դաշտի մեծությունից ու կոդնորդումից: Ուսումնասիրվում են փուլային արագությունների փոփոխությունները կախված մասնանշված պարա-մետրերից: Առանձնապես որոշված են փուլային արագությունների լքստրեմալային արժեքները և առարձման ուղղությունները:

Այս հարցը անիզոտրոպ միջավայրերի համար դիտարկված է [4-6]-ում, մագնիսաառաձգական ալիքների համար [1-3]-ում:

Z.N. Danoyan

The Propagation of Magnetoelastic Plane Waves in Anisotropic Perfectly Conducting Media

На основе метода комплексных решений Смирнова-Соболева [7] построены функционально-инвариантные решения плоской задачи теории магнитоупругости для идеально-проводящих анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными. Из этих решений отделены решения, представляющие собой плоские магнитоупругие волны.

Приводится классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучаются изменения фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. В частности, определены интервалы монотонности, экстремальные значения и направления распространения фазовых скоростей.

Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4,5,6], для магнитоупругих волн — в [1-3].

Введение. Магнитоупругие волновые процессы в анизотропных упругих средах сложны и многообразны, зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных, величины и направления внешнего магнитного поля, направлений распространения волн и т.д. В отличие от изотропных сред, где распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны, в анизотропных средах, а также изотропных и анизотропных средах в магнитном поле распространяются квазипродольные и квазипоперечные, или быстрые и медленные волны. В изотропных средах волновой процесс был описан функционально-инвариантными или комплексными решениями волновых уравнений [1]. В работах [2-4] методом комплексных решений исследованы волновые процессы в анизотропных средах, причем в [4] предлагается уточняющий подход к построению комплексных решений. В работах [5,6] методом комплексных решений изучены волновые процессы в изотропных средах в магнитном поле. В работах [7,8] этим методом изучено поведение магнитоупругих волн в идеально-проводящих анизотропных средах. В этой работе продолжается изучение данного вопроса. Детально изучаются

решения, соответствующие плоским магнитоупругим волнам. Приводится классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучаются изменения фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. В частности, определены интервалы монотонности, экстремальные значения и направления распространения фазовых скоростей.

Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4,5,6], для магнитоупругих сред — в [1-3].

1. Постановка задачи. Основные уравнения и их решения. Магнитоупругие волны в анизотропных идеально-проводящих упругих средах в плоском случае при наличии внешнего однородного постоянного магнитного поля с вектором напряженности $\vec{H}_0$ описываются следующими уравнениями движения в перемещениях [1,3]:

$$a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} = u_{tt}, \quad e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} = v_{tt} \quad (1.1)$$

где $u = f(x, y, t)$, $v = g(x, y, t)$ — компоненты упругого перемещения $\vec{u} = \{u, v, 0\}$ в декартовой системе координат x, y, z , оси которой совпадают с главными направлениями упругости среды, a_m, b_m, c_m, d_m, e_m — постоянные коэффициенты, определяемые выражениями (индексы u и v обозначают производные по x, y и t):

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, \quad b_1 = b_0 + \chi, \quad d_1 = d_0, \quad e_1 = d_0 + \chi, \quad c_1 = c_0 \\ a_2 &= a_0 + \chi, \quad b_2 = b_0, \quad d_2 = d_0 + \chi, \quad e_2 = d_0, \quad c_2 = c_0 \\ a_3 &= a_0 + \chi, \quad b_3 = b_0 + \chi, \quad d_3 = d_0, \quad e_3 = d_0, \quad c_3 = c_0 + \chi \\ a_0 &= c_{11}/\rho_0, \quad b_0 = c_{22}/\rho_0, \quad d_0 = c_{66}/\rho_0, \quad c_0 = (c_{12} + c_{66})/\rho_0, \quad \chi = H_0^2/4\pi\rho_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

c_{ik} — упругие постоянные, ρ_0 — плотность среды, χ — скорость Альфвена.

В (1.1) $m = 0, 1, 2, 3$ соответствует случаям отсутствия и следующим направлениям магнитного поля: $\vec{H}_0 = (1), \vec{H}_0 = H_0 \vec{i}, \vec{H}_0 = H_0 \vec{j}, \vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатной системы $Oxyz$.

Ограничения, которые должны налагаться на коэффициенты системы (1.1), определяются из условия вполне гиперболичности системы (1.1) и из условия положительной определенности формы упругой энергии [1]. Ввиду того, что упругие постоянные a_0, b_0, c_0, d_0 реальных известных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям [4-6]:

$$d_0 > 0, \quad A_0 = a_0 - d_0 > 0, \quad B_0 = b_0 - d_0 > 0, \quad 0 < c_0 < c_0^{(0)} = \sqrt{a_0 b_0} + d_0 \quad (1.3)$$

поведение упругих волн исследуется при (1.3) и при $\chi > 0$.

Согласно методу комплексных решений Смирнова-Соболева [7], выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями:

$$u = f(\Omega), \quad v = g(\Omega) \quad (1.4)$$

где Ω представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно x, y, t :

$$\Omega = l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y - k(\Omega) = 0 \quad (1.5)$$

Здесь под f и g понимаются непрерывные дважды дифференцируемые функции, если величины $l(\Omega), \dots, k(\Omega)$ — вещественны. А если некоторые из этих величин комплексны, то f и g — аналитические функции от Ω .

Определяя производные функций (1.4) по известным формулам дифференцирования сложных и неявных функций [5,6] из (1.5) и подставляя их значения в систему (1.1), получим условия:

$$\begin{aligned}(a_m m^2 + d_m n^2 - l^2) f'(\Omega) + c_m m n g'(\Omega) &= 0 \\ c_m m n f'(\Omega) + (e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) g'(\Omega) &= 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями (1.4).

Система (1.6) имеет ненулевое решение, если имеет место условие:

$$\Delta = (a_m m^2 + d_m n^2 - l^2)(e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) - c_m^2 m^2 n^2 = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega), m(\Omega), n(\Omega)$, а также, согласно (1.6), между производными $f'(\Omega), g'(\Omega)$.

Таким образом, класс функций (1.4) выражает решение системы (1.1), если их аргумент Ω определен уравнением (1.5) с коэффициентами, подчиненными уравнению (1.7), а сами функции — условием (1.6).

2. Однородные и неоднородные плоские волны. Из класса функционально-инвариантных решений можно выделить решения, представляющие собой плоские волны. Для этого в уравнении (1.5) примем $l(\Omega) \equiv 1, m(\Omega) \equiv -\theta = \text{const}, k(\Omega) \equiv \Omega, n(\Omega) \equiv \lambda = \text{const}$. Тогда получим:

$$u_k = f_k(\Omega_k), v_k = g_k(\Omega_k) \quad (2.1)$$

$$\Omega_k = t - \theta x \pm \lambda_k y \quad (k = 1, 2) \quad (2.2)$$

где λ_k — корни уравнения (1.7), которые в данном случае принимают вид:

$$b_m d_m \lambda^4 - p_m(\theta) \lambda^2 + r_m(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

Решения уравнения (2.3) представим в виде:

$$\lambda = \pm \lambda_k(\theta) = \pm \sqrt{(p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}) / 2b_m d_m}, \quad (k = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$p_m = b_m + d_m - l_m^2 \theta^2, \quad r_m = (a_m \theta^2 - 1)(e_m \theta^2 - 1), \quad l_m = a_m b_m + d_m e_m - c_m^2 \quad (2.5)$$

$$q_m = p_m^2 - 4b_m d_m r_m = D_m \theta^4 - 2M_m \theta^2 + B_m^2, \quad D_m = l_m^2 - 4a_m b_m d_m e_m \quad (2.6)$$

$$M_m = (b_m + d_m)N_m - (a_m d_m - b_m e_m)B_m \quad (2.7)$$

$$A_m = a_m - e_m, \quad B_m = b_m - d_m, \quad N_m = A_m B_m - c_m^2 \quad (2.8)$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что при вещественных значениях θ , функции (2.1) выражают однородные и неоднородные плоские волны.

Для построения решений можно использовать как первое, так и второе уравнение (1.6). Однако при некоторых значениях θ коэффициенты одного из уравнений могут одновременно обращаться в ноль и решение, составленное на основе этого уравнения, при таких значениях теряет смысл. Чтобы устранить этот недостаток, в работе [5] предлагается сначала из условий (1.6) составить обобщенное условие, суммируя последние. Решение, составленное на основе обобщенного условия:

$$(a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) f'_k(\Omega_k) + (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) g'_k(\Omega_k) = 0, \quad (2.9)$$

согласно (2.1), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_k &= (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) W_k(\Omega_k) \\ v_k &= -(a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) W_k(\Omega_k) \end{aligned} \quad (k = \overline{1,2}) \quad (2.10)$$

Здесь W_k — ветви произвольной непрерывной дважды дифференцируемой функции W , если коэффициенты при переменных x, y, t в (2.2) вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области переменных x, y, t комплексные величины, то W — аналитическая функция комплексной переменной Ω .

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные волны.

Выбор знака $+$ или $-$ перед λ_k в (2.2) показывает, что плоские волны (2.10) распространяются в противоположных направлениях. Ввиду этого в дальнейшем будем рассматривать волны со знаком $+$ перед λ_k .

3. Классификация плоских волн и характер изменения их скоростей. Уравнения фронтов плоских волн имеют вид:

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y = C = \text{const} \quad (3.1)$$

Фазовые скорости и направления распространения этих волн определяются по нижеприведенным формулам:

$$\begin{aligned} \vec{V}_k &= - \frac{\partial \varphi / \partial t}{|\text{grad} \varphi_k|} \vec{n}_k, \quad \vec{n}_k = \frac{\text{grad} \varphi_k}{|\text{grad} \varphi_k|}, \quad \varphi_k = C - t + \theta x - \lambda_k y \\ \vec{V}_k &= \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda_k^2} \vec{i} - \frac{\lambda_k}{\theta^2 + \lambda_k^2} \vec{j}, \quad \vec{n}_k = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \vec{i} - \frac{\lambda_k}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \vec{j} \\ V_k &= \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}}, \quad \text{tg} \alpha_k = \frac{\theta}{\lambda_k(\theta)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\vec{n}_k$ — единичные векторы нормалей к фронтам волн, V_k — фазовые скорости распространения, $\alpha_k = \angle(-\vec{j}, \vec{n}_k)$, C — произвольная константа [3,4].

Из (3.2) следует, что каждому значению параметра θ из промежутка $(-\infty; \infty)$, для которых величины $\lambda_k(0)$ вещественны, соответствуют плоские однородные волны, фазовые скорости и направления распространения которых определяются формулами (3.2)₂ и (3.2)₁. Ввиду симметрии будем рассматривать интервал $0 \leq \theta < \infty$.

Как известно [2,4], важное значение имеет вопрос о разделении волн на квазипродольные и квазипоперечные или на быстрые и медленные в зависимости от параметра θ при любых вышеуказанных допустимых значениях параметров a_0, b_0, c_0, d_0 и χ (при выполнении (1.3) и при $\chi > 0$) [1].

