

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԲՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2003

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ,  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ,  
ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ КОРОТКИХ ВОЛН

Багдаев А.Г.

Ա.Գ. Բաղդև

Կարճ ալիքների հավասարումներով նկարագրվող ոչ զծային ոչ ստացիոնար դիֆրակցիոն խնդիրների լուծման ալգորիթմի մշակումը:

Դիտարկվում է հարթ խնդիրը ճնշման քափանցելիության սեղմելի հեղուկի մեջ և քարակ կոմի քափանցելիությունը հեղուկ կիսատարածության մեջ: Երկու խնդիրներում հետազոտվում է ալիքների շփման կետի շրջակայքը զծային և ոչ զծային դրվածքով:

A.G. Bagdov

Elaboration of algorithm of solution of non-linear unsteady diffraction problems,  
described by short waves equations

Рассматриваются типичные дифракционные волновые задачи: плоская задача о проникании давления в сжимаемую жидкость занимающую полупространство и задача о проникании узкого конуса в жидкое полупространство. В обеих задачах исследуется окрестность точки касания распространяющейся волны с точечной волной. Находится линейное и точное нелинейное решения впереди точечной волны, а затем формулируется задача численного решения нелинейных уравнений коротких волн позади точечной волны с определением высшей ударной волны.

1. Плоская задача о проникании отрицательного избыточного давления в жидкость или положительного в упругую полуплоскость.

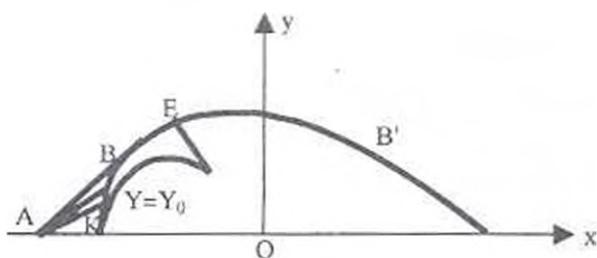
Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего в начальный момент  $t = 0$  в точке  $O$  на поверхности и движущегося по границе жидкости по закону

$$p = \begin{cases} p_1 f\left(\frac{x}{vt}\right), & |x| < vt \\ 0, & |x| > vt \end{cases} \quad (1)$$

где  $f(1) = 1$ ,  $p_1 < 0$ ,  $v > a$  – постоянные, координата  $x$  отсчитывается по границе жидкости,  $a$  – скорость звука невозмущенной жидкости.

Ставится задача определить нелинейное решение в окрестности точки  $B$  касания волн  $AB$  и  $BV$  (фиг. 1). В случае  $p_1 > 0$  эта задача решена аналитически в [1], при этом  $ABV$  является ударной волной и определено распределение давления вдоль  $BV$ . При этом условия на ударной волне удовлетворяются с достаточной точностью. В случае  $p_1 < 0$   $ABV$  является непрерывной волной [2], при этом имеется

висячая ударная волна  $BK$  (фиг. 1), на которой получено аналитически нелинейное решение, которое удовлетворяет не столь точно условиям на  $BK$  [1]. Поэтому следует рассмотреть постановку задачи численного счета нелинейных уравнений для определения точного решения в окрестности  $B$  (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть  $r, \theta$  — полярные координаты.

$\tilde{\varphi}$  — потенциал движения. Тогда можно в случае  $p_1 < 0$  ввести переменные [2]

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{p_1}{\rho_0 a^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = a\gamma\mu, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{r\partial\theta} = a\gamma^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k+1}{2}} v \\ r &= at \left( 1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta \right), \quad \theta - \theta_0 = \gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} Y \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность,  $n$  — показатель адиабаты. Тогда из уравнения для  $\tilde{\varphi}$  в нелинейной задаче в первом порядке по  $\gamma$  получится уравнение коротких волн [2]

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В упругой среде для нормальной скорости продольной волны [1]  $c_n = a + \Gamma u$ , где  $u = \partial \tilde{\varphi} / \partial r$  — нормальная к волне скорость частицы,  $\Gamma < 0$  и в (2) следует заменять  $(n+1)\gamma/2$  на  $-\Gamma a^0$ , где  $a^0$  — начальная скорость частицы в точке  $O$ , причем

$$a^0 = \frac{p_1}{b^2 \rho_0} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{2}{v^2} \right) \frac{1}{F(v^{-1})}, \quad F(v^{-1}) = \left( 2 \frac{1}{v^2} - \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{4}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{v^2}}$$

$a$  — скорость продольных,  $b$  — скорость поперечных волн,  $p_1 > 0$ .

Впереди точечной волны  $BK$  имеет место точное нелинейное решение [2], получаемое методом характеристик



$$\mu_1 = \delta - \frac{Y^2}{2}, \quad v_1 = -\mu_1 Y \quad (4)$$

или для потенциала

$$\varphi_1 = \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2} Y^2 \delta + \frac{Y^3}{8} \quad (5)$$

Решение (4), (5) имеет место до нижней характеристики фиг. 1, где  $Y = Y_1$ , после которой имеется постоянный поток

$$\mu_1 = -1, \quad v_1 = Y, \quad \varphi_1 = -\delta + \frac{Y^2}{2} - \frac{1}{2} \quad (6)$$

Решения (4)-(6) имеют место впереди ударной волны  $KB$ , причем (5) имеет место для  $0 > Y > Y_0$ , а (6) — для  $Y_0 > Y > -2$ , где при

$$Y = Y_0, \quad \mu_1 = -1, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2}.$$

Здесь для определенности выбрана граничная точка  $K$ , для которой  $Y = -2$ . Координаты точки  $B$  [2]

$$Y = 0, \quad \delta = 0, \quad \mu = 0, \quad v = 0, \quad \varphi = 0 \quad (7)$$

Считая, что на ударной волне  $BK$   $Y < 0$ , получим дифференциальные уравнения  $BK$

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1}, \quad 0 > Y > Y_0 \quad (8)$$

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu + 1}, \quad Y_0 > Y > -2$$

На точечной волне  $BE$  фиг. 1 имеет место

$$\delta = 0, \quad \varphi = 0 \quad (9)$$

Формулируется граничная задача в области  $KBEMK$  фиг.1, где введен дополнительный контур  $KME$ , на котором ставится условие перехода в частное точное решение уравнения (3), полученное в [2]

$$\delta = -\frac{1}{2} Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi \quad (10)$$

Поскольку решение этого уравнения для определения  $\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}$  затруднительно, можно вместо него брать линейное решение [2]

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_0 = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y}$$

$$\varphi = \varphi^0(\delta, Y), \quad \varphi^0 = -\frac{Y}{2\pi} \sqrt{-2\delta} - \frac{1}{2\pi} (2\delta - Y^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y} \quad (11)$$

Используя (10), (5), (6), (8) можно получить асимптотические решения на ударной волне  $KB$  для малых  $Y$ :

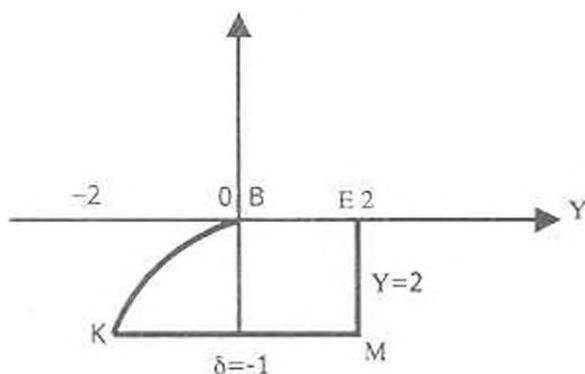
$$\delta = -\frac{1}{3}Y^2, \quad \mu = -\frac{1}{6}Y^2, \quad \mu_1 = -\frac{5}{6}Y^2 \quad (12)$$

и для больших  $-Y > 0$ :

$$\mu = -1 + \frac{3}{\pi^2 Y^2}, \quad \delta = -1 + \frac{3}{2\pi^2 Y^2} \quad (13)$$

Уравнение вспомогательной дуги  $KE$ , на которой задается  $\varphi = \varphi^0(\delta, Y)$  по (11), аппроксимируем в виде ломаной  $KME$  фиг.2:

для  $KM$   $\delta = -1$ ,  $-2 < Y < 2$ , для  $EM$   $Y = 2$ ,  $-1 < \delta < 0$  (14)



Фиг. 2

Решение (12) удовлетворяет с большой точностью условию на ударной волне  $BK$  вблизи точки  $B$ . Отсюда следует, что  $BK$  является ударной волной, что не согласуется с выводом работы [4], где решена аналогичная по математической постановке задача обтекания установившимся сверхзвуковым потоком верха треугольного крыла, при этом расчет ведется не

только вблизи  $B$ , но и во всей области возмущенного движения, причем утверждается, что расчеты показывают на отсутствие ударной волны  $KB$  вблизи  $B$ .

Вероятно, этот выпад получился в связи с тем, что там в нулевом приближении для  $KB$  бралась характеристика, на которой решение непрерывно, т.е. отсутствовала ударная волна.

Схема расчета задачи.

Запишем, следуя [4], [5], конечные разности для сетки  $\delta = h_i$ ,  $Y = 2 + hk$ ,  $h$  — шаг,  $i, k = 1, 2, 3, \dots$

Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \right)_{i,k} = \frac{1}{2h_i} (\varphi_{i+1,k} - \varphi_{i-1,k}) \quad (15)$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\frac{h^2}{h_1^2} (\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k}) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{i,k+1} + \varphi_{i,k-1}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}}{\frac{h^2}{h_1^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) + 1} \quad (16)$$

Решение задачи проводится методом итерации, когда в правую часть подставляется линейное решение (11) в качестве нулевого приближения. При этом учитываются в граничных узлах сетки условия (5), (11), которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } BE, \quad \delta = \delta^0(Y), \quad \varphi = \varphi_1 \text{ из (5), (6) на } KB, \\ \varphi = \varphi^0(\delta, Y) \text{ на } KME, \text{ даваемое (14)} \end{aligned} \quad (17)$$

Для нулевого приближения уравнение ударной волны получается из (12), (13) в виде

$$\delta^0(Y) = -\frac{1}{3} Y^2 - \frac{1}{24} Y^3 \quad (18)$$

После указанных процедур мы получаем первое приближение  $\varphi = \varphi^1(\delta, Y)$ . По найденному  $\varphi^1$  определяется вблизи ударной волны  $KB$

$\mu^1 = \frac{\partial \varphi^1}{\partial \delta}$  по (15), и подставляя его в дифференциальные условия (8) и

интегрируя их, начиная с точки  $Y^0 = -0.2$ ,  $\delta = -\frac{1}{3}(Y^0)^2$ , можно получить уравнение  $KB$  в первом приближении  $\delta = \delta^1(Y)$ .

Далее берутся граничные условия [17] с заменой  $\delta^0(Y)$  на  $\delta^1(Y)$ , подставляя в правую часть (16)  $\varphi = \varphi^1(\delta, Y)$  с учетом (17), можно определить следующее приближение  $\varphi = \varphi^2(\delta, Y)$ . Потом в (8) заменяется

$\mu^1$  на  $\mu^2 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial \delta}$  и интегрированием от точки  $Y^0 = -0.2$  получается

уравнение  $KB$  во втором приближении  $\delta = \delta^2(Y)$  и т.д.

Расчет заканчивается, когда  $\delta^{(n-1)}(Y) = \delta^n(Y)$ ,  $\varphi^{(n-1)}(\delta, Y) = \varphi^n(\delta, Y)$  с нужной точностью. Поскольку  $i, k = 1, 2, \dots, 10$  шаг по  $Y$   $h = -0.4$ , шаг по  $\delta h_1 = -0.1$ , для (8) шаг по  $h = -0.2$ .

В случае, когда нулевое приближение (18) приводит в некоторой итерации к мнимому уравнению ударной волны  $KB$  из (8), следует уравнения (8) отбросить и вместо них брать уравнение характеристики

$KB$  [4], на которой решение непрерывно, т.е.  $\mu = \mu_1$ , причем из уравнения характеристики  $\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2(\delta - \mu)}$  получится:

$$\text{при } 0 > Y > -1, \quad \delta = -\frac{Y^2}{2}, \quad \mu_1 = -Y^2, \quad \mu = -Y^2$$

$$\text{при } Y_2 < Y < -1, \quad \mu_1 = -1, \quad \mu = -1, \quad \delta + 1 = \frac{1}{2}(Y + 2)^2 \quad (18')$$

причем  $\Phi = \Phi_1$  дается (5), (6). При счете в качестве нулевого приближения во всем отрезке  $[0, -2]$  для  $KB$  вместо (18) берется (18'), а в интервале от  $O$  до  $Y_2$  равенства (18'), повидимому, имеют место для всех приближений [4].

Здесь  $Y_2 < -1$  есть некоторая точка на  $KB$ , где решение на  $KB$  становится разрывным, расчет ударной волны  $KB$  в последующих приближениях ведется по формулам (8).

## 2. Движение узкого конуса в сжимаемой жидкости.

Картина движения в задаче проникания узкого конуса раствора  $2\beta$  со сверхзвуковой скоростью  $V$  в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство, дана фиг.3.

Выберем ось  $Ox$  по поверхности жидкости, ось  $Oz$  - вглубь.

Введем полярные координаты  $r = r_1 \cos \varphi$ ,  $z = r_1 \sin \varphi$ .

Методом замены в линейном решении [3], [6] характеристической координаты на нелинейную можно получить решение на ударной волне  $CB$  [2]

$$p = p', \quad \frac{p'}{\rho_0 a^2} = \frac{3}{2}(n+1)\beta^4 M^n (M^2 - 1)^{-1}, \quad M = \frac{V}{a} \quad (19)$$

Вводя в окрестности точки  $B$  фиг. 3 безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \Phi - \Phi_0 &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y, \quad p = p' \mu, \quad v_n = a \gamma \mu \\ r_1 &= at + at \frac{n+1}{2} \gamma \delta, \quad v_n = a \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma^2 v, \quad \gamma = \frac{p'}{\rho_0 a^2} \end{aligned} \quad (20)$$

и

где  $V_n, V_\phi$  есть компоненты скорости частиц по  $r, \phi$ , можно получить [2]

линейное решение вблизи  $B$  позади точечной волны  $BE \left( t - \frac{r}{a} > 0 \right)$

$$\mu = c \left( Y + \sqrt{Y^2 - 2\delta} \right), \quad c = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad (21)$$

Вводя потенциал  $\phi$  по формуле  $\mu = \frac{\partial \phi}{\partial \delta}$ , интегрируя (21) при условии  $\delta = 0, \phi = 0$ , можно получить в линейной задаче  $\phi = \phi^0(\delta, Y), \delta < 0$ ,

$$\phi^0 = c\delta Y - c(Y^2 - 2\delta)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} + \frac{c}{3}|Y|^3 \quad (22)$$

В случае  $\delta > 0$ , т.е. впереди волны  $BE$  линейное решение имеет вид [6], [2]

$$\mu = 2c\sqrt{Y^2 - 2\delta}, \quad v = -2c\sqrt{Y^2 - 2\delta}Y \quad (23)$$

Уравнения коротких волн в осесимметричном случае [6], [2]

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \delta} - \delta \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = 0 \quad (24)$$

Уравнение ударной волны  $BC$  вблизи точки  $B$  [1], [6]

$$\delta = \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2} \quad (25)$$

Уравнение нелинейной параболической линии  $BE$  будет

$$\delta = \mu \quad (26)$$

Точка пересечения их  $B$  будет иметь координаты

$$Y_B = 1, \quad \mu_B = 1, \quad \delta_B = 1 \quad (27)$$

Можно найти [1], [2] решение (24), которое для больших  $Y$  переходит в линейное (23), в виде  $\delta > 0$ ,

$$\delta = \frac{Y^2}{2} + 2\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_1^2, \quad v_1 = -Y\mu_1, \quad \mu_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial \delta} \quad (28)$$

$$\phi_1 = \frac{2}{3}\delta - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3}Y^2 - \frac{2}{3}\delta \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{Y^2}{3} - \frac{8}{27}$$

где при определении  $\phi_1$  учтено, что на  $BC$   $\phi_1 = 0$ .

На  $BC$  имеет место (25) и по (28)  $\phi_1 = 0, \mu_1 = 1$ , т.е. решение (28) удовлетворяет всем условиям на  $BC$ , и тем самым является точным.

Следует решать уравнение (24) методом конечных разностей в области  $B'BE MB''$  фиг.3 с учетом граничных условий:

$$\text{на } BE \quad \mu_1 = \delta, \quad \delta = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} Y^2}, \quad \phi = \phi_1 \quad (29)$$

в точке  $B''$   $Y = -2, \delta = 0$ , в точке  $E$   $Y = 2, \delta = 1.5$ , поэтому уравнение  $B'E$  можно взять в виде ломаной  $B'ME$

$$\text{для } B''M \quad \delta = 0, \quad -2 < Y < 2; \text{ для } ME \quad Y = 2, \quad 0 < \delta < 1.5 \quad (30)$$

на которой  $\phi$  берется в виде (22), на ударной волне  $BB''$

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu}, \quad \phi = 0, \quad \mu = \frac{\partial \phi}{\partial \delta} \quad (31)$$

Как в задаче п.1 сначала задается ударная волна  $BB''$   $\delta = \delta^0(Y)$ , и из условий в точке  $B$ :  $Y = 1, \delta = 1$  и в точке  $B''$ :

$Y = -2, \delta = 0$ , можно взять

$$\delta^0(Y) = \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{18} (Y-1)^2 \quad (32)$$

и решается (16), где заменены  $\varphi$  на  $\phi$ ,  $\frac{h^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}$  на  $h^2 \frac{\partial \phi}{\partial \delta}$  и в правую часть

подставляется линейное решение (22) с учетом граничных условий (29)-(32). Таким образом, находится первое приближение  $\phi^1(\delta, Y)$ , далее из (31) находится ударная волна  $BB''$   $\delta = \delta^1(Y)$  и т.д.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Сафарян Ю.С. К расчету ударных волн в дифракционных задачах газодинамики и нелинейной динамической упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №1. С.37-42.
2. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач. // Изв. АН Арм ССР. Механика. Т. XXI. №1. 1968. С.39-56.
3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1981. 303с.
4. Бабаев Д.А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла. // Журнал выш. мат. и мат. физики. 1962. Т.2. №2. С.278-289.
5. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 343с.
6. Багдоев А.Г. Движение конуса в сжимаемой жидкости // Докл. АН Арм ССР. Механика. 1967. Т. XLV. №3. С.101-106.

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СМЕШАННОЙ  
 КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ  
 АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Агаловян Л.А., Асратян М.Г., Геворкян Р.С.

Լ. Ա Աղալովյան, Մ.Գ Հասրաթյան, Ռ Ս Գևորգյան

Փոփոխական լայնության անիզոտրոպ շերտի համար առածականության տեսության  
 ոչ դասական խառը եզրային մեկ խնդրի մասին

Անիզոտրոպ մարմնի առածականության տեսության ներկայի խնդրի հավասարումների ափսոսա-  
 ատոսիկական ինտեյլման միջոցով լուծված է փոփոխական լայնության անիզոտրոպ շերտի համար  
 եզրային խնդիր, երբ նրա մի երկայնական ծայր ազատ է, իսկ հակադիր եզրի վրա տրված են ոչ դասական  
 եզրային պայմաններ: Արտածված են սեկտորնետ բանաձևեր լարումների բեկցողի և տեղափոխումների  
 վեկտորի քաղաղդիչների որոշման համար: Բերված է շերտի լարվածաղեձորմային միճակի վերլու-  
 ծությունը մասնավոր դեպքի համար:

Նաևորը, մասնավորապես, մխտված է մոդելավորելի երկրաչեղևի սեղմվելը Եվրասիական և Արարական  
 սալերի միջև Հայկական Լեռնայինարիի և Կովկասի շրջանում:

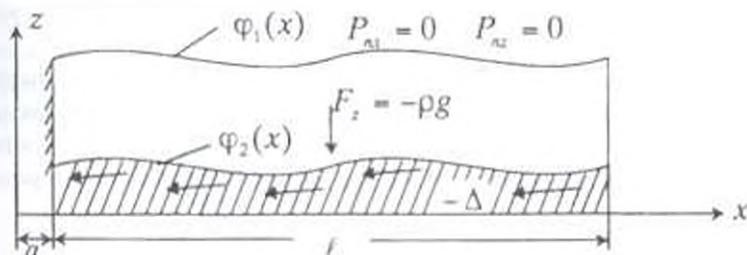
L.A. Aghalovyan, M.G. Asratyan, R.S. Gevorgyan

On one nonclassic mixed boundary-value problem of elasticity theory for anisotrope  
 layers of variable width

Путем асимптотического интегрирования уравнений двумерной задачи теории упругости  
 анизотропного тела, с учетом массовых сил, решена краевая задача для анизотропной  
 полосы переменной ширины, когда один из ее продольных краев свободен от нагрузок, а на  
 другом заданы неклассические условия, не противоречащие граничным условиям краевых  
 задач теории упругости. Выведены рекуррентные формулы для определения компонентов  
 тензора напряжений и вектора перемещения. Проведен анализ напряженно-деформирован-  
 ного состояния для одного частного случая.

Задача, в частности, в некотором приближении моделирует сжатие земной коры между  
 Евразийской и Аравийской плитками в зоне Армянского нагорья и Кавказского региона.

1. Имеем анизотропную полосу переменной ширины, занимающую  
 область  $\Omega = \{x, z : x \in [0, \ell], \varphi_2(x) \leq z \leq \varphi_1(x), \varphi_1(x) - \varphi_2(x) > 0, h \ll \ell\}$ .



Փիգ. 1

где  $h = \sup\{\varphi_1 - \varphi_2\}$ ,  $l$  — характерный продольный размер полосы (фиг. 1)

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы переменной ширины, если ее продольный край  $z = \varphi_1(x)$  свободен от нагрузок

$$\sigma_{jz}(z = \varphi_1(x)) \cos(n, x) + \sigma_{jz}(z = \varphi_1(x)) \cos(n, z) = 0 \quad j = x, z \quad (1.1)$$

а по краю  $z = \varphi_2(x)$  противоположно оси  $OX$  переместилось абсолютно жесткое твердое тело на величину  $\Delta$  за заданный промежуток времени (в частности, за год). Такое перемещение вызывает деформацию поверхности (линии)  $z = \varphi_2(x)$  с компонентами, удовлетворяющими условиям

$$u_x(z = \varphi_2(x)) + \Delta = \frac{U}{\sqrt{1 + \varphi_2'^2}}, \quad u_z(z = \varphi_2(x)) = \frac{U\varphi_2}{\sqrt{1 + \varphi_2'^2}} \quad (1.2)$$

где  $U$  — скольжение упругого тела (полосы) по поверхности абсолютно твердого тела, т.е. по кривой  $z = \varphi_2(x)$ . (Здесь и в дальнейшем точки над буквами означают производные по переменной  $x$ ). Естественно будут возникать также нормальное и тангенциальное напряжения, связанные на  $z = \varphi_2(x)$  согласно закону сухого трения Кулона

$$\sigma_r(z = \varphi_2(x)) = f\sigma_n(z = \varphi_2(x))$$

$$\begin{aligned} \sigma_n(z = \varphi_2(x)) &= \frac{\varphi_2'^2}{1 + \varphi_2'^2} \sigma_{xx}(z = \varphi_2(x)) + \\ &+ \frac{1}{1 + \varphi_2'^2} \sigma_{zz}(z = \varphi_2(x)) - \frac{2\varphi_2}{1 + \varphi_2'^2} \sigma_{xz}(z = \varphi_2(x)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(z = \varphi_2(x)) &= -\frac{\varphi_2}{1 + \varphi_2'^2} \sigma_{xx}(z = \varphi_2(x)) + \\ &+ \frac{\varphi_2}{1 + \varphi_2'^2} \sigma_{zz}(z = \varphi_2(x)) + \frac{1 - \varphi_2'^2}{1 + \varphi_2'^2} \sigma_{xz}(z = \varphi_2(x)) \end{aligned}$$

(где  $f$  — коэффициент сцепления) и как следствие, возникнет общее напряженно-деформированное состояние.