Исследование этого вопроса связано с изучением свойств корней $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения (2.3). Этот вопрос детально изучен в работе [3], где получен следующий окончательный результат:

1) Параметры a_0, b_0, c_0, d_0 и χ удовлетворяют условиям:

а) $S_m = A_m d_m + c_m^2 > 0$, $K_m = A_m b_m - c_m^2 > 0$, или б) $K_m < 0$, $S_m < 0$.

В этом случае один из корней уравнения $r_m(\theta) = 0$ является нулем функции $\lambda_1(\theta)$, а другой корень — нулем функции $\lambda_2(\theta)$: в случае а) — $\theta_{q_1}^{(m)} = 1/\sqrt{a_m}$ — корень функции $\lambda_1(\theta)$, $\theta_{r_1}^{(m)} = 1/\sqrt{e_m}$ — корень $\lambda_2(\theta)$; в случае б) корни меняются местами; $\lambda_1(\theta)$ вещественны в отрезках $[0, \theta_{q_1}^{(m)}]$. В этом случае корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к первому типу [3].

2) Указанные параметры удовлетворяют условиям $K_m < 0$, $S_m > 0$. Обе величины $\theta_{q_1}^{(m)}$ являются нулями $\lambda_1(\theta)$, а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественные значения в двух отрезках:

$$[0; \theta_{q_1}^{(m)}] \text{ и } [\theta_{q_2}^{(m)}; \theta_{q_1}^{(m)}], \text{ при } A_m > 0; [0; \theta_{q_2}^{(m)}] \text{ и } [\theta_{q_1}^{(m)}; \theta_{q_1}^{(m)}], \text{ при } A_m < 0 \quad (3.3)$$

а функция $\lambda_2(\theta)$ в одном интервале $[0, \theta_{q_1}^{(m)}]$, причем $\lambda_1(\theta_{q_1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q_1}^{(m)}) = \lambda^*$, где $\theta_{q_1}^{(m)}$ — корень уравнения $q_m(\theta)$ и определяется следующим образом:

$$\theta_{q_1}^{(m)} = \sqrt{(M_m + (-1)^k \sqrt{\Delta_m}) / D_m}, \quad \Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4b_m d_m c_m^2 N_m \quad (3.4)$$

Такие корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к второму типу.

3) В случае, когда одна из величин K_m или S_m обращается в ноль, то мы имеем дело с переходным случаем между случаями 1) и 2).

4) Случай $A_m = 0$ является особым. Здесь $\lambda_k(\theta)$ вещественны в $[0; \theta_{q_1}^{(m)}]$, причем в двойной точке $\theta_{q_1}^{(1)} = \theta_{q_2}^{(1)}$ этого отрезка $\lambda_1(\theta)$ обращается в ноль; а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. Это случай конической рефракции.

Здесь в направлении магнитного поля $\vec{H}_0$ скорости волн совпадают и имеется одна волна с любыми смещениями вида (2.1) [2].

Далее в силу симметрии рассматриваются случаи $m = 1$ и $m = 3$.

Теперь рассмотрим поведение функций $\alpha_k(\theta)$ и $V_k(\theta)$. Найдем производные этих функций в интервалах вещественности корней $\lambda_k(\theta)$.

Согласно (3.2)₀, (3.2)₁ и (2.3) будем иметь:

$$\begin{aligned} (ig\alpha_k)' &= \frac{\varphi_k(\theta)}{2b_m d_m \lambda_k^3(\theta)}, \quad V_k' = -\frac{\theta V_k^3(\theta)}{2b_m d_m} \Psi_k(\theta) \\ \varphi_k &= b_m + d_m + (-1)^k \frac{B_m^2 - M_m \theta^2}{\sqrt{q_m(\theta)}} \\ \varphi_k' &= -(-1)^k 8b_m d_m c_m^2 \theta^3 N_m / \sqrt{q_m(\theta)} \\ \Psi_k &= 2b_m d_m - l_m + (-1)^k (D_m \theta^2 - M_m) / \sqrt{q_m(\theta)} \\ \Psi_k' &= (-1)^k 8b_m d_m c_m^2 \theta N_m / \sqrt{q_m^3(\theta)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Пусть $K_m > 0$. Тогда, $A_m > 0, S_m > 0$, а N_m может принимать значение любого знака. Согласно [3, табл.2], функции $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ вещественны соответственно в следующих интервалах и обращаются в нуль на концах этих отрезков:

$$0 \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(m)}, 0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(m)} \quad (\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)}) \quad (3.6)$$

Пусть $N_m > 0$. Из (3.5)₄ следует, что $\varphi_1' > 0$, $\varphi_2' < 0$, т.е. функция φ_1 возрастает, а φ_2 убывает. Далее, согласно (2.8) и (1.2) имеем:

$$B_1 = B_0 + \chi > 0, B_2 = B_0 + \chi > 0 \quad (3.7)$$

Учитывая $A_m > 0, S_m > 0$ и (3.7), из (3.5)₃ получаем:

$$\varphi_1(0) = 2d_m > 0, \varphi_2(\theta_{r2}^{(m)}) = 2b_m d_m A_m K_m^{-1} > 0$$

Отсюда следует, что в (3.6) правые части (3.5) принимают положительные значения и поэтому $\lg \alpha_k(\theta)$ возрастает от нуля до бесконечности. Поэтому углы $\alpha_k(\theta)$ в (3.6) возрастают от 0 до $\pi/2$:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \quad (3.8)$$

Пусть $N_m = 0$. Согласно (3.5)₁, (3.5)₃ и (3.5)₄ имеем $\varphi_1'(\theta) = 0$, $\varphi_k(\theta) = b_m + d_m = \text{const} > 0$, $(\lg \alpha_k)'_0 > 0$. Поэтому в отрезках (3.6) углы $\alpha_k(\theta)$, монотонно возрастая, пробегают отрезки (3.8).

Пусть выполняется условие $N_m < 0$. Согласно (3.5)₃ и (3.5)₄, φ_2 возрастает, а φ_1 убывает. Кроме того, в силу $A_m > 0, S_m > 0$ и (3.6) имеем: $\varphi_1(\theta_{r1}^{(m)}) = 2b_m d_m A_m S_m^{-1} > 0, \varphi_2(0) = 2b_m > 0$. Отсюда и из (3.5)₁ следует, что углы $\alpha_k(\theta)$ в соответствующих отрезках (3.6) возрастают от 0 до $\pi/2$.

Таким образом, при условии $K_m > 0$ значениям θ из промежутков [3.6] соответствуют волны (2.10) с направлениями распространения [3.8].

Из (3.2), (2.3) следует соотношение между фазовыми скоростями

$$V_1(\alpha) > V_2(\alpha), \alpha \in [0; \pi/2] \quad (3.9)$$

Итак, в случае $K_m < 0$ волны (2.10) при $k = 1$ являются быстрыми, а при $k = 2$ — медленными, причем:

$$V_f = V_1(\theta), \theta \in [0; \theta_{r1}^{(m)}]; V_s = V_2(\theta), \theta \in [0; \theta_{r2}^{(m)}] \quad (3.10)$$

Случай 2. Пусть $K_m < 0$. Пусть при этом выполняется также условие $A_m > 0$. Тогда и $S_m > 0$. При этих условиях, т.е. при

$$A_m > 0, S_m > 0, K_m < 0 \quad (3.11)$$

как следует из [3, табл.2], корни $\lambda_k(\theta)$ принадлежат второму типу, причем $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественные значения в двух отрезках:

$$0 \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(m)}, \theta_{r2}^{(m)} \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(m)} \quad (\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)}) \quad (3.12)$$

обращаясь в ноль в конце первого и в начале второго отрезков; функция же $\lambda_2(\theta)$ вещественна только в $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$, где она не равна нулю. Кроме того, т.к. $q_m(\theta_{q1}^{(m)}) = 0$, то верно условие $\lambda_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q1}^{(m)})$. Представляя N_m из (2.8) в виде $N_m = K_m - d_m A_m$, замечаем, что при (3.11) выполняется условие $N_m < 0$. Так как имеют место условия $A_m > 0, S_m > 0, N_m < 0$, то на основании результатов случая 1, заключаем, что когда θ изменяется в первом отрезке (3.12), то угол $\alpha_1(\theta)$ возрастает от 0 до $\pi/2$, а когда θ пробегает интервал $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$, то угол $\alpha_2(\theta)$, возрастая, меняется от 0 до значения $\alpha_2(\theta_{q1}^{(m)}) < \pi/2$. При $N_m < 0$ функция $\varphi_1(\theta)$ убывает, и т.к. при $K_m < 0$ выполняется условие $\varphi_1(\theta_{r2}^{(m)}) = -2b_m d_m |K_m|^{-1} < 0$, то правая часть (3.9) при $k=1$ отрицательна во втором отрезке (3.12) и поэтому угол $\alpha_1(\theta)$ в этом интервале убывает от $\pi/2$ до значения $\alpha_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)})$.

Итак, при $A_m > 0, K_m < 0$, значению θ из промежутка $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $0 \leq \alpha_1(\theta) \leq \pi/2$. Значениям θ из промежутка $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $0 \leq \alpha_2(\theta) \leq \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)}) = \alpha_1(\theta_{q1}^{(m)})$. Наконец, значениям θ из промежутка $\theta_{r2}^{(m)} \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $\pi/2 \geq \alpha_1(\theta) \geq \alpha_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)})$. Теперь можно проверить, что

$$V_f(\alpha) > V_s(\alpha), \alpha \in [0; \pi/2] \quad (3.13)$$

$$V_f(\alpha) = V_1(\alpha_1(\theta)), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}], V_f(\alpha) = \begin{cases} V_2(\alpha_2(\theta)), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}] \\ V_1(\alpha_1(\theta)), \theta \in [\theta_{r2}^{(m)}; \theta_{q1}^{(m)}] \end{cases} \quad (3.14)$$

Следовательно, в случае $A_m > 0, K_m < 0$, волны (2.10) при $k=1$ в $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ являются быстрыми, а при $k=2$ в $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ и при $k=1$ в $\theta_{r2}^{(m)} \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ являются медленными. Скорости быстрых и медленных волн определяются по (3.2) и (3.14), а их направления — по (3.2), причем:

$$\alpha = \alpha_1(\theta), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}] \quad \text{[для быстрых волн]}, \quad (3.15)$$

$$\alpha = \alpha_2(\theta), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}]; \alpha = \alpha_1(\theta), \theta \in [\theta_{r2}^{(m)}; \theta_{q1}^{(m)}] \quad \text{[для медленных волн]}. \quad (3.16)$$

Пусть теперь, при $K_m < 0$ выполняется условие $A_m = 0$, что возможно только при $m=1$. Согласно [3, табл.2], функции λ_k в этом случае вещественны в отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(1)}$, причем функция $\lambda_1(\theta)$ обращается в ноль в двойной точке $\theta = \theta_{r2}^{(1)} = \theta_{q1}^{(1)} = 1/\sqrt{a_0}$, а функция $\lambda_2(\theta)$ нигде не

обращается в ноль. Это — случай конической рефракции [3]. Разделение волн на быстрые и медленные осуществляется так, как в случае (3.11). Но, в отличие от указанного случая, здесь $\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}$, вследствие чего по направлению магнитного поля $\vec{H}_0$, магнитоупругие волны распространяются с одной и той же фазовой скоростью:

$$V_f(\pi/2) = V_s(\pi/2) = \sqrt{a_1} = \sqrt{a_0}.$$

Наконец рассмотрим случай $K_1 < 0$, $A_1 < 0$. Предположим сначала, что выполняется также условие $S_1 > 0$. Тогда, согласно [3, табл.2], функция $\lambda_2(\theta)$ вещественна в отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(1)}$, а функция $\lambda_1(\theta)$ — в отрезках $0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(1)}$ и $\theta_{r1}^{(1)} \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(1)}$, где $\lambda_1(\theta_{q1}^{(1)}) = 0$, $\lambda_1(\theta_{q1}^{(1)}) - \lambda_2(\theta_{q1}^{(1)}) > 0$.