Граничные условия (1.2), (1.3) отличны от классических условий краевых задач теории упругости, однако они непротиворечивы и не нарушают корректность задачи, поскольку фактически являются условиями неполного контакта двух тел.

Граничные условия на поперечных краях полосы не конкретизируются, т.к. здесь решается внутренняя задача полосы, играющая в смысле определения НДС доминирующую роль. В небольшой зоне у поперечных краев возникнет пограничный слой, где все напряжения (и перемещения) равноправны [1-5].



Геодезическая модель зоны коллизии Аравийской и Евразийской плит впервые была построена Маккензи (McKenzie D.P. 1970) [6]. Затем эта модель на основе современных данных спутниковой геодезии, а также специальных геофизических и сейсмологических наблюдений была уточнена и развита С.Ю. Баласаняном [7,8].

Рассматриваемая задача предложена С.Ю. Баласаняном и сформулирована при его непосредственном участии.

Для решения сформулированной задачи в уравнениях плоской задачи теории упругости анизотропного тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_x &= 0 \quad (x, z) \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{zz} + a_{13}\sigma_{xz} \quad (x, z; 1,3) \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= a_{15}\sigma_{xx} + a_{20}\sigma_{zz} + a_{15}\sigma_{xz} \end{aligned} \quad (1.4)$$

переходим к безразмерным координатам  $\xi = x/\ell$ ,  $\zeta = y/h$  и безразмерным перемещениям  $U_x = u_x/\ell$ ,  $U_z = u_z/\ell$ . получаем сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/\ell$  систему уравнений, решение которой ищем в виде асимптотического разложения [1-5]

$$Q = \varepsilon^{\lambda_0} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (1.5)$$

Считая, что вклад объемных сил соизмерим со вкладом поверхностных воздействий, компоненты объемных сил должны иметь асимптотику

$$F_x = \ell^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s-1} F_x^{(s)}(\xi, \zeta), \quad F_z = \ell^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s-2} F_z^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (1.6)$$

Подставив (1.5) в преобразованную систему (1.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в левых и правых частях, получим непротиворечивую систему уравнений относительно искомым коэффициентов  $Q^{(s)}$  лишь при

$$\chi_{\sigma_{xx}} = \chi_{\sigma_{zz}} = \chi_{\sigma_{xz}} = -1, \quad \chi_{\sigma_{xx}} = \chi_{\sigma_{xz}} = 0 \quad (1.7)$$

Решив эту непротиворечивую систему, получим рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения полосы.

Возвращаясь к размерным координатам и размерным перемещениям, рекуррентные расчетные формулы принимают вид

$$\begin{aligned} R &= \sum_{s=0}^{\infty} R^{(s)}(x, z) \\ \sigma_{xx}^{(s)} &= \sigma_{zz}^{(s)}(x) + \sigma_{xz}^{(s)}(x, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z^2}^{(s)} &= \frac{1}{a_{11}} \dot{u}_{z0}^{(s)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_{z^2}^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{z^2}^{(s)} &= \sigma_{z0}^{(s)}(x) - \frac{z}{a_{11}} \dot{u}_{z0}^{(s)} + z \frac{a_{13}}{a_{11}} \sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_{z^2}^{(s)}(x, z) \\
u_z^{(s)} &= u_{z0}^{(s)}(x) + u_{z^2}^{(s)}(x, z) \\
u_z^{(s)} &= u_{z0}^{(s)}(x) + z B_{33} \sigma_{z0}^{(s)} + z \frac{a_{13}}{a_{11}} \dot{u}_{z0}^{(s)} + u_{z^2}^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{z^2}^{(s)} &= - \int_0^z \left( \frac{\partial \sigma_{z^2}^{(s-2)}}{\partial x} + F_z^{(s)} \right) dz \\
\sigma_{z^2}^{(s)} &= \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial u_{z^2}^{(s)}}{\partial x} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \sigma_{z^2}^{(s)} - \frac{a_{15}}{a_{11}} \sigma_{z^2}^{(s-1)} \\
\sigma_{z^2}^{(s)} &= \int_0^z \left( \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{\partial \sigma_{z^2}^{(s)}}{\partial x} - \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial^2 u_{z^2}^{(s)}}{\partial x^2} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{\partial \sigma_{z^2}^{(s-1)}}{\partial x} - F_z^{(s)} \right) dz \\
u_{z^2}^{(s)} &= \int_0^z \left( a_{13} \sigma_{z^2}^{(s-1)} + a_{33} \sigma_{z^2}^{(s-1)} + a_{35} \sigma_{z^2}^{(s-2)} - \frac{\partial u_{z^2}^{(s-2)}}{\partial x} \right) dz \\
u_{z^2}^{(s)} &= \int_0^z \left( B_{31} \sigma_{z^2}^{(s)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{\partial u_{z^2}^{(s)}}{\partial x} + B_{35} \sigma_{z^2}^{(s-1)} \right) dz \\
B_{ij} &= \frac{a_{11} a_{ij} - a_{1i} a_{1j}}{a_{11}}, \quad i, j = 3, 5
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

где  $\sigma_{z0}^{(s)}$ ,  $\sigma_{z0}^{(s)}$ ,  $u_{z0}^{(s)}$ ,  $u_{z0}^{(s)}$  — неизвестные пока функции интегрирования, которые однозначно определяются из условий, заданных на продольных краях полосы.

Удовлетворив граничным условиям (1.1)–(1.3), определим функции интегрирования:

$$\begin{aligned}
\sigma_{z0}^{(s)} &= \frac{\Phi_1^2}{a_{11} + a_{13} \Phi_1^2} u_{z0}^{(s)} + \tau_{z^2}^{(s)}(z = \Phi_1(x)) \\
\sigma_{z0}^{(s)} &= \frac{d}{dx} \frac{\Psi_1 u_{z0}^{(s)}}{a_{11} + a_{13} \Phi_1^2} + \frac{1}{\Phi_1} \tau_{z^2}^{(s)}(z = \Phi_1(x)) - \\
&- \sigma_{z^2}^{(s)}(z = \Phi_1(x)) - \frac{a_{13} \Phi_1}{a_{11}} \frac{d}{dx} \tau_{z^2}^{(s)}(z = \Phi_1(x))
\end{aligned}$$

$$u_{x_0}^{(0)} = \dot{\varphi}_2 \left( u_{x_0}^{(0)} + \Delta^{(s)} + u_{x_2}^{(s)}(z = \varphi_2(x)) \right) - \varphi_2 B_{33} \sigma_{z_0}^{(0)} - \varphi_2 \frac{a_{13}}{a_{11}} \dot{u}_{x_0}^{(s)} - u_{x_2}^{(s)}(z = \varphi_2(x)) \quad (1.9)$$

$$U_1^{(s)} = \left( u_{x_0}^{(s)} + \Delta^{(s)} + u_{x_2}^{(s)}(z = \varphi_2(x)) \right) \sqrt{1 + \dot{\varphi}_2^2}$$

$$\tau_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1(x)) = \frac{a_{11}}{a_{11} + a_{13}\dot{\varphi}_1^2} \left( \dot{\varphi}_1^2 \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1(x)) - \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1(x)) \right)$$

$$\Delta^{(0)} = \Delta, \quad \Delta^{(s)} = 0, \quad s > 0$$

где  $u_{x_0}^{(s)}$  — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{u}_{x_0}^{(s)}}{a_{11} + a_{13}\dot{\varphi}_1^2} \right) + p \frac{\dot{u}_{x_0}^{(s)}}{a_{11} + a_{13}\dot{\varphi}_1^2} = q^{(s)}$$

$$p = \frac{(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)(1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + f(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2))}{(\varphi_1 - \varphi_2)(1 - \dot{\varphi}_2^2 + 2f\dot{\varphi}_2)}$$

$$q^{(s)} = \frac{1}{(\varphi_1 - \varphi_2)(1 - \dot{\varphi}_2^2 + 2f\dot{\varphi}_2)} \left[ (\dot{\varphi}_2 + f\dot{\varphi}_2^2) \left( \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_2) - \frac{a_{11}}{a_{11}} \tau_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1) \right) + (f - \dot{\varphi}_2) \left( \tau_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1) + \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_2) \right) + (\dot{\varphi}_2^2 - 1 - 2f\dot{\varphi}_2) \left( \frac{1}{\varphi_1} \tau_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1) + \frac{a_{13}(\varphi_2 - \varphi_1)}{a_{11}} \frac{d}{dx} \tau_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1) + \frac{1}{\dot{\varphi}_1} \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1) + \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_2) - \sigma_{z_2}^{(s)}(z = \varphi_1) \right) \right] \quad (1.10)$$

имеющее вид

$$u_{x_0}^{(s)} = C_1 + \int_a^x \Phi(\alpha, a) \left( C + \int_a^\alpha \Phi(a, \gamma) q^{(s)}(\gamma) d\gamma \right) d\alpha \quad (1.11)$$

$$\Phi(\alpha, a) = e^{-\int_a^\alpha p(\gamma) d\gamma}$$

Постоянные интегрирования общего решения (1.11) однозначно могут быть определены, используя значения компонентов вектора перемещения в какой-либо точке продольного края (поверхности) полосы

$$u_x^{(0)}(a, \varphi_1(a)) = \bar{u}_x, \quad u_x^{(s)}(a, \varphi_1(a)) = 0 \quad s > 0, \quad (x, z) \quad (1.12)$$

Эти значения обычно известны из геодезических и спутниковых данных.

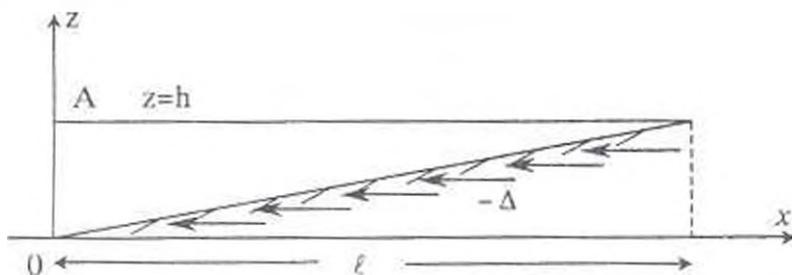
Рекуррентные расчетные формулы (1.8)-(1.11), (1.12) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения точек



полосы с любой заранее принятой, асимптотической точностью  $O(\epsilon^n)$ . Когда функции  $z = \varphi_1(x)$ ,  $z = \varphi_2(x)$  тождественно постоянны, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение краевой задачи.

2. Приведем иллюстрационный пример. Поскольку нам в общем точно неизвестны функции  $z = \varphi_1(x)$ ,  $z = \varphi_2(x)$  (верхняя и нижняя поверхности зоны колазии) и коэффициенты  $\alpha_i$  упругой анизотропии региона, упростим данные, предполагая рассматриваемую область изотропной с горизонтальной верхней поверхностью и нижней плоской поверхностью с постоянным углом наклона. Точка верхней поверхности  $A$  ( $x = a = 0, z = h$ ) считается неподвижной (фиг. 2)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= h, & \varphi_2 &= kx \\ u_x(0, h) &= u_x(0, h) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Подставив (2.1) в (1.8)-(1.11), (1.12), после первого шага итерации для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получаем

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \rho g(z-h), & \sigma_{zz} &= \frac{E}{1-\nu^2} (h-z)\ddot{u} \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \dot{u} - \frac{\nu}{1-\nu} \rho g(h-z), & u_x &= u, & U &= (u+\Delta)\sqrt{1+k^2} \\ u_z &= k(u+\Delta) - \frac{\nu}{1-\nu} (z-kx)\dot{u} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)} \rho g(z-kx)(z+kx-2h) \\ \ddot{u} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ c \left(1 - k \frac{x}{h}\right)^{-\gamma} + \frac{\rho g h \alpha}{k(\gamma+1)} \left(1 - k \frac{x}{h}\right) \right] \\ \ddot{u} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{ck\gamma}{h^{\gamma+1}} \left(1 - k \frac{x}{h}\right)^{-\gamma-1} - \frac{\alpha \rho g}{\gamma+1} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \frac{ch}{k(\gamma-1)} \left[ \left( 1 - k \frac{x}{h} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] - \frac{\alpha \rho g h x}{2k(\gamma+1)} \left( k \frac{x}{h} - 2 \right) \right)$$

$$c = \frac{kE\Delta}{\nu(1+\nu)h} - \rho g h \left( \frac{\alpha}{k(\gamma+1)} + \frac{1-2\nu}{2\nu(1-\nu)} \right)$$

$$\gamma = \frac{1+kf}{1+2kf-k^2}, \quad \alpha = \frac{f-k + \frac{\nu}{1-\nu}(k+k^2f)}{1+2kf-k^2}$$

Используя решение (2.2), можно определить равнодействующую  $R_x$  горизонтальной упругой силы, которая пропорциональна перемещению  $\Delta$  Аравийской плиты:

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} (-k\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$

$$R_x = \sqrt{1+k^2} b \int_0^{L/k} P_x(x) dx \quad (2.3)$$

$$R_x = -\frac{kEb}{\nu(1+\nu)} \Delta = -\frac{2kb}{\nu} G\Delta$$

где  $b$  — размер сжимаемой области перпендикулярно плоскости  $OXZ$ .

Из (2.3) следует, что зона коллизии работает как упругая пружина с жесткостью

$$C = \frac{kEb}{\nu(1+\nu)} = \frac{2kb}{\nu} G \quad (2.4)$$

следовательно, накопленная потенциальная энергия будет

$$W = C \frac{\Delta^2}{2} \quad (2.5)$$

Принимая  $E = 2.5 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $k = 0.02$ ,  $\nu = \frac{1}{4}$ ,  $b = 2.0 \cdot 10^8$  см, получим упругую силу и энергию упругой деформации

$$R_x = -1.6 \cdot 10^{19} \Delta \quad (\text{дин})$$

$$W = 0.8 \cdot 10^{19} \Delta^2 \quad (\text{эрг}) \quad (2.6)$$

[Все величины приведены в принятой в сейсмологии системе единиц СГС]

Накапливаемая потенциальная энергия, когда  $\Delta = 1.8$  см/год, составляет

$$W_x = 2.6 \cdot 10^{19} \text{ эрг. — за год}$$

$$W'_{10} = 2,6 \cdot 10^{21} \text{ эрг. — за 10 лет,} \quad (2.7)$$

$$W'_{100} = 2,6 \cdot 10^{22} \text{ эрг. — за 100 лет.}$$

Полученные числа согласуются с результатами наблюдений. При достижении критического значения  $W'_{10}$  потенциальной энергии произойдет разрушение и высвобождение части накопленной энергии в виде сейсмических волн.

Решение (1.1)-(1.3), (1.8)-(1.11), (1.12) позволяет рассматривать также более сложные случаи.

Работа выполнена при поддержке гранта МНТЦ А 651.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. С. 7-12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок// ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271-278.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414 с.
4. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984, Т. 37. № 6. С. 3-15.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины// ПММ. 1996. Т.60. Вып. 2. С. 290-298.
6. McKenzie D.P. (1970) Plate tectonics of the Mediterranean region. Nature. V. 226.
7. Balassanian S. Yu. (1977) Seismogenesis and Destructive Earthquakes in the Caucasus. "Historical and Prehistorical Earthquakes in the Caucasus", Kluwer Academic Publisher. Netherlands. pp. 1-37.
8. Balassanian S. Yu. (2002) Earthquake Prediction Research for Current Seismic Hazard Assessment "Earthquake Hazard and Seismic Risk Reduction". Kluwer Academic Publishes. Netherlands. pp. 169-209.

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Геворкян Г.А.

Գ. Ա. Գևորկյան

Առաձգական սալերի լուծման վերջավոր տարրերի մոդիֆիկացված մեթոդ

Առաջարկվում է վերջավոր տարրերի մոդիֆիկացված մեթոդ, որում երկչափ առաձգական սալերի լուծումը հանգեցվում է բառակառուցային ծրագրավորման խնդիրների: Բերվում է նրանց լուծման ալգորիթմը:

G. A. Gevorgyan

A Modified Finite Elements Method for Elastic Plates

Предлагается модифицированный метод конечных элементов, при котором решения двумерных упругих пластин сводится к задачам квадратичного программирования. Приведен алгоритм их решения.

1.Метод конечных элементов треугольной формы для двумерных упругих пластин.

Рассмотрим пластинку единичной толщины, внутри которой выделен  $s$ -ый конечный элемент треугольной формы с узлами  $i, j, m$ .

Перемещения  $i$ -ого узла зададим вектором  $\delta_i = (u_i, v_i)^T$ , при котором вектор узловых перемещений треугольного элемента представится в виде

$$\delta_s = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m)^T$$

Вектор перемещения  $f = (u, v)^T$  внутри элемента задается формулой [3]

$$f = (IN_i, IN_j, IN_m)\delta_s \quad (1)$$

где

$$N_i = (a + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad (2)$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j \quad (3)$$

$\Delta$  – площадь треугольника;  $i|j|m$ :  $I$  – единичная матрица второго порядка.

Остальные величины, входящие в соотношение (1), можно получить циклической перестановкой индексов  $i|j|m$  в выражениях (2) и (3).

Деформация в некоторой точке элемента определяется вектором

$$\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})^T = \left\| B_i^T, B_j^T, B_m^T \right\| \delta_s$$

где

$$B_r^s = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_{r,s} & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{vmatrix} \quad r = \{i, j, m\}, \quad (4)$$

В соответствии с законом Гука для плоского напряженного состояния и изотропного материала имеем

$$\sigma = \tilde{D}\varepsilon = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \varepsilon \quad (5)$$

Здесь  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$  – вектор напряжения,  $\tilde{D}$  – матрица упругости,  $E$  – модуль упругости, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для определения матрицы жесткости  $k_s = \|k_{rqs}^s\|$  элемента  $ijm$  имеем [3]

$$k_s = (B_s)^T \tilde{D} B_s \Delta t \quad (6)$$

где матрица  $B_s = \|B_{i,s}^s, B_{j,s}^s, B_{m,s}^s\|$ ;  $t$  – толщина элемента.

Обозначим через  $F_s = (F_{i,x}^s, F_{i,y}^s, F_{j,x}^s, F_{j,y}^s, F_{m,x}^s, F_{m,y}^s)^T$  вектор узловых сил, а через  $P_s = (P_{i,x}^s, P_{i,y}^s, P_{j,x}^s, P_{j,y}^s, P_{m,x}^s, P_{m,y}^s)^T$  – вектор нагрузок. Здесь индексами  $x$  и  $y$  показаны проекции сил на соответствующие координатные оси.

Векторы  $F_s$  и  $P_s$  связаны соотношением [3]

$$F_s = k_s \delta_s - P_s \quad (7)$$

2. Модифицированный метод конечных элементов треугольной формы для двумерных упругих пластин.

Примем в качестве обобщенных сил и обобщенных перемещений соответственно узловые усилия  $F_s$  и перемещения  $\delta_s$ , тогда, согласно теореме Клапейрона потенциальная энергия  $S$ -ого конечного элемента равна

$$\Omega_s = \frac{1}{2} (\delta_s)^T F_s \quad (8)$$

откуда, с учетом связей (7) имеем

$$\Omega_s = \frac{1}{2} [(\delta_s)^T k_s \delta_s - (\delta_s)^T P_s] \quad (9)$$

Если рассматриваемая область представлена в виде совокупности  $m$  конечных элементов, то потенциальная энергия для всей конструкции будет

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \Omega_i \quad (10)$$

Пусть  $n$  – общее число узлов конструкции.

$\delta = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)^T$  – вектор узловых перемещений,

$F = (F_1^x, F_1^y, F_2^x, F_2^y, \dots, F_n^x, F_n^y)^T$  – вектор узловых сил,

$P = (P_1^x, P_1^y, P_2^x, P_2^y, \dots, P_n^x, P_n^y)^T$  – вектор нагрузок,

$K = \|K_{ij}\|$  – матрица жесткости для всей конструкции.

Тогда, как следует из соотношения (10),

$$P_i^x = \sum_s P_{i,x}^s, \quad P_i^y = \sum_s P_{i,y}^s, \quad i \in N = \{1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

и, кроме этого, матрица  $K$  имеет  $n \times n$  компонентов квадратной подматрицы второго порядка

$$\bar{K}_{ij} = \sum_s k_{ij}^s, \quad i \in N, \quad j \in N \quad (12)$$

В формулах (11) и (12) знак суммы распространяется на все соединяемые в узле стороны конечных элементов.

Из соотношения (9) и (10) находим

$$\Omega = \frac{1}{2} (\delta^T K \delta - \delta^T P) \quad (13)$$

которая является однородной функцией второй степени узловых перемещений.

Если исходить из принципа минимума потенциальной энергии системы [4], то определение искомого вектора  $\delta$  сводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\begin{cases} \min \{ 0,5(\delta^T K \delta - \delta^T P), \\ \text{условия совместности деформаций,} \\ \text{кинематические краевые условия} \} \end{cases} \quad (14)$$

Если  $i$ -ый узел  $s$ -ого конечного элемента жестко зашцемен, то кинематические граничные условия соответственно будут

$$u_i^s = 0 \quad \text{и} \quad v_i^s = 0 \quad (15)$$

если же шарнирно оперт, то имеем

$$u_i^s = 0 \quad \text{или} \quad v_i^s = 0 \quad (16)$$

Введем обозначения



условия неотрицательности искомым переменных, то ее решение сводится к определению обратной матрицы  $G^{-1} = \|\| g_{ij}^{-1} \|\|$ , где

$$G = AD^{-1}A^T \quad (24)$$

Зная обратную матрицу  $G^{-1}$ , последовательно находим векторы

$$B = AD^{-1}C \quad (25)$$

$$Z = G^{-1}B \quad (26)$$

Тогда искомые компоненты вектора  $X$  определяем по формуле

$$X = D^{-1}(A^T Z - C) \quad (27)$$

Приведем алгоритм нахождения обратной матрицы  $G^{-1}$  для данной задачи.

Нулевой шаг. В качестве базисных переменных примем компоненты вектора  $Z$ , тогда, легко увидеть, что  $G_0 = \bar{I}$ . Очевидно, что обратная матрица  $G_0^{-1}$  также единичная и  $G_0^{-1} = \bar{I}$ .