Отсюда следует, что этот случай аналогичен случаю $K_1 < 0$, $A_1 < 0$. Аналогия следует понимать в том смысле, что разделение волн на быстрые и медленные происходит одинаковым образом. Соответствующие результаты можно получить из (3.13)–(3.16) при помощи взаимозамены $\theta_{r1}^{(1)}$ и $\theta_{q1}^{(1)}$.

Далее, на основании [3, табл.2] легко заметить, что случай $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 < 0$ аналогичен случаю $K_1 > 0$, $A_1 > 0$, $S_1 > 0$. Только следует в (3.9) и (3.10) произвести вышеуказанную замену.

$K_m = 0$ или $S_m = 0$ являются переходными между вышеприведенными случаями.

Таким образом, разделение магнитоупругих волн (2.10) на быстрые и медленные зависит от типа корней $\lambda_k(\theta)$, причем, когда корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к первому типу, то разделение волн совершается формулами (3.9) и (3.10), если же корни $\lambda_k(\theta)$ второго типа, то разделение волн совершается формулами (3.13) и (3.14).

Отметим следствие, связанное с изменением знака величины A_1 в зависимости от величины магнитного поля $\vec{H}_0$. При $0 < \chi < \chi_A^{(1)}$ ($A_1 \geq 0$) в направлении оси Ox (параллельно $\vec{H}_0$) медленные волны распространяются со скоростью $V_s = \sqrt{e_1(\chi)}$. В дальнейшем, с возрастанием напряженности магнитного поля $\chi \geq \chi_A^{(1)}$ ($A_1 \leq 0$) медленные волны распространяются с постоянной скоростью $V_s(\chi) = \sqrt{a_0} = \text{const}$. Для быстрых волн картина их распространения противоположна: при $\chi \leq \chi_A^{(1)}$ быстрые волны распространяются с постоянной скоростью $V_f(\chi) = \sqrt{a_0} = \text{const}$, а при $\chi \geq \chi_A^{(1)}$ — со скоростью $V_f(\chi) = \sqrt{e_1} \geq \sqrt{a_0}$, которая возрастает от значения $\sqrt{a_0}$ до ∞ . Отсюда следует, что быстрые волны при $\chi < \chi_A^{(1)}$ представляют собой продольные волны, а медленные — поперечные. Если

же $\chi > \chi_A^{(1)}$, то имеем обратную картину. Отсюда следует также, что при $\chi < \chi_A^{(1)}$ продольные волны распространяются быстрее, чем поперечные. В случае же $\chi > \chi_A^{(1)}$ поперечные волны распространяются быстрее продольных, что обычно невозможно при распространении чисто упругих волн. В случае $\chi = \chi_A^{(1)}$ продольные и поперечные волны распространяются с одинаковой скоростью, причем это разделение здесь формально — имеется одна волна, в которой вектор перемещения $\vec{u}$ может иметь любое направление относительно $\vec{H}_0$ и любую величину (случай колической рефракции).

Перейдем к исследованию на экстремумы фазовых скоростей внутри отрезков вещественности корней $\lambda_k(\theta)$.

Критические точки по экстремуму скоростей $V_k(\theta)$, согласно (3.10), определяются из уравнения:

$$v_\pi(\theta) \equiv N_z D_\pi \theta^4 - 2N_0 M_\pi \theta^2 + N_0 B_\pi^2 - N_\pi c_\pi^2 = 0 \quad (3.17)$$

Выясним, при каких условиях решения уравнения (3.17) будут экстремальными точками для функций $\lambda_k(\theta)$.

Сначала рассмотрим случай продольного магнитного поля ($m = 1$). Согласно (3.5)₂ и работе [2, (3.9), (3.12), (3.22)] имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= 2d_0 B_1^{-1} (B_0 B_1 - c_1^2), \Psi_2(0) = -2b_1 B_1^{-1} (A_0 B_1 - c_1^2) \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) &= -2b_1 d_1 S_1^{-1} (A_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } A_1 > 0 \\ \Psi_2(\theta_{r2}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 K_1^{-1} (B_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } K_1 > 0 \\ \Psi_1(\theta_{r2}^{(1)}) &= -2b_1 d_1 |K_1|^{-1} (B_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } K_1 < 0, A_1 > 0 \\ \Psi_1(\theta_{q1}^{(1)}) &= +\infty, \Psi_2(\theta_{q1}^{(1)}) = -\infty \text{ при } K_1 < 0 \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 c_1^{-1} > 0 \text{ при } A_1 = 0 (\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}) \\ \Psi_1(\theta_{r2}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 |K_1|^{-1} (B_0 |A_1| + c_1^2) > 0 \text{ при } A_1 < 0 \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 S_1^{-1} (A_0 |A_1| + c_1^2) > 0 \text{ при } A_1 < 0, S_1 > 0 \\ \Psi_2(\theta_{r1}^{(1)}) &= -2b_1 d_1 |S_1|^{-1} (A_0 |A_1| + c_1^2) < 0 \text{ при } S_1 < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Пользуясь обычными методами математического анализа, на основании формул (3.2), (3.5)₁, (3.5)₂ исследуем скорости $V_k(\theta)$ на максимум и минимум. Здесь приведем только окончательные результаты:

1) а) Если $N_1 > 0$, $A_0 A_1 - c_1^2 \leq 0$, или б) $N_1 > 0$, $B_0 B_1 - c_1^2 \leq 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ в случае а) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае б) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$.

2) Если $N_1 > 0$ и $B_0 A_1 - c_1^2 \leq 0$, то в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ скорость $V_2(\theta)$ возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же выполняется

условие $N_1 > 0$, $B_0 A_1 - c_1^2 > 0$, то в указанном интервале $V_2(\theta)$ имеет максимум, причем точка максимума является нулем уравнения (3.17).

3) Если $N_1 = 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ монотонно возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$.

4) Если $N_1 = 0$ и а) $b_1 - a_1 > 0$, или б) $b_1 - a_1 < 0$, то в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ меняется монотонно, причем в случае а) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае б) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$; если же $b_1 - a_1 = 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в рассматриваемом интервале сохраняет постоянное значение, равное $V_1(\theta) = \sqrt{a_0}$.

5) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и а) $A_0 A_1 - c_1^2 \geq 0$, или б) $B_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ в случае б) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае а) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$.

6) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и $A_0 A_1 - c_1^2 < 0$, $B_0 B_1 - c_1^2 < 0$ то в $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ имеет точку максимума, в которой $v_1(\theta) = 0$.

7) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и а) $A_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(1)}$ монотонно возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же б) $A_0 B_1 - c_1^2 < 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в указанном интервале имеет точку минимума, в которой $v_1(\theta) = 0$.

8) Если $K_1 < 0$, $A_1 \geq 0$ (тогда и $N_1 < 0$), то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ ведет себя как в случае $N_1 < 0$, $K_1 > 0$, а в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ убывает, причем $V_1(0_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$.

$$V_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \sqrt{(2b_1 d_1)^{-1} [b_1 + d_1 + \theta_{q1}^{(1)2} (2b_1 d_1 - l_1)]}.$$

9) Если $K_1 < 0$, $A_1 \geq 0$ и а) $A_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{q1}^{(1)})$ возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{q1}^{(1)}) = V_1(\theta_{q1}^{(1)})$; если же б) $A_0 B_1 - c_1^2 < 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в этом интервале имеет точку минимума, которая является решением уравнения (3.17).

10) Если $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 > 0$ а) $B_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же б) $B_0 B_1 - c_1^2 < 0$, то она в этом интервале имеет максимум, причем точка максимума определяется из уравнения (3.29).

11) Если $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 > 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в $(\theta_{r1}^{(1)}, \theta_{q1}^{(1)})$ убывает, причем $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, $V_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \sqrt{(2b_1d_1)^{-1}[b_1 + d_1 + \theta_{q1}^{(1)2}(2b_1d_1 - l_1)]}$; а скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ меняется, как в случае $K_1 < 0$, $A_1 > 0$.

12) Если $S_1 < 0$ (тогда и $N_1 < 0$, $A_1 < 0$, $K_1 < 0$), то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ меняется, как в случае 10), а скорость $V_2(\theta)$ меняется в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ так же, как в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ случая $K_1 > 0$, $N_1 < 0$.

Перейдем к рассмотрению случая поперечного магнитного поля ($m = 3$). В этом случае критические точки определяются выражениями

$\theta_1^{(3)} = \sqrt{(B_3 - c_3)/[a_3b_3 - (c_3 + d_3)^2]}$, $\theta_2^{(3)} = \sqrt{(B_3 + c_3)/[a_3b_3 - (c_3 - d_3)^2]}$ причем точка $\theta_1^{(3)}$ является критической для функции $V_1(\theta)$, а точка $\theta_2^{(3)}$ — для функции $V_2(\theta)$, а вместо формулы (3.30) имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= 2d_3B_3^{-1}(B_3 + c_3)(B_0 - c_0), \Psi_2(0) = -2b_3B_3^{-1}N_3 \\ \Psi_1(\theta_{r2}^{(3)}) &= -2b_3d_3|K_3|^{-1}N_3 \text{ при } K_3 < 0, \Psi_1(\theta_{q1}^{(3)}) = +\infty, \Psi_2(\theta_{q1}^{(3)}) = -\infty \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(3)}) &= -2b_3d_3S_3^{-1}(A_3 + c_3)(A_0 - c_0), \Psi_2(\theta_{r2}^{(3)}) = 2b_3d_3K_3^{-1}N_3 \text{ при } K_3 > 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Согласно (3.20), (3.5) и (3.19) приходим к заключению:

1) Если $N_3 > 0$ и а) $A_0 - c_0 \leq 0$ или б) $B_0 - c_0 \leq 0$, то $V_1(\theta)$ в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$ при а) убывает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$, а при б) возрастает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$; а если $A_0 - c_0 > 0$, $B_0 - c_0 > 0$, то $V_1(\theta)$ в точке $\theta_1^{(3)} \in (0, \theta_{r1}^{(3)})$ имеет минимум:

$$V_1(\theta_1^{(3)}) = \sqrt{\frac{a_3b_3 - (c_3 + d_3)^2}{A_3 + B_0 - 2c_0}}, \alpha_1(\theta_1^{(3)}) = \arctg \left(\frac{B_0 - c_0}{A_0 - c_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

2) Если $N_3 > 0$, то в точке $\theta_2^{(3)} \in (0, \theta_{r2}^{(3)})$ $V_2(\theta)$ имеет максимум:

$$V_2(\theta_2^{(3)}) = \sqrt{\frac{a_3b_3 - (c_3 - d_3)^2}{A_0 + B_0 - 2c_0}}, \alpha_2(\theta_2^{(3)}) = \arctg \left(\frac{B_3 + c_3}{A_3 + c_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

3) Если $N_3 = 0$ и а) $b_0 < a_0$ или б) $b_0 > a_0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$, $V_1(\theta)$ в случае а) убывает, а в случае б) возрастает, причем $V_1(0) = \sqrt{b_3}$, $V_1(\theta_{r1}^{(3)}) = \sqrt{a_3}$; если же $b_0 = a_0$, то $V_1(\theta)$ не меняется и равна $V_1(\theta) = \sqrt{a_3}$.