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в  $k$ -ом шаге. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению  $k$ -ого шага. Зафиксируем некоторый элемент  $p \in M = \{1, 2, \dots, 2n\}$ , в соответствии с которым последовательно находим вектор  $Q_p$  и матрицу  $G_{k,p}^{-1}$  по формулам [1]:

$$Q_p = G_k^{-1} d_{pp}^{-1} A_p \quad (28)$$

$$g_{ij}^{(k,p)} = g_{ij}^{(k)} - \frac{Q_p^i Q_p^j}{1 + A_p^T Q_p}, i \in M \setminus \{2n\}, j \in M \setminus \{2n\} \quad (29)$$

Эту процедуру повторим  $2n$  раз для всех векторов  $A_j, j \in M$ . Ясно, что при  $p = 2n$  получим

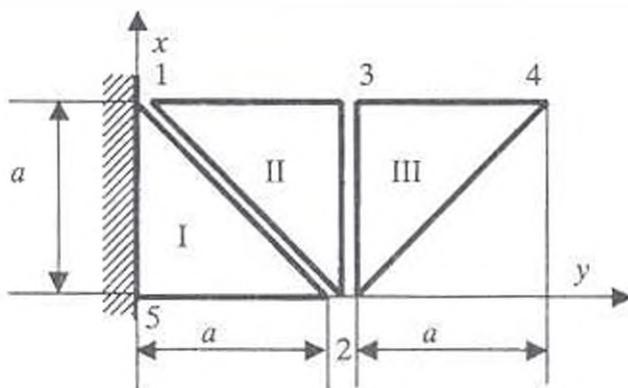
$$G^{-1} = G_{2n}^{-1} \quad (30)$$

Отметим, что по сравнению с ранее существующими методами данный подход потребует почти одинаковое количество действий умножения (деления). Однако программный пакет реализации вышеприведенного алгоритма малообъемен и прост в применении.

#### 4. Пример.

Рассмотрим расчет пластинки [2], представленной на фиг. 1, на которую действует равномерно распределенная по всей поверхности нагрузка с интенсивностью  $q$ .

Разобьем пластинку на ряд треугольников (фиг. 1). Составим таблицу координат вершин треугольников и поочередно рассмотрим элементы I, II и III. По формулам (3) и (4) найдем матрицы



Фиг. 1

$$B_2^I = B_4^{III} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad B_2^{II} = B_2^{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3^{II} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad B_3^{III} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

Учитывая, что площадь конечного элемента равна  $\Delta = a^2/2$ , и, принимая  $\nu = 0,3$ , для элементов I, II и III определяем векторы нагрузок и матрицы жесткостей (6). Исходя из соотношений (12) и (11), находим подматрицы жесткостей и компоненты вектора нагрузок. На основе этих величин формируем вектор  $C$  и матрицу жесткости для всей конструкции. Имеем

$$C = qa^2(0, 0,5, 0, 0,33333, 0, 0,16667, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$K = \frac{Ei}{1,82} \begin{bmatrix} 1,7 & 0 & -0,7 & 0,05 & 0 & -0,35 \\ 0 & 2,35 & 0 & -2 & -0,3 & 0 \\ -0,7 & 0 & 2,7 & 0 & -1 & 0,35 \\ 0,05 & -2 & 0 & 2,7 & 0,3 & -0,35 \\ 0 & -0,3 & -1 & 0,3 & 1 & 0 \\ -0,35 & 0 & 0,35 & -0,35 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

Используя формулы (19), (20) и обозначения (17), находим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,7 & 0,05 & 0 & -0,35 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -0,3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,035 & -1 & 0,105 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,265 & -0,336175 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,0159136 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и целевую функцию

$$\Omega = \frac{1,82qa^2}{Et} (0,7u_2^2 + 1,35v_2^2 + 1,21u_3^2 - 2,3v_3^2 - 1,16u_4^2 + 0,103v_4^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2)$$

Используя вышеприведенный алгоритм, вычисляем обратную матрицу

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0,286449 & -0,265257 & 0,0893936 & -0,0455973 & 0,0967714 \\ -0,265257 & -1,8969 & 0,334242 & 1,29098 & -0,322129 \\ 0,0893936 & 0,334242 & -0,207506 & -0,446221 & 1,27638 \\ -0,0455993 & 1,29098 & -0,446221 & -0,226627 & 0,679938 \\ 0,0967714 & -0,322129 & 1,27638 & 0,679938 & -1,08372 \end{pmatrix}$$

и поочередно находим (формулы (24) – (26)) векторы

$$B = (-0,57245, 0,65975, 0,1645, -0,68758, 0,025699)^T$$

$$Z = (-0,29044, -1,94059, 0,47482, 0,97773, -0,55332)^T$$

$$\delta = \frac{1,82qa}{Et} (-0,4149, -1,8078, 0,5604, -1,9653, 0,6076, -3,4168)^T$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г. А. Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования. Ереван: Изд. АН Армянской ССР, 1987. 184 с.
2. Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И., Лужкин О. В., Рекач В. Г., Синельников В. В., Шалиро Г. С. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1976. 600 с.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974. 240 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1977. 280 с.

Ереванский государственный  
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию  
02.09.2002

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
 ОБОЛОЧКИ ПРИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКЕ

Мовсисян А.А., Нерсисян Г.Г.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Մասձգանձուցիկ զլանային ռադանթի կայունության մասին շարժվող բեռի դեպքում

Պատարկվում է օրթոտրոպ կյուրից զլանային թաղանթի կայունությունը շարժվող բեռի դեպքում Նյուերը առաձգանձուցիկ իատկություն է զուգարերում միայն սահրի դեֆորմացիայի նկատմամբ: Բեռի շարժման արագությունը այնքան փոքր է, որ իներցիոն ուժերը կարելի է արհամարել: Բացի ակնարարային է երկարատև կրիտիկական բեռներից մտպվում է նաև կրիտիկական ժամանակի գաղափարը:

A. A. Movsisyan, G. G. Nersisyan

On Stability of Viscoelastic Cylindrical Shell under Moving Load

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки из композита когда нормальное давление движется с одного конца в другой. Движение настолько медленное, что инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь и в то же время вязкие свойства играют заметную роль. Для обсуждаемых систем, помимо мгновенной и длительной критических нагрузок, есть необходимость также введения критического момента времени потери устойчивости. Аналогичная задача для разномодульного стержня рассмотрена в [1].

Ի Կակ Իզվեստնո, մոնղե կոմպոզիտ, սվազույոնիմ մաթերիալոմ կոթորի յալյույթս թոլիմերս, Ե Եոլիմոնիսթե սեոեմ, Եազկե սեոյթս թրոյալյոթ թո օրոնոսիոնս կ սձիցոյմ ձեֆորմաչիոնս [2], ի.ե. Դլյա տաչիկ մաթերիալօ թրեձարոյոչի յազոն Իմեթ Եաձ:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11}e_x + A_{12}e_y \\ \sigma_y &= A_{12}e_x + A_{22}e_y \\ \sigma_{xy} &= \bar{A}_{66}e_{xy} = A_{66}(1 - I^*)e_{xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Օպերաթոր  $\Gamma^*$  Խարաթերիզուեթ յազոե սեոյթս մաթերիալա:

Ե Երեձոթոլոսիոն, յո ձալյույթս յալյույթս կոթարոե սազոե կօլեոե սոլսեմ: (1.1) սօթթեսթոյոթ սեոլոյոնս սեոլոյոնս սեոլոյոնս սեոլոյոնս սեոլոյոնս:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{C}_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + \bar{C}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} C_{12} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ (C_{12} + \bar{C}_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{C}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} C_{22} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{R} \left[ C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \right] + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_2^u \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Как уже было отмечено в введении, задача рассматривается в квазистатическом приближении.

Будем рассматривать случай, когда на концах оболочки осуществляется условие свободного опирания, тогда, представив перемещения в виде

$$\begin{aligned} u &= \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) \cos \lambda_m x \\ v &= \sin \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t) \sin \lambda_m x \\ w &= \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \mu_n = \frac{n}{R}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \end{aligned} \quad (1.3)$$

граничные условия будут удовлетворены. Для получения системы относительно  $\varphi_m$ ,  $\psi_m$  и  $f_m$ , необходимо ещё начальное кольцевое усилие также представить в виде ряда

$$T_2^u = R \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.2) и исключая  $\varphi_m$  и  $\psi_m$ , для  $f_m$  получим бесконечную систему однородных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \left[ Y_1 - Y_2 \Gamma^* + K_m \frac{1 - \Gamma^*}{x_1 - x_2 \Gamma^*} \right] f_m = \\ = \frac{R \mu_n^2}{2} \left[ \sum_{p=1}^m a_{m-p} f_p + \sum_{p=m}^{\infty} a_{p-m} f_p - \sum_{p=1}^{\infty} a_{p+m} f_p \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Y_1 &= D_{11} \lambda_m^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4 \\ Y_2 &= 4D_{66} \lambda_m^2 \mu_n^2 \\ X_1 &= C_{11} C_{66} \lambda_m^4 + (C_{11} C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12} C_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + C_{22} C_{66} \mu_n^4 \\ X_2 &= C_{66} (C_{11} \lambda_m^4 - 2C_{12} \lambda_m^2 \mu_n^2 + C_{22} \mu_n^2) \\ K_m &= \frac{1}{R^2} C_{66} \lambda_m^4 (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) \end{aligned}$$

2. В качестве примеров рассмотрим два случая:

а) равномерное внешнее давление ( $q = q_0$  при  $x \leq ct$ ) с одного конца движется в другой с постоянной скоростью  $c$ . Тогда для коэффициентов  $a_k$  будем иметь

$$a_0 = q_0 t, \quad a_k = \frac{2q_0}{k\pi} \sin k\pi t \quad (2.1)$$

Здесь  $t = ct/l$  — безразмерное время, и  $t = 1$  соответствует времени, когда нагрузка доходит до второго конца.

б) гидростатическое давление распространяется с постоянной скоростью

$$q = q_0 \left( 1 - \frac{x}{ct} \right), \quad 0 \leq x \leq ct \quad (2.2)$$

$$a_0 = \frac{q_0 t}{2}, \quad a_k = \frac{2q_0}{(k\pi)^2 t} (1 - \cos k\pi t)$$

Материал оболочки берется такой, для которого наследственное свойство характеризуется моделью Максвелла — Томпсона

$$\Gamma^* u = A \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Критическая нагрузка или критическое время потери устойчивости определяются из системы (1.5). Если принять нагрузку не движущейся, то для каждого фиксированного положения (на интервале действующей нагрузки), можно определить мгновенную и длительную критические нагрузки, как обычно делается для вязкоупругих систем [3]. Но при движущейся нагрузке, естественно, имеются ещё промежуточные значения критических параметров. Таковым, в частности, является критическое время. Понятие последнего — в некоторой степени произвольное и различное при толковании различных авторов. Мы будем пользоваться понятием, использованным в [1,4].

Если в (1.5)  $\int_0^t \Gamma^*(t-\tau) f_m d\tau$  заменить на  $f_m \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau$ , то вместо системы интегральных уравнений будем иметь алгебраическую систему с переменными коэффициентами от времени. Вот из условия разрешимости этой системы и определяется критическое время. Такое понятие относительно критического времени помимо того, что дает значения мгновенных и длительных критических величин, имеет еще ясный физический смысл — критическое время — это время, при котором для вывода системы из начального состояния, необходимо наименьшее внешнее воздействие, чем в другой момент времени.

3. Произведем числовой эксперимент. В качестве материалов для оболочки брались ортогонально армированные ( $\pm 45^\circ$ ) [5].

а) стеклопластик с данными -

$$E_1 = E_2 = 17 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0, \quad G_{12} = 12.5 \text{ ГПа} \quad (3.1)$$

б) углепластик -

$$E_1 = 8.2 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 7.6 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = 0.89; \quad (3.2)$$

$$\nu_{21} = 0.87; \quad G_{12} = 20 \text{ ГПа}$$

$$A_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_{12} = \nu_{21}A_{11}, \quad A_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_{66} = G_{12} \quad (3.3)$$

Некоторые результаты вычислений приведены в таблицах. В табл. 1 положены значения  $qR^3/A_{11}h^3$ , при которых потеря устойчивости происходит для одного момента времени для первой задачи, а в табл. 2 - для второй. В первых строках каждой клетки помещены эти значения для  $\frac{h}{A} = 2 \cdot 10^{-3}$ , а во вторых -  $\frac{h}{R} = 1 \cdot 10^{-3}$ , при этом  $\pi R = 0.5l$  (то, что числа первых строк меньше вторых, не должно смущать, т.к. в выражении  $\frac{q}{A_{11}} \frac{R^3}{h^3}$  существует второй множитель).

Таблица 1

$\beta$	Стеклопластик				Углепластик			
	0	3	6	15	0	3	6	15
0.2	34.78	34.29	33.92	33.41	37.04	36.49	36.16	35.78
	48.40	47.91	47.54	47.02	50.54	50.01	49.68	49.30
0.4	8.001	7.895	7.848	7.824	8.415	8.226	8.166	8.138
	11.16	11.05	11.00	10.98	11.55	11.36	11.30	11.27
0.6	4.278	4.222	4.210	4.208	4.483	4.361	4.341	4.337
	5.985	5.931	5.919	5.917	6.182	6.063	6.043	6.039
0.8	3.284	3.244	3.238	3.238	3.439	3.337	3.329	3.327
	4.602	4.563	4.557	4.557	4.752	4.652	4.642	4.640
1	3.132	3.092	3.088	3.088	3.280	3.180	3.174	3.174
	4.389	4.349	4.347	4.347	4.533	4.431	4.427	4.427

Для длительного коэффициента модуля сдвига принималось значение половины его мгновенного значения -

$$A_{66}^* = A_{66}(1 - \Gamma^* \cdot 1) = 0.5 A_{66} \quad (\text{в (2.3) } 2A = \alpha) \quad (3.4)$$

В первых строках таблиц заданы значения

$$\beta = \frac{\alpha l}{c} = 0; 3; 6; 15 \quad (3.5)$$

( $\beta^{-1}$  - безразмерное время релаксации).

Случай  $\beta = 0$  соответствует упругой постановке задачи – мгновенная критическая нагрузка, а  $\beta = 15$  уже можно трактовать как случай длительной нагрузки ( $1 - e^{-\beta} \approx 1$ ).

Таблица 2

$\beta$	Стеклопластик				Углепластик			
	0	3	6	15	0	3	6	15
0.2	122.6	120.5	118.9	116.6	131.5	129.5	128.3	126.8
	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1
0.4	25.10	24.67	24.48	24.38	26.48	25.88	25.68	25.58
	34.93	34.50	34.31	34.20	36.23	35.64	35.44	35.35
0.6	11.80	11.61	11.57	11.56	12.39	12.06	11.99	11.98
	16.47	16.28	16.24	16.23	17.04	16.70	16.64	16.63
0.8	7.752	7.638	7.624	7.623	8.125	7.885	7.864	7.862
	10.84	10.73	10.72	10.71	11.20	10.96	10.94	10.94
1	6.096	6.011	6.005	6.005	6.385	6.190	6.180	6.178
	8.537	8.451	8.445	8.445	8.816	8.621	8.611	8.611

Как видно из приведенных таблиц, разница между мгновенными и длительными нагрузками не очень большая. Это и понятно, ведь вязким свойством обладает только коэффициент сдвига (возможно, не самый главный для подобных задач), как и следовало ожидать, критическое время для промежуточных состояний находится между значениями мгновенного и длительного.

С другой стороны, чем толще и чем короче оболочка, тем больше относительное критическое давление ( $q(\tau_{cr})/q(\tau=0)$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян А.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. //Изв.АН РФ. МТТ. 1994. №4. С.171-175.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Изд. "Зинатне", 1980. 571 с.
3. Потанов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312 с.
4. Мовсисян А.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №4. С.3-12.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
19.12.2002

УДК 539.3

**Magnetoelastic Vibrations, Localized in the Vicinity  
of the Free Edge of a Thin Plate  
Belubekyan M.V.**

Մ.Վ. Բելուբեկյան

Բարակապատ սալի ազատ եզրի շրջակայքում մագնիսաառձգական տեղայնացված տատանումներ

Կիրառելի տեսության և իդեալական հաղորդիչ միջավայրի մոդելի հիման վրա դիտարկվում է սալի մագնիսաառձգական տատանումների խնդիրը: Հաստատված են ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված լայնակալ տատանումների գոյության պայմանները: Գտնված է, որ մագնիսական դաշտի միջոցով կարելի է վերացնել տեղայնացված տատանումները:

М.В. Белубекян

**Магнитоупругие колебания, локализованные в окрестности  
свободного края тонкой пластинки.**

На основе теории пластин Кирхгофа и модели идеально проводящей среды рассматривается задача магнитоупругих колебаний пластинки в продольном магнитном поле. Установлены условия существования локализованных изгибных колебаний у свободного края пластинки. Показано, что при помощи магнитного поля можно устранить локализованные колебания.

We will consider the problem of magnetoelastic vibrations of plate in the longitudinal magnetic field based on the Kirchhoff plate theory and the model of perfect conductive medium. The conditions of the existence of localized bending vibrations in the vicinity of the free edge of the plate have been established. It was shown that the localized vibrations could be eliminated by means of the magnetic field.

Y.K. Konenkov [1] was the first who investigated the problem of localized bending plate vibrations. At a later time this direction was widely developed as we can judge by the literature mentioned in [2-4].

As a basis for research of vibrations in an electro conductive plate served simple models – the model of the perfect conductive medium [5] and the model of the “weak” conductive medium [6]. Later the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies [7, 8] was suggested and allowed us to reduce the spatial problems of magnetoelastic vibrations to two-dimensional ones. The researches on problems of magneto elastic vibrations of the plate on the basis of exact solutions and the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies have shown that the application of simple models depends on the configuration of the external magnetic field (longitudinal or transversal) as well as on the character of the considered problem

(planar or transversal vibrations) [9, 10]. In particular, it was determined that the model of perfect conductive medium can be applied (with the adequate accuracy) to the problem of plate bending vibrations at presence of the longitudinal magnetic field but it could not be applied to the problem of planar vibrations in the same magnetic field [9, 11, 12].

1. The plate in the Cartesian frame of reference holds the position:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . The plate in the unperturbed condition is situated in the constant magnetic field parallel to  $Ox$  axis.

$$\vec{H}_0 = H_0 \vec{i}, \quad H_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

Let us assume that the plate is isotropic, homogeneous and perfect conductive. In this case instead of perfect relationship for the plate perturbed condition

$$\vec{j} = \sigma \left( \vec{e} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right) \quad (1.2)$$

We will take [5]

$$\vec{e} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \quad (1.3)$$

Where  $\vec{u}$  - is the elastic displacement vector,  $\vec{j}$  - is the induced density of the electric current,  $\vec{e}$  - is the perturbed electrical field,  $\sigma$  - is the electroconductivity coefficient,  $\mu$  - is the magnetic permability of the plate material,  $c$  - is the constant equal to the velocity of light in vacuum (in the Gaussian system of units).

According to (1.3) model and electrodynamics equations, the perturbed magnetic field, the induced electric current and the body force exerting on the plate are defined in the following way

$$\vec{h} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{H}_0), \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{h}, \quad \vec{R} = \frac{\mu}{c} (\vec{j} \times \vec{H}_0) \quad (1.4)$$

The equations of the plate vibrations have the following appearance:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + R_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

where  $u_i$  are the components of vector  $\vec{u}$ ,  $R_i$  are the components of vector  $\vec{R}$ ,  $\sigma_{ij}$  are the components of the stress tensor,  $\rho$  - is the density of the plate material. According to (1.4) for the considered problem the  $R_i$  components are defined in the following way:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = \frac{\mu H_0^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} \right)$$

$$R_3 = \frac{\mu H_0^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} \right)$$
(1.6)

The following boundary conditions should be set on the plate's  $z = \pm h$  face planes:

$$\sigma_{3i} + t_{3i} = t_{3i}^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3)$$
(1.7)

where  $t_{ij}, t_{ij}^{(0)}$  are the components of Maxwell symmetric linearized tensor, correspondingly inside the region occupied by the plate and outside of it. If we take into account the (1.1) conditions then the expressions for the components of Maxwell tensor look like:

$$t_{11} = \frac{\mu}{4\pi} H_0 h_2, \quad t_{22} = t_{33} = -\frac{\mu}{4\pi} H_0 h_1$$

$$t_{12} = \frac{\mu}{4\pi} H_0 h_2, \quad t_{13} = \frac{\mu}{4\pi} H_0 h_3, \quad t_{23} = 0$$
(1.8)

The components of  $t_{ij}^{(0)}$  tensor for the media surrounding the plate are being defined in similar way with taking into account  $\mu = 1$  condition.

It is clear from (1.7) boundary conditions that in general it is necessary to solve the plate vibration equations jointly with the electrodynamics equations for the media surrounding the plate. This circumstance essentially complicates the researches on problems of magnetoelastic vibrations of the plate. But we can overcome this obstacle for this type of problem when the magnetic field is parallel to the planes bounding the plate. Noting that the conditions of continuity of the normal components of perturbed induction of the magnetic field ( $\mu h_3 = h_3^{(0)}$ ) should be satisfied on the  $z = \pm h$  planes and neglecting the  $t_{33}^{(0)}$  in comparison with  $t_{33}$  (because of the discontinuity of the tangential component of the perturbed magnetic field), the (1.7) boundary conditions are being replaced with the following ones:

$$\sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} + t_{33} = 0$$
(1.9)

The mentioned approximate (1.9) boundary conditions are based on the fact that during the resolving the mentioned problem with taking into account the Kirchhoff hypothesis for the infinite plate [11], the (1.7) and (1.9) boundary conditions give the same result for the plate's self-vibration frequency

2. According to the Kirchhoff plate theory we will take into account the following assumptions

the assumptions for displacements:

$$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3 = w, \quad u, v, w = (x, y, z) \quad (2.1)$$

the assumptions for main stresses

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{12} \quad (2.2)$$

The usual procedure of averaging the plate vibration equations (1.5) is being implemented with taking into consideration the (1.6) expressions, (1.9) boundary conditions, (2.1) assumptions and neglecting the moment of rotatory inertia. The averaged equations look like

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} [\Delta u + L(u, v)] = 2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = N_1; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = N_2$$

We used the generally accepted designations [12] for stresses and moments in (2.3), (2.4). The  $L(u, v)$  operator is identically equal to zero if in expression for  $R_2$  from (1.6) we accept, according to (2.1), that  $\epsilon_{33} = \partial u_3 / \partial z = 0$ ,

$$L(u, v) = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

and substitute  $\epsilon_{33}$  from the Hooke's law into  $R_2$ .

The substitution of the stresses and moments expressions into (2.3) and (2.4) equations brings to the following equations regarding the displacements of the plate's middle plane.

$$\Delta u + \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$(1-\lambda) \Delta v + (\vartheta - \beta) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$D \Delta^2 w - \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

where

$$\vartheta = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \lambda = \frac{\mu H_0^2}{4\pi G}, \quad \beta = \frac{\nu \lambda}{1-\nu} \quad \text{in view of } \epsilon_{33} = 0 \quad (2.8)$$

As it is in Kirchhoff regular plate theory, the equations defining the planar and bending vibrations are being separated. The (2.7) bending magnetoelastic vibrations equation is the analogous to the bending vibrations equation of the plate, pre-extended in  $x$  direction.