4) Если $N_3 = 0$, то $V_2(\theta)$ в $(0, \theta_{r2}^{(3)})$ постоянна и равна $\sqrt{d_0}$.

5) Если $N_3 < 0$, $K_3 \geq 0$ и а) $B_0 - c_0 \geq 0$ или б) $A_0 - c_0 \geq 0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$, $V_1(\theta)$ при а) убывает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$, а при б) возрастает от $\sqrt{b_3}$ до

$\sqrt{a_3}$; а если $A_0 - c_0 < 0$, $B_{11} - c_0 < 0$, то в точке $\theta_1^{(3)} \in 0 \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(3)}$, $V_1(0)$ имеет максимум, причем $V_1(\theta_1^{(3)})$, $\alpha_1(\theta_1^{(3)})$ определяются формулами (3.20).

6) Если $N_3 < 0$, $K_3 \geq 0$, то $V_2(\theta)$ в точке $\theta_2^{(3)} \in 0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(3)}$ всегда имеет минимум, причем имеют место формулы (3.21).

7) Если $K_3 < 0$, (тогда и $N_3 < 0$), то функции $V_i(\theta)$ в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$ описывается как при $N_3 < 0$, $K_3 > 0$, а в $(\theta_{r2}^{(3)}, \theta_{q1}^{(3)})$ она убывает от $\sqrt{d_0}$ до $V_1(\theta_1^{(3)})$, а $V_2(\theta)$ в точке $\theta_2^{(3)} \in 0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(3)}$ имеем минимум, причем $V_2(0) = \sqrt{d_0}$, $V_2(\theta_{q1}^{(3)}) = V_1(\theta_{q1}^{(3)})$.

Отсюда можно получить результаты для изотропной среды [2].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля. // Механика, междуз. сб. науч. трудов, вып.3, Ереван, 1984, С. 32-42.
2. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах. // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1974, Т. 27, №5, С. 37-46.
3. Даноян З.Н. К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред. // Механика, уч. записки ЕГУ, 1984, №1, С. 52-61.
4. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963, №3, С. 391-396.
5. Осипов И.О. К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред. // Изв. РАН. МТТ, 1999, №4, С.102-112.
6. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. // ПММ, 1961, Т.25, Вып. 5, С.885-896.
7. Соболев С.А. Некоторые вопросы распространения колебаний. — В кн. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.-Л.: ОНТИ, 1937, С. 468-617.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.06.2003

УДК 539.5

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТАНДАРТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ДЛЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВ

Багдоев А.Г., Оганян Г.Г., Шекоян А.В.

Ա.Գ. Բագդոև, Գ.Գ. Օհանյան, Ա.Վ. Շեկոյան

Էլեկտրոնահղորդիչ հեղուկով հագեցած գրունտների համար ոչ սովորական գծայնություն ունեցող էվոլյուցիոն հավասարման անալիտիկ մի քանի լուծումների մասին

Դիտարկված են հեղուկով հագեցած էլեկտրահաղորդիչ գրունտի համար ոչ սովորական ոչ գծայնություն պարունակող էվոլյուցիոն հավասարման անալիտիկ ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների յայն դասեր:

A.G. Bagdov, G.G. Oganyan, A.V. Shekoyan

On some Analytic Solutions of Evolutionary Equation with Nonstandard Nonlinearity for Electroconducting Fluid Saturated Solids

Рассматривается широкий круг аналитических точных и приближенных решений эволюционного уравнения для электропроводящих жидконасыщенных грунтов с нестандартной нелинейностью. Показано, что в недиспергирующей диссипативной среде могут быть солитнообразные волны.

Волновые процессы в жидконасыщенных грунтах описываются системой уравнений для твердой и жидкой фаз и уравнений Максвелла [1-3]. Для описания поведения нелинейных волн в таких сложных средах из исходной системы выводится нелинейное эволюционное уравнение [4,5] с нестандартной нелинейностью. Исследование такого уравнения представляет интерес для широкого класса применений, а именно — в сейсмологии, геофизике, геологии, в частности, при изысканиях полезных ископаемых, электроразведке и так далее.

Эволюционное уравнение имеет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial x} + L \Delta_{\perp} \psi + B \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = G \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) + D \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} + E \frac{\partial \psi^2}{\partial \tau} \quad (1)$$

где x — координата, вдоль которой распространяется волна, $\Delta_{\perp}$ — оператор Лапласа по координатам y, z ; ψ — компонента скорости частиц среды по нормали к поверхности волны. L, B, D, G и E — соответственно коэффициенты дифракции, трения, вязкости, нелинейностей, причем G обусловлен обычной (геометрической, физической и т.д.), а E — концентрационной или токовой нелинейностью. Эти коэффициенты не зависят от координат и времени, но содержат все физические параметры, характеризующие среду, $\tau = x c_1^{-1} - t$, (c_1 — линейная нормальная скорость волны). Как видно из уравнения (1), в рассматриваемом волновом процессе дисперсия отсутствует. Если полагать $L = B = D = E = 0$, то в этом случае уравнение (1) имеет решение типа ударной волны [6].

В данной работе уравнение (1) будет исследовано как приближенными методами, так и посредством точного частного решения. Так как в

природе могут реализоваться ситуации, когда проявляется только токовая или только физическо-геометрическая нелинейности или обе нелинейности совместно, уравнение (1) будет исследовано для каждого случая в отдельности.

Итак, предположим, что $G \neq 0$, $E \neq 0$. Тогда уравнение (1) при $L = D = 0$ имеет точное решение ψ_0 , которое после ввода переменной

$\xi = -\frac{\tau}{G}$ имеет следующий вид [6]:

$$\psi_0 = \exp(-Bx + E\xi) f[F_1(\xi) - F_2(x)\psi_0 \exp(-E\xi)] \quad (2)$$

где

$$F_1(\xi) = -\frac{1}{E}[\exp(-E\xi) - 1], \quad F_2 = \frac{1}{B}[\exp(Bx) - 1]$$

$$\psi_0(\xi, 0) = g(\xi), \quad f[F_1(\xi)] = g(\xi) \exp(-E\xi_0)$$

$g(\xi)$ — произвольная функция, которая выбирается таким образом, чтобы функция ψ_0 удовлетворяла некоторым граничным условиям. $\xi = -\tau/c_1$. В силу требования $\psi_0 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ должно быть $B > 0$.

Подобно задачам поршня в гидродинамике можно брать

$$g(\xi) = U_0 H(\xi), \quad H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > 0 \\ 0 & \text{при } \xi < 0 \end{cases} \quad U_0 = \text{const.}$$

Пусть $E < 0$, тогда из (2) следует

$$\psi_0 = \begin{cases} U_0 \frac{\exp(-Bx)}{1 - E\varphi} \left[1 + U_0 \frac{\exp(-Bx)E[\varphi - F_2(x)(1 - E\varphi)]}{1 - E\varphi} \right]^{-1} & \chi > 0 \\ 0 & \chi < 0 \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi = [1 - \exp(-E\xi)]E^{-1}$, $\chi = \varphi - F_2(x)(1 - E\varphi)\psi_0$.

Первое неравенство в (3) можно переписать

$$x < \frac{1}{B} \ln \left[U_0 \frac{\varphi^2 BE(1 - E\varphi)^{-1} + \varphi E + 1}{U_0 + \varphi(U_0 E - B)} \right] \quad (4)$$

Неравенство (4) определяет область переменного x , ограниченную кривой $\varphi(x)$, впереди которой $\psi_0 = 0$, а позади $\psi_0 \neq 0$, то есть $\varphi = F_2(x)(1 - E\varphi)\psi_0$ является фронтом разрыва. Выражение (4) имеет место для $\varphi < U_0(B - EU_0)^{-1}$.

Если $E > 0$, выражение (3) остается в силе, только неравенства из (3) и (4) меняются на обратные.

Приближенное решение уравнения (1) имеет вид [5]

$$\psi = \psi_0 [1 + T(y, z, x, \xi)] \quad (5)$$

где искомая функция T должна удовлетворять условиям

$$1 \gg T \gg \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

тогда, подобно [4], для функции T получится выражение

$$T = \frac{LG\Delta_1\psi_0 + DG^{-2}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial\xi^3}}{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\psi_0\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\right) - E\frac{\partial\psi_0^2}{\partial\xi}}$$

Для определения профиля стационарной волны введем в уравнение (1) переменную $\eta = -\frac{\xi}{aG^2}$, где $\xi = a\tau + by + dz - kx$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$V\frac{d\psi}{d\eta} + B_1\psi = -\psi\frac{d\psi}{d\eta} + D_1\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + E_1\psi^2 \quad (6)$$

$$\text{где } V = \frac{k}{aG} - \frac{L(b^2 + d^2)}{a^2G}, \quad B_1 = aB, \quad D_1 = \frac{D}{aG^2}, \quad E_1 = aE.$$

Если в уравнении (6) положим $D_1 = 0$, то полученное уравнение имеет точное решение ψ_1 :

$$\eta = \frac{1}{aE} \left[A \ln \psi_1 + B_2 \ln \left(\psi_1 - \frac{B}{E} \right) \right] \quad (7)$$

$$\text{где } A = \frac{VE}{a^2GB}, \quad B_2 = 1 - \frac{VE}{a^2GB}.$$

Приближенное решение уравнения (6) снова будем искать в виде (5), где $\psi_0 = \psi_1$, $T = T_1(\eta)$ и удовлетворяет условиям

$$T \gg \frac{dT}{d\eta} \gg \frac{d^2T}{d\eta^2} \quad (8)$$

тогда

$$T_1(\eta) = \frac{D\frac{d^2\psi_1}{d\eta^2}}{\psi_1\frac{d\psi_1}{d\eta} - E_1\psi_1^2}$$

Следует отметить, что из ветвей функции (7) следует брать только те части, которые удовлетворяют граничным условиям, то есть в бесконечности стремятся к нулю.