3. The boundary conditions on the plate's  $x = \text{const}$  and  $y = \text{const}$  edges are obtained via the averaging the boundary conditions of the spatial problem of the theory of magnetoelasticity of the perfect conductive medium. It is evident that the boundary conditions for the fixed edge are the same as in the regular plate theory. In case of Navier conditions establishing on the  $x = \text{const}$  edge

$$\sigma_{12} + t_{12} = t_{12}^{(e)}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \quad (3.1)$$

it is taken into account that the  $t_{11}$  component is continuous, because  $\mu h_1 = h_1^{(e)}$ . Then the (3.1) conditions averaging leads to the regular conditions for the hinge joint.

$$T_1 = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0 \quad (3.2)$$

Let us assume that the conditions of sliding contact are established on the  $x = \text{const}$  edge.

$$u_1 = 0, \quad \sigma_{12} + t_{12} = t_{12}^{(e)}, \quad \sigma_{13} + t_{13} = t_{13}^{(e)} \quad (3.3)$$

The  $t_{12}^{(e)}, t_{13}^{(e)}$  terms in (3.3) are neglected in comparison with correspondingly  $t_{12}, t_{13}$  and then the averaging by thickness of the plate is implemented. Finally, the conditions of sliding contact are obtained in the following way:

$$u = 0, \quad S + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0 \quad (3.4)$$

Acting in the similar way with the boundary conditions of the plate's  $x = \text{const}$  free edge

$$\sigma_{11} + t_{11} = t_{11}^{(e)}, \quad \sigma_{12} + t_{12} = t_{12}^{(e)}, \quad \sigma_{13} + t_{13} = t_{13}^{(e)} \quad (3.5)$$

we can obtain the following conditions corresponding to the Kirchhoff plate theory conditions

$$T_1 = 0, \quad S + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad M_1 = 0, \quad \tilde{N}_1 + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

where  $\tilde{N}_1$  is the generalized transverse shearing force

$$\tilde{N}_1 = N_1 + \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.7)$$

The conditions of the plate's  $y = \text{const}$  edge are obtained in the similar way and have the following appearance:

for the hinge joint edge :

$$u = 0, \quad T_2 = 0, \quad w = 0, \quad M_2 = 0 \quad (3.8)$$

for the sliding contact

$$u = 0, \quad S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \bar{N}_2 = 0 \quad (3.9)$$

for the free edge

$$T_2 + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad S = 0, \quad M_2 - \frac{\mu h^3 H_0^2}{6\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \bar{N}_2 = 0 \quad (3.10)$$

4. Now let us consider the localized bending vibrations of the plate [1]. Let us assume that the semi-infinite plate occupies the  $0 \leq x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$  region. The localized waves are being propagated along the  $x = 0$  edge. It is necessary to find the solution of (2.7) equation, which satisfies the boundary conditions on the  $x = 0$  edge and the condition of damping

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (4.1)$$

It is obvious that the solution of the (2.7) equation satisfying the (4.1) condition has the following appearance

$$w = (c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{-k_2 x}) \exp(i(\omega t - ky)) \quad (4.2)$$

where

$$k_1 = \left(1 + \chi + \sqrt{\eta^2 + 2\chi + 2\chi^2}\right)^{1/2}, \quad k_2 = \left(1 + \chi - \sqrt{\eta^2 + 2\chi + 2\chi^2}\right)^{1/2} \quad (4.3)$$

$$\eta^2 = \frac{2\rho h \omega^2}{Dk^4}, \quad \chi = \frac{\mu h H_0^2}{4\pi D k^2} = \frac{3(1-\nu)}{4k^2 h^2} \chi$$

The non-dimensional  $\eta^2$  parameter in (4.3) defines the sought frequency of vibration, and according to the condition of damping (4.1), it should satisfy the following inequalities:

$$0 < \eta^2 < 1 \quad (4.4)$$

It is easy to check that the problem has no solution, satisfying the condition (4.4), if the conditions of clamped edge or conditions for the the hinge joint (3.2) or the conditions of sliding contact (3.4) are set on the plate's  $x = 0$  edge.

The boundary conditions of the free edge (3.6) for the bending vibrations of the plate, with taking into account the expressions for the moments and stresses, looks like

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\mu h H_0^2}{2\pi D} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

The substitution of the solution (4.2) into the (4.5) boundary conditions brings to a homogeneous equations system relative to the arbitrary  $c_1$   $c_2$  constants. The equalization to zero the determinant of the mentioned set defines the dispersion equation of the problem in the following way :

$$K(\eta) \equiv p_2(p_1^2 - \nu)[p_2^2 - (2 - \nu - 2\chi)] - p_1(p_2^2 - \nu)[p_1^2 - (2 - \nu - 2\chi)] = 0 \quad (4.6)$$

After some transformations the (4.6) equations result in

$$K(\eta) = (p_2 - p_1)K_1(\eta) \quad (4.7)$$

where

$$K_1(\eta) \equiv p_1^2 p_2^2 + 2(1 - \nu - \chi)p_1 p_2 - \nu^2 \quad (4.8)$$

Since the  $p_1 \neq p_2$ , we see that the frequency of the vibrations can be obtained from the following equation:

$$K_1(\eta) = 0 \quad (4.9)$$

Noting that

$$K_1(0) = (1 - \nu)(3 + \nu) - 2\chi, \quad K_1(1) = -\nu^2 < 0 \quad (4.10)$$

we shall obtain the sufficient condition of the (4.9) equation root existence

$$\chi < 0.5(3 + \nu)(1 - \nu), \quad \nu \neq 0 \quad (4.11)$$

This condition is also a necessary one, since it is easy to show that  $K_1(\eta)$  function is monotonous in the  $[0, 1]$  interval. The root of the (4.9) equation is being found in the following way

$$\eta^2 = 1 + 2(1 - \nu - \chi)\sqrt{(1 - \nu - \chi)^2 + \nu^2} - 2(1 - \nu - \chi)^2 - \nu^2 \quad (4.12)$$

From (4.11) and (4.3) it follows that satisfying the condition

$$\lambda \geq 2k^2 h^2 (1 + \nu/3) \quad (4.13)$$

the localized vibrations in the vicinity of the free edge of the plate are being eliminated. In particular, for the metal plate ( $G \sim 10^{11} \text{ din/sm}^2$ ) and the relative wave-length  $kh = 10^{-2}$  the induction of the intensity of the magnetic field  $B_0 = \mu H_0$ , necessary for eliminating the localized vibrations, is turned out an order of 1.5 tesla.

Now let us assume that the semi-infinite plate occupies the  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$  region. We will consider the localized vibrations at the  $y = 0$  free edge, taking into account the damping condition

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w = 0 \quad (4.14)$$

In this case the solution of the equation (2.7), satisfying the (4.14) condition has the following appearance:

$$w = (c_1 e^{-\gamma_1 y} + c_2 e^{-\gamma_2 y}) \exp i(\omega t - kx) \quad (4.15)$$

where

$$\Gamma_1 = \left(1 + \sqrt{\eta^2 - 2\chi}\right)^2, \quad \Gamma_2 = \left(1 - \sqrt{\eta^2 - 2\chi}\right)^2 \quad (4.16)$$

The designations for the  $\eta^2$  and  $\chi$  are the same as in (4.3). The condition of the existence of the localized vibrations is formulated in the following way:

$$2\chi < \eta^2 < 1 + 2\chi \quad (4.17)$$

According to (3.10), the boundary conditions of the free edge  $y = 0$  look like

$$\left(1 + \frac{1-\nu}{2}\lambda\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (4.18)$$

From the requirement that the solution of (4.15) should satisfy the (4.18) boundary conditions we will obtain a dispersion equation, which can be brought to the following appearance after some definite transformations:

$$K_2(\eta) = \left(1 + \frac{1-\nu}{2}\lambda\right) \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 + 2(1-\nu) \left(1 + \frac{2-\nu}{4}\lambda\right) \Gamma_1 \Gamma_2 - \nu^2 = 0 \quad (4.19)$$

The calculation of the  $K_2(\eta)$  function values at the ends of (4.17) interval results in

$$K_2(2\chi) = (1-\nu) \left(3 + \nu + \frac{3-\nu}{2}\lambda\right) > 0, \quad K_2(1+2\chi) = -\nu^2 < 0 \quad (4.20)$$

This implies for this problem the localized vibrations existence ( $\nu \neq 1$ ) regardless of the magnitude of intensity of the magnetic field. We ought to notice that the influence of the magnetic field on the localized vibrations in the vicinity of  $y = 0$  free edge is essentially weak than it is in the vicinity of  $x = 0$  free edge. At the same time we should keep in mind that the intensity of the magnetic field should be also bounded by the  $\lambda < 1$  inequality.

## References

1. Kononov Y.K. On rayleigh type bending waves Akust Zh. 1960.V.6. №1. P.124-126 (in Russian).
2. Belubekyan M.V., Engibaryan J.A. Waves localized along the free edge of the plate with cubic symmetry // Proc of RAS. MTT. 1996. №6. P. 139-143 (in Russian).
3. Andronov I.V. Waves propagating along a narrow crack in an elastic plate. // Akust. Journ. 1999 V 45. №5. P. 444-449 (in Russian).

4. Gulgazaryan C.R., Gulgazaryan L.G. Vibration localized near the free end of semi-infinite moment free cylindrical shell. // Acoustic bulletin. 1999. V.2, №4. P. 42-48 (in Russian).
5. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of a perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. // Proc. of Vibr.Probl. 1962. V.3. №4. P. 225-234
6. Dunkin J.W., Eringen A.C. On the Propagation of Waves in electromagnetic elastic solid. // Int. J Eng. Sci 1963. V.1. P. 461-495.
7. Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekian M.V. On the three-dimensional problem of the plate magnetoelastic vibration. // PMM. 1971. V.35. №2. P. 216-228.
8. Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekian M.V. The magnetoelasticity of thin sheels and plates.--M.: Nauka. 1977. 272p (in Russian).
9. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. On the approximate methods in the problems of the plate magnetoelastic vibration. In "Thermal stresses in the elements of constructions". Kiev. 1979. V.19. P. 3-6 (in Russian).
10. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. Vibration and stability of the current-carrying elastic plates Yerevan. NAS of Armenia. 1992. 124 p. (in Russian).
11. Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E. Conductive plates and shells in magnetic fields. M.: Phys-Math. lit. 1996. 288p. (in Russian).
12. Sindo Y., Ohnishi I., Toyama S. Dynamic singular moments in a perfectly conducting Mindlin plate with a through crack under a magnetic field. // ASME J. Appl. Mech. 2000. V.67. P. 503-510.

Institute of Mechanics  
of Armenian NAS

Поступила в редакцию  
6.03.2003

УДК 539.3

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТО-  
УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО-  
ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Даноян З.Н.

Չ.Ն. Դանոյան

Անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրում կետային աղբյուրից տարածվող մագնիսաառածական ալիքների հարթ խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկված է հարթ խնդրում չորս առաջնական հաստատուններ ունեցող անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրում ակնյարթային լիմարյալի տիպի կետային աղբյուրից տարածվող մագնիսաառածական ալիքների հաշիվ խնդիրը, երբ միջավայրը գտնվում է արտաքին համասեռ հուստատուն մագնիսական դաշտում: Խնդրի լուծումները կառուցված են Մինոնոպի-Սոչյուկի կոմպլեքս լուծումների մեթոդով: Պատված են պայմաններ առածական հաստատունների և մագնիսական դաշտի ինտենսիվության միջև: Երբ ալիքները տարածվում են որոշակի բևեռավորված օրինաչափությամբ Մասնավորապես գտնված են պայմաններ, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել ալիքների ճակատների երկրաչափական ձևեր և ալիքային դաշտերում լակունանների առկայությունը:

Z.N. Danoyan

(On the Plane Problem of Magnetoelastic Waves Propagation from A Point Source in  
an Anisotropic Perfect Conducting Media

Рассмотрена плоская задача распространения магнитоупругих волн от точечного источника типа мгновенного импульса в анизотропной идеально-проводящей среде с четырьмя упругими постоянными в плоской задаче, находящейся во внешнем однородном постоянном магнитном поле. Решения задачи строятся методом комплексных решений Смирнова-Соболева. Найденны условия между упругими постоянными и интенсивностью магнитного поля, когда волны распространяются с определенной характеристической закономерностью. В частности, найдены условия с помощью которых можно определить геометрическую форму фронтов волн и наличие лакун в волновых полях

**Введение.** Волновые процессы в анизотропных упругих средах и, тем более, магнитоупругие волновые процессы сложны и многообразны. зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных, величины и направления внешнего магнитного поля, направлений распространения волн и т.д. В отличие от изотропных сред, где распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны, в анизотропных средах, а также изотропных и анизотропных средах в магнитном поле распространяются квазипродольные и квазипоперечные или быстрые и медленные волны. В изотропных средах волновой процесс был описан функционально-инвариантными или комплексными решениями волновых уравнений [1]. В работах [2-4] методом комплексных решений исследованы волновые процессы в анизотропных средах, причем в [4] предлагается уточняющий подход к построению комплексных решений. В работах [5,6] методом ком-

плескных решений изучены волновые процессы в изотропных средах, находящихся в магнитном поле. В работах [7,8] этим методом изучено поведение магнитоупругих волн в идеально-проводящих анизотропных средах. В этой работе продолжается изучение данного вопроса. Детально изучаются решения, соответствующие магнитоупругим волнам от точечного источника типа мгновенного импульса. Исследованы геометрические формы волновых фронтов и условия возникновения лакун в волновых полях. В работах [9,11] изучены поведения магнитоупругих волн при наличии сосредоточенных сил и импульсов в упругом полупространстве.

1. Уравнения магнитоупругих волн и их решение методом комплексных решений Смирнова-Соболева. Рассмотрим анизотропную идеально проводящую среду, уравнения движения которой в случае плоской деформации содержат четыре упругих постоянных [5]. Оси  $x, y, z$  прямоугольной системы координат совпадают с главными направлениями упругости среды. Перемещения не зависят от координаты  $z$ . Среда находится в однородном постоянном магнитном поле  $\vec{H}_0$ , направленное по одной из координатных осей. Уравнения движения этих сред в перемещениях имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} &= u_{tt} \\ e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} &= v_{tt} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u = f(x, y, t)$ ,  $v = g(x, y, t)$  — компоненты упругого перемещения  $\vec{u} = \{u, v, 0\}$ , индексы у  $u$  и  $v$  обозначают производные по  $x, y$  и  $t$ ;  $a_m, b_m, c_m, d_m, e_m$  — постоянные коэффициенты, определяемые

формулами ( $m = 0, 1, 2, 3$  соответствуют случаям:  $\vec{H}_0 = ()$ ,  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{i}$ ,  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{j}$ ,  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты координатной системы  $Oxyz$ ):

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, b_1 = b_0 + \chi, d_1 = d_{11}, e_1 = d_0 + \chi, c_1 = c_0 \\ a_2 &= a_0 + \chi, b_2 = b_{11}, d_2 = d_0 + \chi, e_2 = d_0, c_2 = c_0 \\ a_3 &= a_0 + \chi, b_3 = b_0 + \chi, d_3 = d_0, e_3 = d_{11}, c_3 = c_0 + \chi \\ a_0 &= c_{11} / \rho_0, b_0 = c_{22} / \rho_0, d_0 = c_{66} / \rho_0, c_0 = (c_{12} + c_{66}) / \rho_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$c_{11}$  — упругие постоянные,  $\rho_0$  — плотность среды,  $\chi = H_0^2 / 4\pi\rho_0$  — величина, характеризующая интенсивность внешнего магнитного поля, называемая скоростью Альфвена.

Область допустимых значений параметров  $a_0, b_0, c_0, d_0$ , т.е. коэффициентов уравнений (1.1) при  $m = 0$  (при отсутствии магнитного поля) входятся из условия положительной определенности формы упругой энергии [3]:

$$a_0 > 0, b_0 > 0, d_0 > 0, E_0 = a_0 b_0 - (c_0 - d_0)^2 > 0 \quad (1.3)$$

При этих условиях система (1.1) (при  $m = 0$ ) вполне гиперболична, что означает возможность распространения чисто упругих волн в любых направлениях в рассматриваемых средах.

Можно показать [8], что при условиях (1.3) и  $\chi > 0$  (что имеет место при наличии магнитного поля любой интенсивности) система уравнений магнитоупругих волн вполне гиперболична и магнитоупругие волны в рассматриваемых средах могут распространяться в любых направлениях, причем

$$a_m > 0, b_m > 0, d_m > 0, e_m > 0, |c_m| < c_E^{(m)} \quad (1.4)$$

$$c_E^{(m)} = \sqrt{a_m b_m} + \sqrt{d_m e_m}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

Ввиду того, что упругие постоянные реальных известных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям [3]:

$$a_0 > d_0, b_0 > d_0, c_0 > 0, d_0 > 0, E_0 > 0 \quad (1.6)$$

или, что то же самое,

$$A_0 = a_0 - d_0 > 0, B_0 = b_0 - d_0 > 0, d_0 > 0, 0 < c_0 < c_E^{(0)} \quad (1.7)$$

в работах [2-4] поведение упругих волн исследуются именно при этих условиях. В этой работе мы также будем исходить из неравенств (1.6) и  $\chi > 0$ .

Согласно методу комплексных решений Смирнова-Соболева [1] выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями:

$$u = f(\Omega), \quad v = g(\Omega) \quad (1.8)$$

где  $\Omega$  представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно  $x, y, t$ :

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y - k(\Omega) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь под  $f$  и  $g$  понимаются дважды непрерывно дифференцируемые функции, если величины  $l(\Omega), \dots, k(\Omega)$  вещественны. А если некоторые из этих величин комплексны, то  $f$  и  $g$  — аналитические функции в соответствующей области.

Определяя производные функций (1.8) с учетом (1.9) и подставляя их значения в систему (1.1), получим соотношения:

$$\begin{aligned} (a_m m^2 + d_m n^2 - l^2) f'(\Omega) + c_m m n g'(\Omega) &= 0 \\ c_m m n f'(\Omega) + (e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) g'(\Omega) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями (1.8).

Система (1.10) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\Delta \equiv (a_m m^2 + d_m n^2 - l^2)(e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) - c_m^2 m^2 n^2 = 0 \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) устанавливает зависимость между функциями  $l(\Omega), m(\Omega), n(\Omega)$ , а также, согласно (1.10), между производными  $f'(\Omega), g'(\Omega)$ .

Таким образом, класс функций (1.8) выражают решение системы (1.1), если их аргумент  $\Omega$  определен уравнением (1.9), с коэффициентами, подчиненными уравнениям (1.10).

2. Решения, выражающие магнитоупругие волны от точечного источника. Из класса функционально-инвариантных решений можно выделить решения, выражающие магнитоупругие волны от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат. Эти решения будут однородными решениями нулевого измерения. Для этого примем в уравнении (1.9)  $l(\Omega) = 1, n(\Omega) = \lambda, k(\Omega) = 0, m(\Omega) = -\theta$ . В этом случае уравнения (1.9), (1.10) и (1.11) примут вид:

$$t - \theta x + \lambda y = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} (a_m \theta^2 + d_m \lambda^2 - 1) f'(\theta) - c_m \theta \lambda g'(\theta) = 0 \\ -c_m \theta \lambda f'(\theta) + (e_m \theta^2 + b_m \lambda^2 - 1) g'(\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$b_m d_m \lambda^4 - p_m(\theta) \lambda^2 + r_m(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

$$p_m = b_m + d_m - (a_m b_m + d_m e_m - c_m^2) \theta^2, r_m = (a_m \theta^2 - 1)(e_m \theta^2 - 1) \quad (2.4)$$

$$q_m = p_m^2 - 4b_m d_m r_m = D_m \theta^4 - 2M_m \theta^2 + B_m^2, D_m = l_m^2 - 4a_m b_m d_m e_m \quad (2.5)$$

$$M_m = (b_m + d_m) N_m - (a_m d_m - b_m e_m) B_m, l_m = a_m b_m + d_m e_m - c_m^2 \quad (2.6)$$

$$A_m = a_m - e_m, B_m = b_m - d_m, N_m = A_m B_m - c_m^2 \quad (2.7)$$

В этом случае уравнение (2.1) определяет новую переменную величину  $\theta$  как функцию от  $x, y, t$ , а уравнение (2.3) определяет  $\lambda$  как функцию от  $\theta$ :

$$\lambda = \pm \lambda_k(\theta) = \pm \sqrt{\frac{p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}}{2b_m d_m}} \quad (k = 1, 2), \lambda_3 = -\lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_2 \quad (2.8)$$

функции  $\lambda_k(\theta)$  являются ветвями алгебраической функции  $\lambda = \lambda(\theta)$ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных и интенсивности магнитного поля (параметра  $\chi$ ).

Решения (1.8) системы (1.1) принимают вид:

$$u_k = f_k(\Omega_k), v_k = g_k(\Omega_k) \quad (2.9)$$

где  $\theta_k$  определяются, согласно (2.1), из уравнения:

$$1 - \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0 \quad (2.10)$$

а производные искомых функций, согласно (2.3), из уравнений:

$$\begin{cases} (a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - 1) f'_k(\theta_k) - c_m \theta_k \lambda_k g'_k(\theta_k) = 0 \\ -c_m \theta_k \lambda_k f'_k(\theta_k) + (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - 1) g'_k(\theta_k) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Для получения решения, соответствующего физическому смыслу задачи, необходимо просуммировать условия (2.11) [4]:

$$(a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) f_k'(\theta_k) + (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) g_k'(\theta_k) = 0 \quad (2.12)$$

Согласно (2.12), решения (2.9) можно представить в виде:

$$u(x, y, t) = - \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_k}^{0_1} [e_m \zeta^2 + b_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_k}^{0_1} [a_m \zeta^2 + d_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \quad (2.13)$$

где  $W_k$  — ветви произвольной аналитической функции  $W$ , однозначно определенной на вышеуказанной римановой поверхности функции  $\lambda(\theta)$ .

Равенство (2.10) устанавливает соответствие между вышеуказанной римановой поверхностью и областью на плоскости  $O\xi\eta$  (следовательно, и на плоскости  $Oxy$ ), где определены функции  $\theta_k(\xi, \eta)$ .

Из вышеизложенного следует, что для построения решения, характеризующего распространения волны от точечного источника, необходимо исследовать алгебраическую функцию  $\lambda(\theta)$ , ветви этой функции и соответствующую риманову поверхность. Для чисто упругой задачи этот вопрос детально изучен в [2-4], а для магнитоупругих волн — в [8].

Для изучения поведения корней  $\lambda_k(\theta)$  следует изучать поведение функций  $p(\theta)$ ,  $q(\theta)$  и  $r(\theta)$  из (2.5). Корни дискриминанта характеристического уравнения (2.3) определяют особые точки алгебраической функции  $\lambda(\theta)$ :

$$\Phi_m(\theta) = 16a_m d_m r_m(\theta) q_m(\theta) = 0 \quad (2.14)$$

что эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$r_m(\theta) = 0, q_m(\theta) = 0 \quad (2.15)$$

Корни функций  $p(\theta)$ ,  $q(\theta)$  и  $r(\theta)$  определяются выражениями:

$$\theta = \pm \theta_p^{(m)} = \pm \sqrt{\frac{b_m + d_m}{a_m b_m + d_m e_m - c_m^2}} \quad (2.16)$$

$$\theta = \pm \theta_{11}^{(m)} = \pm 1/\sqrt{a_m}, \quad \theta = \pm \theta_{12}^{(m)} = \pm 1/\sqrt{e_m} \quad (2.17)$$

$$\theta = \pm \theta_{qk}^{(m)} = \pm \sqrt{\frac{M_m + (-1)^k \sqrt{\Delta_m}}{D_m}}, \quad (k=1,2) \quad (2.18)$$

$$\Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4b_m d_m c_m^2 N_m \quad (2.19)$$

Характер и взаимоположение этих корней в зависимости от упругих постоянных и от  $\chi$  детально изучен в [8].