Уравнение (1) имеет точное частное решение. Перейдем в (1) к координате ξ и введем новую функцию $\varphi_1 = \frac{G}{aD}\psi$, тогда получится

$$\frac{d^2\varphi_1}{a\xi^2} + L_1\frac{d\varphi_1}{d\xi} - M\varphi_1 + N\varphi_1^2 + \varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\xi} = 0 \quad (9)$$

$$\text{где } L_1 = [ak - L(b^2 + d^2)](a^3D)^{-1}, \quad M = \frac{B}{a^2D}, \quad N = E(a^2D)^{-1}.$$

Следуя методу Бэклунда [7, 8], решение уравнения (9) можно записать

$$\varphi_1 = U_2 [1 + \exp(k_1 \xi)]^{-1} + U_3,$$

где $k_1 = \pm(2N - L)$, а функции U_2 и U_3 определяются в ходе решения. И использованный метод дает два точных частных решения:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{2k_1 \exp(k_1 \xi)}{1 + \exp(k_1 \xi)} & \text{при } U_3 = 0 \\ \frac{2k_1 \exp(k_1 \xi)}{1 + \exp(k_1 \xi)} + \frac{M}{N}, & \text{при } U_3 = \frac{M}{N} \end{cases}$$

Полученные функции φ_1 есть сглаженные ударные волны, разница между которыми в постоянных значениях при $\xi = 0$ и $\xi = \pm\infty$.

Теперь приступим к случаю, когда в уравнении (1) $E = 0$, то есть токовая нелинейность не проявляется. Для простоты записи решения уравнения (1) введем обозначения

$$\eta_1 = x_1 + b_1 \xi_1 + d_1 \xi_2 - cx, \quad x_1 = -\frac{x}{G}, \quad b_1^2 = 2LGb^2$$

$$d_1^2 = 2LGd^2, \quad v = DG^2, \quad a = 1, \quad V_1 = -k + \frac{1}{2}(b_1^2 + d_1^2)$$

тогда получим уравнение типа (6) с соответствующими новыми обозначениями. Если в нем полагать $B = 0$, то частное точное решение ψ_2 имеет вид [6]

$$\psi_2 = v_1 - v_2 \operatorname{th} \left(\frac{v_2}{2v} \eta_1 \right)$$

где

$$v_1 = \frac{1}{2} [\psi_2(+\infty) + \psi_2(-\infty)], \quad v_2 = \frac{1}{2} [\psi_2(-\infty) - \psi_2(+\infty)]$$

$$c = v_1 + \frac{b_1^2}{2} + \frac{d_1^2}{2}, \quad \psi_2(-\infty) > \psi_2(+\infty)$$

Функция ψ_2 есть обычное решение сглаженной ударной волны.

В случае $B \neq 0$, аналогично (5), где $T = T_2(\eta_1)$, $\psi_0 = \psi_2$ и T_2 удовлетворяет неравенствам [8], для T_2 получим

$$T_2(\eta_1) = 2Bv \left\{ \left[1 - 3 \operatorname{th}^2 \left(\frac{v_2}{2v} \eta_1 \right) \right] v_2^2 + 2v_1 v_2 \operatorname{th} \left(\frac{v_2}{2v} \eta_1 \right) \right\}^{-1}$$

Для представления о характере кривых $T_2(\eta_1)$ запишем характерные значения

$$T_2(0) = \frac{2Bv}{v_2^2}, \quad T_2(+\infty) = \frac{Bv}{v_2 \psi_2(+\infty)}, \quad T_2(-\infty) = -\frac{Bv}{v_2 \psi_2(-\infty)}$$

$T_2(\eta_1)$ имеет две особенности $\ln\left(\frac{v_2}{2v_1}\eta_1\right) = \frac{v_1}{3v_2} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} + 3}$, в которых фигурная скобка в выражении T_2 превращается в ноль. Кроме окрестностей этих точек всюду T_2 мало.

Теперь рассмотрим случай, когда $G = 0$, а $E \neq 0$: такая ситуация проявляется в сильно проводящих и полупроводниковых средах, когда токовая нелинейность проявляется раньше, чем остальные. Уравнение (1), записанное через координату ξ , имеет вид

$$V_2 \frac{d\psi}{d\xi} + B_1 \psi - E_1 \psi^2 - D_2 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = 0 \quad (10)$$

где $V_2 = -ak + L(b^2 + d^2)$, $D_2 = a^3 D$. Уравнение (10) при $D_2 = 0$ имеет решение

$$\psi_3 = \left[c \exp\left(\frac{B_1}{V_2} \xi\right) + \frac{E_1}{B_1} \right]^{-1}$$

где постоянная интегрирования $c = \frac{1}{\psi_3(0)} - \frac{E_1}{B_1}$, причем при $\frac{E_1}{B_1} > (<) 0$

должно быть $c > (<) 0$ для конечности ψ_3 . Решение ψ_3 описывает сглаженную ударную волну.

Решение уравнения (10), как и выше, будем искать в виде (5), где $\psi_0 = \psi_3$, а $T = T_3(\xi)$, причем последнее удовлетворяет условиям типа (8).

Тогда для T_3 получится

$$T_3(\eta\xi) = -\frac{2D_2 C^2 B_1^2}{E_1 V_2^2} \psi_3$$

Здесь полученное решение верно для всех ξ .

Уравнение (10) имеет точное решение, которое можно получить методом Бэклунда. Полученные этим методом решения справедливы при определенных связях между коэффициентами, причем в данном случае их несколько.

Итак, решения имеют следующий вид:

$$\psi = -\frac{6}{25} \frac{V_2^2}{D_2 E_1} \frac{\exp\left(\frac{2V_2}{5D_2} \xi\right)}{\left[1 + \exp\left(\frac{V_2}{5D_2} \xi\right)\right]^2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} U_3 = 0 & B_1 = -\frac{b}{25} \frac{V_2^2}{D_2} \\ U_3 = \frac{B_1}{E_1} & B_1 = \frac{b}{25} \frac{V_2^2}{D_2} \end{cases}$$

$$\psi = \frac{6}{5} \frac{V^2}{E_1} k_i \left[\frac{1 + (1 + 5k_i D_2 / V_2) \exp(k_i \xi)}{[1 + \exp(k_i \xi)]^2} - 1 \right], \quad i = 1, 2, 3, 4$$

где в случае $U_3 = 0$: при $i = 1$ $B_1 = -\frac{100}{9} \frac{V_2^2}{D_2}$, а при $i = 2$ $B_1 = -\frac{9}{2} \frac{V_2^2}{D_2}$.

в случае $U_3 = \frac{B_1}{E_1}$: при $i = 3$ $B_1 = \frac{100}{9} \frac{V_2^2}{D_2}$ или при $i = 4$ $B_1 = \frac{9}{2} \frac{V_2^2}{D_2}$,

$$K_{1,2} = -\frac{\alpha_{1,2}}{17} - \frac{30}{17} \frac{\beta}{\alpha_{1,2}}, \quad K_{3,4} = -\frac{\alpha_{3,4}}{17} + \frac{30}{17} \frac{\beta}{\alpha_{3,4}}$$

$$\alpha_{1,3}^2 = \mp \frac{100}{9} \beta, \quad \alpha_{2,4}^2 = \mp \frac{9}{2} \beta, \quad \beta = \frac{B_1}{D_2}$$

Все полученные решения, кроме последнего, представляют сглаженные ударные волны с разными асимптотическими значениями, а последние кривые есть солитоноподобные решения.

Интересно отметить, что в отличие от обычных бездисперсионных случаев, когда за счет диссипации получается сглаженная ударная волна, в данном случае получается решение типа солитона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра. 1970. 335с.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solids // J. Acoustic. Soc. Amer. 1956. V.28. P.168-186.
3. Pride S. Governing equations for coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B. 1994. V.50. N21. P.15678-15696.
4. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акуст. ж. 1999. Т.45. №2. С.149-156.
5. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Распространение волнового пучка в вязкоупругом, диспергирующем, нелинейном, предварительно деформированном слое со свободными поверхностями // Изв. РАН. МТТ. 1996. №6. С.93-101.
6. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка. 1991. 198с.
7. Оганян Г.Г. О структурах нелинейных волн в термически релаксирующей газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2002. №2. С.110-119.
8. Кудряшов Н.А. Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса – КдФ. // Докл. АН СССР. 1988. Т.300. №2. С.342-345.

Институт механики
ИАН Армении

Поступила в редакцию
24.03.2003

УДК 393.3

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ
ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ
ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Минасян М.М.

Մ.Մ. Մինասյան

Գազի գերձայնային հոսանքում էլեկտրահաղորդիչ սալի տատանումների հավասարումները
լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ

Աշխատանքում արտածվում են յոնալական գազի գերձայնային հոսանքում էլեկտրահաղորդիչ սալի ծոման տատանումները տարբեր մոտավորությամբ նկարագրող դիֆերենցիալ և ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումները լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Ըստ սալի հաստության էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչների բաշխման օրենքի համար ընդունված է Գ.Ե. Ռադդասարյանի կողմից առաջարկված մոդելը: Սալի վրա ազդող աերոդինամիկական ճնշման համար կիրառվել է սալի ճկվածքից ճնշման տարածական և ժամանակային ոչ յոկալ կախվածության (ոչ "մխոցային") օրենքը: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր:

M.M. Minassian

The Equations of Vibrations of Electrically Conducting Plates in the Supersonic Gas Flow a Transverse
Magnetic Field being Present

В работе выведены дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, описывающие в различных приближениях изгибные колебания электропроводящей пластинки в сверхзвуковом потоке газа в присутствии поперечного магнитного поля. Для распределения составляющих электромагнитного поля по толщине пластинки принята модель, предложенная Г.Е. Багдасаряном. Для выражения аэродинамического давления использован пространственно-временной нелокальный (не "поршневой") закон зависимости давления от прогиба пластинки. Рассмотрены частные случаи.

1. В общей постановке для изгибных колебаний пластинки, находящейся в поперечном магнитном поле и обтекающейся потоком идеального газа, можно исходить из уравнения

$$L[w(x, t)] = M[w(x - \xi, t)], \quad (x = (x_1, x_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)) \quad (1)$$

$$L[w(x, t)] = L_0[w(x, t)] + P[w(x - \xi, t - t')]$$

где $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб пластинки, L_0 – дифференциальный оператор движения пластинки в отсутствии потока и магнитного поля, M и P – функционалы (интегрального типа), зависящие от прогиба и определяемые решением во внешней к пластинке области задач электродинамики и аэродинамики с учетом граничных условий на поверхности пластинки. Основная трудность возникающих задач обусловлена сложностью этих функционалов, которую можно преодолеть путем введения различных упрощений. Эффективными будем считать те упрощения, в результате которых для прогиба получается дифференциальное уравнение с сохранением главных особенностей интегро-дифференциального уравнения (1).

1. Вначале обсудим вопрос о магнитном поле (P). Будем исходить из системы уравнений Г.Е. Багдасаряна [1], выведенной им на основе

линейной зависимости части компонент индуцированного электромагнитного поля от x_1 по толщине пластинки:

$$L[w] = D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2\sigma h^2 H_0}{3c^2} \frac{\partial}{\partial t} (H_0 \Delta w - F) \quad (2)$$

$$F = \frac{3}{hH_0} \iint_{\Sigma} L[w(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, t)] K(r) d\xi_1 d\xi_2 \quad (r = |\xi|) \quad (3)$$

$$K(r) = \int_0^\infty \frac{\rho J_0(r\rho) d\rho}{h^2 \rho^2 + 3h\rho + 3} \quad (4)$$

где $F(x_1, x_2, t)$ — слагаемое поперечной компоненты возмущенного индуцированного магнитного поля, пропорциональное x_1 (об остальных обозначениях см. [2]).

В работе [1] с использованием предположения о малости kh (k — волновое число гармонических волн в бесконечной пластинке) по отношению к единице получено следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) L[w] = \frac{\alpha h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w, \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2} \quad (5)$$

Исследование ряда задач [2] показало, что уравнение (5) действительно отражает главные особенности изгибных колебаний тонких пластин.

Интересно (хотя бы методологически) вывести уравнение (5) из системы (2–4). Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(r) = r \int_0^\infty \frac{\eta J_0(\eta r) d\eta}{\eta^2 + 3\eta + 3} \quad (6)$$

обладающую свойствами

$$\varphi(r) \in D[0, \infty), \quad \varphi(r) \geq 0, \quad \int_0^\infty \varphi(r) dr = 1/3 \quad (7)$$

где D — пространство основных функций на R^1 . Первые два свойства очевидны. Интеграл вычисляется хотя и просто, однако требует больших выкладок с использованием свойств бесселевых функций и интегралов типа Ханкеля-Николсона [3]. В качестве примера приведем частный случай:

$$\int_0^\infty \varphi(r) dr = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r\eta J_0(r\eta) d\eta du}{\eta^2 + b} = \int_0^\infty r dr \int_0^\infty \frac{\eta J_0(r\eta) d\eta}{\eta^2 + b} = \int_0^\infty r K_0(br) dr = 1/b \quad (8)$$

Из условий (7) вытекает следующее [4]:

$$\frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \rightarrow \frac{1}{b} \delta(r) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0 \quad (9)$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция. Тогда для (4) получается

$$K(r) \rightarrow \delta(r)/r \quad \text{при } h/l \rightarrow 0 \quad (10)$$

где l — некоторая характерная длина задачи (длина полуволн изгибных колебаний, линейный размер пластинки и т.д.). Переходя к полярным координатам в интеграле (3) с учетом (10), получается уравнение

$$F = \frac{2\pi}{hH_n} \Delta w \quad (11)$$

выведенное в [1] из упрощенных дифференциальных уравнений. Исключение F из системы (2)-(3) и приводит к уравнению (5).

Обращая оператор $1 + \alpha \partial / \partial t$ в (5) и преобразуя правую часть, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$L[w] = hT_n \Delta w - hT_n \alpha^{-1} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\alpha}\right) \Delta w d\tau + hT_n (F_0 - H_0 \Delta w_0) \exp(-t/\alpha) \quad (12)$$

где F_0 и w_0 — начальные значения соответствующих функций. Во многих задачах их можно считать равными нулю. В задачах же о распространении волн и свободных колебаний можно рассмотреть уравнение:

$$L[w] = hT_n \Delta w - hT_n \beta^{-1} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\alpha}\right) \Delta w d\tau, \quad T_n = H_0^2 / 2\pi \quad (13)$$

где введено безразмерное время $t' = \omega_0 t$ и безразмерный параметр $\beta = \alpha \omega_0$ (ω_0 — частота свободных колебаний пластинки вне поля). Как видно из (13), влияние поперечного магнитного поля на изгибные колебания пластин сводится к появлению мембранных растягивающих усилий и механизму релаксации с характерным временем α . Оценим эти влияния в двух предельных случаях:

1. $\beta = \alpha \omega_0 \gg 1$, т.е. время релаксации намного больше периода колебаний пластинки вне поля. Из (13) следует известное уравнение [5]

$$L[w] = hT_n \Delta w \quad (14)$$

В [2] это приближение названо приближением для идеальных проводников, хотя условие $\beta \gg 1$ несколько шире и включает случай конечных проводников на низкочастотном спектре колебаний. В любом случае магнитное поле только повышает жесткость пластинки.

2. $\beta = \alpha \omega_0 \ll 1$. Это случай слабых проводников или высокочастотного спектра колебаний. Чтобы выделить главные члены в (13), преобразуем интеграл. Имеем

$$L[w] = hT_n \Delta w - hT_n \Delta \int_0^\infty \exp(-\xi) w(t' - \beta \xi) d\xi \quad (15)$$

Разлагая подынтегральную функцию по степеням малого параметра β и удерживая три первых члена, получим

$$L[w] = chT_n \frac{\partial}{\partial t} \Delta w - \alpha^2 hT_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w \quad (16)$$

Как видно из этого уравнения, в данном случае магнитное поле порождает демпфирование и дисперсию, при этом исключается растягивающее усилие. Отметим также, что последний член подобен инерции вращения, однако с противоположным знаком, так что одновременное удержание обоих членов приводит к слагаемому в правой части (16)

$$\left(\frac{2\rho h^3}{3} - \alpha^2 h T_{II} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w \quad (17)$$

Разные представления уравнений (5), (13), (14) и (16) напрашиваются на проведения следующей параллели между свойствами магнитных силовых линий и линейного вязкоупругого тела (механистические взгляды Фарадея на магнитное поле). Если $h\Delta w$ отождествлять с осевой деформацией, $H_0^2/2\pi$ — с модулем Юнга, $L[w]$ — с осевым напряжением, считая α временем релаксации, то уравнения (5) и (13) предстанут аналогами модели Максвелла, уравнение (14) — модели Гука и уравнение (16) без последнего члена — модели ньютоновской вязкой жидкости. Для полного набора не хватает параллели с моделью Больцмана и Кельвина. Например, аналогом последнего будет уравнение

$$L[w] = k_1 h T_{II} \Delta w + k_2 h T_{II} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w \quad (18)$$

где k_1 и k_2 — некоторым разумным образом подобранные коэффициенты, зависящие от параметра β так, что при $\beta \rightarrow \infty$ $k_1 \rightarrow 1$, $k_2 \rightarrow 0$ и, наоборот, при $\beta \rightarrow 0$ $k_1 \rightarrow 0$, $k_2 \rightarrow 1$.

В завершение данного пункта, содержащего обзор известных фактов в несколько другой трактовке, отметим следующее: система (2)–(3) содержит три параметра — h/λ , $H_0^2/2\pi E$, α/ω_0 . Асимптотические разложения по этим параметрам приводят к большому разнообразию приближенных уравнений в зависимости от числа использованных параметров и удержанных членов разложений. Однако не все эти разложения последовательны. В системе (2) и (3) оператор L_0 можно экстраполировать на короткие волны (уточненные теории пластин), однако в уравнении (5) или (12) этого нельзя сделать безоговорочно. Здесь уже все зависит от порядков отношений всех трех параметров. Предположение о постоянстве нормальной составляющей индуцированного магнитного поля и касательной составляющей электрического поля (гипотезы магнитоупругости тонких тел [5]) делает сомнительным (как верно считает Г.Е. Багдасарян) экстраполирование оператора L_0 на короткие волны.

2. Теперь обсудим влияние аэродинамической нагрузки (P).

Как и в случае магнитного поля, здесь также функционал P определяется решением внешней задачи. В наиболее простой постановке будем исходить из линейных уравнений нестационарного сверхзвукового потока идеального газа. Тогда имеем [6]

$$P[w] = F_k^{-1} F_w^{-1} \left| \frac{i \rho_0 a_0 (\omega - U k_1)^2 w(\omega, k_1, k_2)}{\sqrt{(\omega - U k_1)^2 - a_0^2 k^2}} \right|$$

где правая часть представляет обратные преобразования Фурье по координатам x_1, x_2 и времени t , ρ_0, a_0, U — невозмущенные параметры потока. Как видно, и здесь для прогиба получается интегро-дифференциальное уравнение, однако вместо двух безразмерных параметров, характеризующих влияние магнитного поля (α, β), здесь имеется один

безразмерный параметр — число Маха потока $M = U/a_0 > 1$. Вследствие этого всякое упрощение функционала P будет связано с числом Маха потока. Однако здесь сложность совершенно другого характера.

Приняв $M \gg 1$, для давления получается известное поршневое приближение

$$p = \rho_0 a_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что при этом интегро-дифференциальное уравнение вырождается в дифференциальное уравнение того же порядка, что и уравнение без потока. Уравнения (16) или (18) также вырождены. Однако эти вырождения не вносят качественных изменений в динамику пластинки, поскольку не меняют число волн и колебательных мод системы. В случае обтекания число волн и мод в системе пластинка-поток очевидно больше, чем при отсутствии потока. В [7] предложена, в [8] уточнена, а в [9] обобщена нелокальная связь между давлением и прогибом, которая сохраняет количество волн в системе. В обобщенном виде она имеет вид [9]

$$\frac{D_1 p}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D_1}{Dt} \frac{Dw}{Dt} + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w, \quad \frac{D_1}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \quad (20)$$

В работе [10] показано, что в этом приближении для бесконечной пластинки в двумерном сверхзвуковом потоке области устойчивости и флаттерных колебаний с большой точностью совпадают с аналогичными областями, определяемыми точной постановкой (18) для всего диапазона изменения числа Маха, чего нельзя сказать о поршневом приближении (19), верным лишь только при больших числах Маха. В работе [11] показано, что для конечной пластинки приближение (20) выявляет одномодный флаттер при малых числах и двухмодный флаттер — при больших числах Маха, в то время, как "поршневое приближение" выявляет только двухмодный флаттер при больших числах Маха. Это объясняется тем, что приближение (20) сохраняет свойства главной операторной части точного уравнения.

Исключая давление, из системы (5), (20) получим дифференциальное уравнение колебания проводящей пластинки в поперечном магнитном поле

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \frac{D_1}{Dt} \left[L_0[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} \right] + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w \right\} = h T_H \frac{D_1}{Dt} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w \quad (21)$$

которые можно представить и в виде

$$\frac{D_1}{Dt} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \right) \left[L[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} \right] - h T_H \frac{\partial}{\partial t} \Delta w \right\} + \chi \rho_0 a_0^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \right) \Delta w \quad (22)$$

Обращая в уравнении (21) первый операторный множитель, получим

$$\begin{aligned} & \frac{D_1}{Dt} \left[L_0[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} - h T_H \Delta w \right] + (\chi \rho_0 a_0^3 + h T_H \alpha^{-2}) \Delta w = \\ & = h T_H \alpha^{-2} \int_{-\infty}^t \exp \left(-\frac{t-\tau}{\alpha} \right) \left[1 - \alpha (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Delta w d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

которое является обобщением уравнения (13) при наличии потока.