Так как точки  $\pm \theta_{qk}^{(m)}$  ( $k=1,2$ ) суть простые нули функции  $q_m(\theta)$  (за исключением случая, когда  $N_m = 0$ ), то внутренний радикал, входящий в

(2.8). будет однозначной функцией на плоскости  $\theta$  с разрезами, соединяющими точки разветвления  $\pm \theta_{q1}^{(m)}$ . Эти разрезы таковы:

- 1)  $N_m > 0$ :  $(\pm \theta_{q1}^{(m)}, \mp \theta_{q1}^{(m)})$ ;  $(\pm \theta_{q2}^{(m)}, \mp \theta_{q2}^{(m)})$
- 2)  $N_m < 0, D_m > 0, M_m < 0$ :  $(i|\theta_{q2}^{(m)}|, i|\theta_{q1}^{(m)}|)$ ;  $(-i|\theta_{q1}^{(m)}|, -i|\theta_{q2}^{(m)}|)$
- 3)  $N_m < 0, D_m > 0, M_m > 0$ :  $(\theta_{q1}^{(m)}, \theta_{q2}^{(m)})$ ;  $(-\theta_{q2}^{(m)}, -\theta_{q1}^{(m)})$
- 4)  $N_m < 0, D_m < 0$ :  $(\theta_{q1}^{(m)}, +\infty)$ ;  $(-\infty, -\theta_{q1}^{(m)})$   
 $(i|\theta_{q2}^{(m)}|, +i\infty)$ ;  $(-i\infty, -i|\theta_{q2}^{(m)}|)$

В случае  $N_m = 0$  имеют место равенства  $\pm \theta_{q1}^{(m)} = \pm \theta_{q2}^{(m)}$ , и поэтому двойные нули  $\pm \theta_{qk}^{(m)}$  не являются точками разветвления для внутреннего радикала функций  $\lambda_k(\theta)$ , т.е. при  $N_m = 0$  внутренний радикал функций  $\lambda_k(\theta)$  является однозначной функцией на всей комплексной плоскости  $\theta$ . Случай  $N_m = 0$  имеет место, например, для изотропной среды при отсутствии магнитного поля. В этом случае:

$$\theta_{q1}^{(0)} = \theta_{q2}^{(0)} = +\infty, \lambda_1(\theta) = \sqrt{1/a_0 - \theta^2}, \lambda_2(\theta) = \sqrt{1/d_0 - \theta^2}$$

В общем случае значение внутреннего радикала функций  $\lambda_k(\theta)$  будем фиксировать условием: он положителен при  $\theta = ib$ , где  $b$  достаточно малая положительная величина.

Взяв два листа плоскости  $\theta$  с вышеуказанными разрезами и склеив крест-накрест соответствующие берега разрезов, получим риманову поверхность однозначного определения функции  $T(\theta)$ :

$$T(\theta) = (2b_m d_m)^{-1} [p_m(\theta) + \sqrt{q_m(\theta)}] \quad (2.21)$$

выходящейся под внешним радикалом функции  $\lambda(\theta)$ . Ветви функции  $T(\theta)$  определены на плоскостях  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и имеют вид:

$$T_k(\theta) = (2b_m d_m)^{-1} [p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}] \quad (2.22)$$

Теперь рассмотрим поведение радикала  $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$  на двулистной римановой поверхности алгебраической функции  $T(\theta)$ . Функция  $T(\theta)$  обращается в ноль в четырех точках, которые являются корнями уравнения  $r_m(\theta) = 0$ , т.е. в точках  $\pm \theta_{k2}^{(m)}$  ( $k = 1, 2$ ). При вышеуказанном выборе ветвей  $T_k(\theta)$ , согласно результатам работы [8, табл.1] следует, что в зависимости от значений параметров  $a_0, b_0, d_0, c_0$  и  $\chi$  с точки зрения обращения в ноль функций  $T_k(\theta)$ , возможны следующие случаи:

1) При условии  $K_m > 0, \Lambda_m > 0, S_m > 0$  функция  $T_1(\theta)$  обращается в ноль в

точках  $\pm \theta_{1,1}^{(m)}$  плоскости  $\theta$ , римановой поверхности функции  $T(\theta)$ , а  $T_2(\theta)$  — в точках  $\pm \theta_{2,2}^{(m)}$  плоскости  $\theta_2$ .

2) При условии  $K_m < 0$ ,  $A_m > 0$ ,  $S_m > 0$  функция  $T_1(\theta)$  обращается в ноль в точках  $\pm \theta_{1,1}^{(m)}$  и  $\pm \theta_{2,2}^{(m)}$  плоскости  $\theta$ , римановой поверхности, а  $T_2(\theta)$  нигде не обращается в ноль.

3) При условии  $K_m < 0$ ,  $A_m = 0$ ,  $S_m > 0$  имеет место  $\theta_{1,1}^{(m)} = \theta_{2,2}^{(m)}$  и функция  $T_1(\theta)$  обращается в ноль в двух двойных точках  $\pm \theta_{1,1}^{(m)} = \pm \theta_{2,2}^{(m)}$  плоскости  $\theta$ , а  $T_2(\theta)$  нигде не обращается в ноль.

4) При  $K_m < 0$ ,  $A_m < 0$ ,  $S_m > 0$  функции  $T_k(\theta)$  ведут себя так же, как и случае 2), но здесь взаиморасположение нулей функции  $T_1(\theta)$  на плоскости  $\theta$  меняется на противоположные;

5) При  $K_m < 0$ ,  $A_m < 0$ ,  $S_m < 0$  функции  $T_k(\theta)$  ведут себя так же, как и случае 1), но здесь взаиморасположение точек  $\theta_{1,1}^{(m)}$  и  $\theta_{2,2}^{(m)}$  меняется на обратное, причем  $T_1(\theta_{2,2}^{(m)}) = 0$ ,  $T_2(\theta_{1,1}^{(m)}) = 0$ .

б) Случай  $K_m = 0$  является переходным между случаями 1) и 2), случай же  $S_m = 0$  — между случаями 4) и 5)

Отсюда следует, что в случаях 1) и 5) точки  $\pm \theta_{1,1}^{(m)}$  являются точками разветвления первого порядка функции  $\lambda(\theta)$ , причем в случае 1) две из них, а именно, точки  $\pm \theta_{1,1}^{(m)}$  являются точками разветвления для ветви  $\lambda_1(\theta) = \sqrt{T_1(\theta)}$  этой функции, а другие две, т.е. точки  $\pm \theta_{2,2}^{(m)}$ , являются точками разветвления для ветви  $\lambda_2(\theta) = \sqrt{T_2(\theta)}$  этой функции. В случае 5) роль точек  $\theta_{1,1}^{(m)}$  и  $\theta_{2,2}^{(m)}$  меняется на обратное. В случаях 2) и 4) опять же точки  $\pm \theta_{1,1}^{(m)}$  являются точками разветвления первого порядка для функции  $\lambda(\theta)$ , но в этих случаях все четыре особые точки являются точками разветвления для  $\lambda_1(\theta)$ ; ветвь  $\lambda_2(\theta)$  точек разветвления не имеет.

Заметим, что в случае 4) по сравнению со случаем 2) взаиморасположением точек  $\theta_{1,1}^{(m)}$  и  $\theta_{2,2}^{(m)}$  меняется на обратное. В случае 3) точки  $\pm \theta_{1,1}^{(m)}$  не являются точками разветвления для функции  $\lambda(\theta)$ . Этот случай (конической рефракции) является особым и требует дополнительных исследований.

На основе вышеприведенных рассуждений приходим к заключению, что радикал  $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$  на римановой поверхности функции  $T(\theta)$  будет однозначным, если на этой поверхности провести следующие разрезы:

— При условии 1) на плоскости  $\theta$  разрез:  $(-\theta_{1,1}^{(m)}, +\theta_{1,1}^{(m)})$ , а на  $\theta_2$  — разрез  $(-\theta_{2,2}^{(m)}, +\theta_{2,2}^{(m)})$  (фиг. 1 а, б, в, г);

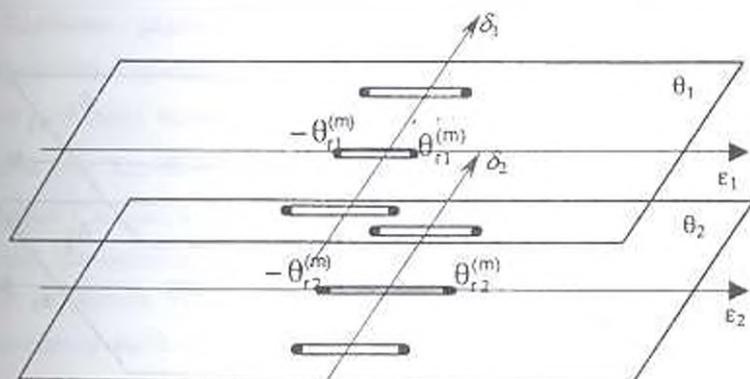
— При условии 2) и  $D_m > 0$ ,  $M_m > 0$  на плоскости  $\theta$ , разрезы:

$(\mp \infty, \mp \theta_{q2}^{(m)})$ ,  $(+\theta_{q1}^{(m)}, \mp \theta_{r2}^{(m)})$ ,  $(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$ , а на  $\theta_2$  — разрезы:  $(\mp \infty, \mp \theta_{q2}^{(m)})$ ,  $(-\theta_{q1}^{(m)}, +\theta_{q1}^{(m)})$ . (Фиг.2);

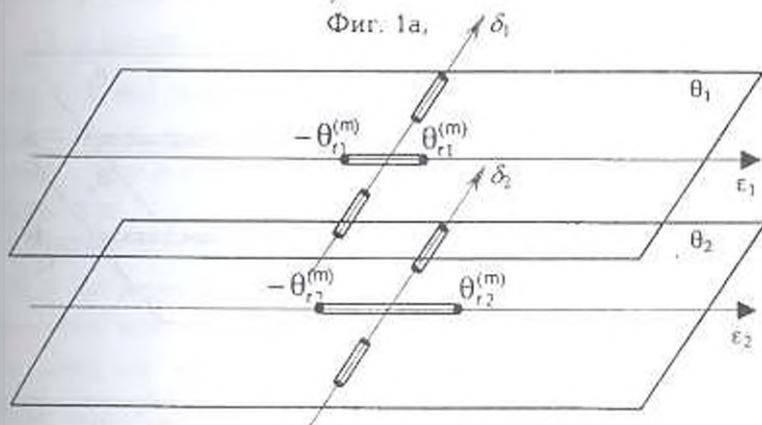
— При условии 2) и  $D_n < 0$  на плоскости  $\theta$ , разрезы:  $(\mp \theta_{q1}^{(m)}, \mp \theta_{r2}^{(m)})$ ,

$(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$ , а на  $\theta_2$  — разрез:  $(-\theta_{q1}^{(m)}, +\theta_{q1}^{(m)})$ . (Фиг.3).

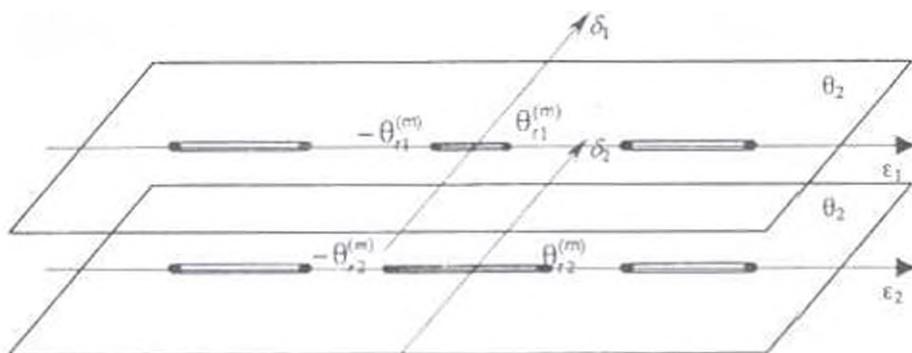
Случай 4) аналогичен случаю 2). Здесь взаиморасположение точек противоположно. Случай же 5) аналогичен случаю 1). В случае  $S_n = 0$  или  $K_n = 0$  являются предельными для вышеприведенных случаев.



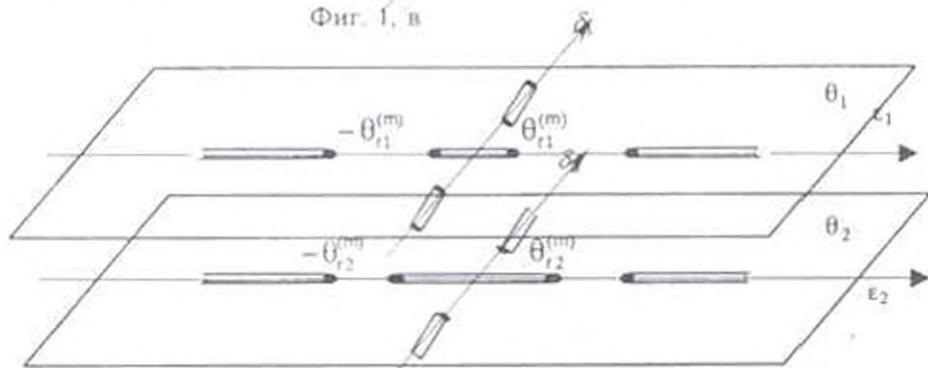
Фиг. 1а,



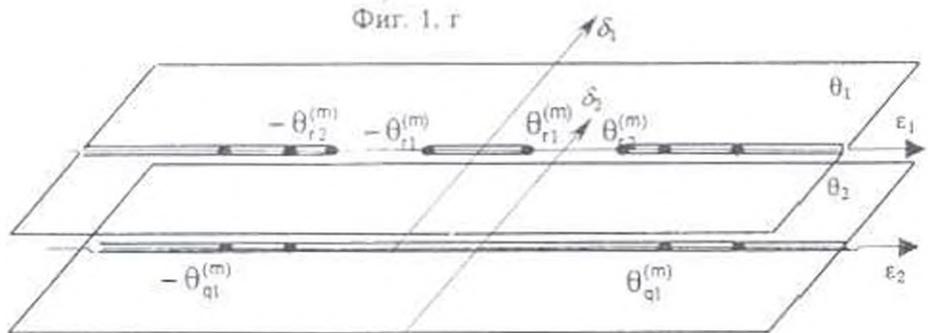
Фиг. 1, б



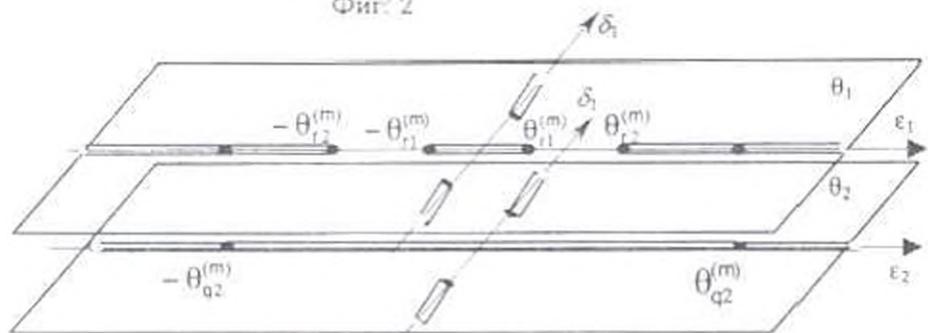
Фиг. 1, в



Фиг. 1, г



Фиг. 2



Фиг. 3

Для получения римановой поверхности функции  $\lambda(\theta)$  следует брать два комплекта двулистной римановой поверхности функции  $T(\theta)$  с одинаковыми разрезами, и склеить соответствующие берега этих разрезов, где функции  $\lambda_1$  и  $-\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $-\lambda_2$  принимают одинаковые значения, склеить друг с другом (берега разрезов двулистных поверхностной склеиваются крест-накрест). Ввиду сопряженности рассматриваемых функций относительно вещественных осей, решения можно найти, ограничиваясь рассмотрением двулистной римановой поверхности функции  $T(\theta)$ .

Значение радикала  $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$  на вышеуказанной римановой поверхности с приведенными разрезами будем фиксировать условием так, чтобы оно было положительным при  $\theta_1 = ib_1$ , где точка  $ib_1$  принадлежит мнимой оси плоскости  $\theta$ , причем  $b_1$  — достаточно малая положительная величина. Следует отметить, что в случае, когда корни  $\lambda_1(\theta)$  характеристического уравнения принадлежат первому типу [8], вышеприведенный выбор значения радикала  $\lambda(\theta)$  на римановой поверхности равносильен следующему выбору: значение радикалов  $\lambda_1(\theta)$  фиксируются условием, чтобы они были положительными при  $\theta_1 = -ib_1$  и  $\theta_2 = ib_1$ , где точки  $ib_1$  и  $-ib_1$  ( $b_1$  — достаточно малые положительные величины) принадлежат соответственно плоскостям  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , если же корни  $\lambda_1(\theta)$  принадлежат второму типу, то вышеуказанные выборы уже не равносильны (в этих случаях аналитические продолжения приводят к неодинаковым результатам).

Легко показать, что при вышеуказанном выборе ветвей  $\lambda_1(\theta)$  каждая из них на противоположных берегах разрезов, где они вещественны, принимают противоположные значения. Отсюда следует, что на берегах этих разрезов ветви  $\lambda_1(\theta)$  принимают все значения действительных корней характеристического уравнения  $\{\pm \lambda_1$  и  $\pm \lambda_2\}$ .

Магнитоупругие возмущения, исходящие из точки  $x=0$ ,  $y=0$  в момент времени  $t=0$ , будут в любой последующий момент времени  $t>0$  находиться в плоскости  $Oxy$  внутри фронтов магнитоупругой волны, отделяющей возмущенную область от невозмущенной в момент времени  $t$ . В любой момент времени  $t$  фронт волны может быть получен как огибающая прямых (2.10) при вещественных значениях  $\theta_1$  и  $\pm \lambda_1(\theta_1)$ .

Согласно вышеуказанному выбору ветвей  $\lambda_k(0)$  фронт волны можно получить, как огибающую прямых (2.10) при  $k=1$  и  $k=2$ , причем параметр  $\theta$  должен меняться на обоих берегах разрезол:

$$\xi_k = -\frac{\lambda_k'(\theta)}{\lambda_k(\theta) - \theta_k \lambda_k'(\theta)}, \quad \eta_k = -\frac{1}{\lambda_k(\theta) - \theta_k \lambda_k'(\theta)} \quad (2.23)$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что решение системы (1.1), характеризующее волновые поля магнитоупругих волн, испущенных из точечного источника типа мгновенного импульса, имеет вид [6]:

$$u(x, y, t) = -\sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [e_m \zeta^2 + b_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \right\} \\ v(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [a_m \zeta^2 + d_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \right\} \quad (2.24)$$

где функцию  $W$  необходимо выбрать так, чтобы вещественные части ее ветвей  $W_k$  обращались в ноль на берегах разрезол римановой поверхности, где функции  $\lambda_1(\theta)$  и  $\lambda_2(\theta)$  вещественны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.А. Некоторые вопросы распространения колебаний. — В кн. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.-Л.: ОНТИ, 1937, с. 468-617.
2. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. // ПММ. 1961. Т.25. Вып. 5. С.885-896.
3. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред // Изв. АН СССР, сер геофиз. 1963. №3. С. 391-396.
4. Осипов И.О. К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // Изв. РАН. МТТ. 1999. №4. С.102-112.
5. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1974. Т. 27. №5. С. 37-46.
6. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих колебаний от точечного источника. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1975. Т. 28. №1. С. 20-33.

7. Даноян З.Н. О распространении магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах с кубической симметрией. – В кн.: Исследования по мех. тв. деф. тела. Ереван: Изд. АН Арм.ССР. 1981. С. 104-109.
8. Даноян З.Н. К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред. // Механика, уч. записки ЕГУ. 1984. №1. С. 52-61.
9. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С.13-23.
10. Григорян Э.Х. О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1978. Т.31. №5. С. 48-62.
11. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Плоская магнитоупругая задача Лэмба. – Механика, межвуз. сб. науч. трудов, вып.3, Ереван. 1984. С. 68-76.

Институт Механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
09.06.2003

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ<sup>1)</sup>**

Товмасын А.Б.

Ա. Բ. Թովմասյան

Անիզոտրոպ երկշերտ ցերմատառձգական սալի ներքին եռաչափ խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը

Ջերմատառձգականության տեսության եռաչափ խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման միջոցով դիտարկվեց է անիզոտրոպ երկշերտ ցերմատառձգական սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ սալի փնձային մակերևութներից մեկի վրա տրված են լարումների արժեքները, իսկ մյուս դիմային մակերևույթի վրա տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչի և տանգենցիալ լարումների արժեքները: Գտնված 1 խնդրի լուծման ասիմպտոտիկան, որն առաջին աստիճանի 1 դասական դրվածքով խնդրների լուծման ասիմպտոտիկայից: Արտածված են ներքին խնդրում լարումների և տեղափոխությունների որոշման ռեկուրենտ բանաձևեր:

A.B. Tovmasyan

On asymptotic solution of a mixed boundary value three-dimensional interior problem for anisotropic two-layered thermoelastic plate

Многие прикладные задачи сейсмологии, фундаментостроения, контактного взаимодействия тонкостенных тел приводят к рассмотрению слоистых конструкций, когда между слоями выполняются условия полного контакта.

В работе методом полного интегрирования уравнений трехмерной задачи теории термоупругости рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой — нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Найдена асимптотика решения, существенно отличающаяся от асимптотики решения классически поставленной задачи пластин и оболочек [1,2]. Выведены рекуррентные формулы для определения напряжений и перемещений, соответствующие внутренней задаче.

1. Требуется найти решение уравнений пространственной задачи термоупругости двухслойного анизотропного тела в области

$$\Omega = \{(x, y, z) | x, y \in \Omega_0, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 \ll a\}$$

Считается, что анизотропия самая общая. На пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами

<sup>1)</sup> Работа доложена на «Международной конференции по теоретической и прикладной механике» (Фреван, октябрь 1994г.)

$$F_x^{(i)}(x, y, z), F_y^{(i)}(x, y, z), F_z^{(i)}(x, y, z), \quad i = 1, 2$$

Известен закон изменения температурного поля в пределах каждого слоя.