При $\alpha \omega_n \gg 1$ из (23) получим уравнение

$$\frac{D_1}{Dw} \left[L_0[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} - hT_H \Delta w \right] + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w = 0 \quad (24)$$

обобщающее уравнение (14), а при $\alpha \omega_0 \ll 1$ — уравнение

$$\frac{D_1}{Dt} \left[L_0[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} - \alpha hT_H \frac{\partial}{\partial i} \Delta w \right] + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w = 0 \quad (25)$$

обобщающее уравнение (14). Уравнение, обобщающее (18), будет

$$\frac{D_1}{Dt} \left[L_0[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} - hT_H \left(k_1 + k_2 \alpha \frac{\partial}{\partial i} \right) \Delta w \right] + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w = 0 \quad (26)$$

В трех последних уравнениях, обращая оператор D_1/Dt , получим

$$L_0[w] + (***) + \chi \rho_0 a_0^3 \int_{-\infty}^t \Delta w(\lambda, y, \tau) \chi_{i=0-(t-\tau)(0-a_0)} d\tau \quad (27)$$

или

$$L_0[w] + (***) + \frac{\chi \rho_0 a_0^3}{U - a_0} \int_{-\infty}^t \Delta w(\xi, y, \lambda) \chi_{i=0-(t-\xi)(0-a_0)} d\xi \quad (28)$$

где звездочками обозначены слагаемые с $L_0[w]$.

В задаче Коши для дифференциальных уравнений следует учитывать начальные условия для прогиба w и его временных производных, продиктованных оператором L_0 , а также начальное значение функции F для уравнения (2) и начальное значение давления на пластинку для уравнения (20). В случае конечной пластинки к механическим граничным условиям закрепления кромок пластинки следует добавить только одно граничное условие для давления в передней сверхзвуковой кромке пластинки. Для интегро-дифференциальных уравнений следует сместить нижний предел интегральных членов к началам отсчета времени и пространства и при этом добавить слагаемые, определяемые дополнительными граничными и начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Об учете влияния индуцированного электромагнитного поля на колебания проводящих пластин в поперечном магнитном поле // Межвуз. сб. науч. тр. Изд. ЕГУ Механика, 1987. Вып. 6. С. 49-57.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Физматгиз. 1996. 286с.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 825с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1971. 512с.

5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272с.
6. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961. 339с.
7. Белубекян М.В., Минасян М.М. К проблемам флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 1997. Т.52. №4. С.38-45.
8. Минасян М.М., Минасян Д.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т.1. Вып.1. №1. С.49-54.
9. Минасян М.М. О флаттере пластин и оболочек при малых числах Маха сверхзвукового потока газа. / В кн. "Проблемы механики тонких деформируемых тел", (Посвящ. 80-летию академика С.А.Амбарцумяна) Изд. НАН РА. 2002. С.195-200.
10. Минасян Д.М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа. Сравнительный анализ. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №3. С.65-72.
11. Минасян Д.М. Вычисление частот одномерных флаттерных колебаний конечной пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №4. С.26-33.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
24.06.2003

УДК 532.1. 624.04

О СЕЙСМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЕ СООРУЖЕНИЙ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

Мовсисян Л.А., Хачиян Э.Е.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Է.Ե. Խաչիյան

Արտաքին ուժերի կիրառմամբ կառուցվածքների սեյսմիկ պաշտպանության մասին

Ձեռնարկվում է երկրաշարժի ժամանակ առաջացած իներցիայի աղբյուրի հաշվին կառուցվածքներում տարածվող ուժերի շնորհիվ նրանցում առաջացած իներցիոն ուժերի ազդեցությունների չեզոքացման կամ նվազեցման հարցերը: Բերվում է խնդրի ընդհանուր լուծումը: Փնտրվող ուժերի մեծություններն արտահայտվում են կառուցվածքների դինամիկ բնութագրերով, զանգվածների և սպասվող երկրաշարժի ժամանակ զետեղի արագացումների մեծություններով: Ազատության երկու աստիճանի համակարգերի համար ստացված են բոլոր անհրաժեշտ բանաձևերը տարբեր դրվածքների դեպքում՝ երբ խնդիր է դրված չեզոքացնել կառուցվածքներում առաջացող իներցիոն ուժերը կամ տարածման որևէ ձևը (ռեզոնանսից խուսափելու համար): Ցույց է տրվում, որ կառուցվածքի որևէ կետում սեյսմիկ պաշտպանությունը կարելի է իրականացնել միայն մեկ արտաքին ուժի կիրառմամբ:

L.A. Movsisyan, E.E. Khachyan

On the Seismic Protection of Structures by Application of External Forces

Обсуждается возможность уменьшения или нейтрализации влияния сейсмических сил на сооружения. Модель сооружения представляется в виде дискретной системы с произвольным числом степеней свободы, основание которой движется произвольным образом. Внешние силы прилагаются в точках сосредоточенных масс.

1.В работе [1] была сформулирована задача об уменьшении уровня сейсмического воздействия на многоэтажное сооружение путем применения активных внешних сил, прилагаемых в точках сосредоточенных масс (фиг.1). Было показано, что перемещение любой точки $y_k(t)$ ($k=1,2,...,n$) при одновременном действии землетрясения с акселерограммой грунта y_0'' и внешних сил $F_k(t)$ имеет вид

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i} \int_0^t e^{-\frac{\mu\omega_i(t-\tau)}{2}} \left[\eta_{ki} y_0''(\tau) - \eta_{ki} \sum_{j=1}^n C_{ji} F_j(\tau) \right] \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Здесь сохранены обозначения [1,2]:

$$\eta_{ki} = - \frac{C_{ki} \sum_{j=1}^n C_{ji} m_j}{\sum_{j=1}^n C_{ji}^2 m_j}, \quad \eta_{ki}^* = \frac{C_{ki}}{\sum_{j=1}^n C_{ji}^2 m_j} \quad (1.2)$$

C_{ji} – амплитуды свободных колебаний j -ой массы по i -ой форме, ω_i – круговая частота i -ой формы, μ – коэффициент вязкого сопротивления, m_j – масса k -ой точки.

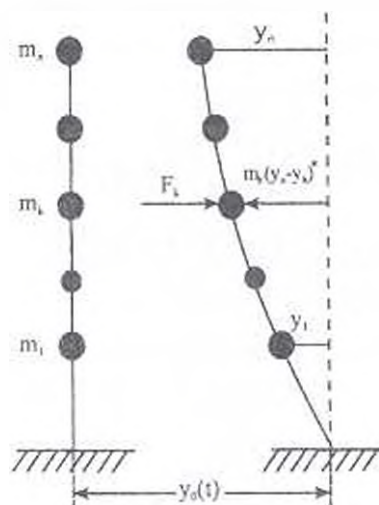
Вопрос поставим следующим образом: с помощью $F_j(t)$ добиться того, чтобы в точках k перемещение (или сейсмическое воздействие)

уменьшилось в α_k раза ($0 \leq \alpha_k < 1$). Условие это запишется

$$\sum_{i=1}^n \frac{\eta_{ki}^*}{\omega_i} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_i (t-\tau)} \sum_{j=1}^n C_{jk} [F_j(\tau) + (\alpha_k - 1) m_j y_0^*(\tau)] \sin \omega_i (t - \tau) d\tau = 0 \quad (1.3)$$

В [1] был рассмотрен частный случай $\alpha_k = \alpha$, тогда система (1.2) будет иметь единственное решение в виде

$$F_k(t) = m_k (1 - \alpha) y_0^*(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$



Фиг. 11

2. Теперь рассмотрим условие (1.3) в общем виде. Наличие вязкого члена (μ) , вносимого при решении поставленной задачи, чисто техническое, к тому же, его наличие благоприятствует поставленной цели, ради краткости этим членом можно пренебречь. Тогда неизвестные $F_j(t)$ должны определить из системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{ki}^*}{\omega_i} \sum_{j=1}^n C_{jk} \int_0^t F_j(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau = \\ = \beta_k \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{ki}^*}{\omega_i} \int_0^t y_0^*(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau, \quad \beta_k = 1 - \alpha_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если (2.1) подвергнуть преобразованию Лапласа, то для определения F_j в изображениях получим систему

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{F}_j = b_k \quad (2.2)$$

$$\text{где} \quad a_{ki} = \sum_{j=1}^n \frac{\eta_{kj}^*}{\omega_i} C_{jk} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n (p^2 + \omega_m^2), \quad b_k = \beta_k y_0^* \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{ki}^*}{\omega_i} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n (p^2 + \omega_m^2) \quad (2.3)$$

a_{kj} и b_k относительно p^2 — многочлены в степени $(n-1)$. $\bar{F}_j$ определяются формулами Крамера —

$$\bar{F}_j(p^2) = \frac{|b_{kj}|}{|a_{kj}|} \quad (2.4)$$

Определитель $|b_{kj}|$ получается из $|a_{kj}|$ заменой j -того столбца столбцом b_k . Каждый из определителей относительно p^2 — многочлены порядка $n(n-1)$. Если из числителя и знаменателя вынести коэффициенты при $p^{2n(n-1)}$ и выделить свободное от p^2 член, то в случае простых корней знаменателя p^2 (2.4) в оригиналах дает

$$F_j(t) = \frac{|b_{kj}^0|}{|a_{kj}^0|} \left[y_0^*(t) + \sum_{r=1}^{n(n-1)} \frac{N(p_r^2)}{p_r M'(p_r^2)} \int_0^t y_0^*(\tau) \sin p_r(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.5)$$

$N(p^2)$ — многочлен порядка $n(n-1)-1$; $M(p^2)$ — многочлен знаменателя после внесения общего $|a_{kj}^0|$, а p_r^2 — его корни.

Проиллюстрируем это для системы с двумя степенями свободы. Тогда

$$|a_{kj}| = \begin{vmatrix} \eta_{11}^* C_{11} p^2 + \omega_m^2 \eta_{11}^* C_{11} & \eta_{11}^* C_{21} p^2 + \omega_m^2 \eta_{11}^* C_{21} \\ \eta_{21}^* C_{11} p^2 + \omega_m^2 \eta_{21}^* C_{11} & \eta_{21}^* C_{21} p^2 + \omega_m^2 \eta_{21}^* C_{21} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$[b_k] = \begin{bmatrix} \beta_1 (\eta_{11} p^2 + \omega_m^2 \eta_{11}) \\ \beta_2 (\eta_{21} p^2 + \omega_m^2 \eta_{21}) \end{bmatrix}$$

Здесь под $\eta_{ik}^* C_{ji}$ понимается, что суммирование производится по i , т.е.