Чтобы решить поставленную трехмерную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости перейдем к безразмерным переменным  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/a$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $h = \max(h_1, h_2)$  и безразмерным перемещениям  $U^{(i)} = u^{(i)}/a$ ,  $V^{(i)} = v^{(i)}/a$ ,  $W^{(i)} = w^{(i)}/a$ . Решение задачи сводится к решению сингулярно возмущенной малым параметром  $\varepsilon = h/a$  системы при граничных и контактных условиях

$$\sigma_x^{(1)} = \varepsilon^{-1} \sigma_x^+(x, y), \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^+(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^+(x, y) \quad \text{при } z = h_1 \quad (1.1)$$

$$\sigma_x^{(2)} = \sigma_x^-(x, y), \quad \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^-(x, y), \quad w^{(2)} = \varepsilon^{-1} w^-(x, y) \quad \text{при } z = h_2 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \mu^{(1)} = \mu^{(2)}, v^{(1)} = v^{(2)}, w^{(1)} = w^{(2)} \quad \text{при } z = 0 \quad (1.3)$$

Решение вышеуказанной системы складывается из решения внутренней задачи и пограничного слоя [2,4]. Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q^{(i)} = \varepsilon^{k_i+s} Q^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad s = \overline{0, S} \quad (1.4)$$

Чтобы получить разрешимую систему относительно  $Q^{(i,s)}$ , необходимо, чтобы

$$q_i = -1 \quad \text{для } \sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \sigma_z^{(i)}, \sigma_{xz}^{(i)}, U^{(i)}, V^{(i)}, W^{(i)}$$

$$q_i = 0 \quad \text{для } \sigma_{yz}^{(i)}, \sigma_{xy}^{(i)} \quad (1.5)$$

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмерным со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x^{(i)} = \varepsilon^{-3+s} a^{-1} F_x^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y)$$

$$F_z^{(i)} = \varepsilon^{-2+s} a^{-1} F_z^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.6)$$

$$\theta^{(i)} = \varepsilon^{-1+s} \theta^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

2. Подставив (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости с учетом (1.5), (1.6), по известной процедуре получим следующую систему:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(i,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(i,s)}}{\partial \zeta} + F_x^{(i,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y^{(i,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(i,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial \zeta} + F_y^{(i,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(i,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(i,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(i,s-1)}}{\partial \zeta} + F_z^{(i,s-1)} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(i)} \sigma_x^{(i,s-1)} + a_{12}^{(i)} \sigma_y^{(i,s-1)} + a_{13}^{(i)} \sigma_z^{(i,s-1)} + a_{14}^{(i)} \sigma_{xz}^{(i,s-1)} + a_{15}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i,s-1)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{11}^{(i)} \theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial \eta} = a_{12}^{(i)} \sigma_x^{(i,s)} + a_{22}^{(i)} \sigma_y^{(i,s)} + \dots + a_{26}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s)} + \alpha_{22}^{(i)} \theta^{(i,s)} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial W^{(i,s)}}{\partial \xi} = a_{12}^{(i)} \sigma_x^{(i,s-1)} + a_{22}^{(i)} \sigma_y^{(i,s-1)} + a_{32}^{(i)} \sigma_z^{(i,s-1)} + a_{34}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i,s-1)} + a_{25}^{(i)} \sigma_{xz}^{(i,s-1)} + a_{36}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{22}^{(i)} \theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial \eta} = a_{14}^{(i)} \sigma_x^{(i,s-1)} + a_{24}^{(i)} \sigma_y^{(i,s-1)} + a_{34}^{(i)} \sigma_z^{(i,s-1)} + a_{44}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i,s-1)} + a_{45}^{(i)} \sigma_{xz}^{(i,s-1)} + a_{46}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{23}^{(i)} \theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial \xi} = a_{15}^{(i)} \sigma_x^{(i,s-1)} + a_{25}^{(i)} \sigma_y^{(i,s-1)} + \dots + a_{56}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{13}^{(i)} \theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial \xi} = a_{16}^{(i)} \sigma_x^{(i,s)} + a_{26}^{(i)} \sigma_y^{(i,s)} + a_{36}^{(i)} \sigma_z^{(i,s)} + a_{46}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i,s)} + a_{56}^{(i)} \sigma_{xz}^{(i,s)} + a_{66}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s)} + \alpha_{12}^{(i)} \theta^{(i,s)}$$

где  $a_{jk}^{(i)}$  — упругие коэффициенты податливости,  $\alpha_{ik}^{(i)}$  — коэффициенты теплового расширения,  $a$  — характерный размер срединной плоскости пластинки.

Учитывая, что  $Q^{(i,s)} = 0$  при  $s < 0$ , из системы (2.1) можно определить все неизвестные величины с точностью некоторых функций, зависящих только от переменных  $\xi, \eta$ . В результате имеем решение

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i,s)} &= \sigma_{z0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \sigma_x^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ W^{(i,s)} &= w^{(i,s)}(\xi, \eta) + w^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ V^{(i,s)} &= v^{(i,s)}(\xi, \eta) + v^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ U^{(i,s)} &= u^{(i,s)}(\xi, \eta) + u^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_x^{(i,s)} = A_{13} \sigma_{z0}^{(i,s)} + L_{11} u^{(i,s)} + L_{13} v^{(i,s)} + \sigma_x^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_y^{(i,s)} = A_{21} \sigma_{z0}^{(i,s)} + L_{22} u^{(i,s)} + L_{23} v^{(i,s)} + \sigma_y^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{yz}^{(i,s)} = A_{63} \sigma_{z0}^{(i,s)} + L_{33} u^{(i,s)} + L_{63} v^{(i,s)} + \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(i,s)} &= \sigma_{xz0}^{(i,s)}(\xi, \eta) - \zeta \left( \frac{\partial L_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{23}}{\partial \eta} \right) u^{(i,s)} - \zeta \left( \frac{\partial L_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{63}}{\partial \eta} \right) v^{(i,s)} - \\ &- \left( A_{13} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial \xi} + A_{63} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(i,s)} &= \sigma_{yz0}^{(i,s)}(\xi, \eta) - \zeta \left( \frac{\partial L_{33}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial \eta} \right) u^{(i,s)} - \zeta \left( \frac{\partial L_{63}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{23}}{\partial \eta} \right) v^{(i,s)} - \\ &- \left( A_{63} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial \xi} + A_{23} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

Здесь  $A_j$  – постоянные коэффициенты упругости, а  $L_j$  – дифференциальные операторы, приводимые в [5]. Величины  $Q^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta)$  – известные функции для каждого приближения  $s$ , если определены величины предыдущих приближений, и определяются по рекуррентным формулам, приводимым в [5].

В (2.2) неизвестными являются функции  $u^{(i,s)}, v^{(i,s)}, w^{(i,s)}, \sigma_{z0}^{(i,s)}, \sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}$ , которые определяются из условий (1.1)–(1.3). Удовлетворив условиям контакта (1.3), получим:

$$\begin{aligned} u^{(i,s)} &= u^{(2,s)}, v^{(i,s)} = v^{(2,s)} \\ W^{(1,s)} &= W^{(2,s)}, \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)} \\ \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

а удовлетворив условиям (1.1), (1.2), получим

$$\begin{aligned} w^{(i,s)} &= w^{(s)} + w^{*(i,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) \\ \sigma_{z0}^{(i,s)} &= \sigma_z^{(s)} - \sigma_z^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \zeta_1 = h_i/h \\ \sigma_{xz0}^{(i,s)} &= \sigma_{xz}^{(s)} + \sigma_{xz}^{*(i,s)} - \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) - \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \\ \sigma_{yz0}^{(i,s)} &= \sigma_{yz}^{(s)} + \sigma_{yz}^{*(i,s)} - \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) - \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для определения  $u^{(i,s)}, v^{(i,s)}$  получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} L_1 u^{(i,s)} + L_2 v^{(i,s)} &= P_1^{(i,s)} \\ L_3 u^{(i,s)} + L_4 v^{(i,s)} &= P_2^{(i,s)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $L_1, L_2, L_3, L_4$  – операторы в [5],

$$\begin{aligned} P_1^{(i,s)} &= \sigma_z^{(s)} - \sigma_z^{*(i,s)} - \sigma_z^{*(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) + \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \\ &- A_{13} \left( \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}}{\partial \xi} \right) + A_{63} \left( \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}}{\partial \eta} \right) \\ P_2^{(i,s)} &= \sigma_{yz}^{(s)} - \sigma_{yz}^{*(i,s)} - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) + \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \\ &- A_{33} \left( \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}}{\partial \xi} \right) + A_{23} \left( \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Определив перемещения  $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$ , по формулам (1.4), (1.5), (2.2)–(2.4) определяются все искомые величины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин// Инж. ж. МГГ. 1966. №6. С.116-121.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ИММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
3. Агаловян Л.А. О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий// Докл. АН Арм.ССР. 1979. Т. 69. С.151-156.
4. Васильева А.Б., Бугузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки// Изв. АН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С 3-11.

Арцахский госуниверситет  
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
13.05.2003

УДК 62-501.7

О ПОСТРОЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ С ЖЕЛАЕМЫМ  
СПЕКТРОМ В САР

Григорян Ф. П.

Ֆ. Պ Գրիգորյան

Ցանկալի սպեկտրով կառավարման կառուցման մասին ավտոմատ կառավարման  
համակարգերում

Ավտոմատ կարգավորման համակարգերում դիտարկված 1 խնդիր ցանկալի սպեկտրով  
կարգավորիչի մուտքի ազդակի գործակիցների ընտրության մասին ընդհանուր դեպքում, ելք  
որ կարգավորիչի մուտքային և ելքային ազդակները հանդիսանում են սկալյարներ:

Ստացված է բանաձև, որը կապ է հաստատում կարգավորիչի մուտքային ազդակի  
գործակիցների (տեքստում  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  առողը) և նախապես սրված ցանկալի քվերի միջև:

F. P. Grigoryan

On the Management in the System of Automatic Regulation with Desired Spectrum

В системе автоматического регулирования рассмотрена задача о выборе коэффициентов  
входного сигнала регулятора с желаемым спектром в общем случае, когда входные и  
выходные сигналы регулятора являются скалярами. Получена формула, выражающая  
зависимость между коэффициентами входного сигнала регулятора (в тексте строка  
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ) и между наперед заданными желаемыми числами).

**Постановка задачи.** Пусть задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + hu$$

$$u = \int g(t-t')v(t')dt'$$

$$v = h \cdot x$$

или

$$\frac{dx}{dt} = Ax + h \int g(t-t')v x(t')dt' \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — столбцовая матрица размером  $n \times 1$  — вектор  
состояния процесса (штрих на матрице означает транспонирование),  $v$  —  
скаляр, входной сигнал регулятора,  $g$  — скаляр, импульсная переходная  
функция регулятора,  $u$  — скалярное управляющее воздействие  
рассматривается как выходной сигнал регулятора,  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)', \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Предполагается, что система (1) обладает свойством управляемости. Желательные числа являются

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}; \underbrace{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_2}}_{n_2}; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_3}; \quad n_1 + n_2 + n_3 = n \quad (2)$$

$$\text{при } \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_1; \quad \mu \neq \lambda_i, \quad \mu \neq 0 \quad (3)$$

Требуется построить  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , так чтобы система (1) при новых неизвестных  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  приводилась к виду

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, & (i = 1, 2, \dots, n_1) \\ \frac{dy_j}{dt} = \mu y_j, & (j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \\ \frac{dy_k}{dt} = 0 y_k, & (k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = e^{\lambda_i t} c_i \\ y_j = e^{\mu t} c_j \\ y_k = c_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{(1)} = e^{J_1 t} c^{(1)} \\ J_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}) \\ y^{(2)} = e^{\mu t} c^{(2)} \\ y^{(3)} = c^{(3)} \end{cases} \quad (4)$$

где  $C^{(n_1)} = (C_1, \dots, C_{n_1})'$ ,  $C^{(n_2)} = (C_{n_1+1}, \dots, C_{n_1+n_2})'$ ,  $C^{(n_3)} = (C_{n_1+n_2+1}, \dots, C_n)'$  — столбцы из произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (y_1, \dots, y_{n_1})', \quad y^{(2)} = (y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2})', \quad y^{(3)} = (y_{n_1+n_2+1}, \dots, y_n)' \\ y &= (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})' \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагаются также следующие условия, при которых для передаточной функции регулятора  $R(\lambda)$  удовлетворяются

$$\begin{aligned} R_i(\mu) &= \frac{d^i R(p)}{dp^i} \Big|_{p=\mu} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n_2 - 1) \\ R_i(0) &= \frac{d^i R(p)}{dp^i} \Big|_{p=0} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n_3 - 1) \end{aligned} \quad (6)$$

Решение. Выполнив в системе (1) преобразование

$$x = Sz \quad S = (h, Ah, \dots, A^{n-1}h) \quad (7)$$

получим

$$\frac{dz}{dt} = A_n z + h_n \int_0^t g(t-t') z(t') dt' \quad (8)$$

где [2]

$$A_0 = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -\rho_n \\ 1 & 0 & \dots & -\rho_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & -\rho_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} h_c &= S^{-1}h = (1, 0, \dots, 0)^T \\ q &= bS = (q_1, q_2, \dots, q_n) \\ A^*h &= -\rho_n h - \rho_{n-1} Ah - \dots - \rho_1 A^{n-1}h \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь сделаем в системе (8) замену переменных по формуле

$$z = \bar{K}y \quad (10)$$

где

$$\bar{K} = K\chi(t) \quad (11)$$

$y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) решение системы (4).  $\chi(t)$  приводит матрицу  $J$  системы [1]

$$d\eta/dt = J\eta$$

к квазидиагональному виду:

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) \quad (12)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$n_1 \times n_1 \qquad n_2 \times n_2 \qquad n_3 \times n_3$

и

$$\chi(t) = \text{diag}(E_{n_1}, \chi_2(t), \chi_3(t)) \quad (13)$$

$$E_{n_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \chi_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_2-2}}{(n_2-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \chi_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_3-1}}{(n_3-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_3-2}}{(n_3-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$n_1 \times n_1 \qquad n_2 \times n_2 \qquad n_3 \times n_3$

к диагональному виду [1]

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{n_2}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_3}) \quad (14)$$

Матрицы  $\bar{K}$  и  $K$  представим в блочном виде

$$\bar{K} = (\bar{K}_{(n_1)}, \bar{K}_{(n_1+n_2)}, \bar{K}_{(n)}) \quad K = (K_{(n_1)}, K_{(n_1+n_2)}, K_{(n)})$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}_{(n_1)} &= (\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_{n_1}), \quad \bar{K}_{(n_1+n_2)} = (\bar{K}_{n_1+1}, \dots, \bar{K}_{n_1+n_2}), \quad \bar{K}_{(n)} = (\bar{K}_{n_1+n_2+1}, \dots, \bar{K}_n) \\ K_{(n_1)} &= (K_1, \dots, K_{n_1}), \quad K_{(n_1+n_2)} = (K_{n_1+1}, \dots, K_{n_1+n_2}), \quad K_{(n)} = (K_{n_1+n_2+1}, \dots, K_n) \end{aligned} \quad (15)$$

Из (5), (10), (13) и (15) следует

$$z = \bar{K}y = (\bar{K}_{(n_1)}, \bar{K}_{(n_1+n_2)}, \bar{K}_{(n)}) \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = (K_{(n_1)}, K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t), \bar{K}_{(n)}\chi_3(t)) \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

или

$$z = K_{(n_1)}y^{(1)} + K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t)y^{(2)} + K_{(n)}\chi_3(t)y^{(3)} \quad (17)$$

Из (16) можно заметить

$$\bar{K}_{(n_1)} = \tilde{K}_{(n_1)}, \quad \bar{K}_{(n_1+n_2)} = K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t), \quad \bar{K}_{(n)} = K_{(n)}\chi_3(t) \quad (18)$$

Из (17) следует

$$\frac{dz}{dt} = K_{(n_1)} \frac{dy^{(1)}}{dt} + K_{(n_1+n_2)} \left[ \chi_{2,2}(t) \frac{dy^{(2)}}{dt} + \frac{d\chi_{2,2}(t)}{dt} y^{(2)} \right] + K_{(n)} \left[ \chi_{3,3}(t) \frac{dy^{(3)}}{dt} + \frac{d\chi_{3,3}(t)}{dt} y^{(3)} \right] \quad (19)$$

Подставляя (17) и (19) в систему (8), получим

$$\begin{aligned} &K_{(n_1)} \frac{dy^{(1)}}{dt} + K_{(n_1)} [\chi_{2,2}(t) \frac{dy^{(2)}}{dt} + \frac{d\chi_{2,2}(t)}{dt} y^{(2)}] + K_{(n)} [\chi_{3,3}(t) \frac{dy^{(3)}}{dt} + \frac{d\chi_{3,3}(t)}{dt} y^{(3)}] = \\ &= A_\alpha [K_{(n_1)}y^{(1)} + K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t)y^{(2)} + K_{(n)}\chi_3(t)y^{(3)}] + \\ &- h_\alpha \int_a^t g(t-t')q[K_{(n_1)}y^{(1)}(t') + K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t')y^{(2)}(t') + K_{(n)}\chi_3(t')y^{(3)}(t')]dt' \end{aligned} \quad (20)$$

$$\alpha = n_1 + n_2$$

Выбор матрицы  $q$  и  $K$  ограничим требованием

$$K_{(n_1)} \frac{dy^{(1)}}{dt} = A_\alpha K_{(n_1)}y^{(1)} + h_\alpha \int_a^t g(t-t')qK_{(n_1)}y^{(1)}(t')dt' \quad (21)$$

$$K_{(n_1+n_2)} \left[ \chi_{2,2}(t) \frac{dy^{(2)}}{dt} + \frac{d\chi_{2,2}(t)}{dt} y^{(2)} \right] = A_\alpha K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t)y^{(2)} + h_\alpha \int_a^t g(t-t')qK_{(n_1+n_2)}\chi_2(t')y^{(2)}(t')dt'$$

$$K_{(n)} \left[ \chi_{3,3}(t) \frac{dy^{(3)}}{dt} + \frac{d\chi_{3,3}(t)}{dt} y^{(3)} \right] = A_\alpha K_{(n)}\chi_3(t)y^{(3)} + h_\alpha \int_a^t g(t-t')qK_{(n)}\chi_3(t')y^{(3)}(t')dt'$$

После некоторых преобразований подсистемы (21) приводятся соответственно к виду:



$$K_{(n_1)} J_1 = A_0 K_{(n_1)} + h_0 \int_0^{\infty} g(s) q K_{(n_1)} e^{-J_1 s} ds \quad (22)$$

$$K_{(\alpha)} (\Gamma_2 + \mu E_{n_2}) = A_0 K_{(\alpha)} + h_0 \int_0^{\infty} g(s) q K_{(\alpha)} \chi_2(-s) e^{-\mu s} ds \quad (23)$$

$$K_{(n)} \Gamma_3 = A_0 K_{(n)} + h_0 \int_0^{\infty} g(s) q K_{(n)} \chi_3(-s) ds \quad (24)$$

где  $\Gamma_2, \Gamma_3$  — матрицы сдвига соответственно порядка  $n_2 \times n_2, n_3 \times n_3$ .

Отдельно рассмотрим выражения (22) — (24).

Обозначим

$$R(p) = \int_0^{\infty} g(s) e^{-ps} ds, \quad R_i(p) = \frac{1}{i!} \frac{d^i R(p)}{dp^i} = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{\infty} g(s) s^i e^{-ps} ds \quad (25)$$

$$i = (1, 2, \dots, n)$$

$$U(\lambda) = A_0 + h_0 \int_0^{\infty} g(s) e^{-\lambda s} ds q = A_0 + h_0 R(\lambda) q$$

Имея в виду (6) и (25), подсистемы (22) — (24) распадаются соответственно на следующие:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\lambda_1) K_1 = \lambda_1 K_1 \\ U(\lambda_2) K_2 = \lambda_2 K_2 \\ \dots \\ U(\lambda_n) K_n = \lambda_n K_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (U(\mu) - \mu E) K_{n+1} = 0 \\ (U(\mu) - \mu E) K_{n-2} = K_{n+1} \\ \dots \\ (U(\mu) - \mu E) K_{\alpha} = K_{\alpha-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} U(0) K_{\alpha-1} = 0 \\ U(0) K_{\alpha-2} = K_{\alpha-1} \\ \dots \\ U(0) K_n = K_{n-1} \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\alpha = n_1 + n_2$$

После определения строки  $q = bS$  из подсистем (26) определяются столбцы  $K_1, K_2, \dots, K_n$ .

Теперь переходим к определению  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

Характеристический многочлен матрицы  $U(\lambda) = A_0 + h_0 R(\lambda)$  из (25) имеет вид [3]

$$U(\lambda) - \lambda E = -R(\lambda) [q_1(\lambda^{n-1} + \rho_1 \lambda^{n-2} + \dots + \rho_{n-1}) + q_2(\lambda^{n-2} + \rho_1 \lambda^{n-3} + \dots + \rho_{n-2}) + \dots + q_n] + \lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \dots + \rho_{n-1} \lambda + \rho_n = -R(\lambda) [\Delta_1(\lambda) q_1 + \Delta_2(\lambda) q_2 + \dots + q_n] + \Delta(\lambda) \quad (27)$$

где  $\Delta_1(\lambda) = \lambda^{n-1} + \rho_1 \lambda^{n-2} + \rho_2 \lambda^{n-3} + \dots + \rho_{n-1}, k = 0, 1, \dots, n, \Delta_0(\lambda) = \Delta(\lambda), \Delta_n(\lambda) = 1$

При  $\lambda_j \neq \lambda_i, \lambda_j \neq \mu, \lambda_j \neq 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$  ( $\lambda_j$  — собственные чис-



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Delta_1(0)q_1 + \Delta_2(0)q_2 + \dots + q_n = \Delta(0)/R(0) \\
 \Delta'_1(0)q_1 + \Delta'_2(0)q_2 + \dots + \Delta'_{n-1}(0)q_{n-1} = \Delta'(0)/R(0) \\
 \dots \\
 \dots \\
 \Delta_1^{(n_1-1)}(0)q_1 + \Delta_2^{(n_1-1)}(0)q_2 + \dots + \Delta_{n-(n_1-1)}^{(n_1-1)}(0)q_{n-(n_1-1)} = \Delta^{(n_1-1)}(0)/R(0)
 \end{array} \right. \quad (32')$$

( $n_1 > n_2$ )

Объединяя системы (29), (31) и (32') в одно матричное выражение, окончательно получаем систему уравнений относительно  $q_1, q_2, \dots, q_n$ :

$$Lq' = \Delta_0 \quad (33)$$

где для простоты обозначены

$$L = \begin{vmatrix}
 \Delta_1(\lambda_1) & \Delta_2(\lambda_1) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\lambda_1) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\lambda_1) & \dots & \Delta_{n-1}(\lambda_1) & 1 \\
 \Delta_1(\lambda_2) & \Delta_2(\lambda_2) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\lambda_2) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\lambda_2) & \dots & \Delta_{n-1}(\lambda_2) & 1 \\
 \dots & \dots \\
 \Delta_1(\lambda_{n_1}) & \Delta_2(\lambda_{n_1}) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\lambda_{n_1}) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\lambda_{n_1}) & \dots & \Delta_{n-1}(\lambda_{n_1}) & 1 \\
 \Delta_1(\mu) & \Delta_2(\mu) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\mu) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\mu) & \dots & \Delta_{n-1}(\mu) & 1 \\
 \Delta'_1(\mu) & \Delta'_2(\mu) & \dots & \Delta'_{n-(n_2-1)}(\mu) & \Delta'_{n-(n_2-2)}(\mu) & \dots & \Delta'_{n-1}(\mu) & 0 \\
 \dots & \dots \\
 \Delta_1^{(n_2-2)}(\mu) & \Delta_2^{(n_2-2)}(\mu) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}^{(n_2-2)}(\mu) & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \Delta_1(0) & \Delta_2(0) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}(0) & \Delta_{n-(n_2-2)}(0) & \dots & \Delta_{n-1}(0) & 1 \\
 \Delta'_1(0) & \Delta'_2(0) & \dots & \Delta'_{n-(n_2-1)}(0) & \Delta'_{n-(n_2-2)}(0) & \dots & \Delta'_{n-1}(0) & 0 \\
 \dots & \dots \\
 \Delta_1^{(n_1-1)}(0) & \Delta_2^{(n_1-1)}(0) & \dots & \Delta_{n-(n_2-1)}^{(n_1-1)}(0) & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} \Delta(\lambda_1) / R(\lambda_1) \\ \Delta(\lambda_2) / R(\lambda_2) \\ \dots \\ \Delta(\lambda_n) / R(\lambda_n) \\ \Delta(\mu) / R(\mu) \\ \Delta'(\mu) / R(\mu) \\ \dots \\ \Delta^{(n_2-1)}(\mu) / R(\mu) \\ \Delta(0) / R(0) \\ \Delta'(0) / R(0) \\ \dots \\ \Delta^{(n_1-1)}(0) / R(0) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Используя условия (3) и (28), нетрудно увидеть, что матрица  $L$  невырожденная. Поэтому из (33) находим

$$q' = L^{-1} \Delta_0 \Rightarrow q = \Delta_0' (L^{-1})'$$

Тогда по (9) окончательно получим

$$b = \Delta_0' (L^{-1})' S^{-1} \quad (35)$$

После того, как найдена строка  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , мы определяем столбцы матрицы  $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$  из (26).

**Следствие.** Согласно (3), (7), (10) и (11) найдем решение системы (1)

$$x = SK\chi(t)e^{At}C \quad (36)$$

**Пример.** Рассмотрим задачу программы управления космического аппарата при посадке на луну [4]. Движение космического аппарата в конце посадки будем рассматривать в относительной системе координат  $OXYZ$ . Начало относительной системы координат поместим в расчетную точку прилуновения.

Для простоты рассмотрим однородную часть системы уравнений

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\omega^2 x_1 + U\alpha_2 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = 2\omega^2 x_3 + U\alpha_4 \end{cases} \quad (37)$$

где

$$\alpha_2^2 + \alpha_4^2 = 1 \quad (38)$$

$\omega$  – угловая скорость на круговой орбите радиуса  $r_0$ .

Обозначим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (39)$$

примем

$$U = \int_{-\infty}^t g(t-t')v(t')dt', \quad v = bx, \quad h = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

тогда система (37) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + h \int_{-\infty}^t g(t-t')bx(t')dt' \quad (40)$$

Предположим, что наперед заданными желательными числами являются  $1, 1, 0, 0$ .

Требуется построить  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  так, чтобы система (40) приводилась к виду

$$\begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = y_2, \\ y_3' = 0 \cdot y_3, \\ y_4' = 0 \cdot y_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^t \\ y_2 = C_2 e^t \\ y_3 = C_3 \\ y_4 = C_4 \end{cases}$$

Предполагается, что

$$R'(p)/r_{-1} = 0, \quad R''(p)/r_{-1} \neq 0, \quad R'(p)/r_{-2} = 0, \quad R''(p)/r_{-2} \neq 0 \quad (40,1)$$

Решение. Предположим  $\alpha_2 = \cos 60^\circ = 1/2$ , следовательно,

$\alpha_4 = 1 - \alpha_2 = 3/4$ ,  $\alpha_1 = \sqrt{3}/2$ . Тогда по (39) матрица (7) имеет вид

$$S = (h, Ah, A^2 h, A^3 h) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -0.5\omega^2 \\ 0.5 & 0 & -0.5\omega^2 & 0 \\ 0 & 0.5\sqrt{3} & \omega^2 & 0 \\ 0.5\sqrt{3} & \omega^2 & 0 & -\omega^4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Так как  $|S| = 3\omega^4/16 \neq 0$ , легко получить обратную матрицу

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -4\sqrt{3}\omega^2/3 & 0 & 0 & 2\sqrt{3}/3 \\ 8\omega^2/3 & 4\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{3}/3 & -4/3 \\ -4\sqrt{3}/3 & -2/\omega^2 & 0 & 2\sqrt{3}/3\omega^2 \\ 8/3 - 2/\omega^2 & 4\sqrt{3}/3\omega^2 & 2\sqrt{3}/3\omega^2 & -4/3\omega^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Из (39), (41) и (42) следуют

$$h_0 = S^{-1}h = (1, 0, 0, 0)', \quad A_0 = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Из (27) и (43) получаются

$$\Delta(\lambda) = |A_0 - \lambda E| = \lambda^4 + \omega^2\lambda^2; \quad \Delta_1(\lambda) = \lambda^3 + \omega^2\lambda \\ \Delta_2(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2; \quad \Delta_3(\lambda) = \lambda; \quad \Delta_4(\lambda) = 1 \quad (44)$$

Из (34) и (44) найдем

$$L = \begin{bmatrix} \Delta_1(1) & \Delta_2(1) & \Delta_3(1) & 1 \\ \Delta_1'(1) & \Delta_2'(1) & \Delta_3'(1) & 0 \\ \Delta_1(0) & \Delta_2(0) & \Delta_3(0) & 1 \\ \Delta_1'(0) & \Delta_2'(0) & \Delta_3'(0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \omega^2 & 1 + \omega^2 & 1 & 1 \\ 3 + \omega^2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{bmatrix} \Delta(1)/R(1) \\ \Delta'(1)/R(1) \\ \Delta(0)/R(0) \\ \Delta'(0)/R(0) \end{bmatrix} \quad (45)$$

Из (45) имеем  $|L| = 1$ . Можно получить вид для обратной

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ 2\omega^2 & -\omega^2 & -2\omega^2 & 1 + \omega^2 \\ -3\omega_2 & \omega^2 & 3\omega^2 + 1 & 2\omega^2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Из (40<sub>1</sub>) следует вид для передаточной функции регулятора [5] в окрестности  $p = 0$

$$R(p) = \frac{G_1(p)}{p^2 + G_1(p)}, \quad G_1(0) \neq 0$$

в окрестности  $p = 1$

$$R(p) = \frac{G_2(p)}{(p-1)^2 + G_2(p)}, \quad G_2(1) \neq 0$$

Следовательно,

$$R(0) = 1, \quad R(1) = 1 \quad (47)$$

Из (45) и (47) получаем  $\Delta_0 = [\Delta(1), \Delta'(1), \Delta(0), \Delta'(0)]$

Поэтому из (44) найдем

$$\Delta_0 = (1 + \omega^2; 4 + \omega^2; 0; 0)'$$

Используя формулу (35), из (42), (46) и (48) окончательно получим

$$b = [2(\omega^2 - 1); 4; 0; 0]$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973. 432 с.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1967. 596 с.
3. Чернятин В. А. О построении устойчивых линейных систем регулирования // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1967. №1. С. 5-12.
4. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов. М.: Наука, 1965. 455с.
5. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 395с.

Государственный Инженерный  
Университет Армении

Поступила в редакцию  
29.03.2001

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР  
 В ЗАДАЧЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ  
 БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩЕЙ  
 ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Элоян А. В.

Ա.Վ. Էլոյան

Սեղմված ձողի սեփական տատանումների խնդրում հենարանների  
 դիրքի օպտիմալ ըտրոքումը

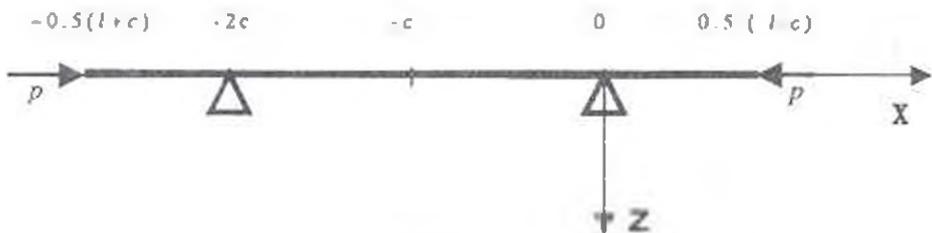
Դիտարկվում է առաձգական ձողի հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որը ապահովում է երկու ծայրերում հողակապորեն ամրացված և մեկ ծայրում կոշտ ամրացված սեղմված ձողի սեփական տատանումների առաջին անցափ (բերված) հաճախականության ամենամեծ արժեքը տարբեր  $k$ -երի համար:

A.V. Eloyan

The optimal choice of bearing disposition on solving natural oscillations of spring beams

Рассматривается вопрос оптимального выбора расположения опор в задаче колебаний упругой балки, нагруженной сжимающей продольной силой.

Пусть упругая балка длиной  $l$  в центре постоянного поперечного сечения нагружена сжимающей поперечной силой  $P$ . Балка опирается на две опоры, расположенные симметрично на расстоянии  $c$  от середины.



Փիգ.1

Уравнение колебаний балки при действии сжимающей продольной силы  $P$  имеет вид [1]:

$$\frac{\partial w^4}{\partial x^4} + \frac{P}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала,  $I$  – жесткость на изгиб,  $S$  – площадь поперечного сечения балки.

Представим прогиб балки  $w(x, t)$  в виде:

$$w(x, t) = f(x)e^{i\omega t} \quad (2)$$

где  $\omega$  — искомая частота сжатой балки.

Подставляя уравнение (2) в уравнение (1), получим:

$$f^{IV} + k^2 f'' - \lambda^4 f = 0 \quad (3)$$

где введены обозначения  $k = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$ ,  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2 l^4}{EI}}$ .

При симметричных колебаниях балки ищем  $f(x)$  в виде:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } -c \leq x \leq 0 \\ f_2(x) & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5l - c \end{cases} \quad (4)$$

тогда решение уравнения (3) представится в виде:

$$f_i(\bar{x}) = a_i \operatorname{ch} \gamma_1 \bar{x} + b_i \operatorname{sh} \gamma_1 \bar{x} + c_i \cos \gamma_2 \bar{x} + d_i \sin \gamma_2 \bar{x} \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

где  $\bar{x} = x/l$ ,  $i = 1$  при  $\bar{x} \in [-\alpha; 0]$ ;  $i = 2$  при  $\bar{x} \in [0; 0.5(1-\alpha)]$ ,  $\alpha = c/l$

$$\gamma_1 = \sqrt{-\frac{\kappa^2}{2} + \sqrt{\lambda^4 + \frac{\kappa^4}{4}}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} + \sqrt{\lambda^4 + \frac{\kappa^4}{4}}} \quad (6)$$

Решение (5) должно удовлетворять условиям симметрии в точке  $\bar{x} = -\alpha$ , условиям сопряжения в точке  $\bar{x} = 0$  и условиям свободного края в точке  $x = 0.5(1-\alpha)$

$$f_1' = 0, \quad f_1''' = 0 \quad (\bar{x} = -\alpha) \quad (7)$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_1' = f_2', \quad f_1'' = f_2'' \quad (\bar{x} = 0) \quad (8)$$

$$f_2'' = 0, \quad f_2''' + k^2 f_2' = 0 \quad \bar{x} = 0.5(1-\alpha) \quad (9)$$

В случае антисимметричных колебаний балки взамен условий (7) имеются условия  $f_1 = 0, \quad f_1'' = 0 \quad (\bar{x} = -\alpha)$ .

Для определения восьми постоянных  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i = 1, 2$ ) получается система восьми однородных алгебраических уравнений.

$$c_1 = -a_1, \quad c_2 = -a_2, \quad a_2 = a_1, \quad b_2 = \operatorname{th} \gamma_1 \alpha, \quad d_2 = \operatorname{tg} \gamma_2 \alpha$$

$$b_2 = a_1 \left[ 1 + (\operatorname{ch} \gamma_1 \alpha, \cos \gamma_2 \alpha) / \gamma - \gamma^2 (\operatorname{sh} \gamma_1 \alpha, \sin \gamma_2 \alpha) \right] / \left[ \gamma^2 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha, \sin \gamma_2 \alpha - \gamma \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha, \cos \gamma_2 \alpha \right]$$

$$d_2 = a_1 \left[ 1 + (\operatorname{sh} \gamma_1 \alpha, \sin \gamma_2 \alpha) / \gamma + \gamma^2 (\operatorname{ch} \gamma_1 \alpha, \cos \gamma_2 \alpha) \right] / \left[ \gamma^2 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha, \sin \gamma_2 \alpha - \gamma \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha, \cos \gamma_2 \alpha \right] \quad (10)$$

$$a_1 \left[ \operatorname{th} \gamma_1 \alpha + \gamma \operatorname{tg} \gamma_2 \alpha - (1 + \gamma + \gamma^{-1} + \gamma^3) \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha, \cos \gamma_2 \alpha + (1 - \gamma^2) \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha, \sin \gamma_2 \alpha \right] / \left[ \gamma^2 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha, \sin \gamma_2 \alpha - \gamma \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha, \cos \gamma_2 \alpha \right] = 0$$

$$\alpha_1 = (0.5 - \alpha), \quad \gamma = \gamma_2 / \gamma_1$$

откуда из условия  $a_1 \neq 0$  получается следующее характеристическое уравнение для определения частот собственных симметричных колебаний балки при действии сжимающей продольной силы.

$$[\text{th } \gamma_1 \alpha + \gamma \text{tg } \gamma_2 \alpha] - [(1+\gamma)\gamma + (1+\gamma^4) \text{ch } \gamma_1 \alpha_1 \cos \gamma_2 \alpha_1 + (1-\gamma^2)\gamma \text{sh } \gamma_1 \alpha_1 \sin \gamma_2 \alpha_1] / \left[ \gamma^3 \text{ch } \gamma_1 \alpha_1 \sin \gamma_2 \alpha_1 - \gamma \text{sh } \gamma_1 \alpha_1 \cos \gamma_2 \alpha_1 \right] = 0 \quad (11)$$

Аналогично из условия (7)–(10) получаем следующее характеристическое уравнение для определения собственных симметричных колебаний при действии сжимающей продольной силы.

$$[\text{cth } \gamma_1 \alpha - \gamma \text{ctg } \gamma_2 \alpha] = [(1+\gamma)\gamma + (1+\gamma^4) \text{ch } \gamma_1 \alpha_1 \cos \gamma_2 \alpha_1 + (1-\gamma^2)\gamma \text{sh } \gamma_1 \alpha_1 \sin \gamma_2 \alpha_1] / \left[ \gamma^3 \text{ch } \gamma_1 \alpha_1 \sin \gamma_2 \alpha_1 - \gamma \text{sh } \gamma_1 \alpha_1 \cos \gamma_2 \alpha_1 \right] = 0 \quad (12)$$

здесь  $\alpha_1 = 0.5 - \alpha, \quad \gamma = \gamma_2 / \gamma_1, \quad (13)$

Имея решение характеристического уравнения, для каждого

$$k = \sqrt{\frac{PI^2}{EI}} \quad \text{можно определить} \quad \lambda_i = \sqrt{\frac{\rho S \omega_i^2 l^4}{EI}} \quad (i=1,3,5,\dots)$$

Для практических целей представляет интерес нахождение первой (наименьшей) частоты собственных колебаний для различных значений сжимающей силы.

$$\omega_1(\alpha, k) = \min \omega_i(\alpha, k)$$

Имея значения  $\omega_1(\alpha, k)$ , можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: найти

$$\alpha = c/l \quad \text{так, чтобы} \quad \omega_1(\alpha, k) \rightarrow \max \quad \text{при заданном } k.$$

В табл. 1 для различных  $k$  и  $\alpha$  приведены безразмерные значения

$$\bar{\omega}(\alpha, k) = \omega_1(\alpha, k) \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} l^2$$

Таблица 1

$\alpha$	$k=0$	$k=0.2\pi$	$k=0.4\pi$	$k=0.6\pi$	$k=0.8\pi$	$k=0.9\pi$	$k=\pi$
0	14.063	13.506	12.781	10.726	8.964	8.369	0
0.1	15.461	14.846	14.078	12.902	9.986	9.358	0
0.2	19.589	19.255	18.378	15.928	13.097	12.376	0
0.259	22.887	22.137	19.510	19.018	15.904	14.992	0
0.3	21.930	21.576	18.496	18.079	14.831	13.875	0
0.4	15.226	15.031	13.966	12.334	11.391	7.818	0
0.5	9.869	9.666	9.048	7.896	5.919	4.301	0

Расчеты безразмерного значения первой частоты собственных колебаний показывают, что для всех  $k \in [0, \pi]$  наибольшее значение

первой частоты получается при  $\alpha = 0.259$  ( $c = 0.259l$ ), причем для всех  $k$  значение первой частоты существенно увеличивается оптимальным выбором  $\alpha$  по сравнению с шарнирно-опертой по концам балки (последняя строка табл. 1,  $\alpha = 0.5$ ) и консольной балки длиной  $0.5l$  (первая строка таблицы 1,  $\alpha = 0$ ):

При  $k = \pi$  частоты колебаний для всех  $\alpha$  принимают нулевое значение, т.к. при  $k = \pi$ ,  $P = P_{кр} = \pi^2 EI / l^2$ , как показано в [2], не зависит от  $\alpha$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кререр С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
2. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ер. Изд. ЕГУ. 1997. С. 114-117.

Гюмрийский образовательный комплекс  
Государственного инженерного университета Армении

Поступила в редакцию  
13.05.2003

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ  
ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЛЕБАНИЯ  
ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНКИ

Ванцян А.А.

Ա.Ա. Վանցյան

Հաստատուն մագնիսական դաշտի ազդեցության փորձարարական ուսումնասիրությունը  
ֆերոմագնիսական սալի հարկադրական տատանումների վրա

Փորձարարական ճանապարհով դիտարկված է հաստատուն մագնիսական դաշտի  
ազդեցությունը ֆերոմագնիսական սալի ընդայնական հարկադրական տատանումների  
լայնույթի, արագության և արագացման վրա: Բերված գրաֆիկների միջոցով ցույց է տրված  
նշված մեծությունների կախվածությունը մագնիսական դաշտից սալի մինչ և ետոեզոնանսային  
հանախությունների համար:

A.A. Vantsyan

Experimental Investigation of the Influence of Direct Magnetic Field on the Forced Vibration of  
Ferromagnetic Plate

Экспериментальным путем рассмотрено влияние постоянного магнитного поля на  
амплитуды, скорости и ускорения вынужденных колебаний ферромагнитной пластины. С  
помощью приведенных графиков показана зависимость указанных величин для до и после-  
резонансных частот пластины.

Вопросам влияния электромагнитных полей на колебательные процессы в электропроводящих и ферромагнитных пластинах посвящен ряд работ [1-13]. В частности, в [1,4,7] выводятся уравнения магнитоупругих колебаний для идеально проводящих пластинок и стержней в начальном магнитном поле. При этом используется обобщенный принцип плоских сечений. В [2] рассматриваются магнитоупругие продольные, вынужденные гармонические колебания идеально проводящей упругой пластинки в пустоте, в начальном постоянном магнитном поле. Теоретически показана возможность идеального резонанса, т.е. неограниченное увеличение амплитуды колебания при  $H = 0$ . Показано также, что при  $H \neq 0$  амплитуды колебания вследствие излучения электромагнитных волн в пустоту остаются ограниченными. Теоретически определены основные частоты резонанса и коэффициенты изменения амплитуд перемещений и напряжений.

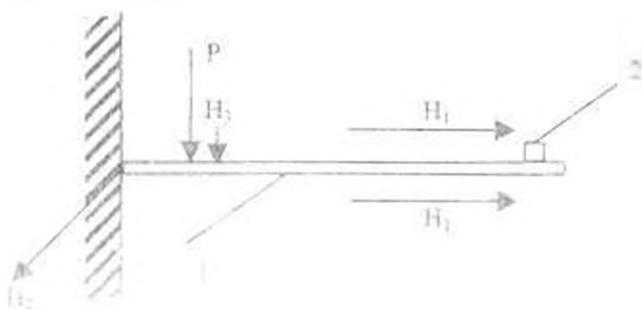
Задачи о распространении магнитоупругих волн в твердых телах рассмотрены в [8,9]. Теоретически анализ устойчивости и колебания плоской ферроупругой пластинки в однородном статическом магнитном поле, направленном под углом к ее плоскости, проведен в [6]. Показано, что

потеря устойчивости происходит лишь тогда, когда поле является почти нормальным к пластинке. Найдено критическое значение напряженности магнитного поля, при котором происходит потеря устойчивости свободно опертой круглой пластинки. Получено дисперсионное соотношение между частотой, волновым числом и напряженностью. В [10] для изотропной упругой как диэлектрической, так и электропроводящей, магнитомягкой ферромагнитной пластинки исследуются как качественное изменение основных величин физического процесса под действием магнитного поля, так и качественно новые явления, обусловленные взаимодействием механических и электромагнитных процессов в деформируемых тонких телах. Исходя из основных положений классической теории тонких пластин, выведены уравнения и соответствующие условия, описывающие поведение проводящих магнитомягких ферромагнитных пластин в магнитном поле.

В [5] предлагается математическая модель, основанная на квазистатическом решении для намагничивания деформируемой пластины в поперечном магнитном поле.

В [11] в пространственной постановке изучена задача вибрации магнитоупругой пластинки как в поперечном, так и продольном поле. Проведены эксперименты для проводящей пластинки с целью выяснения влияния магнитного поля на величину амплитуды, скорости и ускорения колеблющейся под действием осциллирующей силы пластины. Экспериментальные исследования показали [12,13], что воздействием магнитного поля индукцией  $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$  тл в несколько десятков раз изменяются указанные характеристики колебания электропроводящей пластины. Выявлено также, что экспериментальное изучение влияния магнитного поля можно проводить на резонансных для пластин частотах, что дает возможность при сравнительно малых полях наблюдать физические процессы, происходящие в пластинах.

Целью настоящей работы является экспериментальное изучение изгибных волн для вынужденных и свободных колебаний ферромагнитной консольной пластинки в продольном и поперечном



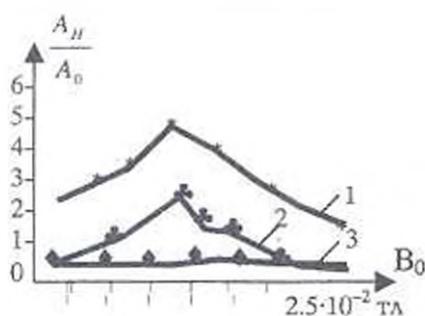
Фиг.1

постоянном магнитном поле (МП). В качестве ферромагнитного материала использовались стальные пластинки разных толщин. Пластинка 1 помещалась в магнитное поле сфероида (фиг.1) и посредством осциллирующей силы

$$p = p_0 \sin \omega t$$

пластинке сообщались колебания. Сигналы, полученные от датчика 2, подавались на вход усилителя осциллографа, а затем и на вход цифрового прибора, указывающие значения перемещения, скорости и ускорения точки пластинки, где закреплен датчик 2.

С целью увеличения мощности получаемого сигнала датчик был закреплен в конце пластинки. Измерения для выбранной пластинки проводились как при наличии, так и при отсутствии МП. Эксперименты проводились как для разных мод пластинки, так и вне резонансных частот. При одних и тех же условиях изучались относительные величины  $A_{II}/A_0$ ,  $V_{II}/V_0$ ,  $W_{II}/W_0$  при разных величинах постоянного МП. Во избежание случайных ошибок измерений, эксперименты проводились несколько раз при одних и тех же условиях.

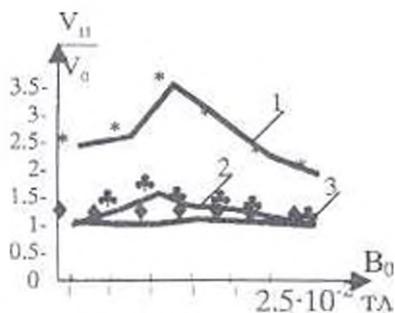


Фиг. 2

$\bar{H}(H_1, 0, 0)$ ,  $2h = 2.10^{-3}$  м  
1.  $\omega = 90$  гц, 2.  $\omega = 120$  гц, 3.  $\omega = 146$  гц

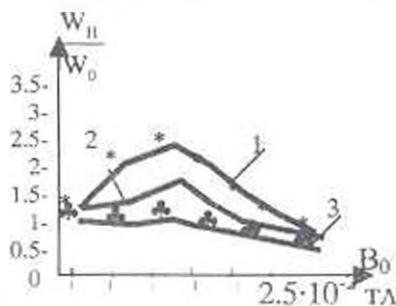
На фиг. 2–6 показаны соответствующие зависимости от величины продольного  $\bar{H}(H, 0, 0)$  МП для разных частот осциллирующей силы  $p$ . На фиг. 7, 8 приведены результаты экспериментов для полей  $\bar{H}(0, H_2, 0)$  и  $\bar{H}(0, 0, H_3)$  соответственно.