$\eta_{ik}^* C_{ji} = \eta_{i1}^* C_{j1} + \eta_{i2}^* C_{j2}$, а произведение

$$\omega_m^2 \eta_{11}^* C_{j1} = \sum_{m=1}^2 \omega_m^2 \sum_{i=1}^n \eta_{1i}^* C_{ji} = \omega_1^2 \eta_{12}^* C_{j2} + \omega_2^2 \eta_{11}^* C_{j1}$$

$$|a_{kj}^0| = \begin{vmatrix} \eta_{11}^* C_{11} & \eta_{11}^* C_{21} \\ \eta_{21}^* C_{11} & \eta_{21}^* C_{21} \end{vmatrix}, \quad |b_{k1}^0| = \begin{vmatrix} \beta_1 \eta_{11} & \eta_{11}^* C_{21} \\ \beta_2 \eta_{21} & \eta_{21}^* C_{21} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

$$|b_{k2}^0| = \begin{vmatrix} \eta_{11}^* C_{11} & \beta_1 \eta_{11} \\ \eta_{21}^* C_{11} & \beta_2 \eta_{21} \end{vmatrix}$$

Необходимые силы соответственно в точках приложения будут

$$F_1(t) = \frac{|b_{k1}^0|}{|a_{kj}^0|} \left[y_0^* + \sum_{r=1}^2 \frac{N_1(p_r^2)}{p_r M'(p_r^2)} \int_0^t y_0^*(\tau) \sin p_r(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.8)$$

$$F_2(t) = \frac{|b_{k2}^0|}{|a_{kj}^0|} \left[y_0^* + \sum_{r=1}^2 \frac{N_2(p_r^2)}{p_r M'(p_r^2)} \int_0^t y_0^*(\tau) \sin p_r(t-\tau) d\tau \right]$$

Здесь

$$N_1 = B_1 p^2 + B_2, \quad N_2 = D_1 p^2 + D_2, \quad M = p^4 + A_1 p^2 + A_2$$

$$B_1 = \frac{1}{|b_{k1}^0|} \left| \begin{vmatrix} \beta_1 \eta_{1i} & \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{2i} \\ \beta_2 \eta_{2i} & \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{2i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 \omega_m^2 \eta_{1i} & \eta_{1i}^* C_{2i} \\ \beta_2 \omega_m^2 \eta_{2i} & \eta_{2i}^* C_{2i} \end{vmatrix} \right| - A_1$$

$$B_2 = \frac{1}{|b_{k1}^0|} \left| \begin{vmatrix} \beta_1 \omega_m^2 \eta_{1i} & \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{2i} \\ \beta_2 \omega_m^2 \eta_{2i} & \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{2i} \end{vmatrix} \right| - A_2$$

$$D_1 = \frac{1}{|b_{k2}^0|} \left| \begin{vmatrix} \eta_{1i}^* C_{1i} & \beta_1 \omega_m^2 \eta_{1i} \\ \eta_{2i}^* C_{1i} & \beta_2 \omega_m^2 \eta_{2i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{1i} & \beta_1 \eta_{1i} \\ \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{1i} & \beta_2 \eta_{2i} \end{vmatrix} \right| - A_1$$

$$D_2 = \frac{1}{|b_{k2}^0|} \left| \begin{vmatrix} \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{1i} & \beta_1 \omega_m^2 \eta_{1i} \\ \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{1i} & \beta_2 \omega_m^2 \eta_{2i} \end{vmatrix} \right| - A_2$$

$$A_1 = \frac{1}{|a_{kj}^0|} \left| \begin{vmatrix} \eta_{1i}^* C_{1i} & \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{2i} \\ \eta_{2i}^* C_{1i} & \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{2i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{1i} & \eta_{1i}^* C_{2i} \\ \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{1i} & \eta_{2i}^* C_{2i} \end{vmatrix} \right|$$

$$A_2 = \frac{\Delta}{|a_{kj}^0|}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{1i} & \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{2i} \\ \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{1i} & \omega_m^2 \eta_{2i}^* C_{2i} \end{vmatrix}$$

p^2 — корни уравнения

$$p^4 + A_1 p^2 + A_2 = 0 \quad (2.9)$$

Кстати, если число действующих сил больше, чем число масс, для которых осуществляется регулирование, то за счет свободы подбора дополнительных сил можно получить простые выражения для действующих сил (в частности, например, чтобы в выражениях $F_k(t)$ (2.8) не было интегральных членов). Покажем это опять на примере системы с двумя степенями свободы: выбрать $F_2(t)$ такой, чтобы $F_1(t)$ имела простой вид: соответствующее уравнение в изображениях будет

$$(\eta_{1i}^* C_{1i} p^2 + \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{1i}) \bar{F}_1 + (\eta_{1i}^* C_{2i} p^2 + \omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{2i}) \bar{F}_2 = \beta_1 \bar{y}_0'' (\eta_{1i} p^2 + \omega_m^2 \eta_{1i}) \quad (2.10)$$

Отсюда видно, что если $F_2(t)$ подобрать

$$F_2(t) = \frac{\beta_1 \eta_{1i}}{\eta_{1i}^* C_{2i}} \frac{A}{B} y_0''(t) \quad (2.11)$$

то для $F_1(t)$ получим

$$F_1(t) = \beta_1 \frac{\eta_{1i}}{\eta_{1i}^* C_{1i}} \left(1 - \frac{A}{B} \right) y_0''(t) \quad (2.12)$$

Здесь

$$A = \frac{\omega_m^2 \eta_{1i}}{\eta_{1i}} - p_1^2, \quad B = \frac{\omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{2i}}{\eta_{1i}^* C_{2i}} - p_1^2, \quad p_1^2 = \frac{\omega_m^2 \eta_{1i}^* C_{1i}}{\eta_{1i}^* C_{1i}}$$

Представляет также интерес такой случай: одной силой регулировать движение точки, где приложена сила. Для k -той точки из (2.2) имеем

только одно уравнение:

$$\bar{F}_k \sum_{i=1}^n \eta_{ki}^* C_{ki} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n-1} (p^2 + \omega_m^2) = \beta_k \bar{y}_0^* \sum_{i=1}^n \eta_{ki} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n-1} (p^2 + \omega_m^2) \quad (2.13)$$

Для $F_k(t)$ можно записать формулу, аналогичную (2.5). Здесь только число корней знаменателя относительно p^2 будет $n-1$.

Для системы с двумя степенями свободы при регулировании движения точки 1 силой $F_1(t)$ из (2.10) будет

$$F_1(t) = \beta_1 \frac{\eta_{11}}{\eta_{11}^* C_{11}} \left[y_0^* + \frac{A}{p_1} \int_0^t y_0^*(\tau) \sin p_1(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.14)$$

3. Безусловно, практический интерес представляет следующая постановка. Так как при сейсмических воздействиях в зависимости от грунтовых условий и спектра частот свободных колебаний сооружения, наиболее опасными формами колебаний последних являются те формы, частоты которых близки или совпадают с преобладающими частотами основания, то во избежание случая возникновения резонансных колебаний, естественно, с помощью приложенных сил ликвидировать (фильтровать) опасную форму. Как видно из (1.3), если внешние силы $F_k(t)$ подобрать таким образом, чтобы в сооружении не возникало колебание по i -той форме (или снизились α_k раз), то они должны удовлетворять уравнению

$$\sum_{j=1}^n C_{ji} F_j(t) + (\alpha_k - 1) y_0^*(t) \sum_{j=1}^n C_{ji} m_j = 0 \quad (3.1)$$

В этом случае условие (1.4), т.е. уменьшение перемещения k -той массы в α_k раза, автоматически выполняется и для остальных этажей.

Уравнение (3.1) — это одно уравнение с n неизвестными силами $F_j(t)$. Его, в частности, можно решить, принимая

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0 \quad F_k(t) \neq 0 \quad (3.2)$$

Это значит, что фильтрация от сейсмического воздействия только i -той формы колебания можно осуществить и одной внешней силой F_k , приложенной на уровне k -того этажа. Тогда, из (3.1) получим

$$F_k(t) = \frac{(1 - \alpha) \sum_{j=1}^n C_{ji} m_j}{C_{ki}} y_0^*(t) \quad (3.3)$$

В частности, если поставить задачу нейтрализации воздействия землетрясения по первой форме колебаний одной внешней силой, приложенной к последнему этажу (покрытию здания), то эта сила должна быть равной

$$F_n^1(t) = \frac{(1 - \alpha) y_0^* \sum_{j=1}^n C_{ji} m_j}{C_{ni}} \quad (3.4)$$

Для трех-, пяти- и десятиэтажных зданий с равными поэтажными

жесткостями и массами значения $F_n^I(t)$ соответственно будут (значения амплитуд C_n взяты из [3]):

$$F_3^I(t) = 2,245(1 - \alpha)y_0^*(t)m \text{ — для трехэтажного здания}$$

$$F_5^I(t) = 3,521(1 - \alpha)y_0^*(t)m \text{ — для пятиэтажного здания}$$

$$F_{10}^I(t) = 6,693(1 - \alpha)y_0^*(t)m \text{ — для десятиэтажного здания}$$

Аналогичным образом, если от сейсмического воздействия нейтрализовать влияние только второй формы колебания при помощи одной активной силы, расположенной на покрытии тех же зданий, для $F_n^{II}(t)$ будем иметь

$$F_3^{II}(t) = -0,814(1 - \alpha)y_0^*(t)m \quad \text{для } n = 3$$

$$F_5^{II}(t) = -1,192(1 - \alpha)y_0^*(t)m \quad \text{для } n = 5$$

$$F_{10}^{II}(t) = -2,245(1 - \alpha)y_0^*(t)m \quad \text{для } n = 10$$

Как видно из приведенных результатов, для нейтрализации (фильтрации) влияния только второй формы колебания, как и следовало ожидать, потребуется значительно меньше внешней энергии, чем для фильтрации влияния только первой формы колебания. Числовой анализ формулы (3.3) показывает, что наименьшее значение внешней силы при фильтрации сейсмического воздействия только по первой форме оказывается в случае, когда внешняя сила расположена на самом последнем этаже. В случае же фильтрации из сейсмического воздействия только второй формы — при расположении внешней силы на уровне того этажа, амплитуда которого при свободных колебаниях по второй форме колебания имеет наибольшее значение. Для рассмотренных трех-, пяти- и десятиэтажных зданий — это соответственно вторые, вторые и четвертые этажи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачиян Э.Е., Мовсисян А.А. К постановке задачи о сейсмической защите сооружения путем применения активных внешних сил // Докл. НАН Армении. 2003. Т.103. №3. С.221-227.
2. Хачиян Э.Е. Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ереван: "Айастан", 1973. 328 с.
3. Хачиян Э.Е. Некоторые прикладные задачи теории сейсмостойкости сооружений. Ереван: АИСМ, 1963. 127 с.

Институт механики НАН РА
Институт геологических наук НАН РА

Поступила в редакцию
06.06.2003