Как видно из фиг. 2, при частоте осциллирующей силы  $p$ , равной приблизительно  $\Pi$  резонансной гармонике, где



Фиг. 3

$\bar{H}(H_1, 0, 0)$ ,  $2h = 2.10^{-3}$  м  
1.  $\omega = 90$  гц, 2.  $\omega = 120$  гц, 3.  $\omega = 146$  гц



Фиг. 4

$\bar{H}(H_1, 0, 0)$ ,  $2h = 2.10^{-3}$  м  
1.  $\omega = 90$  гц, 2.  $\omega = 120$  гц, 3.  $\omega = 146$  гц

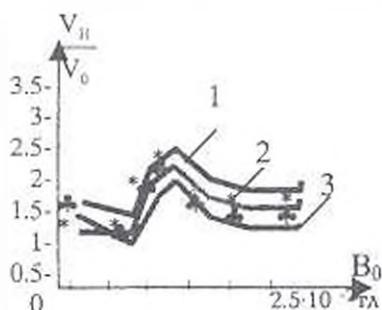
расчетная  $\omega_{II} = 142.35$  гц (кривая 1), увеличение амплитуды от МП носит экстремальный характер, что качественно совпадает с результатами [10]. Колебание пластинки имеет такое же поведение и при частоте силы  $p$ .

близкой (при меньших и при больших) к резонансной (кривая 2, где  $\omega = 120$  гц).

Уменьшение амплитуды колебания наблюдается в случае после резонансной частоты. Указанные зависимости более наглядны для скорости и ускорения колебания.

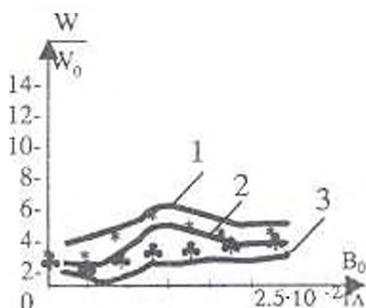
На фиг. 3, 4 показаны соответствующие зависимости, где кривые 1 зависимость  $\frac{V_{II}}{V_0}(B)$  и  $\frac{W_{II}}{W_0}(B)$  до резонансной частоты, кривые 2 близкие, к резонансной, а кривая 3 фиг. 3 соответствует колебанию пластинки после резонансной частоты.

На фиг. 5,6 приведены аналогичные зависимости для половины частоты третьей гармоники, где расчетная частота для третьей гармоники (при  $H = 0$ )  $\omega_{III} = 1603.53$  гц.



Фиг. 5

$\vec{H} (H_1, 0, 0)$ ,  $2h = 8 \cdot 10^{-3}$  м  
 $1. \omega = 840$  гц,  $2. \omega = 850$  гц,  $3. \omega = 900$  гц

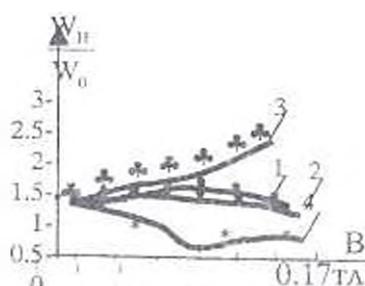


Фиг. 6

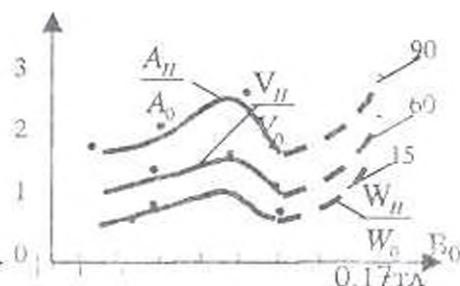
$\vec{H} (H_1, 0, 0)$ ,  $2h = 8 \cdot 10^{-3}$  м  
 $1. \omega = 840$  гц,  $2. \omega = 850$  гц,  $3. \omega = 900$  гц

На фиг. 5 приведены зависимости  $\frac{V_{II}}{V_0}(B)$  для стальной пластинки толщиной  $2h = 8 \cdot 10^{-3}$  м при разных частотах осциллирующей силы  $p$ , где для расчетной II гармоники при  $H = 0$ ,  $\omega_{II} = 968$  гц. Кривая 2 показывает зависимость при резонансной частоте, а кривые 1 и 3 — до и после резонансной частот соответственно. На фиг. 6 приведены соответствующие кривые для ускорения колебания пластинки толщиной  $2h = 8 \cdot 10^{-3}$  м. Как видно из фиг. 2-6, происходящие внутри пластинки явления существенно зависят от толщины пластинки и частоты колебания, последняя зависимость опять-таки приводит к зависимости от толщины. На мой взгляд, такая зависимость объясняется явным выделением внутри пластинки скин-слоя, приводящим к зависимости явлений по толщине пластин. Результаты экспериментов для стальной пластинки толщиной  $2h = 3 \cdot 10^{-3}$  м в поле  $\vec{H}(0, H_2, 0)$  приведены на фиг. 7. В этом

эксперименте максимальное значение индукции МП  $B \sim 0.17$  тл. Для наглядности на фиг. 7 приведены графики  $\frac{W_{II}}{W_0}(B)$  для второй гармоники, где расчетная  $\omega_{II} = 213.5$  гц. Как и следовало ожидать, при больших полях также имеет место аналогичная зависимость.



Фиг. 7

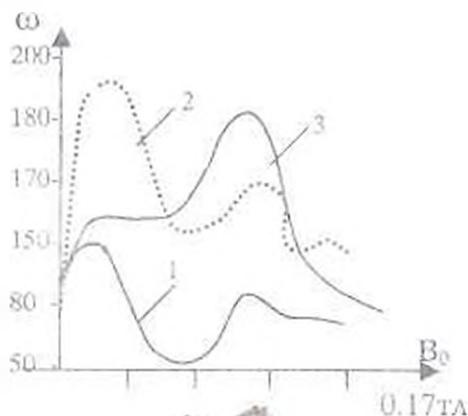


Фиг. 8

$\vec{H}(0, H_z, 0)$ ,  $2h = 3 \cdot 10^{-2}$  м  
 1.  $\omega = 222$  гц, 2.  $\omega = 240$  гц, 3.  $\omega = 210$  гц,  
 4.  $\omega = 217$  гц

$\vec{H}(0, 0, H_z)$ ,  $2h = 2 \cdot 10^{-2}$  м,  $\omega = 180$  гц

Значительное изменение указанных величин наблюдается при наличии поля  $\vec{H}(0, 0, H_z)$ , где для максимального значения магнитной индукции  $B_0 \sim 0.17$  тл увеличение амплитуды происходит по порядку в 90 раз, а для скорости и ускорения в  $\sim 60$  и в  $\sim 15$  раз соответственно. Указанные зависимости приведены на фиг. 8, где кривые 1, 2, 3 показывают  $\frac{A_{II}}{A_0}$ ,  $\frac{V_{II}}{V_0}$ ,  $\frac{W_{II}}{W_0}$  соответствующие изменения. Такое сильное



Фиг. 9

изменение указанных величин в поле  $\vec{H}(0, 0, H_z)$  по сравнению с полем  $\vec{H}(H_z, 0, 0)$  было теоретически показано в [10], где также отмечено, что зависимость амплитуды от величины индукции магнитного поля является монотонно убывающей для послерезонансной частоты, а при колебании пластинки с частотой дорезонансной, нарушается монотонная

зависимость амплитуды от индукции МП. В этом случае амплитуда (как показывают эксперименты настоящей работы, также скорость и ускорение) колебаний имеет точку максимума и наличие МП приводит к существенному увеличению амплитуды колебаний. Проведены также экспериментальные исследования по изучению влияния МП на собственные частоты колебания пластинки

Результаты экспериментов приведены на фиг.9, где кривая 1 соответствует стальной пластинке  $2h = 5 \cdot 10^{-3}$  м в поле  $\vec{H}(0,0,H_0)$ , а кривые 2 и 3 – для алюминиевой и стальной пластинки в поле  $\vec{H}(H_1,0,0)$ . Таким образом, характер влияния МП на вынужденные и свободные находящиеся в МП колебания пластинки существенно отличается. Если при вынужденных колебаниях МП приводит к увеличению исследуемых величин, то при свободно находящейся в МП ферромагнитной пластинки МП приводит к уменьшению амплитуды и демпфированию колебания, что было также отмечено в [5]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and arcs assuming the principle of plane sections //Proceedings of vibration problems. Warsaw 1962 Vol 3 №4. PP 225 – 234
2. Kaliski S. Magnetoelastic resonance vibration of a perfectly conducting plate in a magnetic field. Proceedings of vibration problems. Warsaw. 1962. Vol. 3 №4 PP.235 – 243
3. Kaliski S., Michalec J. The resonance amplification of a magnetoelastic wave radiated from a cylindrical cavity. Proceedings of vibration problems. Warsaw. 1963 Vol.1 №4 PP.7 – 15
4. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматгиз, 1966. 287с
5. Мун Ф.С., Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле //Тр. Американского общества инженеров-механиков, сер. Е. ПМ. 1969 Т.36. С 98 – 108.
6. Мун Ф.С. Механика ферромагнитных пластинок в однородном магнитном поле. //Тр. Американского общества инженеров-механиков, сер. Е. ПМ Т 37 №1 1970 С 160 – 166
7. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с

8. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Нелинейные колебания пластины в продольном магнитном поле. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1982. Т.35. №1. С.16–22.
9. Dunkin J.W., Eringen A.C. On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid. *Int.J. Engng. Sci* 1963. PP.461–495.
10. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. „Тигран Мец“. 1999. 437с.
11. Bagdoyev A.G., Vantsian A.A Theoretical and experimental investigations of waves in plate in magnetic field for space and averaged problems. *Int. J. Solids and Structures* 39. (2002) PP.225—259.
12. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Сафарян Ю.С. Теоретические и экспериментальные исследования изгибных волн в пластинах в магнитном поле для пространственной и осредненной постановки.// Информационные технологии и управление №2001.
13. Ванцян А.А., Григорян Н.К., Сафарян Ю.С. Экспериментальное исследование влияния постоянного магнитного поля на вынужденные поперечные колебания пластины.// Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т.55. №2. С.63-67.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
20.12.2002

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
ЭКСТРУДИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Петросян А.С.

Հ.Ս. Պետրոսյան

Արտանդված մետաղաբեկային կոմպոզիցիոն նյութերի ֆիզիկա-մեխանիկական  
հատկությունների ուսումնասիրումը

Աշակվել է մետաղաբեկերի ձևավորման տեխնոլոգիա: Գնահատվել է նաև կապված և տար  
արտանդված սղոճի, մոլիբդենի և վոլֆրամի մետաղաբեկերով փորձանմուշների  
հատկությունները: Տրված է մեխանիկական հատկությունների համեմատական ցուցանիշներ,  
ինչպես նաև միկրոկառուցվածքային հետազոտություն:

H.S. Petrosyan

Investigation on physical an mechanical properties of extrude fiber composites

Разработана технология формирования металлических волокон. Оценены свойства  
спеченных и экструдированных материалов из волокон меди, молибдена и вольфрама. Даны  
сравнительные показатели по механическим свойствам, а также микроструктурный анализ.

Развитие современной техники выдвигает новые повышенные тре-  
бования к прочности, устойчивости и надежности конструкций из компо-  
зиционных материалов, в том числе и металлокомпозитивов, при их  
эксплуатации. Решение этих вопросов можно достичь как путем  
оптимального проектирования, так и применением новых композитов с  
необходимыми свойствами, полученными современными методами  
переработки.

Среди методов твердофазного формирования композиционных  
материалов порошковая металлургия занимает ведущее место благодаря  
мобильности технологического исполнения.

С целью комплексного изучения закономерностей структурообразо-  
вания порошково-волокнистых композиций, т.е. армированных материа-  
лов, естественно, представляют интерес исследования методов получения,  
а также изучение, комплекс их физико-механических свойств.

Научные основы металлургии волокна разработаны Большиным [1].  
Им установлено, что давление прессования

$$P = K(\sigma_T)_K V^3 = P_K V^3 = P_K \alpha \quad (1)$$

откуда  $P_K = P/\alpha = K(\sigma_T)_K$  - контактное напряжение:  $V^3 = \alpha$  -  
безразмерное контактное сечение, зависящее от диаметра волокна

$$(\sigma_T)_K \leq P_K \leq HB_{\max}, 1 \leq K \leq 15 \quad (2)$$

где  $(\sigma_T)_K$  - предел текучести при изгибе деформированного металла (иногда эта величина может снизиться до предела упругости или пропорциональности);  $HB_{\max}$  - твердость максимально наклепанного деформированного металла.

В работе [2] предпринята попытка оценить свойства спеченных волокнистых материалов при помощи нижеприведенной зависимости, предложенной Бальшиным:

$$\frac{\sigma_{\text{пор}}}{\sigma_{\text{ком}}} = V^m = (1 - \Pi)^m \quad (3)$$

где  $\sigma_{\text{пор}}$  - предел прочности при растяжении пористого материала;  $\sigma_{\text{ком}}$  - предел прочности компактного материала;  $V$  - относительная прочность;  $\Pi$  - пористость;  $m$  - константа (в большинстве случаев  $m = 2,2 \dots 4,0$ ).

При проведении настоящих исследований в качестве исходных материалов были использованы дискретные волокна из меди (ММ), молибдена (МЧ) и вольфрама (ВА). Экструзия предварительно формованных (прессованных) брикетов ( $\varnothing = 24$  мм,  $H = 40$  мм) осуществлялась по технологии, схематически приведенной на фиг.1.

Известно, что волокна, по сравнению с порошками, имеют плохую сыпучесть и малую насыпную плотность, вследствие чего они неравномерно распределяются в рабочей полости пресс-формы. Для устранения этого недостатка волокна подвергались предварительной обработке, а именно, - войлокованию, которое проводили по методике, разработанной Институтом металлургии НАН РФ [3].

На плотность волокнистого материала влияют размеры волокон, средства для войлокования и скорости осаждения. Наибольшая плотность достигается при осаждении коротких и тонких волокон.

В зависимости от размеров волокон и плотности войлока, каждое волокно может иметь до 100 контактных связей с соседними волокнами, что на порядок превышает количество межчастичных связей в порошковых телах [4]. Такая эффективность связей между структурными элементами определяет комплекс физико-механических свойств сформованных и спеченных изделий.

Применение высоких давлений прессования и температур спекания способствует повышению прочности вышеупомянутых связей. Переработка металлического войлока в изделия осуществляется известными методами порошковой металлургии.



Фиг. 1. Схема технологии изготовления волокнистого материала

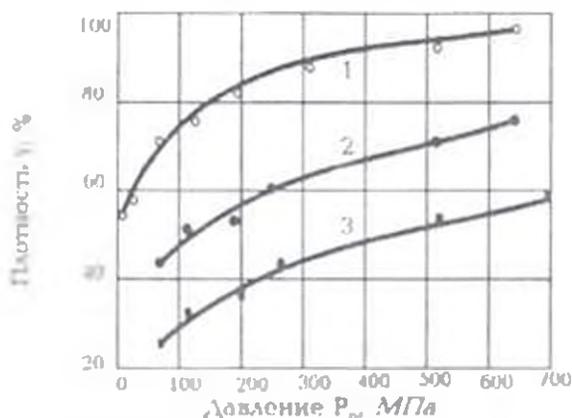
На фиг.2 приведена графическая зависимость плотности от давления прессования медного (мягкого), молибденового (средней твердости) и вольфрамоого (твердого) волокнистых композитов. Как видно из фиг. 2, для достижения одинаковой плотности композита ( $\gamma = 0,6$ ) давление прессования медного волокна составляет 20 МПа, молибденового – 250 МПа, вольфрамового – 1000 МПа, т.е. соотношение давлений – 1:12,5 : 50.

Сравнения результатов механических испытаний экструдированных образцов из медных волокон (табл. 1, 2) показывает, что у волокнистой меди предел прочности при растяжении на 33...45% выше, чем у порошковой и литой меди.

Как и следовало ожидать, прочность экструдированных образцов зависит от диаметра исходного волокна: с его увеличением механические свойства ухудшаются.

Из представленных табл.2 данных также можно заключить, что прочность экструдированных образцов такая же, как и у образцов, полученных высокоскоростным уплотнением (266...308 МПа), но

значительно выше прочности образцов, изготовленных прессованием и спеканием (144...164 МПа). В целом, прочность экструдированного материала из медных волокон значительно превышает прочность литой (150...200 МПа), деформированной (250...270 МПа) и экструдированной порошковой (248...252 МПа) меди.



Фиг. 2. Зависимость между относительной плотностью и давлением прессования для волокнистого материала: 1 - медь; 2 - молибден; 3 - вольфрам

Таблица I

Механические свойства экструдированных медноволокнистых образцов

№ образцов	Длина волокна $\xi$ , мм	Диаметр волокна $d$ , мм	Отношение $\xi/d$	Пористость П, %	Температура T, °C	Кoeffициент тяжести, $\lambda$	$\sigma_b$ , МПа	НВ МПа
1	5	0,05	100	15	650	2	251	373
2	10	0,10	100	15	650	2	250	371
3	10	0,05	200	15	650	6	297	445
4	20	0,10	200	15	650	6	245	327
5	10	0,05	200	15	850	2	276	416
6	20	0,10	200	15	850	2	245	327
7	5	0,05	100	15	850	6	320	445
8	10	0,10	100	15	850	6	310	440
9	10	0,05	200	35	650	2	232	340
10	20	0,10	200	35	650	2	230	325
11	5	0,05	100	35	650	6	282	417
12	10	0,10	100	35	650	6	278	400
13	5	0,05	100	35	850	2	253	380
14	10	0,10	100	35	850	2	235	327

15	10	0,05	200	35	850	6	317	450
16	20	0,10	200	35	850	6	319	437

Таблица 2

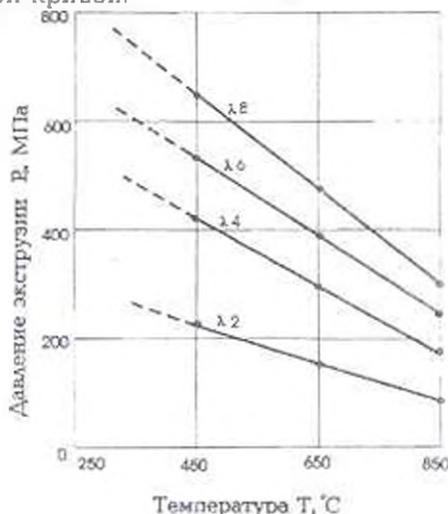
Механические свойства образцов из меди, полученной различными способами [3]

Способ изготовления	$\sigma_b$ , МПа	относительное удлинение $\delta$ , %	относительное сужение, $\psi$ , %
Экструдированный материал из медных волокон после отжига ( $T_3 = 850^\circ\text{C}$ , $\lambda = 4 \dots 6$ ; $T_{от} = 850^\circ\text{C}$ , $\tau = 1,0 \dots 1,5$ ч) $d_b = 0,05$ мм	317...320	36,0...40,5	69...70
$d_b = 0,10$ мм	280...300	38,5...46,0	70...74
Высокоскоростное уплотнение пористых отожженных заготовок из медных волокон с последующим спеканием	270...330	39,0...43,5	-
( $T = 950 \dots 980^\circ\text{C}$ , $\tau = 2,0 \dots 2,5$ ч; $d_b = 0,05$ мм	266...308	39,5...46,0	-
$d_b = 0,10$ мм			
Прессование и спекание ( $980^\circ\text{C}$ ) медных волокон	144...164	-	-
Прессование и спекание, повторное прессование и спекание	270...298	-	-
Заготовка спеченная ( $\theta = 25 \dots 30\%$ ) и экструдированная ( $T_3 = 850^\circ\text{C}$ , $\lambda = 4 \dots 8$ )	248...252	45...52	75...81
Литая медь	150...200	15...25	50
Медь прокатная и отожженная	250...270	40...50	80

Результаты исследований, приведенные в табл. 2, согласованы с формулой (3).

На фиг. 3 показано влияние температуры  $T$  и коэффициента вытяжки  $\lambda$  на давление экструзии  $P_0$  для порошковой и волокнувой меди. Поскольку давление при экструзии является переменной величиной, то за характерную точку для снятия этого параметра нами принято начало

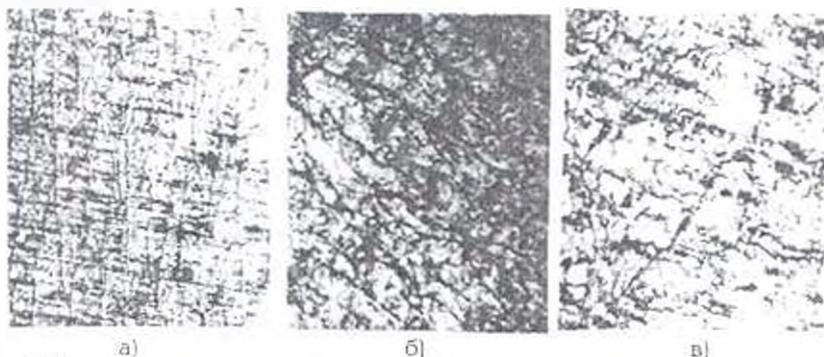
установившегося истечения экструдруемого материала. Следует отметить, что давление для порошковых и волокнистых материалов при одинаковых режимах экструзии совпадают и поэтому они на фиг.3 представлены единой кривой.



Фиг. 3. Графическая зависимость температуры и коэффициента вытяжки  $\lambda$  на давление экструзии волокнистого и порошковой меди

Исследование структурообразования композитов из медных волокон осуществлялось при параметрах экструзии:  $T_3 = 450 \dots 850^\circ\text{C}$ ;  $\lambda = 2 \dots 6$ . Для сравнения изучалась структура экструдированной порошковой меди.

У волокнистой меди по сечению четко выделялись три структурные зоны (фиг. 4).



Фиг. 4. Структура [поперечный срез, х 320] различных зон экструдированного волокнистого образца ( $T_3 = 450^\circ\text{C}$ ;  $\lambda = 6$ ): а — периферийная; б — средняя; в — осевая

Известно, что сечения волокон отличаются практической равноосностью [5]. В процессе экструзии происходит переориентация этих волокон вдоль оси экструзии. Окончательная структура

экструдированного образца зависит от того, какая из этих ориентаций будет преобладающей. При экструзии наибольшие деформации наблюдаются в периферии, наименьшие — в центре. Поэтому в периферийной области (фиг. 4, зона а) волокна ориентируются вдоль оси экструзии, а в центральной части (фиг. 4, зона в) наблюдается равноосность. С увеличением коэффициента вытяжки влияние экструзии на ориентацию волокон возрастает, что сказывается на сужении зоны в) и расширении зоны б).

При экструзии в температурном интервале 450...850 °С наблюдается образование сплошного металлического контакта между отдельными составляющими структуры. На микрошлифах поверхность такого контакта четко выявляется в виде сплошной травленной линии, а металлографический анализ показывает, что независимо от исходной пористости (15-35%) уплотнение образцов происходит практически до беспористой структуры.

Таким образом, применение метода экструзии позволяет получать полукристаллы композиционный материал с практически беспористой ориентированной структурой и высокими механическими свойствами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бальшин М.Ю. Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна. М.: Металлургия, 1972. 336 с.
2. Бальшин М.Ю., Манукян Н.В. Прессование металлического волокна // Металлокерамические материалы и изделия / ЕрПИ. Ереван, 1969. С. 130-132.
3. Петросян А.С. Исследование процессов экструзии, структуры и свойств композиционных материалов: Дис. канд. техн. наук/Ин-т металлургии АН ГрузССР, 1983. — 218 с.
4. Композиционные материалы волокнистого строения. — Киев: Наукова думка, 1970. 403 с.
5. Бальшин Н.Ю., Захарян Н.В. Перекрестное прессование порошковых и волокнистых материалов // Порошковая металлургия. Труды ЕрПИ. 1971. Т.35, вып. 1. С. 89-96.

Государственный инженерный  
университет Армении

Поступила в редакцию  
23.04.2003